

Nelineární optika

Zdroj: Bahaa E.A. Saleh, Malvin Teich

Základy fotoniky, MATFYZPRESS 1994 kap. 19, 21.3

Fundamentals of Photonics, Wiley 2007, kap. 21, 22.5, 23.4

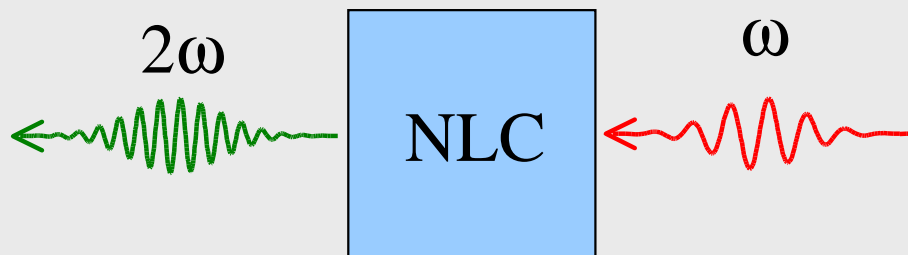
1. Nelineární optická prostředí
2. Nelineární jevy 2. řádu
3. Nelineární jevy 3. řádu
4. Teorie vázaných vln
5. Anizotropní nelineární prostředí
6. Disperzní nelineární prostředí
7. Parametrické a neparametrické jevy
8. Optická bistabilita
9. Optické echo, samoindukovaná transparence, optický soliton, superradiance

Lineární vs. nelineární optická prostředí

Lineární prostředí: $n \neq f(I)$, $\kappa \neq f(I)$,
princip superpozice, $\omega = \text{konst}$,
paprsky se neovlivňují, nelze řídit
jeden svazek druhým ani zesilovat

Laser 1960, vysoké intenzity I ,
nelineární odezva?

Nelineární prostředí: $n = f(I)$, $\kappa = f(I)$,
neplatí princip superpozice, $\omega \rightarrow 2\omega$
jeden svazek lze ovládat druhým,
zesílení, autofokusace, optická paměť apod.



Maxwellovy rovnice \rightarrow jsou lineární!

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathcal{D} = 0,$$

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathcal{B} = 0,$$

V lineárním dielektriku platí materiálové vztahy

$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}$ a $\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$, takže z MR dostaneme

$$\nabla \times \mathcal{B} = \epsilon \mu \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathcal{E} = 0,$$

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathcal{B} = 0,$$

odtud vlnová rovnice (lineární):

$$\nabla^2 \mathcal{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla \cdot \mathcal{E} = 0,$$

kde $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c_0}{n}$ značí rychlost světla

Spektrální rozklad \rightarrow Helmholtzova rovnice:

$$\nabla^2 E(\omega) + k^2 E(\omega) = 0, \quad \text{kde } k = \frac{\omega}{c}$$

V lineárním prostředí je

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P}$$

$$\mathcal{P} = \varepsilon_0 \chi \mathcal{E}$$

$$\rightarrow \text{index lomu } n = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{1 + \chi} = \text{konst}$$

V nelineárním prostředí je

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P} \leftarrow$$

$$\mathcal{P} = f(\mathcal{E})$$

$$\rightarrow \text{index lomu } n = f(I)$$

Záření interaguje s druhým zářením přes nelineární prostředí !

Předpokládejme pro jednoduchost homogenní, izotropní, bezdisperzní **nelineární** prostředí (neuvažujeme polarizaci)

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = f(\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)) = \varepsilon_0 \chi \mathcal{E} + 2d \mathcal{E}^2 + 4\chi^{(3)} \mathcal{E}^3 + \dots \leftarrow \text{Taylorův rozvoj}$$

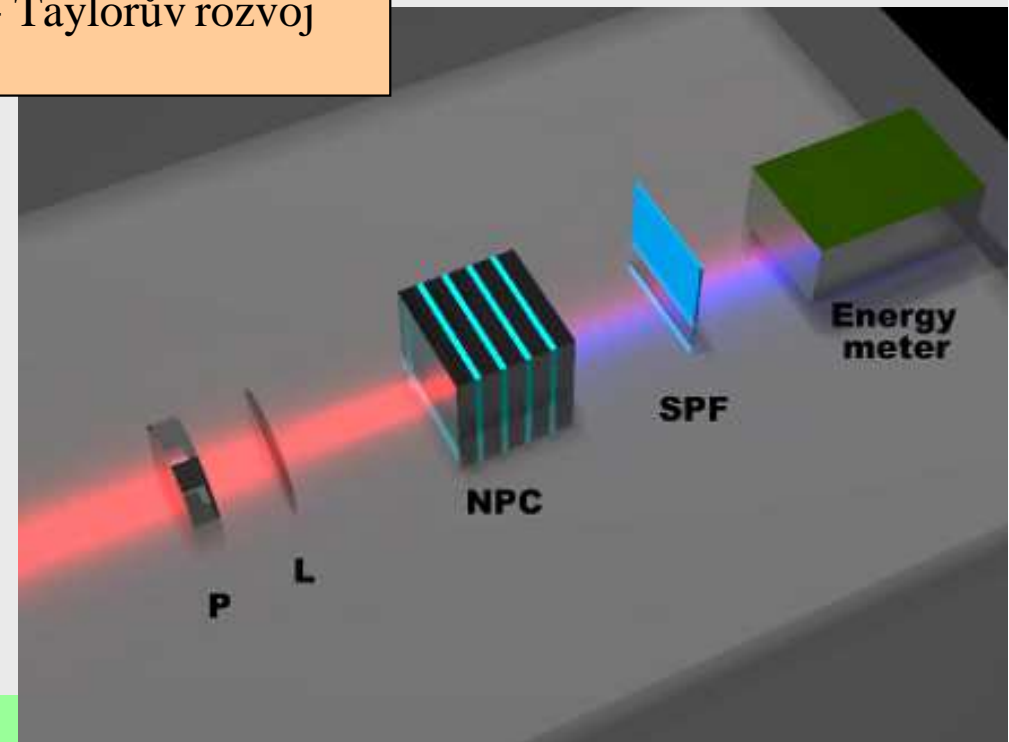
$$\text{typicky : } d \approx 10^{-24} \text{ až } 10^{-21} \text{ C/V}^2$$

$$\text{typicky : } \chi^{(3)} \approx 10^{-34} \text{ až } 10^{-29} \text{ Cm/V}^3$$

$$\text{Požadujeme silnou nelinearitu } \varepsilon_0 \chi \mathcal{E} \approx 2d \mathcal{E}^2,$$

$$\text{proto potřebujeme } \mathcal{E} \approx \varepsilon_0 \chi / d \approx 10^{11} \text{ až } 10^{14} \text{ V/m}$$

$$\text{obvykle postačí již } \mathcal{E} \approx 10^6 \text{ až } 10^8 \text{ V/m}$$



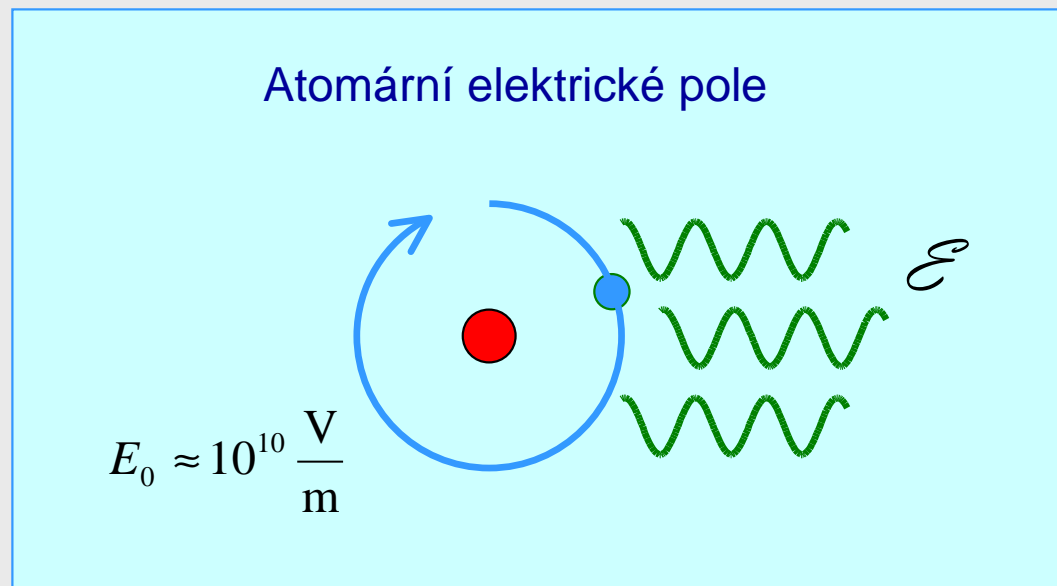
jiní autoři také píší symetričtější rozvoj:

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 (\chi^{(1)} \mathcal{E} + \chi^{(2)} \mathcal{E}^2 + \chi^{(3)} \mathcal{E}^3 + \dots)$$

$$\mathcal{P} = f\left(\frac{\mathcal{E}}{E_0}\right) = c_1 \frac{\mathcal{E}}{E_0} + c_2 \left(\frac{\mathcal{E}}{E_0}\right)^2 + c_3 \left(\frac{\mathcal{E}}{E_0}\right)^3 + \dots \quad \leftarrow \quad \text{Taylorův rozvoj}$$

řádově platí: $\frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(2)}} \approx \frac{\chi^{(2)}}{\chi^{(3)}} \approx \dots \approx E_0 \approx 10^{10} \frac{\text{V}}{\text{m}}$

jednotlivé členy klesají pro $\mathcal{E} \approx 10^6 \text{ V/m}$ s faktorem $\frac{\mathcal{E}}{E_0} \approx 10^{-4}$



Nelinearita ve fyzice:

rázové jevy v akustice

přilivová vlna

solitony na vodě

zkreslení signálu

anharmoničnost

anizochronnost kyvadla

hystereze, paměť prostředí

multistabilita

saturace

usměrnění napětí

demodulace signálu

deterministický chaos

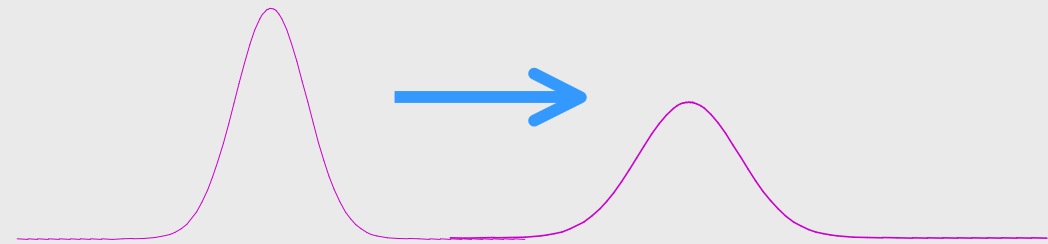
turbulence

synergie, samoorganizace

perturbace a nestabilita

gravitačních orbit, prstenců, os

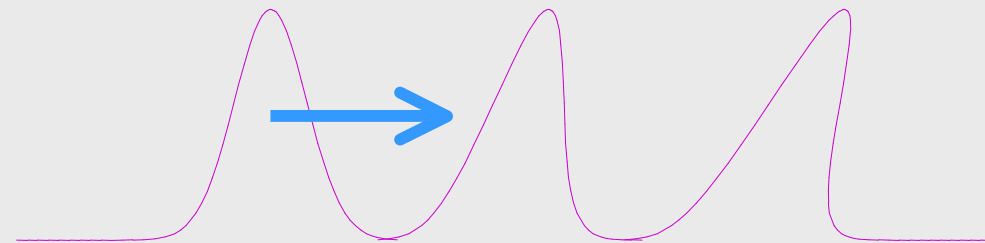
...



disperze v lineárním prostředí



solitony v nelineárním prostředí



přivalová (rázová) vlna

Nelinearita ve fyzice

Nelinearita → zkreslení signálu $x = A \sin \omega t$, nové kmitočty $2\omega, 3\omega, \omega_1 \pm \omega_2, \dots$

např.

$$y = x + x^2 \text{ vede na } 2\omega \rightarrow y = A \sin \omega t + A^2 \sin^2 \omega t = A \sin \omega t + \frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} A^2 \cos 2\omega t$$

$$y = y + x^3 \text{ vede na } 3\omega \rightarrow y = A \sin \omega t + A^3 \sin^3 \omega t = A \sin \omega t - \frac{1}{4} A^3 \sin 3\omega t + \frac{3}{4} A^3 \sin \omega t$$

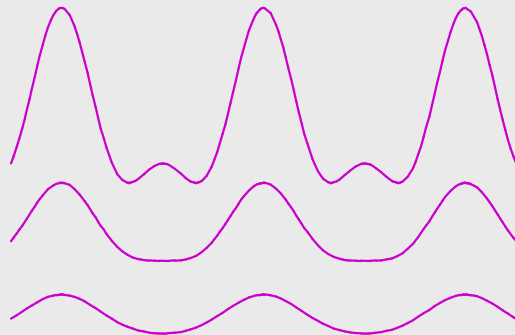
Zkreslení harmonického signálu

kvadratická nelinearita

$$y = x + x^2$$

signál

$$x = A \sin \omega t$$



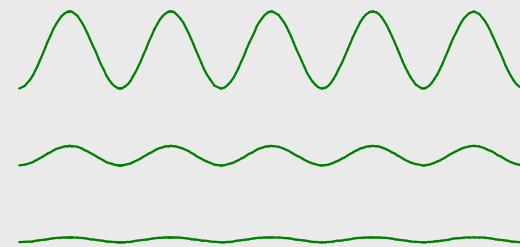
amplituda

$$A = 1$$

$$A = 0.5$$

$$A = 0.25$$

odchylka od harmonického signálu

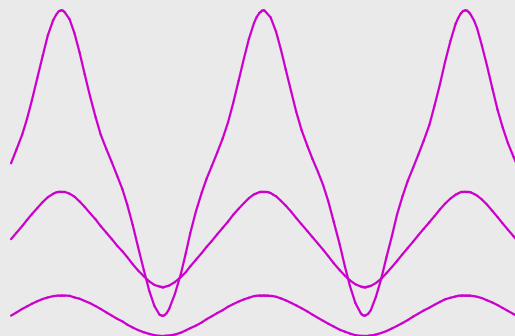


kubická nelinearita

$$y = x + x^3$$

signál

$$x = A \sin \omega t$$



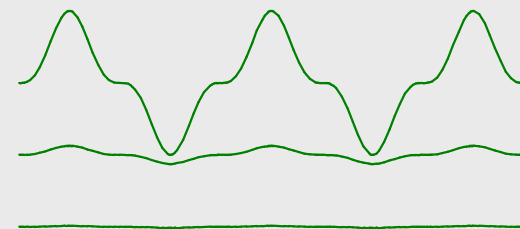
amplituda

$$A = 1$$

$$A = 0.5$$

$$A = 0.25$$

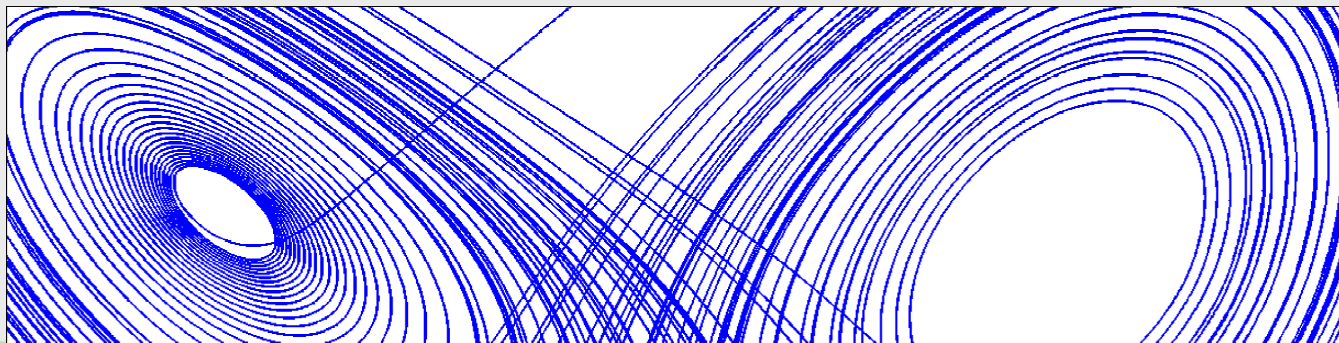
odchylka od harmonického signálu



fraktály

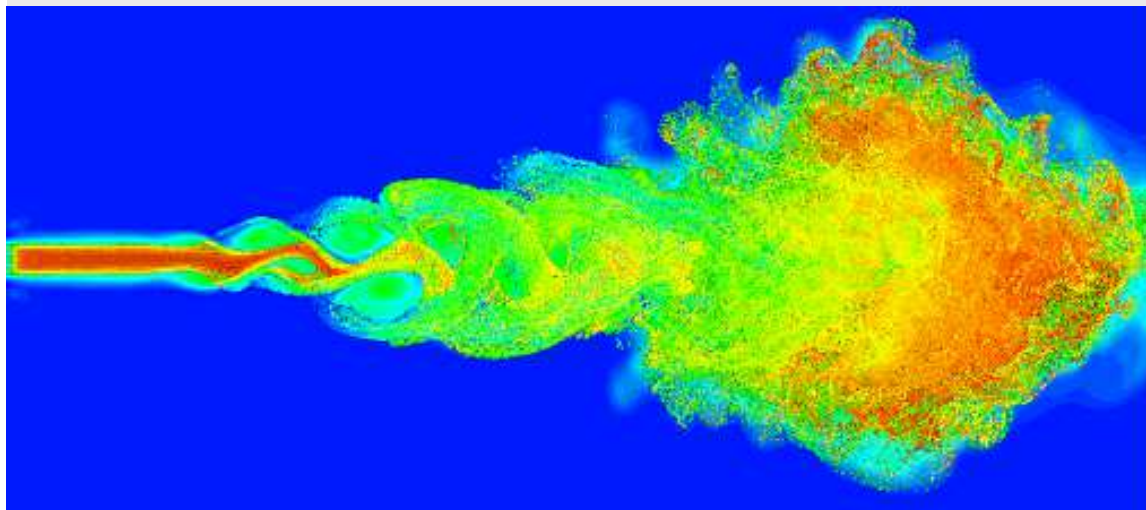


chaos

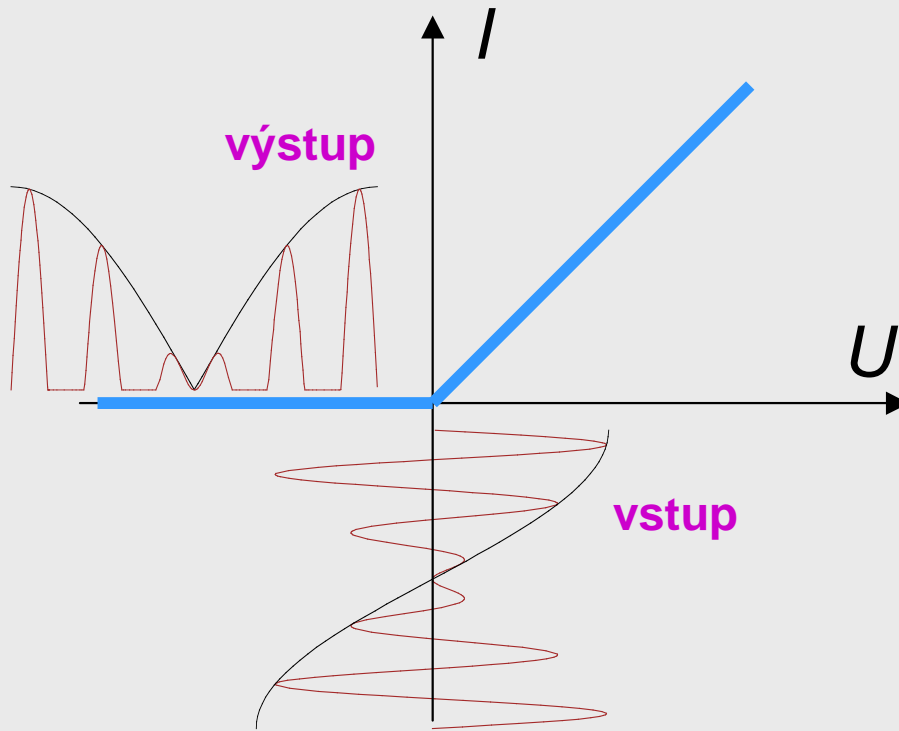




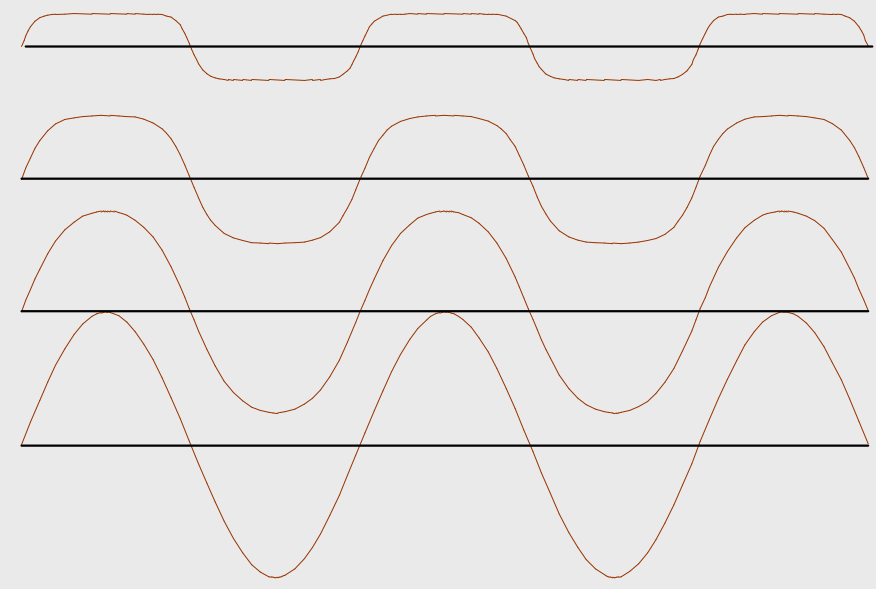
turbulence



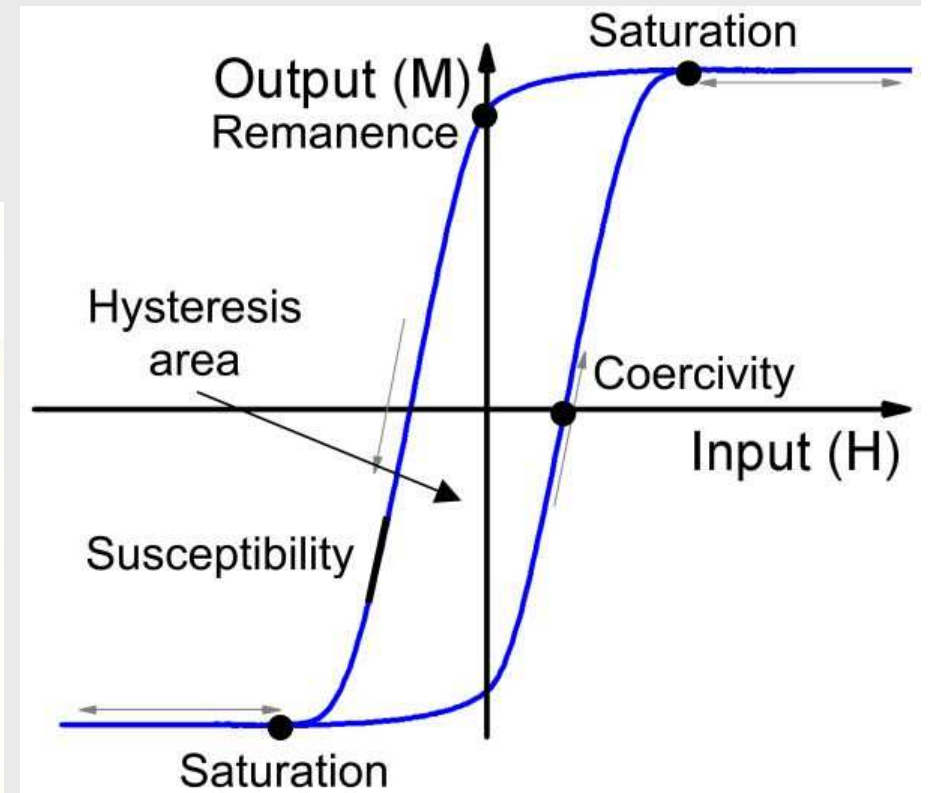
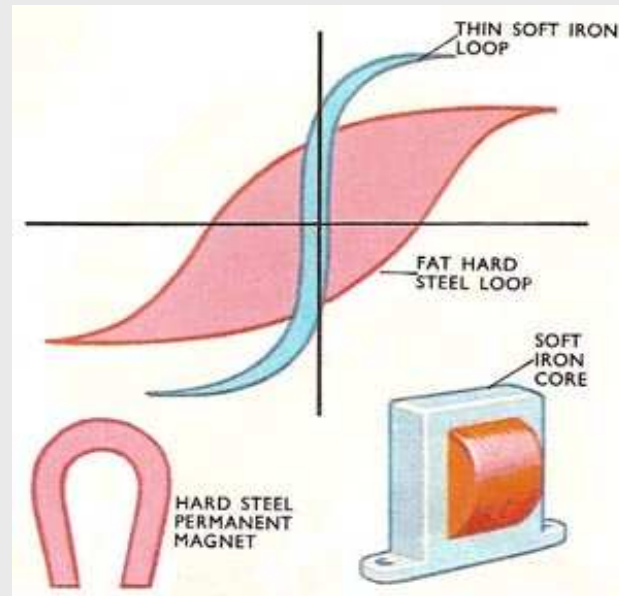
demodulace AM



saturace



hystereze a saturace



Intenzita a amplituda světla

$$\mathcal{E}(t) = \text{Re}\{E(\omega)e^{i\omega t}\} = \frac{1}{2}(E(\omega)e^{i\omega t} + E(\omega)^*e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2}(E(\omega)e^{i\omega t} + E(-\omega)e^{-i\omega t})$$

$$I = \overline{\mathcal{E} \times \mathcal{H}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \overline{\mathcal{E}^2} = \frac{\overline{\mathcal{E}^2}}{\eta} = n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \overline{\mathcal{E}^2} = n \frac{\overline{\mathcal{E}^2}}{\eta_0} = n \frac{|E|^2}{2\eta_0}$$

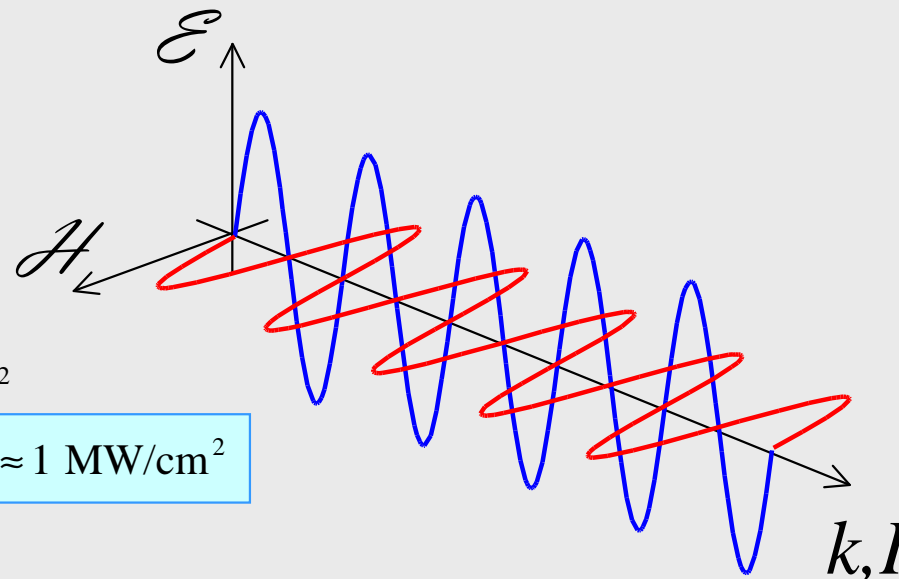
kde $\eta_0 \approx 377 \Omega$ je impedance vakua

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{\eta_0}{n}$$

pro $E \approx 3 \times 10^3 \text{ V/m}$ vychází $I \approx 10^4 \text{ W/m}^2 \approx 1 \text{ W/cm}^2$

pro $E \approx 10^{10} \text{ V/m}$ (pole v atomu) $\rightarrow I \approx 10^{17} \text{ W/m}^2 \approx 10^{13} \text{ W/cm}^2$

nelinearita významná již pro $A \approx 3 \times 10^6 \text{ V/m} \rightarrow I \approx 10^{10} \text{ W/m}^2 \approx 1 \text{ MW/cm}^2$

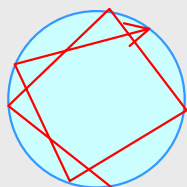


sluneční světlo ($1050 \text{ W/m}^2 * 93 \text{ lm/W} = 98000 \text{ lx}$):

$$I \approx 1400 \text{ W/m}^2 = 0.14 \text{ W/cm}^2 \rightarrow E \approx 1000 \text{ V/m}$$

100 W žárovka ve vzdálenosti $r = 1 \text{ m}$:

$$I = \Phi / S = \Phi / 4\pi r^2 \approx 8 \text{ W/m}^2 \rightarrow E \approx 80 \text{ V/m} \quad (100 \text{ lx})$$



foton 555 nm v dutince 1 mm^3 :

$$I = \Phi / S \approx \hbar\omega c / a^3 \approx 0.1 \text{ W/m}^2 \quad (70 \text{ lx})$$

Energie fotonu $E = \hbar\omega$

hustota fotonového toku $\phi = \frac{I}{\hbar\omega}$ [fotonů/s]

Stručná historie nelineární optiky:

1875 John Kerr (DC Kerr effect)

1890 Friedrich Pockels

1922 Léon Brillouin BS

1928 Chandrasekhara Venkata Raman RS

1960 Theodore H. Maiman - laser

→ 1961 Peter Franken SHG

1961 2 photon absorption

1962 sum and difference frequency generation SFG and DFG

1962 Raman laser

1962 Woodbury a Ng (stimulovaný Ramanův rozptyl SRS)

1962 optická rektifikace

1964 stimulovaný SBS (Chiao et al.)

1965 OPA and OPO

1967 THG (New et al.)

1980 rozmach NLO, technologie krystalů

1973 temporal soliton (by Hasegawa and Tappert)

1974 space soliton (by Ashkin and Bjorkholm)

1987 dark soliton in fiber

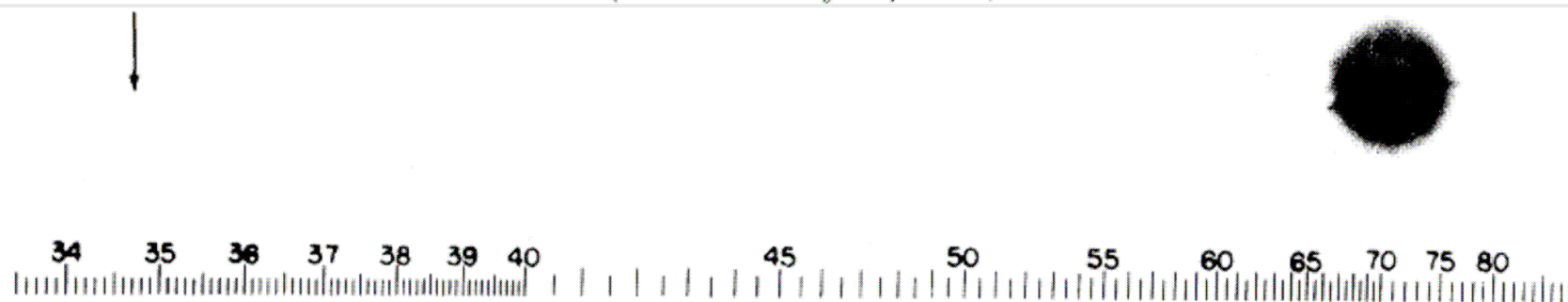
1988 soliton pulses over 4 000 km by Raman gain (Mollenauer et al.)

GENERATION OF OPTICAL HARMONICS*

P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, and G. Weinreich

The Harrison M. Randall Laboratory of Physics, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan

(Received July 21, 1961)



Franken ozařoval roku 1961 pulzním rubínovým laserem křemennou destičku a spektroskopem prokázal, že v destičce vzniká světlo dvojnásobné frekvence.

Šipka u 347 nm označovala slabou šedou tečku vytvořenou procesem SHG. Obraz čerpacího svazku u 694 nm je tak velký vlivem přesvětlení fotografické desky.

Ironií osudu je, že editor Phys. Rev. Lett. vymazal šedý flíček v místě šipky v domnění, že jde o nepatřičnou šmouhu, a tak přelomový důkaz SHG smazal.

Vlnová rovnice

$$\nabla^2 \mathcal{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2}$$

$$\mathcal{P} = \epsilon_0 \chi \mathcal{E} + \mathcal{P}_{\text{NL}}$$

$$\mathcal{P}_{\text{NL}} = 2d\mathcal{E}^2 + 4\chi^{(3)}\mathcal{E}^3 + \dots$$

$$\nabla^2 \mathcal{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}_{\text{NL}}}{\partial t^2} = -\mathcal{S}$$

$$c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$c = 1/\sqrt{\epsilon \mu_0} = c_0 / n$$

1. Bornova aproximace

Malá nelinearita, malá korekce k lineární vlnové rovnici

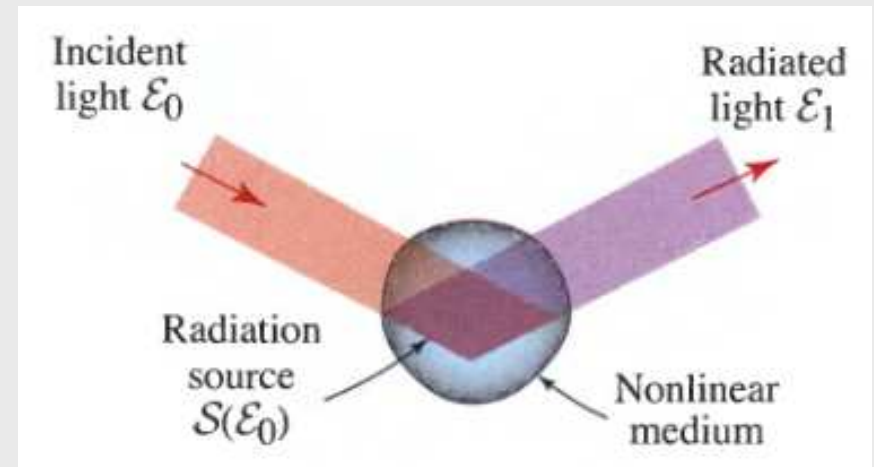
$$\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{E}_0) \rightarrow \mathcal{E}_1$$

$$\mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{E}_1) \rightarrow \mathcal{E}_2$$

...

2. Teorie vázaných vln

Omezený počet vln, silná interakce, ostatní zanedbáme
(později se jí věnuje celá kapitola)



Nástin kolineárního řešení vlnové rovnice

$$\nabla^2 \mathcal{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}_{\text{NL}}}{\partial t^2} = -\mathcal{S} \quad \leftarrow \text{Vlnová rovnice}$$

dosadíme za $\mathcal{E} = \text{Re} \left(\sum_m E_m e^{i\omega_m t} \right)$ a vypočteme \mathcal{S} a porovnáme stejné frekvenční složky ω_m

$$\nabla^2 E_m + k_m^2 E_m = -S_m = -\mu_0 \omega_m^2 P_{\text{NL}}(\omega_m), \quad \leftarrow \text{soustava Helmholtzových rovnic}$$

$$\text{kde } k_m = \frac{\omega_m}{c_m} = \frac{n_m \omega_m}{c_0}$$

pro koherentní zdroj $S_m = S e^{-ik_s z}$ a malé rozladění $\Delta k = k_m - k_s$

očekáváme synchronní řešení: $E_m = E e^{-ik_s z}$, po dosazení máme:

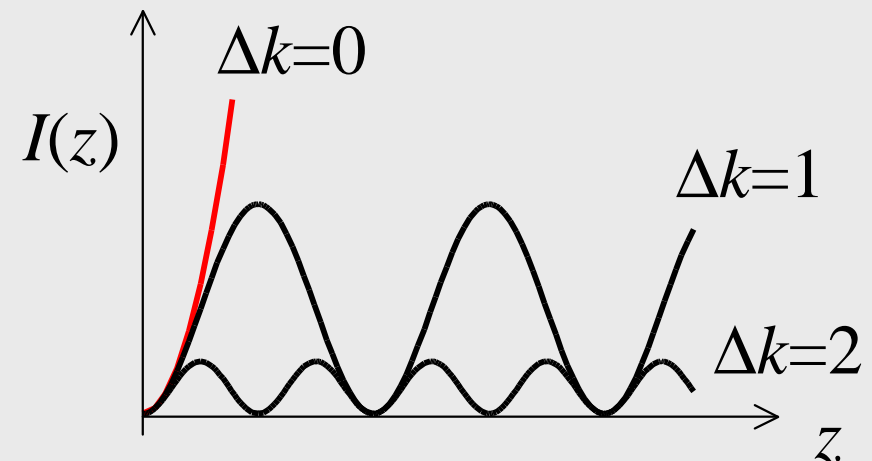
$$-2ik_s \frac{dE}{dz} + (k_m^2 - k_s^2)E \approx -2ik_s \frac{dE}{dz} + 2k_s \Delta k E = -S,$$

mimorezonanční řešení osciluje:

$$E = -\frac{S}{2k_s \Delta k} (1 - e^{-i\Delta k z}) \rightarrow I = \frac{S^2}{k_s^2 \Delta k^2} \sin^2 \frac{\Delta k z}{2}$$

rezonanční řešení ($\Delta k \rightarrow 0$) monotónně roste:

$$E_R = \frac{S z}{2ik_s} \rightarrow I_R = \frac{S^2 z^2}{4k_s^2}$$



Nelineární optické jevy druhého řádu

$$\mathcal{P}_{\text{NL}} = 2d\mathcal{E}^2$$

$$\mathcal{E}(t) = \text{Re}\{E(\omega)e^{i\omega t}\} = \frac{1}{2}(E(\omega)e^{i\omega t} + E(\omega)^*e^{-i\omega t})$$

$$\mathcal{P}_{\text{NL}}(t) = P_{\text{NL}}(0) + \text{Re}\{P_{\text{NL}}(2\omega)e^{2i\omega t}\}$$

$$P_{\text{NL}}(0) = dE(\omega)E(\omega)^* \leftarrow \text{optické usměrnění}$$

$$P_{\text{NL}}(2\omega) = dE(\omega)E(\omega) \leftarrow \text{generace druhé harmonické}$$

Generování druhé harmonické

$$E(2\omega) \propto S(2\omega)L$$

$$I(2\omega) \propto |S|^2 L^2 \propto |P_{\text{NL}}(2\omega)|^2 L^2 = d^2 L^2 I^2$$

$$\eta_{\text{SHG}} = \frac{I(2\omega)}{I(\omega)} = C^2 L^2 I = C^2 L^2 \frac{P}{A}$$

účinnost roste s interakční délkou L , intenzitou I , a nelinearitou d

Optimalizace poměru L^2/A fokusací (problém s difrakcí)

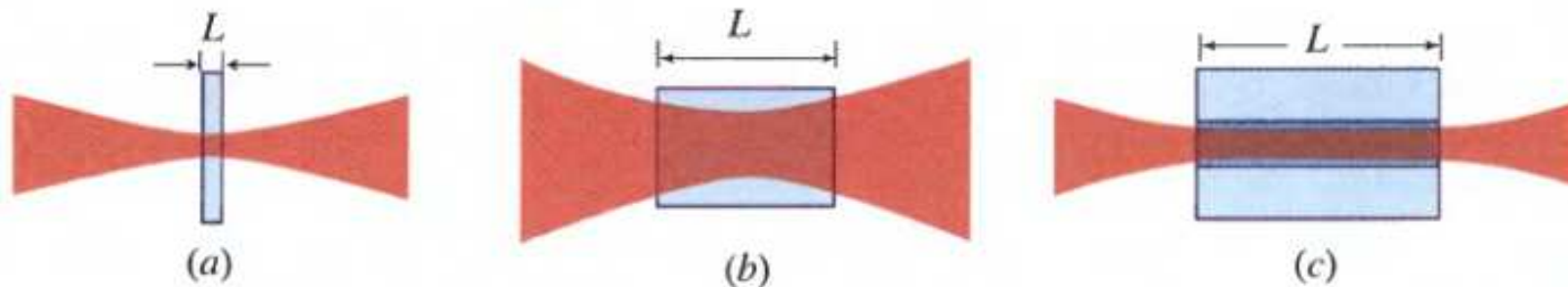


Figure 21.2-2 Interaction volume in a (a) thin crystal, (b) thick crystal, and (c) waveguide.

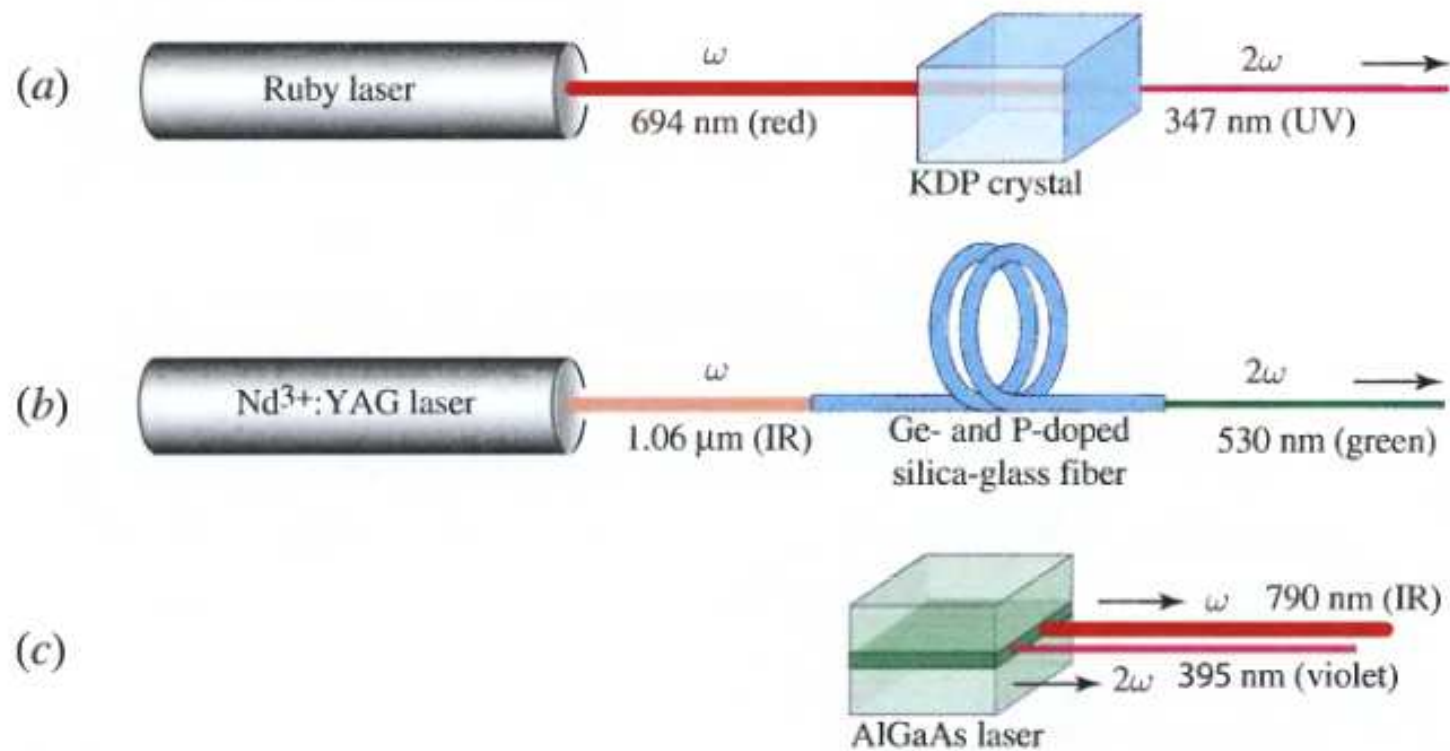


Figure 21.2-3 Optical second-harmonic generation (a) in a bulk crystal; (b) in a glass fiber; (c) within the cavity of a laser diode.

Optická rektifikace OR, optické usměrnění

Průchodem impulzu řádu 1 MW se generuje ss napětí řádu 0.1 mV

$$\mathcal{P}_{\text{NL}}(0) = d E(\omega) E(\omega)^* \leftarrow \text{optické usměrnění}$$

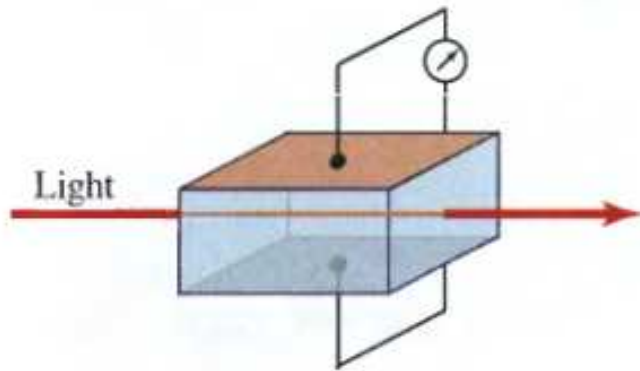


Figure 21.2-4 The transmission of an intense beam of light through a nonlinear crystal generates a DC voltage across it.

Elektrooptický jev (Pockelsův jev)

Světelný svazek ovládáme ss napětím

$$\mathcal{P}_{\text{NL}} = 2d\mathcal{E}^2$$

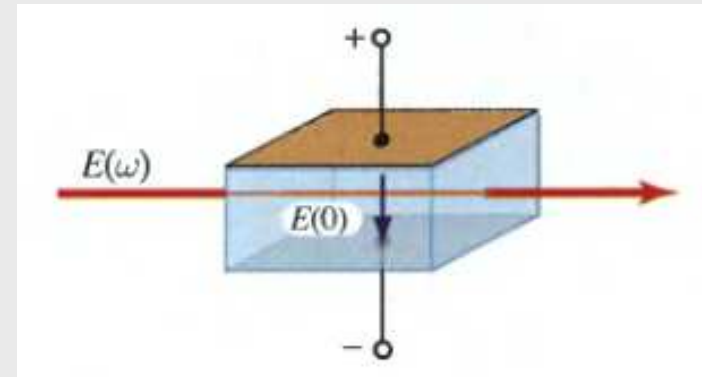
$$\mathcal{E}(t) = E(0) + \text{Re}\{E(\omega)e^{i\omega t}\}$$

$$\mathcal{P}_{\text{NL}}(t) = P_{\text{NL}}(0) + \text{Re}\{P_{\text{NL}}(\omega)e^{i\omega t}\} + \text{Re}\{P_{\text{NL}}(2\omega)e^{2i\omega t}\}$$

$$P_{\text{NL}}(0) = d(2E(0)^2 + |E(\omega)|^2)$$

$$P_{\text{NL}}(\omega) = 4dE(0)E(\omega) \leftarrow \text{Pockelsův jev}$$

$$P_{\text{NL}}(2\omega) = dE(\omega)E(\omega)$$



Obvykle předpokládáme

$$|E(\omega)| \ll |E(0)| \rightarrow P_{\text{NL}}(2\omega) \ll P_{\text{NL}}(\omega)$$

Nelineární polarizaci lze chápat jako korekci

$$P_{\text{NL}}(\omega) = 4dE(0)E(\omega) = \varepsilon_0 \Delta\chi E(\omega)$$

k lineární polarizaci

$$P_{\text{L}}(\omega) + P_{\text{NL}}(\omega) = \varepsilon_0 (\chi + \Delta\chi) E(\omega)$$

$\Delta\chi$ značí změnu susceptibility lineární polarizace

$$n^2 = 1 + \chi \rightarrow 2n\Delta n = \Delta\chi$$

$$\Delta n = \frac{\Delta\chi}{2n} = \frac{2d}{n\varepsilon_0} E(0)$$

Přiloženým napětím $E(0)$ lze měnit index lomu prostředí o Δn

Třívlnové směšování TWM

Frekvenční konverze (generace součtové a rozdílové frekvence) SFC,DFC

$$\mathcal{P}_{\text{NL}} = 2d\mathcal{E}^2$$

$$\mathcal{E}(t) = \text{Re}\{E(\omega_1)e^{i\omega_1 t}\} + \text{Re}\{E(\omega_2)e^{i\omega_2 t}\}$$

\mathcal{P}_{NL} obsahuje 5 frekvenčních složek s amplitudami

$$P_{\text{NL}}(0) = d\left(|E(\omega_1)|^2 + |E(\omega_2)|^2\right)$$

$$P_{\text{NL}}(2\omega_1) = dE(\omega_1)E(\omega_1) \leftarrow \text{SHG}$$

$$P_{\text{NL}}(2\omega_2) = dE(\omega_2)E(\omega_2) \leftarrow \text{SHG}$$

$$P_{\text{NL}}(\omega_1 + \omega_2) = 2dE(\omega_1)E(\omega_2) \leftarrow \text{up - conversion (SFG)}$$

$$P_{\text{NL}}(|\omega_1 - \omega_2|) = 2dE(\omega_1)E^*(\omega_2) \leftarrow \text{down - conversion (DFG)}$$

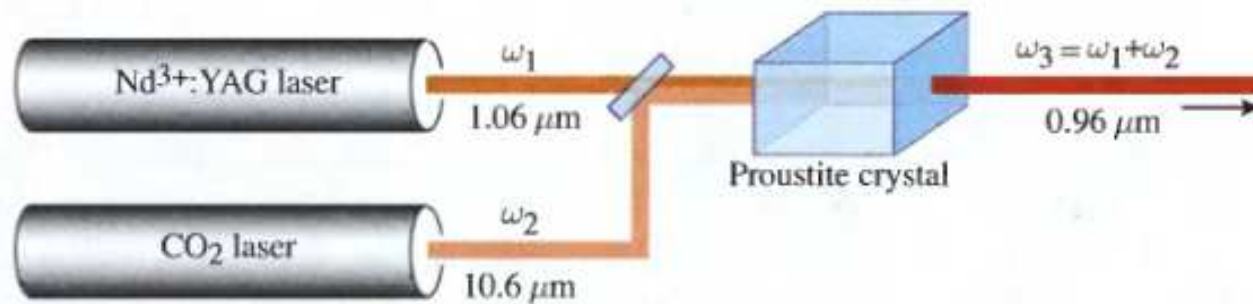


Figure 21.2-6 An example of sum-frequency generation (SFG), also called frequency up-conversion, in a nonlinear crystal.

Fázová synchronizace

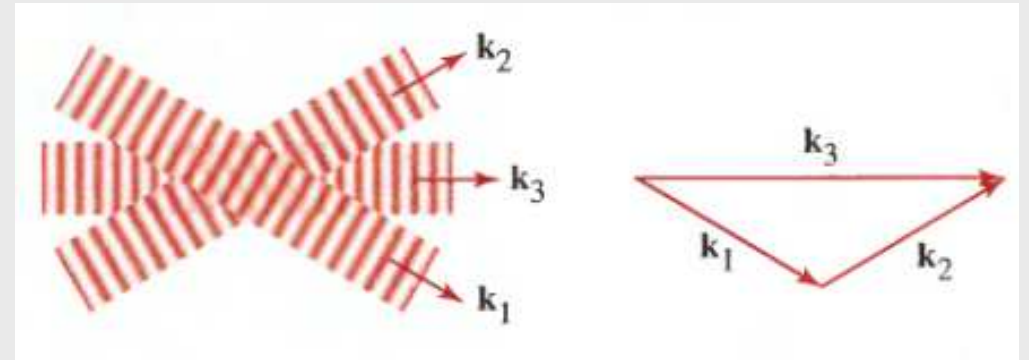
$$E(\omega_1) = A_1 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}, E(\omega_2) = A_2 e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}$$

pak

$$P_{\text{NL}}(\omega_1 + \omega_2) = 2d E(\omega_1) E(\omega_2) = 2d A_1 A_2 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}$$

$$P_{\text{NL}}(\omega_3) = 2d A_1 A_2 e^{-i(\mathbf{k}_3 - \Delta\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}},$$

$$\text{kde } k_3 = n_3 \omega_3 / c \quad \text{a} \quad \Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$$



$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ← frekvenční podmínka

$\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ ← fázová podmínka → $n_3 \omega_3 \mathbf{n}_3 = n_1 \omega_1 \mathbf{n}_1 + n_2 \omega_2 \mathbf{n}_2$

Tyto podmínky zaručí koherentnost všech 3 vln a jejich silnou vzájemnou interakci

Fázová synchronizační podmínka $\Delta\mathbf{k} = 0$ se dosahuje vhodnou volbou polarizace, natočením krystalu nebo změnou teploty

Třívlňový proces - Třívlňové směšování TWM

Směšování dvou svazků ω_1 a ω_2 generuje třetí svazek $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, pokud je splněna fázová podmínka. Pak současně běží i konverze dolů $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ a $\omega_1 = \omega_3 - \omega_2$

→ interagují tedy 3 vlny

Speciálně degenerovaný proces $\omega_1 = \omega_2$ a $\omega_3 = 2\omega_1$ dává druhou harmonickou $\omega_3 = 2\omega_1$ nebo subharmonickou $\omega_1 = \omega_3 - \omega_1 = \omega_3 / 2$

→ interagují tedy pouze 2 vlny $\omega + \omega = 2\omega$

Třívlňový proces = **Parametrická interakce:**

OFC Frekvenční konvertor: vztupná konverze $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$

sestupná konverze $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$

OPA Parametrický zesilovač ω_1 , čerpací vlna ω_3 , signálová vlna ω_1 a jalová vlna ω_2

OPO Parametrický oscilátor ω_1 , zesilovač se zpětnou vazbou

SPDC Spontánní parametrický downkonvertor (generátor fotonových párů $\omega_1 + \omega_2$)

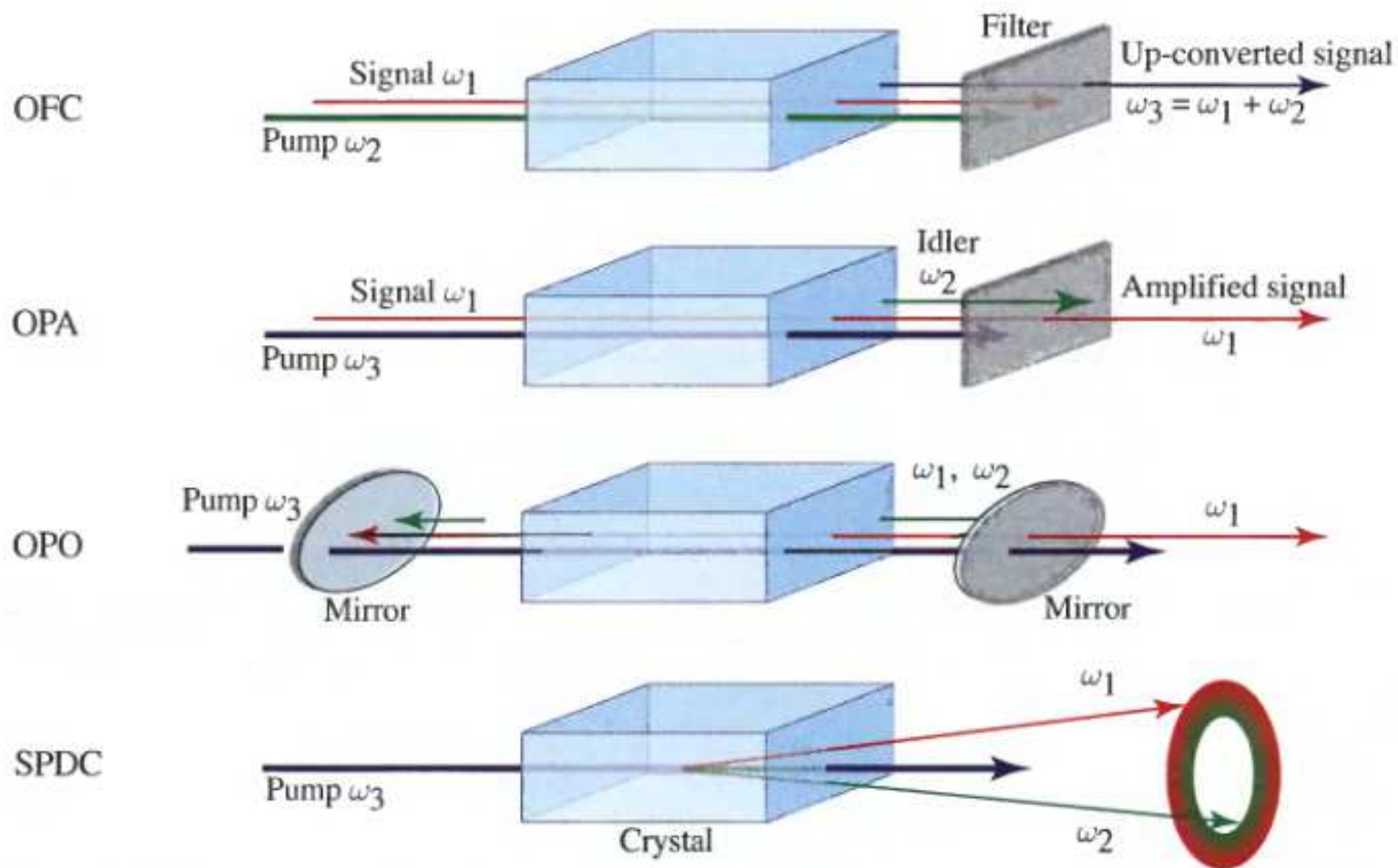


Figure 21.2-8 Optical parametric devices: optical frequency converter (OFC); optical parametric amplifier (OPA); optical parametric oscillator (OPO); spontaneous parametric down-converter (SPDC).

Třívlnový proces jako interakce fotonů

$$\hbar\omega_3 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 \leftarrow \text{zákon zachování energie}$$

$$\hbar\mathbf{k}_3 = \hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2 \leftarrow \text{zákon zachování hybnosti}$$

Energetický diagram

up-conversion

down-conversion

laser

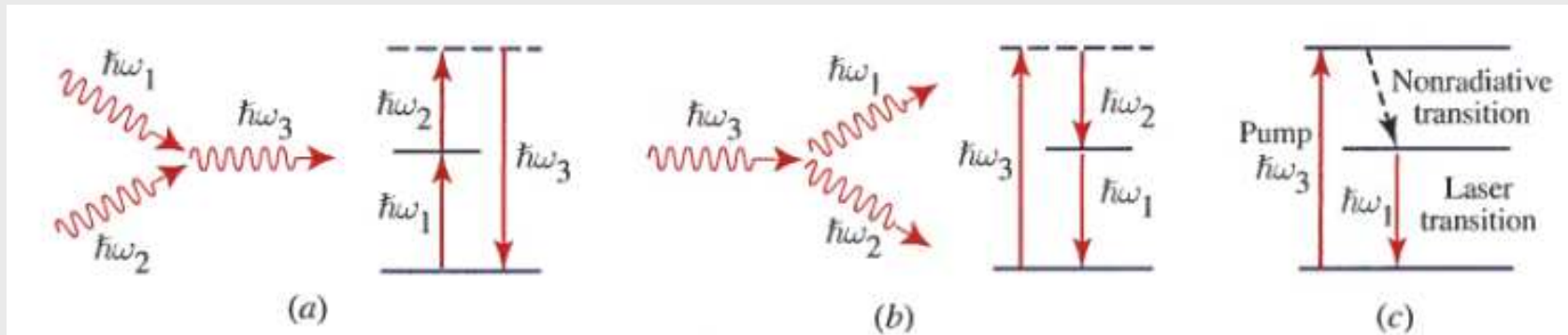


Figure 21.2-9 Comparison of parametric processes in a second-order nonlinear medium and laser action. (a) Annihilation of two low-frequency photons and creation of one high-frequency photon. The dashed line for the upper level indicates that it is virtual. (b) Annihilation of one high-frequency photon and creation of two low-frequency photons. (c) Optically pumped 3-level laser, a nonparametric process in which the medium participates in energy transfer.

Zákon zachování počtu fotonů $\Delta\phi_3 = -\Delta\phi_1 = -\Delta\phi_2 \leftarrow$ Fotonový tok

$$\frac{d\phi_3}{dz} = -\frac{d\phi_1}{dz} = -\frac{d\phi_2}{dz}$$

a protože $I = \hbar\omega\phi$

Manley-Roweovy relace

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{I_3}{\omega_3} \right) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{I_1}{\omega_1} \right) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{I_2}{\omega_2} \right)$$

odtud také Zákon zachování energie

$$I_1 + I_2 + I_3 = \hbar\omega_1\phi_1 + \hbar\omega_2\phi_2 + \hbar\omega_3\phi_3 = \text{konst}$$

Fázová synchronizace FM a ladící křivky

V disperzním prostředí synchronizační podmínka obecně:

$$n_3 \omega_3 \mathbf{n}_3 = n_1 \omega_1 \mathbf{n}_1 + n_2 \omega_2 \mathbf{n}_2$$

po umocnění $n_3^2 \omega_3^2 = n_1^2 \omega_1^2 + n_2^2 \omega_2^2 + 2n_1 n_2 \omega_1 \omega_2 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$, odtud

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \frac{n_3^2 \omega_3^2 - n_1^2 \omega_1^2 - n_2^2 \omega_2^2}{2n_1 n_2 \omega_1 \omega_2} = \frac{(n_3^2 - n_1^2) \omega_1^2 + (n_3^2 - n_2^2) \omega_2^2 + 2n_3^2 \omega_1 \omega_2}{2n_1 n_2 \omega_1 \omega_2},$$

kde jsme dosadili za $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$

Pro normální disperzi je ale $(n_3^2 - n_1^2) > 0$ a $(n_3^2 - n_2^2) > 0$ a $n_3^2 > n_1 n_2$, tedy

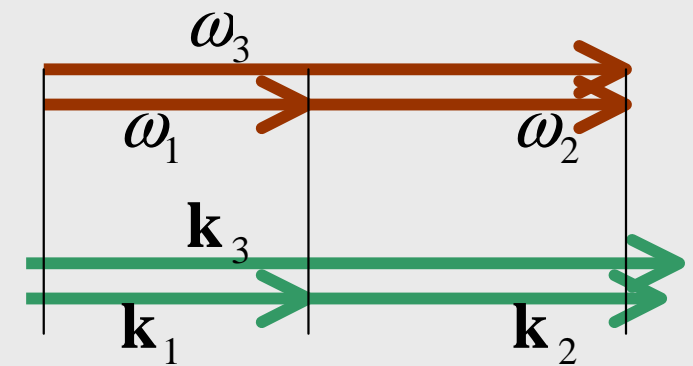
$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \frac{(n_3^2 - n_1^2) \omega_1^2 + (n_3^2 - n_2^2) \omega_2^2 + 2n_3^2 \omega_1 \omega_2}{2n_1 n_2 \omega_1 \omega_2} > \frac{2n_3^2 \omega_1 \omega_2}{2n_1 n_2 \omega_1 \omega_2} = \frac{n_3^2}{n_1 n_2} > 1$$

takže synchronizační podmínku nelze splnit!

Pro bezdisperzní prostředí je $n_1 = n_2 = n_3$, takže

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 1 \rightarrow \text{splňuje pouze kolineární konfigurace } \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$$

Pro anomální disperzi však lze splnit synchronizační podmínku.



Pro normální disperzi nelze synchronizační podmínku splnit!

→

Je v rozporu s trojúhelníkovou nerovností $k_1 + k_2 > k_3$

V bezdisperzním prostředí

→

jen při kolineární konfiguraci!

Pro anomální disperzi lze synchronizační podmínku splnit!

Fázová synchronizace dvojlomem v kolineárním případě

Podmínka $n_3\omega_3 = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ je automaticky splněna v bezdisperzním prostředí $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ale nelze ji splnit v monotónně disperzním prostředí :

Opravdu, podmínku $n_3\omega_3 = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ lze upravit

$$n_3\omega_3 - n_2\omega_3 = n_1\omega_1 + n_2\omega_2 - n_2\omega_3$$

$$(n_3 - n_2)\omega_3 = n_1\omega_1 - n_2(\omega_3 - \omega_2) = n_1\omega_1 - n_2\omega_1$$

$$(n_3 - n_2)\omega_3 = (n_1 - n_2)\omega_1$$

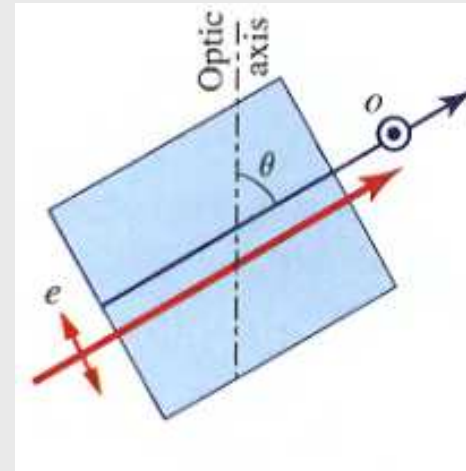
ovšem $(n_3 - n_2) > 0$ a $(n_1 - n_2) < 0$ mají opačná znaménka!

→ **V disperzním prostředí proto nutno použít anizotropní krystal a různé polarizace**

Pro jednoosý krystal platí :

o řádný paprsek $n(\omega) = n_o(\omega) = \text{konst}$

e mimořádný paprsek $\frac{1}{n^2(\theta, \omega)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2(\omega)} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2(\omega)}$



Směšování typu I

– stejné polarizace s+i (o+o → e pro negativní $n_e < n_o$ a e+e → o pozitivní $n_e > n_o$ krystal)

Směšování typu II

– kolmé polarizace s+i (o+e → e pro negativní $n_e < n_o$ a o+e → o pozitivní $n_e > n_o$ krystal)

Kolineární typ I generace druhé harmonické pozitivní krystal ($e+e \rightarrow o$)

Pro $\omega_1 = \omega_2$ a $\omega_3 = 2\omega_1$ vede synchronizační podmínka na $n_3 = n_1$

neboli na

$$\frac{1}{n_o^2(2\omega)} = \frac{\cos^2\theta}{n_o^2(\omega)} + \frac{\sin^2\theta}{n_e^2(\omega)} \quad \text{odtud} \quad \sin^2\theta = \frac{\frac{1}{n_o^2(\omega)} - \frac{1}{n_o^2(2\omega)}}{\frac{1}{n_o^2(\omega)} - \frac{1}{n_e^2(\omega)}}$$

Např. pro eeo KDP 694 nm \rightarrow 347 nm je $\theta = 52^\circ$
nebo pro ooe KDP 1060 nm \rightarrow 530 nm je $\theta = 41^\circ$

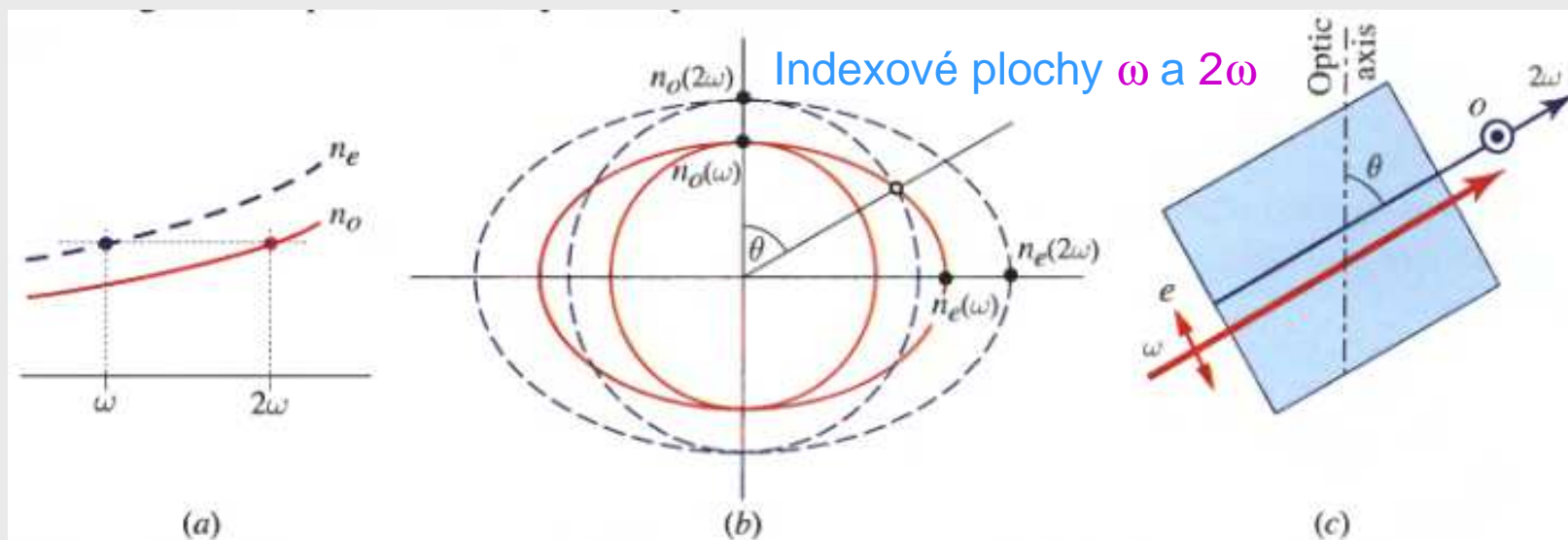


Figure 21.2-10 Phase matching in e-e-o SHG. (a) Matching the index of the e wave at ω with that of the o wave at 2ω . (b) Index surfaces at ω (solid curves) and 2ω (dashed curves) for a uniaxial crystal. (c) The wave is chosen to travel at an angle θ with respect to the crystal optic axis, such that the extraordinary refractive index $n_e(\theta, \omega)$ of the ω wave equals the ordinary refractive index $n_o(2\omega)$ of the 2ω wave.

Kolineární optický parametrický oscilátor OPO

Synchronizační podmínky :

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

$$\omega_3 n(\theta, \omega_3) = \omega_1 n_o(\omega_1) + \omega_2 n_o(\omega_2) \leftarrow \text{typ I } ooe \quad e \rightarrow o+o$$

nebo

$$\omega_3 n(\theta, \omega_3) = \omega_1 n(\theta, \omega_1) + \omega_2 n_o(\omega_2) \leftarrow \text{typ II } eoe \quad e \rightarrow e+o$$

tj. 2 rovnice pro 3 neznámé $\theta, \omega_1, \omega_2$
 → jeden parametr volný, např. θ
 → řešení pouze numericky nebo graficky

Ladící křivky pro BBO krystal

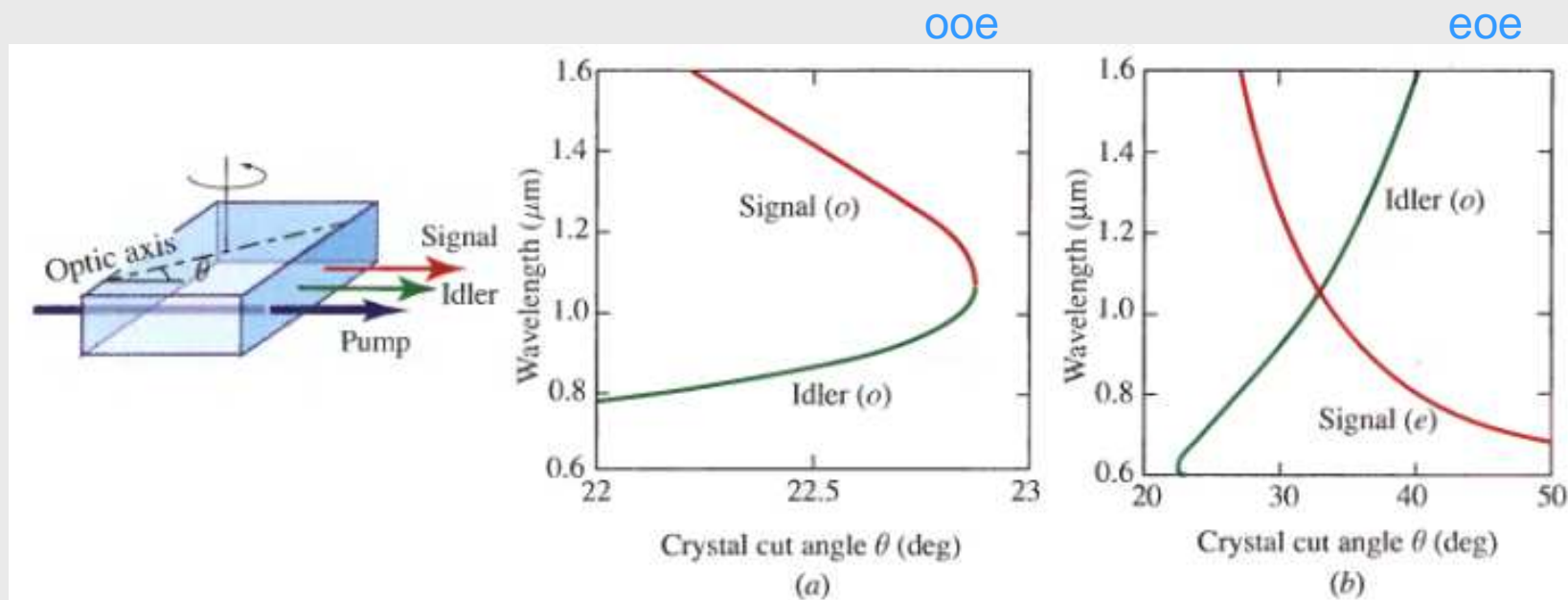


Figure 21.2-11 Tuning curves for a collinear OPO using a BBO crystal and a 532-nm pump, which is readily obtained from a frequency doubled Nd:YAG laser (a) Type I, and (b) Type II.

Analýza synchronizační podmínky :

Vliv natočení krystalu $\Delta\theta \leftarrow$ pro typ I ooe $e \rightarrow o+o$

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = \text{konst}$$

$$\omega_3 n_3(\theta) = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2$$

$$\Delta\omega_3 = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 = 0 \rightarrow \Delta\omega_2 = -\Delta\omega_1$$

$$\omega_3 \Delta n_3 = \Delta\omega_1 n_1 + \Delta\omega_2 n_2 + \omega_1 \Delta n_1 + \omega_2 \Delta n_2$$

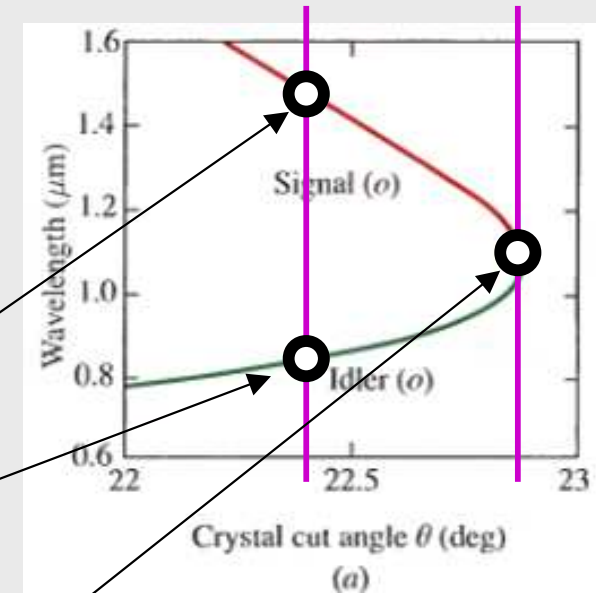
$$\omega_3 \frac{\partial n_3}{\partial \theta} \Delta\theta = \Delta\omega_1 n_1 - \Delta\omega_1 n_2 + \omega_1 \frac{\partial n_1}{\partial \omega_1} \Delta\omega_1 - \omega_2 \frac{\partial n_2}{\partial \omega_2} \Delta\omega_1$$

$$\Delta\omega_1 = \frac{\omega_3 \frac{\partial n_3}{\partial \theta} \Delta\theta}{n_1 - n_2 + \omega_1 \frac{\partial n_1}{\partial \omega_1} - \omega_2 \frac{\partial n_2}{\partial \omega_2}} = -\Delta\omega_2$$

$\Delta\omega$ a $\Delta\lambda$ roste lineárně s natočením $\Delta\theta$

Speciálně pro degenerovaný případ $\omega_2 = \omega_1$ však bude $\Delta\omega_1 \rightarrow \infty$

Podobně možno řešit vliv změny teploty ΔT



Nekolineární typ II (oee) generátor druhé harmonické SHG

Fázové synchronizační podmínky obecně :

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$$

$$\omega_1 n_1 \sin \theta_1 = \omega_2 n_2 \sin \theta_2$$

$$\omega_1 n_1 \cos \theta_1 + \omega_2 n_2 \cos \theta_2 = \omega_3 n_3$$

Fázové podmínky speciálně pro SHG :

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$\omega_3 = 2\omega$$

$$n_o(\omega) \sin \theta_1 = n(\theta + \theta_2, \omega) \sin \theta_2$$

$$n_o(\omega) \cos \theta_1 + n(\theta + \theta_2, \omega) \cos \theta_2 = 2n(\theta, 2\omega)$$

2 rovnice pro 3 neznámé θ , θ_1 , θ_2

→ jeden parametr volný, např. θ_1

→ řešení pouze numericky nebo graficky

$o+e \rightarrow e$

For a KDP crystal and a fundamental wave of wavelength $1.06\mu\text{m}$ (Nd:Yag laser), determine the crystal orientation and the angles θ_1 and θ_2 for efficient second-harmonic generation.

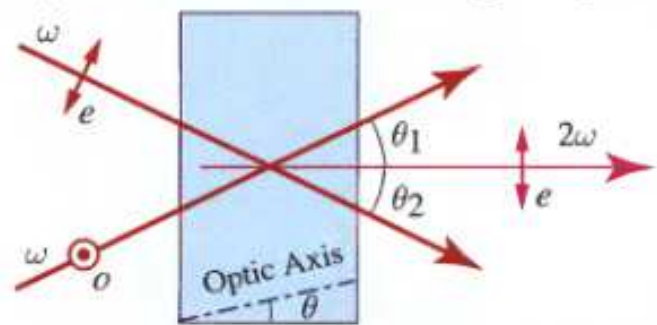


Figure 21.2-12 Non-collinear Type II second-harmonic generation.

Spontánní parametrický downkonvertor SPDC

Fázové podmínky :

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$$

$$\omega_1 n_1 \sin \theta_1 = \omega_2 n_2 \sin \theta_2$$

$$\omega_1 n_1 \cos \theta_1 + \omega_2 n_2 \cos \theta_2 = \omega_3 n_3$$

3 rovnice pro 4 neznámé θ_1 , θ_2 a ω_1 , ω_2
→ jeden parametr volný, např. ω_1
→ řešení pouze numericky nebo graficky

Ladící křivky - typ I ooe pro BBO 351.5 nm (SH Ar laser)

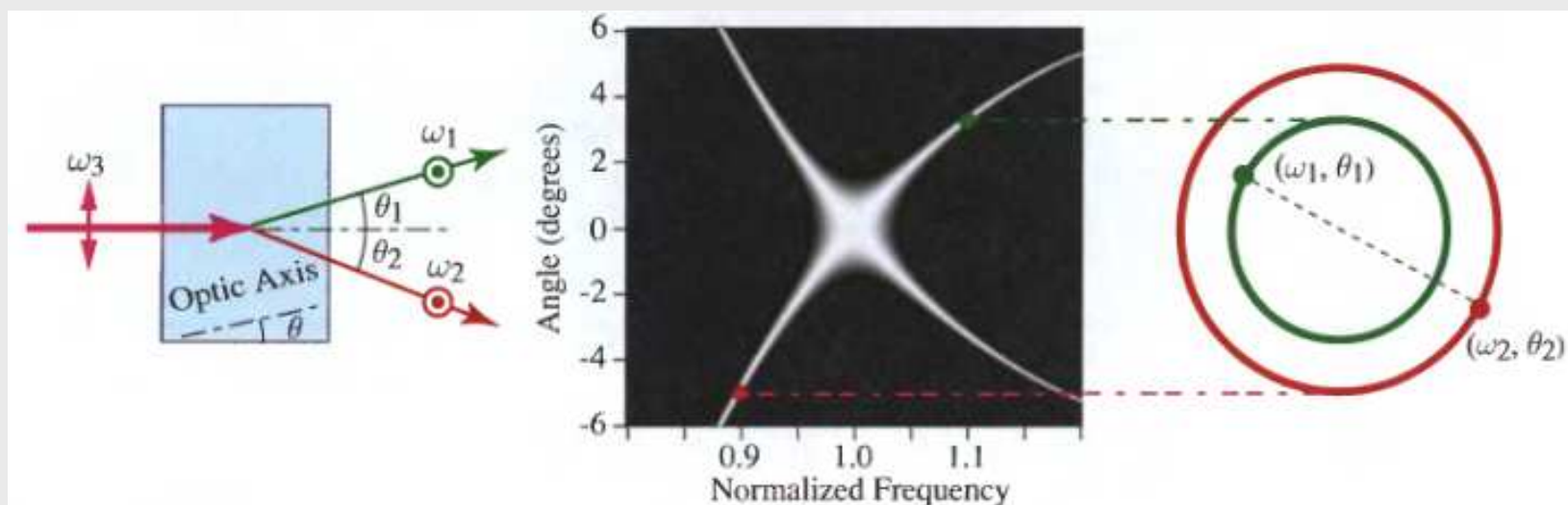


Figure 21.2-13 Tuning curves for non-collinear Type-I o-o-e spontaneous parametric downconversion in a BBO crystal at an angle $\theta = 33.53^\circ$ for a 351.5-nm pump (from an Ar^+ -ion laser). Each point in the bright area of the middle picture represents the frequency ω_1 and angle θ_1 of a possible down-converted wave, and has a matching point at a complementary frequency $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$ with angle θ_2 . Frequencies are normalized to the degenerate frequency $\omega_o = \omega_3/2$. For example, the two dots shown represent a pair of down-converted waves at frequencies $0.9\omega_o$ and $1.1\omega_o$. Because of circular symmetry, each point is actually a ring of points all of the same frequency, but each point on a ring matches only one diametrically opposite point on the corresponding ring, as illustrated in the right graph.

Obecné úvahy o řešení NLO

Maxwellovy rovnice :

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathcal{D} = 0,$$

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathcal{B} = 0,$$

pro pevné ω :

$$\nabla \times H = i\omega D, \quad \nabla \cdot D = 0,$$

$$\nabla \times E = -i\omega B, \quad \nabla \cdot B = 0,$$

vyločením $B = \mu_0 H$ dostaneme

Helmholtzovu rovnici :

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \mu_0 \omega^2 D,$$

nebo

$$\nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = \mu_0 \omega^2 D = \epsilon \mu_0 \omega^2 E + \mu_0 \omega^2 P_{NL}$$

odtud

$$\nabla^2 E + \epsilon \mu_0 \omega^2 E = -\mu_0 \omega^2 P_{NL} + \nabla(\nabla \cdot E)$$

nebo

$$\nabla^2 E + k^2 E = -\mu_0 \omega^2 P_{NL} + \nabla(\nabla \cdot E),$$

$$\text{kde } k = \sqrt{\epsilon \mu_0} \omega = \frac{n\omega}{c_0} = \frac{\omega}{c}$$

Protože $D = \epsilon_0 E + P_{NL}$ a $\nabla \cdot D = 0$, máme $\nabla \cdot E = -\frac{\nabla \cdot P_{NL}}{\epsilon_0}$,

a protože $\nabla(\nabla \cdot E) \approx \frac{k}{W} \frac{P_{NL}}{\epsilon_0} \approx \frac{\lambda}{W} \mu_0 \omega^2 P_{NL} \approx 0$,

platí zhruba Helmholtzova rovnice :

$$\nabla^2 E + k^2 E \approx -\mu_0 \omega^2 P_{NL}$$

Helmholtzova rovnice

$$\nabla^2 E + k^2 E = -S$$

má obecné řešení :

$$E(\mathbf{r}) = \int_V S(\mathbf{r}') \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'^3$$

Pro $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$ platí aproximace

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \approx r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' / r + \dots,$$

takže

$$E(\mathbf{r}) \approx \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \int_V S(\mathbf{r}') e^{i\frac{k}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}'^3$$

Fázová podmínka a prostorová selektivita generovaného záření

Pro harmonický zdroj $S(\mathbf{r}') = S_0 e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}'}$ a konečný kvádr objemu $V = L_x L_y L_z$

$$E(\mathbf{r}) \approx S_0 \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \iiint e^{-i\left(\mathbf{k}_s - \frac{k}{r}\mathbf{r}\right) \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}'^3$$

$$E(\mathbf{r}) \approx S_0 \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} L_x L_y L_z \frac{\sin\left(k_{sx} - \frac{k}{r}x\right) \frac{L_x}{2}}{\left(k_{sx} - \frac{k}{r}x\right) \frac{L_x}{2}} \times \frac{\sin\left(k_{sy} - \frac{k}{r}y\right) \frac{L_y}{2}}{\left(k_{sy} - \frac{k}{r}y\right) \frac{L_y}{2}} \times \frac{\sin\left(k_{sz} - \frac{k}{r}z\right) \frac{L_z}{2}}{\left(k_{sz} - \frac{k}{r}z\right) \frac{L_z}{2}}$$

Koherentní
vlna
ve směru \mathbf{k}_s

tj. součin 3 sinc funkcí, záření se prakticky pozoruje pouze ve směru \mathbf{k}_s ,

← směrovost a rezonance

neboť, aby sinc nebyl malý, musí být $\frac{\mathbf{r}}{r} \approx \frac{\mathbf{k}_s}{k}$ a mimo tento směr $E(\mathbf{r})$ a $I(\mathbf{r})$ velmi rychle klesá!

a současně musí být $\left|\frac{\mathbf{k}_s}{k}\right| \approx \left|\frac{\mathbf{r}}{r}\right| = 1$, neboli $|\Delta\mathbf{k}| \approx \left|\mathbf{k}_s - k\frac{\mathbf{r}}{r}\right| \approx 0$

Limitně pro $V \gg \lambda^3$ vede integrál pro harmonický zdroj $S(\mathbf{r}') = S_0 e^{-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}'}$ přímo na 3D delta funkci

$$E(\mathbf{r}) \approx S_0 \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \int e^{-i\left(\mathbf{k}_s - \frac{k}{r}\mathbf{r}\right) \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}'^3 \approx 2\pi^2 S_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \delta\left(\mathbf{k}_s - \frac{k}{r}\mathbf{r}\right) \approx 2\pi^2 S_0 \frac{e^{-ikr}}{kr} \delta\left(\frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{k}_s}{k}\right)$$

Koherentní
vlna
ve směru \mathbf{k}_s

protože $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ikx} dx = 2\pi\delta(x)$ a dále $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ a $\delta(-x) = \delta(x)$

$$\delta(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\sin Ax}{\pi x} \quad \text{a}$$

Fázové rozladění Δk

$$E(\omega_1) = A_1 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}, \quad E(\omega_2) = A_2 e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}},$$

$$P_{NL}(\omega_3) = 2dA_1 A_2 e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}} = 2dA_1 A_2 e^{i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}},$$

zatímco $E(\omega_3) = A_3 e^{-i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}}$ (jiná vlna než $\mathbf{k}_3 = \omega_3 \mathbf{n}_3 / c$ se nemůže šířit)

takže máme obecně fázové rozladění $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$

$$S(\omega_3) \propto P_{NL} \propto dA_1 A_2 e^{i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}},$$

$$A_3 \propto \int_V dA_1 A_2 e^{i\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}^3 \propto dA_1 A_2 \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\Delta k z} dz = \frac{2dA_1 A_2}{\Delta k} \sin \frac{\Delta k L}{2}$$

$$I_3(L) \propto |A_3|^2 \propto \frac{d^2 A_1^2 A_2^2 L_c^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi L}{L_c}$$

kde směřovací **koherenční délka**

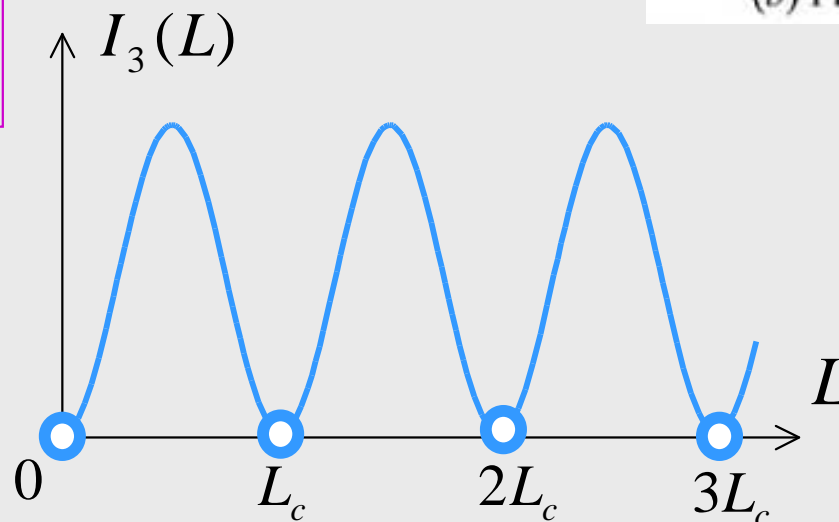
$$L_c = \frac{2\pi}{\Delta k}$$

Např. pro SHG je

$$\Delta k = \frac{4\pi}{\lambda} |n_3 - n_1|$$

a proto

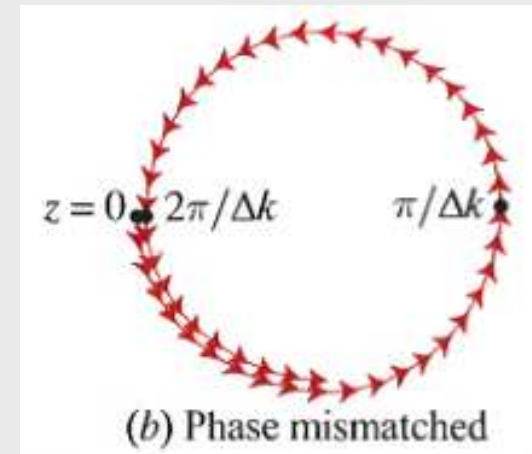
$$L_c = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{\lambda}{2|n_3 - n_1|} \approx 50\lambda$$



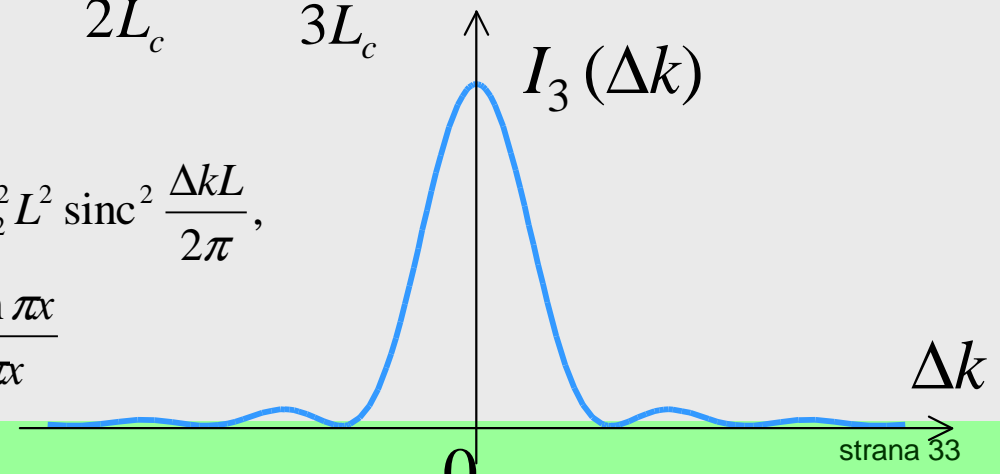
nebo také

$$I_3(\Delta k) \propto d^2 A_1^2 A_2^2 L^2 \operatorname{sinc}^2 \frac{\Delta k L}{2\pi},$$

$$\text{kde } \operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$



(b) Phase mismatched



Šířka pásma fázového rozladění

Při daném Δk bude světlo účinně generováno

$$\text{na } L < L_c = \frac{2\pi}{|\Delta k|}$$

Podobně při pevném L bude účinně generováno světlo

$$\text{jen pro rozladění } |\Delta k| < \frac{2\pi}{L}$$

Například pro SHG je $\Delta k(\omega) = k_3 - 2k_1$

dokonalá synchronizace $\Delta k(\omega_0) = 0$ platí jen pro ω_0 (kdy platí $n_3 = n_1$)

$$\begin{aligned}\Delta k(\omega) &= \frac{d\Delta k}{d\omega} \Delta\omega + \dots \approx \frac{d}{d\omega} (k_3(2\omega) - 2k_1(\omega)) \Delta\omega \\ &= \left(2 \frac{dk_3}{d\omega} - 2 \frac{dk_1}{d\omega} \right) \Delta\omega = \left(\frac{2}{u_3} - \frac{2}{u_1} \right) \Delta\omega = \frac{2}{c_0} |N_3 - N_1| \Delta\omega\end{aligned}$$

$$\text{odtud } |\Delta k| = \frac{2}{c_0} |N_3 - N_1| \Delta\omega < \frac{2\pi}{L}, \text{ takže}$$

$$\Delta\omega < \frac{\pi c_0}{L |N_3 - N_1|} \quad \text{nebo} \quad \Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} < \frac{c_0}{2L |N_3 - N_1|}$$

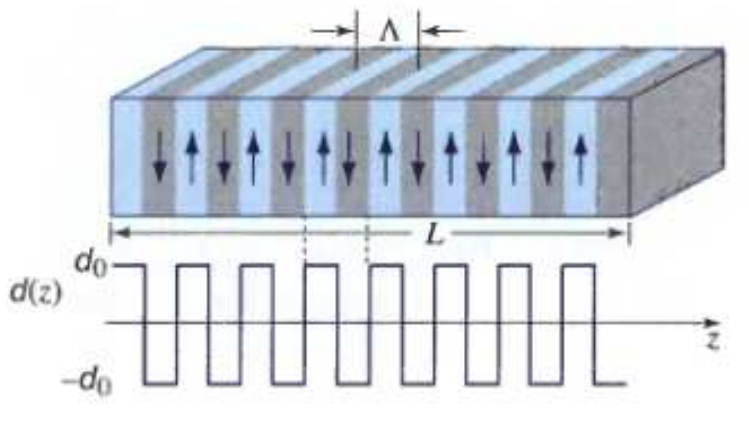
$$\begin{aligned}\text{Grupová rychlost:} \quad & u = \frac{d\omega}{dk} \\ \text{Grupový index lomu:} \quad & N = \frac{c_0}{u} = c_0 \frac{dk}{d\omega}\end{aligned}$$

→ široké pulzy jsou účinně generovány jen pro malá L

Fázová kvazisynchronizace QPM (quasi phase-matching)

Nelze - li odstranit fázové rozladění Δk , lze použít periodickou strukturu s koeficientem $d(r) = d_0 e^{-i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}$, která funguje jako harmonická fázová mřížka (podélná Braggova mřížka), synchronizační podmínka se změní na $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{G} = \mathbf{k}_3$ a synchronizace dosáhneme pro $G \approx \Delta k$.

Fázová kvazisynchronizace s periodickou změnou znaménka koeficientu d



Technologie:

Litografické napařování metodou **periodického pólování** optické osy, feroelektrické krystaly LiNbO_3 , LiTaO_3 , KDP nebo polovodiče GaAs

Pokud nemáme harmonickou mřížku, pracujeme s anharmonickou mřížkou $d(z)$

prostorové periody Λ , její Fourierova řada je dána součtem $d(z) = \sum_m d_m e^{-i\frac{2\pi m z}{\Lambda}}$,

mřížka má tedy celé spektrum prostorových frekvencí $G_m = \frac{2\pi m}{\Lambda}$

Synchronizace TWM dosáhneme pro $G_m \approx \Delta k$, tj. pro $\frac{2\pi m}{\Lambda} \approx \frac{2\pi}{L_c}$

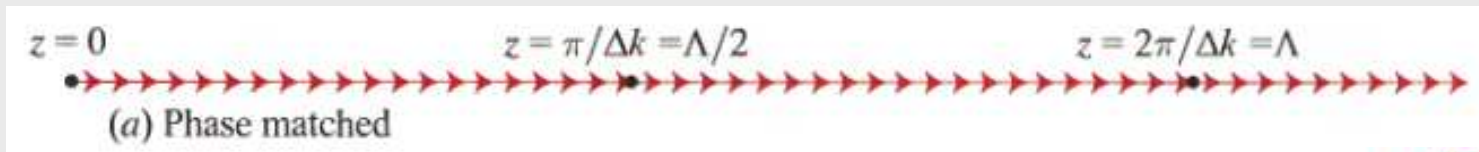
→ volíme $\Lambda \approx mL_c = \frac{2\pi m}{\Delta k}$ (nejlépe rovnou $m = 1$ a $\Lambda \approx L_c$)

Skokově periodicky pólované prostředí :
hodnota $d = \pm d_0$ alternuje s periodou $\Lambda / 2$

→ Fourierovy koeficienty

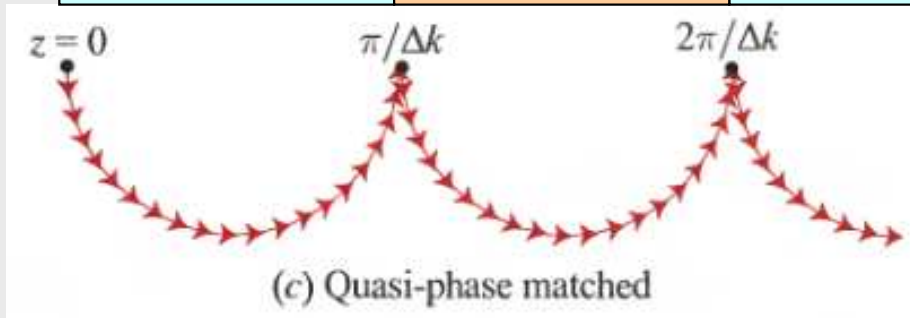
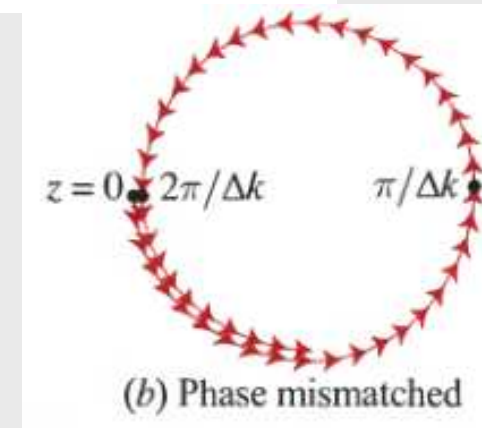
$$d_m = \frac{2d_0}{\pi m} \quad \text{pro } m \text{ liché}$$

$$\text{a } d_m = 0 \quad \text{pro } m \text{ sudé}$$



kvazisynchronizace pro $m=1$ a $\Lambda=L_c$

$\frac{\Lambda}{2}$	$\frac{\Lambda}{2}$	$\frac{\Lambda}{2}$
---------------------	---------------------	---------------------



Konverzní účinnost oproti homogennímu médiu lepší $\left(\frac{2L}{\Lambda}\right)^2$ krát, kde $\frac{2L}{\Lambda}$ značí počet vrstev

homogenní médium :

$$I_3(L) \propto d_0^2 L_c^2 \sin^2 \frac{\pi L}{L_c} < d_0^2 L_c^2$$

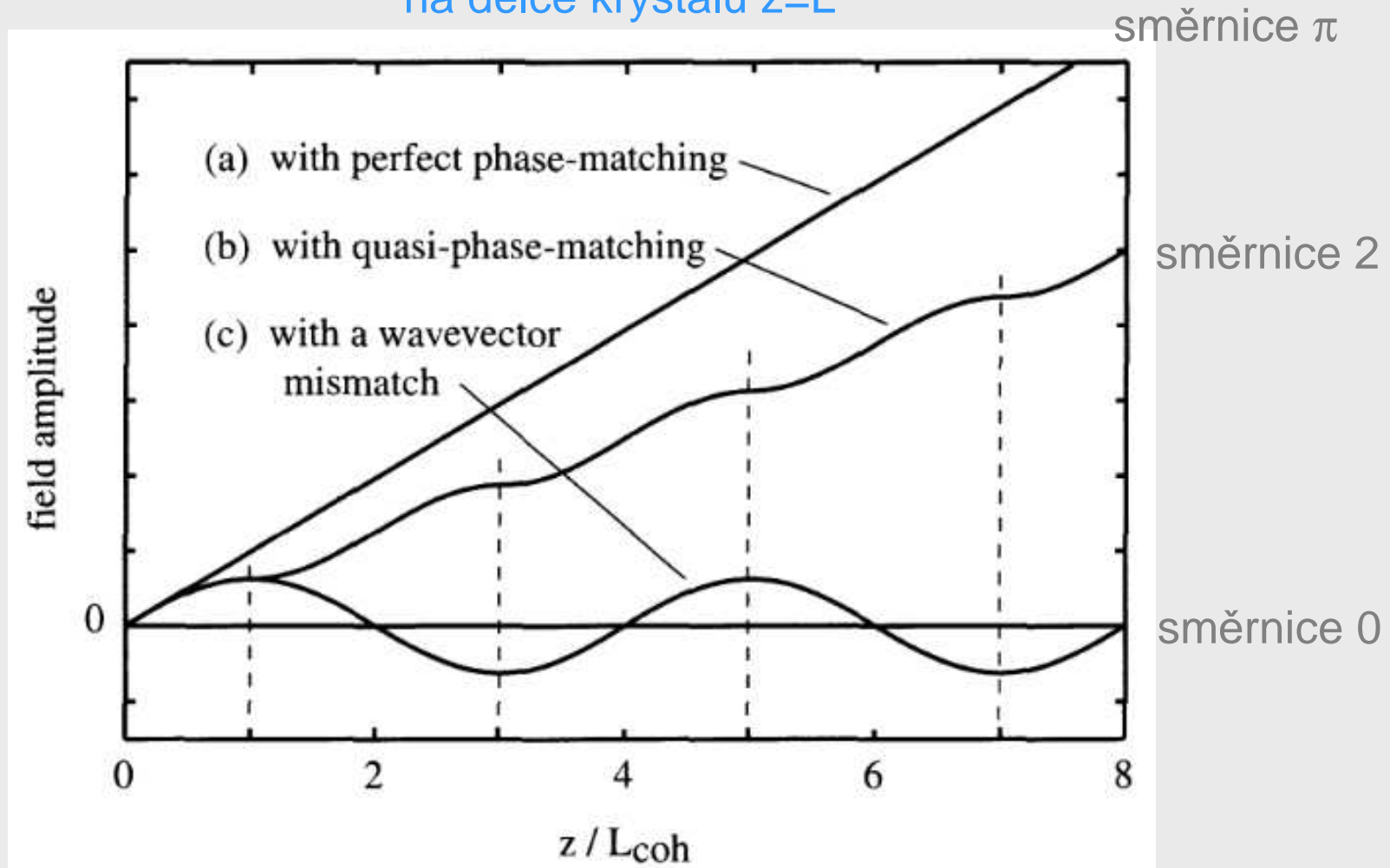
periodické médium :

jedna vrstva šířky $\frac{\Lambda}{2} \rightarrow I_3\left(\frac{\Lambda}{2}\right) \propto d_0^2 L_c^2 \sin^2 \frac{\pi \Lambda}{2L_c} \approx d_0^2 L_c^2 \sin^2 \frac{\pi m}{2} = d_0^2 L_c^2$ pro $m = 1, 3, 5, \dots$ liché

$$\frac{2L}{\Lambda} \text{ vrstev} \rightarrow \frac{2L}{\Lambda} \text{ krát vyšší amplituda} \rightarrow I_3(L) \propto \left(\frac{2L}{\Lambda}\right)^2 I_3\left(\frac{\Lambda}{2}\right) \approx \left(\frac{2L}{\Lambda}\right)^2 d_0^2 L_c^2$$

Protože $\Lambda \approx mL_c$, bude $I_3(L) \propto \frac{1}{m^2}$, proto nejraději volíme $m = 1$ a $\Lambda \approx L_c$

Závislost amplitudy generovaného světla na délce krystalu $z=L$



Nelineární optické jevy třetího řádu

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = 4\chi^{(3)} \mathcal{E}^3$$

Pokud je krystal středově symetrický $\rightarrow d=0$ a dominantní nelinearita je třetího řádu

\rightarrow **kerrovské prostředí**

Tato nelinearita je zodpovědná za generaci 3. harmonické nebo obecné kombinace tripletů vstupních frekvencí

Elektrooptický Kerrův jev

$$\mathcal{P}_{\text{NL}} = 4\chi^{(3)} \mathcal{E}^3$$

$$\mathcal{E}(t) = E(0) + \text{Re}\{E(\omega)e^{i\omega t}\}$$

$$\mathcal{P}_{\text{NL}}(t) = P_{\text{NL}}(0) + \text{Re}\{P_{\text{NL}}(\omega)e^{i\omega t}\}$$

$$P_{\text{NL}}(0) = 4\chi^{(3)} E(0)^3$$

$$P_{\text{NL}}(\omega) = 12\chi^{(3)} E(0)^2 E(\omega) \leftarrow \text{elektrooptický Kerrův jev}$$

$$P(\omega) = P_{\text{L}}(\omega) + P_{\text{NL}}(\omega) = \varepsilon_0 \chi E(\omega) + 12\chi^{(3)} E(0)^2 E(\omega) = \varepsilon_0 \left(\chi + 12 \frac{\chi^{(3)}}{\varepsilon_0} E(0)^2 \right) E(\omega)$$

$$\Delta\chi = 12 \frac{\chi^{(3)}}{\varepsilon_0} E(0)^2$$

$$\Delta n = \frac{\Delta\chi}{2n} = \frac{6\chi^{(3)}}{n\varepsilon_0} E(0)^2$$

Generace třetí harmonické THG

$$\mathcal{P}_{\text{NL}} = 4\chi^{(3)} \mathcal{E}^3$$

$$\mathcal{E}(t) = \text{Re}\{E(\omega)e^{i\omega t}\}$$

$$\mathcal{P}_{\text{NL}}(t) = \text{Re}\{P_{\text{NL}}(\omega)e^{i\omega t}\} + \text{Re}\{P_{\text{NL}}(3\omega)e^{3i\omega t}\}$$

$$P_{\text{NL}}(\omega) = 3\chi^{(3)}|E(\omega)|^2 E(\omega) \leftarrow \text{optický Kerrův jev}$$

$$P_{\text{NL}}(3\omega) = \chi^{(3)} E(\omega)^3 \leftarrow \text{generace třetí harmonické}$$

Optický Kerrův jev

$$P_{\text{NL}}(\omega) = 3\chi^{(3)}|E(\omega)|^2 E(\omega) \leftarrow \text{optický Kerrův jev}$$

$$P(\omega) = P_{\text{L}}(\omega) + P_{\text{NL}}(\omega) = \varepsilon_0 \chi E(\omega) + 3\chi^{(3)}|E(\omega)|^2 E(\omega) = \varepsilon_0 \left(\chi + \frac{3\chi^{(3)}}{\varepsilon_0} |E(\omega)|^2 \right) E(\omega)$$

$$\Delta\chi = \frac{3\chi^{(3)}}{\varepsilon_0} |E(\omega)|^2 = \frac{6\eta\chi^{(3)}}{\varepsilon_0} I \quad \text{neboť} \quad I = \frac{|E(\omega)|^2}{2\eta}$$

$$\Delta n = \frac{\Delta\chi}{2n} = \frac{3\eta\chi^{(3)}}{n\varepsilon_0} I = n_2 I$$

$$n(I) = n + n_2 I \leftarrow \text{optický Kerrův jev}$$

samoindukovaný jev, fáze svazku se moduluje vlastní intenzitou

$$\text{přítom } n_2 = \frac{3\eta\chi^{(3)}}{n\varepsilon_0}$$

fázově synchronizační podmínka :

$$n(3\omega) = n(\omega) \rightarrow$$

kombinace normální a anomální

disperze vhodné směsi dvou plynů,

malá účinnost,

lépe $\omega + \omega \rightarrow 2\omega$ a $\omega + 2\omega \rightarrow 3\omega$ až 20 %

obecně závisí na λ a polarizaci, typické hodnoty :

$$n_2 \approx 10^{-16} \text{ až } 10^{-14} \text{ cm}^2/\text{W} \text{ pro skla}$$

$$n_2 \approx 10^{-14} \text{ až } 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{W} \text{ pro dopovaná skla}$$

$$n_2 \approx 10^{-10} \text{ až } 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{W} \text{ pro organické materiály}$$

$$n_2 \approx 10^{-10} \text{ až } 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{W} \text{ pro polovodiče}$$

Automodulace fáze SPM

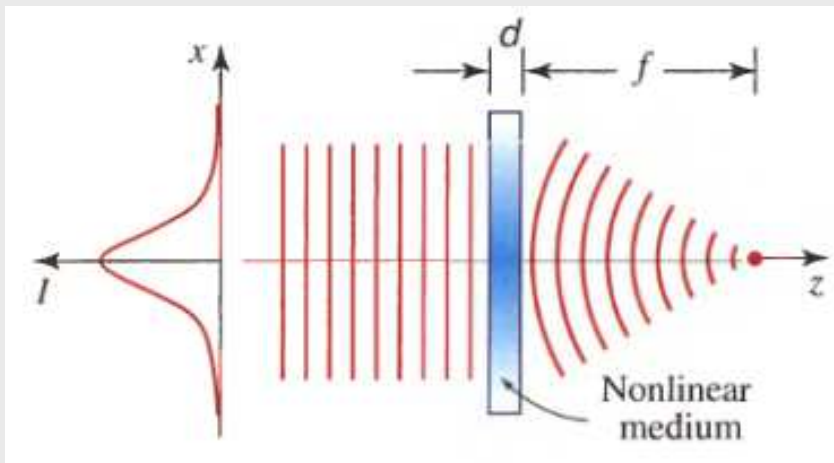
$$\Delta\varphi = \Delta kL = \Delta n k_0 L = n_2 I k_0 L = 2\pi n_2 \frac{L}{\lambda_0 A} P$$

Například nelineární posun fáze o π nastane pro dopované skleněné vlákno ($n_2 \approx 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{W}$) délky $L = 1 \text{ m}$, průřezu $A = 10^{-2} \text{ mm}^2$ již při $P = 0.5 \text{ W}$.

Fázová modulace se dá změnit na intenzitní :

1. Mach - Zehnderův interferometr
2. dvojlom
3. integrovaný optický směrový kapler

Autofokuzace SP



Nelineární kerrovské médium funguje jako čočka

$$I = I_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{W^2}} \approx I_0 \left(1 - \frac{x^2+y^2}{W^2} \right)$$

$$E = E_0 e^{-ik_0 d} = E_0 e^{-i(n+n_2 I)k_0 d} = E_0 e^{-ik_0 d} e^{-in_2 I k_0 d}$$

$$= E_0 e^{-ik_0 d} e^{-in_2 I_0 \left(1 - \frac{x^2+y^2}{W^2} \right) k_0 d} = E_0 e^{-ik_0 d} e^{-in_2 I_0 k_0 d} e^{in_2 I_0 \frac{x^2+y^2}{W^2} k_0 d}$$

Protože amplitudová propustnost tenké čočky

s ohniskovou vzdáleností f je $T = e^{ik_0 \frac{x^2+y^2}{2f}}$,

bude optická mohutnost kerrovské čočky

$$\frac{1}{f} = n_2 I_0 \frac{2d}{W^2}$$

Samozachycení světla (self-trapping)

Při dostatečném výkonu P , je svazek veden Kerrovským prostředím jako tenkým vláknem o průměru d .

Samovedení světla je ale nestabilní, vlákno se obvykle nejprve rozpadá v dílčí vlákna a nakonec zase zcela difraguje.

Je-li intenzita ve svazku I , pak nelineární index v něm vzroste o $\Delta n = n_2 I$, takže dokáže vést světlo podobně jako optické vlákno s maximální divergencí θ ,

kteřá se najde z podmínky mezního úhlu lomu $\cos \theta = \frac{n}{n + \Delta n}$,

$$\text{odtud } 1 - \frac{1}{2} \theta^2 = 1 - \frac{\Delta n}{n} \rightarrow \theta^2 = \frac{2\Delta n}{n} = \frac{2n_2 I}{n}$$

Současně divergence vlivem difrakce světla je $\theta \approx 1.22 \frac{\lambda}{nd}$,

takže srovnáním dostaneme rovnici

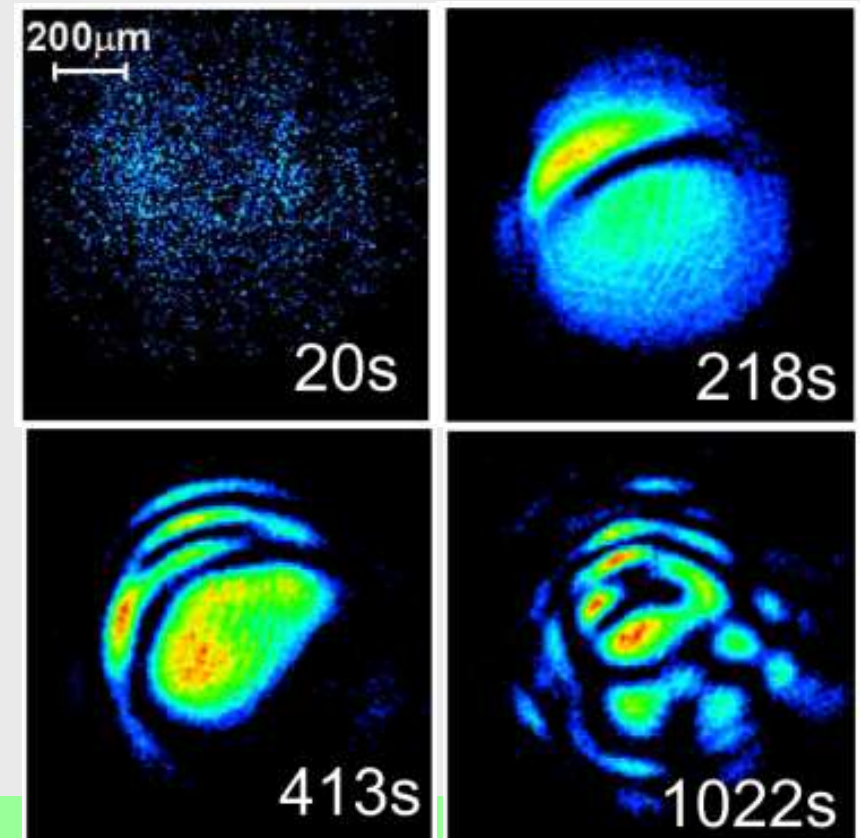
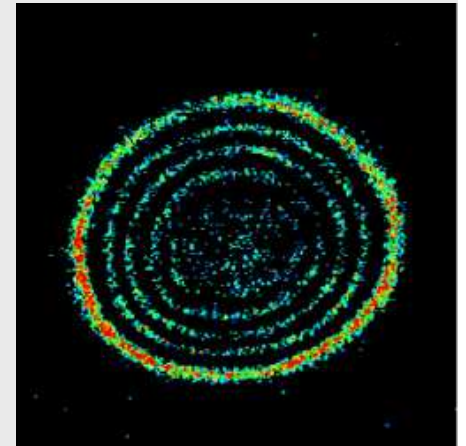
$$\theta^2 = \frac{2n_2 I}{n} \approx \left(1.22 \frac{\lambda}{nd} \right)^2,$$

odtud kritický výkon svazku :

$$P_{krit} = \frac{\pi d^2}{4} \approx 1.22^2 \pi \frac{\lambda^2}{8nn_2}$$

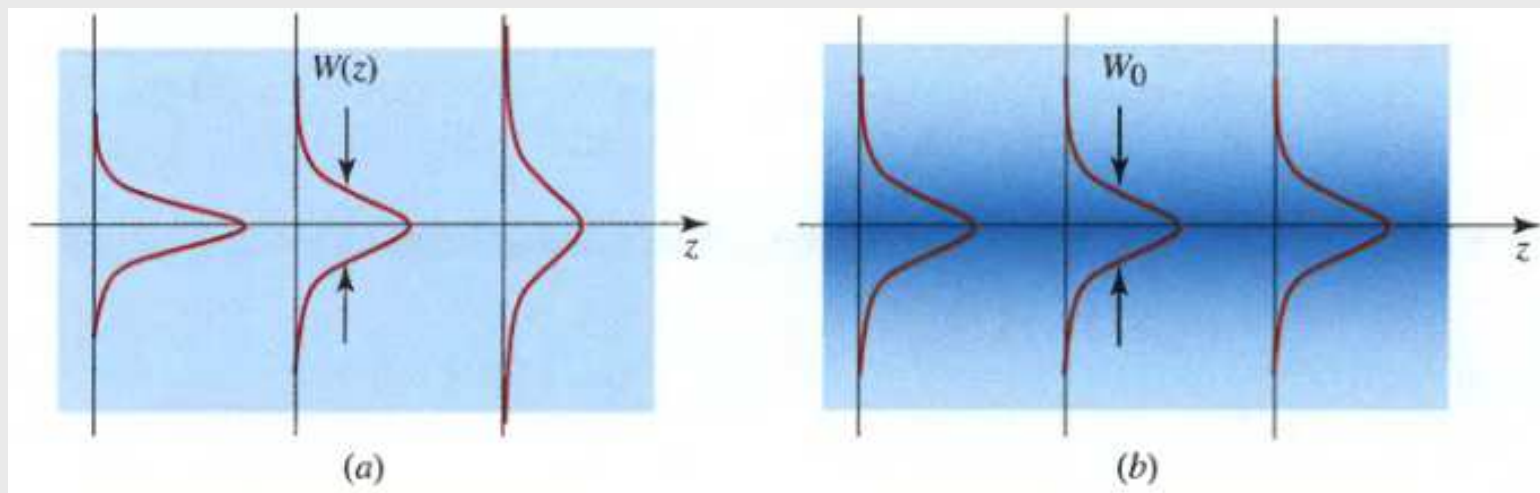
Například pro CS_2 a $\lambda \approx 1 \mu\text{m}$ je $P_{krit} \approx 33 \text{ kW}$

a pro typická skla a krystaly je $P_{krit} \approx 0.2$ až 2 MW



Prostorový soliton

Samofokuzace působí proti difrakci a v Kerrovském médiu vzniká samovedený svazek = prostorový soliton



Helmholtzova rovnice: $\nabla^2 E + n^2(I)k_0^2 E = 0$ pro $E = Ae^{-ikz} = Ae^{-ink_0z}$, kde $A(x, z)$ značí obálku vlny

po dosazení dostaneme rovnici $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} + k_0^2 [n^2(I) - n^2] A = 0$

nebo $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} + 2nk_0^2 n_2 I A = 0$ nebo $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} + nk_0^2 n_2 \frac{|A|^2}{\eta} A = 0$, neboť $I = \frac{|A|^2}{2\eta}$

nebo $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} + n^2 k_0^2 n_2 \frac{|A|^2}{\eta_0} A = 0$, neboť $\eta = \frac{\eta_0}{n}$

Nelineární Schroedingerova rovnice: $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{n_2}{\eta_0} k^2 |A|^2 A = 2ik \frac{\partial A}{\partial z}$

Solitární řešení: $A(x, z) = A_0 \operatorname{sech} \frac{x}{W_0} e^{-i \frac{z}{4z_0}}$, kde $\frac{n_2}{2\eta_0} A_0^2 = \frac{1}{k^2 W_0^2}$ a $z_0 = \frac{1}{2} k W_0^2 = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}$

Řešení ve tvaru solitární vlny: $A(x, z) = A(x)e^{-i\beta z}$,

dosadíme do Schroedingerovy rovnice: $A'' + \frac{n_2}{\eta_0} k^2 A^2 = 2\beta k A$

$$A'' = (2\beta k - \frac{n_2}{\eta_0} k^2 A^2) A$$

zintegrujeme přes dA : $A'' dA = \frac{1}{2} dA'^2 = (2\beta k - \frac{n_2}{\eta_0} k^2 A^2) A dA$

pro $x = \pm\infty$ je $A(\pm\infty) = 0$, a proto také $A'(\pm\infty) = 0$, takže

$$A'^2 = (2\beta k - \frac{n_2}{2\eta_0} k^2 A^2) A^2$$

navíc pro $x = 0$ je $A(0) = A_0 = \max$, a proto také $A'(0) = 0$,

$$\text{takže } 2\beta k = \frac{n_2}{2\eta_0} k^2 A_0^2 \quad \text{a} \quad A'^2 = \frac{n_2}{2\eta_0} k^2 (A_0^2 - A^2) A^2$$

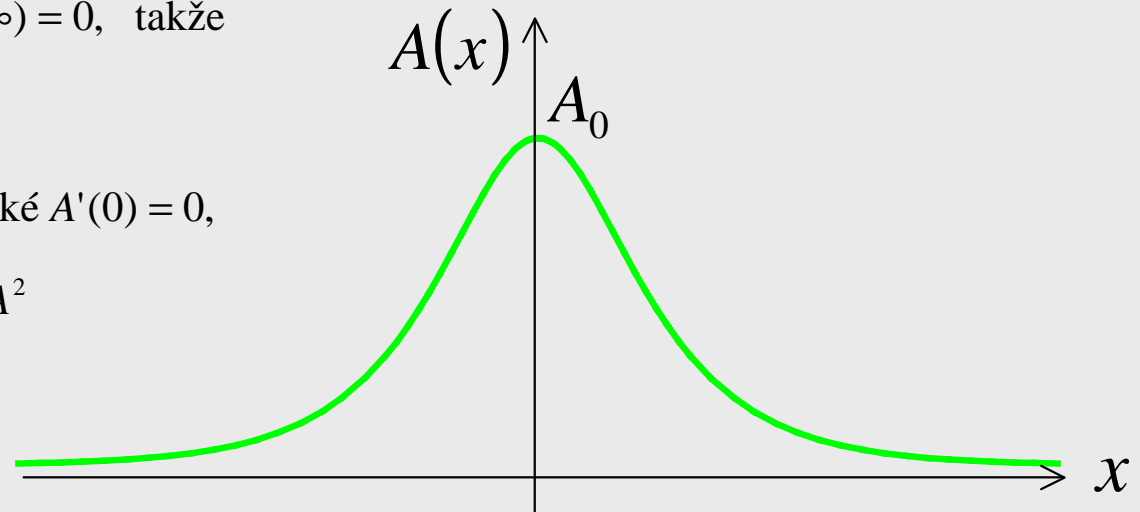
separace proměnných a integrujeme ($dA < 0$)

$$\frac{dA}{A} \frac{1}{\sqrt{A_0^2 - A^2}} = -\sqrt{\frac{n_2}{2\eta_0}} k dx$$

$$\text{substitucí } A = \frac{A_0}{\cosh u}, \quad \text{dostaneme } \frac{du}{A_0} = \sqrt{\frac{n_2}{2\eta_0}} k dx$$

$$\rightarrow u = \sqrt{\frac{n_2}{2\eta_0} k^2 A_0^2} x = \sqrt{2\beta k} x, \quad \text{takže máme řešení: } A(x, z) = \frac{A_0}{\cosh \sqrt{2\beta k} x} e^{-i\beta z}$$

$$\text{Pokud zavedeme } \frac{1}{4z_0} = \beta \text{ a } \frac{1}{W_0} = \sqrt{2\beta k} \text{ dostaneme řešení podle Saleha, Teicha } A(x, z) = A_0 \operatorname{sech} \frac{x}{W_0} e^{-i\frac{z}{4z_0}}$$



Ramanovské zesílení

Nelineární koeficient $\chi^{(3)}$ je obecně komplexní, tj. $\chi^{(3)} = \chi_R^{(3)} + i\chi_I^{(3)}$

Automodulační fáze $\Delta\varphi = \varphi_R + i\varphi_I$ je rovněž komplexní, neboť

$$\Delta\varphi = n_2 I k_0 L = 2\pi n_2 \frac{L}{\lambda_0 A} P = \frac{6\pi\eta\chi^{(3)}}{n\epsilon_0} \frac{L}{\lambda_0 A} P, \quad \text{kde } n_2 = \frac{3\eta\chi^{(3)}}{n\epsilon_0}$$

takže příspěvek imaginární části φ_I lze interpretovat jako zesílení

$$e^{i\varphi_I} = \exp\left(\frac{1}{2}\gamma_R L\right) = \exp\left(-\frac{6\pi\eta\chi_I^{(3)}}{n\epsilon_0} \frac{L}{\lambda_0 A} P\right) \geq 1,$$

kde koeficient γ_R Ramanova zesílení závisí na frekvenci ω a čerpacím výkonu P

$$\gamma_R = -\frac{12\pi\eta\chi_I^{(3)}}{n\epsilon_0} \frac{P}{\lambda_0 A} = -\frac{12\pi\eta_0\chi_I^{(3)}}{n^2\epsilon_0} \frac{P}{\lambda_0 A}$$

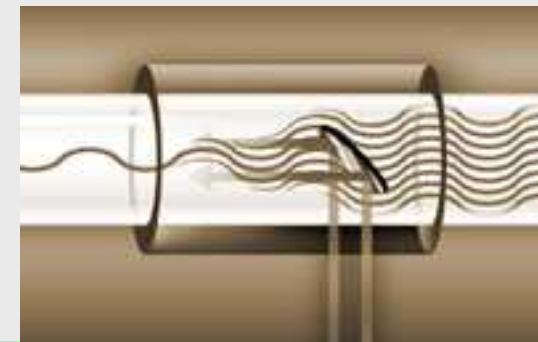
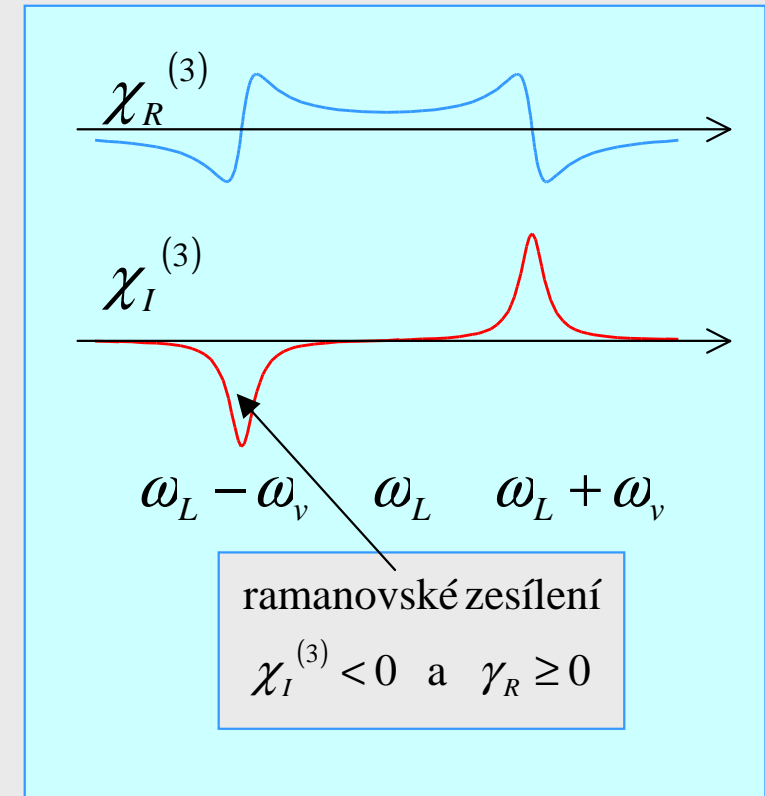
pro $\omega \approx \omega_S \approx \omega_L - \omega_v$ je $\chi_I^{(3)} \leq 0$ a $\gamma_R \geq 0$

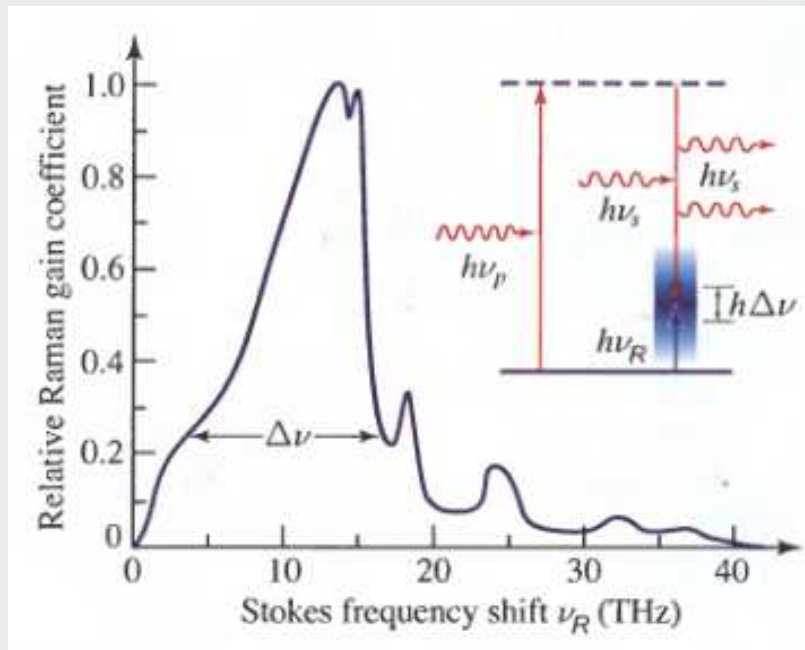
Ramanův jev má původ ve vazbě záření a vř vibračních módů prostředí, zdrojem energie ramanovského zesílení je čerpací laser.

Ramanovské vláknové zesilovače :

Ramanovo zesílení může kompenzovat absorpci v optickém vlákně a zesilovat užitečný signál.

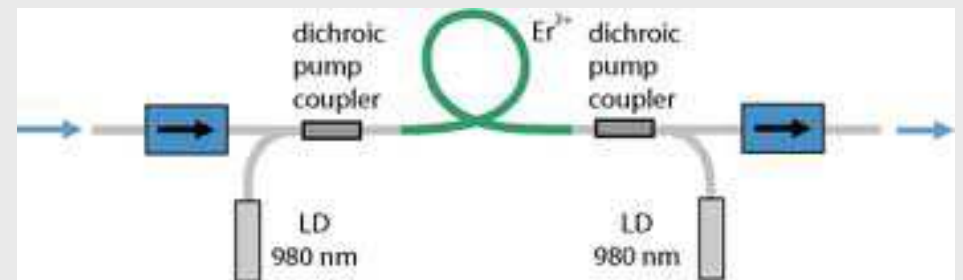
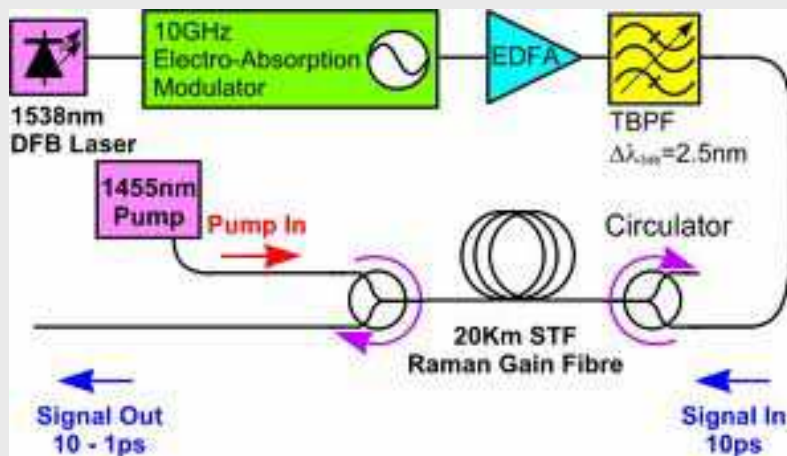
Pomocí zpětné vazby lze realizovat i vláknový ramanovský laser.





Spektrální závislost ramanovského zesílení pro křemenné vlákno dopované germániem největší zisk se pozoruje pro Stokesovu složku o frekvenci $\nu_0 - \nu_R$, kde $\nu_R \approx 13$ THz

Vláknové zesilovače, zapojení



Křížová fázová modulace XPM

dva svazky se vzájemně fázově ovlivňují:

$$\mathcal{P}_{\text{NL}} = 4\chi^{(3)}\mathcal{E}^3$$

$$\mathcal{E}(t) = \text{Re}\{E(\omega_1)e^{i\omega_1 t}\} + \text{Re}\{E(\omega_2)e^{i\omega_2 t}\}$$

$$P_{\text{NL}}(\omega_1) = \chi^{(3)}\left[3|E(\omega_1)|^2 + 6|E(\omega_2)|^2\right]E(\omega_1) \leftarrow \text{XPM}$$

$$\text{protože } P_{\text{NL}}(\omega_1) = \varepsilon_0\Delta\chi E(\omega_1) = 2\varepsilon_0 n\Delta n E(\omega_1)$$

kde změna indexu lomu prvního svazku je $\Delta n = n_2(I_1 + 2I_2)$

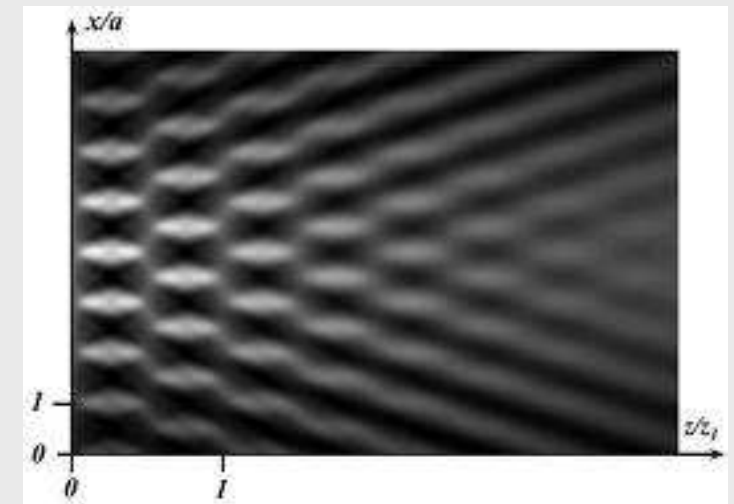
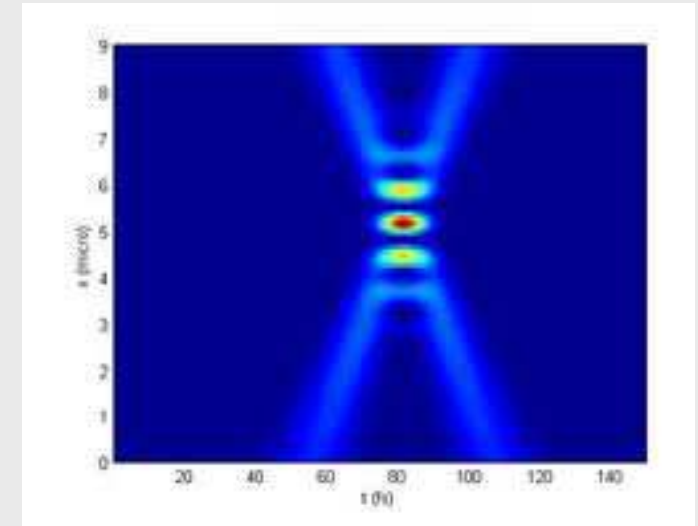
a druhého svazku je $\Delta n = n_2(2I_1 + I_2)$

a dále

$$n_2 = \frac{3Z\chi^{(3)}}{\varepsilon_0 n}, \quad I_1 = \frac{|E(\omega_1)|^2}{2\eta}, \quad I_2 = \frac{|E(\omega_2)|^2}{2\eta}$$

V případě tří svazků bude analogicky

změna indexu lomu prvního svazku je $\Delta n = n_2(I_1 + 2I_2 + 2I_3)$



Čtyřvlnové směšování FWM

injektujeme do NL prostředí tři svazky

$$\mathcal{P}_{\text{NL}} = 4\chi^{(3)}\mathcal{E}^3$$

$$\mathcal{E}(t) = \text{Re}\{E(\omega_1)e^{i\omega_1 t}\} + \text{Re}\{E(\omega_2)e^{i\omega_2 t}\} + \text{Re}\{E(\omega_3)e^{i\omega_3 t}\}$$

\mathcal{P}_{NL} bude mít $(3+3)^3 = 216$ harmonických členů

o frekvenci $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3$, kde $n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

například člen o frekvenci $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$

bude mít amplitudu $P_{\text{NL}}(\omega_4) = 6\chi^{(3)}E(\omega_1)E(\omega_2)E^*(\omega_3)$

frekvenčně a fázově synchronizační podmínka :

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$$

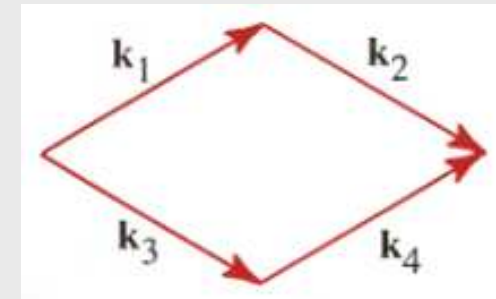
$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$$

Bude-li PMC splněna, bude se generovat nejen vlna ω_4 ,

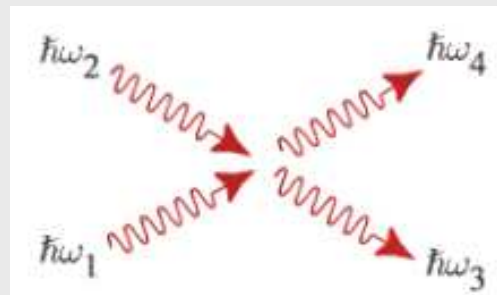
ale i všechny tři zbývající, protože stejná PMC podmínka platí např. pro proces

$$P_{\text{NL}}(\omega_1) = 6\chi^{(3)}E(\omega_3)E(\omega_4)E^*(\omega_2)$$

proto název **čtyřvlnové směšování**



Interakce 4 fotonů



Třívlnové (čtyřfotonové) směšování

Speciální degenerovaný případ FWM $\omega_3 = \omega_4 = \omega_0$

$$P_{\text{NL}}(\omega_1) = 3\chi^{(3)} E^2(\omega_3) E^*(\omega_2)$$

$$P_{\text{NL}}(\omega_2) = 3\chi^{(3)} E^2(\omega_3) E^*(\omega_1)$$

$$P_{\text{NL}}(\omega_3) = 6\chi^{(3)} E(\omega_1) E(\omega_2) E^*(\omega_3)$$

3 vlny, ale pořád interagují 4 fotony!

často se využívá např. jako OFC (frekvenční konvertor),

OPA (parametrický zesilovač), OPO (parametrický oscilátor)

nebo SPDC (spontánní parametrický downkonvertor)

nepotřebuje $\chi^{(2)}$, běží i v optickém vlákně

OPA (parametrický zesilovač):

ω_1 signál

ω_2 jalový mód

$\omega_0 = \omega_3$ čerpání

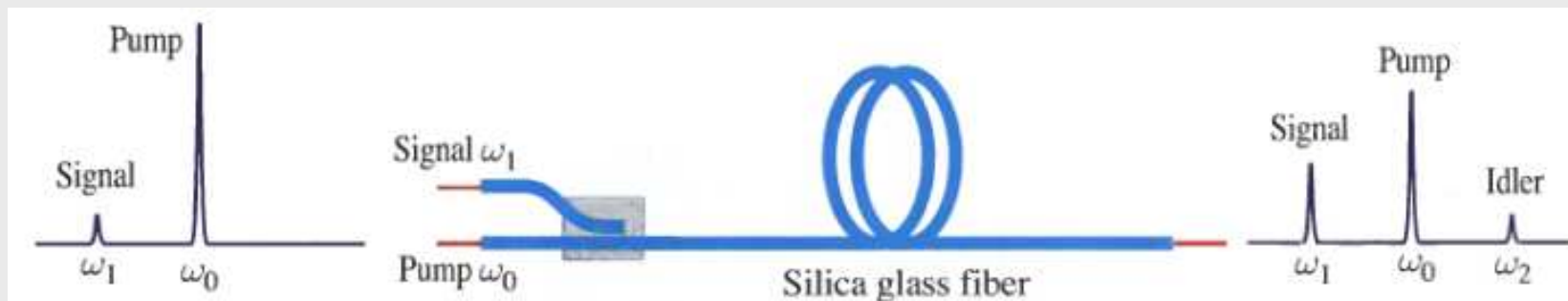


Figure 21.3-5 Three-wave, four-photon optical fiber parametric amplifier (OPA).

Optická fázová konjugace OPC

Degenerované čtyřvlnové směšování DFWM

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega$$

Dále uvažujme protiběžné rovinné čerpací vlny

$$E_3(\mathbf{r}) = A_3 e^{-i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}}, \quad E_4(\mathbf{r}) = A_4 e^{-i\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r}}, \quad \text{kde } \mathbf{k}_4 = -\mathbf{k}_3$$

Ze vstupního signálu E_1 se bude díky DFWM generovat

$$\text{fázově sdružená vlna } E_2(\mathbf{r}) \propto A_3 A_4 E_1^*(\mathbf{r})$$

Fázový konjugátor je zvláštní zrcadlo,

které odráží signální vlnu zpět beze změny vlnoplochy!

$$\text{rovinná vlna : } E_1(\mathbf{r}) = A e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \rightarrow E_2(\mathbf{r}) \propto E_1^*(\mathbf{r}) = A e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\text{sférická vlna : } E_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} e^{-ikr} \rightarrow E_2(\mathbf{r}) \propto E_1^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} e^{ikr}$$

Fázová konjugace = časová reverze

$$\mathcal{E}_2(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{E_2(\mathbf{r})e^{i\omega t}\} \propto \text{Re}\{E_1^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}\}$$

současně ale

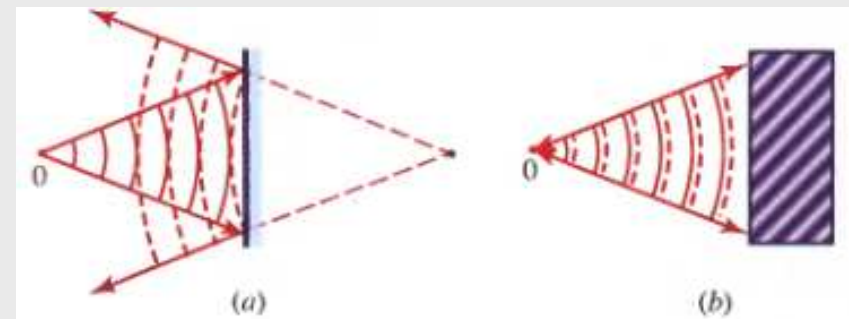
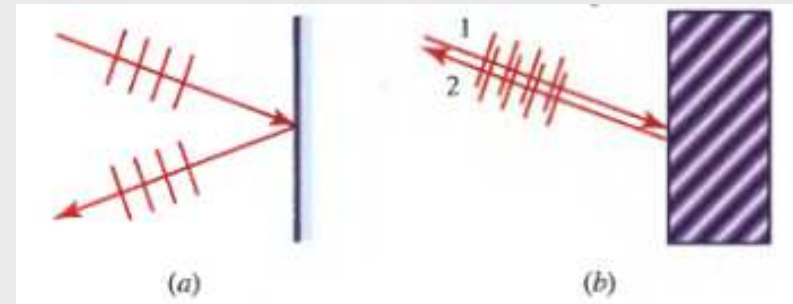
$$\text{Re}\{E_1^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}\} = \text{Re}\{E_1(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\}$$

tedy

$$\mathcal{E}_2(\mathbf{r}, t) \propto \mathcal{E}_1(\mathbf{r}, -t)!$$

obyčejné zrcadlo

fázově konjugující



Fázově konjugující zrcadlo
může odrážet i více než 100 %

Fázově konjugující zrcadlo PCM

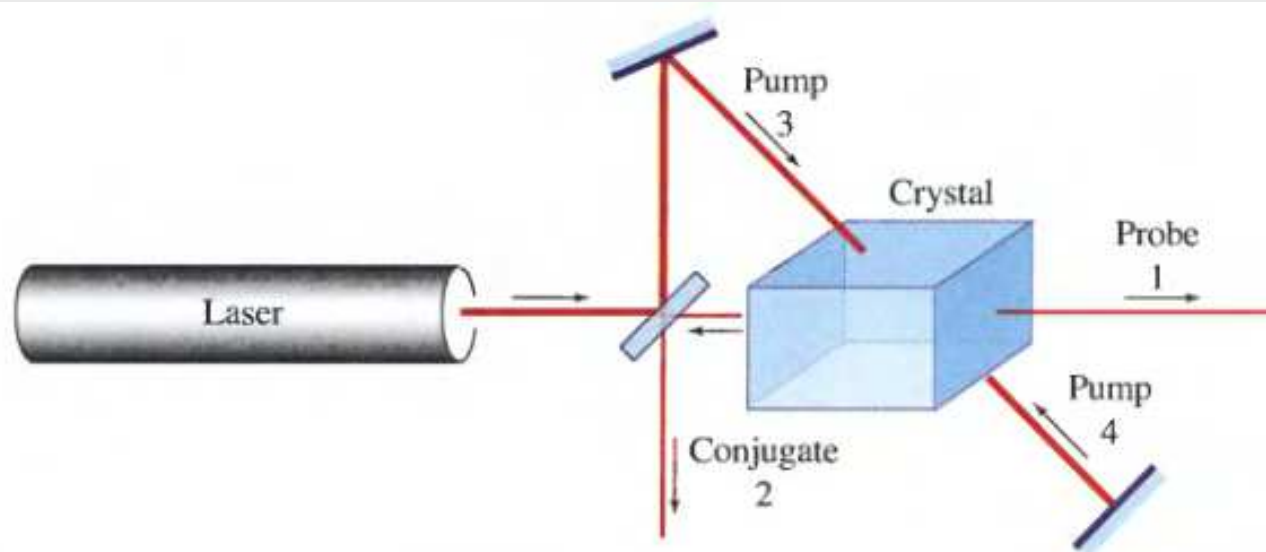


Figure 21.3-8 An optical system for degenerate four-wave mixing using a nonlinear crystal. The pump waves 3 and 4 and the probe wave 1 are obtained from a laser using a beamsplitter and two mirrors. The conjugate wave 2 is created within the crystal.

DFWM jako holografie v reálném čase

Princip holografie :

předmětová vlna E_1 interferuje s referenční vlnou E_3

záznam $E_1 E_3^* + E_1^* E_3$ na fotoemulzi se prosvítí rekonstrukční vlnou E_4 ,

a pak se pozoruje obraz předmětu $E_2 \propto E_1 E_3^* E_4$ nebo

jeho sdružený (konjugovaný) obraz $E_2 \propto E_1^* E_3 E_4$

Totéž může probíhat v reálném čase v nelineárním prostředí (DFWM)
dvě vlny spolu interferují, tak vytvářejí optickou mřížku,
na níž se třetí vlna ohýbá a generuje vlnu čtvrtou.

transmisní mřížka 4→2

reflexní mřížka 3→2

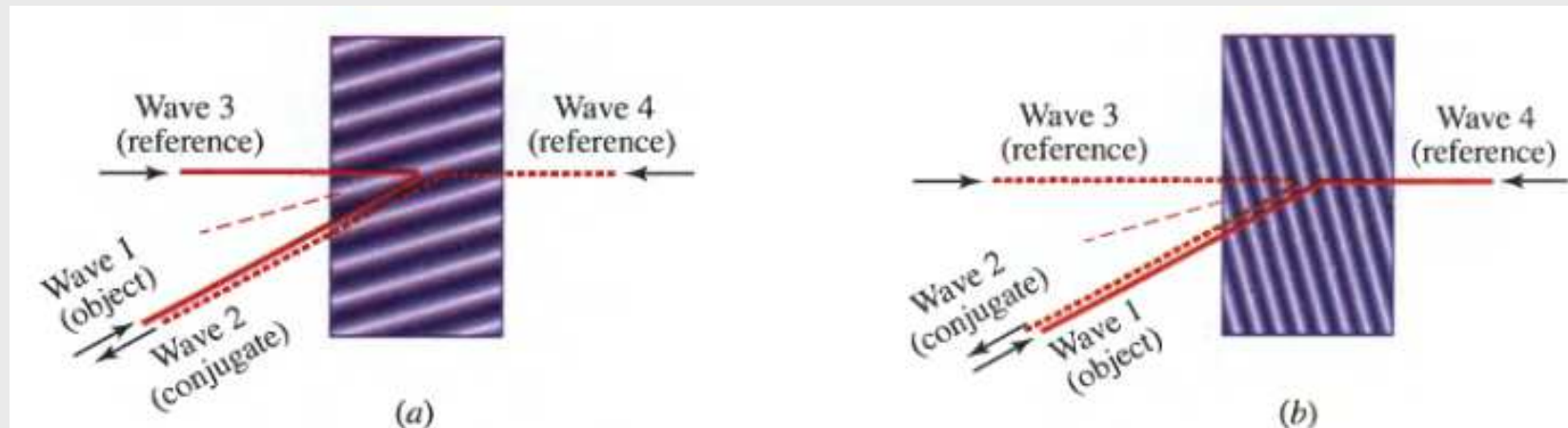


Figure 21.3-9 Four-wave mixing in a nonlinear medium. A reference and object wave interfere and create a grating from which the second reference wave reflects and produces a conjugate wave. There are two possibilities corresponding to (a) transmission and (b) reflection gratings.

Rekonstrukce vlny pomocí fázové konjugace

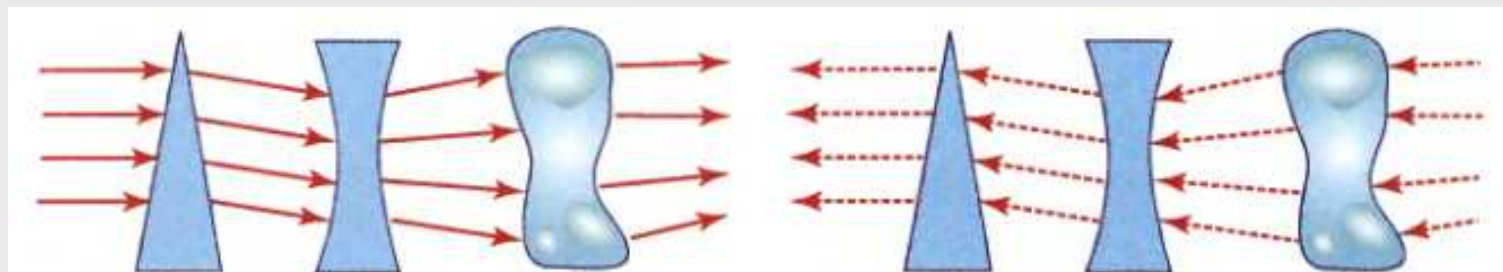


Figure 21.3-10 Optical reciprocity.

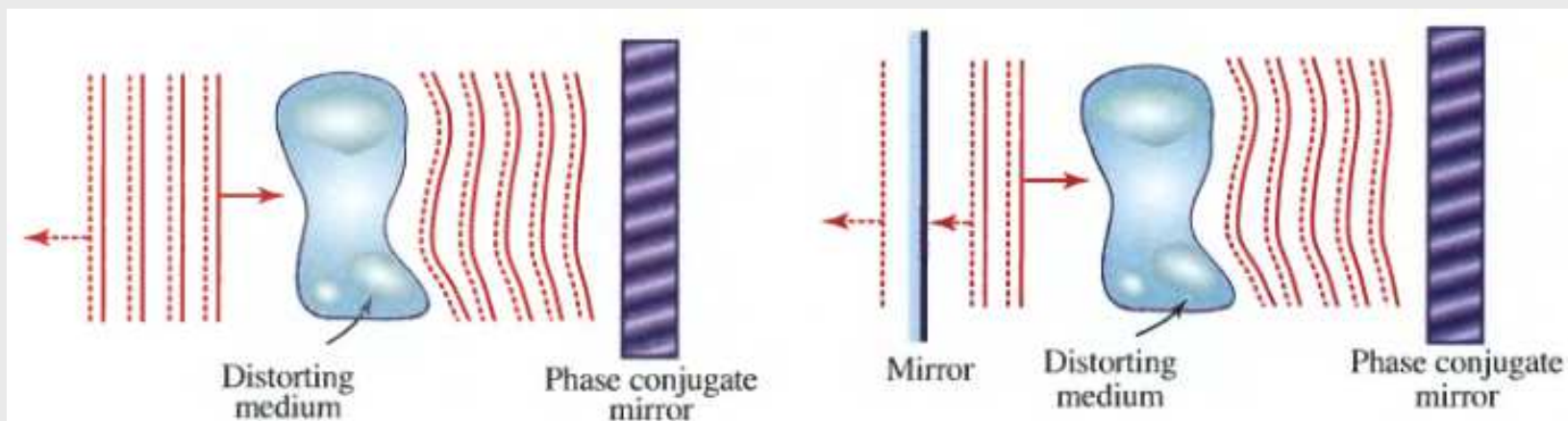
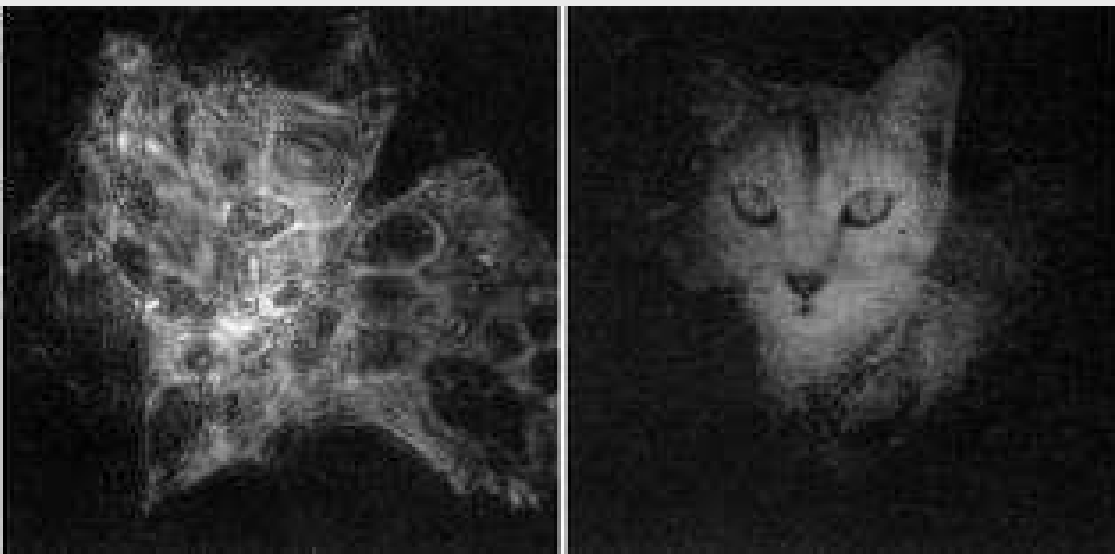


Figure 21.3-11 A phase conjugate mirror reflects a distorted wave onto itself, so that when it retraces its path, the distortion is compensated.

Figure 21.3-12 An optical resonator with an ordinary mirror and a phase conjugate mirror.



Vlevo:

obraz kočky po odrazu v normálním zrcadle, před kterým se nachází matné sklo

Vpravo:

obraz kočky po odrazu od fázově konjugujícího zrcadla, před kterým se nachází matné sklo

Teorie vázaných vln TWMM

Interakce tří rovinných vln $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$

$$\mathcal{P}_{\text{NL}} = 2d\mathcal{E}^2$$

Helmholtzova rovnice pro každou složku

$$(\nabla^2 + k_1^2)E_1 = -S_1 = -2\mu_0\omega_1^2 dE_3 E_2^*$$

$$(\nabla^2 + k_2^2)E_2 = -S_2 = -2\mu_0\omega_2^2 dE_3 E_1^*$$

$$(\nabla^2 + k_3^2)E_3 = -S_3 = -2\mu_0\omega_3^2 dE_1 E_2$$

rovnice vzájemně provázány přes nelinearitu

TWMM kolineární konfigurace

3 rovinné vlny vesměru z

$$E_q = A_q e^{-ik_q z} = \sqrt{2\eta\hbar\omega_q} a_q e^{-ik_q z}$$

význam a_q (amplituda fotonového toku), neboť

$$I_q = \frac{|E_q|^2}{2\eta} = \frac{|A_q|^2}{2\eta} = \hbar\omega_q |a_q|^2$$

$$\phi = \frac{I_q}{\hbar\omega_q} = |a_q|^2$$

Aproximace pomalu se měnící obálky $A_q(z)$

$$(\nabla^2 + k_q^2)A_q e^{-ik_q z} \approx -2ik_q \frac{dA_q}{dz} e^{-ik_q z}$$

Degenerovaný proces SHG

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \text{ a } \omega_3 = 2\omega$$

$$(\nabla^2 + k_1^2)E_1 = -S_1 = -2\mu_0\omega_1^2 dE_3 E_1^*$$

$$(\nabla^2 + k_3^2)E_3 = -S_3 = -\mu_0\omega_3^2 dE_1 E_1$$

$$\frac{da_1}{dz} = -iga_3 a_1^* e^{-i\Delta k z}$$

$$\frac{da_3}{dz} = -i\frac{g}{2} a_1^2 e^{i\Delta k z}$$

$$\text{kde } \Delta k = k_3 - 2k_1 \text{ a } g^2 = 4\eta^3 \hbar \omega^3 d^2$$

$$\frac{da_1}{dz} = -iga_3 a_2^* e^{-i\Delta k z}$$

$$\frac{da_2}{dz} = -iga_3 a_1^* e^{-i\Delta k z}$$

$$\frac{da_3}{dz} = -iga_1 a_2 e^{i\Delta k z}$$

$$\text{kde } \Delta k = k_3 - k_1 - k_2 \text{ a } g^2 = 2\eta^3 \hbar \omega_1 \omega_2 \omega_3 d^2$$

Integrály pohybu

$$\frac{da_1}{dz} = -iga_3a_2^*e^{-i\Delta kz}$$

$$\frac{da_2}{dz} = -iga_3a_1^*e^{-i\Delta kz}$$

$$\frac{da_3}{dz} = -iga_1a_2e^{i\Delta kz}$$

Odtud snadno ukážeme, že platí

(1)

$$\frac{d}{dz}(I_1 + I_2 + I_3) = \frac{d}{dz}(\hbar\omega_1|a_1|^2 + \hbar\omega_2|a_2|^2 + \hbar\omega_3|a_3|^2) = 0$$

neboli $(I_1 + I_2 + I_3) = \text{konst} \leftarrow$ zákon zachování energie

(2)

$$\frac{d}{dz}|a_1|^2 = \frac{d}{dz}|a_2|^2 = -\frac{d}{dz}|a_3|^2 \leftarrow \text{Manley - Roweovy relace}$$

a tedy, že $|a_1|^2 - |a_2|^2 = \text{konst}$, $|a_1|^2 + |a_3|^2 = \text{konst}$ a

$|a_2|^2 + |a_3|^2 = \text{konst}$ jsou invarianty procesu

Degenerovaný proces SHG

Platí ZZE

$$\frac{d}{dz}(I_1 + I_3) = \frac{d}{dz}(\hbar\omega_1|a_1|^2 + \hbar\omega_3|a_3|^2) = 0$$

neboli

$I_1 + I_3 = \text{konst} \leftarrow$ zákon zachování energie ZZE

nebo také

$$|a_1|^2 + 2|a_3|^2 = \text{konst}$$

Pokud je disperze

$$g^2 = 2\eta_1\eta_2\eta_3\hbar\omega_1\omega_2\omega_3d^2$$

místo

$$g^2 \approx 2\eta^3\hbar\omega_1\omega_2\omega_3d^2$$

Citlivost TWM procesu na fázi :

Pro $a_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $a_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ a $a_3 = r_3 e^{i\varphi_3}$

odtud dostaneme reálné rovnice

$$\frac{dr_1}{dz} = gr_2 r_3 \sin \theta, \quad \frac{d\varphi_1}{dz} = -g \frac{r_2 r_3}{r_1} \cos \theta$$

$$\frac{dr_2}{dz} = gr_1 r_3 \sin \theta, \quad \frac{d\varphi_2}{dz} = -g \frac{r_1 r_3}{r_2} \cos \theta$$

$$\frac{dr_3}{dz} = -gr_1 r_2 \sin \theta, \quad \frac{d\varphi_3}{dz} = -g \frac{r_1 r_2}{r_3} \cos \theta$$

kde $\theta = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2$

tedy

pro $\sin \theta > 0$ probíhá frekvenční konverze dolů $\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$

pro $\sin \theta < 0$ probíhá frekvenční konverze nahoru $\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_3$

$$\frac{d\theta}{dz} = g \left(-\frac{r_1 r_2}{r_3} + \frac{r_2 r_3}{r_1} + \frac{r_1 r_3}{r_2} \right) \cos \theta = \left(\frac{1}{r_3} \frac{dr_3}{dz} + \frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{dz} + \frac{1}{r_2} \frac{dr_2}{dz} \right) \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

neboli $\frac{d}{dz} \ln(r_1 r_2 r_3 \cos \theta) = 0$

Platí zákony zachování:

$$r_1^2 + r_3^2 = \text{konst}, \quad r_2^2 + r_3^2 = \text{konst}, \quad r_1 r_2 r_3 \cos \theta = \text{konst}$$

Pro $\theta = \pm\pi/2$ nebo $r_k = 0$ bude $\theta = \text{konst}$ a řešení se výrazně zjednoduší, vede na Jacobiho eliptické funkce,

např. pro $r_3(0) = 0$:

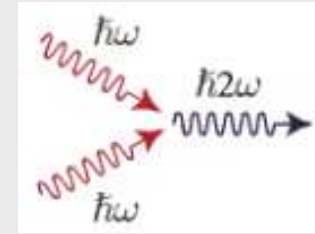
$$\frac{dr_3}{dz} = gr_1 r_2 = g \sqrt{r_1(0)^2 - r_3^2} \sqrt{r_2(0)^2 - r_3^2} \rightarrow r_3 = r_2(0) \operatorname{sn}_k g z r_1(0), \quad \text{kde } k = r_2(0)/r_1(0) < 1$$

A Generace druhé harmonické SHG

$$\frac{da_1}{dz} = -iga_3a_1^* e^{-i\Delta kz}$$

$$\frac{da_3}{dz} = -i\frac{g}{2}a_1^2 e^{i\Delta kz}$$

kde $\Delta k = k_3 - 2k_1$ a $g^2 = 4\eta^3\hbar\omega^3 d^2$



pro dokonalé sladění $\Delta k = 0$

$$\frac{da_1}{dz} = -iga_3a_1^*$$

$$\frac{da_3}{dz} = -i\frac{g}{2}a_1^2$$

navíc platí $|a_1|^2 + 2|a_3|^2 = \text{konst}$

řešení

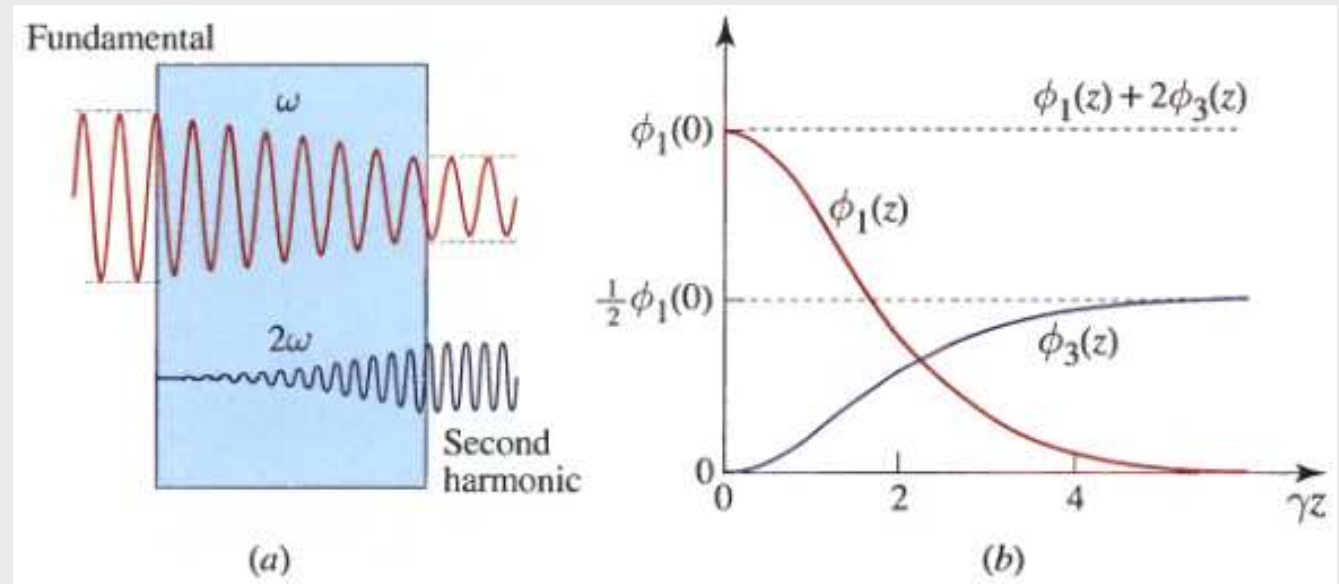
$$a_1(z) = a_1(0) \operatorname{sech} \frac{ga_1(0)z}{\sqrt{2}}$$

$$a_3(z) = -i\frac{a_1(0)}{\sqrt{2}} \operatorname{tgh} \frac{ga_1(0)z}{\sqrt{2}}$$

řešení

$$\phi_1(z) = a_1^2(0) \operatorname{sech}^2 \frac{ga_1(0)z}{\sqrt{2}} = a_1^2(0) \operatorname{sech}^2 \frac{\gamma z}{2}$$

$$\phi_3(z) = \frac{a_1^2(0)}{2} \operatorname{tgh}^2 \frac{ga_1(0)z}{\sqrt{2}} = \frac{a_1^2(0)}{2} \operatorname{tgh}^2 \frac{\gamma z}{2}$$



Odvození řešení SHG pro dokonalé sladění $\Delta k = 0$ a $a_3(0) = 0$

$$\frac{da_1}{dz} = -iga_3a_1^*$$

$$\frac{da_3}{dz} = -i\frac{g}{2}a_1^2$$

navíc platí $|a_1|^2 + 2|a_3|^2 = \text{konst}$,

předpokládejme $a_1 = \alpha$ a $a_3 = -i\beta$, kde α, β jsou reálná, pak

$$\frac{d\alpha}{dz} = -g\beta\alpha$$

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{g}{2}\alpha^2 = \frac{g}{2}(a_1(0)^2 - 2\beta^2) = g\left(\frac{1}{2}a_1(0)^2 - \beta^2\right)$$

navíc platí $\alpha^2 + 2\beta^2 = a_1(0)^2$

separace proměnných dává :

$$\int_0^\beta \frac{d\beta}{\frac{1}{2}a_1(0)^2 - \beta^2} = \int_0^z g dz$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_1(0)} \operatorname{arctgh} \frac{\beta}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_1(0)} = gz$$

takže $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(0) \operatorname{tgh} \frac{ga_1(0)z}{\sqrt{2}}$ a odtud

$$a_3 = -i\beta = -i\frac{1}{\sqrt{2}}a_1(0) \operatorname{tgh} \frac{ga_1(0)z}{\sqrt{2}}$$

$$a_1 = \sqrt{a_1(0)^2 - 2\beta^2} = a_1(0) \sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{ga_1(0)z}{\sqrt{2}}} = a_1(0) \operatorname{sech} \frac{ga_1(0)z}{\sqrt{2}}$$

Účinnost SHG

$$\eta_{\text{SHG}} = \frac{I_3(L)}{I_1(0)} = \frac{\hbar\omega_3\phi_3(L)}{\hbar\omega_1\phi_1(0)} = \frac{2\phi_3(L)}{\phi_1(0)} = \text{tgh}^2 \frac{ga_1(0)L}{\sqrt{2}} \rightarrow 1$$

$$\eta_{\text{SHG}} \approx \frac{g^2 a_1(0)^2 L^2}{2} = 2\eta^3 \omega^2 d^2 L^2 I_1(0) = 2\eta^3 \omega^2 d^2 \frac{L^2}{A} P \ll 1$$

velká účinnost :

* pulzní lasery P

* optimalizace poměru $L^2 / A \rightarrow$ například optická vlákna nebo planární vlnovody

typické parametry : $L = 1 \text{ cm}$, $A = 10 \mu\text{m} \times 10 \mu\text{m}$, $P = 3 \text{ W}$, $I = 3 \text{ MW/cm}^2 \rightarrow \eta_{\text{SHG}} \approx 10 \%$

Fázové rozladění u SHG

pro fázové rozladění $\Delta k \neq 0$ malá účinnost

$$a_1 \approx a_1(0) = \text{konst}$$

$$\frac{da_3}{dz} = -i \frac{g}{2} a_1^2 e^{i\Delta kz}$$

odtud

$$a_3(L) = -i \frac{g}{2} a_1^2(0) \int_0^L e^{i\Delta kz} dz = -\frac{g}{2\Delta k} a_1^2(0) (e^{i\Delta kL} - 1)$$

účinnost konverze

$$\eta_{\text{SHG}} = \frac{I_3(L)}{I_1(0)} = \frac{2\phi_3(L)}{\phi_1(0)} \approx \frac{2g^2}{\Delta k^2} a_1^2(0) \sin^2 \frac{\Delta kL}{2} \approx \frac{g^2 L^2}{2} a_1^2(0) \text{sinc}^2 \frac{\Delta kL}{2\pi} \approx 2\eta^3 \omega^2 d^2 \frac{L^2}{A} P \text{sinc}^2 \frac{\Delta kL}{2\pi}$$

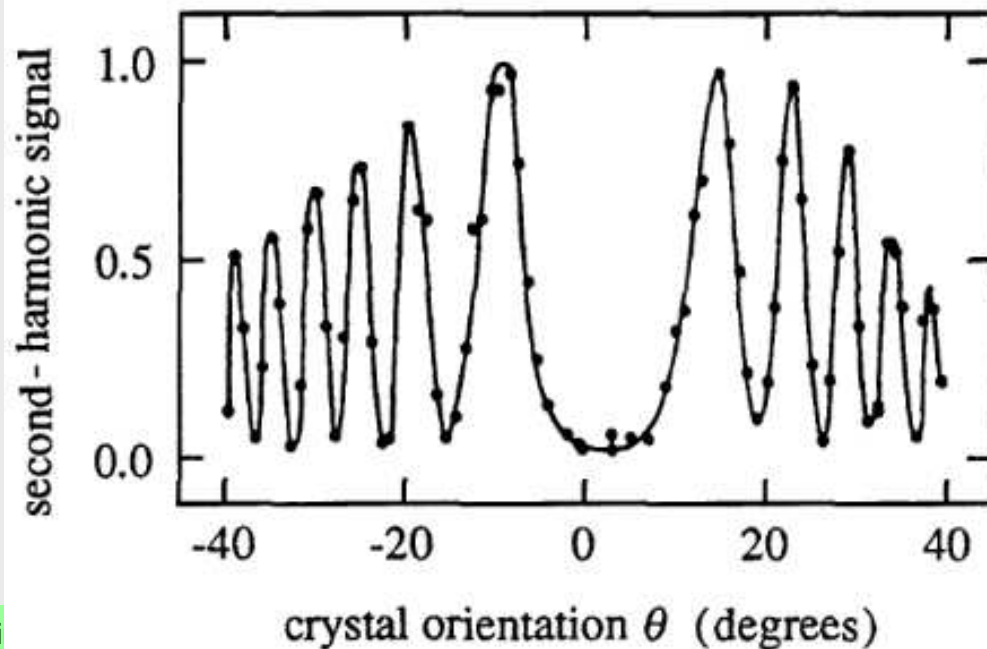
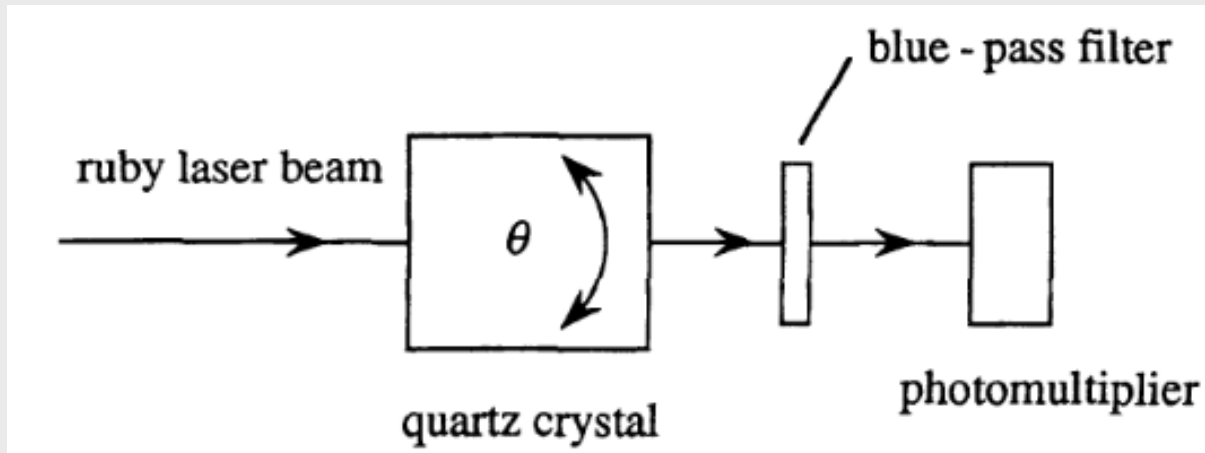
$$\text{liší se opět o faktor } \text{sinc}^2 \frac{\Delta kL}{2\pi} = \text{sinc}^2 \frac{L}{L_c}$$

Otáčeli křemenným krystalem a pozorovali druhou harmonickou v závislosti na natočení
 U křemene nelze splnit synchronizační podmínku (disperze silnější než anizotropie)

$n_o(690 \text{ nm})=1.541$, $n_e(690 \text{ nm})=1.550$

$n_o(345 \text{ nm})=1.565$, $n_e(345 \text{ nm})=1.575$

Silná závislost I_2 na interakční délce $L/\cos\theta$ a tedy na θ .



účinnost konverze

$$\eta_{\text{SHG}}(\theta) = \frac{I_3(L)}{I_1(0)} \approx \frac{2g^2}{\Delta k^2} a_1^2(0) \sin^2 \frac{\Delta k L}{2 \cos \theta}$$

kde $\Delta k \approx \text{konst}$

Stabilita SHG

Inverzní proces: $2\omega \rightarrow \omega + \omega$

generace 2. subharmonické

degenerovaný parametrický zesilovač

Pro $a_1(0) = 0$ bude řešení SHG konstantní $a_1 = 0$ a $a_3 = a_3(0)$,

ale nestabilní! Díky šumu je vždy $a_1(0) \neq 0$,

a proto pro silné $a_3 \approx a_3(0)$ dostaneme

$$\frac{da_1}{dz} = -iga_3(0)a_1^*, \quad \frac{da_1^*}{dz} = ig a_3^*(0)a_1$$

$$\frac{d^2 a_1}{dz^2} = g^2 |a_3(0)|^2 a_1 = \gamma^2 a_1$$

kde $\gamma = g|a_3(0)|$, odtud řešení

$$a_1 = a_1(0)\cosh \gamma z - ie^{i\theta} a_1^*(0)\sinh \gamma z,$$

kde $\theta = \arg a_3(0)$,

takže řešení exponenciálně rychle roste

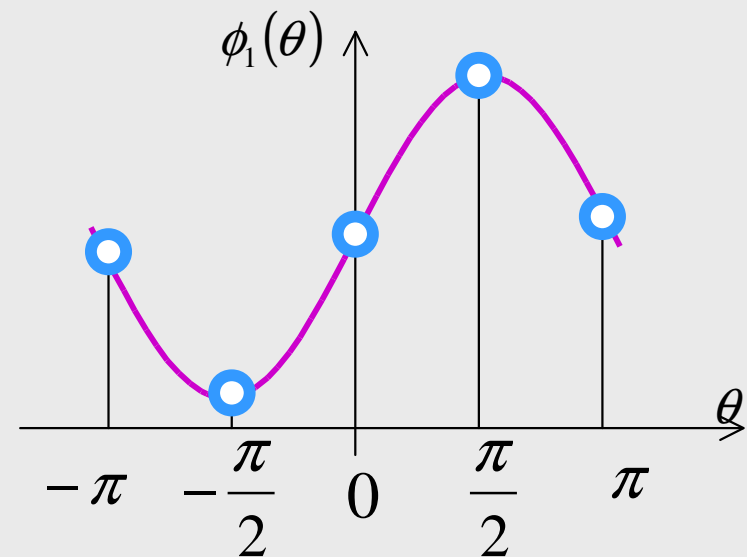
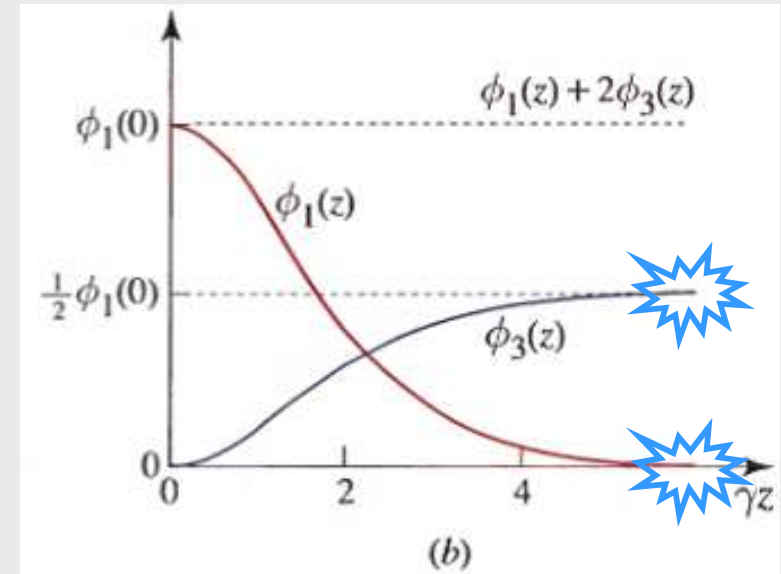
a brzy přestane platit počáteční předpoklad $a_3 \approx a_3(0)$

Fázově citlivý zesilovač

Pro fotonový tok platí

$\phi_1 = \phi_1(0)(\cosh 2\gamma z + \sinh 2\gamma z \sin \theta) \leftarrow$ fázově citlivý zesilovač = výstupní výkon závisí na fázi signálu $\phi_1(\theta)$

např. pro $\theta = \pm\pi/2$ bude $\phi_1 = \phi_1(0)(\cosh 2\gamma z \pm \sinh 2\gamma z) = \phi_1(0)\exp(\pm 2\gamma z)$



B Optická frekvenční konverze OFC

$\omega_1 \rightarrow \omega_3$, ω_2 čerpání, $a_2 \approx a_2(0) = \text{konst}$

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad \Delta k = 0$$

$$\frac{da_1}{dz} = -i \frac{\gamma}{2} a_3$$

$$\frac{da_3}{dz} = -i \frac{\gamma}{2} a_1$$

kde $\gamma = 2ga_2(0)$ je reálná konstanta (já bych volil $\frac{\gamma}{2} \rightarrow \gamma$)

Řešení:

$$a_1(z) = a_1(0) \cos \frac{\gamma z}{2}$$

$$a_3(z) = -ia_1(0) \sin \frac{\gamma z}{2}$$

a fotonové toky:

$$\phi_1(z) = \phi_1(0) \cos^2 \frac{\gamma z}{2}$$

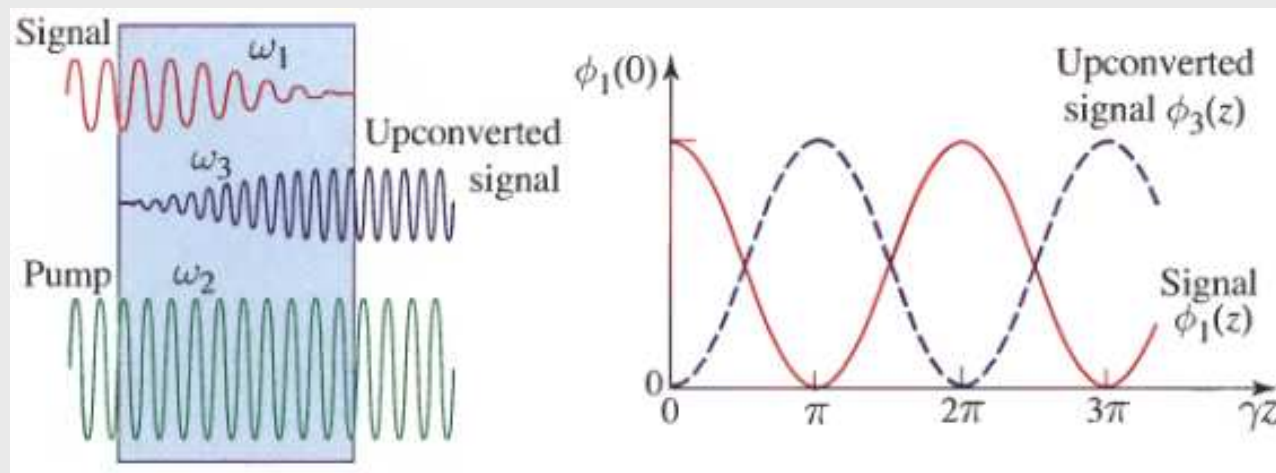
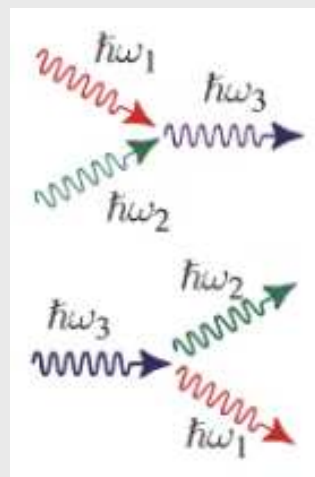
$$\phi_3(z) = \phi_1(0) \sin^2 \frac{\gamma z}{2}$$

účinnost konverze

$$\eta_{\text{OFC}} = \frac{I_3(L)}{I_1(0)} = \frac{\omega_3}{\omega_1} \sin^2 \frac{\gamma L}{2} > 1$$

pro $\gamma L \ll 1$

$$\eta_{\text{OFC}} \approx \frac{\omega_3}{\omega_1} \frac{\gamma^2 L^2}{4} = 2\eta^3 \omega_3^2 d^2 I_2(0) L^2 = 2\eta^3 \omega_3^2 d^2 \frac{L^2}{A} P_2 \quad \text{neboť } g^2 = 2\eta^3 \hbar \omega_1 \omega_2 \omega_3 d^2$$



Optimální účinnost konverze $\omega_1 \rightarrow \omega_3$ pro $L = \frac{\pi}{\gamma}$

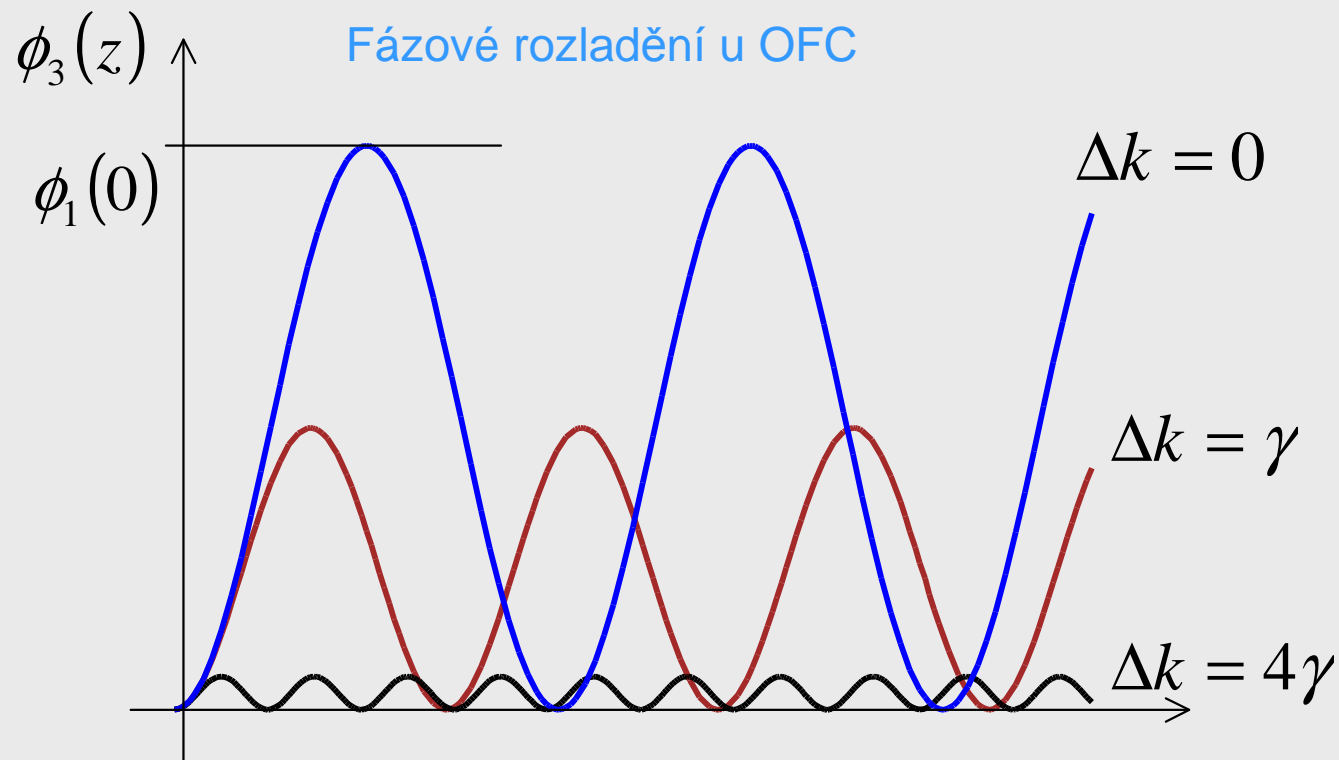
V případě rozladění $\Delta k \neq 0$ se řešení pozmění na

$$\phi_1(z) = \phi_1(0) \left(1 - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta k^2} \sin^2 \frac{gz}{2} \right),$$

$$\phi_3(z) = \phi_1(0) \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Delta k^2} \sin^2 \frac{gz}{2},$$

kde $g^2 = \gamma^2 + \Delta k^2$,

účinnost konverze je proto o faktor $\gamma^2 / g^2 \approx \gamma^2 / \Delta k^2$ menší



C Optický parametrický zesilovač OPA

$\omega_3 \rightarrow \omega_1, \omega_2$, ω_3 čerpání, $a_3 \approx a_3(0) = \text{konst}$

$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $\Delta k = 0$

$$\frac{da_1}{dz} = -i \frac{\gamma}{2} a_2^*$$

$$\frac{da_2}{dz} = -i \frac{\gamma}{2} a_1^*$$

kde $\gamma = 2ga_3(0)$ je reálná konstanta

Řešení obecně:

$$a_1(z) = a_1(0) \cosh \frac{\gamma z}{2} - i a_2^*(0) \sinh \frac{\gamma z}{2} \leftarrow \text{signál}$$

$$a_2(z) = a_2(0) \cosh \frac{\gamma z}{2} - i a_1^*(0) \sinh \frac{\gamma z}{2} \leftarrow \text{jalový mód}$$

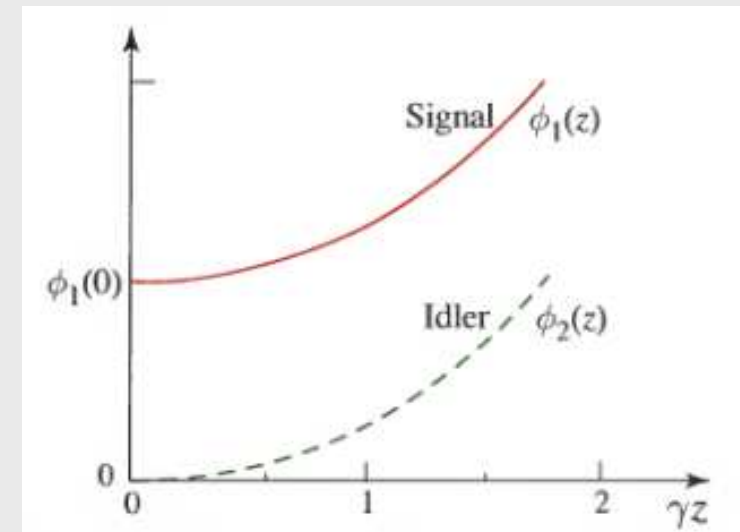
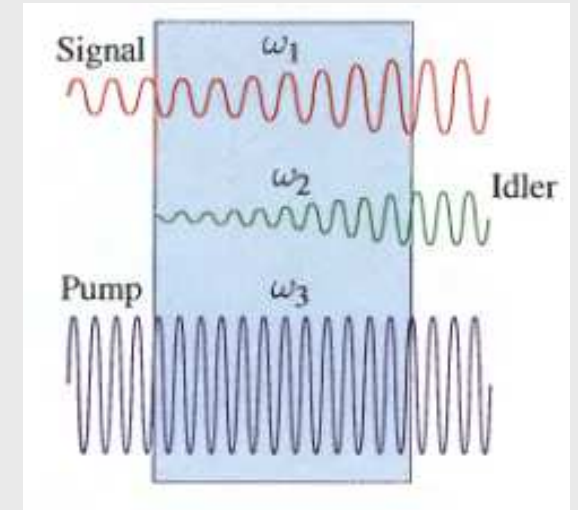
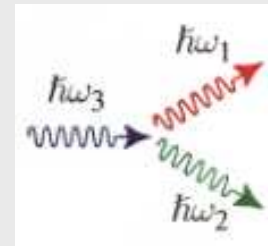
Pro $a_2(0) = 0$ vyjdou fotonové toky:

$$\phi_1(z) = \phi_1(0) \cosh^2 \frac{\gamma z}{2} \approx \frac{1}{4} \phi_1(0) e^{\gamma z}$$

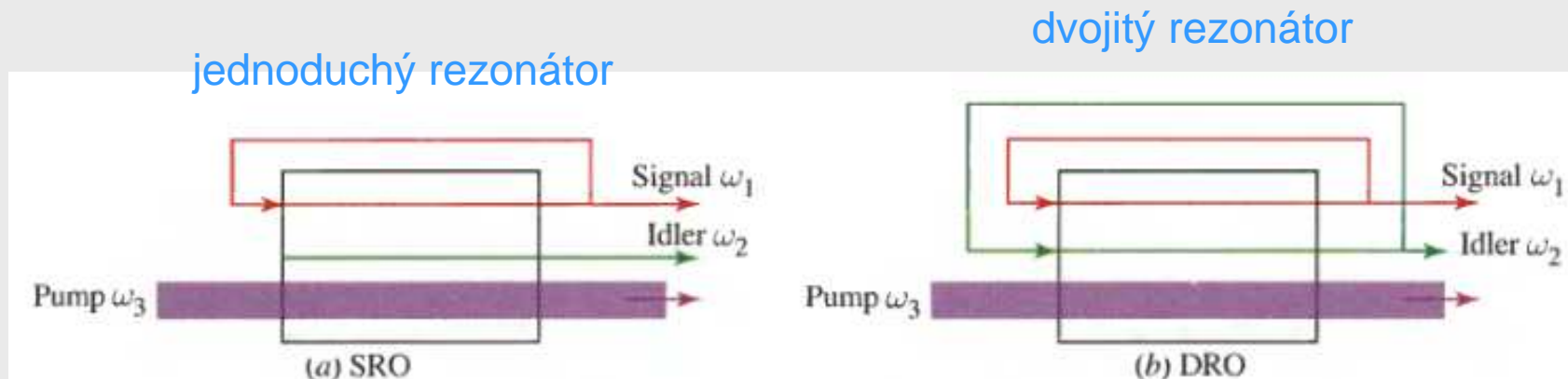
$$\phi_2(z) = \phi_1(0) \sinh^2 \frac{\gamma z}{2} \approx \frac{1}{4} \phi_1(0) e^{\gamma z}$$

zisk konverze

$$G_{\text{OPA}} = \frac{I_1(L)}{I_1(0)} = \cosh^2 \frac{\gamma L}{2} \approx \frac{1}{4} e^{\gamma L}, \quad \text{kde } \gamma = 2ga_3(0) = \sqrt{8\eta^3 \omega_1 \omega_2 d^2 I_3(0)}$$



Optický parametrický oscilátor OPO



Parametrický oscilátor dostaneme z OPA zavedením zpětné vazby pro signálovou nebo jalovou vlnu SRO nebo pro obě současně DRO

Musí být splněny synchronizační podmínky :

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad n_3 \omega_3 = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2$$

navíc ω_1, ω_2 musí být rezonančními frekvencemi rezonátoru

a zisk musí převyšovat ztráty v rezonátoru

předpokládejme stejná zrcadla R_1 a R_2 a délka nelineárního média L

SRO prahová podmínka :

$$a_1(L)R_1 = a_1(0)$$

$$R_1 \cosh \frac{\gamma L}{2} = 1 \rightarrow \text{pro malá } \gamma L \rightarrow R_1 \approx 1 - \frac{\gamma^2 L^2}{8} \quad \text{a protože } \gamma = 2\sqrt{2\eta^3 \omega_1 \omega_2 d^2 I_3(0)}$$

$$I_3(0) \approx \frac{P_3}{A} \approx \frac{1 - R_1}{\eta^3 \omega_1 \omega_2 d^2 L^2}, \quad \text{kde } R_1 \approx 1 \text{ značí odrazivost zrcadla rezonátoru}$$

DRO prahová podmínka :

$$a_1(L)R_1 = a_1(0) \quad \text{a} \quad a_2(L)R_2 = a_2(0)$$

dává

$$R_1 a_1(L) = R_1 \left(a_1(0) \cosh \frac{\mathcal{L}}{2} - i a_2^*(0) \sinh \frac{\mathcal{L}}{2} \right) = a_1(0)$$

$$R_2 a_2(L) = R_2 \left(-i a_1^*(0) \sinh \frac{\mathcal{L}}{2} + a_2(0) \cosh \frac{\mathcal{L}}{2} \right) = a_2(0)$$

to dává pro malá \mathcal{L} soustavu rovnic

$$\frac{1-R_1}{R_1} a_1(0) = -i a_2^*(0) \frac{\mathcal{L}}{2}$$

$$-i a_1^*(0) \frac{\mathcal{L}}{2} = \frac{1-R_2}{R_2} a_2(0)$$

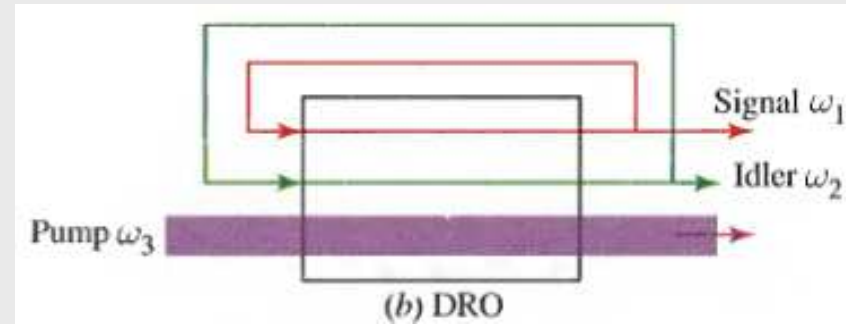
odtud podělením dostaneme v absolutních hodnotách podmínku

$$\frac{1-R_1}{R_1} = \frac{-i \frac{\mathcal{L}}{2}}{i \frac{\mathcal{L}}{2}} = \frac{1-R_2}{R_2}$$

neboli

$$\frac{1-R_1}{R_1} \frac{1-R_2}{R_2} = \frac{\gamma^2 L^2}{4} = 2\eta^3 \omega_1 \omega_2 d^2 I_3(0) L^2$$

$$I_3(0) = \frac{P_3}{A} = \frac{1}{2\eta^3 \omega_1 \omega_2 d^2 L^2} \frac{1-R_1}{R_1} \frac{1-R_2}{R_2} \approx \frac{(1-R_1)(1-R_2)}{2\eta^3 \omega_1 \omega_2 d^2 L^2} \leftarrow \text{prahová podmínka}$$



Teorie vázaných vln FWM

A. Čtyřvlnové směšování FWM

Interakce tří rovinných vln $\omega_3 + \omega_4 = \omega_1 + \omega_2$

$$\mathcal{P}_{\text{NL}} = 4\chi^{(3)}\mathcal{E}^3$$

Helmholtzova rovnice pro každou složku

$$(\nabla^2 + k_1^2)E_1 = -S_1 = -\mu_0\omega_1^2\chi^{(3)}\{6E_3E_4E_2^* + 3E_1(|E_1|^2 + 2|E_2|^2 + 2|E_3|^2 + 2|E_4|^2)\}$$

$$(\nabla^2 + k_2^2)E_2 = -S_2 = -\mu_0\omega_2^2\chi^{(3)}\{6E_3E_4E_1^* + 3E_2(2|E_1|^2 + |E_2|^2 + 2|E_3|^2 + 2|E_4|^2)\}$$

$$(\nabla^2 + k_3^2)E_3 = -S_3 = -\mu_0\omega_3^2\chi^{(3)}\{6E_1E_2E_4^* + 3E_3(2|E_1|^2 + 2|E_2|^2 + |E_3|^2 + 2|E_4|^2)\}$$

$$(\nabla^2 + k_4^2)E_4 = -S_4 = -\mu_0\omega_4^2\chi^{(3)}\{6E_1E_2E_3^* + 3E_4(2|E_1|^2 + 2|E_2|^2 + 2|E_3|^2 + |E_4|^2)\}$$

rovnice vzájemně provázány přes nelinearitu

$$S_1 = \overline{S_1} + k_1^2\Delta\chi_1E_1$$

$$\overline{S_1} = \mu_0\omega_1^2\chi^{(3)}6E_3E_4E_2^* \rightarrow \text{FWM}$$

$$\Delta\chi_1 = 2n\Delta n_1 = \frac{6\eta}{\varepsilon}\chi^{(3)}(I_1 + 2I_2 + 2I_3 + 2I_4) \rightarrow \text{optický Kerrův jev}$$

$$\Delta n_1 = \frac{\Delta\chi_1}{2n} = \frac{3\eta}{n\varepsilon}\chi^{(3)}(I_1 + 2I_2 + 2I_3 + 2I_4) = n_2(I_1 + 2I_2 + 2I_3 + 2I_4)$$

$$n_2 = \frac{3\eta}{n\varepsilon}\chi^{(3)}$$

B. Částečně degenerované čtyřvlnové směšování TWM

$$\omega_3 = \omega_4 = \omega_0$$

$$(\nabla^2 + k_1^2)E_1 = -S_1 = -\mu_0\omega_1^2\chi^{(3)}\{3E_0^2E_2^* + 3E_1(|E_1|^2 + 2|E_2|^2 + 2|E_0|^2)\}$$

$$(\nabla^2 + k_2^2)E_2 = -S_2 = -\mu_0\omega_2^2\chi^{(3)}\{3E_0^2E_1^* + 3E_2(2|E_1|^2 + |E_2|^2 + 2|E_0|^2)\}$$

$$(\nabla^2 + k_0^2)E_0 = -S_0 = -\mu_0\omega_3^2\chi^{(3)}\{6E_1E_2E_0^* + 3E_3(2|E_1|^2 + 2|E_2|^2 + |E_0|^2)\}$$

Aproximace pomalu se měnící obálky pro $\omega_0 \approx \omega_1 \approx \omega_2$

$$\frac{da_1}{dz} = -ig\{a_0^2a_2^*e^{-i\Delta kz} + a_1(|a_1|^2 + 2|a_2|^2 + 2|a_0|^2)\}$$

$$\frac{da_2}{dz} = -ig\{a_0^2a_1^*e^{-i\Delta kz} + a_2(2|a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_0|^2)\}$$

$$\frac{da_0}{dz} = -ig\{2a_0^*a_1a_2e^{i\Delta kz} + a_0(2|a_1|^2 + 2|a_2|^2 + |a_0|^2)\}$$

kde $\Delta k = 2k_0 - k_1 - k_2$ a $g = \hbar\omega_0k_0nn_2 = 3\hbar\omega_0^2\eta^2\chi^{(3)}$ a $n_2 = \frac{3\eta}{n\epsilon}\chi^{(3)}$

pro silné čerpání $a_0 \approx a_0(0) = \text{konst}$

$$\frac{da_1}{dz} = -i\gamma(a_2^*e^{-i\Delta kz} + 2a_1)$$

$$\frac{da_2}{dz} = -i\gamma(a_1^*e^{-i\Delta kz} + 2a_2)$$

kde $\gamma = g|a_0|^2$.

Pro rezonanci $\Delta k = 0$ vyjde řešení
(Teich, Saleh mají řešení 21.5.20 špatně!)

$$a_1(z) = a_1(0)\cos\gamma\sqrt{3}z - \frac{i}{\sqrt{3}}(a_2^*(0) + 2a_1(0))\sin\gamma\sqrt{3}z$$

$$a_2(z) = a_2(0)\cos\gamma\sqrt{3}z - \frac{i}{\sqrt{3}}(a_1^*(0) + 2a_2(0))\sin\gamma\sqrt{3}z$$

Pro rezonanci $\Delta k = 4\gamma$ vyjde

$$a_1(z) = (a_1(0)\cosh\gamma z - ia_2^*(0)\sinh\gamma z)e^{-2i\gamma z}$$

$$a_2(z) = (a_2(0)\cosh\gamma z - ia_1^*(0)\sinh\gamma z)e^{-2i\gamma z}$$

Pro rezonanci $\Delta k = 2\gamma$ vyjde

$$a_1(z) = (a_1(0)(1 - i\gamma z) - i\gamma za_2^*(0))e^{-i\gamma z}$$

$$a_2(z) = (a_2(0)(1 - i\gamma z) - i\gamma za_1^*(0))e^{-i\gamma z}$$

C. Optická fázová konjugace OPC

DFWM : $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega$ a silné čerpání $I \approx I_3 + I_4$

$$(\nabla^2 + k^2)E_1 = -\xi E_2^*$$

$$(\nabla^2 + k^2)E_2 = -\xi E_1^*$$

kde $\xi = 6\mu_0\omega^2\chi^{(3)}E_3E_4 = 6\mu_0\omega^2\chi^{(3)}A_3A_4$ a $k = \frac{\bar{n}\omega}{c_0}$ a $\bar{n} \approx n + n_2I \approx n + n_2(I_3 + I_4)$

Uvažujme vstřicnou konfiguraci signálové a jalové vlny

$$E_1 = A_1e^{-ikz} \quad \text{a} \quad E_2 = A_2e^{+ikz} \quad \text{a} \quad E_3 = A_3e^{-ik'z} \quad \text{a} \quad E_4 = A_4e^{+ik'z}$$

dokonalé sladění $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$ a pomalu se měnící obálku

$$\frac{dA_1}{dz} = -i\gamma A_2^*$$

$$\frac{dA_2}{dz} = +i\gamma A_1^* \leftarrow \text{zde opačné znaménko!}$$

$$\text{kde } \gamma = \frac{\xi}{2k} = \frac{3\mu_0\omega^2\chi^{(3)}}{k} A_3A_4 = 3\eta\omega\chi^{(3)} A_3A_4 = \frac{3\eta_0\omega\chi^{(3)}}{n} A_3A_4$$

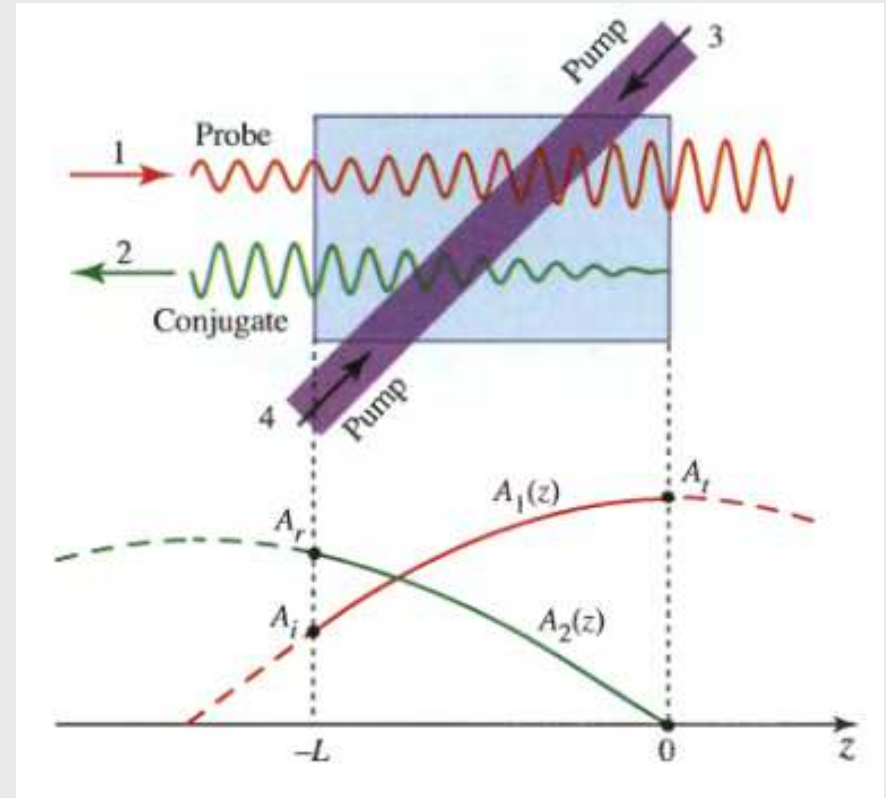
pro $A_1(-L) = A$ a $A_2(0) = 0$ je řešení :

$$A_1(z) = \frac{A}{\cos \gamma L} \cos \gamma z$$

$$A_2(z) = i \frac{A^*}{\cos \gamma L} \sin \gamma z$$

odražená vlna $A_R = A_2(-L) = -iA^* \tan \gamma L \leftarrow$ konjugovaná vlna pro $\gamma L > \pi/4$ zesílená vlna

prošlá vlna $A_T = A_1(0) = \frac{A}{\cos \gamma L} > A \leftarrow$ zesílená vlna, pro $\gamma L = \pi/2 \rightarrow$ máme oscilátor



Pokud ponecháme Kerrovské členy

$$\frac{dA_1}{dz} = -i\gamma(A_2^* + 2A_1)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = +i\gamma(A_1^* + 2A_2)$$

pro $A_1(-L) = A$ a $A_2(0) = 0$ bude řešení jen fázově posunuto:

$$A_1(z) = A \frac{\cos \gamma z}{\cos \gamma L} \exp(-2i\gamma(L+z))$$

$$A_2(z) = iA \frac{\sin \gamma z}{\cos \gamma L} \exp(2i\gamma(L+z))$$

D. Generace třetí harmonické THG

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega \quad \text{a} \quad \omega_4 = 3\omega$$

$$S_1 = \mu_0 \omega_1^2 \chi^{(3)} \{3E_4 E_1^{*2} + 3E_1 (|E_1|^2 + 2|E_4|^2)\}$$

$$S_4 = \mu_0 \omega_4^2 \chi^{(3)} \{E_1^3 + 3E_4 (2|E_1|^2 + |E_4|^2)\}$$

pro silné $a_1 = a_1(0) \rightarrow$ THG

\rightarrow problém se synchronizací, malá účinnost

$$\frac{da_4}{dz} \approx -iga_1^3 e^{i\Delta kz}$$

$$\text{kde } \Delta k = k_4 - 3k_1 \quad \text{a} \quad g = \hbar \sqrt{\frac{3\eta_4}{4\eta_1}} \eta_4^2 \omega_4^2 \chi^{(3)}$$

fázově synchronizační podmínka :

$$n(3\omega) = n(\omega) \quad \rightarrow$$

kombinace normální a anomální disperze

vhodné směsi dvou plynů,

směs Xe a Rb, účinnost až 10 %,

Anizotropní nelineární prostředí

$$\mathcal{P}_i = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij} \mathcal{E}_j + 2 \sum_{jk} d_{ijk} \mathcal{E}_j \mathcal{E}_k + 4 \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)} \mathcal{E}_j \mathcal{E}_k \mathcal{E}_l + \dots \leftarrow \text{Taylorův rozvoj}$$

tenzory $\chi_{ij} = \chi_{ji}$, $d_{ijk} = d_{ikj}$, $\chi_{ijkl}^{(3)} = \chi_{iklj}^{(3)} = \chi_{iljk}^{(3)} \leftarrow$ permutační symetrie posledních indexů

Stažená notace: $d_{ijk} \equiv d_{iJ}$

záměna dvojice indexů $jk = 11, 22, 33, 23, 31, 12$ za jeden index $J = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

například $d_{25} = d_{231} = d_{213}$

podobně $\chi_{ijkl}^{(3)} = \chi_{IK}^{(3)}$ tj. 6×6 indexů IK

Table 21.6-1 Second-order nonlinear coefficients d_{iJ} for some representative crystal groups.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Cubic $\bar{4}3m$ (e.g., GaAs, CdTe, InAs)	Tetragonal $\bar{4}2m$ (e.g., KDP, ADP)	Trigonal $3m$ (e.g., BBO, LiNbO ₃ , LiTaO ₃)

Table 21.6-2 Third-order nonlinear coefficients $\chi_{IK}^{(3)}$ for an isotropic medium.

$$\begin{bmatrix} \chi_{11}^{(3)} & \chi_{12}^{(3)} & \chi_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ \chi_{12}^{(3)} & \chi_{11}^{(3)} & \chi_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ \chi_{12}^{(3)} & \chi_{12}^{(3)} & \chi_{11}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi_{44}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{44}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{44}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad \chi_{44}^{(3)} = \frac{1}{2} (\chi_{11}^{(3)} - \chi_{12}^{(3)}).$$

← jen 2 parametry!

Table 21.6-3 Representative magnitudes of second-order nonlinear optical coefficients for selected materials.^a

Crystal	d_{iJ} (C/V ²)	d_{iJ}/ϵ_o (pm/V) ^b
β -BaB ₂ O ₄ (BBO)	$d_{22} = 2.0 \times 10^{-23}$	2.2
	$d_{31} = 3.5 \times 10^{-25}$	0.04
LiB ₃ O ₅ (LBO)	$d_{31} = 5.9 \times 10^{-24}$	0.67
	$d_{32} = 7.5 \times 10^{-24}$	0.85
	$d_{33} = 3.5 \times 10^{-25}$	0.04
LiIO ₃	$d_{31} = 3.9 \times 10^{-23}$	4.4
	$d_{33} = 4.1 \times 10^{-23}$	4.6
LiNbO ₃	$d_{22} = 1.9 \times 10^{-23}$	2.1
	$d_{31} = 4.1 \times 10^{-23}$	4.6
	$d_{33} = 2.2 \times 10^{-22}$	25.2
KNbO ₃	$d_{31} = 1.1 \times 10^{-22}$	11.9
	$d_{32} = 1.2 \times 10^{-22}$	13.7
KTiOPO ₄ (KTP)	$d_{31} = 2.0 \times 10^{-23}$	2.2
	$d_{32} = 3.3 \times 10^{-23}$	3.7
	$d_{33} = 1.3 \times 10^{-22}$	14.6
KH ₂ PO ₄ (KDP)	$d_{36} = 3.1 \times 10^{-24}$	0.38
NH ₄ H ₂ PO ₄ (ADP)	$d_{36} = 4.2 \times 10^{-24}$	0.47
α -SiO ₂ (quartz)	$d_{11} = 2.7 \times 10^{-24}$	0.30
KBe ₂ BO ₃ F ₂ (KBBF)	$d_{11} = 4.3 \times 10^{-24}$	0.49
GaAs	$d_{14} = 1.5 \times 10^{-21}$	170.
Te	$d_{11} = 5.8 \times 10^{-21}$	650.

^aMost of the coefficients are as reported by D. N. Nikogosyan, *Nonlinear Optical Crystals: A Complete Survey*, Springer-Verlag, 2005. Values are provided at a wavelength $\lambda_o = 1.06 \mu\text{m}$ except for Te, which is provided at $\lambda_o = 10.6 \mu\text{m}$.

^bThe coefficients d/ϵ_o , specified in units of pm/V, are often used in practice. The nonlinear optical coefficients in C/V² (MKS units) are readily converted to pm/V by dividing d by $10^{-12}\epsilon_o \approx 8.85 \times 10^{-24}$.

TWM v anizotropní nelineárním prostředí

$$P_i(\omega_3) = 2 \sum_{jk} d_{ijk} E_j(\omega_1) E_k(\omega_2)$$

Alternativně ve stažené notaci:

$$\begin{bmatrix} P_1(\omega_3) \\ P_2(\omega_3) \\ P_3(\omega_3) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & \cdots & d_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(\omega_1)E_1(\omega_2) \\ E_2(\omega_1)E_2(\omega_2) \\ E_3(\omega_1)E_3(\omega_2) \\ E_2(\omega_1)E_3(\omega_2) + E_3(\omega_1)E_2(\omega_2) \\ E_3(\omega_1)E_1(\omega_2) + E_1(\omega_1)E_3(\omega_2) \\ E_1(\omega_1)E_2(\omega_2) + E_2(\omega_1)E_1(\omega_2) \end{bmatrix}$$

Efektivní hodnota d

protože $E_j(\omega_1) = E(\omega_1) \cos \theta_{1j}$ a $E_k(\omega_2) = E(\omega_2) \cos \theta_{2k}$

$$P_i(\omega_3) = 2E(\omega_1)E(\omega_2) \sum_{jk} d_{ijk} \cos \theta_{1j} \cos \theta_{2k}$$

ke generaci ω_3 přispívá jen příčná složka P_\perp polarizace P kolmá na k_3

$$P_\perp(\omega_3) = \sum_i P_i(\omega_3) \sin \bar{\theta}_{3i} = 2d_{\text{eff}} E(\omega_1)E(\omega_2)$$

$$\text{kde } d_{\text{eff}} = \sum_{ijk} d_{ijk} \sin \bar{\theta}_{3i} \cos \theta_{1j} \cos \theta_{2k}$$

θ_k značí úhel mezi vektorem \mathbf{E} a osou x_k

$\bar{\theta}_k$ značí úhel mezi vektorem \mathbf{k} a osou x_k

Kolineární TWM typu I v krystalu KDP $o+o \rightarrow e$

Using (21.6-2) and Table 21.6-1 for crystals of $\bar{4}2m$ symmetry, such as KDP, the nonlinear components of the polarization density vector are given by

$$\begin{aligned} P_1(\omega_3) &= 2d_{14} [E_2(\omega_1)E_3(\omega_2) + E_3(\omega_1)E_2(\omega_2)] \\ P_2(\omega_3) &= 2d_{14} [E_3(\omega_1)E_1(\omega_2) + E_1(\omega_1)E_3(\omega_2)] \\ P_3(\omega_3) &= 2d_{36} [E_1(\omega_1)E_2(\omega_2) + E_2(\omega_1)E_1(\omega_2)]. \end{aligned} \quad (21.6-8)$$

In this geometry, the electric field components of waves 1 and 2 are:

$$\begin{aligned} E_1(\omega_1) &= E(\omega_1) \sin \phi, & E_2(\omega_1) &= -E(\omega_1) \cos \phi & E_3(\omega_1) &= 0, \\ E_1(\omega_2) &= E(\omega_2) \sin \phi, & E_2(\omega_2) &= -E(\omega_2) \cos \phi, & E_3(\omega_2) &= 0. \end{aligned}$$

Therefore, based on (21.6-8), the components of the polarization density vector for wave 3 are

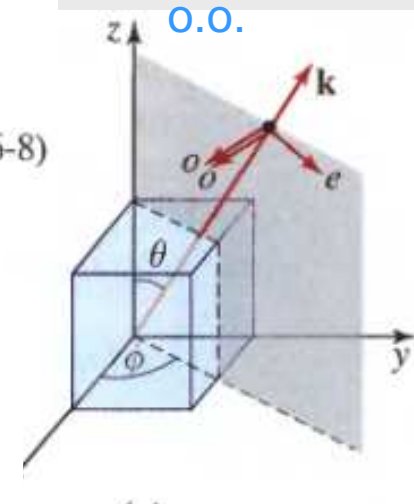
$$P_1(\omega_3) = 0, \quad P_2(\omega_3) = 0, \quad P_3(\omega_3) = -4d_{36} \sin \phi \cos \phi E(\omega_1)E(\omega_2). \quad (21.6-9)$$

In this case, the component $P_1(\omega_3) = -P_3(\omega_3) \sin \theta$, so that

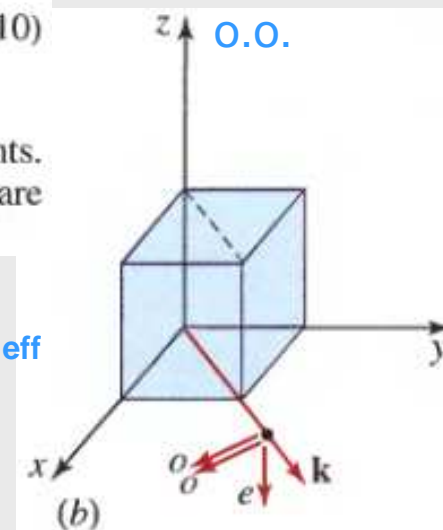
$$d_{\text{eff}} = -d_{36} \sin \theta \sin 2\phi. \quad (21.6-10)$$

This result can also be obtained by direct use of (21.6-7) with the appropriate angles and coefficients.

The effective nonlinear coefficient in (21.6-10) has its maximum magnitude d_{36} if the angles are $\theta = 90^\circ$ and $\phi = 45^\circ$, as illustrated in Fig. 21.6-1.



Obecná geometrie



Geometrie s maximálním d_{eff}

Disperzní nelineární prostředí

Disperze je důsledek setrvačnosti optického prostředí

Omezíme se opět na izotropní prostředí

lineární odezva $\mathcal{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi(t-t') \mathcal{E}(t') dt' = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} \chi(t') \mathcal{E}(t-t') dt' \leftarrow$ konvoluce

kde $\varepsilon_0 \chi(t \geq 0)$ značí impulzní odezvou funkci

podobně nelineární odezva $\mathcal{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \chi^{(2)}(t-t', t-t'') \mathcal{E}(t') \mathcal{E}(t'') dt' dt''$

kde $\varepsilon_0 \chi^{(2)}(t' \geq 0, t'' \geq 0)$ značí impulzní odezvou funkci

Protože $\mathcal{E}(t) = \text{Re}\{E(\omega)e^{i\omega t}\}$ a $\mathcal{P}(t) = \text{Re}\{P(\omega)e^{i\omega t}\}$,

platí $P(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) E(\omega)$, kde $\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t') e^{-i\omega t'} dt' = \text{FT}(\chi(t))$

podobně pro SFG platí $P(\omega_3) = \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2) E(\omega_1) E(\omega_2) = 2d(\omega_3; \omega_1, \omega_2) E(\omega_1) E(\omega_2)$

kde $\chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(2)}(t', t'') e^{-i(\omega_1 t' + \omega_2 t'')} dt' dt'' = \text{FT}_2(\chi^{(2)}(t', t''))$

pro SHG platí $P(2\omega) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega, \omega) E(\omega) E(\omega) = d(2\omega; \omega, \omega) E(\omega) E(\omega)$

pro elektrooptický jev platí podobně $P(\omega) = 2\varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega, 0) E(\omega) E(0) = 4d(\omega; \omega, 0) E(\omega) E(0)$

optická rektifikace $P(\omega) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi^{(2)}(\omega, -\omega) E(\omega) E(\omega)^* = d(\omega; \omega, 0) E(\omega) E(\omega)^*$

Není-li setrvačnost $\mathcal{P}(t) = \varepsilon_0 \chi_0 \mathcal{E}(t)$, bude $\chi(t-t') = \chi_0 \delta(t-t')$ a $\chi(\omega) = \chi_0 = \text{konst}$

Lorentzův model nelineární disperze :

$$\frac{d^2 \mathcal{P}}{dt^2} + \sigma \frac{d\mathcal{P}}{dt} + \omega_0^2 \mathcal{P} + \omega_0^2 \varepsilon_0 \chi_0 b \mathcal{P}^2 = \omega_0^2 \varepsilon_0 \chi_0 \mathcal{E}$$

$$\frac{d^2 \mathcal{P}}{dt^2} + \sigma \frac{d\mathcal{P}}{dt} + \omega_0^2 \mathcal{P} = \omega_0^2 \varepsilon_0 \chi_0 (\mathcal{E} - b \mathcal{P}^2)$$

parametr nelinearity b

lineární odezva pro $b = 0$ je
$$\chi(\omega) = \frac{\mathcal{P}(\omega)}{\varepsilon_0 \mathcal{E}(\omega)} = \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\sigma}$$

nelineární odezva pro malá b iteračně, na pravé straně nahradíme $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} - b \mathcal{P}^2$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - b \mathcal{P}^2 &= \text{Re}\{E(\omega)e^{i\omega t}\} - b \text{Re}^2\{\varepsilon_0 \chi(\omega)E(\omega)e^{i\omega t}\} \\ &= \text{Re}\{E(\omega)e^{i\omega t}\} - \frac{1}{2} b \text{Re}\{\varepsilon_0^2 \chi(\omega)^2 E(\omega)^2 e^{i2\omega t}\} - \frac{1}{2} b |\varepsilon_0 \chi(\omega)E(\omega)|^2 \end{aligned}$$

tyto členy mají postupně frekvence $\omega, 2\omega, 0$

odtud např. disperze nelineární polarizace
$$P_{NL}(2\omega) = -\varepsilon_0 \chi(2\omega) \frac{1}{2} b \varepsilon_0^2 \chi(\omega)^2 E(\omega)^2$$

$$d(2\omega; \omega, \omega) = -\frac{1}{2} b \varepsilon_0^3 \chi(\omega)^2 \chi(2\omega)$$

podobně platí **Millerovo pravidlo**

$$d(\omega_3; \omega_1, \omega_2) = -\frac{1}{2} b \varepsilon_0^3 \chi(\omega_1) \chi(\omega_2) \chi(\omega_3)$$

pro efektivní konverzi (propustné prostředí) musí ležet všechny tři frekvence $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \neq \omega_0$ mimo rezonanci ω_0 . Bude - li navíc $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ hluboko pod rezonančním kmitočtem ω_0 ,

bude $\chi(\omega) \approx \chi_0$ a
$$d(\omega_3; \omega_1, \omega_2) \approx -\frac{1}{2} b \varepsilon_0^3 \chi_0^3$$

Anizotropní + disperzní prostředí

$$P_i(\omega) = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij}(\omega) E_j(\omega) \leftarrow \text{lineární polarizace}$$

$$P_i(\omega_3) = 2 \sum_{jk} d_{ijk}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) \leftarrow \text{kvadratická polarizace}$$

$$P_i(\omega_4) = 6 \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) E_l(\omega_3) \leftarrow \text{kubická polarizace}$$

Obecné symetrie d_{ijk} a $\chi_{ijkl}^{(3)}$

reálné veličiny \mathcal{E} a \mathcal{P} :

$$E_i^*(\omega) = E_i(-\omega), P_i^*(\omega) = P_i(-\omega)$$

$$\chi_{ij}^*(\omega) = \chi_{ij}(-\omega)$$

$$d_{ijk}^*(\omega_3; \omega_1, \omega_2) = d_{ijk}(-\omega_3; -\omega_1, -\omega_2)$$

vnitřně permutační symetrie :

$$d_{ijk}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) = d_{ikj}(\omega_3; \omega_2, \omega_1) \leftarrow \text{komutace } j, k \text{ a } \omega_1, \omega_2$$

$$d_{ijk}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) = d_{jki}^*(\omega_1; -\omega_2, \omega_3) \leftarrow \text{cyklická záměna } i, j, k \text{ a } \omega_1, \omega_2, \omega_3$$

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \chi_{ijlk}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_3, \omega_2)$$

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \chi_{jkli}^{(3)}(\omega_1; -\omega_2, -\omega_3, \omega_4) = \chi_{klij}^{(3)}(\omega_2; -\omega_3, \omega_4, -\omega_1) = \chi_{lijk}^{(3)}(\omega_3; \omega_4, -\omega_1, -\omega_2)$$

bezztrátová prostředí :

d_{ijk}, χ_{ij} reálné veličiny proto

$$d_{ijk}(\omega_3; \omega_1, \omega_2) = d_{jki}(\omega_1; -\omega_2, \omega_3) = d_{kij}(\omega_2; \omega_3, -\omega_1)$$

bezdisperzní prostředí :

Kleinmanovy symetrie $d_{ijk} = d_{jki} = d_{kij} = d_{ikj} = d_{kji} = d_{jki}$

prostředí s centrální symetrií :

$$d_{ijk} = 0$$

Kvantově-optický formalismus

Hermitovský Hamiltonián $H = f(a, a^+)$

anihilační a kreační operátor $[a, a^+] = 1$

$H = \hbar c g (a_1 a_2 a_3^+ + a_1^+ a_2^+ a_3) \leftarrow$ TWM

Heisenbergova pohybová rovnice (plyne ze Schroedingerovy rovnice)

$$i\hbar \dot{a}_1 = [a_1, H] = \hbar g c a_2^+ a_3$$

$$i\hbar \dot{a}_2 = [a_2, H] = \hbar g c a_1^+ a_3$$

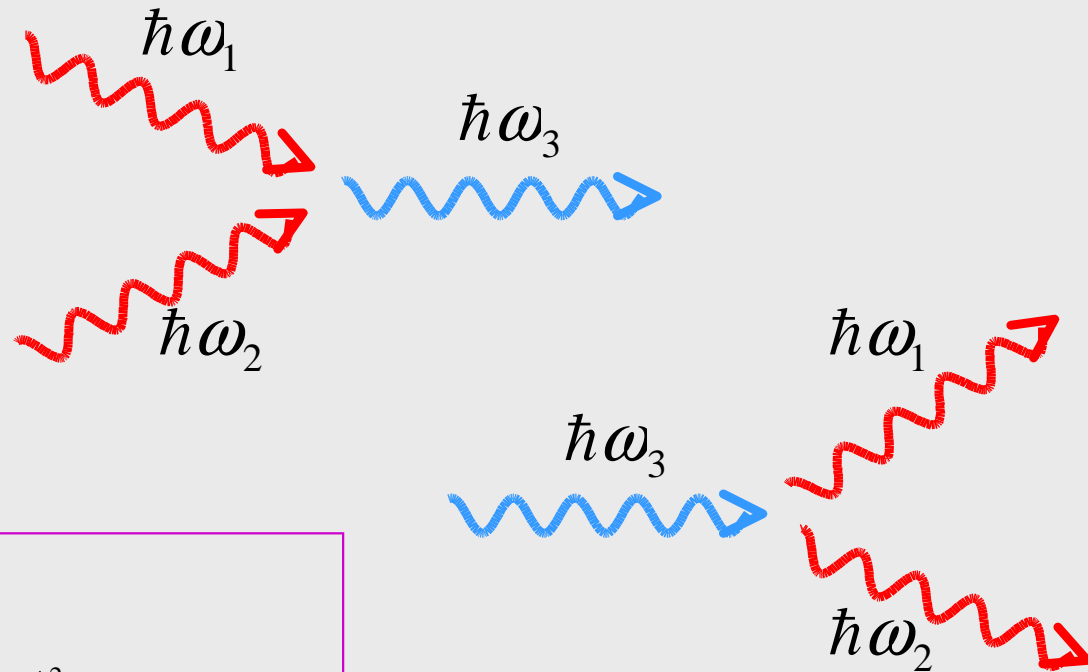
$$i\hbar \dot{a}_3 = [a_3, H] = \hbar g c a_1 a_2$$

tedy pro TWM

$$\frac{da_1}{dz} = \frac{da_1}{cdt} = \frac{1}{c} \dot{a}_1 = -i g a_2^+ a_3$$

$$\frac{da_2}{dz} = -i g a_1^+ a_3$$

$$\frac{da_3}{dz} = -i g a_1 a_2$$



Podobně pro SHG

$$H = \frac{1}{2} \hbar c g (a_1^2 a_3^+ + a_1^{+2} a_3) \leftarrow$$
 SHG

Heisenbergova pohybová rovnice :

$$\frac{da_1}{dz} = -i g a_1^+ a_3$$

$$\frac{da_3}{dz} = -\frac{1}{2} i g a_1^2$$

Stlačené světlo

Degenerovaný parametrický zesilovač

(SHG pro $\omega_1 = \omega_2$ a silné čerpání $a_3 \approx i\beta$),

pak bude

$$\frac{da_1}{dz} = g\beta a_1^+ \quad \text{nebo} \quad \frac{da}{dz} = g\beta a^+$$

a řešení $a(z) = a \cosh g\beta z + a^+ \sinh g\beta z$

Odtud kvadratury (homodynní detekce)

$$X(z) = a(z) + a^+(z) = X \exp(g\beta z)$$

$$Y(z) = \frac{a(z) - a^+(z)}{i} = Y \exp(-g\beta z)$$

$$\langle \Delta^2 X(z) \rangle = \langle \Delta^2 X \rangle \exp(2g\beta z)$$

$$\langle \Delta^2 Y(z) \rangle = \langle \Delta^2 Y \rangle \exp(-2g\beta z) \leq 1 \rightarrow \text{stlačený stav}$$

$$\langle \Delta^2 X(z) \rangle \langle \Delta^2 Y(z) \rangle = \langle \Delta^2 X \rangle \langle \Delta^2 Y \rangle = 1 \rightarrow \text{TCS}$$

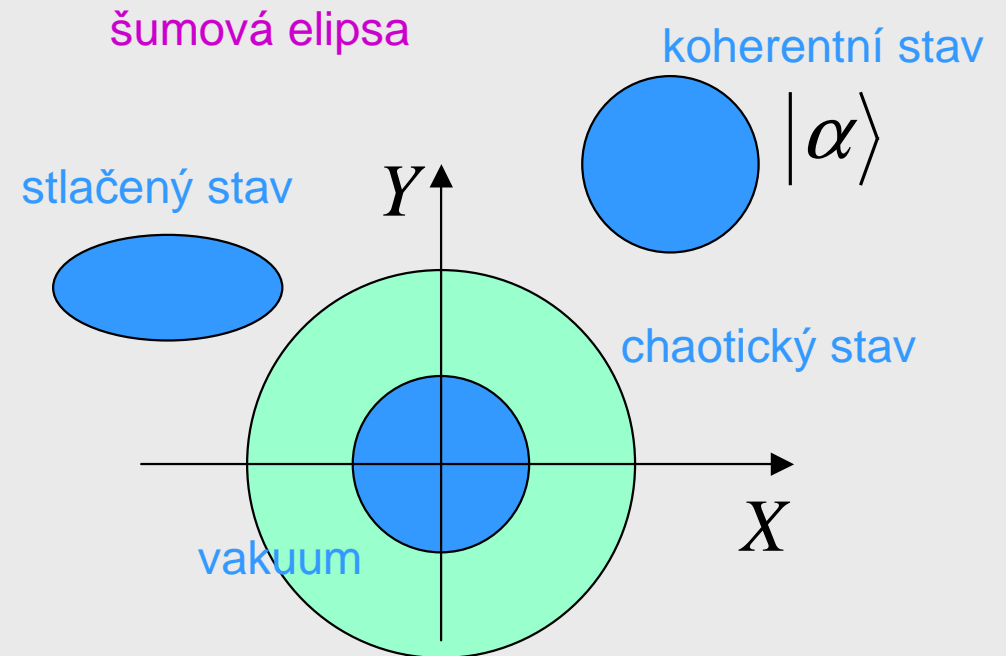
Pro koherentní stav $|\alpha\rangle$ je $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, a proto $\langle \Delta^2 X \rangle = \langle \Delta^2 Y \rangle = 1$, např.

$$\langle \Delta^2 X \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \langle a^2 + a^{+2} + aa^+ + a^+a \rangle - \langle a + a^+ \rangle^2 = \langle \alpha^2 + \alpha^{*2} + |\alpha|^2 + 1 + |\alpha|^2 \rangle - \langle \alpha + \alpha^* \rangle^2 = 1$$

také pro vakuum $\langle \Delta^2 X \rangle = 1$

pro Fockův stav $|n\rangle$ je $\langle \Delta^2 X \rangle = 1 + 2n$

pro termální chaotický stav s $\langle n \rangle$ je $\langle \Delta^2 X \rangle = 1 + 2\langle n \rangle$



Homodynní detekce

Signál a směšujeme s lokálním oscilátorem $\beta e^{i\theta}$ stejné frekvence

$$A_{1,2} = Ta \pm R\beta e^{i\theta}$$

$$I_{1,2} = A_{1,2}^+ A_{1,2} = T^2 a^+ a + R^2 |\beta|^2 \pm RT\beta (ae^{-i\theta} + a^+ e^{i\theta})$$

diferenciální zesilovač měří rozdíl foton proudů

$$I = I_1 - I_2 = 2RT\beta (ae^{-i\theta} + a^+ e^{i\theta}) = 2RT\beta X(\theta)$$

kde $X(\theta) = ae^{-i\theta} + a^+ e^{i\theta}$ značí obecnou kvadraturu,

kteřá dá pro $\theta = 0$ in - phase kvadraturu $X = a + a^+$

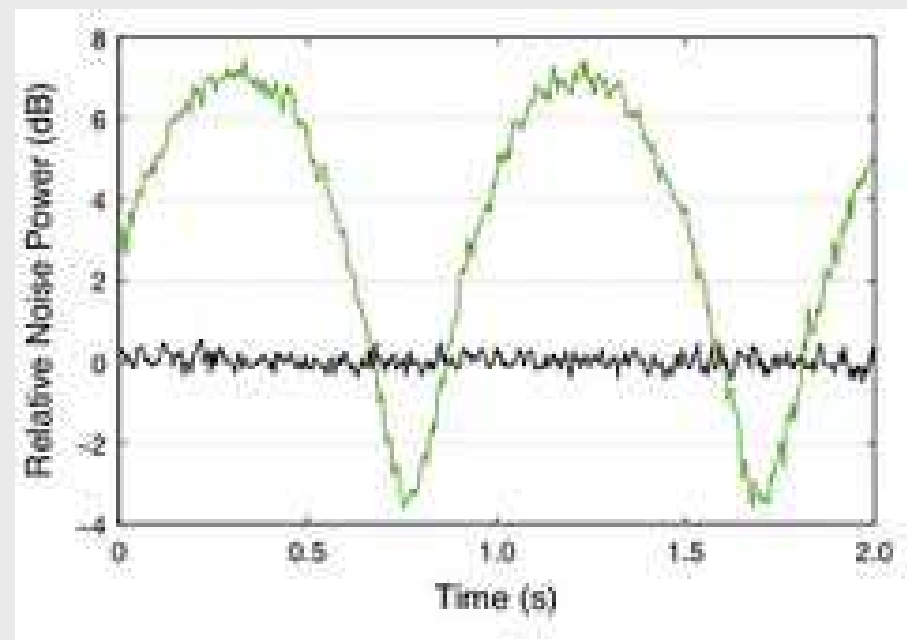
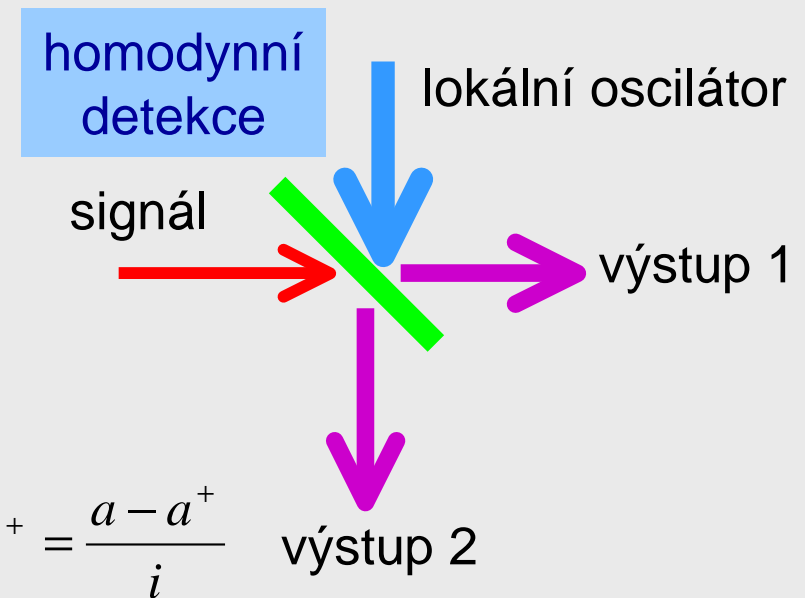
a pro $\theta = \pi/2$ dá out - of - phase kvadraturu $Y = -ia + ia^+ = \frac{a - a^+}{i}$

Pro žádný vstup (vakuum) $a = 0$ je

$$\langle \Delta^2 I \rangle_{\text{vac}} = 4R^2 T^2 \beta^2 \langle \Delta^2 X(\theta) \rangle_{\text{vac}} = 4R^2 T^2 \beta^2$$

zatímco pro stlačené světlo je

$$\langle \Delta^2 I \rangle = 4R^2 T^2 \beta^2 \langle \Delta^2 X(\theta) \rangle < \langle \Delta^2 I \rangle_{\text{vac}}$$



Parametrické procesy:

Virtuální hladiny, k popisu stačí reálné susceptibility, platí zákony zachování

Generace druhé a vyšší harmonické, optická konverze, parametrický proces, automodulace fáze, samofokuzace, koherentní anti-Stokesův Ramanův rozptyl (CARS)

Neparametrické procesy:

Skutečné hladiny, komplexní susceptibilita, neplatí zákony zachování, energie přechází do atomárních systémů

Saturovatelná absorpce, optická bistabilita, dvou a vícefotonová absorpce, spontánní Ramanův rozptyl

Ramanův rozptyl



Ramanův rozptyl (na molekulách)

obvykle organické kapaliny a plyny

$$\text{Hamiltonián } H = \hbar c (g a_L a_S^+ a_V^+ + \kappa a_L a_A^+ a_V + h.c.)$$

tedy

$$\frac{da_L}{dz} = -i g a_S a_V - i \kappa a_A a_V^+$$

$$\frac{da_S}{dz} = -i g a_L a_V^+$$

$$\frac{da_A}{dz} = -i \kappa a_L a_V$$

$$\frac{da_V}{dz} = -\gamma_V a_V - i g a_L a_S^+ - i \kappa a_L^+ a_A$$

typicky :
 $\hbar\omega_V \approx \hbar\omega/40$ až $\hbar\omega/7$
 (500 až 3000 cm^{-1})

Nejprve **spontánní Ramanův rozptyl** (slabý $g \approx 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$) :

silné čerpání $a_L \approx \text{konst}$, ale slabé termální nekoherentní fonony

$$\langle a_V^+(z_1) a_V(z_2) \rangle = n_V \delta(z_1 - z_2), \quad \langle a_V(z_1) a_V^+(z_2) \rangle = (1 + n_V) \delta(z_1 - z_2)$$

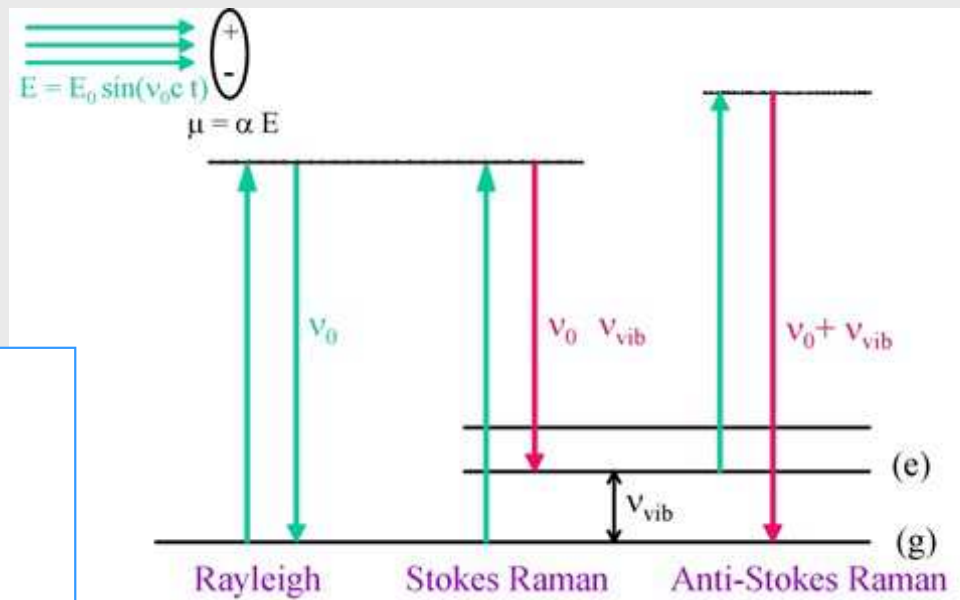
$$\frac{da_S}{dz} = -i g a_L a_V^+ \quad \frac{da_A}{dz} = -i \kappa a_L a_V$$

$$a_S = -i g a_L \int_0^z a_V^+(z_1) dz_1 \quad a_A = -i \kappa a_L \int_0^z a_V(z_1) dz_1$$

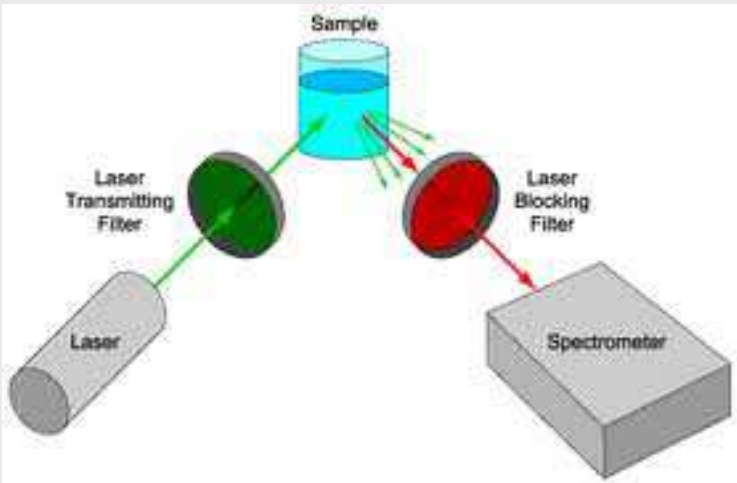
$$n_S = a_S^+ a_S \approx g^2 z |a_L|^2 (1 + n_V) \approx g^2 z |a_L|^2$$

$$n_A = a_A^+ a_A \approx \kappa^2 z |a_L|^2 n_V \approx 0$$

tedy $\frac{n_A}{n_S} \ll 1$, protože $n_V \approx \frac{1}{\exp(\hbar\omega_V / kT) - 1} \approx \frac{1}{100}$



$$\omega_{S,A} = \omega_L \mp \omega_V$$



typická konfigurace

Spontánní Ramanův rozptyl

Nekoherentní proces \rightarrow přes rychlostní rovnice

Hamiltonián $H = \hbar c (g a_L a_S^+ a_V^+ + \kappa a_L a_A^+ a_V + h.c.)$

frekvenční konvertor

parametrický proces

amplituda pravděpodobnosti procesu $\propto \langle f | H | i \rangle$

$$p \propto \sum_f |\langle f | H | i \rangle|^2 = \langle i | H^\dagger H | i \rangle$$

tedy pravděpodobnost emise S a A fotonu

pro počáteční $n_S \approx 0, n_A \approx 0, n_V \approx 0$

$$P_S \propto g^2 \langle i | a_L^+ a_S a_V a_L a_S^+ a_V^+ | i \rangle \approx g^2 |a_L|^2 (1 + n_S)(1 + n_V) \approx g^2 |a_L|^2 (1 + n_V)$$

$$P_A \propto \kappa^2 \langle i | a_L^+ a_A a_V^+ a_L a_A^+ a_V | i \rangle \approx \kappa^2 |a_L|^2 (1 + n_A) n_V \approx \kappa^2 |a_L|^2 n_V$$

odtud

$$\frac{dn_S}{dz} = g^2 |a_L|^2 (1 + n_V) \approx g^2 |a_L|^2$$

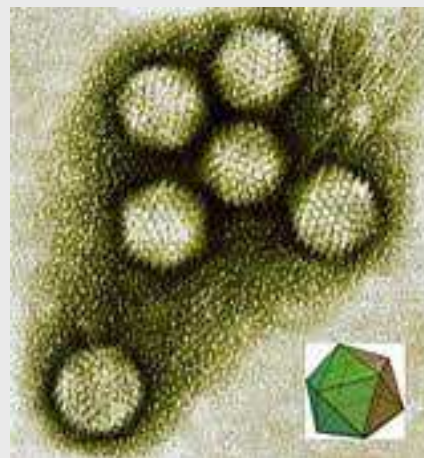
$$\frac{dn_A}{dz} = \kappa^2 |a_L|^2 n_V \approx 0$$

$$n_S \approx g^2 z |a_L|^2$$

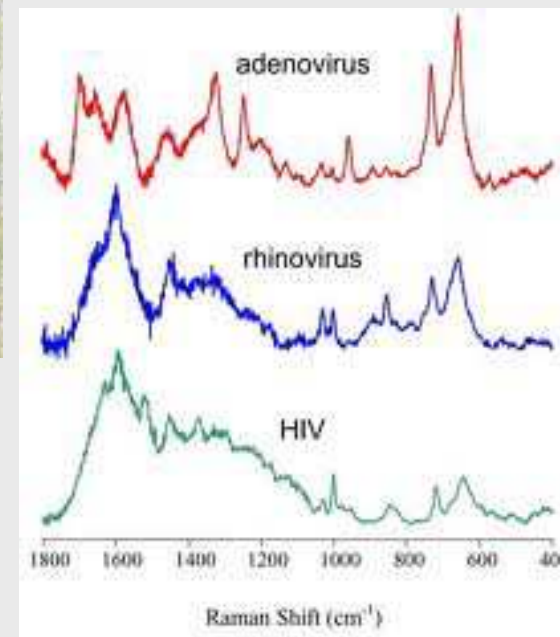
$$n_A \approx \kappa^2 z |a_L|^2 n_V \approx 0$$

Aplikace ramanovské spektroskopie

chemie, biologie, lékařství,
policie, obrana

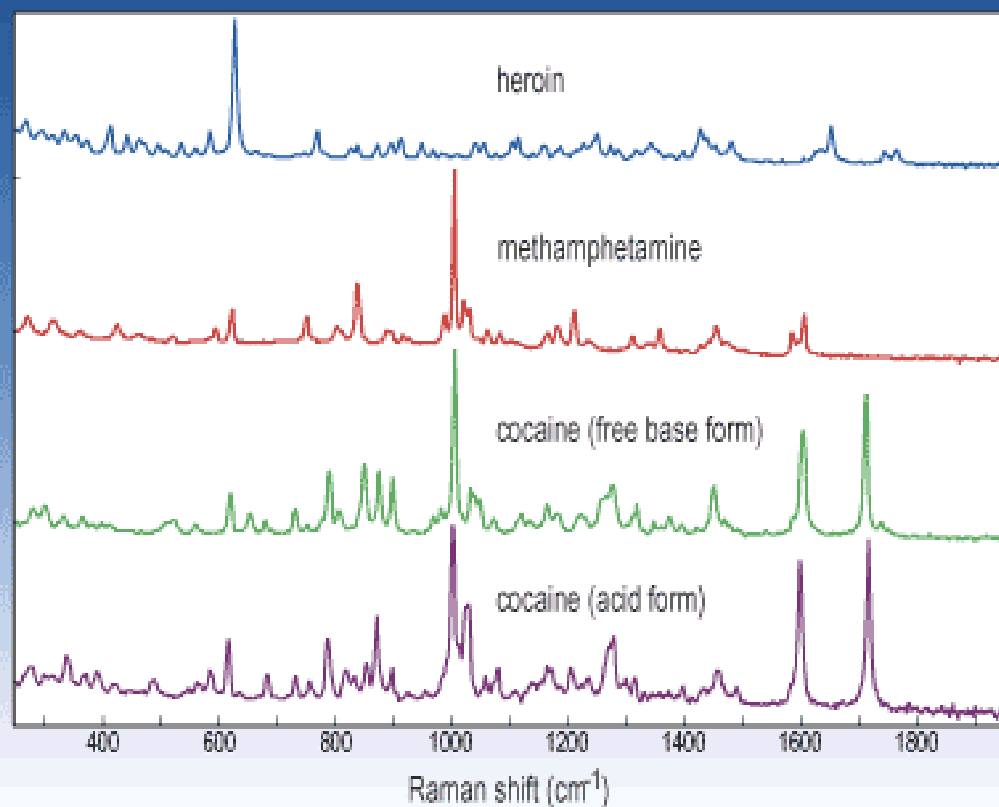


Ramanova spektra virů

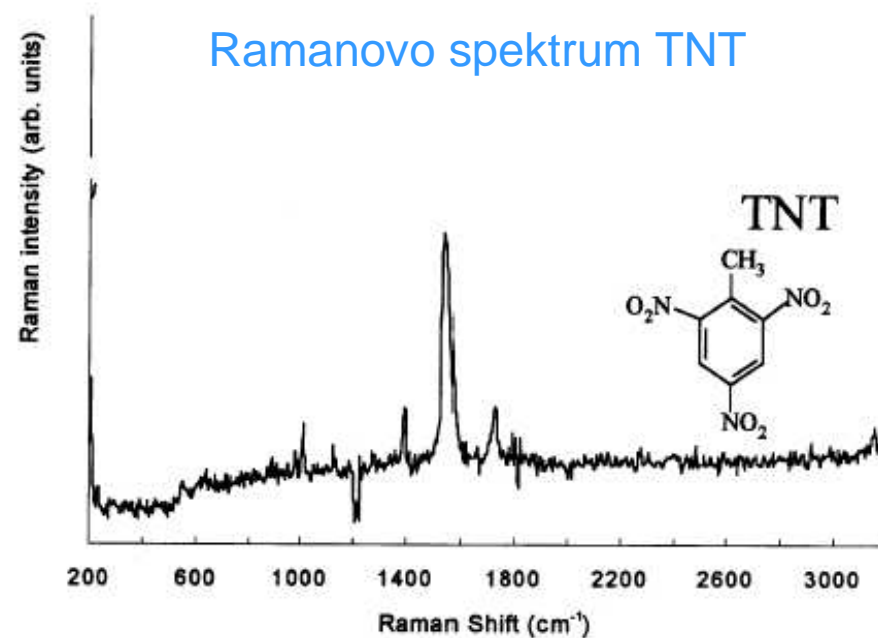


Ramanova spektra drog

Illegal narcotics, all white powders



Ramanovo spektrum TNT



Stimulovaný Ramanův rozptyl

Při dostatečně silném čerpání 100 MW/cm^2 se vybudí vibrační módy
 → **stimulovaný Ramanův rozptyl** (práh)

$$\frac{da_V}{dz} = -\gamma_V a_V - i g a_L a_S^+ - i \kappa a_L^+ a_A \approx 0$$

odtud adiabatická aproximace: $a_V = -i \frac{g}{\gamma_V} a_L a_S^+ - i \frac{\kappa}{\gamma_V} a_L^+ a_A$

po dosazení za a_V a $a_L \approx \text{konst}$

$$\frac{da_S}{dz} = -\gamma_S a_S + \frac{g^2}{\gamma_V} a_L a_L^+ a_S + \frac{g\kappa}{\gamma_V} a_L^2 a_A^+$$

$$\frac{da_A}{dz} = -\gamma_A a_A - \frac{\kappa^2}{\gamma_V} a_L a_L^+ a_A - \frac{g\kappa}{\gamma_V} a_L^2 a_S^+$$

Čistě Stokesova interakce $\kappa = 0$

$$a_S(z) = a_S(0) \exp\left(-\gamma_S + \frac{g^2}{\gamma_V} |a_L|^2\right) z, \quad \text{práh generace } |a_L|^2 > \frac{\gamma_S \gamma_V}{g^2}$$

Čistě anti - Stokesova interakce $g = 0$

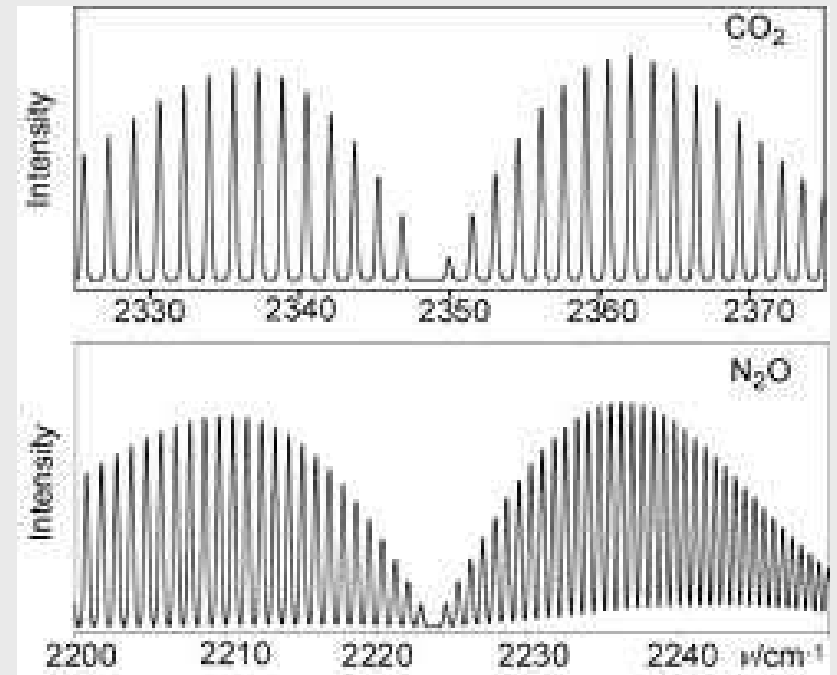
$$a_A(z) = a_A(0) \exp\left(-\gamma_A - \frac{\kappa^2}{\gamma_V} |a_L|^2\right) z, \quad \text{jen tlumení!}$$

Koherentní Ramanův rozptyl (CARS)

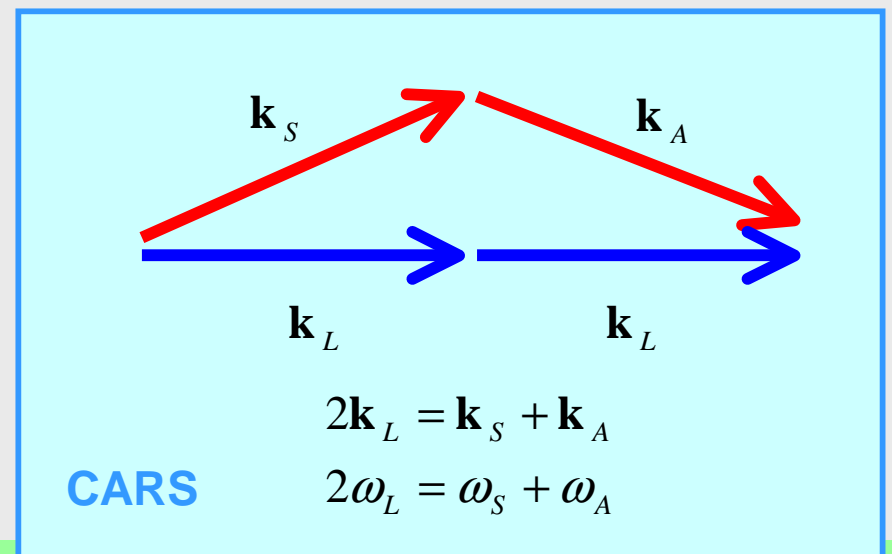
obecně $g \neq 0$ a $\kappa \neq 0$ (parametrický proces),

$$\text{práh čerpání vzroste! } |a_L|^2 > \frac{\gamma_S \gamma_A \gamma_V}{\gamma_A g^2 - \gamma_S \kappa^2} > \frac{\gamma_S \gamma_V}{g^2}$$

$$n_S(z) \approx n_A(z) \approx n_L(z) \rightarrow I_S(z) \approx I_A(z) \approx I_L(z)$$



Čistě rotační ekvidistantní spektrum
 lineárních molekul CO_2 a N_2O



Koherentní Ramanův rozptyl

Koherentní Ramanův rozptyl CARS

obecně pro rozladění

$$\Delta k = 2\omega_L - \omega_S - \omega_A \neq 0$$

vyjde

$$\frac{da_S}{dz} = \left(-\gamma_S + \frac{g^2}{\gamma_V} |a_L|^2 \right) a_S + \frac{g\kappa}{\gamma_V} a_L^2 a_A^+ e^{i\Delta k z}$$

$$\frac{da_A}{dz} = \left(-\gamma_A - \frac{\kappa^2}{\gamma_V} |a_L|^2 \right) a_A - \frac{g\kappa}{\gamma_V} a_L^2 a_S^+ e^{i\Delta k z}$$

odtud práh čerpání:

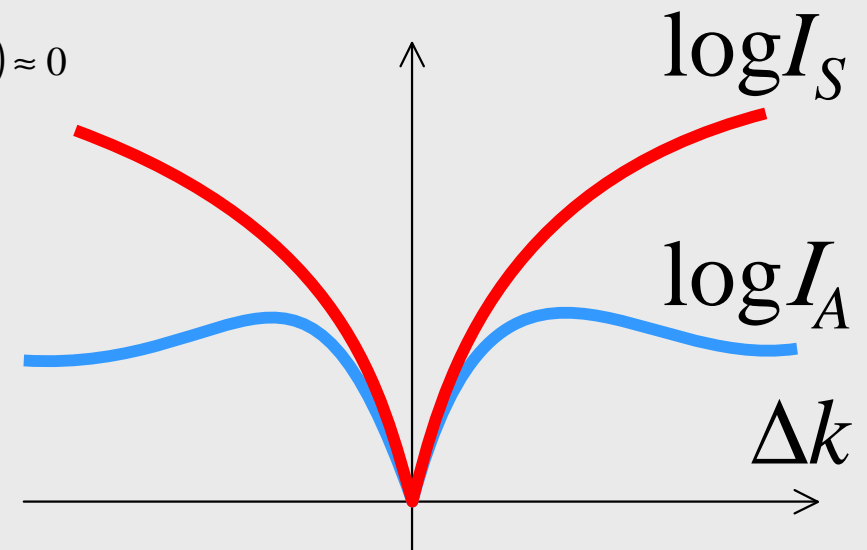
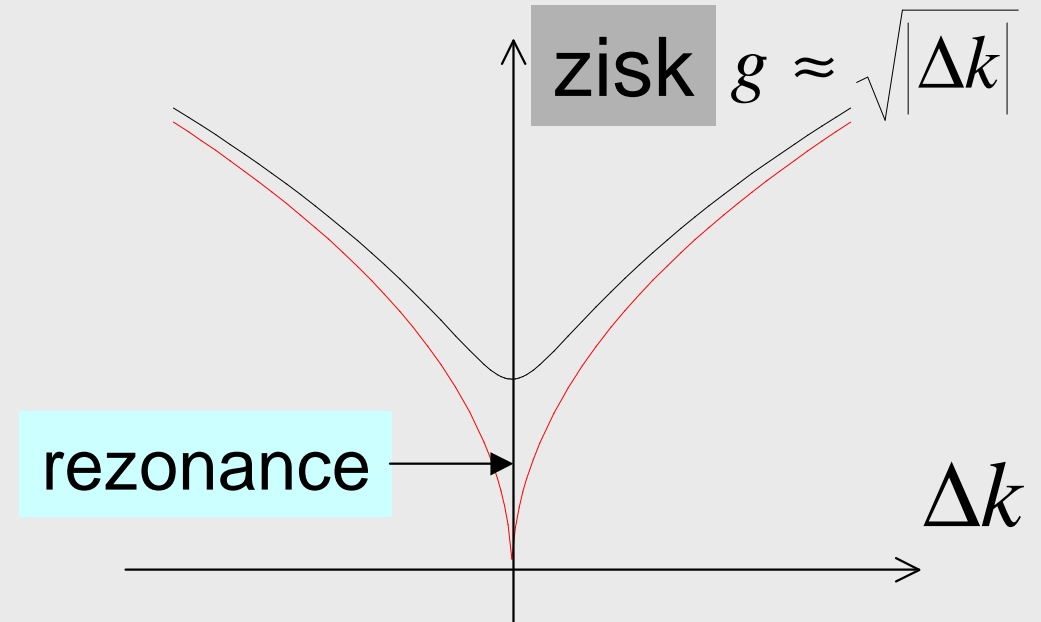
$$|a_L|^2 = \gamma_V \left| \frac{\gamma_S \gamma_A - i\Delta k (\gamma_S - \gamma_A) + \Delta k^2}{\gamma_A g^2 - \gamma_S \kappa^2 - i\Delta k (g^2 + \kappa^2)} \right|$$

pro $\gamma_A g^2 - \gamma_S \kappa^2 \approx 0$ vyjde $|a_L(\Delta k \rightarrow 0)|^2 \rightarrow \infty$ a zisk $g(\Delta k \rightarrow 0) \approx 0$

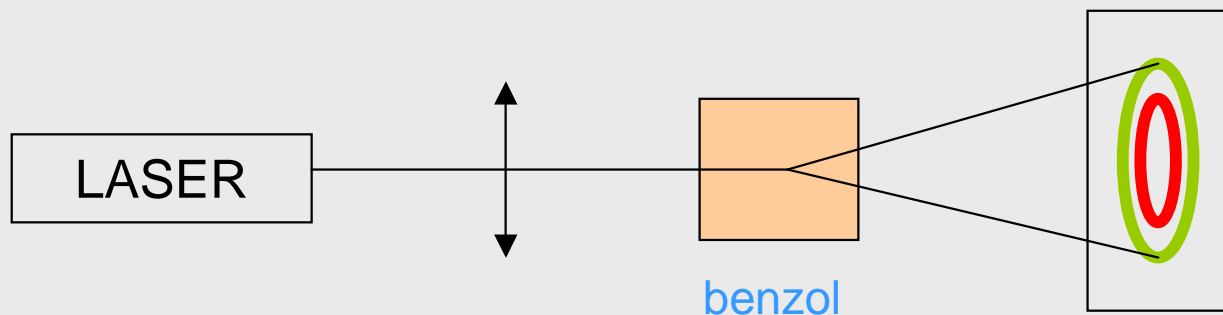
Při dokonalé rezonanci vlivem SA interakce A - složka zatlumí S - složku!

Také pro velké rozladění vyjde $|a_L(\Delta k \rightarrow \infty)|^2 \rightarrow \infty$ a zisk $g(\Delta k \rightarrow \infty) \approx 0$

Optimální rozladění $\Delta k \neq 0$!



Koherentní Ramanův rozptyl



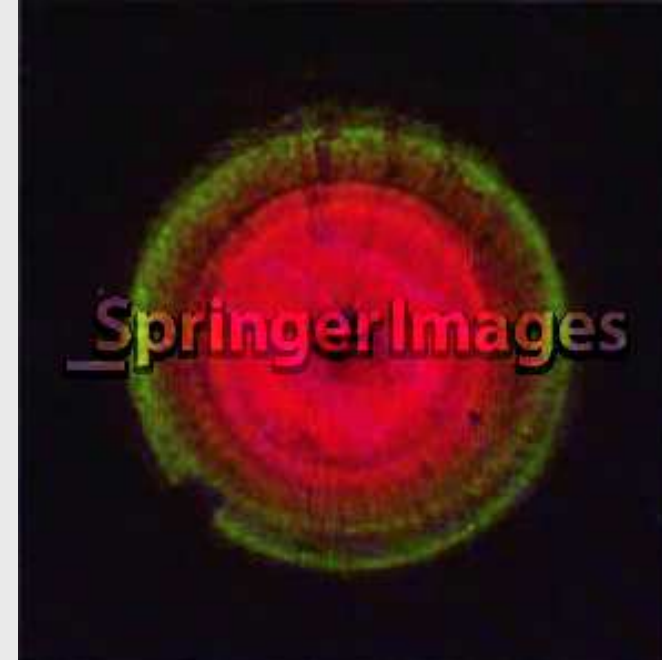
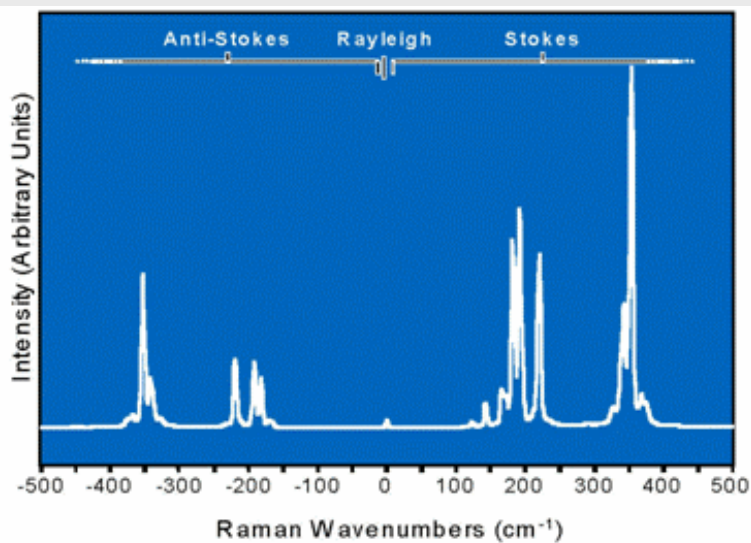
$$\mathbf{k}_S + \mathbf{k}_A = 2\mathbf{k}_L$$

$$\omega_S + \omega_A = 2\omega_L$$

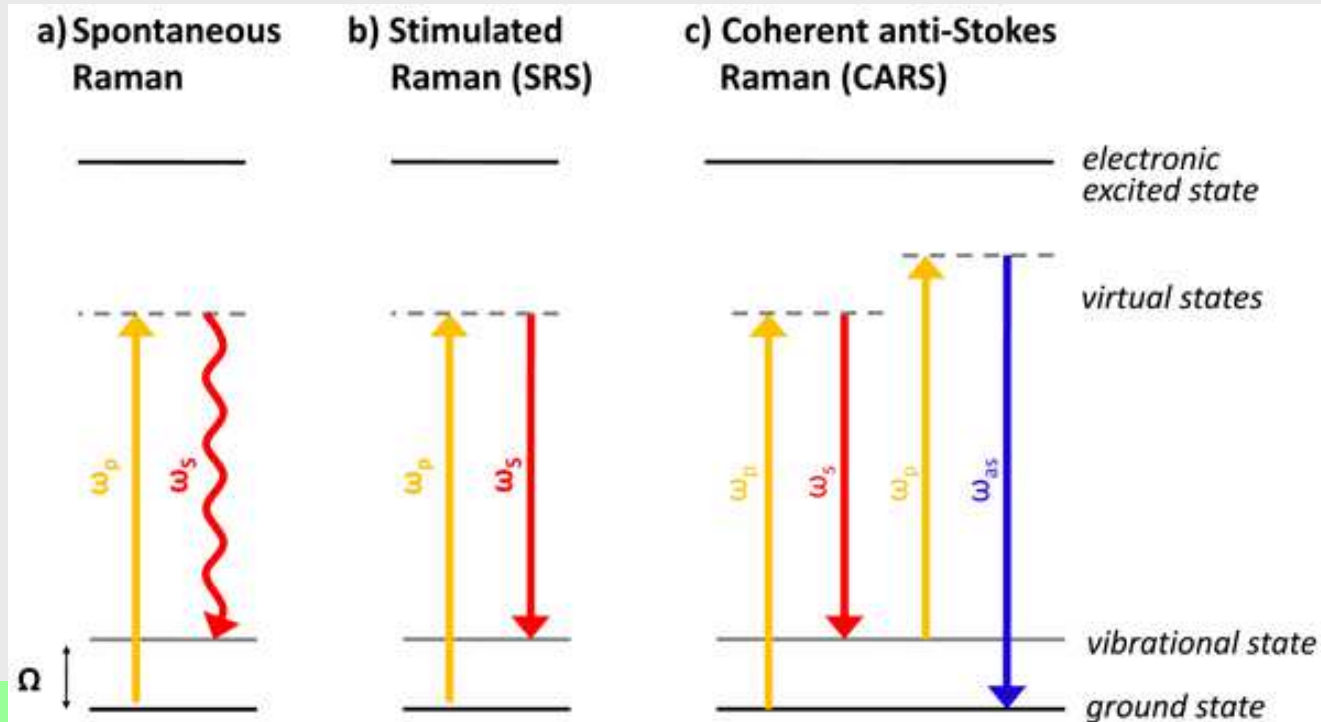
→

$$\theta_{S,A} \approx \sqrt{\frac{2}{n\omega_L} \frac{dn}{d\omega}} \omega_V$$

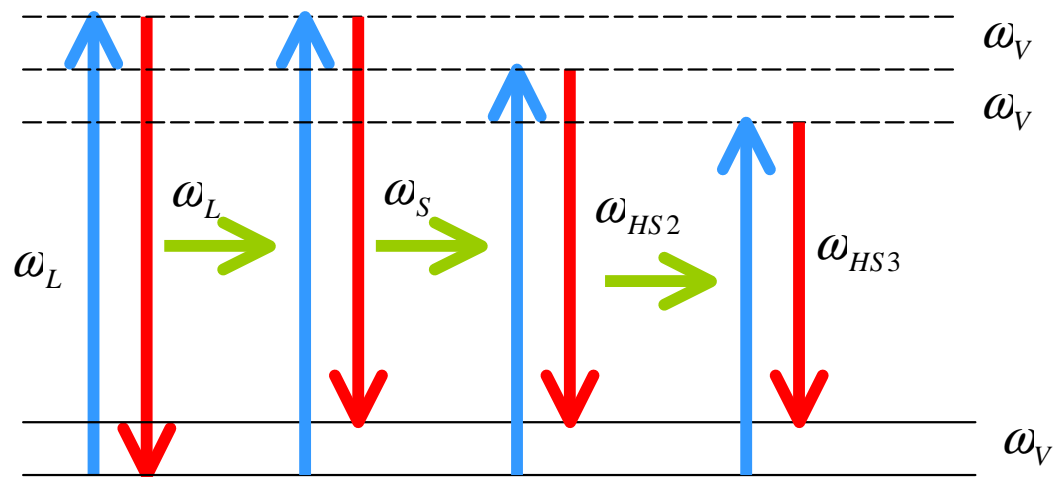
koherentní Ramanův rozptyl
srovnatelné intenzity S a AS složek



koherentní Ramanův rozptyl
rubínového laseru v benzenu



hyper-Ramanův rozptyl



$$\omega_S = \omega_L - \omega_V$$

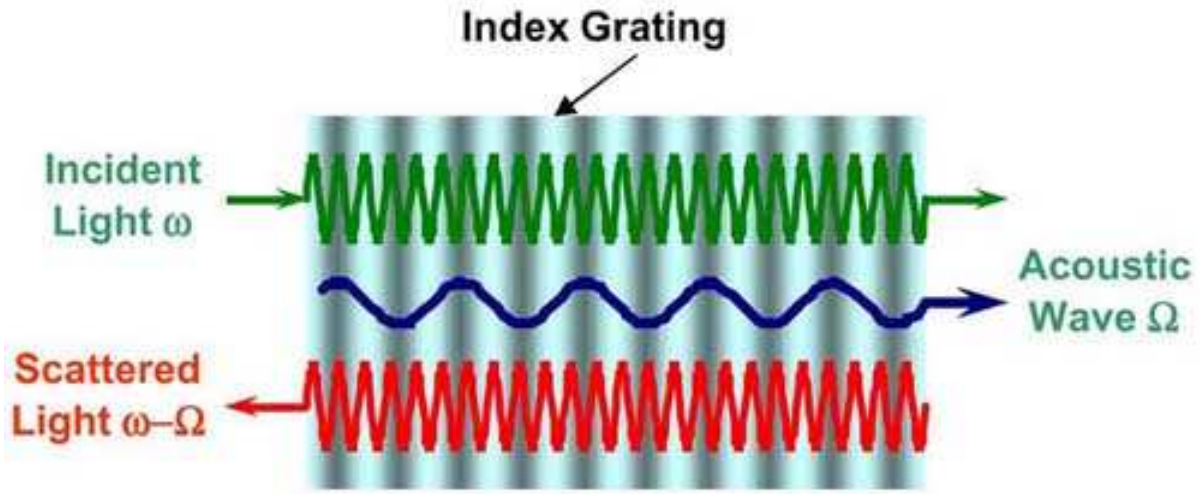
$$\omega_{HS2} = \omega_L - 2\omega_V$$

$$\omega_{HS3} = \omega_L - 3\omega_V$$

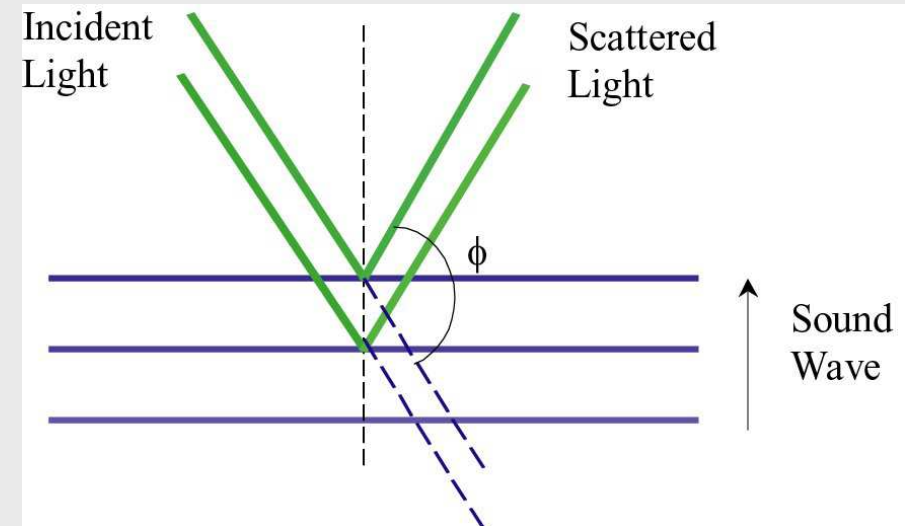
...

Mandelštam-Brillouinův rozptyl

rozptyl na akustických vlnách (fononech)



Braggův typ rozptylu



$$\mathbf{k}_{S,A} = \mathbf{k}_L \mp \mathbf{K}$$

$$\omega_{S,A} = \omega_L \mp \Omega$$

ale přestože platí $K \approx k_L \approx k_{S,A} \approx 10^4 \text{ cm}^{-1}$,

platí $\Omega = vK \approx \frac{v}{c} \omega_L \approx 10^{-5} \omega_L \approx 10^{10} \text{ Hz} \ll \omega_L$

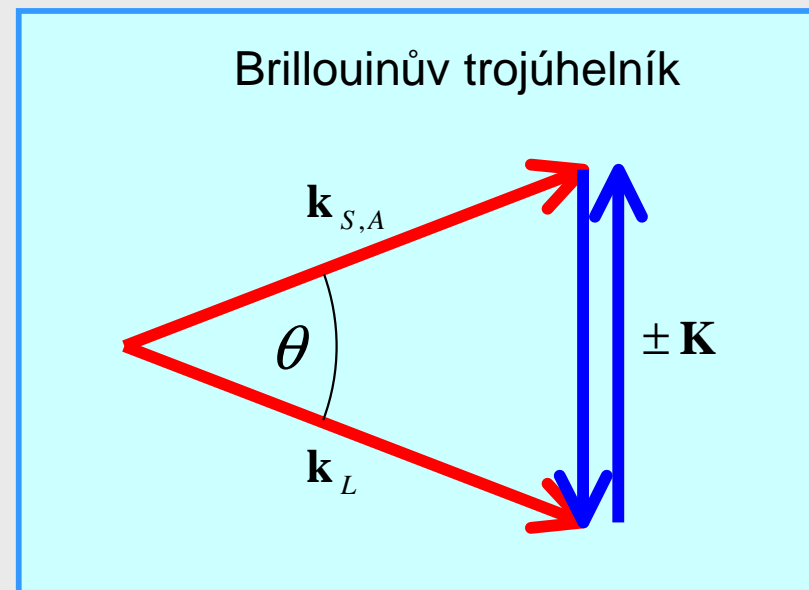
($v \approx 1500 \text{ m/s}$ je rychlost zvuku ve vodě)

$$\rightarrow \omega_{S,A} \approx \omega_L \rightarrow k_{S,A} \approx k_L$$

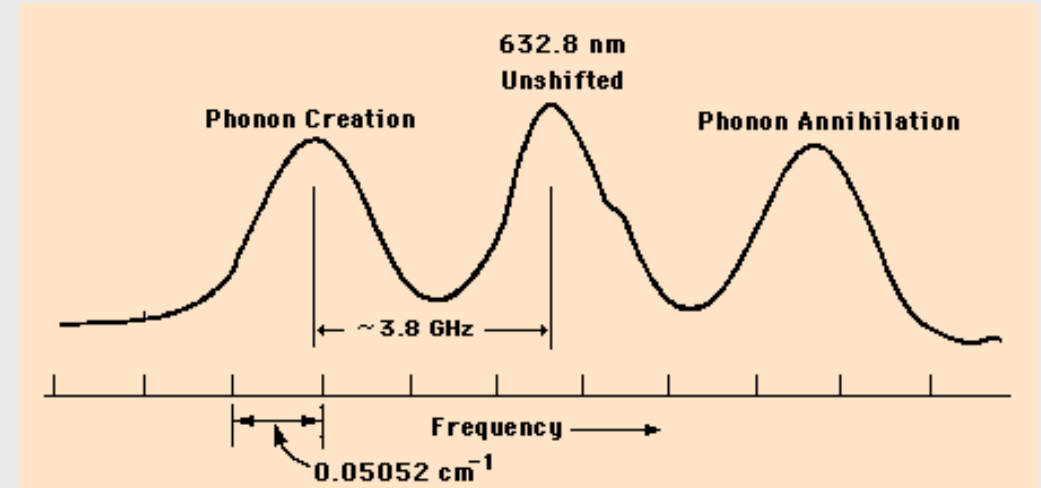
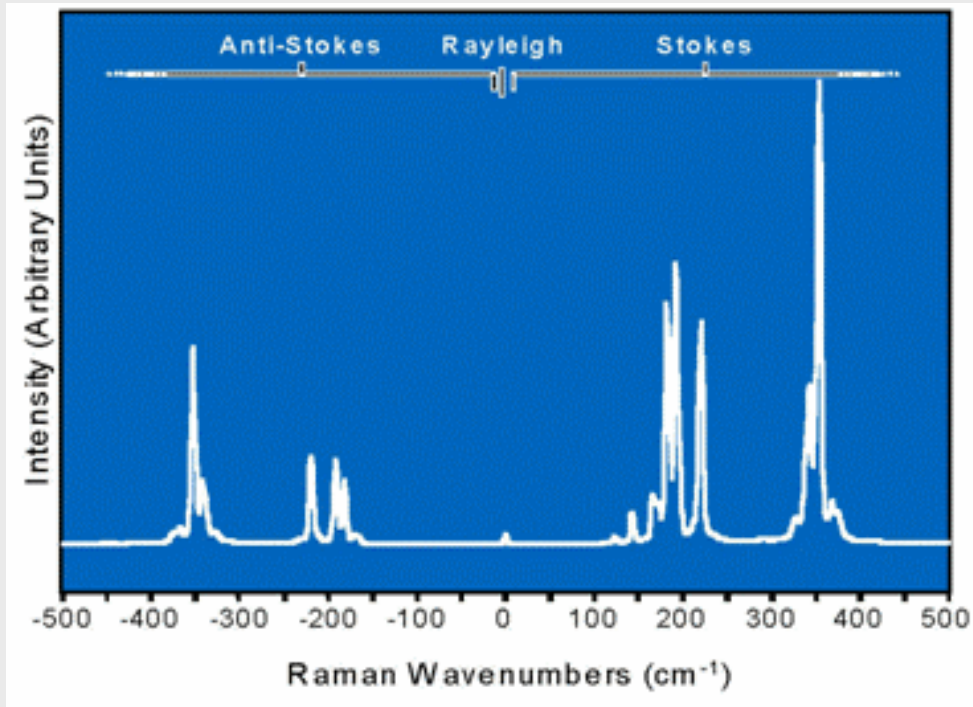
Brillouinův vzorec $\rightarrow |\mathbf{k}_{S,A} - \mathbf{k}_L| \approx 2k_L \sin \frac{\theta}{2} = K$

Kmitočet Stokesovy a anti - Stokesovy složky :

$$\omega_{S,A} = \omega_L \mp \Omega = \omega_L \mp vK = \omega_L \mp 2vk_L \sin \frac{\theta}{2} = \omega_L \left(1 \mp 2 \frac{vn}{c} \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

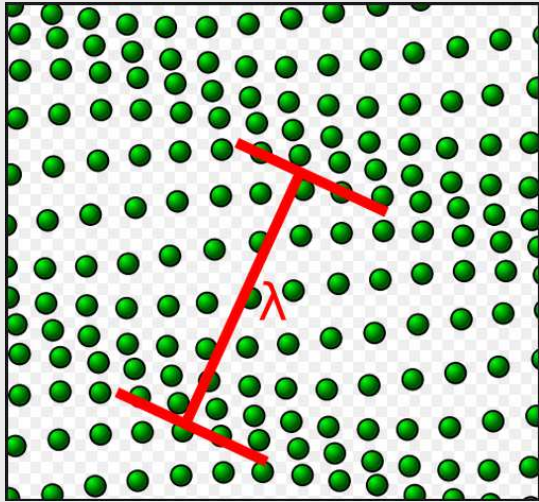
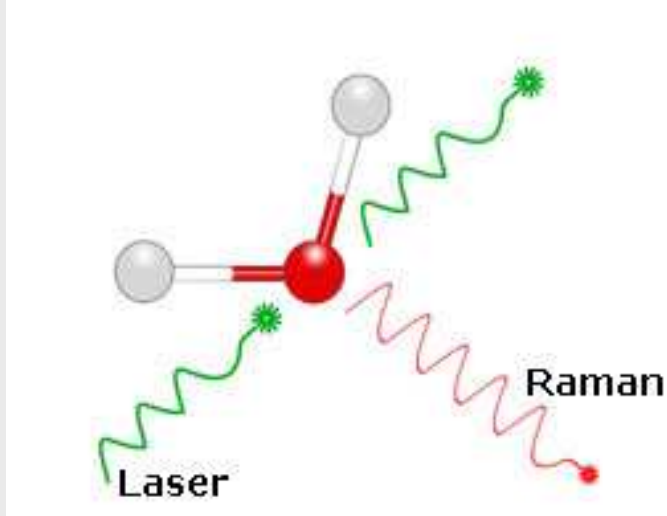


Srovnání Ramanova a Brillouinova rozptylu:



$\omega \approx 10^{15} \text{ Hz (vlnčet } 10^4 \text{ cm}^{-1})$
 $\Omega \approx 10^{13} \text{ Hz (vlnčet } 10^2 \text{ cm}^{-1})$

$\omega \approx 10^{15} \text{ Hz (vlnčet } 10^4 \text{ cm}^{-1})$
 $\Omega \approx 10^{10} \text{ Hz (vlnčet } 10^{-1} \text{ cm}^{-1})$



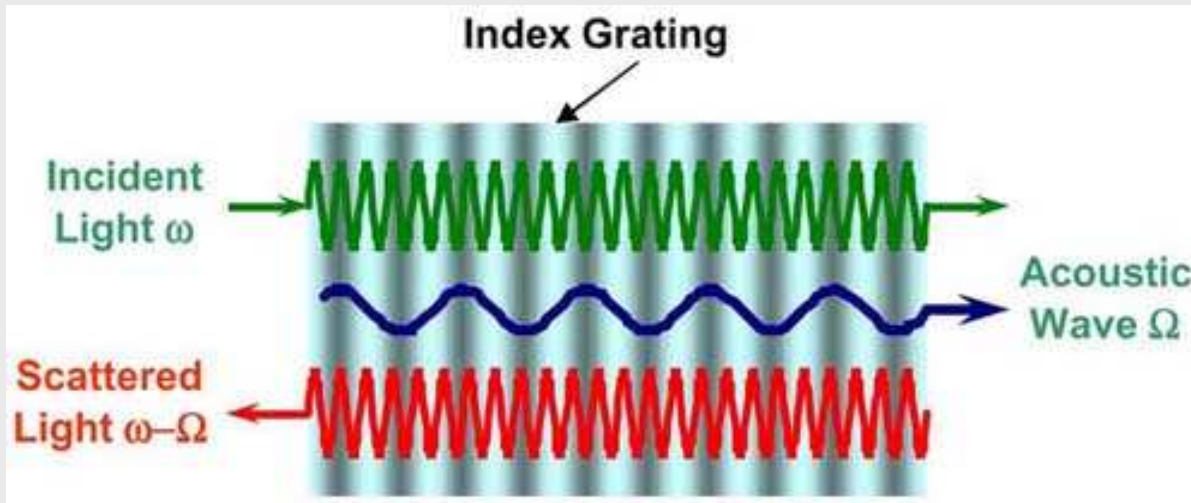
Brillouinův rozptyl

Stimulovaný Brillouinův rozptyl

zpětná konfigurace, zrcátko

stojatá akustická vlna vznikne vlivem intenzivní stojaté světelné vlny

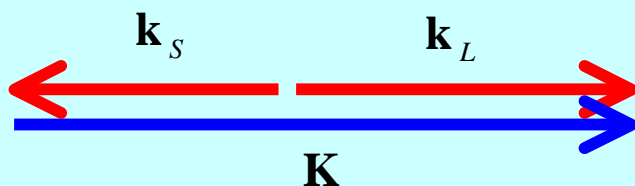
→ fázová konjugace



$$\omega \approx 10^{15} \text{ Hz (vlnočet } 10^4 \text{ cm}^{-1})$$

$$\Omega \approx 10^{10} \text{ Hz (vlnočet } 10^{-1} \text{ cm}^{-1})$$

Brillouinův trojúhelník



$$\mathbf{k}_S = \mathbf{k}_L - \mathbf{K}$$

$$\omega_S = \omega_L - \Omega$$

ale přestože platí $K \approx 2k_L \approx 2k_S \approx 10^4 \text{ cm}^{-1}$,

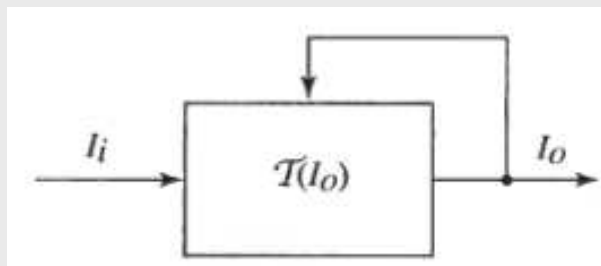
platí $\Omega = vK \approx v \frac{2\omega_L}{c} \approx 10^{-5} \omega_L \approx 10^{10} \text{ Hz} \ll \omega_L$

Kmitočet Stokesovy složky :

$$\omega_S = \omega_L - \Omega = \omega_L - vK$$

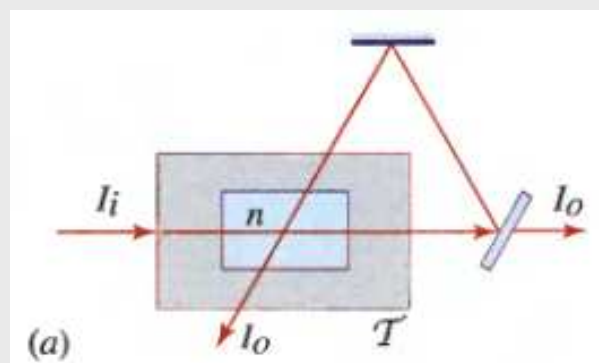
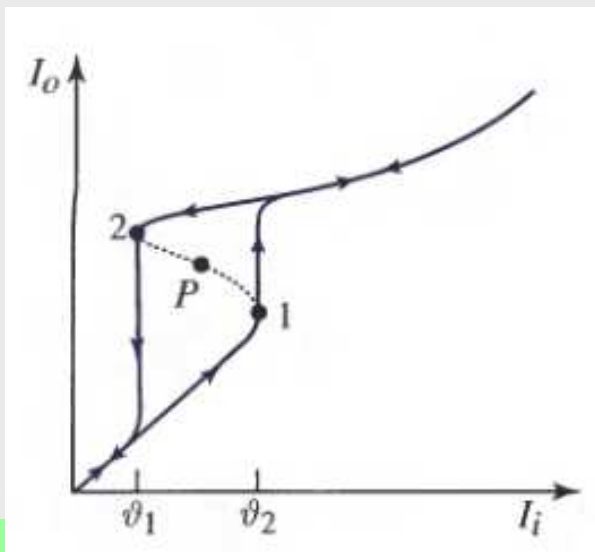
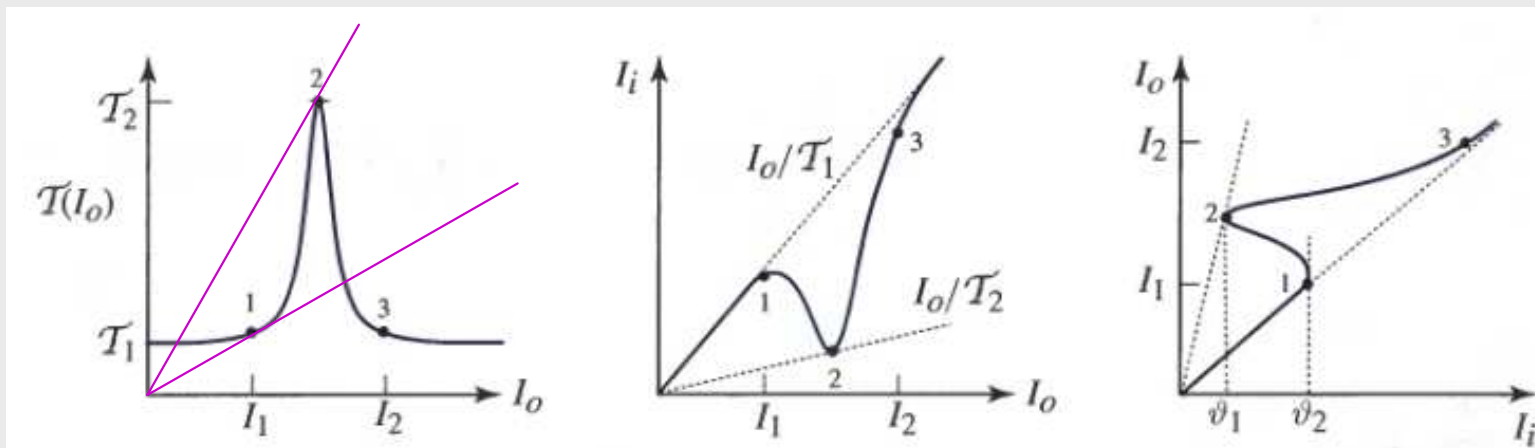
Optická bistabilita

Nelinearita + zpětná vazba
 Optické paměti, přepínače
 Disperzní a disipativní bistabilita



$$I_i = \frac{I_o}{\mathcal{T}(I_o)}$$

tečny procházející počátkem vymezují oblast bistability



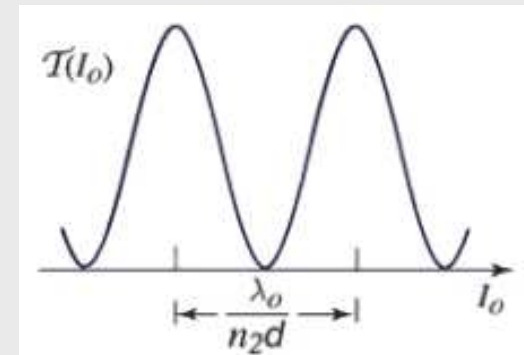
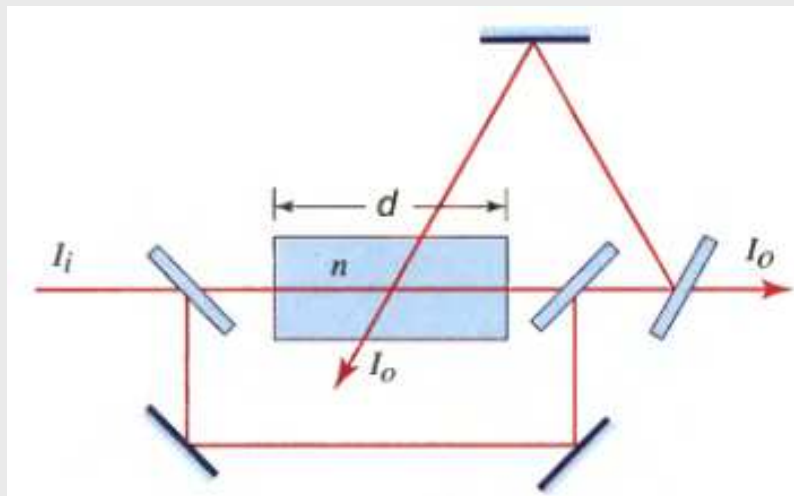
Vnější zpětná vazba: Disperzní bistabilita Mach-Zehnderův interferometr

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \Delta\varphi$$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(2\pi \frac{d}{\lambda} n + \varphi_0 \right)$$

$$n = n_o + n_2 I_o$$

$$\mathcal{T}(I_o) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(2\pi \frac{d}{\lambda} n_2 I_o + \varphi \right)$$



Fabry-Perotův etalon

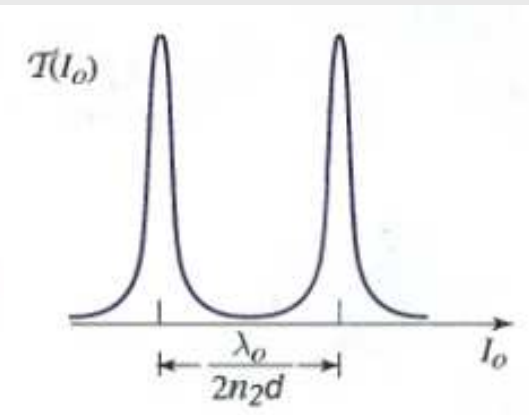
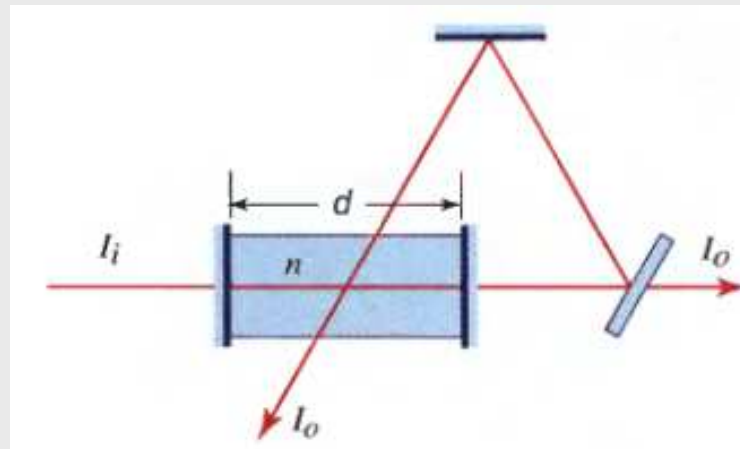
$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{T}_{\max}}{1 + (2\mathcal{F}/\pi)^2 \sin^2(\varphi/2)}$$

$$\text{kde } \mathcal{T}_{\max} = \frac{1}{(1-\rho)^2}, \quad \mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}$$

$$\rho = \sqrt{R_1 R_2} e^{-\alpha d}$$

$$\varphi = k2d = 4\pi \frac{d}{\lambda} n$$

$$n = n_o + n_2 I_o$$



$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{T}_{\max}}{1 + (2\mathcal{F}/\pi)^2 \sin^2 \left[\left(\frac{2\pi d}{\lambda_o} \right) n + \varphi_0 \right]}$$

$$\mathcal{T}(I_o) = \frac{\mathcal{T}_{\max}}{1 + (2\mathcal{F}/\pi)^2 \sin^2 \left[\left(\frac{2\pi d}{\lambda_o} \right) n_2 I_o + \varphi \right]}$$

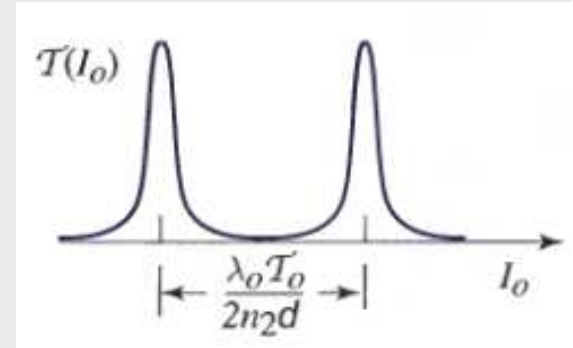
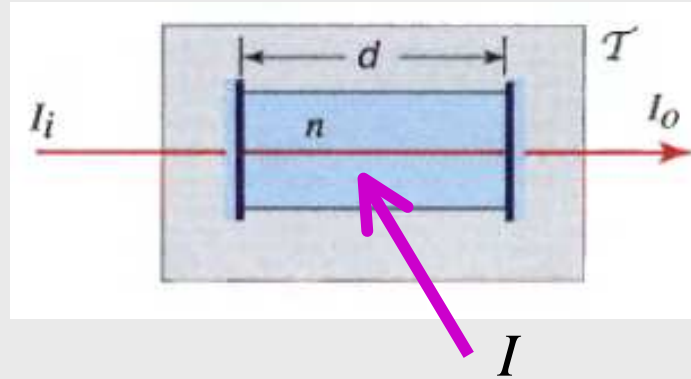
Vnitřní zpětná vazba Fabry-Perotův etalon

$$I_o = \mathcal{T}I$$

$\mathcal{T}_o \leftarrow$ propustnost výstupního zrcadla

$I \leftarrow$ vnitřní intenzita světla

$$n = n_o + n_2 I = n_o + n_2 I_o / \mathcal{T}_o$$



$$\mathcal{T} = \frac{\mathcal{T}_{\max}}{1 + (2\mathcal{F}/\pi)^2 \sin^2[(2\pi d/\lambda_o)n + \varphi_0]}$$

$$\mathcal{T}(I_o) = \frac{\mathcal{T}_{\max}}{1 + (2\mathcal{F}/\pi)^2 \sin^2[(2\pi d/\lambda_o)n_2 I_o / \mathcal{T}_o + \varphi]}$$

Disipativní nelinearita

$$\text{saturovatelný absorbér } \alpha = \frac{\alpha_0}{1 + I/I_s}$$

Fabry – Perot délky d , maximální propustnost je funkcí I_o

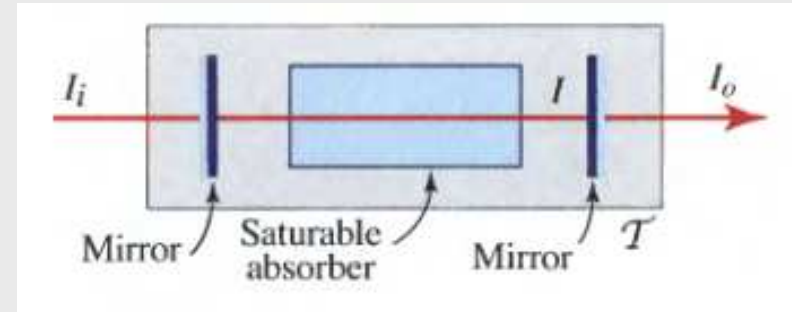
$$\mathcal{T}_{\max} = \frac{\mathcal{T}_1}{(1 - \rho)^2} = \frac{\mathcal{T}_1}{(1 - \sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} e^{-\alpha d})^2} \approx \frac{\mathcal{T}_1}{(1 - \sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} (1 - \alpha d))^2}$$

a protože $\alpha = \alpha(I) = \alpha(I_o)$, dostaneme opět pro určitá α_0, I_s a $\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2$ bistabilitu
nebo

$$\text{zesilující aktivní médium se saturací } \gamma = \frac{\gamma_0}{1 + I/I_s}$$

→ laser nad prahem pro $\sqrt{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} e^{\gamma_0 d} > 1$

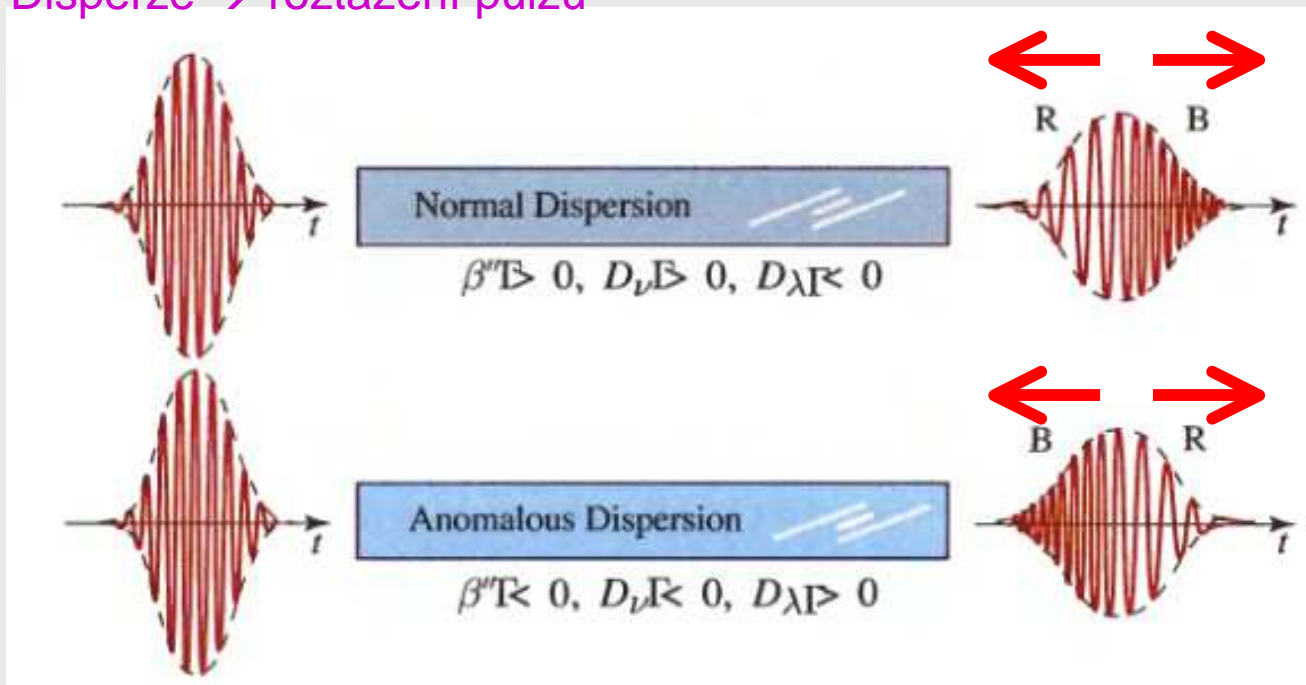
a protože $\gamma = \gamma(I) = \gamma(I_o)$, může vykazovat bistabilitu i laser



Optický soliton (časový soliton)

Automodulace fáze působí proti disperzi a v Kerrovském optickém vlákně vzniká samovedený optický pulz = optický soliton

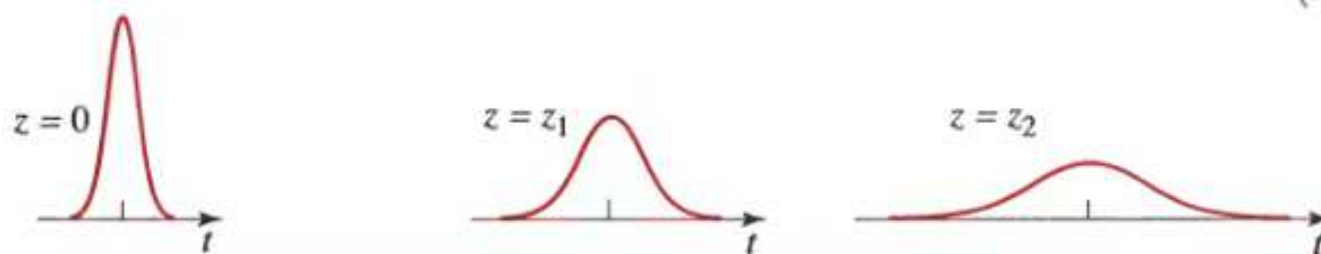
Disperze → roztažení pulzu



Časové zpoždění mezi dvěma pulzy s různými centrálními frekvencemi po ujití vzdálenosti z

$$\Delta t = \frac{z}{u_1} - \frac{z}{u_2} = z \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{u} \right) \Delta\omega = z \frac{d}{d\omega} \left(\frac{dk}{d\omega} \right) \Delta\omega = z k'' \Delta\omega = z \beta'' \Delta\omega = z D \Delta\nu$$

disperzní koeficient $D = 2\pi\beta'' = \frac{\lambda_0^3}{c_0^2} \frac{d^2 n}{d\lambda_0^2}$



Nelinearita → stlačení pulzu

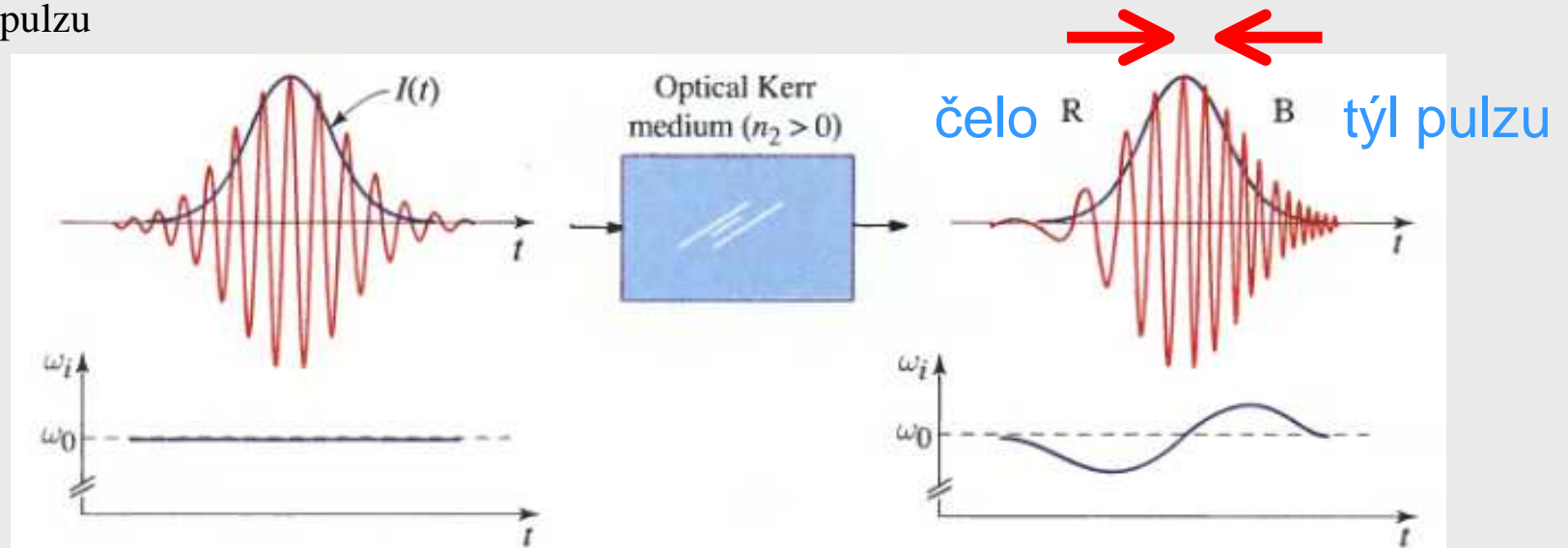
Automodulace fáze $\Delta\varphi(t) = -n_2 I(t) k_0 z \rightarrow \Delta\omega_i(t) = \frac{d}{dt} \Delta\varphi(t) = -n_2 \frac{dI}{dt} k_0 z$

např. pro gaussovský pulz $I(t) = I_0 \exp(-2t^2 / \tau^2) \approx I_0 (1 - 2t^2 / \tau^2)$

bude pulz pro $n_2 > 0$ čerpaný nahoru $\Delta\omega_i(t) = n_2 I_0 k_0 z 4t / \tau^2$

takže v prostředí s anormální disperzí bude B - složka dohánět R - složku

→ pozorujeme kompresi pulzu

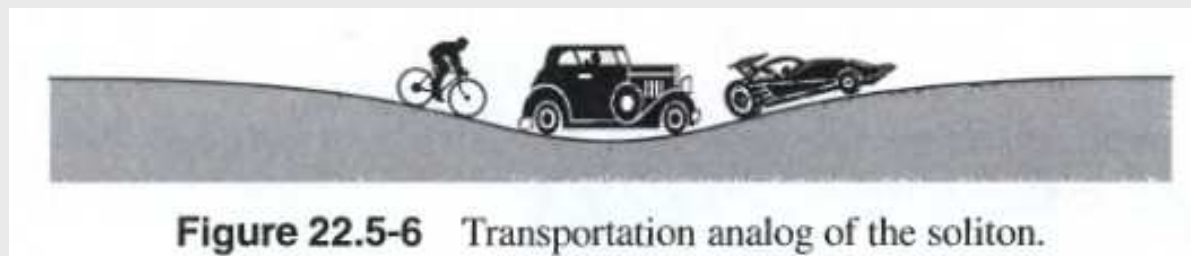
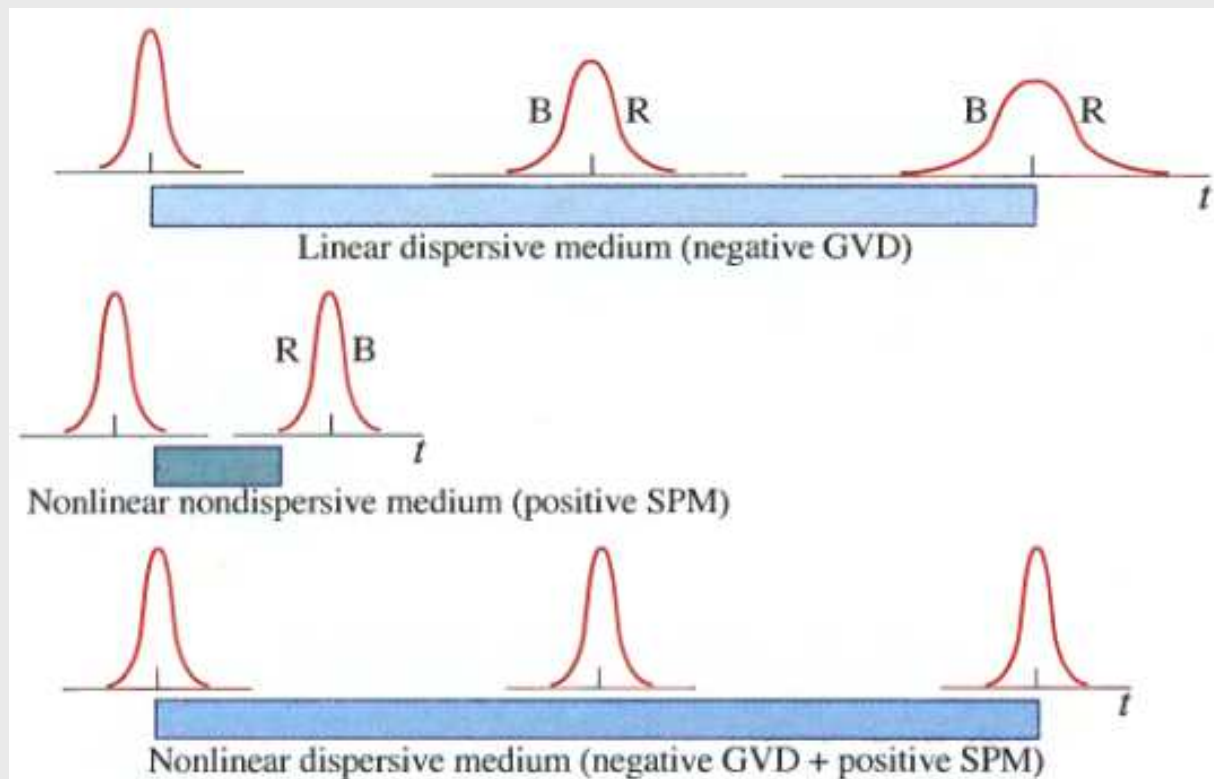


Schroedingerova rovnice (podobně jako u prostorového solitonu)

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} \right) - i \frac{\beta_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -i \gamma |A|^2 A$$

kde $u = 1 / \beta_0'$ je grupová rychlost a $\gamma = \frac{3\mu_0 \omega_0^2}{2\beta_0} \chi^{(3)} = \frac{3\mu_0 \omega_0 c}{2} \chi^{(3)} = \frac{3\eta \omega_0}{2} \chi^{(3)} = \frac{\omega_0}{2c_0 \eta} n_2$

Solitární řešení: $A(z, t) = A_0 \operatorname{sech} \frac{t - \frac{z}{u}}{\tau_0} e^{i \frac{z}{4z_0}}$, kde $\frac{1}{2z_0} = \frac{\beta_0''}{\tau_0^2}$ a $\frac{\beta_0''}{\tau_0^2} = -\gamma A_0^2$



Helmholtzova rovnice: $\nabla^2 E + \beta^2(\omega)E = -\mu_0 \omega^2 P_{NL}$

pro $E(z, \omega) = A(z, \Omega)e^{-i\beta_0 z}$, kde $A(z, \Omega)$ značí obálku pulzu a $\omega = \omega_0 + \Omega$

$$\beta^2(\omega)A \approx \left(\beta_0 + \beta_0' \Omega + \frac{1}{2} \beta_0'' \Omega^2 \right)^2 A \approx \beta_0^2 A + 2\beta_0 \beta_0' \Omega A + \beta_0 \beta_0'' \Omega^2 A$$

protože $\frac{\partial A}{\partial t} \rightarrow i\Omega A(z, \Omega)$ a $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \rightarrow -\Omega^2 A(z, \Omega)$ lze převést HR zpět do časové domény pro obálku $A(z, t)$

$$\beta^2(\omega)A \rightarrow \beta_0^2 A - 2i\beta_0 \beta_0' \frac{\partial A}{\partial t} - \beta_0 \beta_0'' \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

dále protože $P_{NL} \approx 4\chi^{(3)} \mathcal{E}^3$ má Kerrovskou obálku $3\chi^{(3)}|A|^2 A$

$$-\mu_0 \omega^2 P_{NL} \rightarrow -\mu_0 \omega^2 3\chi^{(3)}|A|^2 A$$

konečně v paraxiální aproximaci platí

$$\nabla^2 E \approx \nabla^2 A(z, \Omega)e^{-i\beta_0 z} \approx \left(-\beta_0^2 A - 2i\beta_0 \frac{\partial A}{\partial z} \right) e^{-i\beta_0 z}$$

tak dostaneme

$$-\beta_0^2 A - 2i\beta_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \beta_0^2 A - 2i\beta_0 \beta_0' \frac{\partial A}{\partial t} - \beta_0 \beta_0'' \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 \omega_0^2 3\chi^{(3)}|A|^2 A$$

$$-2i\beta_0 \left(\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} \right) - \beta_0 \beta_0'' \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 \omega_0^2 3\chi^{(3)}|A|^2 A$$

tj. Schroedingerova rovnice (podobně jako u prostorového solitonu)

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial A}{\partial t} \right) - i \frac{\beta_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -i\gamma |A|^2 A$$

kde $u = 1/\beta_0'$ je grupová rychlost a $\gamma = \frac{3\mu_0 \omega_0^2}{2\beta_0} \chi^{(3)} = \frac{3\mu_0 \omega_0 c}{2} \chi^{(3)} = \frac{3\eta \omega_0}{2} \chi^{(3)} = \frac{\omega_0}{2c_0 \eta} n_2$

Solitární řešení: $A(z, t) = A_0 \operatorname{sech} \frac{t - \frac{z}{u}}{\tau_0} e^{i \frac{z}{4z_0}}$, kde $\frac{1}{2z_0} = \frac{\beta_0''}{\tau_0^2}$ a $\frac{\beta_0''}{\tau_0^2} = -\gamma A_0^2$

musí být $\beta_0'' < 0$
(anomální disperze grupové rychlosti),
a $\gamma > 0$ neboli $n_2 > 0$

Dvou a vícefotonová absorpce

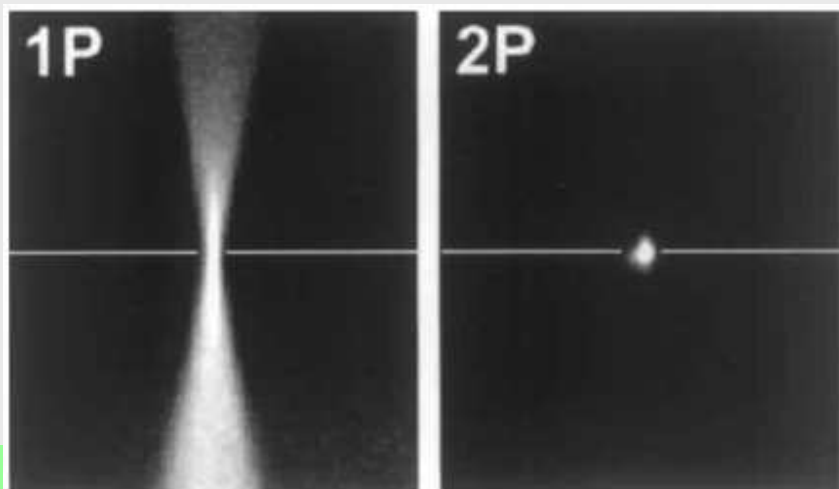
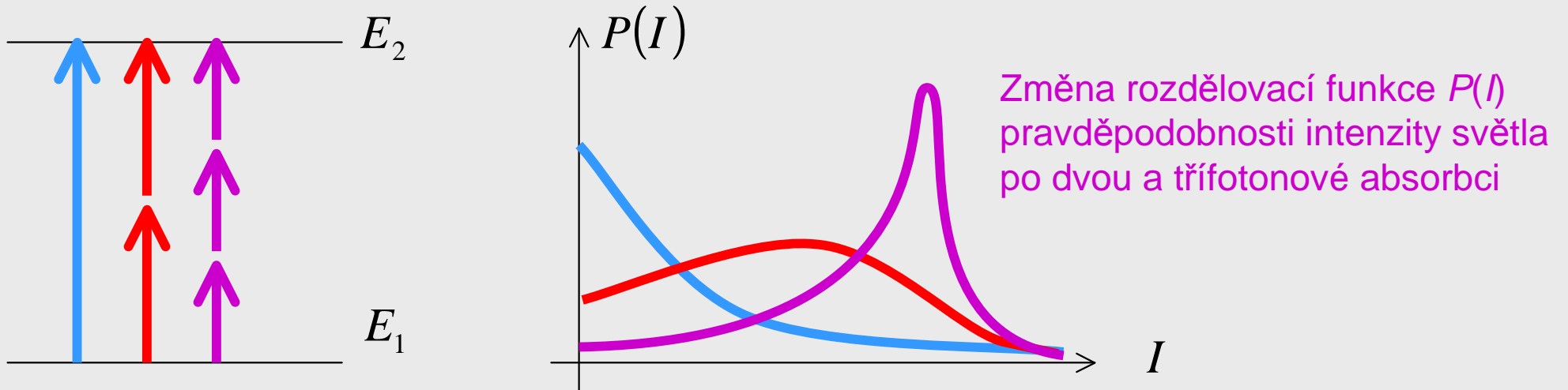
lineární prostředí, pravděpodobnost absorpce $p_1 \propto \langle a^\dagger a \rangle \approx I$

nelineární prostředí, k -fotonová absorpce $p_k \propto \langle a^{+\dagger k} a^k \rangle \approx I^k$

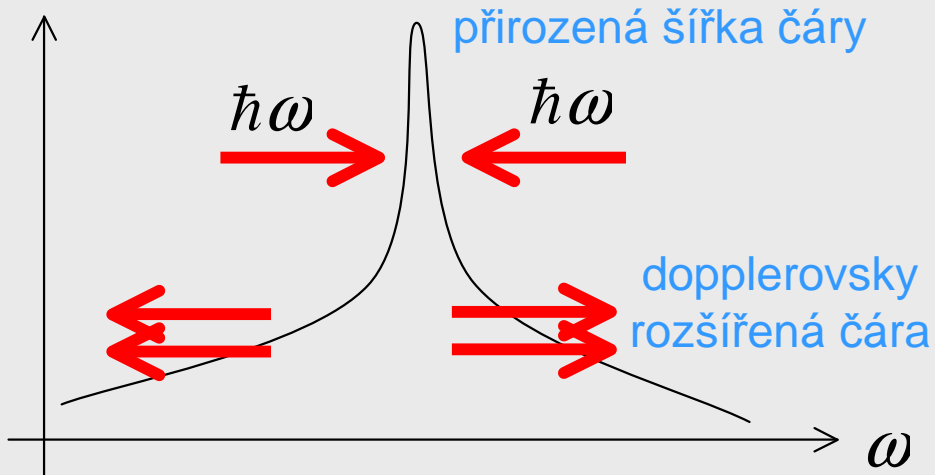
dvou a vícefotonová spektroskopie vysokého rozlišení, vidí i zakázané přechody

→ koherentní stav $p_k \propto \langle a^{+\dagger k} a^k \rangle \approx I^k$ → filtr vysokých výkonů

→ chaotický stav $p_k \propto \langle a^{+\dagger k} a^k \rangle \approx k! I^k$ → regularizace fotonové statistiky, antishlukování



Srovnání rozlišení jedno a dvoufotonové mikroskopie



Spektroskopie se super-rozlišením
vidí i zakázané přechody (čáry)
není zpětný ráz

lineární prostředí $\frac{dI}{dz} = -\mathcal{A} \rightarrow I = I_0 \exp(-\gamma z) \leftarrow$ Lambert - Beerův zákon **1**

nelineární dvoufotonová absorpce $\frac{dI}{dz} = -\beta I^2$ **2**

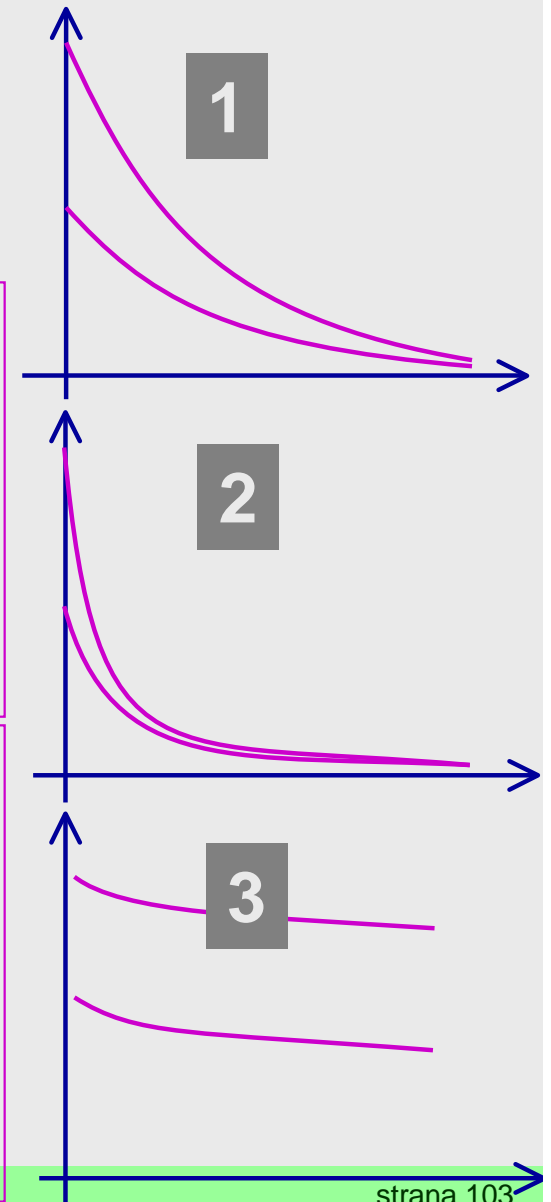
$\rightarrow I = \frac{I_0}{1 + \beta z I_0} \approx \frac{1}{\beta z} \leftarrow$ omezovací efekt, prakticky nezávisí na $I_0 \approx 1 \text{ GW/cm}^2$

Efekt saturace absorpce : (pikosekundové pulzy)

$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + I/I_s}$, tedy $\frac{dI}{dz} = -\mathcal{A} = -\frac{\gamma_0 I}{1 + I/I_s}$ (tj. přibližně $\approx -\gamma_0 I + \beta I^2$)

odtud integrací $I - I_0 + I_s \ln \frac{I}{I_0} = -\gamma_0 I_s z \leftarrow$ pouze implicitně $I(z)$ **3**

pro silná nasycení $I_0 \gg I_s$ bude $\frac{dI}{dz} \approx -\gamma_0 I_s \rightarrow I \approx I_0 - \gamma_0 I_s z \approx I_0$



Nestacionární optika

Atom v elektrickém nebo magnetickém poli, dipólová interakce → Blochovy rovnice

$$\text{Hamiltonián interakce } H = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| - d_{12}\mathcal{E}(t)(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

$$\text{obecný stav matice hustoty } i\hbar\rho = [H, \rho]$$

Místo ρ se užívá Blochův vektor \mathbf{R} , jehož složky jsou

$$R_x = 2\text{Re } \rho_{12}$$

$$R_y = 2\text{Im } \rho_{12}$$

$$R_z = \rho_{11} - \rho_{22}$$

Ze Schroedingerovy rovnice lze odvodit Blochovy rovnice:

$$\dot{R}_x = -\omega_{12}R_y$$

$$\dot{R}_y = \omega_{12}R_x - \Omega R_z$$

$$\dot{R}_z = \Omega R_y$$

$$\text{neboli } \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{A} \times \mathbf{R}, \text{ kde } \mathbf{A} = (\Omega, 0, \omega_{12}),$$

$\Omega = 2d_{12}\mathcal{E}(t)/\hbar$ je okamžitá Rabiho frekvence

$\omega_{12} = (E_2 - E_1)/\hbar$ je frekvence přechodu $1 \rightarrow 2$

Základní stav :

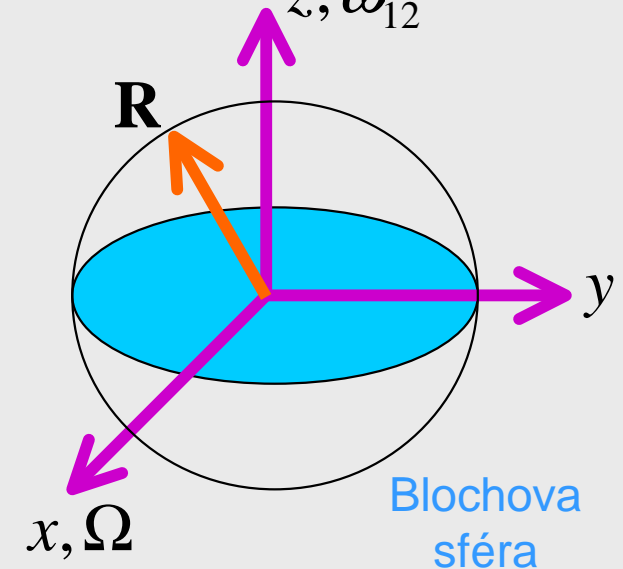
$$|\psi\rangle = |1\rangle$$

$$\rho = |1\rangle\langle 1|$$

$$\mathbf{R} = (0,0,1)$$

základní stav

z, ω_{12}



protože platí $R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 \leq 1$ (pro čistý stav $R^2 = 1$), lze zobrazit

Blochův vektor \mathbf{R} na Blochově sféře jako precesi \mathbf{R} kolem vektoru \mathbf{A}

→ Bez světla $\Omega = 0$ volná precese rychlostí ω_{12} kolem osy z

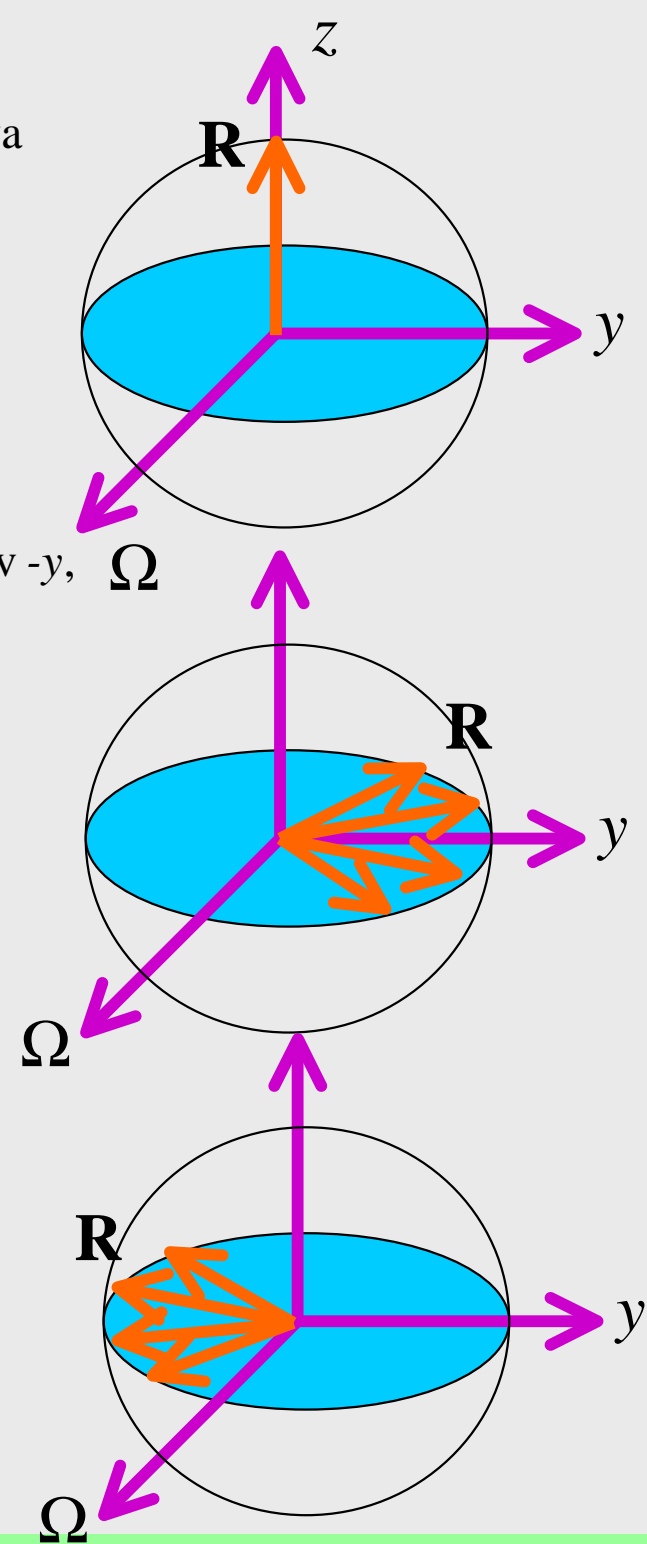
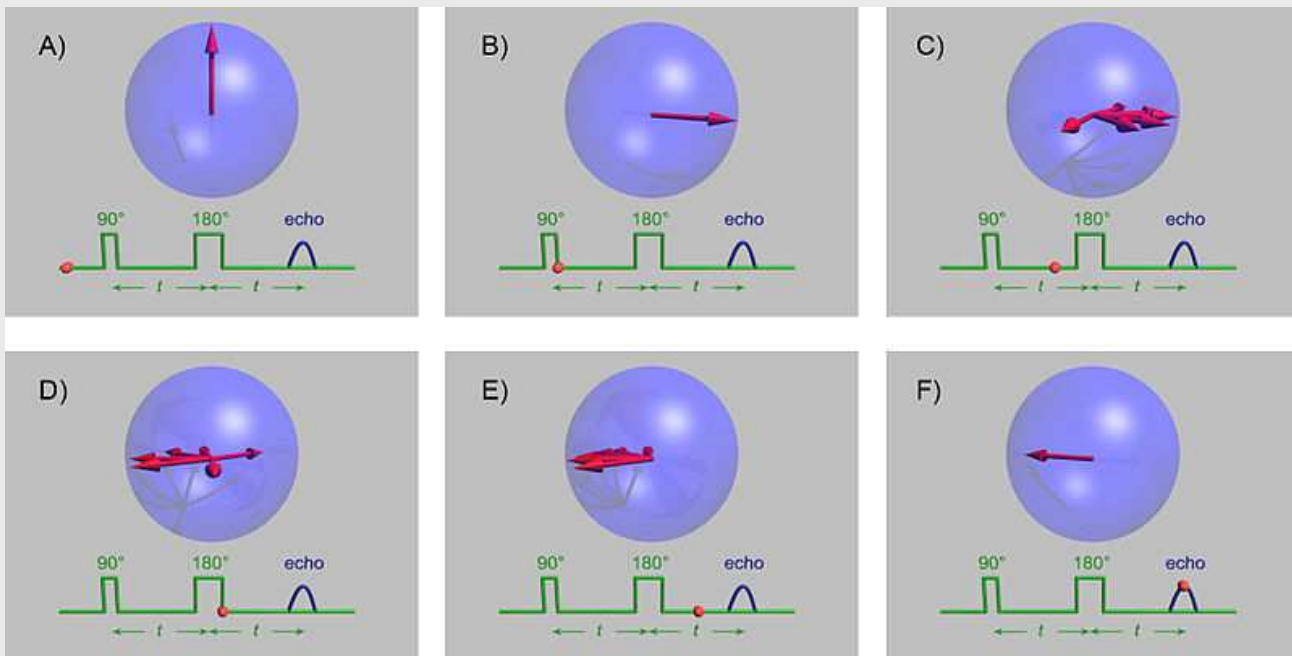
→ Rychlý světelný pulz $\theta = \Omega t$ pootočení o Ωt kolem osy x

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + R_z & R_x + iR_y \\ R_x - iR_y & 1 - R_z \end{pmatrix}$$

Fotonové echo (ozvěna)

1. aplikace silného koherentního $\theta = \pi/2$ – pulzu způsobí sklopení Blochova vektoru \mathbf{R} kolem osy $x = \Omega$ o $\pi/2$, tedy z polárního směru z do směru y
2. atomové dipóly \mathbf{R} spontánně konají precesi kolem osy z , ale vlivem nehomogenního rozšíření každý jinou rychlostí ω_0 , vzniká vějíř dipólů
3. po uběhnutí doby τ aplikujeme druhý koherentní π – pulz, všechny dipóly \mathbf{R} se otočí kolem vektoru Ω o 180°
4. dipóly \mathbf{R} opět konají precesi stejně jako předtím, ale tentokrát se sbíhají v $-y$, takže v čase τ po aplikaci π – pulzu se všechny dipóly \mathbf{R} sejdou a vyzáří gigantický pulz = fotonové echo

[Animace fotonového echa \(připojení na web?\)](#)



Interakce atomu se světlem

Pokud bude elektrické pole harmonicky proměnné

$$\mathcal{E}(t) = E \cos \omega t = \frac{1}{2} E \exp(i\omega t) + \frac{1}{2} E \exp(-i\omega t),$$

pak Blochovy rovnice nabudou tvaru :

$$\dot{R}_x = -\Delta\omega R_y$$

$$\dot{R}_y = \Delta\omega R_x - \Omega R_z$$

$$\dot{R}_z = \Omega R_y$$

kde $\Delta\omega = \omega_{12} - \omega$ je rozladění, neboli

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \times \mathbf{A}, \quad \text{kde } \mathbf{A} = (\Omega, 0, \Delta\omega),$$

kde $\Omega = d_{12} E / \hbar$ je Rabiho frekvence

Pro rezonanci bude $\Delta\omega = 0$ a tedy

$$\dot{R}_x = 0$$

$$\dot{R}_y = -\Omega R_z$$

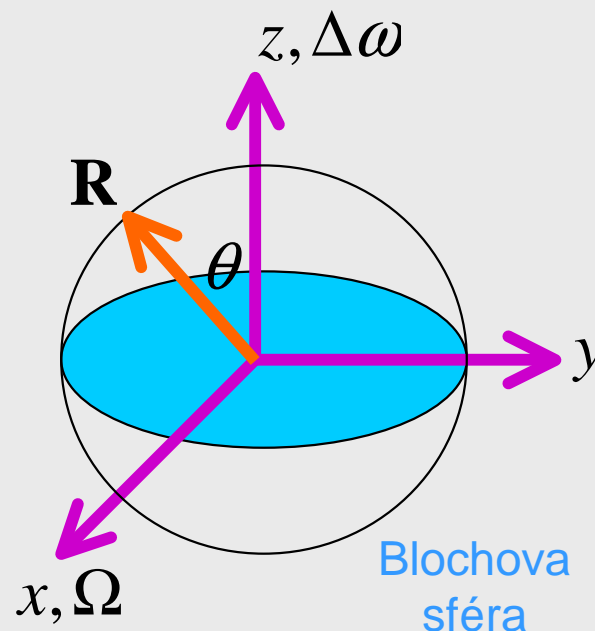
$$\dot{R}_z = \Omega R_y$$

řešení pro počáteční základní stav $\mathbf{R}(0) = (0, 0, 1)$

je možno psát ve tvaru : $R_x \approx 0, R_y = -\sin \theta$ a $R_z = \cos \theta$

kde $\dot{\theta} = \Omega = d_{12} E / \hbar$ je Rabiho frekvence

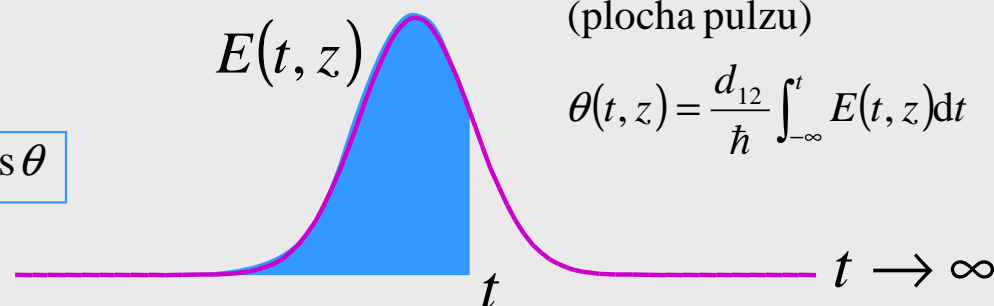
veličina $\theta = \int_{-\infty}^t \Omega(t) dt = \frac{d_{12}}{\hbar} \int_{-\infty}^t E(t) dt$ má význam úhlu pootočení Blochova vektoru



světlo → atom

Pootočení Blochova vektoru :
(plocha pulzu)

$$\theta(t, z) = \frac{d_{12}}{\hbar} \int_{-\infty}^t E(t, z) dt$$



Z vlnové rovnice $\nabla^2 \mathcal{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2}$ **atom \rightarrow světlo**

pro pomalu se měnící amplitudy E bude $\mathcal{E} = E e^{i(\omega t - kz)}$ a $\mathcal{P} = P e^{i(\omega t - kz)}$ a tedy

$$-2ik \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{1}{c^2} 2i\omega \frac{\partial E}{\partial t} = -2ik \left(\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right) = -\mu_0 \omega^2 P$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \frac{\mu_0 \omega^2}{2ik} P = \frac{\mu_0 c \omega}{2i} P$$

světlo se šíří ve směru osy z a je polarizováno ve směru osy x ,

polarizace jednoho atomu je $P = d_{12} \langle |1\rangle \langle 2| \rangle = d_{12} (R_x + iR_y) \approx i d_{12} R_y$

a hustota polarizace je proto $P \approx i N d_{12} R_y$, kde N je hustota atomů a

$R_y = -\sin \theta$, kde $\dot{\theta} = \Omega = d_{12} E / \hbar$, neboli také $E = \hbar \dot{\theta} / d_{12}$

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) = \frac{\mu_0 c \omega d_{12}}{2i\hbar} P = -\frac{\mu_0 c \omega d_{12}^2 N}{2\hbar} \sin \theta$$

světlo \rightarrow atom

světlo \rightarrow světlo

Hledáme řešení ve tvaru stacionární vlny $\theta = f(\tau) = f\left(t - \frac{z}{v}\right)$, pak bude $\frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$ a $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$, takže

$$\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{v} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = -\frac{\mu_0 c \omega d_{12}^2 N}{2\hbar} \sin \theta$$

odtud máme rovnici pro plochu pulzu

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = \frac{v \omega d_{12}^2 N}{2\epsilon \hbar (c - v)} \sin \theta = \gamma^2 \sin \theta$$

jedno speciální řešení $\theta = 2 \arcsin(\tanh \gamma \tau) + \pi$ dává 2π - pulz, odtud solitární řešení :

$$E = \frac{\hbar \dot{\theta}}{d_{12}} = \frac{2\hbar \gamma}{d_{12} \cosh \gamma \tau} = A \operatorname{sech} \gamma \tau = A \operatorname{sech} \frac{d_{12} A}{2\hbar} \left(t - \frac{z}{v} \right)$$

$$\gamma^2 = \frac{v \omega d_{12}^2 N}{2\epsilon \hbar (c - v)}$$

$$A = \frac{2\hbar \gamma}{d_{12}}$$

a pro rychlost pulzu platí $\frac{c}{v} = 1 + \frac{\omega d_{12}^2 N}{2\epsilon \hbar \gamma^2} = 1 + \frac{2\hbar \omega N}{\epsilon_0 A^2} = 1 + kL^2$,

\leftarrow zpomalené světlo

což může dávat i silně zpomalené světlo $v \approx c/100$ nebo zastavené světlo $v \approx 1 \text{ cm/s}$

Samoindukovaná transparence

Šíření intenzivního koherentního pulzu $\mathcal{E}(z, t) = E(z, t) \cos(\omega t - kz)$

plocha pulzu $F(z) = \frac{d_{12}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} E(z, t) dt$

z Maxwellových a Blochových rovnic plyne pro plochu pulzu :

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{\gamma}{2} \sin F$$

← Teorém plochy
(odvození dále)

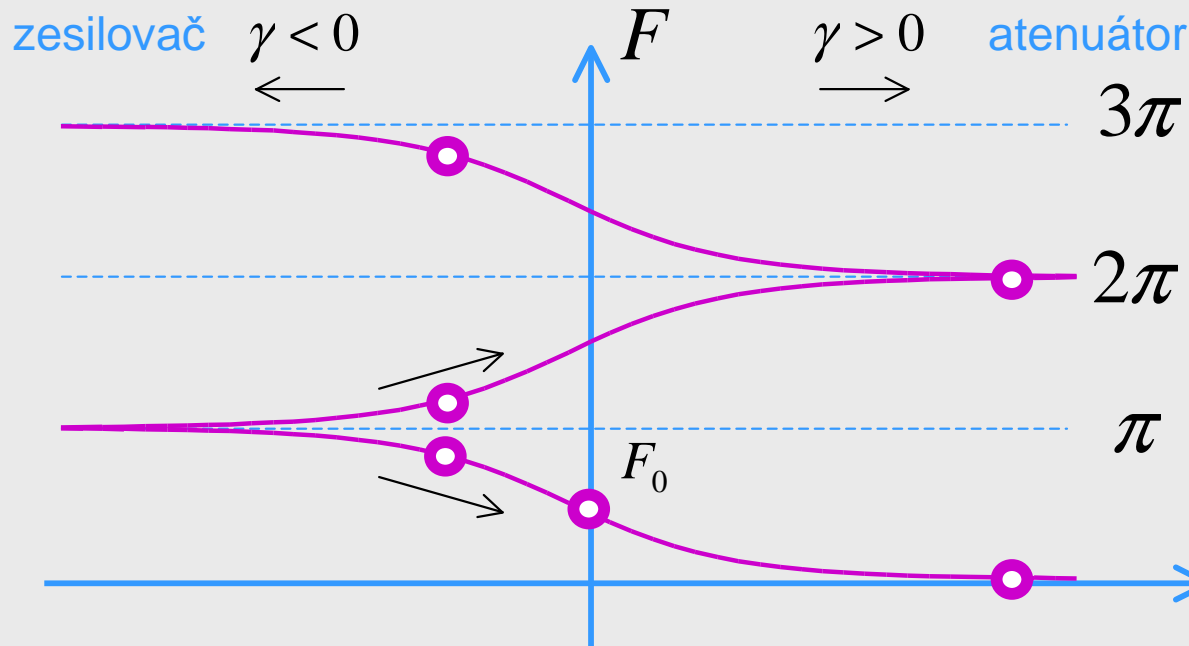
řešení je : $\tan \frac{F}{2} = \tan \frac{F_0}{2} e^{-\frac{\gamma}{2} z}$

stabilní stacionární řešení $F = 2m\pi$, nestabilní stacionární řešení $F = (2m+1)\pi$,

slabé intenzity $F_0 < \pi$ zeslabuje na $F = 0$, silné $F_0 > \pi$ zesiluje na $F = 2\pi \rightarrow$ soliton, žádné ztráty

pro slabé intenzity $\frac{dF}{dz} = -\frac{\gamma}{2} F$ dostaneme Lambert - Beerův zákon

$$|F|^2 = |F_0|^2 e^{-\gamma z}$$



Plocha není energie !
nemusí se zachovávat
 \rightarrow formování pulzu

Počítačová simulace šíření pulzu

Zánik pulzu (vlevo)
a
přetvarování pulzu
v soliton (vpravo)

Rozpad 4π pulzu
na dva 2π pulzy
šířící se dále
beze změny
různými
rychlostmi

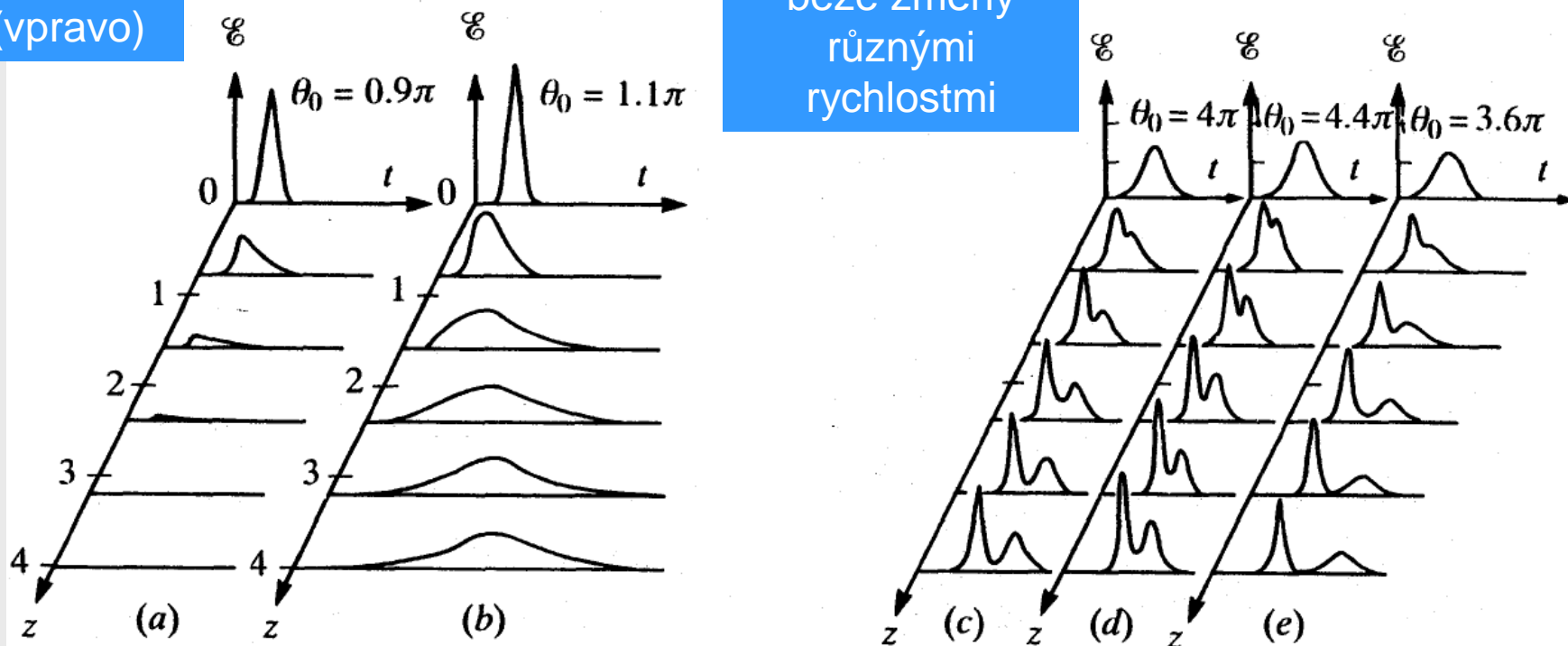
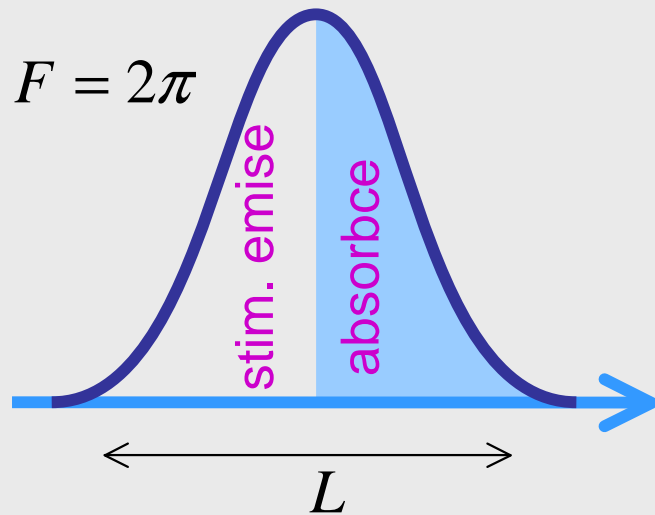


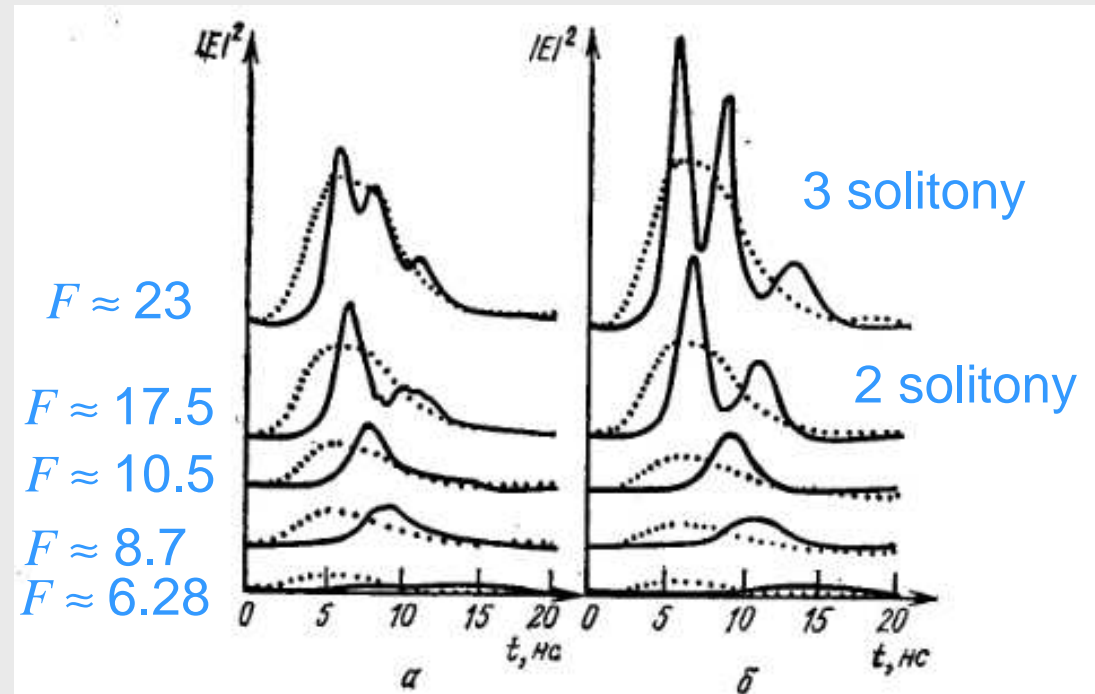
Fig. 16.7 Computer solutions showing the propagation of pulses of various areas. Distance z is measured in units of π/α . In the first example (a) the pulse is absorbed, and in example (b) it is reshaped to a hyperbolic secant form. In (c), (d) and (e) the pulse breaks up into two separate 2π hyperbolic secant pulses. (Reproduced from McCall and Hahn, 1969.)



2π - pulz : žádné ztráty, ale formování pulzu (soliton)
 a zpomalení pulzu až o několik řádů
 (spomalené nebo zastavené světlo)

rychlost pulzu $v = \frac{c}{1 + kL^2}$, kde L je délka pulzu

Experimentální data
 →
 samoindukovaná
 transparence
 světelných pulzů
 v párech Rb



Фиг. 58. Формирование световых импульсов при самоиндуцированной прозрачности в парах рубидия для различных «площадей» σ_F импульсов входной напряженности поля.

$\sigma_F = 6,28; 8,7; 10,5; 17,5$ или 23 .

Пунктир — входной импульс, сплошные кривые — выходной импульс.
 α — результаты измерений; β — результаты сравнительных расчетов.

Teorém plochy

$$\left(\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}\right) = \frac{\mu_0 c_0 \omega}{2i} P = \frac{\mu_0 c \omega N d_{12}}{2} R_y$$

Definujeme plochu pulzu :

$$F(z) = \theta(\infty, z) = \frac{d_{12}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} E(t, z) dt$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{d_{12}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E}{\partial z} dt = \frac{d_{12}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mu_0 c \omega N d_{12}}{2} R_y - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right) dt = \frac{d_{12}}{\hbar} \frac{\mu_0 c \omega N d_{12}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_y dt$$

a protože podle Blocha $\dot{R}_x = -\Delta\omega R_y$,

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{d_{12}}{\hbar} \frac{\mu_0 c \omega N d_{12}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta\omega} \frac{\partial R_x}{\partial t} dt = -\frac{d_{12}}{\hbar} \frac{\mu_0 c \omega N d_{12}}{2} \frac{1}{\Delta\omega} R_x(t \rightarrow \infty)$$

přibližné řešení pro velká $t > t_0 \gg 0$ (pouze precese $\Delta\omega$ neboť zde již $\Omega = 0$):

$$R_x \approx R_x(\Delta\omega, t_0) \cos \Delta\omega(t - t_0) - R_y(\Delta\omega, t_0) \sin \Delta\omega(t - t_0)$$

přintegrujeme přes spektrum $g(\Delta\omega)d\Delta\omega$

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{d_{12}}{\hbar} \frac{\mu_0 c \omega N d_{12}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta\omega} R_x(t \rightarrow \infty) g(\Delta\omega) d\Delta\omega = -\frac{d_{12}}{\hbar} \frac{\mu_0 c \omega N d_{12}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_x(\Delta\omega) \cos \Delta\omega t - R_y(\Delta\omega) \sin \Delta\omega t}{\Delta\omega} g(\Delta\omega) d\Delta\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega} d\Delta\omega = \pi$$

$$R_x(\Delta\omega, t_0) \approx 0, R_y(\Delta\omega, t_0) \approx -\sin F$$

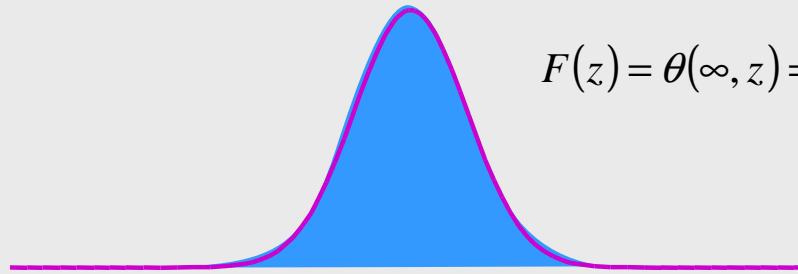
$$\frac{dF}{dz} = \frac{d_{12}}{\hbar} \frac{\mu_0 c \omega N d_{12}}{2} \pi R_y(\Delta\omega, t_0) g(\omega_{12}) = -\frac{\pi \mu_0 c \omega N g(\omega_{12}) d_{12}^2}{2\hbar} \sin F = -\frac{\gamma}{2} \sin F$$

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{\gamma}{2} \sin F$$

← teorém plochy

Plocha pulzu :

$$F(z) = \theta(\infty, z) = \frac{d_{12}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} E(t, z) dt$$



Superluminescence

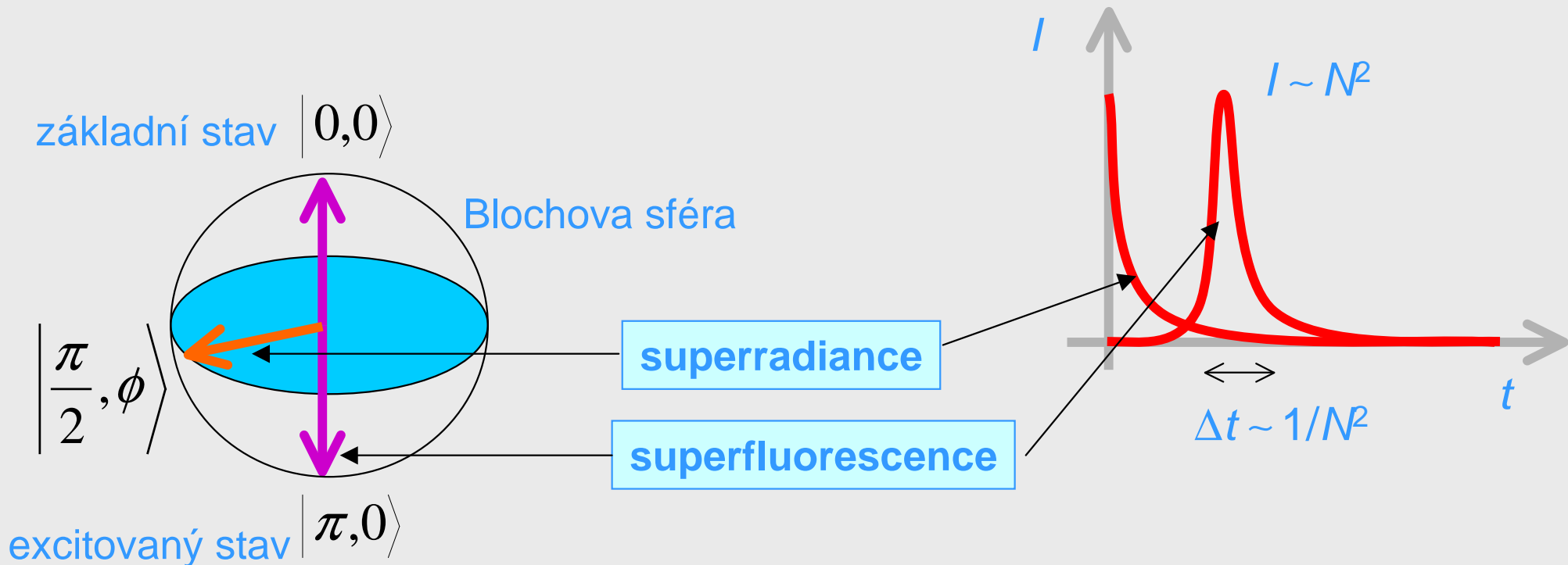
Superluminescence intenzita $I \sim N^2$ trvání $\Delta t \sim 1/N^2$

normální luminiscenční zdroje $I \sim N$ trvání $\Delta t \sim 1/N$

kde N značí počet zářících atomů

Superradiance $\theta = \pi/2$,
makroskopický dipólový moment,
kooperativní jev, atom. koh. stav,
bez prodlevy, popis klasicky,
Dicke 1954

Superfluorescence $\theta = \pi$,
nulový dipólový moment,
časová prodleva, popis kvantově,
Bonifacio et al. 1970s



Superfluorescence, kooperovaná stimulovaná emise, ASE - zesílená spontánní emise (pomocí stimulované emise)

laser bez rezonátoru (nutno ošetřit, nesmí být žádná zpětná vazba, ani parazitní odrazy)

krátký $\Delta t \approx 1/N^2$ superintenzivní pulz $I \approx N^2$

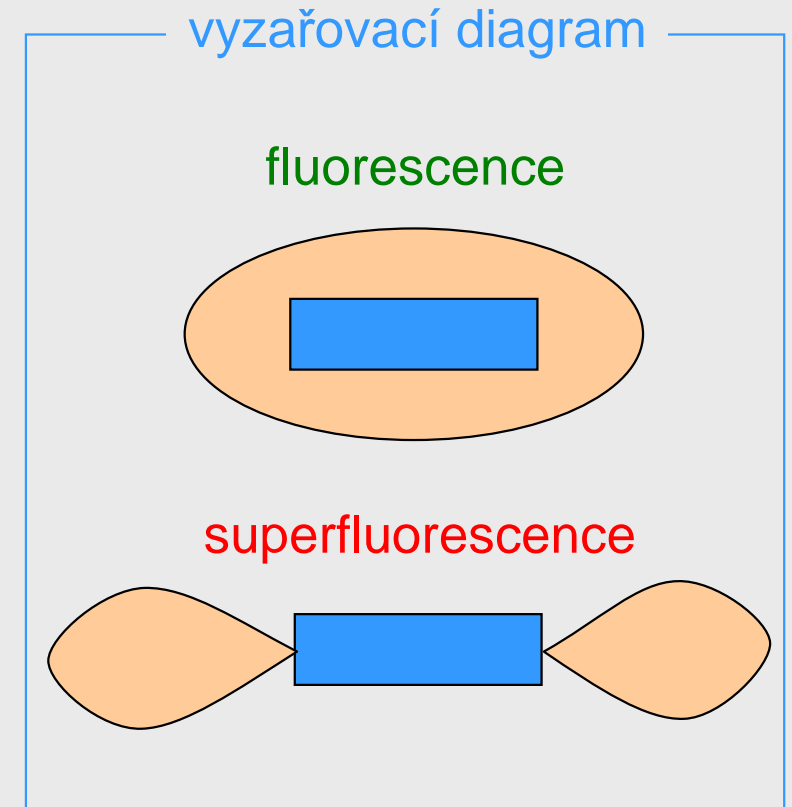
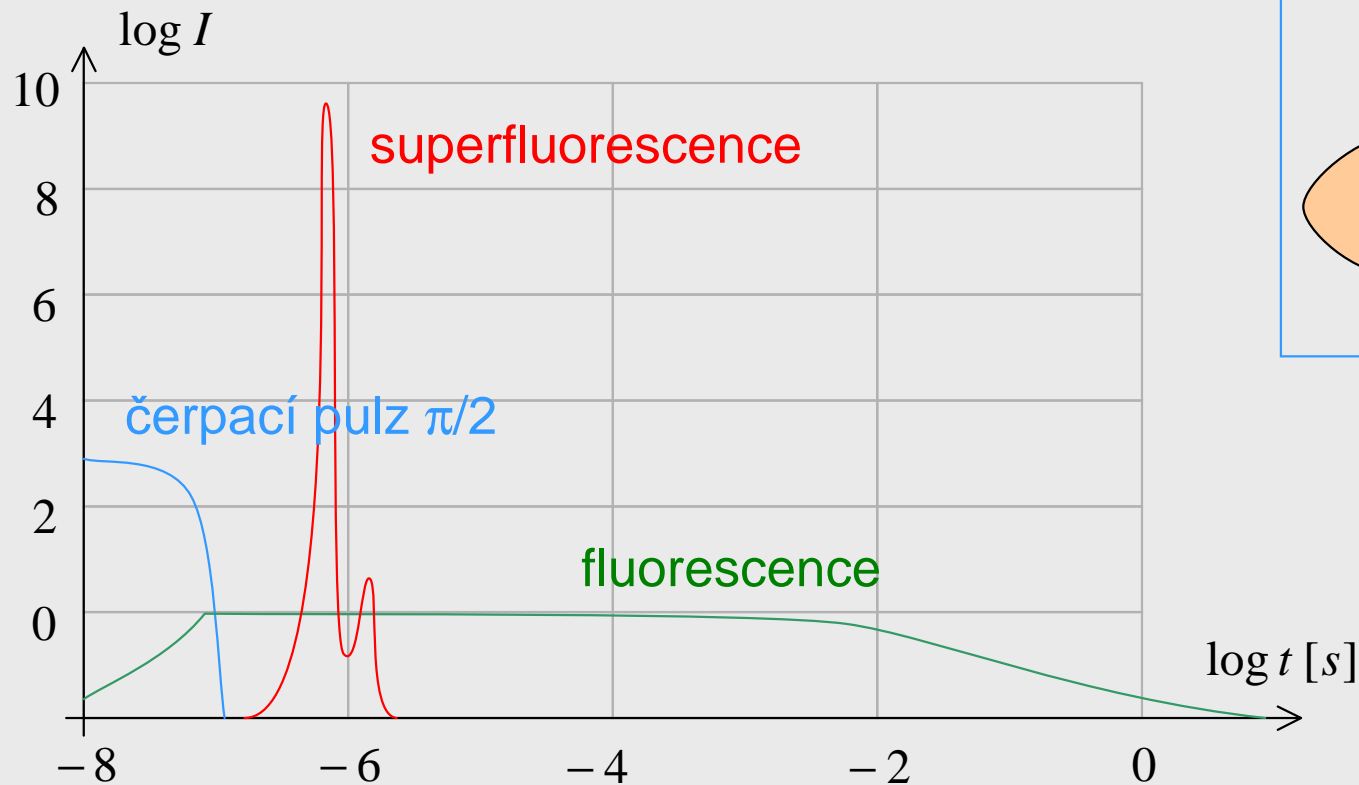
superluminiscenční diody SLED = SLD

výkon a jas spíše jako laser, koherence spíše jako LED

výkon > 1 mW, širokospektrální \rightarrow málo koherentní $l_c \approx 1 \mu\text{m}$

Aplikace:

vláknové gyroskopy, senzory, optická koherenční tomografie



Superradiance a atomové koherentní stavy

System N atomů interaguje s elmg. polem

dvojhladinový systém, hladiny E_1 a E_2

Schwingerův popis pomocí **bosonových operátorů** a_1 a a_2

Hamiltonián interakce s elmg. polem popsán operátorem a

$$H = \hbar\omega a^+ a + E_1 a_1^+ a_1 + E_2 a_2^+ a_2 + \hbar g (a a_1 a_2^+ + a^+ a_1^+ a_2)$$

pro klasické elmg. pole $a = \alpha$

$$H = E_1 a_1^+ a_1 + E_2 a_2^+ a_2 + \hbar g (\alpha a_1 a_2^+ + \alpha^* a_1^+ a_2)$$

Působení elmg. pole odpovídá změně stavu $|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi\rangle = \exp(Ht / i\hbar) |\psi_0\rangle$

Atomové koherentní stavy :

$$|\theta, \phi\rangle = \exp(Ht / i\hbar) |0\rangle, \quad \text{kde } \theta = 2g\alpha t, \phi = \frac{\pi}{2}$$

Operátor $M^- = a_1 a_2^+ = |2\rangle\langle 1|$ představuje absorpci fotonu

a přeskok elektronu na horní hladinu

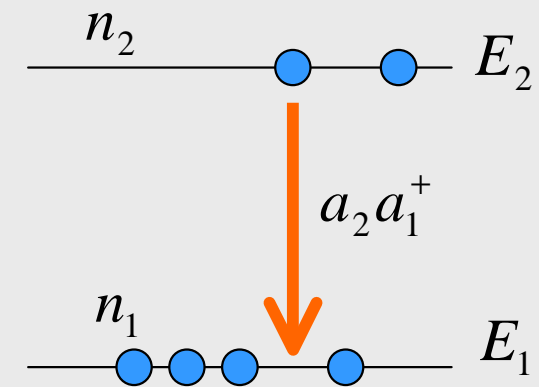
podobně operátor $M^+ = a_1^+ a_2 = |1\rangle\langle 2|$ představuje emisi fotonu

a přeskok elektronu na dolní hladinu

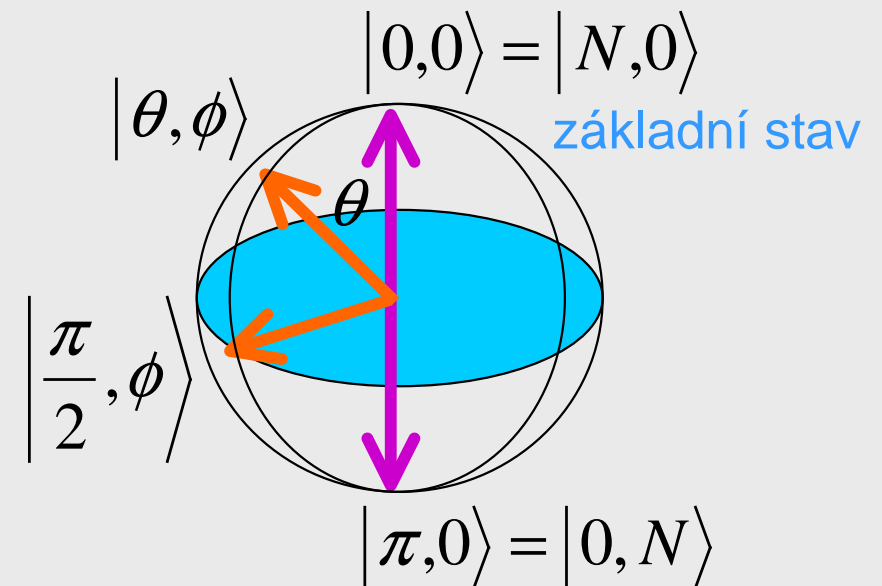
základní stav systému atomů $|\text{min}\rangle = |N, 0\rangle$,

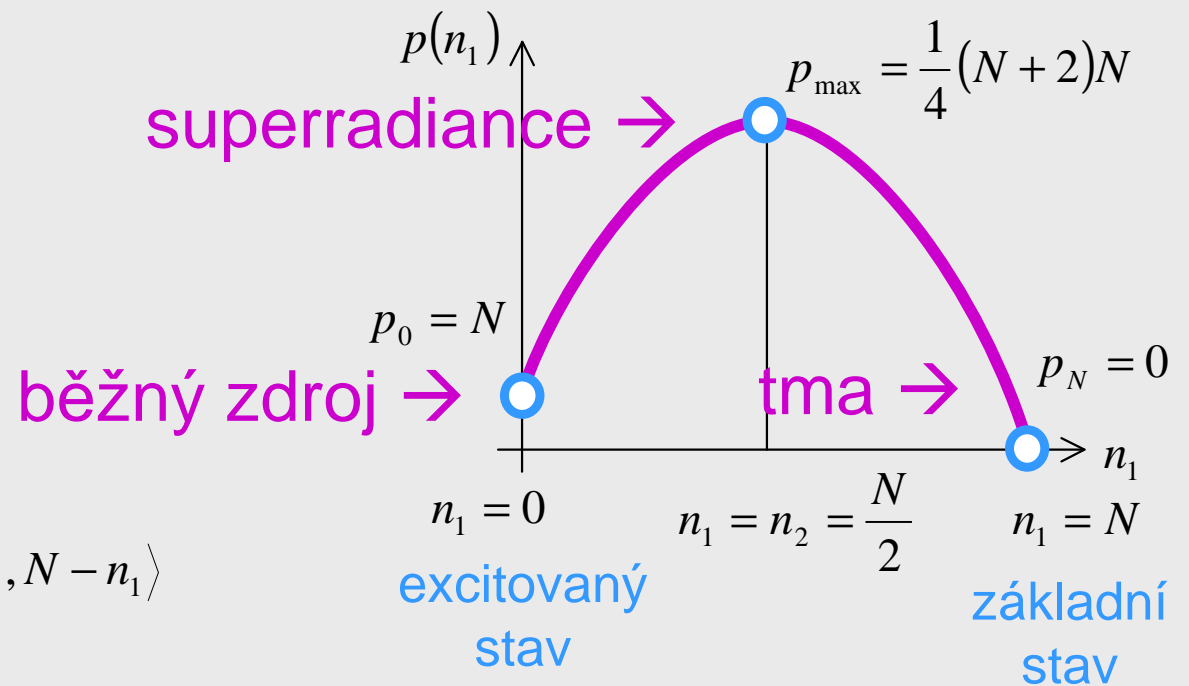
maximálně vybuzený $|\text{max}\rangle = |0, N\rangle$

obecný stav systému atomů $|\psi\rangle = |n_1, n_2\rangle = |n_1, N - n_1\rangle$



Atomové koherentní stavy
na Blochově sféře





Fockův stav systému atomů $|\psi\rangle = |n_1, n_2\rangle = |n_1, N - n_1\rangle$

pravděpodobnost emise fotonu je

$$p = \langle M^- M^+ \rangle = \langle a_1 a_2^+ a_1^+ a_2 \rangle = \langle n_1, n_2 | a_1 a_1^+ a_2^+ a_2 | n_1, n_2 \rangle = (n_1 + 1)n_2 = (n_1 + 1)(N - n_1)$$

Systém v základním stavu $|N, 0\rangle$ emituje světlo o intenzitě $I \propto p = 0 \leftarrow$ tma

Systém v excitovaném stavu $|0, N\rangle$ emituje $I \propto p = N \leftarrow$ běžné zdroje

Systém v superradiačním stavu $|\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\rangle$ emituje $I \propto p = \frac{1}{4}(N+2)N \approx \frac{N^2}{4} \leftarrow$ superradiance

Atomový koherentní stav $|\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2}\rangle$ emituje jen o trochu méně $I \propto p = \frac{1}{4}(N+1)N \approx \frac{N^2}{4},$

dá se přitom mnohem snadněji připravit.