ZÁKLADY GEOMETRIE KŘIVEK A PLOCH

Provizorní studijní materiál

1. Křivky v trojrozměrném prostoru

1.1. Úvod

E_3 - trojrozměrný euklidovský prostor s pevně zvolenou kartézskou soustavou $\langle P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$,
V_3 - jeho zaměření

D 1.1. Nechť $J \subset R$. Zobrazení $X : J \to E_3$ (resp. $\vec{x} : J \to V_3$) se nazývá bodová (vektorová) funkce jedné proměnné.

Pozn.
1) Limita bodové, resp. vektorové funkce v čísle t_0 existuje, právě když existují limity jejích složek: $\lim\limits_{t \to t_0} x_i = a_i \quad (i = 1, 2, 3)$. Pak platí $\lim\limits_{t \to t_0} X(t) = A$ resp. $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{x}(t) = \vec{a}$, kde $A = (a_{1,}\ a_2, a_3)$ a $\vec{a} = (a_{1,}\ a_2, a_3)$.

2) Bodová nebo vektorová funkce je spojitá v čísle t_0, jestliže je v t_0 definována a má zde limitu rovnou funkční hodnotě v čísle t_0.

3) Derivace

$$\frac{dX(t_0)}{dt} = \dot{X}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{h} = \left(\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0), \dot{x}_3(t_0)\right),$$

analogicky pro vektorovou funkci:

$$\frac{d\vec{x}(t_0)}{dt} = \dot{\vec{x}}(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{x}(t_0 + h) - \vec{x}(t_0)}{h} = \left(\dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0), \dot{x}_3(t_0)\right).$$

<u>**V obou případech je derivací vektor!**</u>

4)
$$\frac{d\left(X + \vec{u}\right)}{dt} = \dot{X} + \dot{\vec{u}} \qquad \frac{d\left(f\,\vec{u}\right)}{dt} = \dot{f}\,\vec{u} + f\,\dot{\vec{u}}$$

$$\frac{d\left(\vec{u}\vec{v}\right)}{dt} = \dot{\vec{u}}\,\vec{v} + \vec{u}\,\dot{\vec{v}} \qquad \frac{d\left(\vec{u} \times \vec{v}\right)}{dt} = \dot{\vec{u}} \times \vec{v} + \vec{u} \times \dot{\vec{v}}$$

$$\frac{d\left(\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}\right)}{dt} = \left(\dot{\vec{u}}\,\vec{v}\,\vec{w}\right) + \left(\vec{u}\,\dot{\vec{v}}\,\vec{w}\right) + \left(\vec{u}\,\vec{v}\,\dot{\vec{w}}\right)$$

D 1.2. Řekneme že reálná, bodová nebo vektorová funkce je třídy $C^n \quad (n \in N)$, jestliže je na dané množině spojitá i se svými derivacemi až do řádu *n*.

D 1.3. Množinu $k \subset E_3$ nazýváme regulární křivkou, je-li určena aspoň jednou bodovou (resp. vektorovou) funkcí $R(t)$, resp. vektorovou funkcí $\vec{r}(t)$, definovanou na otevřeném intervalu J s těmito vlastnostmi:
1. $R(t)$, resp. $\vec{r}(t)$ je prostá a třídy aspoň C^3
2. $\forall t \in J$: $\dot{R}(t) \neq 0$, resp. $\dot{\vec{r}}(t) \neq 0$.

Pozn. V dalším budeme upřednostňovat vektorové popisy křivek. Vektor $\vec{r}(t)$ - názvy: *radius vektor*, *polohový vektor*, *průvodní vektor*.

1.2. Transformace parametru

D1.4. Funkce $t = t(u)$, která zobrazuje otevřený interval I na otevřený interval J se nazývá *přípustná funkce*, jestliže je třídy C^n a $\forall u \in I : \frac{dt}{du} \neq 0$.

Nechť k: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in J$ je regulární křivka, $t = t(u)$ přípustná funkce, $t : I \to J$. Pak je buď $\frac{dt}{du} > 0$ nebo $\frac{dt}{du} < 0 \Rightarrow t(u)$ je vzájemně jednoznačné zobrazení *I* na *J*.

Vektorová funkce $\vec{x}(u) = \vec{r}(t(u))$, $u \in I$ určuje tutéž křivku *k*. Od vyjádření $\vec{x}(u)$ k vyjádření $\vec{r}(t)$ přejdeme substitucí což je zřejmě také přípustná funkce.

Pozn.
1) Dá se ukázat, že k libovolným dvěma popisům $\vec{r}(t)$ a $\vec{x}(u)$ téže regulární křivky lze nalézt přípustnou transformaci $t = t(u)$ resp. $u = u(t)$.
2) V diferenciální geometrii obvykle rozlišujeme různé popisy téže křivky jen rozlišením parametru, píšeme: $\vec{r}(t)$, $\vec{r}(u), \dots$ místo správnějšího $\vec{r}(t)$, $\vec{x}(u), \dots$.

3) Řekneme, že dvě parametrizace jsou souhlasné (nesouhlasné), jestliže příslušná transformace parametru je rostoucí (klesající) přípustná funkce.
Relace souhlasnosti je ekvivalence a rozkládá množinu všech parametrizací křivky k do dvou tříd. Každou z nich nazveme *orientací křivky k*. Orientaci na křivce zvolíme zadáním její libovolné parametrizace, hovoříme pak o *orientované křivce*. Do obrázku vyznačujeme směr šipkou tak, aby to odpovídalo rostoucím hodnotám parametru (při fyzikální interpretaci směru pohybu).

1.3. Tečna křivky

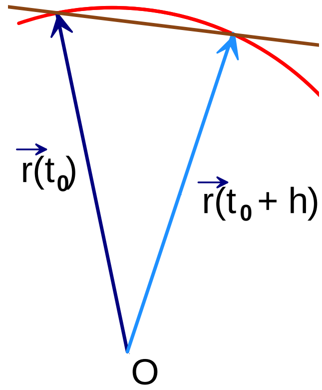
k: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in J$ je regulární křivka, směr tečného vektoru $\dot{\vec{r}}(t)$ (neorientovaný) nezávisí na volbě parametru. Je-li totiž $t = t(u)$ přípustná transformace, pak $\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \Rightarrow \dot{\vec{r}}(u)$ a $\dot{\vec{r}}(t)$ jsou lineárně závislé, nenulové.

Rovnice $\vec{y} = \vec{r}(t_0) + \alpha\, \dot{\vec{r}}(t_0)$ určuje jednoznačně tečnu v bodě t_0 (nezávisle na parametrickém vyjádření křivky).

Pozn.

$$\dot{\vec r}(t_0) = \lim_{h \to O} \frac{\vec r(t_0+h) - \vec r(t_0)}{h}$$

Laicky řečeno: Tečna křivky je přímka, která spojuje její dva nekonečně blízké body.
(obr.)



1.4. Oskulační rovina

k: $\vec r = \vec r(t)$, $t \in J$ je regulární křivka, $t = t(u)$ přípustná funkce.
Z derivací

$\frac{d\vec r}{du} = \dot{\vec r} \cdot \frac{dt}{du}$ a $\frac{d^2\vec r}{du^2} = \ddot{\vec r} \cdot \left(\frac{dt}{du}\right)^2 + \dot{\vec r} \cdot \frac{d^2 t}{du^2}$ vidíme, že vektory $\frac{d\vec r}{du}$ a $\frac{d^2\vec r}{du^2}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jsou lineárně závislé vektory $\dot{\vec r}$ a $\ddot{\vec r}$ (promyslete). Má tedy smysl následující definice.

D1.5. Bod $R(t_0)$ křivky k: $\vec r(t)$ se nazývá *inflexní* (*neinflexní*) jestliže jsou vektory $\dot{\vec r}(t_0)$ a $\ddot{\vec r}(t_0)$ lineárně závislé (nezávislé).
Pro neinflexní bod $R(t_0)$ se nazývá rovina určená tímto bodem a vektory $\dot{\vec r}(t_0)$ a $\ddot{\vec r}(t_0)$ *oskulační rovina křivky v bodě* $R(t_0)$.
V případě inflexního bodu $R(t_0)$ je oskulační rovinou každá rovina obsahující tečnu křivky v daném bodě.

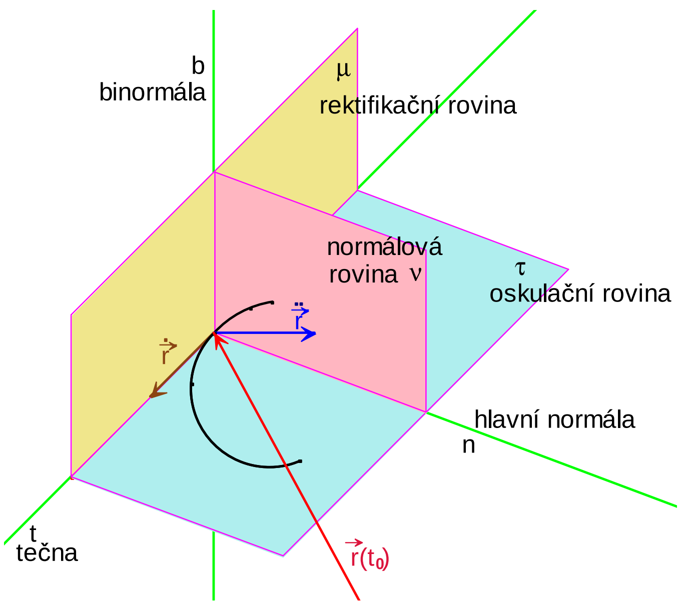
Pozn. Oskulační rovina je ta, která se v daném bodě ke křivce nejvíce přimyká (rovina proložená třemi nekonečně blízkými body).

Rovnice oskulační roviny v bodě t_0:

Vektor $\dot{\vec r}(t_0) \times \ddot{\vec r}(t_0)$ je kolmý na τ a vektor $\vec x - \vec r(t_0)$, kde $\vec x$ značí polohový vektor bodu oskulační roviny τ, je rovnoběžný s τ. Stručněji:

$$X \in \tau \Leftrightarrow (\vec x - \vec r) \cdot (\dot{\vec r} \times \ddot{\vec r}) = 0$$

$$\tau: \begin{vmatrix} X - \vec r \\ \dot{\vec r} \\ \ddot{\vec r} \end{vmatrix} = 0$$



Další pojmy zavádíme pomocí obrázku.

Komentář k obrázku: V bodě $\vec{r}(t_0)$ je: *binormála* b - kolmice na oskulační rovinu τ, *hlavní normála* n je kolmice na tečnu t v rovině τ, *normálová rovina* ν je dána přímkami *n*, *b* a *rektifikační rovina* μ dána přímkami *b*, *t*. Každá přímka kolmá na t v bodě $\vec{r}(t_0)$ se nazývá *normála*. Všechny normály tvoří rovinu ν.

Pozn. Oskulační rovina rovinné křivky je ta, ve které křivka leží.

1.5. Oblouk křivky

D1.6. Nechť k: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in J$ je regulární křivka a $t_0 \in J$ pevně zvolené číslo. Funkce $s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}\, dt$ se nazývá *oblouk křivky* (též *přirozený parametr*).

Geometrický význam: Délka křivky mezi body $\vec{r}(t_0)$ a $\vec{r}(t)$ se rovná $|s(t)|$.

Pozn.
1) Graf vhodné funkce $y = f(x)$ si lze představit jako křivku s vyjádřením $\vec{r}(x) = (x, f(x))$. Pak $s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

2) Transformace je přípustná, neboť $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3)^2} > 0$. Platí:
$1 = \dfrac{ds}{ds} = \dfrac{ds}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \sqrt{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}\,\dfrac{dt}{ds}$. Inverzní funkce: $t = t(s)$ má tedy derivaci $t'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}}$.

3) Derivace podle oblouku *s* značíme čárkou a podle jiného parametru tečkou.

V.1.1. Zavedeme-li na křivce dva oblouky *s* a *s**, pak $s^* = \varepsilon s + K$, kde $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ a K je reálné číslo.

V.1.2. Nechť k: $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in J$ je regulární křivka. Pak *s* je oblouk právě tehdy, když $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$ pro všechna $s \in J$.

V.1.3. V neinflexním bodě regulární křivky určené vektorovou funkcí $\vec{r} = \vec{r}(s)$, kde *s* je oblouk, platí $\vec{r}''(s) \perp \vec{r}'(s)$.

1.5. První křivost křivky

D.1.7. Číslo ${}^1k(s) = |\vec{r}''(s)|$ nazýváme *první křivost* (*flexe*) křivky *k* v čísle s, vektor $\vec{r}''(s)$ nazveme *vektorem první křivosti* a jednotkové vektory $\vec{t}(s) = \vec{r}'(s)$, $\vec{n}(s) = \dfrac{\vec{r}''(s)}{|\vec{r}''(s)|}$ a $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$ nesou po řadě názvy *vektor tečny*, *vektor hlavní normály* a *vektor binormály* křivky k v bodě s. Uspořádaná trojice $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ se nazývá *Frenetův trojhran*.

Poznámky

1. Z definice plyne $$\vec{t}\,' = \vec{r}\,'' = {}^1k \cdot \vec{n}\,. \qquad (1.1)$$

2. Orientace vektoru $\vec{t}$ závisí na parametrizaci, ale trojice $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ a $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ jsou vždy orientovány souhlasně.

3. Rozlišuj tečný vektor a vektor tečny!

V.1.4. Bod křivky je jejím inflexním bodem právě tehdy, když ${}^1k = 0$. Je-li ${}^1k \neq 0$, pak $\vec{r}\,'' \perp \vec{r}\,'$.

V.1.5. (Lagrangeova identita) Pro každé dva vektory $\vec{u}, \vec{v}$ platí $(\vec{u}\cdot\vec{u})(\vec{v}\cdot\vec{v}) - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \left|\vec{u}\times\vec{v}\right|^2$.

V.1.6. Nechť k: $\vec{r}(s)$ je regulární křivka a $s \in J$ oblouk. Označíme-li $\alpha(h)$ odchylku vektorů $\vec{t}(s)$ a $\vec{t}(s+h)$, platí ${}^1k(s) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\alpha(h)}{h}$.

$$\left({}^1k\right)^2 = \left|\vec{r}\,''\right|^2 = \frac{\left|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\right|^2}{\left(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\right)^3}, \qquad \dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}, \qquad \left({}^1k\right)^2 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}{\left(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\right)^3}.$$

Rovinné křivky:

$$\vec{r} = \left(x(t), y(t), 0\right), \quad \dot{\vec{r}} = \left(\dot{x}, \dot{y}, 0\right), \quad \ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{x}, \ddot{y}, 0\right), \quad \left({}^1k\right)^2 = \frac{(\dot{x}\cdot\ddot{y} - \ddot{x}\cdot\dot{y})^2}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^3}.$$

Je-li křivka explicitně vyjádřena funkcí $y = f(x)$, můžeme položit $t = x$, pak $x(t) = x$, $y(t) = f(x)$, $z(t) = 0$.

Pro první křivost dostaneme: $$\left({}^1k\right)^2 = \frac{\left(f''\right)^2}{\left(1 + f'^2\right)^3}.$$

1.6 Frenetovy vzorce

V.1.7 (Věta o ortonormálním repéru). Nechť vektory $\vec{m}_1(t)$, $\vec{m}_2(t)$ a $\vec{m}_3(t)$ tvoří ortonormální repér na otevřeném intervalu J a platí $\dot{\vec{m}}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\vec{m}_j$. Pak je matice koeficientů a_{ij} antisymetrická, má tedy tvar $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$.

V.1.8 (Frenetovy vzorce). Pro vektory $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b},$ které určují v každém bodě křivky k její Frenetův trojhran, platí:

$$\begin{aligned} \vec{t}\,' &= \quad {}^1k\,\vec{n}, \\ \vec{n}\,' &= -{}^1k\,\vec{t} \quad + \quad {}^2k\,\vec{b}, \\ \vec{b}\,' &= \quad -{}^2k\,\vec{n}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

kde reálné funkce ${}^1k$ a ${}^2k$ jsou po řadě první a druhá křivost křivky k.

Pozn. První ze vztahů je (1.1), druhé dva plynou z V.1.6, označíme-li $a_{23} = {}^2k$.

Druhou křivost jsme tímto definovali jako jeden z koeficientů vztahu (1.2). Její význam ozřejmí následující věty.

V.1.9. Nechť k: $\vec{r}(s)$ je regulární křivka a $s \in J$ oblouk. Označme $\alpha(h)$, resp. $\beta(h)$ odchylku vektorů $\vec{t}(s)$ a $\vec{t}(s+h)$, resp. $\vec{b}(s)$ a $\vec{b}(s+h)$. Pak platí

$${}^1k(s) = \lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}, \qquad \text{resp.} \qquad {}^2k(s) = \lim_{h\to 0}\frac{\beta(h)}{h}.$$

V.1.10. Nechť křivka k neobsahuje inflexní body. Pak má v každém svém bodě druhou křivost rovnu nule právě tehdy, když je rovinná.

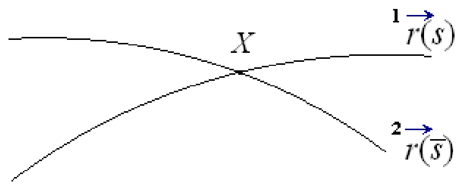
Výpočet druhé křivosti:

$$\left|{}^2k\right| = \left|\vec{b}\,'\right| \quad {}^2k = -\vec{n}\cdot\vec{b}\,', \quad {}^2k = \frac{(\vec{r}\,'\,\vec{r}\,''\,\vec{r}\,''')}{\left|\vec{r}\,''\right|^2}, \quad {}^2k = \frac{(\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}\,\dddot{\vec{r}})}{\left|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\right|^2}.$$

Přirozené rovnice křivky: ${}^1k={}^1k(s)$ a ${}^2k={}^2k(s)$. Křivka je (až na umístění) plně určena svými křivostmi.

1.7 Styk dvou křivek, oskulační kružnice

Nechť se křivky určené vektorovými funkcemi ${}^1\vec{r}(s)$ a ${}^2\vec{r}(\bar{s})$ protínají v bodě X určeném hodnotami s_0 a $\bar{s}_0$ jejich přirozených parametrů. To znamená, že platí ${}^1\vec{r}(s_0) = {}^2\vec{r}(\bar{s}_0)$. Provedeme Taylorův rozvoj pro obě vektorové funkce:



$$ {}^1\vec{r}(s_0+\Delta s) = {}^1\vec{r}(s_0) + \frac{\Delta s}{1!}\cdot {}^1\vec{r}'(s_0) + \frac{\Delta s^2}{2!}\cdot {}^1\vec{r}''(s_0) + \frac{\Delta s^3}{3!}\cdot {}^1\vec{r}'''(s_0) + \ldots + R_{n+1}, $$

$$ {}^2\vec{r}(\bar{s}_0+\Delta s) = {}^2\vec{r}(\bar{s}_0) + \frac{\Delta s}{1!}\cdot {}^2\vec{r}'(\bar{s}_0) + \frac{\Delta s^2}{2!}\cdot {}^2\vec{r}''(\bar{s}_0) + \frac{\Delta s^3}{3!}\cdot {}^2\vec{r}'''(\bar{s}_0) + \ldots + \bar{R}_{n+1}. $$

Rozdílem obou vztahů dostaneme

$$ {}^1\vec{r}(s_0+\Delta s) - {}^2\vec{r}(s_0+\Delta s) = \frac{\Delta s}{1!}\left({}^1\vec{r}'(s_0) - {}^2\vec{r}'(\bar{s}_0)\right) + \frac{\Delta s^2}{2!}\left({}^1\vec{r}_0''(s_0) - {}^2\vec{r}''(\bar{s}_0)\right) + \frac{\Delta s^3}{3!}\left({}^1\vec{r}'''(s_0) - {}^2\vec{r}'''(\bar{s}_0)\right) + \ldots $$

Jestliže se Δs blíží k nule, závisí vzdálenost bodů s polohovými vektory ${}^1\vec{r}(s_0+\Delta s) = {}^2\vec{r}(\bar{s}_0+\Delta s)$ na rozdílu derivací. Proto má smysl zavést následující definici.

D.1.8. Nechť se dvě křivky ${}^1\vec{r}(s)$ a ${}^2\vec{r}(\bar{s})$ protínají v bodě X určeném hodnotami s_0 a $\bar{s}_0$ jejich přirozených parametrů, tedy ${}^1\vec{r}(s_0) = {}^2\vec{r}(\bar{s}_0)$. Říkáme, že křivky mají v bodě X styk alespoň $n-$tého řádu (též možno říci alespoň $n+1$bodový styk), právě když platí

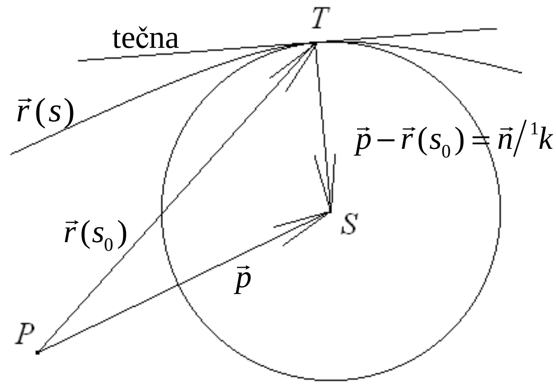
$$ \frac{d^j}{ds^j}\,{}^1\vec{r}(s_0) = \frac{d^j}{ds^j}\,{}^2\vec{r}(\bar{s}_0) \quad pro\ j = 1, 2, \ldots, n. $$

Platí-li navíc $\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}\,{}^1\vec{r}(s_0) \neq \frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}\,{}^2\vec{r}(\bar{s}_0)$, mají styk právě $n-$tého řádu ($n+1$bodový).

Oskulační kružnice křivky $\vec{r}(t)$ v jejím bodě $\vec{r}(t_0)$ je kružnice, kterou dostaneme jako limitní polohu kružnice opsané trojúhelníku s vrcholy v koncových bodech základního umístění vektorů $\vec{r}(t_0), \vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2)$, pokud se $t_1\ a\ t_2$ blíží k hodnotě t_0. Oskulační kružnice se též nazývá **kružnice křivosti** a má s danou křivkou styk druhého řádu (tříbodový styk). Její poloměr ρ nazýváme **poloměr křivosti** křivky v bodě t_0 a střed oskulační kružnice je střed **křivosti křivky** v bodě t_0.

Nechť je křivka vyjádřena pomocí oblouku, tedy $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Pak má oskulační kružnice tyto vlastnosti:

1. Kružnice leží v oskulační rovině bodu s_0,
2. prochází bodem $\vec{r}(s_0)$,
3. má s křivkou společnou tečnu v bodě $\vec{r}(s_0)$,
4. má s křivkou společnou hlavní normálu v bodě $\vec{r}(s_0)$,
5. její střed S leží na hlavní normále,



6. její poloměr má velikost $\dfrac{1}{{}^1k(s_0)}$,
7. Pro polohový vektor středu oskulační kružnice platí (viz obrázek)

$$\vec{p} = \vec{r}(s_0) + \frac{1}{{}^1k}\vec{n} \qquad (1)$$

1.8 Obalová křivka, evoluta evolventa

Obalovou křivkou (**obálkou**) jednoparametrické soustavy křivek se nazývá taková křivka *k*, která se dotýká každé křivky z dané soustavy křivek a zároveň je každý její bod bodem dotyku s některou křivkou soustavy.
Křivka *h*, která protíná kolmo všechny tečny dané křivky *k*, se nazývá **evolventou** křivky *k*.
Obalová křivka normál křivky *k* se nazývá **evoluta** křivky *k*.
Každá křivka má jedinou evolutu a zároveň jí přísluší nekonečně mnoho evolvent.

Evoluta ℓ křivky *k* se definuje jako množina všech jejích středů křivosti. Je zároveň obalovou křivkou normál křivky *k*. Křivka *k* je tzv. evolventou křivky ℓ.
Evolventa křivky *k* se definuje jako křivka *h*, která protíná kolmo všechny tečny dané křivky *k*.
Každá křivka má jedinou evolutu a zároveň jí přísluší nekonečně mnoho evolvent.
Dá se ukázat, že evolventa vzniká jako trajektorie bodu tečny při jejím odvalování po dané křivce.

Rovnice evoluty rovinné křivky $\vec{r}\left(x(t), y(t)\right)$ odvodíme ze vztahu (1). Vektor $\dot{\vec{r}} = \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t)\right)$ má

směr tečny, proto má vektor normály tvar $\vec{n} = \left(\dfrac{-\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)$,

navíc ${}^1k = \sqrt{\dfrac{\left|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right|^2}{\left(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right)^3}} = \dfrac{D}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, kde $D = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix} \neq 0.$ Po dosazení do (1) dostaneme pro

souřadnice $X(t)$ a $Y(t)$ evoluty ℓ rovnice

$$X = x(t) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\frac{\dot{y}}{D}, \quad Y = y(t) + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\frac{\dot{x}}{D}.$$

Úlohy:

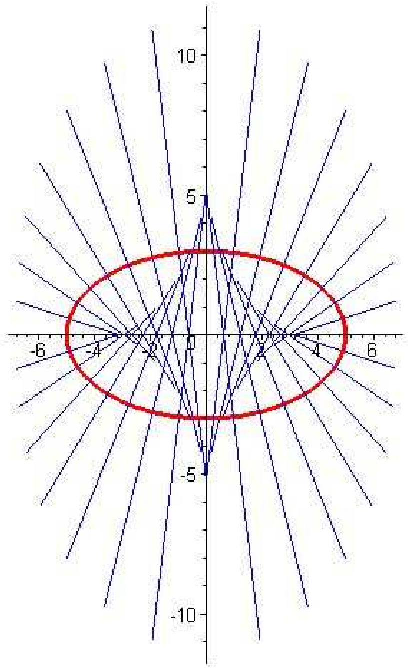
1. Dokažte, že evolutou elipsy

$x = a\cos t,\ y = b\sin t$

je tzv. zobecněná asteroida o rovnici

$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{4}{3}},$ kde $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

je excentricita elipsy.

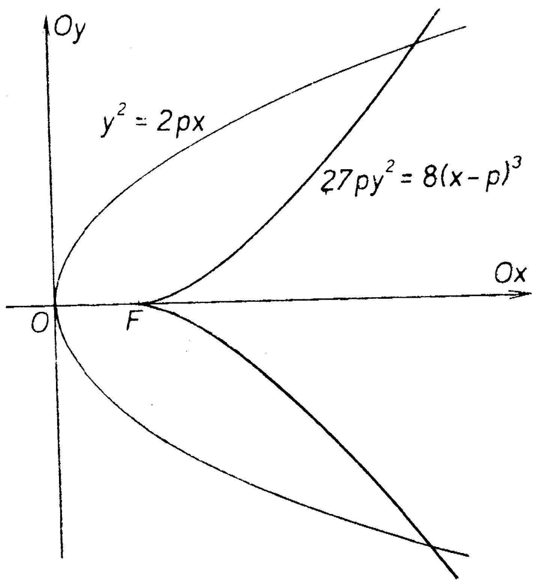


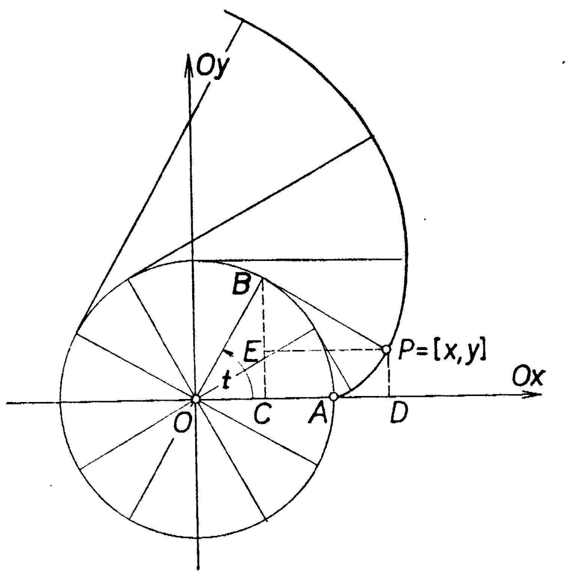
2. Dokažte, že evolutou paraboly
$y^2 = 2px$

je semikubická parabola
$27py^2 = 8(x-p)^3.$

3. Dokažte, že evolventou kružnice

$x^2 + y^2 = r^2$ je křivka s vyjádřením $x = r(\cos t + t\sin t),\ y = r(\sin t - t\cos t).$





2. GEOMETRIE PLOCH

2.1. Základní pojmy

Definice a věty uvádíme pouze pro vektorové funkce. Promyslete si jejich analogie pro bodové funkce.

Definice 2.1. Vektorová funkce $\vec{r}\,(u^1,u^2)$ proměnných $u^1,u^2 \in M$ je zobrazení množiny $M \subset R\times R$ do vektorového prostoru V_3.

Je tedy $\vec{r}\ (u^1,u^2)=\left(x_1(u^1,\ u^2),\ x_2(u^1,\ u^2),\ x_3(u^1,u^2)\right)$, kde $x_i\ (u^1,\ u^2)$ jsou reálné funkce proměnných $u^1,\ u^2$ a $i=1,2,3$.

Definice 2.2. Nechť existují limity $\lim\limits_{\substack{u^1\to u_0^1\\ u^2\to u_0^2}} x_i(u^1,\ u^2)=a_i,\ i\in\{1,2,3\}$,

pak limitou funkce $\vec{r}=\vec{r}\ (u^1,u^2)=\left(x_1(u^1,\ u^2),\ x_2(u^1,\ u^2),\ x_3(u^1,u^2)\right)$ v bodě (u_0^1,u_0^2) rozumíme vektor $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$.

Definice 2.3. Parciální derivace funkce $\vec{r}$ značíme a definujeme následovně:

$$\vec{r}_1=\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}\left(u^1+h,u^2\right)-\vec{r}\left(u^1,u^2\right)}{h}=\left(\frac{\partial x_1}{\partial u^1},\frac{\partial x_2}{\partial u^1},\frac{\partial x_3}{\partial u^1}\right)$$

$$\vec{r}_2=\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}\left(u^1,u^2+h\right)-\vec{r}\left(u^1,u^2\right)}{h}=\left(\frac{\partial x_1}{\partial u^2},\frac{\partial x_2}{\partial u^2},\frac{\partial x_3}{\partial u^2}\right)$$

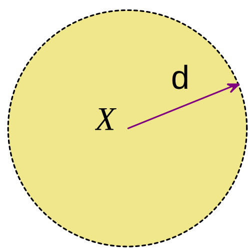
$$\vec{r}_{ij}=\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i\partial u^j}=\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^i\partial u^j},\frac{\partial^2 x_2}{\partial u^i u^j},\frac{\partial^2 x_3}{\partial u^i\partial u^j}\right)$$

Definice 2.4. Souvislá a otevřená podmnožina Ω množiny $\omega=R\,x\,R$ se nazývá oblast.

Přitom

- Ω je souvislá, právě když každé dva její body lze spojit lomenou čarou, která celá leží v Ω.
- Ω je otevřená množina, právě když ke každému jejímu bodu X existuje $\delta-$okolí, které je podmnožinou množiny Ω.

Delta okolí



Poznámka. Množinu $\omega=R\,x\,R$ si představujeme jako aritmeticky pojatou rovinu, proto zde její prvky (uspořádané dvojice reálných čísel) nazýváme body. $\delta-$okolí bodu X je množina všech bodů roviny ω, které mají od bodu X vzdálenost menší než δ.

Definice 2.5. Množina bodů $X = O + \vec{r}$ z prostoru E_3, které jsou určeny vektorovou funkcí $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ se nazývá regulární plocha, právě když současně platí:

a) $\vec{r}$ je definována na oblasti Ω a má zde spojité parciální derivace nejméně do 3. řádu (je třídy alespoň C^3).

b) Vektory $\vec{r}_1 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}$ a $\vec{r}_2 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}$ jsou lineárně nezávislé pro všechna $(u^1, u^2) \in \Omega$.

c) Každým dvěma různým bodům z Ω přísluší dva různé body plochy (tj. $\vec{r}$ je prostá funkce).

2.2. Transformace parametrů na ploše

Tutéž plochu lze popsat pomocí různých vektorových funkcí.

Definice 2.6. Nechť Z je zobrazení oblasti $\overline{\Omega}$ na oblast Ω dané funkcemi $u^1 = u^1(\overline{u}^1, \overline{u}^2)$ a $u^2 = u^2(\overline{u}^1, \overline{u}^2)$ kde $(\overline{u}^1, \overline{u}^2) \in \overline{\Omega}$ a $(u^1, u^2) \in \Omega$. Zobrazení Z se nazývá přípustné zobrazení, právě když současně platí:

a) Zobrazení Z je prosté.

b) Funkce u^1, u^2 jsou třídy aspoň C^3.

c) Pro všechny body $(\overline{u}^1, \overline{u}^2) \in \overline{\Omega}$ je jakobián $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^1} \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial \overline{u}^2} & \dfrac{\partial u^2}{\partial \overline{u}^2} \end{vmatrix}$ různý od nuly.

Věta 2.1. Je- li Z přípustné zobrazení oblasti $\overline{\Omega}$ na oblast Ω, pak existuje inverzní zobrazení $Z^{-1} : \Omega \to \overline{\Omega}$.

Věta 2.2. Nechť $\vec{r}(u^1, u^2)$ definována na oblasti Ω určuje regulární plochu ***P*** a Z je přípustné zobrazení oblasti $\overline{\Omega}$ na oblast Ω dané funkcemi $u^1 = u^1(\overline{u}^1, \overline{u}^2)$, $u^2 = u^2(\overline{u}^1, \overline{u}^2)$, kde $(\overline{u}^1, \overline{u}^2) \in \overline{\Omega}$ a $(u^1, u^2) \in \Omega$. Pak vektorová funkce $\vec{r}(\overline{u}^1, \overline{u}^2) = \vec{r}(u^1(\overline{u}^1, \overline{u}^2), u^2(\overline{u}^1, \overline{u}^2))$ určuje tutéž plochu ***P***.

Věta 2.3. Jestliže jsou $\vec{r}(u^1, u^2)$ a $\vec{r}$ $(\overline{u}^1, \overline{u}^2)$ dvě různá vyjádření téže plochy ***P***, kde $(u^1, u^2) \in \Omega$ a $(\overline{u}^1, \overline{u}^2) \in \overline{\Omega}$, pak existuje přípustné zobrazení

$$\text{Z: } (\overline{u}^1, \overline{u}^2) \to \left(u^1(\overline{u}^1, \overline{u}^2), u^2(\overline{u}^1, \overline{u}^2)\right)$$

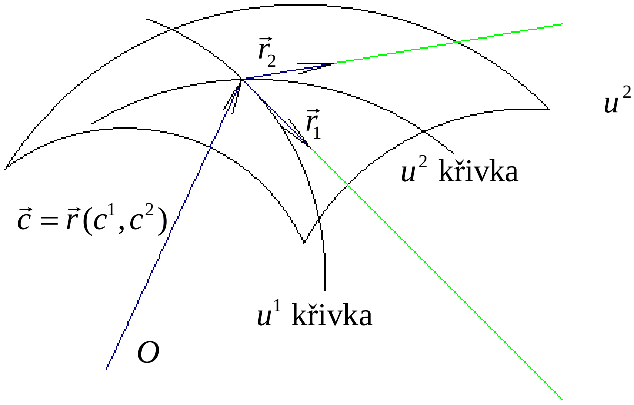
oblasti $\overline{\Omega}$ na oblast Ω takové, že $\vec{r}\left(u^1(\overline{u}^1, \overline{u}^2), u^2(\overline{u}^1, \overline{u}^2)\right) = \vec{r}(\overline{u}^1, \overline{u}^2)$.

2.3. Souřadnicové křivky

Definice 2.7. Nechť $\vec{r}(u^1,u^2)$ je regulární plocha definovaná na oblasti Ω a $C=(c^1,c^2)\in\Omega$ je pevně zvolený bod.

Křivka daná rovnicí $\vec{r}\,(u^1)=\vec{r}(u^1,c^2)$ se nazývá u^1 křivka v bodě C a křivka daná rovnicí $\vec{r}\,(u^2)=\vec{r}(c^1,u^2)$ je u^2 křivka v bodě C.

Poznámka. Každým bodem C oblasti Ω prochází právě jedna u^1 křivka a právě jedna křivka. Tyto křivky vytvářejí soustavu křivočarých souřadnic na ploše. Tečny k nim v bodě C nesplývají, jak plyne z definice 2.5. Parametrická křivka nemusí být nutně regulární.



2.4. Příklady některých ploch

1) $\vec{r}=(a\cos u^1,\ a\sin u^1, u^2)$ - válcová plocha

2) $\vec{r}(u^1,u^2)=(a\cos u^1\cos u^2,\ a\sin u^1\cos u^2,\ a\sin u^2)$ - kulová plocha

(Podrobněji viz přednáška)

2.5. Křivky na ploše

Ve vyjádření plochy $\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2)$ definované na oblasti Ω zvolíme funkce $u^1=u^1(t)$ a $u^2=u^2(t)$, kde $t\in J$ je otevřený interval, tak aby $\left(u^1(t),u^2(t)\right)\in\Omega$ pro všechna $t\in J$. Pak $\vec{r}=\vec{r}\,(u^1(t),u^2(t))=\vec{r}\,(t)$ je křivka v E_3, která leží na dané ploše.

Příklad. $\vec{r}=(a\cos u^1,\ a\sin u^1, u^2)$, $(u^1,u^2)\in R\times R$ (viz přednáška)

2.6. Tečné a normálové vlastnosti plochy

Tečný vektor ke křivce $\vec{r}=\vec{r}\,(u^1(t),u^2(t))=\vec{r}\,(t)$ je $\dot{\vec{r}}=\vec{r}_1\dfrac{du^1}{dt}+\vec{r}_2\dfrac{du^2}{dt}$.

Přitom $\vec{r}_i=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u^i}$, $i=1,2$. Skaláry $\dfrac{du^1}{dt}$ a $\dfrac{du^2}{dt}$, kterými násobíme vektory $\vec{r}_2$ a $\vec{r}_2$ představují souřadnice tečného vektoru $\dot{\vec{r}}$ křivky $\vec{r}$ ve vnitřní geometrii plochy. Nazývají se kontravariantní souřadnice vektoru $\vec{r}$.

Věta 2.4. Tečny ke všem křivkám plochy v jejím daném bodě $T: \vec{r} = \vec{r}(u_0^1, u_0^2)$ leží v jediné rovině určené tímto bodem a vektory $\vec{r}_1(u_0^1, u_0^2), \vec{r}_2(u_0^1, u_0^2)$. Tato rovina se nazývá tečná rovina plochy v bodě dotyku *T*. Její parametrické vyjádření je

$$\vec{x} - \vec{r} = \alpha \vec{r}_1 + \beta \vec{r}_2 \quad \alpha, \beta \in R.$$

Rovnice tečné roviny ve vektorovém tvaru: $(\vec{x} - \vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$.

(Výraz na levé straně rovnice je smíšený součin uvedených tří vektorů. Bod *X* je bodem tečné roviny, právě když je v příslušném determinantu je první řádek lineární kombinací druhých dvou.)

a) Normála plochy má směrový vektor $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$.

Příklad. Rotační paraboloid je určen funkcí $\vec{r} = \left(u^1, u^2, \left(u^1\right)^2 + \left(u^2\right)^2\right), u^i \in R$. Určete jeho tečnou rovinu a normálu v bodě $T: \vec{r} = (2, 3)$. (Řešení viz přednáška.)

2.7. První základní forma plochy

Plocha: $\vec{r} = \vec{r}\left(u^1, u^2\right)$, kde $\left(u^1, u^2\right) \in \Omega$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} du^2 = \vec{r}_1 du^1 + \vec{r}_2 du^2$$

$$\varphi = \left| d\vec{r} \right|^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \vec{r}_i \vec{r}_j du^i du^j = g_{ij} du^i du^j = \underbrace{g_{11}}_{E} \left(du^1\right)^2 + 2 \underbrace{g_{12}}_{F} du^1 du^2 + \underbrace{g_{22}}_{G} \left(du^2\right)^2$$

(Gaussovo značení koeficientů 1. základní formy plochy: $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$.)

Výpočet koeficientů: $\underline{g_{ij} = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}$

Aplikace 1. základní formy

a) Délka oblouku křivky $\vec{r}(t)=\vec{r}\left(u^1(t),u^2(t)\right)$ na ploše je

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\varphi}=\int_{t_0}^{t}\sqrt{g_{ij}du^i(t)\ \ du^j(t)}.$$

b) Obsah plochy

Diskriminant 1. základní formy je determinant $g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}=g_{11}g_{22}-g_{12}^2$.

Platí: $g=\det\begin{pmatrix} \left|r_1\right|^2 & \left|\vec{r}_1\right|\cdot\left|\vec{r}_2\right|\cos\alpha \\ \left|\vec{r}_1\right|\cdot\left|\vec{r}_2\right|\cos\alpha & \left|\vec{r}_2\right|^2\end{pmatrix}=\left|\vec{r}\right|^2\cdot\left|\vec{r}_2\right|^2\left(1-\cos^2\alpha\right)=\left|\vec{r}_1\times\vec{r}_2\right|^2$

Element plochy: $dS=\left|d\vec{r}_1\times d\vec{r}_2\right|=\left|\vec{r}_1du^1\times\vec{r}_2du^2\right|=\left|\vec{r}_1\times\vec{r}\right|_2 du^1du^2=\sqrt{g}\,du^1du^2$

Obsah plochy: $S=\iint_{\Omega}dS=\iint_{\Omega}\sqrt{g}\,du^1du^2$

c) Skalární součin vektorů v tečném bodě plochy

V daném bodě plochy uvažujme tečnou rovinu a v ní vektory:

$\vec{a}=a^1\vec{r}_1+a^2\vec{r}_2=a^i\vec{r}_i$

$\vec{b}=b^1\vec{r}_1+b^2\vec{r}_2=b^i\vec{r}_i$

a^i,b^i jsou souřadnice vektorů $\vec{a},\vec{b}$
vzhledem k bázi $\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2\right)$.

Skalární součin vektorů: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a^ib^j\vec{r}_i\vec{r}_j=g_{ij}a^ib^j$

d) Odchylka dvou křivek plochy je odchylka jejich tečen:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{\left|g_{ij}a^ib^j\right|}{\sqrt{\left|g_{kl}a^ka^l\right|\cdot\left|g_{mn}b^mb^n\right|}}$$

Definice 2.8. Jestliže se parametrické křivky v každém bodě plochy protínají kolmo, řekneme, že tvoří ortogonální síť.

Věta 2.5. Parametrické křivky tvoří na ploše ortogonální síť právě tehdy, když v každém bodě plochy je $g_{12}=0$

2.8 Druhá základní forma plochy

V následujících úvahách budeme na ploše $\sigma : \vec{r}\left(u^1, u^2\right)$, kde $\left(u^1, u^2\right) \in \Omega,$ volit křivku

$$\ell : \vec{y} = \vec{y}\left(s\right) = \vec{r}\left(u^1\left(s\right), u^2\left(s\right)\right), \qquad (1)$$

kde *s* je oblouk.

Definice 2.9. Jednotkový vektor $\vec{m} = \dfrac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\right|}$ se nazývá vektor normály v daném bodě. Prochází-li navíc tímto bodem křivka s vektorovým vyjádřením (1), pak číslo $k_n = y'' \cdot \vec{m}$ nazýváme normálová křivost křivky v daném bodě.

Poznámka. Číslo $\left|k_n\right|$ představuje velikost kolmého průmětu vektoru $\vec{y}''$ do normály.

Věta 2.6. Platí $k_n = \dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}$, kde skalár $\varphi_2 = \vec{m} \cdot \vec{r}_{ij} du^i du^j = h_{ij} du^i du^j$ nazýváme druhá základní forma plochy a jeho koeficienty $h_{ij} = \vec{m} \cdot \vec{r}_{ij}$ jsou tzv. koeficienty druhé základní formy plochy.

Věta 2.7 (důsledek věty 2.6). Normálová křivost všech křivek plochy, které mají v daném bodě plochy společnou tečnu, je v tomto bodě stejná. Na směru tečny v daném bodě však závisí.

Věta 2.8. Platí $h_{ij} = -\vec{m}_i \cdot \vec{r}_j$, kde $\vec{m}_i = \dfrac{\partial \vec{m}}{\partial u^i}$.

.

Definice 2.10. Směr, v němž je normálová křivost v daném bodě plochy nulová, se nazývá asymptotický směr. Bod plochy, ve kterém je každý směr asymptotický, nazýváme planární bod plochy.

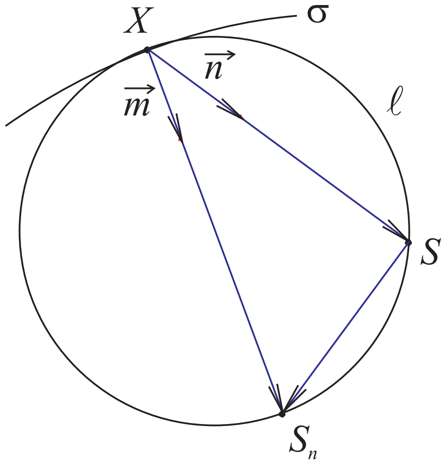
Poznámka. Planární body představují analogii inflexních bodů křivek.

Věta 2.9. Plocha má všechny své body planární právě tehdy, když je to rovina nebo její část.

Definice 2.11. Číslo $R_n = \dfrac{1}{k_n}$ se nazývá poloměr normálové křivosti a bod $S_n = X + R_n \vec{m}$ je střed normálové křivosti plochy v daném bodě.

Věta 2.10. Všechny křivky na dané ploše, které procházejí jejím bodem *X* a mají v něm společnou tečnu a společnou oskulační rovinu různou od tečné roviny plochy, mají v bodě *X* stejnou křivost. Mezi těmito křivkami je právě jedna rovinná (je průnikem plochy a zmíněné oskulační roviny.)

Věta 2.11 (Meusnier 1776). Nechť t je tečna k regulární ploše v jejím bodě X a směr tečny t není asymptotický. Množinou středů všech oskulačních kružnic těch křivek plochy, které mají společnou tečnu t, je kružnice ℓ o průměru $S_n X$, jež leží v rovině kolmé na tečnu t.



Důkaz. Na obrázku je řez plochy σ rovinou π, která jde bodem X a je kolmá na zvolenou tečnu t. S_n je střed normálové křivosti plochy v bodě X, přímka SX je průnik roviny π a oskulační roviny křivky

$$\vec{y}(s) = \vec{r}\left(u^1(s), u^2(s)\right),$$

jejíž tečnou je t. Bod $S \neq X$ je střed křivosti křivky $\vec{y}$.
Zřejmě $S \in \ell$, právě když $(S-X)\cdot(S_n - S) = 0$.
Vypočítáme tedy skalární součin $(S-X)\cdot(S_n-S)$.
Platí:
$(S-X)\cdot(S_n-S) = (S-X)\cdot\left((S_n-X)-(S-X)\right) =$
$= \rho\vec{n}\cdot\left(R_n\vec{m} - \rho\vec{n}\right)$, kde ρ je poloměr křivosti křivky $\vec{y}$.

Za její vektor normály dosadíme $\vec{n} = \dfrac{\vec{y}''}{|\vec{y}''|} = \dfrac{\vec{y}''}{{}^1k} = \rho\vec{y}''$ a dostaneme

$(S-X)\cdot(S_n-S) = \rho^2 R_n\,\vec{y}''\cdot\vec{m} - \rho^2\vec{n}\cdot\vec{n} = \rho^2 R_n\dfrac{1}{R_n} - \rho^2 = 0.$ Tím je důkaz proveden.

Dupinova indikatrix

Z definice normálové křivosti plyne $\dfrac{1}{R_n} = \dfrac{\varphi_2}{\varphi_1} = \dfrac{h_{ij}du^i du^j}{ds\,ds}$. Při označení $t^i = \dfrac{du^i}{ds}$ můžeme předchozí vztah přepsat na tvar $R_n h_{ij} t^i t^j = 1$. Položme ještě $q^i = t^i\sqrt{|R_n|}$. Obdržíme rovnici

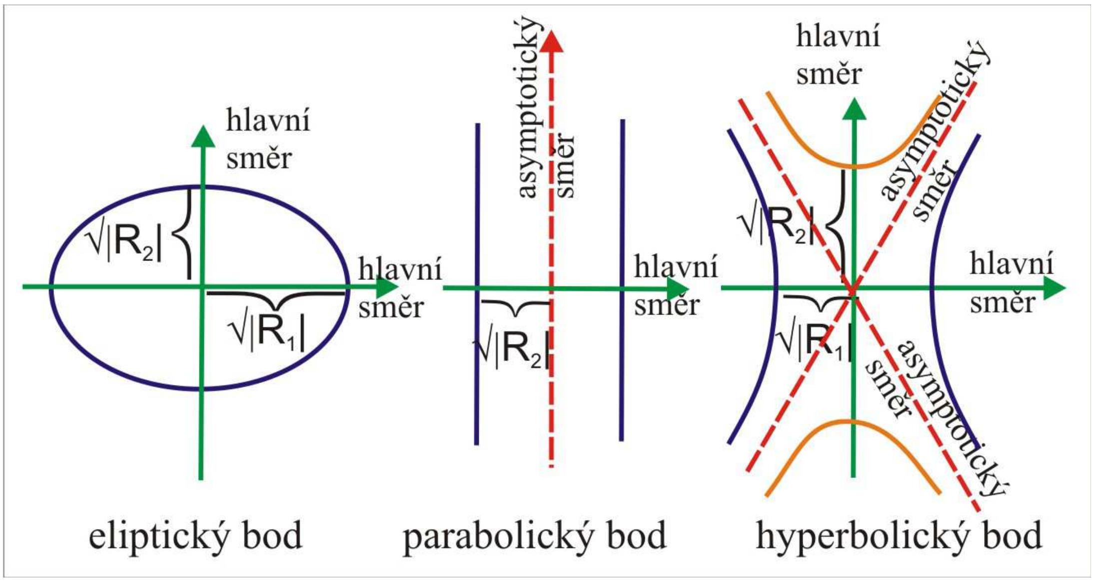
$$h_{ij}q^i q^j \pm 1 = 0, \qquad (2)$$

která představuje rovnici středově souměrné kuželosečky nebo dvojice středově souměrných kuželoseček v souřadnicích q^i. Středová souměrnost plyne z toho, že se vztah nemění záměnou $(q^1, q^2) \to (-q^1, -q^2)$. Křivka daná vztahem (2) se nazývá **Dupinova indikatrix**. Její význam spočívá v tom, že popisuje velikost normálové křivosti plochy v bodě X v závislosti na směru tečny. Abychom vyšetřili asymptotické směry, zavedeme homogenní souřadnice pomocí vztahů $q^i = \dfrac{x_i}{x_3}$.
Rovnice (2) bude mít po úpravě tvar

$$h_{11}x_1^2 + 2h_{12}x_1x_2 + h_{22}x_2^2 \pm x_3^2 = 0. \qquad (3)$$

Poznamenejme, že jsme zde na chvíli opustili tenzorovou symboliku, a tak horní indexy ve vztahu (3) představují mocniny. Pro nevlastní bod kuželosečky je $x_3 = 0$ a jeho zbývající souřadnice tedy splňují vztah $h_{11}x_1^2 + 2h_{12}x_1x_2 + h_{22}x_2^2 = 0.$ Na tuto podmínku se můžeme dívat jako na rovnici s neznámou x_1, parametrem x_2 a diskriminantem $D = -4h$, kde $h = h_1h_2 - h_{12}^2$.

1. Nechť je $h > 0$. Pak je diskriminant D záporný a kuželosečka nemá nevlastní body. Je to elipsa nebo kružnice. Vzdálenost od počátku soustavy souřadnic je úměrná číslu $\sqrt{|R_n|}$. Bod X v tomto případě nazýváme **eliptický bod**. Je-li Dupinova kvadratrix kružnicí, užíváme pro bod X název **kruhový bod**. Bod X je kruhový, právě když $h_{ij} = c\,g_{ij}$, kde $c \neq 0$ je konstanta. Vztah (2) má totiž v takovém případě tvar $g_{ij}q^iq^j = \dfrac{1}{c}$ a představuje kružnici se středem v počátku a poloměrem $R = \dfrac{1}{\sqrt{|c|}}$. (Uvědomte si, že levou stranu vztahu lze interpretovat jako druhou skalární mocninu polohového vektoru bodu křivky.)



2. Pro $h = 0$ popisuje rovnice (2) středově souměrnou kuželosečku s jedním asymptotickým směrem. Je to dvojice přímek středově souměrných podle počátku. V asymptotickém směru je normálová křivost nulová, ve směru na něj kolmém je minimální. Bod X s touto vlastností se nazývá **parabolický bod**.

3. Je-li $h < 0$, je diskriminant D kladný a Dupinova kvadratrix má dva asymptotické směry, které odpovídají nulové normálové křivosti. Kvadratrix je dvojicí hyperbol se společnými asymptotami a hlavními směry. V hlavních směrech má normálová křivost lokální minima. Bod X se nazývá **hyperbolický bod.**