

Metody aplikované matematiky

D. Janovská

Ústav matematiky, VŠCHT Praha, Technická 5, 166 28 Praha 6

e-mail: janovskd@vscht.cz

1 Úvod

Diskrétní metody řešení diferenciálních rovnic jako např. metoda sítí umožňují najít řešení diferenciální rovnice pouze v diskrétních bodech dané oblasti. Přibližná řešení, kterými se budeme zabývat v našem příspěvku, jsou spojitá, a tedy umožňují zjistit přibližné řešení v libovolném bodě dané oblasti a na její hranici.

Kapitola 2 je věnována metodě **vážených residuí**. Tato metoda je sice jednou z nejstarších metod pro numerické řešení diferenciálních rovnic, ale současně je nedílnou součástí moderních balíků programů. Uvedeme základní myšlenku a dvě konkrétní varianty této metody: **metodu kolokací** a **metodu nejmenších čtverců**. Metodu vážených residuí lze považovat za předchůdce metody konečných prvků, což byl hlavní důvod jejího zařazení do tohoto výkladu.

Metoda konečných prvků je jedním ze základních moderních nástrojů, které umožňují numerické řešení diferenciálních rovnic, zejména parciálních diferenciálních rovnic eliptického a parabolického typu. Je založena na variační formulaci okrajové úlohy a aproximuje přesné řešení po částech polynomiálními funkcemi (nám zde postačí funkce po částech lineární). Jejím základem je věnována kapitola 6. Nejprve uvedeme nezbytné minimum funkcionální analýzy tak, abychom byli schopni zformulovat diferenciální problém variačně a následně rozhodnout o existenci slabého řešení našeho problému a toto řešení najít. Základní myšlenku metody konečných prvků ukážeme na jednoduchých jednodimenzionálních úlohách. V závěru se budeme zabývat metodou konečných prvků pro řešení diferenciálních rovnic eliptického a parabolického typu.

2 Metoda vážených residuí

Řešme následující okrajovou úlohu:

$$L(u) = f \quad \text{na } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$B(u) = r \quad \text{na } \Gamma = \partial\Omega. \quad (2)$$

Protože hledáme spojitou aproximaci přesného řešení, předpokládáme, že přibližné řešení \hat{u} má tvar

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^P \alpha_m N_m(\mathbf{x}), \quad \text{kde} \quad (3)$$

Ψ je známá funkce, která splňuje přesně okrajovou podmínku na Γ , N_m je lineárně nezávislý systém známých tzv. testovacích funkcí, který splňuje

$$N_m(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad \forall m,$$

α_m jsou neznámé konstanty, které hledáme tak, aby chyba aproximace byla minimální (obvykle pro jednoduchost \hat{u} je lineární v α_m) a P je konečné číslo. Tedy spojitý problém (1), (2), který má nekonečně mnoho stupňů volnosti, redukuje se na přibližně ekvivalentní problém s P stupni volnosti. Úloha vede k řešení P lineárních algebraických rovnic pro P neznámých α_m .

Poznámka 2.1 *Poznamenejme, že v počátečních úlohách funkce Ψ , N_m i koeficienty α_m závisí na čase t :*

$$\Psi = \Psi(\mathbf{x}, t), \quad N_m = N_m(\mathbf{x}, t), \quad \alpha_m = \alpha_m(t).$$

Označme R_Ω residuum na oblasti Ω , R_Γ hraniční residuum:

$$R_\Omega = L(\hat{u}) - f \quad \text{v } \Omega, \quad R_\Gamma = B(\hat{u}) - r \quad \text{na } \Gamma.$$

Metoda vážených residuí vyžaduje, aby **vážené integrály residuí** byly **nulové**:

$$\int_{\Omega} w_i R_\Omega d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_i R_\Gamma d\Gamma = 0, \quad (4)$$

kde $w_i = w_i(\mathbf{x})$, $\bar{w}_i = \bar{w}_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, P$, jsou dva (obecně různé) lineárně nezávislé systémy váhových funkcí.

Je-li rovnice (4) splněna pro všechna $i = 1, \dots, P$, $P \rightarrow +\infty$, pak $R_\Omega \rightarrow 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$ a $R_\Gamma \rightarrow 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma$.

Metody vážených residuí lze rozdělit na tři typy metod:

- a) vnitřní metody - to jsou takové metody, pro které platí $R_\Gamma = 0$, neboli přibližné řešení splňuje okrajové podmínky přesně, diferenciální rovnici (a počáteční podmínky) přibližně;
- b) hraniční metody - to jsou metody, pro které $R_\Omega = 0$, tj. diferenciální rovnice (a počáteční podmínky) je splněna přesně, zatímco okrajové podmínky aproximujeme;
- c) smíšené metody - přibližné řešení nesplňuje přesně ani okrajové podmínky, ani diferenciální rovnici, tj. $R_\Gamma \neq 0$, $R_\Omega \neq 0$.

2.1 Vnitřní metody

Funkci Ψ a testovací funkce N_m vybíráme tak, aby hraniční residuum bylo nulové, tj. aby na Γ bylo $B(\hat{u}) = r$, $N_m = 0$, $m = 1, 2, \dots, P$. Přibližné řešení \hat{u} hledáme ve tvaru (3) a rovnice (4) se redukuje na rovnici

$$\int_{\Omega} w_i R_\Omega d\Omega = 0. \quad (5)$$

Uvědomme si, že řešíme-li diferenciální rovnici, musíme aproximovat také příslušné parciální derivace, které v rovnici vystupují. Je-li např. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, pak

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^P \alpha_m N_m(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^P \alpha_m \frac{\partial N_m}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Předpokládejme, že L je lineární diferenciální operátor, a dosadíme přibližné řešení do rovnice (5):

$$\int_{\Omega} w_i R_\Omega d\Omega = \int_{\Omega} w_i (L(\hat{u}) - f) d\Omega = \int_{\Omega} w_i (L(\Psi) + L(\sum_{m=1}^P \alpha_m N_m) - f) d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, P.$$

Dostaneme soustavu P lineárních algebraických rovnic pro P neznámých:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (6)$$

kde prvky k_{im} , $i, m = 1, \dots, P$, matice \mathbf{K} a složky b_i , $i = 1, \dots, P$, vektoru pravých stran \mathbf{b} mají tvar:

$$k_{im} = \int_{\Omega} w_i L(N_m) d\Omega, \quad b_i = \int_{\Omega} w_i f d\Omega - \int_{\Omega} w_i L(\Psi) d\Omega,$$

složky vektoru $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_P)^T$ jsou hledané koeficienty lineární kombinace báze funkcí v (3).

Výsledná $\alpha_1, \dots, \alpha_P$ dosadíme do (3) a získáme hledané přibližné řešení \hat{u} .

Pro hraniční a smíšené metody vážených residuí je postup odvození výsledné soustavy lineárních algebraických rovnic zcela analogický. Slabinou metod typu vážených residuí je, že matice \mathbf{K} je obecně plná, nesymetrická, nemá pásovou strukturu.

2.2 Volba váhových funkcí

Zatím jsme se nezabývali konkrétním výběrem váhových funkcí. Podle jejich volby dostaneme různé metody. Uvedme alespoň dvě.

2.2.1 Kolokační metoda

Zvolme za váhové funkce w_i Diracovy δ -funkce:

$$w_i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, P,$$

přičemž platí

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i \\ \infty & \mathbf{x} = \mathbf{x}_i \end{cases} \quad \int_{\mathbf{x} < \mathbf{x}_i}^{\mathbf{x} > \mathbf{x}_i} G(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\Omega = G(\mathbf{x}_i).$$

Podrobná definice a popis vlastností Diracovy δ -funkce přesahuje rámec tohoto příspěvku. Připomínáme jen, že Diracova δ -funkce je tzv. distribuce (=zobecněná funkce, nikoliv funkce). Podrobnosti najde čtenář například v [11].

Dosadíme-li tyto váhové funkce do rovnice (5), dostaneme

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{\Omega} w_i R_{\Omega} d\Omega}_{=0} &= \int_{\Omega} w_i (L(\Psi) + L(\sum_{m=1}^P \alpha_m N_m) - f) d\Omega = 0 \\ &= \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) R_{\Omega}(\mathbf{x}) d\Omega = R_{\Omega}(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, P. \end{aligned}$$

Jinými slovy, tento výběr váhových funkcí je ekvivalentní požadavku, aby residuum bylo rovno nule v P libovolně vybraných bodech $\mathbf{x}_i \in \Omega$ (tzv. kolokačních bodech). S rostoucím P je residuum nulové ve více a více bodech.

Klíčovou otázkou ovšem je, kam umístit kolokační body. Jejich rozmístění v Ω hraje rozhodující roli pro konvergenci získaného přibližného řešení k přesnému řešení daného problému. Lze ukázat, že pro obyčejné diferenciální rovnice je residuum minimální, zvolíme-li kolokační body jako kořeny Čebyševových polynomů.

Příklad 2.1 Metodou kolokací hledejme řešení rovnice

$$u''(x) + u(x) + x^2 = 0 \quad , \quad x \in (0; 1) \quad , \quad (7)$$

splňující okrajovou podmínku

$$u(0) = u(1) = 0 \quad . \quad (8)$$

Testovací funkce volíme dle následujícího předpisu:

$$\widehat{u}^{(P)}(x) = \sum_{j=1}^P \alpha_j x^j (1-x) \quad , \quad (9)$$

kde P je počet kolokačních bodů.

Řešení získané pomocí jednoho kolokačního bodu:

Pro $P = 1$ získáme dosazením do (9) testovací funkci ve tvaru:

$$\widehat{u}^{(1)}(x) = \alpha_1 x(1-x) \quad .$$

Tuto testovací funkci dosadíme do rovnice (7) a dostaneme

$$R_{\Omega}(x) = -2\alpha_1 + \alpha_1 x(1-x) + x^2 = \alpha_1(-2 + x - x^2) + x^2 = 0 \quad .$$

Zvolíme-li např. kolokační bod $x = \frac{1}{2}$, je $\alpha_1 = \frac{1}{7}$ a přibližné řešení

$$u^{(1)}(x) = \frac{1}{7}x(1-x) \quad .$$

Řešení získané pomocí dvojice kolokačních bodů:

Testovací funkce pro dva kolokační body má tvar:

$$\widehat{u}^{(2)}(x) = \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x) \quad .$$

Pak

$$\begin{aligned} R_{\Omega}(x) &= -2(\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_2 x) + \alpha_1(x - x^2) + \alpha_2(x^2 - x^3) + x^2 = \\ &= \alpha_1(x - 2 - x^2) + \alpha_2(-x^3 + x^2 - 6x + 2) + x^2 = 0 \end{aligned}$$

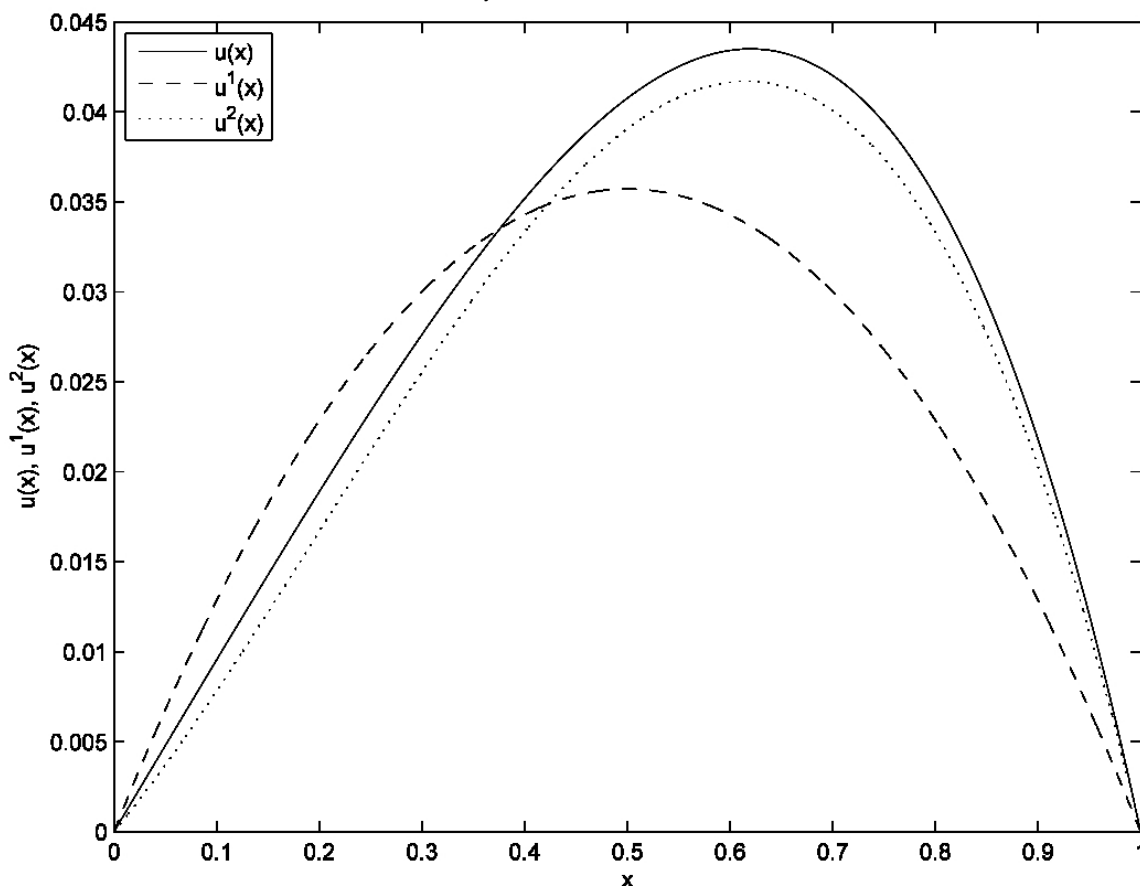
a zvolíme-li kolokační body např. $x = \frac{1}{3}$ a $x = \frac{2}{3}$ dostaneme $\alpha_1 = \frac{29}{416}$, $\alpha_2 = \frac{9}{52}$. Výsledné přibližné řešení pro tyto dva kolokační body je tedy

$$\widehat{u}^{(2)}(x) = \frac{29}{416}x(1-x) + \frac{9}{52}x^2(1-x) \quad .$$

Snadno lze ověřit, že přesné řešení úlohy (7), (8) je

$$u(x) = \frac{2 \cos 1 - 1}{\sin 1} \sin x - 2 \cos x - x^2 + 2 \quad .$$

Srovnání přesného řešení rovnice $u''(x) + u(x) + x^2 = 0$
a řešení získaných metodou kolokací



□

2.2.2 Metoda nejmenších čtverců

Zvolíme-li za váhové funkce w_i funkce

$$w_i = \frac{\partial R_\Omega}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, \dots, P,$$

a dosadíme-li tyto funkce do rovnice (5), dostaneme

$$\int_{\Omega} w_i R_\Omega d\Omega = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial R_\Omega}{\partial \alpha_i} \right) R_\Omega d\Omega = 0,$$

a tedy dostaneme metodu nejmenších čtverců:

Položme (v_1 je tzv. "tuning" parametr, nezávisí na α_i a je vybírán libovolně, obvykle $v_1 = 1$)

$$E(\alpha_1, \dots, \alpha_P) = \int_{\Omega} v_1 (R_\Omega)^2 d\Omega$$

a minimalizujme E vzhledem k α_i . Všechny první parciální derivace funkce E musí být nulové:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 2 \int_{\Omega} v_1 \left(\frac{\partial R_\Omega}{\partial \alpha_i} \right) R_\Omega d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, P.$$

Dostaneme opět soustavu P lineárních algebraických rovnic pro P neznámých

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Matice \mathbf{K} je sice symetrická, ale často špatně podmíněná.

Nebudeme se podrobně zabývat metodami numerického řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Čtenář jich najde velké množství např. v [4] (klasické metody i metody blokové a metody vhodné pro velké řídké matice soustavy), [5] (iterační metody, metoda sdružených gradientů), [12] (iterační metody), [15] (víceúrovňové metody), [13] (klasická učebnice numerické matematiky). Stručný přehled těchto metod může čtenář najít i v [9].

Poznámka 2.2 Zmiňme se ještě o jedné metodě – předchůdci metody konečných prvků. Je to tzv. *Bubnova-Galerkinova metoda*, která požaduje, aby *váhové a testovací funkce byly stejné lineárně nezávislé systémy funkcí*:

$$w_i(\mathbf{x}) = N_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, P.$$

Dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad \text{kde } \mathbf{K} \text{ je symetrická matice,}$$

$$\mathbf{K}_{im} = \int_{\Omega} N_i L(N_m) d\Omega, \quad i, m = 1, 2, \dots, P.$$

2.3 Příklady

1.

$$\frac{d}{dx} \left((1+x) \frac{d\varphi}{dx} \right) = 0, \quad \text{pro } x \in (0, 1),$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1.$$

Řešení aproximujte funkcí

$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{m=1}^2 \alpha_m \sin \frac{m\pi x}{2}$$

a určete celkové residuum $R = R_{\Omega} + R_{\Gamma}$.

2.

$$-2u \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 = 4, \quad \text{pro } x \in (0, 1),$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$$

Řešení aproximujte funkcí

$$\widehat{u}(x) = \sum_{n=1}^3 \alpha_n \sin(n\pi x)$$

a určete celkové residuum $R = R_{\Omega} + R_{\Gamma}$.

3. Stacionární vedení tepla bez zdroje

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} = 0, \quad \text{pro } x \in (-1, 1), \quad y \in (-1, 1),$$

$$T = 0 \quad \text{pro } y = \pm 1, \quad \frac{dT}{dx} = \cos \frac{\pi y}{2} \quad \text{pro } x = \pm 1.$$

Řešení aproximujte funkcí

$$\widehat{T}(x, y) = \sum_{m=1}^5 \alpha_m N_m(x, y), \quad \text{kde}$$

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= 1 - y^2, & N_2(x, y) &= (1 - y^2)x^2, \\ N_3(x, y) &= (1 - y^2)y^2, & N_4(x, y) &= (1 - y^2)x^2 y^2, \\ N_5(x, y) &= (1 - y^2)x^4. \end{aligned}$$

Určete celkové residuum $R = R_\Omega + R_\Gamma$.

4.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x^2 = 0, \quad \text{pro } x \in (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Přesné řešení:

$$u(x) = 2 - 2 \cos x - \frac{1 - 2 \cos 1}{\sin 1} \sin x - x^2.$$

Řešení aproximujte funkcí

$$\widehat{u}(x) = \sum_{j=1}^P \alpha_j x^j (1 - x) \quad (N_j(x) = x^j (1 - x)).$$

Metodou kolokací a metodou nejmenších čtverců najděte přibližné řešení pro $P = 1$, $P = 2$. Výsledky porovnejte (vzájemně i s přesným řešením). Vše znázorněte graficky.

5. Vedení tepla

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + S(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

$$T(0) = T(1) = 0, \quad k := 0,01, \quad S(x) = x^5.$$

Přibližné řešení hledejte ve tvaru

$$\widehat{T}(x) = \sum_{m=1}^2 \alpha_m x(1 - x^m).$$

1. Vypočtěte přesné řešení.

2. Určete celkové residuum $R_x = R_\Omega + R_\Gamma$.

3. Použitím kolokační metody určete α_1 , α_2 . Za kolokační body zvolte

$$x = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{2}{3}.$$

3 Minimum funkcionální analýzy

Než se budeme moci zabývat metodou konečných prvků, musíme se seznámit alespoň stručně se základy funkcionální analýzy. Pro zvědavé čtenáře lze k podrobnějšímu studiu funkcionální analýzy doporučit např. klasickou učebnici [14] nebo skripta [16].

Metoda konečných prvků je založena na variační formulaci dané úlohy a umožňuje nám najít tzv. slabé řešení.

Uvažujme okrajovou úlohu:

$$Lu(x) = f(x) \quad \text{v } \Omega, \quad (10)$$

$$Su(x) = g(x) \quad \text{na } \Gamma = \partial\Omega \quad (11)$$

Tuto úlohu lze formulovat jako tzv. **variační úlohu**:

? $u \in H$ ($H \dots$ Hilbertův)

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H, \quad (\text{Galerkin}) \quad (12)$$

kde $a(u, v)$ je nějaká bilineární forma a F je lineární spojitý funkcionál na H .

Náš problém můžeme rovněž formulovat jako úlohu pro hledání řešení jisté operátorové rovnice

$$Tu = y, \quad (\text{Ritz}) \quad (13)$$

kde řešení $u \in H$ je bod, v němž jistý tzv. **energetický funkcionál** nabývá svého minima. Platí i naopak: Je-li $u \in H$ takové, že v u nabývá energetický funkcionál svého minima, je toto u řešením naší operátorové rovnice.

Abychom si mohli ukázat všechny souvislosti, musíme se nejprve zabývat některými důležitými pojmy z funkcionální analýzy detailněji.

3.1 Základní pojmy

$V \dots$ **lineární prostor**

$$u, v \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \Rightarrow \lambda u + \mu v \in V \quad + \quad 8 \text{ axiomů} \quad (14)$$

$L : V \rightarrow \mathbb{R} \dots$ **lineární funkcionál**

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v) \quad \forall u, v \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (15)$$

Příklad 3.1

$$V = \mathcal{C}^1(\langle a, b \rangle), \quad L(f) = \int_a^b f(x) dx$$

□

$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \dots$ **bilineární forma**

(a je funkce lineární v každém jednotlivém argumentu)

$$\begin{aligned} a(\lambda u + \mu v, w) &= \lambda a(u, w) + \mu a(v, w) \\ a(w, \lambda u + \mu v) &= \lambda a(w, u) + \mu a(w, v) \end{aligned} \quad \forall u, v, w \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (16)$$

Příklad 3.2

$$a(v, w) = \int_a^b v(x)w(x)dx, \quad v, w \in L^2(\langle a, b \rangle)$$

□

Definice 3.1 Říkáme, že

$a(., .)$ je **symetrická bilineární forma** $\iff a(w, v) = a(v, w) \forall v, w \in V$

$a(., .)$ je **pozitivně definitní bilineární forma** $\iff a(v, v) > 0 \forall v \in V, v \neq 0$

$a(., .)$ je **omezená bilineární forma** na V , jestliže \exists konstanta $M > 0$ tak, že

$$|a(v, w)| \leq M \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in V. \quad (17)$$

Symetrická bilineární forma $a(., .)$ je **koercivní (V -eliptická)** na V , jestliže existuje kladná konstanta α tak, že

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (18)$$

$a(u, v)$ symetrická, koercivní bilineární forma $\implies a(., .)$ je **pozitivně definitní skalární součin** na V (značení: $(., .)$, $(., .)_V$) ... **pozitivně definitní, symetrická bilineární forma** na V

Příklad 3.3

$$V = \mathbb{R}^n, \quad (u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$V = L^2(\Omega), \quad (u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d \text{ otevřená}$$

□

Lineární prostor, na němž je definován skalární součin ... prostor se skalárním součinem

Každý lineární prostor se skalárním součinem je **normovaný lineární prostor (n.l.p.)**:

V lineární prostor, $(., .)$ skalární součin na V , **normu** na V definujeme předpisem:

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)} \quad \forall v \in V \quad (19)$$

(označení $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_V$)

Definice 3.2 **Norma** na lineárním prostoru V je funkce

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_+ :$$

1. $\|v\| > 0 \forall v \in V, v \neq 0$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (ev. } \lambda \in \mathbb{C})$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$

Poznámka 3.1 Poznamenejme, že

a) Nahradíme-li 1. požadavkem

1'. $|v| \geq 0 \forall v \in V$ + 2. + 3. $\Rightarrow | \cdot |$ **seminorma** (může být nulová i pro nějaké nenulové v)

b) $v, w \in V$ jsou ortogonální $\iff (v, w) = 0$

c) Cauchyova-Schwarzova nerovnost:

$$|(w, v)| \leq \|w\| \cdot \|v\| \quad \forall v, w \in V \quad (20)$$

(rovnost platí pouze pro $w = \lambda v$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$)

Příklad 3.4 Příklad seminormy:

$V = \{v \in C^1(a, b), \sup_{x \in (a, b)} |v'(x)| < \infty\} \dots$ prostor hladkých funkcí s omezenou derivací

$|v| = \sup_{x \in (a, b)} |v'(x)| \dots$ seminorma na V □

Konvergence ve V : $\{v_i\}_{i=1}^{\infty} \in V$

Řekneme, že posloupnost $\{v_i\}$ konverguje k $v \in V$, tj. $v_i \rightarrow v$ pro $i \rightarrow \infty$

($\lim_{i \rightarrow \infty} v_i = v$), jestliže

$$\|v_i - v\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } i \rightarrow \infty$$

Definice 3.3 Řekneme, že posloupnost $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ je **Cauchyovská** ve V , jestliže

$\|v_i - v_j\| \rightarrow 0$ pro $i, j \rightarrow \infty$, přesněji jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall i, j \geq n_0 \|v_i - v_j\| < \varepsilon$$

Definice 3.4 Prostor V se skalárním součinem nazýváme **úplný**, jestliže každá Cauchyovská posloupnost má limitu ve V :

$$\{v_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ Cauchyovská, } \lim_{i \rightarrow \infty} v_i = v \quad \text{a } v \in V.$$

Úplný prostor se skalárním součinem ... **Hilbertův prostor**

Úplný normovaný lineární prostor ... **Banachův prostor**

Poznámka 3.2 Pozor! Ne všechny normované lineární prostory jsou prostory se skalárním součinem

Příklad 3.5 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená,

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} \dots \text{skalární součin v } L^2(\Omega)$$

$L^2(\Omega)$ s tímto skalárním součinem je Hilbertův prostor. Je to jediný Hilbertův prostor ze všech Lebesgueovských L^p -prostorů, viz odstavec 3.6.2. □

3.1.1 Příklady normovaných a Banachových prostorů

1. Vektorový prostor \mathbb{R} reálných čísel je **normovaný Banachův** prostor vzhledem k normě $\|x\| = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ ($|x| \dots$ absolutní hodnota reálného čísla x).
2. Vektorový prostor \mathbb{R}^2 je **normovaný Banachův** prostor vzhledem k následujícím normám:
 1. $\|a\|_1 = |x| + |y|$, kde $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
 2. $\|a\|_2 = \max\{|x|, |y|\}$;
 3. $\|a\|_3 = (x^2 + y^2)^{1/2}$.
3. Vektorový prostor \mathbb{C} všech komplexních čísel je **normovaný Banachův** prostor vzhledem k normě $\|z\| = |z|$, $z \in \mathbb{C}$ ($|z| \dots$ absolutní hodnota komplexního čísla z).
4. Vektorový prostor \mathbb{R}^n všech uspořádaných n -tic $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ reálných čísel je **normovaný Banachův** prostor vzhledem k následujícím normám:

1. $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$;

2. $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}$;

3. $\|x\|_3 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$, kde $1 \leq p < \infty$;

prostor \mathbb{R}^n s touto normou se obvykle označuje ℓ_p^n .

4. $\|x\|_4 = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$,

prostor \mathbb{R}^n s touto normou se obvykle označuje ℓ_∞^n .

5. Vektorový prostor $\mathcal{C}(a, b)$ všech reálných spojitých funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b \rangle$ je **normovaný** prostor vzhledem k následujícím normám:

1. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$;

2. $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$;

3. $\|f\|_3 = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

Prostor $\mathcal{C}(a, b)$ je **normovaný Banachův** vektorový prostor s normou $\|\cdot\|_3$. Ukážeme, že $\mathcal{C}(a, b)$ je také normovaný vektorový prostor s normou $\|\cdot\|_2$, ale **není v této normě Banachův**.

a) $\|f\| \geq 0$ protože $\int_a^b |f(t)|^2 dt \geq 0$. $\|f\| = 0 \iff |f(t)|^2 = 0 \iff f(t) = 0$.

b) $\|\alpha f\| = \left(\int_a^b |\alpha f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = |\alpha| \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = |\alpha| \|f\|$.

c) $\|f + g\| = \left(\int_a^b |f + g|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g|^2 dt \right)^{1/2} = \|f\| + \|g\|$ (podle

Minkowského nerovnosti).

Tedy $\mathcal{C}\langle a, b \rangle$ je s touto normou také normovaný vektorový prostor.

Abychom ukázali, že $\mathcal{C}\langle a, b \rangle$ není s integrální normou Banachův, uvažujme následující příklad: Necht $a = -1$, $b = 1$,

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t \leq 0, \\ nt, & 0 < t < \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} < t \leq 1. \end{cases}$$

Posloupnost $\{f_n(t)\}$ je Cauchyovská v $\mathcal{C}[-1, 1]$, ale nekonverguje k žádnému prvku $\mathcal{C}[-1, 1]$.

- Vektorový prostor $P[0, 1]$ všech polynomů na $[0, 1]$ s normou $\|x\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$ je **normovaný** prostor.
- Necht $p \geq 1$ (p ne nutně přirozené číslo). \mathcal{L}^p označuje třídu všech reálných funkcí $f(t)$, takových, že $f(t)$ je definovaná pro s.v. t (= pro všechna t až na množinu míry nula), je měřitelná a $|f(t)|^p$ je Lebesgueovsky integrovatelná na $(-\infty, +\infty)$. Definujme na \mathcal{L}^p následující relaci ekvivalence:

$$f(t) \sim g(t) \iff f(t) = g(t) \text{ s.v.}$$

Množina všech tříd ekvivalence, na které je \mathcal{L}^p takto rozděleno, se označuje L^p nebo L_p . L_p je vektorový prostor a **normovaný** prostor vzhledem k normě

$$\|f^{(1)}\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(1)}(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

kde $f^{(1)}$ reprezentuje třídu ekvivalence $[f]$. Místo intervalu $(-\infty, +\infty)$ bychom mohli uvažovat interval $(0, +\infty)$ nebo libovolný konečný interval (a, b) nebo libovolnou měřitelnou množinu E .

Chápeme-li rovnost v obvyklém smyslu, není \mathcal{L}^p normovaný prostor. Je to však **semi-normovaný** prostor, což znamená, že $\|f\| = 0$ i když $f \neq 0$.

Poznamenejme ještě, že nulový prvek L^p je třída ekvivalence, která obsahuje všechny funkce $f \in \mathcal{L}^p$, pro které je $f(t) = 0$ s.v.

- Vektorový prostor $C^\infty[a, b]$ všech nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí na $[a, b]$ je **normovaný** prostor vzhledem k normě

$$\|f\|_{n,p} = \left(\int_0^b \sum_{i=0}^n |D^i f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

kde D^i označuje i -tou derivaci.

Poznamenejme, že vektorový prostor $C^\infty[a, b]$ může být normován nekonečně mnoha způsoby.

- Necht $\mathcal{C}^k(\Omega)$ označuje prostory všech reálných funkcí n proměnných definovaných na Ω (otevřená podmnožina \mathbb{R}^n), které jsou spojitě diferencovatelné až do řádu k . Necht

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, kde α_i , $i = 1, \dots, n$, jsou nezáporná přirozená čísla a $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Pak pro $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ existují a jsou spojité derivace

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| \leq k.$$

$\mathcal{C}^k(\Omega)$ je **normovaný** prostor vzhledem k normě

$$\|f\|_{k,\alpha} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \{\sup |D^\alpha f|\}.$$

10. Necht $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ je prostor všech nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem na Ω (otevřená podmnožina \mathbb{R}^n). $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ je **normovaný** prostor vzhledem k normě

$$\|f\|_{k,p} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

3.2 Podprostory a projekce

V ... Hilbertův, $V_0 \subset V$ lineární podprostor

Řekneme, že V_0 je **uzavřený**, jestliže obsahuje limity všech posloupností ve V_0 , tj.

$$\{v_j\}_{j=1}^\infty \subset V_0, \quad v_j \rightarrow v \text{ pro } j \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad v \in V_0$$

V tomto případě je V_0 také Hilbertův se stejným skalárním součinem jako V .

Necht $V_0 \subset V$ je uzavřený. Pak každý prvek $v \in V$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$v = v_0 + u, \quad \text{kde } v_0 \in V_0 \text{ a } u \text{ je ortogonální k } V_0. \quad (21)$$

Prvek v_0 můžeme charakterizovat jako jednoznačně určený prvek ve V_0 nejbližší k v (tzv. věta o projekci), tj.

$$\|v - v_0\| = \min_{w \in V_0} \|v - w\| \quad (22)$$

v_0 ... **ortogonální projekce** v na V_0 (značení: $v_0 = P_{V_0} v$)

Důsledek: Jestliže uzavřený lineární podprostor V_0 není roven celému V , pak má normálový vektor, tj.

existuje $u \neq 0$, $u \in V$, které je ortogonální k V_0 : $(u, w) = 0 \quad \forall w \in V_0$.

Řekneme, že dvě **normy** $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ jsou **ekvivalentní** na V , jestliže existují kladné konstanty c, C takové, že

$$c \cdot \|v\|_b \leq \|v\|_a \leq C \cdot \|v\|_b \quad \forall v \in V \quad (23)$$

Příklad 3.6 $V = \mathbb{R}^n$

a) *normy*

$$\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i| \quad \text{a} \quad \|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$$

jsou ekvivalentní, protože

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1 \leq n\|v\|_\infty \quad \forall v \in V$$

b) normy $\|v\|_2$ a $\|v\|_\infty$ jsou ekvivalentní, protože

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}, \quad \|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty \quad \forall v \in V.$$

□

Platí dokonce věta:

Je-li U konečnědimenzionální normovaný lineární prostor, pak všechny normy na U jsou ekvivalentní.

Příklad 3.7 $V =$ prostor omezených integrovatelných funkcí na $\langle 0, 1 \rangle$.

Normy

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in (0,1)} |f(x)| \quad a \quad \|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

nejsou ekvivalentní.

□

3.3 Operátory

V, W dva Hilbertovy prostory, $B : V \rightarrow W$ lineární operátor.

Řekneme, že B je **omezený** \iff existuje konstanta C tak, že

$$\|Bv\|_W \leq C \|v\|_V \quad \forall v \in V \quad (24)$$

Norma omezeného lineárního operátoru B :

$$\|B\| = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|Bv\|_W}{\|v\|_V} \implies \frac{\|Bv\|_W}{\|v\|_V} \leq \|B\| \quad \text{t.j.}$$

$$\|Bv\|_W \leq \|B\| \cdot \|v\|_V. \quad (25)$$

Tedy $\|B\|$ je nejmenší konstanta C v (24).

Poznámka 3.3 Omezený lineární operátor $B : V \rightarrow W$ je spojitéj:

$v_j \rightarrow v$ ve $V \implies Bv_j \rightarrow Bv$ ve W pro $j \rightarrow \infty$, protože

$$\|Bv_j - Bv\|_W = \|B(v_j - v)\|_W \leq \|B\| \cdot \|v_j - v\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } j \rightarrow \infty.$$

Lze ukázat i naopak: Je-li lineární operátor spojitéj, je i omezený.

□

$W = \mathbb{R} \implies$ lineární funkcionály

$L : V \rightarrow \mathbb{R}$ lineární funkcionál na V .

Množina všech omezených lineárních funkcionálů na V se nazývá **duální prostor** k V (označení V^*),

$$\|L\|_{V^*} = \sup_{v \in V} \frac{|L(v)|}{\|v\|_V} \quad (L(v) \in \mathbb{R} \implies \|\cdot\|_{\mathbb{R}} = |\cdot|). \quad (26)$$

Definujeme-li ve V^* :

$$(\lambda L + \mu M)v = \lambda L(v) + \mu M(v), \quad L, M \in V^*, \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

pak V^* je normovaný lineární prostor. Lze ukázat, že V^* je úplný, a tedy Banachův.

3.4 Bilineární formy

Věta 3.1 *Rieszova věta o reprezentaci lineárního funkcionálu*

V ... Hilbertův prostor se skalárním součinem (\cdot, \cdot) .

Pro každý omezený lineární funkcionál L na V existuje právě jedno $u \in V$ tak, že

$$L(v) = (v, u) \quad \forall v \in V. \quad (27)$$

Navíc $\|L\|_{V^*} = \|u\|_V$.

Důkaz Jednoznačnost:

$$\begin{aligned} u_1, u_2 \in V : \quad L(v) &= (v, u_1) \quad \forall v \in V \quad \text{a} \quad L(v) = (v, u_2) \quad \forall v \in V \\ \implies (v, u_1) &= (v, u_2) \quad \forall v \in V, \quad \text{tedy i pro} \quad v = u_1 - u_2 \\ \implies (u_1 - u_2, u_1) - (u_1 - u_2, u_2) &= 0, \quad \text{a tedy} \\ (u_1 - u_2, u_1 - u_2) &= \|u_1 - u_2\|^2 = 0 \implies u_1 = u_2. \end{aligned}$$

Existence:

a) $L(v) = 0 \quad \forall v \in V \implies u = 0 \quad (L(v) = (v, u) = 0 \quad \forall v \in V)$

b) Necht' nyní $L(\tilde{v}) \neq 0$ pro nějaké $\tilde{v} \in V$.

Zkonstruujeme u jako vhodný normalizovaný "normálový" vektor k podprostoru

$$V_0 = \{v \in V, L(v) = 0\} (= \text{Ker}L).$$

V_0 je uzavřený lineární podprostor V , podle věty o projekci (21) lze $\tilde{v} \in V$ zapsat právě jedním způsobem jako

$$\tilde{v} = v_0 + w, \quad v_0 \in V_0, \quad w \text{ ortogonální k } V_0$$

(tj. mimo jiné w neleží ve V_0), přičemž $L(w) = L(\tilde{v} - v_0) = L(\tilde{v}) \neq 0$. Pak pro $v \in V$ libovolné je

$$L\left(v - w \frac{L(v)}{L(w)}\right) = L(v) - L(w) \frac{L(v)}{L(w)} = 0 \implies v - w \frac{L(v)}{L(w)} \in V_0,$$

a protože $w \perp V_0 \implies \left(v - w \frac{L(v)}{L(w)}, w\right) = 0$.

Poslední rovnost rozepíšeme a upravíme:

$$(v, w) - \frac{L(v)}{L(w)}(w, w) = 0$$

$$(v, w) = \frac{L(v)}{L(w)}\|w\|^2 \implies L(v) = \frac{L(w)}{\|w\|^2}(v, w) = \left(v, \frac{L(w)}{\|w\|^2}w\right)$$

Tedy dokonce jsme u zkonstruovali:

$$L(v) = (v, u) \quad \forall v \in V, \quad \text{kde} \quad u = w \frac{L(w)}{\|w\|^2}.$$

Navíc:

$$\frac{|L(v)|}{\|v\|_V} = \frac{|(v, u)|}{\|v\|_V} \leq \frac{\|v\|_V \cdot \|u\|_V}{\|v\|_V} = \|u\|_V \implies$$

$$\|L\|_{V^*} = \sup_{v \in V} \frac{|L(v)|}{\|v\|_V} = \|u\|_V.$$

□

Důsledek Rieszovy věty

Lineárním funkcionálům $L \in V^*$ lze přiřadit $u \in V$, a tedy je-li V Hilbertův prostor, je V^* "ekvivalentní" s V .

Příklad 3.8 Z lineární algebry víme:

$L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární zobrazení $\iff L$ je reprezentováno maticí $A_{1 \times 3}$, tj.

$$\exists! A_{1 \times 3} : L(\vec{x}) = A\vec{x} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Tedy lineárnímu funkcionálu $L \in (\mathbb{R}^3)^*$ je jednoznačně přiřazen prvek $A = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \in \mathbb{R}^3$.

□

3.5 Formulace problému

Uvažujme následující problém:

V ... Hilbertův

L ... omezený lineární funkcionál na V ,

$a(.,.)$... symetrická, koercivní (V-eliptická) bilineární forma na V

$$(P) \quad \exists u \in V : a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \quad (28)$$

Jak můžete vidět, problém (P) je problém (12). Nyní už ale víme, jaké předpoklady musí splňovat bilineární forma $a(.,.)$ a lineární funkcionál L na Hilbertově prostoru V , abychom mohli aplikovat Rieszovu větu. Podle Rieszovy věty totiž platí, že

$$\forall L \in V^* \exists! u \in V, \text{ které řeší (P).}$$

Poznámka 3.4 Protože $a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$, musí být tato rovnost splněna i pro $v = u$. Dostáváme (levá nerovnost plyne z koercivity bilineární formy $a(u, v)$ - viz (18), pravá z omezenosti L - viz (25))

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq \|L\|_{V^*} \|u\|_V \quad \text{t.j. dostáváme} \quad (29)$$

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V^*} \quad \dots \quad \text{tzv. energetický odhad.} \quad (30)$$

Je-li tedy $a(.,.)$ symetrická, koercivní a omezená bilineární forma na V , pak můžeme na V definovat normu (indukovanou touto bilineární formou) $\|\cdot\|_a$... tzv. energetickou normu předpisem

$$\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)} \quad \forall v \in V. \quad (31)$$

Protože $a(.,.)$ je omezená ($|a(v, w)| \leq M \|v\| \|w\| \quad \forall v, w \in V$) a z (29) platí

$$\sqrt{\alpha} \|v\|_V \leq \|v\|_a \leq \sqrt{M} \|v\|_V \quad \forall v \in V,$$

$\|\cdot\|_V$ a $\|\cdot\|_a$ jsou ekvivalentní - viz (23).

V je tedy Hilbertův prostor vzhledem ke skalárnímu součinu $a(.,.)$ a normě $\|\cdot\|_a$.

Problém (P) lze přepsat jako problém minimalizace (energetického) funkcionálu:

Věta 3.2 *Nechť $a(\cdot, \cdot)$ je symetrická, pozitivně definitní bilineární forma, L omezený lineární funkcionál na Hilbertově prostoru V . Pak*

$$(P) \quad a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \quad (\text{variační formulace, Galerkin}) \quad (32)$$

\iff

$$(P') \quad F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in V, \quad \text{kde} \quad (\text{Ritz}) \quad (33)$$

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \quad \dots \quad \text{energetický funkcionál} \quad (34)$$

Důkaz 1. Nechť u řeší (P), $v \in V$ libovolné.

Položme $w = v - u \in V$. Pak $v = u + w$ a

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{1}{2}a(u + w, u + w) - L(u + w) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}a(u, u) - L(u)}_{F(u)} + \underbrace{a(u, w) - L(w)}_{= 0 (u \text{ řeší (P)})} + \frac{1}{2}a(w, w) = \\ &= F(u) + \frac{1}{2}a(w, w). \end{aligned}$$

Protože $a(\cdot, \cdot)$ je pozitivně definitní, je poslední člen kladný pro každé nenulové w , tedy

$$F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in V.$$

2. Nechť u řeší (P'), $v \in V$ libovolné.

Položme $g(t) = F(u + tv) \geq F(u) = g(0) \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies g$ má minimum v bodě $t = 0$, ale

$$g(t) = \frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - L(u + tv) = \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + t(a(u, v) - L(v)) + \frac{1}{2}t^2a(v, v),$$

t.j. g je kvadratický polynom v t , 0 je jeho stacionárním bodem:

$0 = g'(0) = a(u, v) - L(v)$, a tedy

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

□ Je-li tedy $a(\cdot, \cdot)$ symetrická, pozitivně definitní bilineární forma, L omezený funkcionál na V (V Hilbertův), pak $u \in V$ řeší (P), právě když u minimalizuje energetický funkcionál F . Rovnost $a(u, v) = L(v)$ je tzv. **variační rovnice** pro F . Metody studující minimalizační problém pro F jsou tzv. **variační metody**.

Věta 3.3 *Lax-Milgramovo lemma (zobecnění Rieszovy věty na nesymetrické bilineární formy) Je-li bilineární forma $a(\cdot, \cdot)$ omezená a koercivní (V -eliptická) v Hilbertově prostoru V a L omezený lineární funkcionál na V , pak existuje právě jedno $u \in V$ tak, že u řeší (P). Navíc platí energetický odhad*

$$\|u\|_V \leq C\|L\|_{V^*}, \quad C > 0, \quad \text{konstanta.}$$

Poznámka 3.5 *Není-li $a(\cdot, \cdot)$ symetrická, nelze ukázat ekvivalenci (P) a (P').*

3.6 Prostory funkcí

3.6.1 Prostory $\mathcal{C}^k(M)$

$M \subset \mathbb{R}^d$ podmnožina, $\mathcal{C}(M)$... lineární prostor funkcí spojitých na M

Příklad 3.9 $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$... n.l.p. s normou např.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

□

Poznámka 3.6 *Konvergence:*

a) "*silná*" konvergence (konvergence v normě)

X ... n.l.p., $\|\cdot\|_X$, $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, $u \in X$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \text{ (v } X) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_X = 0 \quad (35)$$

(označení $u_n \rightarrow u$ v X).

b) "*slabá*" konvergence

X ... n.l.p., X^* duální prostor k X , $\{u_n\} \subset X$

$$\{u_n\}_{n=1}^\infty \rightharpoonup u \in X \text{ pro } n \rightarrow \infty \iff \forall L \in X^* \lim_{n \rightarrow \infty} L(u_n) = L(u) \quad (36)$$

u ... *slabá limita* posloupnosti $\{u_n\}$ (označení $u_n \rightharpoonup u$)

($L \in X^*$... spojitý lineární funkcionál na X).

c) $\{u_n\}_{n=1}^\infty \rightarrow u \implies \{u_n\}_{n=1}^\infty \rightharpoonup u$:

$$|L(u_n) - L(u)| = |L(u_n - u)| \leq \|L\|_{X^*} \|u_n - u\|_X \leq M \|u_n - u\|_X$$

(M ... konstanta omezenosti L , viz (24))

□

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$... oblast (= souvislá, otevřená množina)

$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$... lineární prostor funkcí k -krát spojitě diferencovatelných na $\bar{\Omega}$, t.j.:

$$v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : D^\alpha v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \quad \forall |\alpha| \leq k$$

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad \dots \text{parciální derivace řádu } |\alpha| \quad (37)$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathcal{N} \cup \{0\}$... multiindex, $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$... délka multiindexu α

Příklad 3.10 $\alpha = (1, 2)$, $|\alpha| = 3$, $D^\alpha v = \frac{\partial^3 v}{\partial x_1 \partial x_2^2}$

Všechny další parciální derivace 3. řádu funkce 2 proměnných:

$$\begin{array}{ccc} \alpha = (3, 0) & \alpha = (0, 3) & \alpha = (2, 1) \\ D^\alpha v = \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^3} & D^\alpha v = \frac{\partial^3 v}{\partial x_2^3} & D^\alpha v = \frac{\partial^3 v}{\partial x_1^2 \partial x_2} \end{array}$$

□

Lineární parciální diferenciální rovnici řádu k na Ω můžeme zapsat ve tvaru

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad a_\alpha(x) \dots \text{ funkce proměnné } x \text{ v } \Omega.$$

Norma na $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$:

$$\|v\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}, \quad (38)$$

seminorma na $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$:

$$|v|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})}. \quad (39)$$

Definice 3.5 Říkáme, že funkce v má kompaktní nosič v Ω , jestliže

$$v(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus \Omega_0, \quad \Omega_0 \text{ kompaktní (omezená, uzavřená) podmnožina } \Omega.$$

Označení: $\text{supp } v = \{x \in \Omega, v(x) \neq 0\}$, $\Omega_0 = \overline{\text{supp } v}$.

Příklad 3.11

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle -1, 0 \rangle \\ x & x \in (0, 1) \\ -x + 2 & x \in (1, 2) \\ 0 & x \in \langle 2, 3 \rangle \end{cases}$$

$$\Omega = \langle -1, 3 \rangle, \quad \text{supp } f = (0, 2), \quad \Omega_0 = \langle 0, 2 \rangle. \quad \square$$

Definujeme:

$$\mathcal{C}_0^k(\Omega) = \{v \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}), \quad \overline{\text{supp } v} \subset \Omega\},$$

$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$... množina funkcí, které mají spojité derivace všech řádů a jsou nulové vně nějaké omezené, uzavřené podmnožiny Ω . Často značíme

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) \dots \text{ tzv. } \text{prostor testovacích funkcí}$$

a omezené lineární funkcionály na $\mathcal{D}(\Omega)$ nazýváme **distribuce**.

Poznámka 3.7 Je-li $v \in \mathcal{C}_0^k(\Omega)$, pak $D^\alpha v = 0$ na hranici Ω pro $|\alpha| \leq k$.

Poznámka 3.8 Konvergence v $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$:

$\{\varphi_n\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_n \rightarrow \varphi$, jestliže

1. existuje kompaktní množina $K \subset \Omega$ taková, že

$$\text{supp } \varphi_n \subset K \quad \forall n$$

2. $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ stejnoměrně $\forall \alpha$:

$$\sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \varphi_n(x) - D^\alpha \varphi(x)| \rightarrow 0.$$

Definice 3.6 Funkcionál F definovaný na $\mathcal{D}(\Omega)$ je **distribuce**, tj. $F \in \mathcal{D}^*(\Omega) \iff$

1. $F(\varphi + \psi) = F(\varphi) + F(\psi)$,
2. $F(\alpha\varphi) = \alpha F(\varphi)$,
3. Jestliže $\varphi_n \rightarrow \varphi$, pak $F(\varphi_n) \rightarrow F(\varphi)$.

3.6.2 Prostory L^p

Měli bychom pracovat s tzv. měřitelnými funkcemi a s Lebesgueovým integrálem. To ale neu-
míme. Uvedme nejprve několik poznámek.

Pro $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je Lebesgueův integrál totožný s Riemannovým.

Řekneme, že $\Omega_0 \subset \Omega$ je množina míry 0, je-li její "objem" nulový:

$$|\Omega_0| = \int_{\Omega_0} d\Omega = 0.$$

Říkáme, že dvě funkce se sobě rovnají skoro všude (s.v.), jestliže se sobě rovnají všude, až na množinu míry 0.

Příklad 3.12 Ω omezená oblast, $x_0 \in \Omega$, označme $I_{\Omega}(v) = \int_{\Omega} v(x)dx$.

$$\begin{aligned} v_1(x) &= 1 \quad \forall x \in \Omega \\ v_2(x) &= \begin{cases} 1 & \forall x \in \Omega, \quad x \neq x_0 \\ 2 & x = x_0 \end{cases} \implies I_{\Omega}(v_1) = I_{\Omega}(v_2) = |\Omega| \end{aligned}$$

□

Poznámka 3.9 Hranice $\Gamma = \partial\Omega$ omezené oblasti Ω je množina míry nula $\implies I_{\Omega}(v) = I_{\overline{\Omega}}(v) \quad \forall v$. Například:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^1, \text{ t.j. } \Omega = (a, b) \implies I_{\Omega}(v) = \int_a^b v(x)dx, \quad I_{\overline{\Omega}}(v) = \int_a^b v(x)dx.$$

Poznámka 3.10 Z toho, že funkce je integrovatelná neplyne nic o její hodnotě v bodě $x_0 \in \Omega$, tedy hodnoty funkce v jednotlivých bodech nejsou dobře definovány.

Vraťme se zpět k Lebesgueovým prostorům:

$$L^p(\Omega) = \left\{ v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |v|^p d\Omega < \infty \right\}. \quad (40)$$

L^p je úplný normovaný lineární prostor, tj. Banachův, s normou

$$\|v\|_{L^p} = \|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (41)$$

Řekneme, že $v \in L^p$, jestliže $\|v\|_{L^p} < \infty$.

Poznamenejme ještě, že prostor $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je **hustý** v $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, t.j. zhruba řečeno: libovolnou funkci $v \in L^p$ můžeme aproximovat libovolně dobře v L^p normě funkcemi z $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$:

$$\forall v \in L^p \exists \{v_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \|v_i - v\|_{L^p} \longrightarrow 0 \text{ pro } i \longrightarrow \infty.$$

Nás bude zajímat zejména L^2 , protože L^2 je Hilbertův prostor (jediný ze všech L^p prostorů) se skalárním součinem,

$$(v, w) = \int_{\Omega} v(x)w(x)dx, \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} v^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (42)$$

3.6.3 Sobolevovy prostory

Sobolevovy prostory jsou velmi speciální Hilbertovy prostory.

Nejprve musíme zobecnit pojem parciálních derivací.

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ oblast (= souvislá, otevřená množina), $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Integrací per partes dostaneme

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

(Hraniční integrál vypadne, viz poznámka 3.7.)

Je-li ale $v \in L^2(\Omega)$, pak $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ nemusí v klasickém smyslu existovat. Proto definujeme zobecněnou derivaci v jako lineární funkcionál

$$L(\varphi) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(\varphi) = - \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega). \quad (43)$$

Je-li L omezený v L^2 , pak podle Rieszovy věty existuje právě jedna funkce $w \in L^2$ taková, že

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= (w, \varphi) \quad \forall \varphi \in L^2, \quad \text{t.j.} \\ - \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{\Omega} w \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

(na pravé straně poslední rovnice je skalární součin v $L^2(\Omega)$).

Říkáme, že zobecněná derivace je z $L^2(\Omega)$, píšeme

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = w,$$

čímž rozumíme

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega). \quad (44)$$

Poznámka 3.11 $v \in C^1(\overline{\Omega}) \dots$ zobecněná derivace se rovná klasické

Příklad 3.13 $\Omega = (0, 1)$, $v(x) = x^2$

$$\int_0^1 w(x) \varphi(x) dx = L(\varphi) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(\varphi) = - \int_0^1 x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall \varphi \in C_0^1((0, 1)),$$

$$L(\varphi) = - \int_0^1 x^2 \varphi'(x) dx = \text{per partes} = - [x^2 \varphi(x)]_0^1 + \int_0^1 2x \varphi(x) dx,$$

$$\exists ! w \in L^2(\Omega) : L(\varphi) = (w, \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \implies w(x) = 2x,$$

tedy zobecněná derivace je rovna klasické. □

Definice 3.7 $D^\alpha v$ - zobecněná derivace (slabá, derivace ve smyslu distribucí):

$$L(\varphi) = D^\alpha v(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v D^\alpha \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega). \quad (45)$$

L omezený v $L^2 \implies$ podle Rieszovy věty $\exists ! w \in L_2$ (označme ho $D^\alpha v$) tak, že

$$(D^\alpha v, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (v, D^\alpha \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega). \quad (46)$$

Příklad 3.14 $|x|$ je lokálně integrovatelná funkce, která je v klasickém smyslu diferencovatelná ve všech bodech kromě $x = 0$. Vypočtěme zobecněnou derivaci (derivaci ve smyslu distribucí).

$$\begin{aligned}
 v(x) &= |x|, \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}), \quad (\alpha = 1 \dots \text{počítáme } 1. \text{ derivaci}) \\
 ? w \in L^2(\mathbb{R}) : \quad L(\varphi) &= (w, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}), \\
 L(\varphi) &\stackrel{\text{def}}{=} - \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) \varphi(x) dx = \\
 &= - \int_{-\infty}^0 |x| \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} |x| \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} x \varphi'(x) dx = \\
 &\stackrel{\text{per partes}}{=} [x\varphi(x)]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx - [x\varphi(x)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \\
 &= - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^0 (-1) \varphi(x) dx + \int_0^{+\infty} 1 \cdot \varphi(x) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgn} x \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}) (= \mathcal{D}) \implies w(x) = \text{sgn} x \dots \text{zobecněná derivace } |x|.
 \end{aligned}$$

□

Příklad 3.15 Heavisideova funkce: $H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 ? w : \quad L(\varphi) &= (w, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}) = \mathcal{D} . \\
 L(\varphi) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) \varphi(x) dx = \\
 &= - \int_{-\infty}^0 H(x) \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} H(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \\
 &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) + \varphi(0), \\
 L(\varphi) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \\
 &\implies w(x) = H'(x) = \delta(x) \dots \text{zobecněná derivace}
 \end{aligned}$$

□

Poznamenejme, že výhodou distribucí oproti obyčejnému kalkulu je, že každá distribuce má derivaci.

Definice 3.8 Posloupnost distribucí $\{F_n\}$ se nazývá konvergentní k distribuci F , jestliže

$$(F_n, \varphi) \longrightarrow (F, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} .$$

Věta 3.4 necht F, F_1, F_2, \dots jsou lokálně integrovatelné funkce takové, že $F_n \longrightarrow F$ stejnoměrně na každé omezené množině. Pak $D^\alpha F_n \longrightarrow D^\alpha F$ (ve smyslu distribucí).

Důkaz

$$(D^\alpha F_n, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (F_n, D^\alpha \varphi) \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} (F, D^\alpha \varphi) = (D^\alpha F, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Např. $\alpha = 1 \implies (F'_n, \varphi) \longrightarrow (F', \varphi)$ kdykoliv $(F_n, \varphi) \longrightarrow (F, \varphi)$ stejnoměrně.

□

Příklad 3.16

$$\text{Nechť } f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{t.j. } f_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad f_2(x) = \frac{2}{\pi(1+4x^2)}, \quad f_3(x) = \frac{3}{\pi(1+9x^2)}, \quad \dots$$

Ukážeme, že posloupnost $f_n(x)$ konverguje ve smyslu distribucí k Diracově δ -funkci $\delta(x)$. Nechť φ je testovací funkce. Musíme ukázat, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)dx \longrightarrow \varphi(0) \quad \text{pro } n \longrightarrow \infty, \text{ t.j. že}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) \longrightarrow 0 \quad \text{pro } n \longrightarrow \infty.$$

Vypočtěme nejprve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi} [\arctg t]_{-\infty}^{+\infty} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Povšimněte si, že plocha obrazce ohraničeného grafem funkce f_n a osou x je pro všechna n rovna 1.

Pro $\varphi \in \mathcal{D}$ je tedy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx = \\ &= \int_{-\infty}^{-a} f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx + \int_{-a}^a f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx + \int_a^{+\infty} f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx, \end{aligned}$$

kde $[-a, a]$ je interval, ve kterém leží $\text{supp } \varphi$. Tedy

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx \right| \leq \\ &\leq \left| \varphi(0) \int_{-\infty}^{-a} f_n(x)dx \right| + \left| \int_{-a}^a f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx \right| + \left| \varphi(0) \int_a^{+\infty} f_n(x)dx \right|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \varphi(0) \int_{-\infty}^{-a} f_n(x)dx \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \varphi(0) \frac{1}{\pi} [\arctg(nx)]_{-\infty}^{-a} \right| = \\ &= \frac{|\varphi(0)|}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left[\arctg(-an) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg(nx) \right] \right| = 0. \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \text{Obdobně} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \varphi(0) \int_a^{+\infty} f_n(x)dx \right| = 0.$$

Dostali jsme

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) \right| \leq \left| \int_{-a}^a f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx \right|.$$

Aplikujeme-li větu o střední hodnotě

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \max_x |\varphi'(x)| |x - 0|,$$

dostaneme

$$\left| \int_{-a}^a f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx \right| \leq \int_{-a}^a |f_n(x)| |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \leq \max_{x \in \langle -a, a \rangle} |\varphi'(x)| \cdot \int_{-a}^a |x f_n(x)| dx.$$

Vypočteme poslední integrál:

$$x f_n(x) = \frac{nx}{\pi(1+n^2x^2)} \dots \text{lichá funkce, } |x f_n(x)| \text{ je funkce sudá} \implies$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a |x f_n(x)| dx &= 2 \int_0^a |x f_n(x)| dx = 2 \int_0^a \frac{nx}{\pi(1+n^2x^2)} dx = \\ &= \int_1^{1+a^2n^2} \frac{dt}{\pi n t} = \frac{1}{n\pi} [\ln t]_1^{1+a^2n^2} = \frac{1}{n\pi} \ln(1+a^2n^2), \quad a \text{ dále} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-a}^a |x f_n(x)| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+a^2n^2)}{\pi n} \stackrel{L'H}{=} \frac{2a^2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+a^2n^2} = 0.$$

$$\text{Tedy } \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)dx \longrightarrow \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx \quad \text{pro } n \longrightarrow \infty,$$

t.j. $F_n(\varphi) \longrightarrow F(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$, a tedy $f_n(x) \longrightarrow \delta(x)$ ve smyslu distribucí.

Poznamenejme, že

$$f'_n(x) = \left(\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} \right)' = -\frac{2n^3x}{\pi(1+n^2x^2)^2},$$

$F'_n(x) \longrightarrow \delta'(x)$ ve smyslu distribucí, ale v klasickém smyslu je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^3x}{\pi(1+n^2x^2)^2} = 0.$$

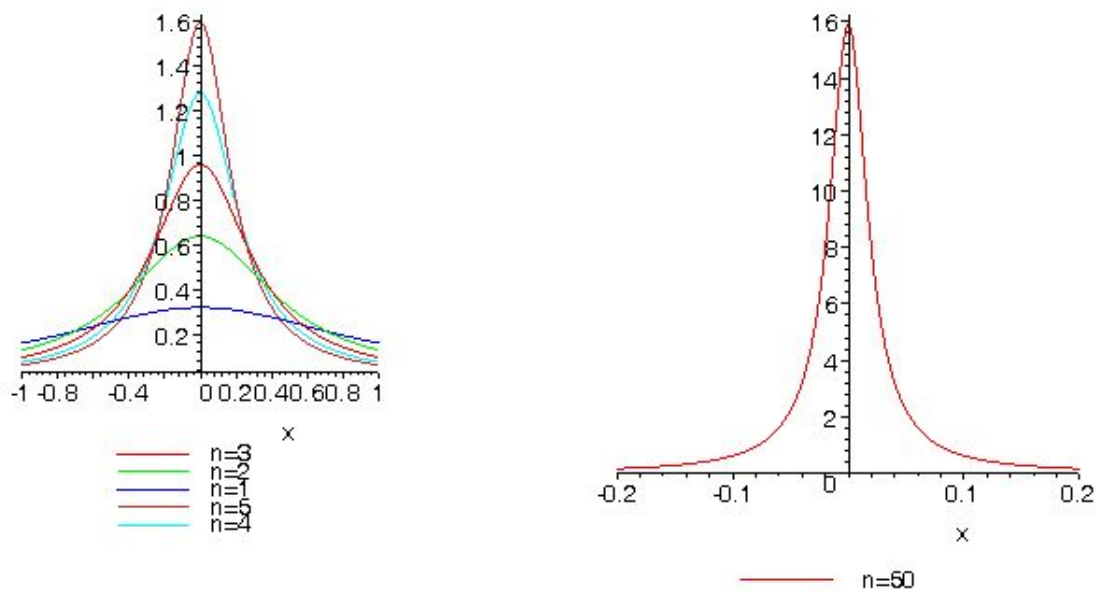
□

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Definujme nyní prostory všech funkcí, jejichž zobecněné derivace řádu $\leq k$ patří do L^2 :

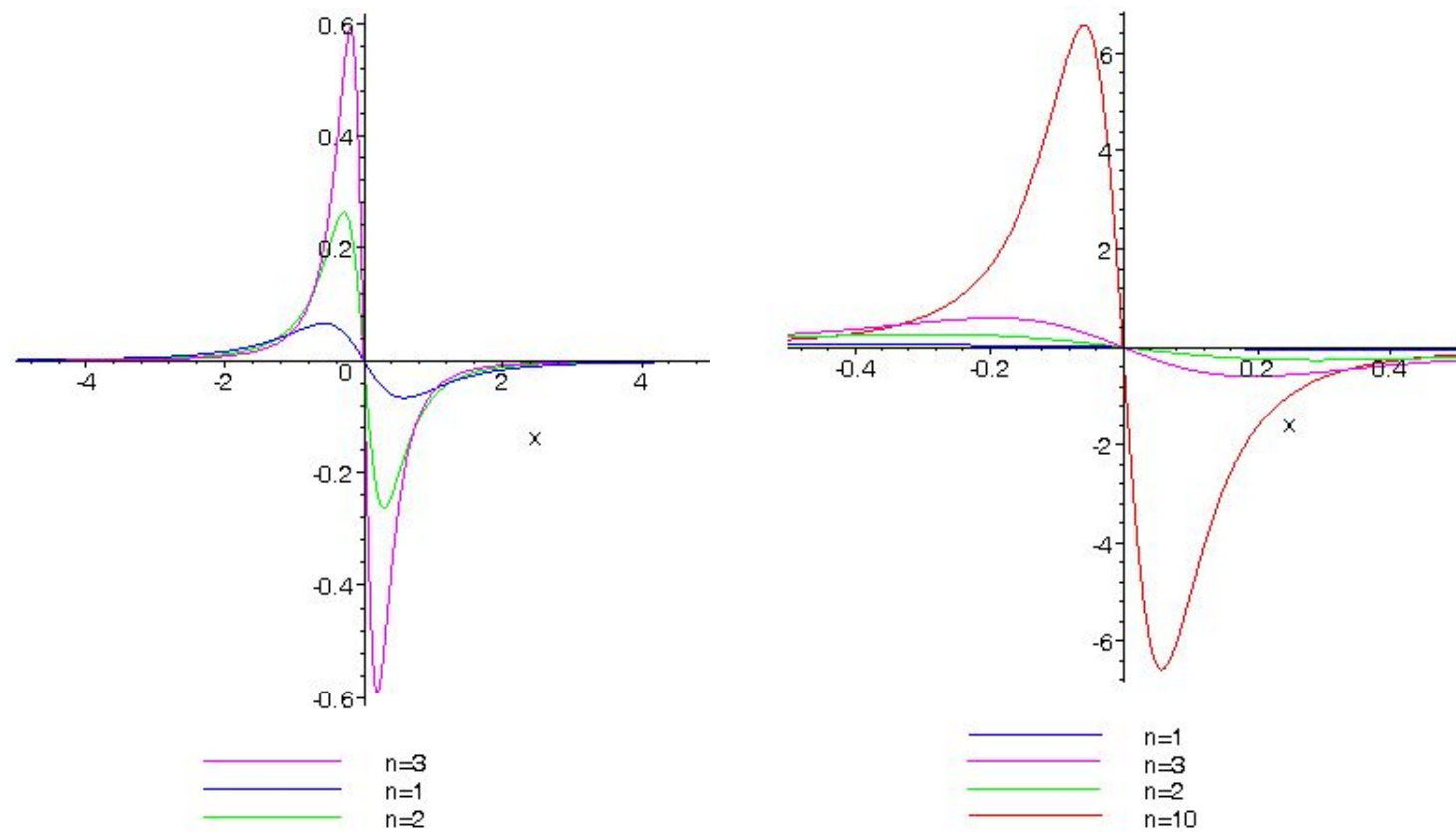
$$H^k = H^k(\Omega) = \{v \in L^2, D^\alpha v \in L^2 \text{ pro } |\alpha| \leq k\}. \quad (47)$$

Tento prostor vybavíme skalárním součinem

$$(v, w)_k = (v, w)_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha v D^\alpha w dx \quad (48)$$



Obrázek 1: Posloupnost funkcí, které konvergují k Diracově δ -funkci



Obrázek 2: Posloupnost derivací funkcí z obr. 1

a odpovídající normou

$$\|v\|_k = \|v\|_{H^k} = (v, v)_k^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^\alpha v)^2 dx \right)^{1/2}. \quad (49)$$

Konkrétně

$$\begin{aligned} \|v\|_0 &= \|v\|_{L^2} \quad (\text{nulu obvykle vynecháváme}), \\ \|v\|_1 &= \left(\int_{\Omega} \left\{ v^2 + \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 \right\} dx \right)^{1/2} = (\|v\|^2 + \|\nabla v\|^2)^{1/2}, \\ \|v\|_2 &= \left(\int_{\Omega} \left\{ v^2 + \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^d \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right\} dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

H^k s normou $\|\cdot\|_k$ je úplný, a tedy Hilbertův ... tzv. **Sobolevův prostor**.
Někdy používáme také seminormu pro $k \geq 1$:

$$|v|_k = |v|_{H^k} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} (D^\alpha v)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Zobecnění: Definujeme prostor $W_p^k = W_p^k(\Omega)$ s normou

$$\|v\|_{W_p^k} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha v|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

S touto normou je prostor úplný, tedy Banachův.

Pro $p = 2$ je $W_2^k = H^k$.

4 Variační formulace okrajových úloh

Řešme úlohu

$$\mathcal{A}u := -(au')' + bu' + cu = f \quad \text{v } \Omega = (0, 1), \quad (50)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (51)$$

kde $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$ jsou hladké funkce, $f = f(x)$ je vhodná daná funkce. Nechtě

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad c(x) - \frac{1}{2}b'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega} = \langle 0, 1 \rangle.$$

Poznamenejme, že rovnice (51) jsou tzv. homogenní Dirichletovy okrajové podmínky.

Rovnici (50) vynásobíme testovací funkcí $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ a integrujeme přes Ω (aplikujeme per-partes). Dostaneme tzv. **variační nebo také slabou formulaci** úlohy (50):

$$\int_0^1 (au'\varphi' + bu'\varphi + cu\varphi) dx = \int_0^1 f\varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega). \quad (52)$$

Označme

$$a(v, w) = \int_0^1 (av'w' + bv'w + cvw)dx \quad \dots \quad \text{bilineární forma,}$$

$$L(w) = (f, w) = \int_0^1 fwdx \quad \dots \quad \text{lineární funkcionál.}$$

Řekneme, že u je **slabým řešením** úlohy (50), je-li $u \in H_0^1$ a platí

$$a(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (53)$$

Poznámka 4.1 Na rozdíl od klasického řešení, nemusí být slabé řešení dvakrát spojitě diferencovatelné. Je-li ale dvakrát spojitě diferencovatelné, je to i klasické řešení, protože

$$\int_0^1 (\mathcal{A}u - f) \cdot \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1 \implies \mathcal{A}u = f \text{ v } \Omega \text{ a také } u(0) = u(1) = 0,$$

protože $u \in H_0^1$.

Ukážeme, že díky uvedeným předpokladům:

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad c(x) - \frac{1}{2}b'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega} = \langle 0, 1 \rangle,$$

je bilineární forma $a(\cdot, \cdot)$ koercivní (V -eliptická) na H_0^1 :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_1^2 \quad \forall v \in H_0^1, \quad \alpha > 0.$$

Vypočteme nejprve $\int_0^1 b v' v dx$. Aplikujeme-li per-partes:

$$\int_0^1 v'(x) b(x) v(x) dx = [b(x) v^2(x)]_0^1 - \int_0^1 (b'(x) v(x) + b(x) v'(x)) v(x) dx,$$

Protože $v \in H_0^1$, je "hraniční člen" nulový. Dostaneme rovnici:

$$2 \cdot \int_0^1 v'(x) b(x) v(x) dx = - \int_0^1 b'(x) v^2(x) dx \quad \forall v \in H_0^1. \quad \text{Tedy}$$

$$\int_0^1 v'(x) b(x) v(x) dx = - \int_0^1 \frac{1}{2} b'(x) v^2(x) dx \implies$$

$$\int_0^1 (b v' v + c v^2) dx = \int_0^1 (c(x) - \frac{1}{2} b'(x)) v^2(x) dx \geq 0 \quad \forall v \in H_0^1,$$

kde jsme využili předpoklad $c(x) - \frac{1}{2}b'(x) \geq 0$.

Pro bilineární formu $a(v, w)$ dostáváme (nerovnost $(*)$ plyne z Poincarého nerovnosti)

$$a(v, v) = \int_0^1 (a(v')^2 + b v' v + c v^2) dx \geq \min_{x \in \bar{\Omega}} a(x) \|v'\|^2 \stackrel{(*)}{\geq} \frac{1}{2} a_0 \|v\|_1^2 \implies$$

$$a(v, v) \geq \frac{a_0}{2} \|v\|_1^2 \quad \forall v \in H_0^1.$$

Tedy bilineární forma $a(\cdot, \cdot)$ je koercivní na H_0^1 .

Nyní ukážeme, že bilineární forma $a(\cdot, \cdot)$ je omezená. Připomeňme náš problém: Hledáme $u \in H_0^1$ tak, aby

$$a(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1, \quad L(\varphi) = (f, \varphi)_{L_2} = \int_0^1 f \varphi dx.$$

Pro $\varphi = u$ máme:

$$\alpha \|u\|_1^2 \leq a(u, u) = L(u) = (f, u) \leq \|f\| \|u\| \leq \|f\| \|u\|_1,$$

$$\|u\|_1 \leq \frac{2}{a_0} \|f\|.$$

Pro bilineární formu $a(\cdot, \cdot)$ dostáváme:

$$|a(v, w)| \leq \int_0^1 |a v' w' + b v' w + c v w| dx \leq c \int_0^1 (|v' w'| + |v' w| + |v w|) dx,$$

kde $c = \max_{x \in (0,1)} (a(x), b(x), c(x))$. Na každý sčítanec aplikujeme Cauchy-Schwarz-Buňakovského nerovnost:

$$\int_0^1 |v' w| dx \leq \left(\int_0^1 (v'(x))^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 (w'(x))^2 dx \right)^{1/2} = \|v'\| \cdot \|w'\|, \quad \text{atd.}$$

\Rightarrow bilineární forma $a(v, w)$ je omezená na H_0^1 :

$$|a(v, w)| \leq c \cdot \|v\|_1 \cdot \|w\|_1 \quad \forall v, w \in H_0^1.$$

Poznamenejme ještě, že bilineární forma $a(v, w)$ není symetrická, existenci a jednoznačnost slabého řešení pro úlohu (50), (51) dokazujeme na základě Lax-Milgramovy věty:

Věta 4.1 (Existence a jednoznačnost slabého řešení úlohy (50))

Nechť $a(x) \geq a_0 > 0$, $c(x) - \frac{1}{2}b'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$, $f \in L_2(\Omega)$. Pak existuje právě jedno řešení $u \in H_0^1(\Omega)$ rovnice

$$a(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Toto řešení splňuje $\|u\|_1 \leq \frac{2}{a_0} \|f\|$.

V důkazech vlastností bilineární formy jsme použili následující lemma.

Lemma 4.1 Nechť $\Omega = (0, 1)$. Pak existuje konstanta C taková, že

$$|v(x)| \leq C \|v\|_1 \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall v \in C_0^1(\bar{\Omega}).$$

Důkaz Nechť $x, y \in (0, 1)$, $v \in C^1(\bar{\Omega})$. Pak

$$v(x) = v(y) + \int_y^x v'(t) dt \quad \text{t.j.} \quad |v(x)| \leq |v(y)| + \int_y^x |v'(t)| dt.$$

Aplikujeme Cauchy - Schwarz- Buňakovského nerovnost a dostaneme

$$\int_0^1 |v'(t)| dt \leq \int_0^1 1^2 dt \cdot \int_0^1 (v'(t))^2 dt = \|v'\|^2.$$

Nerovnost $|v(x)| \leq |v(y)| + \|v'\|^2$ umocníme:

$$(v(x))^2 \leq (|v(y)| + \|v'\|^2)^2 = (v(y))^2 + 2|v(y)|\|v'\|^2 + \|v'\|^4 \leq 2((v(y))^2 + \|v'\|^2),$$

kde jsme použili trik

$$(A - B)^2 \geq 0 \Rightarrow A^2 - 2AB + B^2 \geq 0 \Rightarrow 2AB \leq A^2 + B^2 \quad \text{pro } A := |v(y)|, B := \|v'\|.$$

Integrujeme přes y :

$$\int_0^1 (v(x))^2 dy \leq 2 \int_0^1 (v(y))^2 dy + 2 \int_0^1 \|v'\|^2 dy = 2\|v\|^2 + 2\|v'\|^2 = 2\|v\|_1^2.$$

Protože $\int_0^1 (v(x))^2 dy = (v(x))^2$, dostáváme (Poincarého nerovnost v jedné dimenzi)

$$|v(x)| \leq \sqrt{2} \|v\|_1.$$

□

Věta 4.2 (*Poincarého nerovnost*)

Nechť Ω je omezená oblast v \mathbb{R}^d . Pak existuje konstanta $C = C(\Omega)$ tak, že

$$\|v\| \leq C \|\nabla v\| \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Z Poincarého nerovnosti plyne ekvivalence norem $|\cdot|_1$ a $\|\cdot\|_1$ na H_0^1 :

$$\|v\|_1^2 = \|\nabla v\|^2 \leq \|v\|_1^2 = \|v\|^2 + \|\nabla v\|^2 \leq (C^2 + 1) \|\nabla v\|^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

kde jsme aplikovali Poincarého nerovnost: $\|v\| \leq C \|\nabla v\| \Rightarrow \|v\|^2 \leq C^2 \|\nabla v\|^2$. Dostáváme nerovnost

$$\|v\|_1^2 \leq \|v\|_1^2 \leq (C^2 + 1) \|v\|_1^2, \quad \text{t.j. } |v|_1 \leq \|v\|_1 \leq \sqrt{C^2 + 1} |v|_1.$$

Duální prostor $H_0^1(\Omega)^*$... prostor všech omezených lineárních funkcínálů na H_0^1 . Obvykle označujeme $(H_0^1)^* = H^{-1}$,

$$\|L\|_{(H_0^1)^*} = \|L\|_{-1} = \sup_{v \in H_0^1} \frac{|L(v)|}{|v|_1}.$$

Zkoumejme nyní případ $b = 0$:

$$a(v, w) = \int_0^1 (a v' w' + c v w) dx, \quad a(x) \geq a_0 > 0, \quad c(x) \geq 0 \quad \forall x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

$a(v, w)$ je symetrická, pozitivně definitní, koercivní a omezená v $H_0^1(\Omega)$, indukuje tedy na $H_0^1(\Omega)$ **energetickou normu**

$$\|v\|_a = (a(v, v))^{1/2}.$$

Věta 4.3 Necht $a(x) \geq a_0 > 0$, $c(x) \geq 0 \forall x \in \bar{\Omega} = \langle 0, 1 \rangle$, $b(x) \equiv 0 \forall x \in \langle 0, 1 \rangle$, $f \in L^2$ a $u \in H_0^1$ je slabé řešení rovnice (50), t.j.

$$a(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1.$$

Položme

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^1 (a(\varphi')^2 + c\varphi^2) dx - \int_0^1 f\varphi dx.$$

Pak $F(u) \leq F(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1$, přičemž rovnost nastane pouze pro $\varphi = u$.

Příklad 4.1 Napište variační formulaci a dokažte existenci řešení rovnice

$$-u'' = f \quad v \quad \Omega = (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Zde $A(x) = 1$, $b(x) = c(x) = 0 \forall x \in (0, 1)$, $f \in L_2(0, 1)$, $\varphi \in C_0^1(0, 1) \Rightarrow \varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

$$-\int_0^1 u''(x)\varphi(x) dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x) dx \quad \Rightarrow \quad \text{per partes}$$

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x) dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x) dx \quad \dots \quad \text{slabá formulace.}$$

$$a(v, w) = \int_0^1 v'(x)w'(x) dx, \quad a(v, v) = \int_0^1 (v'(x))^2 dx = \|v'\|^2 \geq \frac{1}{2} \|v\|_1^2 \quad \dots$$

symetrická, koercivní (pozitivně definitní).

Podle věty o existenci a jednoznačnosti slabého řešení \implies

$$\exists! u \in H_0^1(0, 1) : a(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad \text{Navíc} \quad \|u\|_1 \leq 2 \|f\|.$$

□

4.1 Příklady II

Napište variační formulaci a v jednorozměrných úlohách dokažte existenci slabého řešení diferenciální rovnice. Aproximujte řešení metodou konečných prvků.

1.
$$\begin{aligned} -u'' + 4u &= \cos x, & x \in (0, \pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0 \end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned} -((x+1)u')' + u &= x, & x \in (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned} -u'' + 2u &= e^x, & x \in (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 2 \end{aligned}$$
4.
$$\begin{aligned} -u'' - u' &= x - 1, & x \in (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$
5.
$$\begin{aligned} -\Delta u &= x, & \text{na } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u &= 0, & \text{na } \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= e^x, & \text{na } \Omega &= (0, 1) \times (0, 1) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 1 & \text{na } \Gamma &= \partial\Omega \end{aligned}$$
7.
$$\begin{aligned} -\Delta u &= x^2, & \text{na } \Omega &= (0, 1) \times (0, 1) \\ u &= x & \text{na } \Gamma &= \partial\Omega \end{aligned}$$
8.
$$\begin{aligned} -u'' - xu' &= x^2, & x &\in (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$
9.
$$\begin{aligned} -u'' - u' + u &= \sin x, & x &\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ u\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$
10.
$$\begin{aligned} -u'' - e^x u' &= 2, & x &\in (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$
11.
$$\begin{aligned} -u'' + 5u &= x^2, & x &\in (-1, 1) \\ u(0) &= u(1) = 1 \end{aligned}$$
12.
$$\begin{aligned} -(e^x u')' + 2u &= 1, & x &\in (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$
13.
$$\begin{aligned} -\Delta u &= e^x, & \text{na } \Omega &= (0, 1) \times (0, 1) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= x & \text{na } \Gamma &= \partial\Omega \end{aligned}$$
14.
$$\begin{aligned} -\Delta u + 2u &= x, & \text{na } \Omega &= (0, 1) \times (0, 1) \\ u &= 2 & \text{na } \Gamma &= \partial\Omega \end{aligned}$$

□

4.2 Dvoudimenzionální úlohy

Než přejdeme k dvoudimenzionálním úlohám, zopakujme si

Věta 4.4 (*Gauss-Ostrogradského, divergenční*)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s Lipschitzovskou hranicí Γ , $u \in H^1(\Omega)$. Pak

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} u n_i dS, \quad i = 1, 2, \quad \vec{n} = (n_1, n_2),$$

\vec{n} je jednotková vnější normála ke Γ .

Položíme-li ve větě 4.4 $u := v \cdot w$, dostaneme

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} w + \frac{\partial w}{\partial x_i} v \right) dx = \int_{\Gamma} v w n_i dS, \quad i = 1, 2 \quad \implies$$

Greenova formule
$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} w dx = \int_{\Gamma} v w n_i dS - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx, \quad v, w \in H^1(\Omega).$$

Rozepsáno do složek ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$),

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_1} w dx = \int_{\Gamma} v w n_1 dS - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_1} v dx, \quad w := \frac{\partial w}{\partial x_1},$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_2} w dx = \int_{\Gamma} v w n_2 dS - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_2} v dx, \quad w := \frac{\partial w}{\partial x_2},$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 dS - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} v dx,$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2 dS - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} v dx.$$

Poslední dvě rovnice sečteme a dostaneme

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) dx = \int_{\Gamma} v \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2 \right) dS - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) v dx,$$

$$\int_{\Omega} \text{grad } v \cdot \text{grad } w dx = \int_{\Gamma} v \text{grad } w \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega} \Delta w \cdot v dx \implies$$

další Greenova formule

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w dx = \int_{\Gamma} v \cdot \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} dS - \int_{\Omega} \Delta w \cdot v dx \implies$$

$$- \int_{\Omega} \Delta w \cdot v dx = - \int_{\Gamma} v \cdot \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} dS + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w dx. \quad (54)$$

Příklad 4.2 Napište variační formulaci

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & na & \Omega \subset \mathbb{R}^2, & f &\in L^2(\Omega), \\ u &= 0 & na & \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned} \quad (55)$$

Rovnici vynásobíme testovací funkcí $v \in H_0^1(\Omega)$ a zintegrujeme:

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} (-\Delta u) \cdot v dx = \int_{\partial\Omega} -\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v dS + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tedy

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \dots \text{symetrická, omezená, koercivní bilineární forma,}$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx \quad \dots \text{spojitý lineární funkcionál,}$$

$$\implies a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u \dots \text{slabé řešení.}$$

□

Příklad 4.3 *Napište variační formulaci*

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad \text{na } \Omega \subset \mathbb{R}^2, & f &\in L^2(\Omega), \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \varphi \quad \text{na } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned} \quad (56)$$

Rovnici vynásobíme testovací funkcí $v \in H^1(\Omega)$ a zintegrujeme:

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} (-\Delta u + u) \cdot v dx = \int_{\Omega} (-\Delta u v + u v) dx = \int_{\partial\Omega} -\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v dS + \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Tedy

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) dx \quad \dots \quad \text{symetrická, omezená, koercivní bilineární forma,}$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} \varphi v dS \quad \dots \quad \text{spojitý lineární funkcional,}$$

$$\implies a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad u \dots \text{slabé řešení.}$$

□

Příklad 4.4 *Napište variační formulaci*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{na } \Omega \subset \mathbb{R}^2, & f &\in L^2(\Omega), \\ u &= g \quad \text{na } \Gamma = \partial\Omega, & g &\in L^2(\Gamma). \end{aligned} \quad (57)$$

Zde u není nulová na Γ . Musíme předpokládat, že existuje funkce $u_0 \in H^1(\Omega)$ taková, že $u_0|_{\Gamma} = g$ (g je stopa u_0 na hranici Γ).

$$\gamma : H^1 \longrightarrow L^2(\Gamma) \quad \dots \quad \text{operátor stop}$$

g je stopa funkce $u_0 \in H^1$ na Γ , t.j. $g = \gamma u_0$. Slabá formulace:

$$\exists u \in H^1 : a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1, \quad \gamma u = g.$$

Položme $w := u - u_0$.

$$a(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx = L(v) - a(u_0, v), \quad \forall v \in H_0^1.$$

Lax-Milgramova věta $\implies \exists! w \in H_0^1$, které řeší naši úlohu. Výsledné řešení je

$$u = u_0 + w.$$

(splňuje původní rovnici a $\gamma u = g$ na Γ).

Řešení nezávisí na výběru rozšíření u_0 hraničních hodnot g na celé Ω .

□

Příklad 4.5 *Napište variační formulaci následující rovnice vedení tepla*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f & v & \Omega \times (0, T), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad f \in L^2(\Omega), \\ u \Big|_{\partial\Omega \times (0, T)} &= 0 & \dots & \text{okrajová podmínka} \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega & \dots & \text{počáteční podmínka} \end{aligned} \tag{58}$$

Slabá formulace:

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \right) v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad v \in H_0^1.$$

Aplikujeme druhou Greenovu formuli a dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS &= \int_{\Omega} f v dx \implies \\ \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v dx + a(u, v) &= L(v), \quad \forall v \in H_0^1. \end{aligned}$$

□

5 Diskrétní variační formulace okrajových úloh

Nechť V je Banachův, $a(u, v)$ symetrická bilineární forma na V ,

$a(u, v)$ je omezená, tj. $\exists M > 0 : |a(u, v)| \leq M \cdot \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in V$;

$a(u, v)$ je koercivní: $\exists m > 0 : a(u, u) \geq m \cdot \|u\|^2 \quad \forall u \in V$;

L je spojitý lineární funkcionál na V : $\exists c > 0 : |L(v)| \leq c \cdot \|v\| \quad \forall v \in V$.

$$F(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v).$$

Spojitý problém:

$$(P) \quad \forall u \in V : a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \quad (\text{Galerkin})$$

$$(P') \quad \forall u \in V : F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in V \quad (\text{Ritz})$$

Nechť nyní $V_h \subset V$ konečnědimenzionální, $\dim V_h = N_h$, $\{\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{N_h}\}$ báze $V_h \implies$

$$v \in V_h : v = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \varphi_i, \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ pro } i = 1, \dots, N_h \quad \text{lineární kombinace prvků báze}$$

Diskrétní problém:

(splnění rovnice v diskrétní Galerkinově formulaci stačí požadovat jen pro prvky báze):

$$(P_h) \quad \forall u_h \in V_h : a(u_h, \varphi_j) = L(\varphi_j) \quad \forall j = 1, \dots, N_h \quad (\text{diskrétní Galerkin})$$

$$(P'_h) \quad \forall u_h \in V_h : F(u_h) \leq F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (\text{diskrétní Ritz})$$

Hledejme **řešení problému (P_h)** ve tvaru $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \varphi_i$, (t.j. hledáme α_i , $i = 1, \dots, N_h$):

$$a\left(\sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \varphi_i, \varphi_j\right) = L(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, N_h, \quad \text{t.j.}$$

$$\sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i a(\varphi_i, \varphi_j) = L(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, N_h.$$

Maticově

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_1) & \dots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_2) & a(\varphi_2, \varphi_2) & \dots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_{N_h}) & a(\varphi_2, \varphi_{N_h}) & \dots & a(\varphi_{N_h}, \varphi_{N_h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{N_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi_1) \\ L(\varphi_2) \\ \vdots \\ L(\varphi_{N_h}) \end{pmatrix},$$

tedy

$$\mathbf{A} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\mathbf{b}}, \quad (59)$$

kde

$$\mathbf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N_h}, \quad a_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad \vec{\mathbf{b}} = (L(\varphi_j))_{j=1}^{N_h}, \quad \vec{\alpha} = (\alpha_j)_{j=1}^{N_h}.$$

A ... matice tuhosti.

Za našich předpokladů je matice \mathbf{A} symetrická a pozitivně definitní (plyne z V-elasticity).

Řešení problému (P'_h)

$$a(v, v) = a\left(\sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \varphi_i, \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \varphi_j\right) = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_i \alpha_j a(\varphi_i, \varphi_j) = \vec{\alpha}^T \mathbf{A} \vec{\alpha},$$

$$L(v) = L\left(\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \varphi_j\right) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j L(\varphi_j) = \vec{\alpha}^T \vec{\mathbf{b}} \quad \implies$$

$$F(v) = \frac{1}{2} \vec{\alpha}^T \mathbf{A} \vec{\alpha} - \vec{\alpha}^T \vec{\mathbf{b}}. \quad (60)$$

Věta 5.1 Za uvedených předpokladů existuje právě jedno řešení problému (P_h), a tedy i problému (P'_h).

Věta 5.2 (Odhad chyby - Céa)

$V \dots$ Hilbertův, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ omezená bilineární forma, t.j. $|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|$, $a(\cdot, \cdot)$ koercivní (V-eliptická), t.j. $a(u, u) \geq m \|u\|^2$, $L \dots$ spojitý lineární funkcional na V , t.j. $|L(v)| \leq \alpha \|v\|$, $\forall v \in V$. Nechť u je řešení (P), u_h řeší (P_h). Pak

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{m} \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h.$$

Konstanta $\frac{M}{m}$ nezávisí na V_h .

Důkaz

$$\begin{aligned} a(u, v) - a(u_h, v_h) &= F(v) - F(v_h) \quad \forall v \in V, \\ v := v_h &\implies a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = a(u - u_h, v_h - v_h) = 0 \\ \implies a(u - u_h, v_h) &= 0 \quad \forall v_h \in V_h, \quad (\text{tedy i pro } v_h - u_h \in V_h) \implies \end{aligned}$$

$$a(u - u_h, v_h - u_h) = 0. \quad (61)$$

Bilineární forma $a(\cdot, \cdot)$ je V-eliptická $\implies a(u - u_h, u - u_h) \geq m \|u - u_h\|^2 \implies$

$$\frac{1}{m} a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \geq \|u - u_h\|^2 \implies$$

$$\frac{1}{m} (a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h)) \geq \|u - u_h\|^2.$$

Aplikujeme-li (61), dostaneme $\frac{1}{m} a(u - u_h, u - v_h) \geq \|u - u_h\|^2$, a z omezenosti $a(\cdot, \cdot)$ plyne

$$\frac{M}{m} \|u - u_h\| \|u - v_h\| \geq \|u - u_h\|^2, \text{ t.j.}$$

$$\|u - u_h\| \leq \text{konst} \cdot \|u - v_h\| \quad \forall v_h \in V_h, \quad \text{konst} = \frac{M}{m}.$$

□

Poznámka 5.1 *Je-li bilineární forma symetrická, lze ukázat, že v tom případě je $\text{konst} = \sqrt{\frac{M}{m}}$, a tedy dostáváme "lepší" odhad chyby.*

Uvedme bez důkazu ještě jeden odhad chyby:

Věta 5.3 *Nechť u je slabé řešení, u_h jeho aproximace metodou konečných prvků. Pak*

$$\|u_h - u\|_a \leq c \cdot h^2 \|u\|_2.$$

6 Metoda konečných prvků pro okrajové úlohy

Nechť nyní $\Omega = (0, 1)$, $b \equiv 0$ na $\bar{\Omega}$. Označme

$$\mathcal{A}u := -(au')' + cu = f \text{ v } (0, 1), \quad (62)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (63)$$

kde $a = a(x)$, $c = c(x)$ jsou hladké funkce, $a(x) \geq a_0 > 0$, $c(x) \geq 0 \in \bar{\Omega}$, $f \in L^2(\Omega)$.

Variační formulace:

$$? u \in H_0^1(\Omega) : a(u, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1, \quad (64)$$

kde

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} (a v' w' + c v w) dx, \quad (f, \varphi) = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

Víme, že existuje právě jedno řešení $u \in H_0^1(\Omega)$... slabé řešení (62), (63). Rozdělme interval $\bar{\Omega} = \langle 0, 1 \rangle : 0 = x_0 < x_1 < \dots, x_M = 1$ a položme

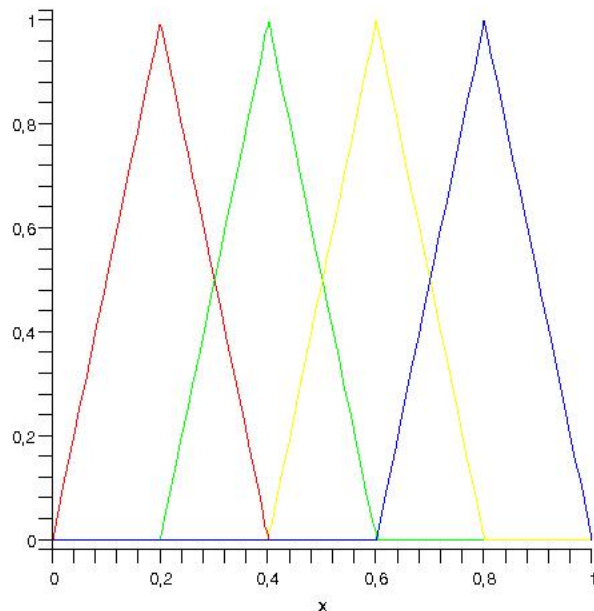
$$h_j = x_j - x_{j-1}, \quad h = \max_j h_j, \quad K_j = \langle x_{j-1}, x_j \rangle.$$

Řešení hledáme v konečnědimenzionálním prostoru funkcí S_h ,

$$S_h = \{v \in \mathcal{C} = \mathcal{C}(\bar{\Omega}), v \text{ je lineární na každém } K_j, v(0) = v(1) = 0\},$$

$v(x) = \alpha x + \beta$... správně tzv. afinní funkce pro $\beta \neq 0$.

Zřejmě $S_h \subset H_0^1(\Omega)$.



Obrázek 3: Bázové funkce prostoru S_h

Báze S_h : množina $\{\Phi_i\}_{i=1}^{M-1} \subset S_h$ "stanových funkcí":

$$\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Libovolnou funkci $v \in S_h$ lze napsat jako lineární kombinaci funkcí Φ_i :

$$v(x) = \sum_{i=1}^{M-1} v_i \Phi_i(x), \quad v_i = v(x_i).$$

Příklad 6.1

$$-u'' + u = 2x, \quad \text{pro } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (65)$$

Najděte slabé řešení pomocí metody konečných prvků založené na po částech lineárních bázových funkcích pro rovnoměrné dělení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s krokem $h = 0,2$ ($0,1; 0,05$). Najděte přesné řešení a vypočtěte maximální chybu výpočtu v bodech dělení.

Přesné řešení (vypočtěte si):

$$u_{pr}(x) = -\frac{2}{e^2 - 1} e^{x+1} + \frac{2}{e^2 - 1} e^{-x+1} + 2x.$$

Metoda konečných prvků:

$$h_j = h = 0,2 \quad \forall j = 1, \dots, 5 \quad (M = 5),$$

$$K_1 = \langle 0; 0,2 \rangle, \quad K_2 = \langle 0,2; 0,4 \rangle, \quad K_3 = \langle 0,4; 0,6 \rangle, \quad K_4 = \langle 0,6; 0,8 \rangle, \quad K_5 = \langle 0,8; 1 \rangle.$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0,2, \quad x_2 = 0,4, \quad x_3 = 0,6, \quad x_4 = 0,8, \quad x_5 = 1, \quad \text{obecně } x_k = k \cdot 0,2, k = 0, \dots, 5.$$

Vypočteme bázové ("stanové") funkce $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_4$ (viz obr. 3):

$$\Phi_1(x) = \alpha_1 x + \beta_1, \quad x \in \langle 0; 0, 2 \rangle, \quad \Phi_1(0) = 0, \quad \Phi_1(0, 2) = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 5, \quad \beta_1 = 0$$

$$\Phi_2(x) = \alpha_2 x + \beta_2, \quad x \in \langle 0, 2; 0, 4 \rangle, \quad \Phi_2(0, 2) = 1, \quad \Phi_2(0, 4) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -5, \quad \beta_2 = 2$$

Tedy

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 5x & x \in \langle 0; 0, 2 \rangle \\ -5x + 2 & x \in \langle 0, 2; 0, 4 \rangle \\ 0 & x \in \langle 0, 2; 1 \rangle \end{cases}$$

Obdobně vypočteme

$$\Phi_2(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0; 0, 2 \rangle \\ 5x - 1 & x \in \langle 0, 2; 0, 4 \rangle \\ -5x + 3 & x \in \langle 0, 4; 0, 6 \rangle \\ 0 & x \in \langle 0, 6; 1 \rangle \end{cases} \quad \Phi_3(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0; 0, 4 \rangle \\ 5x - 2 & x \in \langle 0, 4; 0, 6 \rangle \\ -5x + 4 & x \in \langle 0, 6; 0, 8 \rangle \\ 0 & x \in \langle 0, 8; 1 \rangle \end{cases}$$

$$\Phi_4(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle 0; 0, 6 \rangle \\ 5x - 3 & x \in \langle 0, 6; 0, 8 \rangle \\ -5x + 5 & x \in \langle 0, 8; 1 \rangle \end{cases}$$

Variační formulace:

$$\int_0^1 (-u'' + u)\varphi dx = 2 \int_0^1 x \varphi dx, \quad \varphi \in C_0^1(\Omega) \quad (\varphi(0) = \varphi(1) = 0)$$

$$\int_0^1 -u''\varphi dx = [-u'\varphi]_0^1 + \int_0^1 u'\varphi' dx = \int_0^1 u'\varphi' dx \implies$$

$$a(u, \varphi) = \int_0^1 (u'\varphi' + u\varphi) dx = 2 \int_0^1 x \varphi dx = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Maticově, viz (59), dostáváme

$$\mathbf{A} \vec{\alpha} = \vec{\mathbf{b}},$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^4 = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{i,j=1}^4, \quad \vec{\mathbf{b}} = (L(\varphi_j))_{j=1}^4, \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_4)^T.$$

$$a_{11} = a(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 ((\varphi_1')^2 + \varphi_1^2) dx = \int_0^{0.2} (25 + 25x^2) dx + \int_{0.2}^{0.4} (25 + (-5x+2)^2) dx = 10.13333333,$$

$$a_{12} = a_{21} = a(\varphi_2, \varphi_1) = \int_0^1 (\varphi_1' \varphi_2' + \varphi_1 \varphi_2) dx = \int_{0.2}^{0.4} (-25 + (-5x+2)(5x-1)) dx = -4.966666667,$$

$$a_{13} = a_{31} = a(\varphi_3, \varphi_1) = 0, \quad a_{14} = a_{41} = a(\varphi_4, \varphi_1) = 0, \quad a_{24} = a_{42} = a(\varphi_4, \varphi_2) = 0,$$

$$a_{22} = a(\varphi_2, \varphi_2) = \int_0^1 ((\varphi_2')^2 + \varphi_2^2) dx = \int_{0.2}^{0.4} (25 + (5x-1)^2) dx + \int_{0.4}^{0.6} (25 + (-5x+3)^2) dx = 10.13333333,$$

$$a_{23} = a_{32} = a(\varphi_3, \varphi_2) = \int_0^1 (\varphi_2' \varphi_3' + \varphi_2 \varphi_3) dx = \int_{0.4}^{0.6} (-25 + (-5x+3)(5x-2)) dx = -4.966666667,$$

$$a_{33} = a(\varphi_3, \varphi_3) = \int_0^1 ((\varphi_3')^2 + \varphi_3^2) dx = \int_{0.4}^{0.6} (25 + (5x-2)^2) dx + \int_{0.6}^{0.8} (25 + (-5x+4)^2) dx = 10.13333333,$$

$$a_{34} = a_{43} = a(\varphi_3, \varphi_4) = \int_0^1 (\varphi_3' \varphi_4' + \varphi_3 \varphi_4) dx = -4.966666667,$$

$$a_{44} = a(\varphi_4, \varphi_4) = \int_0^1 ((\varphi_4')^2 + \varphi_4^2) dx = 10.13333333.$$

Tedy matice tuhosti \mathbf{A} je *tridiagonální, symetrická, pozitivně definitní matice*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10.13333333 & -4.966666667 & 0 & 0 \\ -4.966666667 & 10.13333333 & -4.966666667 & 0 \\ 0 & -4.966666667 & 10.13333333 & -4.966666667 \\ 0 & 0 & -4.966666667 & 10.13333333 \end{pmatrix}.$$

$$b_1 = L(\varphi_1) = 2 \int_0^1 x \varphi_1 dx = 2 \int_0^{0.2} 5x^2 dx + 2 \int_{0.2}^{0.4} x(-5x+2) dx = 0,08,$$

$$b_2 = L(\varphi_2) = 2 \int_0^1 x \varphi_2 dx = 2 \int_{0.2}^{0.4} x(5x-1) dx + 2 \int_{0.4}^{0.6} x(-5x+3) dx = 0,16,$$

$$b_3 = L(\varphi_3) = 2 \int_0^1 x \varphi_3 dx = 2 \int_{0.4}^{0.6} x(5x-2) dx + 2 \int_{0.6}^{0.8} x(-5x+4) dx = 0,24,$$

$$b_4 = L(\varphi_4) = 2 \int_0^1 x \varphi_4 dx = 2 \int_{0.6}^{0.8} x(5x-3) dx + 2 \int_{0.8}^1 x(-5x+5) dx = 0,32.$$

Tedy $\vec{\mathbf{b}} = (0,08; 0,16; 0,24; 0,32)^T$.

Řešením soustavy (59) – existuje právě jedno – dostaneme neznámé koeficienty

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_4)^T = (0.05753111842, 0.1012715436, 0.1168752524, 0.08886319940)^T$$

a řešení $u(x)$:

$$u(x) = \begin{cases} \alpha_1 5x & = 0.2876555921 x & x \in \langle 0; 0,2 \rangle \\ \alpha_1 (-5x+2) + \alpha_2 (5x-1) & = 0.2187021259 x + 0.0137906932 & x \in \langle 0,2; 0,4 \rangle \\ \alpha_2 (-5x+3) + \alpha_3 (5x-2) & = 0.0780185440 x + 0.0700641260 & x \in \langle 0,4; 0,6 \rangle \\ \alpha_3 (-5x+4) + \alpha_4 (5x-3) & = -0.140060265 x + 0.2009114114 & x \in \langle 0,6; 0,8 \rangle \\ \alpha_4 (-5x+5) & = -0.444315997 x + 0.4443159970 & x \in \langle 0,8; 1 \rangle \end{cases}$$

Povšimněte si, že například v bodě $x = 0,4$ je $u(0,4) = 0.1012715436 = \alpha_2$ atd., tedy $\alpha_i = u(x_i)$. Počítáme-li maximální chybu výpočtu v uzlových bodech dělení, počítáme rozdíl $|u_{pr}(x_i) - \alpha_i|$. \square

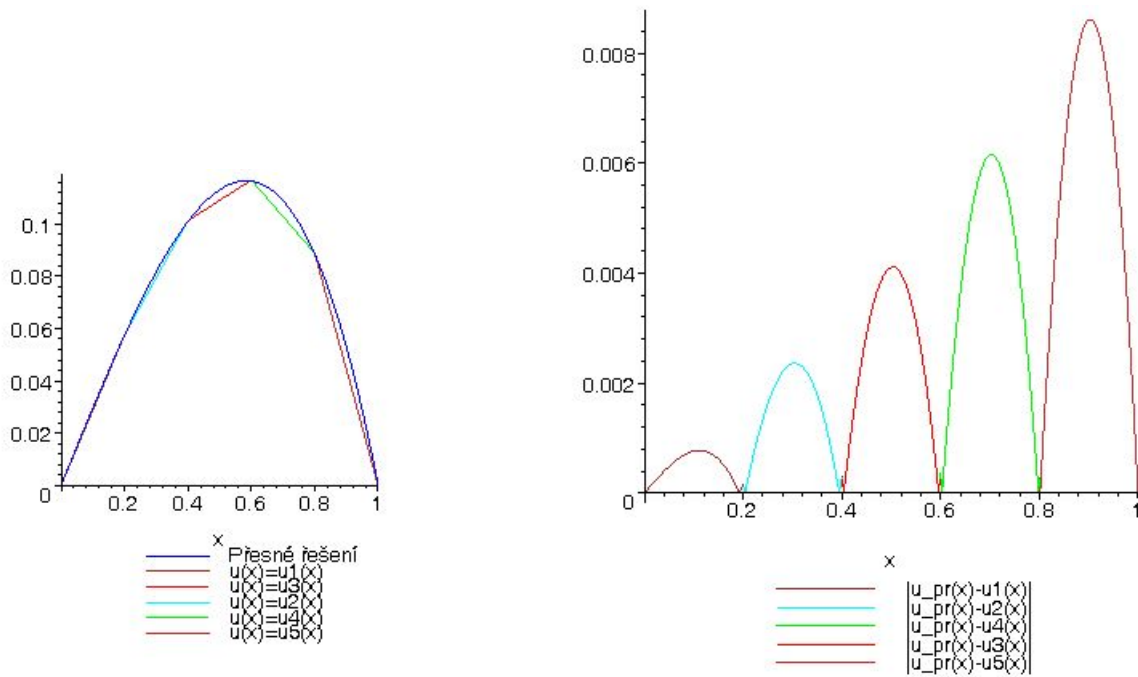
Konečným prvkem (přesná definice viz. definice 8.1) obvykle rozumíme trojici (K, \mathcal{P}, Σ) , kde K je nějaká uzavřená souvislá množina v \mathcal{R}^d ,

\mathcal{P} je konečnědimenzionální podprostor hladkých funkcí

(např. polynomů) na množině K ,

Σ jsou "stupně volnosti" prostoru \mathcal{P} .

V našem příkladě: $K = \langle 0,1 \rangle$, $\mathcal{P} \equiv S_h \dots$ po částech lineární spojitě funkce, tzv. **lineární konečné prvky**, $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$.



Obrázek 4: Slabé řešení rovnice (65) a jeho chyba (M=5)

Poznámka 6.1 Diferenciální rovnice, které lze slabě formulovat, mají sudý řád $2m$ a slabé řešení hledáme v prostoru H^m (v našem případě je rovnice 2. řádu, slabé řešení hledáme v H^1).

Uvedme ještě jeden odhad chyby:

Věta 6.1 Nechť u je slabé řešení, u_h jeho aproximace metodou konečných prvků. Pak

$$\|u_h - u\|_a \leq c \cdot h^2 \|u\|_2.$$

7 Modelový problém v rovině

Nechť Ω je mnohoúhelník. Řešme Dirichletovu úlohu:

$$-\Delta u = f \quad \text{na } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{66}$$

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma = \partial\Omega. \tag{67}$$

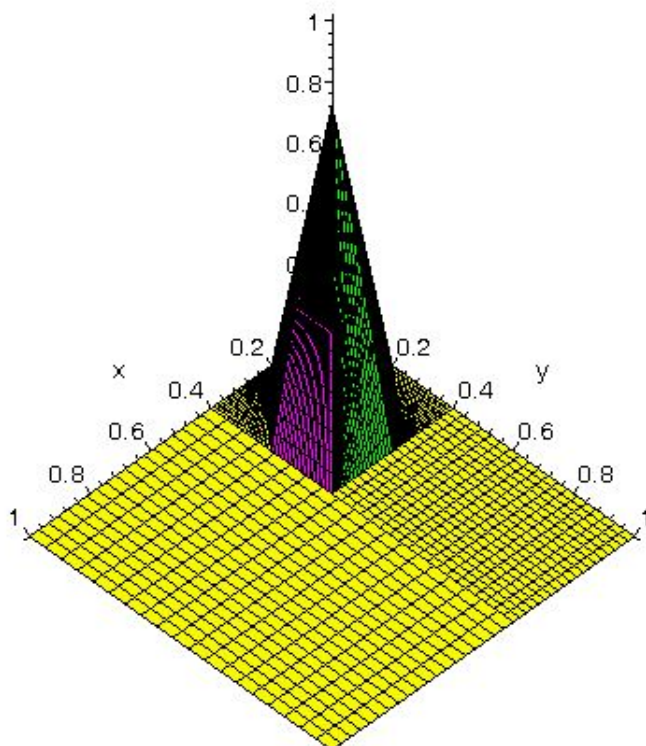
Poznamenejme, že je-li $f = 0$, je rovnice (66) Laplaceova rovnice a jejím řešením jsou harmonické funkce. Je-li f nenulové, nazývá se rovnice (66) Poissonovou rovnicí.

Variační formulace:

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad u \dots \text{slabé řešení}$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx, \tag{68}$$

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx. \tag{69}$$



Obrázek 5: Bázová fce Φ_1

Postupujeme obdobně jako pro $\Omega = \langle 0, 1 \rangle$.

Rozdělíme mnohoúhelník Ω např. na trojúhelníky nebo čtyřúhelníky, tj. nechť $\mathcal{T}_h = \{K\}$ je množina uzavřených trojúhelníků ... **triangulace** Ω taková, že

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K, \quad h_k = \text{diam}(K), \quad h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K.$$

Vrcholy trojúhelníků $K \in \mathcal{T}_h$... **uzly triangulace** \mathcal{T}_h .

Předpoklad: Průnik libovolných dvou trojúhelníků z \mathcal{T}_h je buď prázdný, nebo uzel, nebo hrana a žádný uzel neleží uvnitř nějaké hrany \mathcal{T}_h .

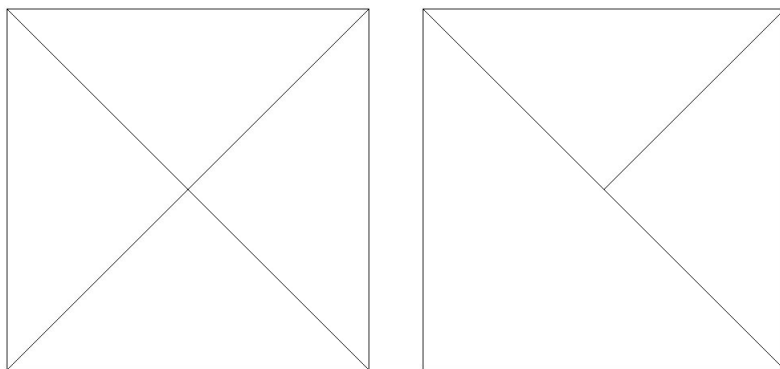
\mathcal{T}_h ... triangulace, k \mathcal{T}_h přiřadíme prostor funkcí S_h , který obsahuje spojité, po částech lineární funkce na \mathcal{T}_h , které jsou nulové na Γ :

$$S_h = \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : v \text{ je lineární v } K \forall K \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ na } \Gamma\} \subset H_0^1(\Omega).$$

Obrázek 7 byl přejat z <https://www.comsol.com/multiphysics/finite-element-method>.

Nechť $\{P_i\}_{i=1}^{M_h}$ je množina vnitřních uzlů Ω , t.j. takových uzlů, které neleží na Γ . Funkce z S_h jsou jednoznačně určeny svými hodnotami v P_j , báze S_h ... **stanové (pyramidové) funkce**:

$$\{\Phi_i\}_{i=1}^{M_h} \subset S_h : \Phi_i(P_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \implies$$



Obrázek 6: Vlevo přípustná triangulace, vpravo nepřípustná

$$v \in S_h, \quad v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M_h} v_i \Phi_i(\mathbf{x}), \quad \text{kde } v_i = v(P_i) \dots \text{ hodnoty funkce } v \text{ v uzlech.}$$

S_h je konečnědimenzionální podprostor $H_0^1(\Omega)$.

Příklad 7.1 Řešte Dirichletovu úlohu

$$-\Delta u = f \quad v \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \quad (70)$$

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma, \quad (71)$$

$$f(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) + \sin(\pi x) \sin(2\pi y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

metodou konečných prvků založené na po částech lineárních funkcích, Ω rozdělíte na trojúhelníky, které získáte tak, že každý element čtvercové sítě s krokem $h = 0.2$ ($0.1, 0.05$) rozdělíte uhlopříčkou přidáním diagonály s kladnou směrnici. Ověřte, že triangulace splňuje naše požadavky. Vypočtete L^2 -normu chyby.

Přesné řešení:

$$u(x, y) = (2\pi^2)^{-1} \sin(\pi x) \sin(\pi y) + (5\pi^2)^{-1} \sin(\pi x) \sin(2\pi y).$$

□

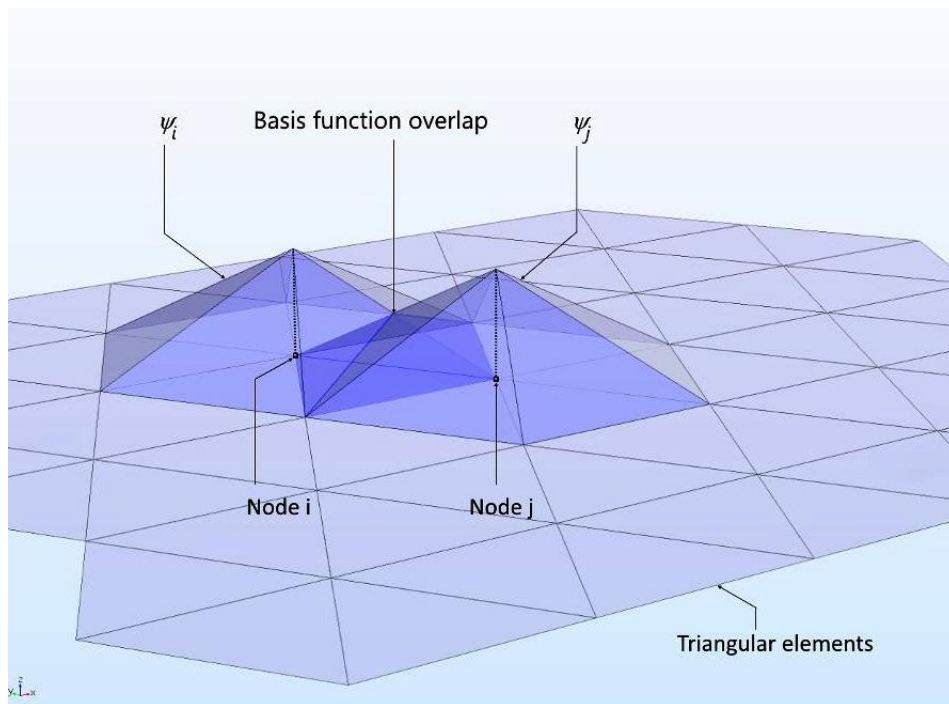
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $S_h = \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), v \text{ je lineární na } K \forall K \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ na } \Gamma\} \subset H_0^1(\Omega)$, i.e.

$$v(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad (x, y) \in K.$$

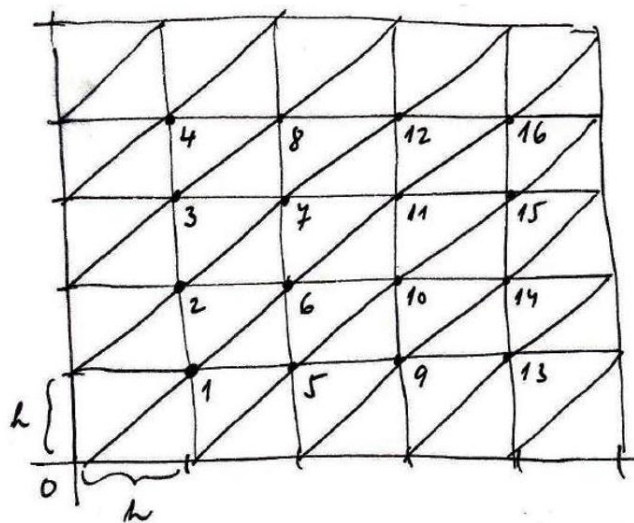
$$v(0, y) = v(1, y) = 0 \quad \text{pro } y \in \langle 0, 1 \rangle, \quad v(x, 0) = v(x, 1) = 0 \quad \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Počet stupňů volnosti $M_h = 16 =$ počet vnitřních bodů P_i oblasti $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

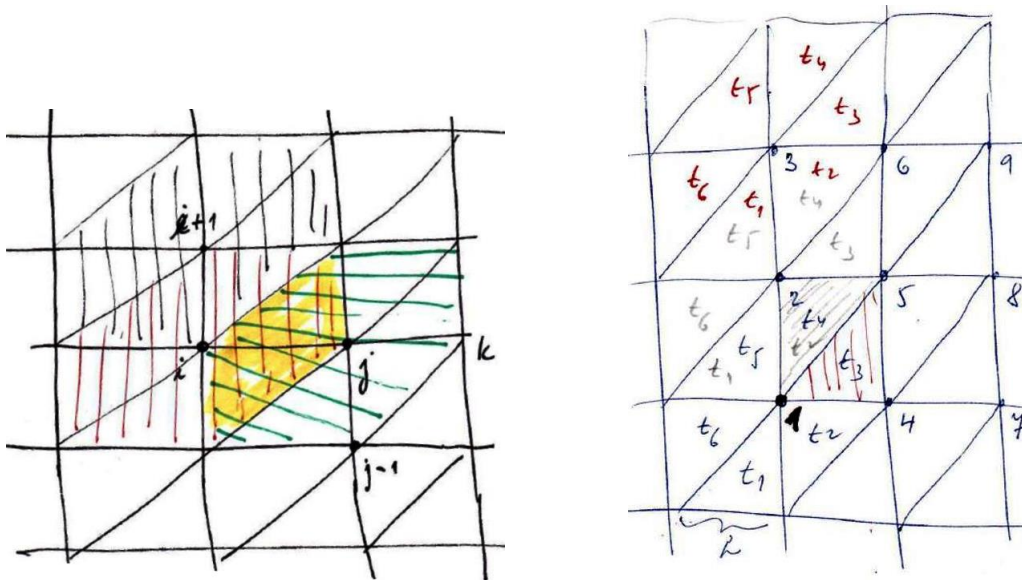
$$\begin{aligned} \Phi_i(P_i) &= 1, \\ \Phi_i(P_j) &= 0 \text{ pro } i \neq j, \\ \Phi_i(\mathbf{x}) &= \alpha x + \beta y + \gamma \text{ lineární } \forall \mathbf{x} = (x, y) \in \mathcal{K} \in \mathcal{T}_h. \end{aligned}$$



Obrázek 7: Bázové funkce prostoru S_h v rovině.



Obrázek 8: Triangulace pro příklad 7.1 a $h = 0,2$



Obrázek 9: Vlevo číslování vnitřních bodů, vpravo číslování trojúhelníků.

Například necht' $i = 1$. Pak nosič $\text{supp}(\Phi_1) = t_1 \cup t_2 \cup t_3 \cup t_4 \cup t_5 \cup t_6$.

Zkoumejme bázové funkce na jednotlivých trojúhelnících. Počítejme:

na t_1 :

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ \Phi_1(0, 0) &= 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ \Phi_1(0, 2; 0) &= 0 \Rightarrow 0,5\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ \Phi_1(0, 2; 0, 2) &= 1 \Rightarrow \beta = 5 \\ \Phi_1(x, y)|_{t_1} &= 5y \end{aligned}$$

na t_2 :

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ \Phi_1(0, 2; 0) &= 0 \Rightarrow 0,2\alpha + \gamma = 0 \\ \Phi_1(0, 4; 0, 2) &= 0 \Rightarrow 0,4\alpha + 0,2\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_1(0, 2; 0, 2) &= 1 \Rightarrow 0,2\alpha + 0,2\beta + \gamma = 1 \\ \Phi_1(x, y)|_{t_2} &= -5x + 5y + 1 \end{aligned}$$

na t_3 :

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ \Phi_1(0, 2; 0, 2) &= 1 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 5 \\ \Phi_1(0, 4; 0) &= 0 \Rightarrow 0,4\alpha + \gamma = 0 \\ \Phi_1(0, 4; 0, 4) &= 0 \Rightarrow 0,4\alpha + 0,4\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_1(x, y)|_{t_3} &= -5x + 2 \end{aligned}$$

na t_4 :

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ \Phi_1(0, 2; 0, 2) &= 1 \Rightarrow 0,2\alpha + 0,5\beta + \gamma = 1 \\ \Phi_1(0, 4; 0, 4) &= 0 \Rightarrow 0,4\alpha + 0,4\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_1(0, 2; 0, 4) &= 0 \Rightarrow 0,2\alpha + 0,4\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_1(x, y)|_{t_4} &= -5y + 2 \end{aligned}$$

na t_5 :

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, y) &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ \Phi_1(0, 2; 0, 2) &= 1 \Rightarrow 0, 2\alpha + 0, 2\beta + \gamma = 1 \\ \Phi_1(0, 2; 0, 4) &= 0 \Rightarrow 0, 5\alpha = 0 + 0, 4\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_1(0; 0, 2) &= 0 \Rightarrow 0, 2\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_1(x, y)|_{t_5} &= 5x - 5y + 1\end{aligned}$$

na t_6 :

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, y) &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ \Phi_1(0; 0) &= 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ \Phi_1(0, 2; 0, 2) &= 1 \Rightarrow 0, 2\alpha + 0, 2\beta = 1 \\ \Phi_1(0; 0, 2) &= 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ \Phi_1(x, y)|_{t_6} &= 5x\end{aligned}$$

Na všech ostatních trojúhelnícih oblasti Ω je funkce Φ_1 nulová:

$$\Phi_1|_{\Omega \setminus \text{supp}(\Phi_1)} = 0.$$

Nechť nyní $i = 2$. Pak opět $\text{supp}(\Phi_2) = t_1 \cup t_2 \cup t_3 \cup t_4 \cup t_5 \cup t_6$, ale souřadnice vrcholů jednotlivých trojúhelníků jsou jiné. Nakreslete si.

na t_1 :

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, y) &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ \Phi_2(0; 0, 2) &= 0 \Rightarrow 0, 2\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_2(0, 2; 0, 2) &= 0 \Rightarrow 0, 2\alpha + 0, 2\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_2(0, 2; 0, 4) &= 1 \Rightarrow 0, 2\alpha + 0, 4\beta + \gamma = 1 \\ \Phi_2(x, y)|_{t_1} &= 5y - 1\end{aligned}$$

na t_2 :

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, y) &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ \Phi_2(0, 2; 0, 2) &= 0 \Rightarrow 0, 2\alpha + 0, 2\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_2(0, 4; 0, 4) &= 0 \Rightarrow 0, 4\alpha + 0, 4\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_2(0, 2; 0, 4) &= 1 \Rightarrow 0, 2\alpha + 0, 4\beta + \gamma = 1 \\ \Phi_2(x, y)|_{t_2} &= -5x + 5y\end{aligned}$$

na t_3 :

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, y) &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ \Phi_2(0, 2; 0, 4) &= 1 \Rightarrow 0, 2\alpha + 0, 4\beta + \gamma = 1 \\ \Phi_2(0, 4; 0, 4) &= 0 \Rightarrow 0, 4\alpha + 0, 4\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_2(0, 4; 0, 6) &= 0 \Rightarrow 0, 4\alpha + 0, 6\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_2(x, y)|_{t_3} &= -0, 5x + 2\end{aligned}$$

na t_4 :

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, y) &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ \Phi_2(0, 2; 0, 4) &= 1 \Rightarrow 0, 2\alpha + 0, 4\beta + \gamma = 1 \\ \Phi_2(0, 4; 0, 6) &= 0 \Rightarrow 0, 4\alpha + 0, 6\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_2(0, 2; 0, 6) &= 0 \Rightarrow 0, 2\alpha + 0, 6\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_2(x, y)|_{t_4} &= 10x + 5y + 1\end{aligned}$$

na t_5 :

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, y) &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ \Phi_2(0; 0, 4) &= 0 \Rightarrow 0, 4\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_2(0, 2; 0, 4) &= 1 \Rightarrow 0, 2\alpha + 0, 4\beta + \gamma = 1 \\ \Phi_2(0, 2; 0, 6) &= 0 \Rightarrow 0, 2\alpha + 0, 6\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_2(x, y)|_{t_5} &= 5x - 5y + 2\end{aligned}$$

na t_6 :

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, y) &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ \Phi_2(0; 0, 2) &= 0 \Rightarrow 0, 2\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_2(0, 2; 0, 4) &= 1 \Rightarrow 0, 2\alpha + 0, 4\beta + \gamma = 1 \\ \Phi_2(0; 0, 4) &= 0 \Rightarrow 0, 4\beta + \gamma = 0 \\ \Phi_2(x, y)|_{t_6} &= 5x\end{aligned}$$

Na všech ostatních trojúhelnících oblasti Ω je funkce Φ_2 nulová:

$$\Phi_2|_{\Omega \setminus \text{supp}(\Phi_2)} = 0.$$

Takto projdeme všech 16 vnitřních bodů oblasti Ω a vypočteme všech 16 bázových funkcí Φ_1, \dots, Φ_{16} .

Hledané řešení je lineární kombinací bázových funkcí:

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M_h} \alpha_i \Phi_i(\mathbf{x}), \quad \alpha_i = u_h(P_i).$$

Dosadíme do variační formulace (68), (69):

$$\sum_{j=1}^{M_h} \alpha_j a(\Phi_j, \Phi_i) = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, M_h.$$

Maticově:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\mathbf{b}},$$

kde $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{M_h}$ je matice tuhosti, $a_{ij} = a(\Phi_j, \Phi_i)$, vektor pravé strany $\vec{\mathbf{b}} = (b_i)_{i=1}^{M_h} = (f, \Phi_i)$ je vektor "zatížení" a vektor $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{M_h})^T$ je vektor neznámých.

Matice \mathbf{A} je symetrická, pozitivně definitní, tedy soustava má právě jedno řešení v S_h . Pro jemnou síť a vhodné očíslování uzlů je \mathbf{A} velká řídká matice. Soustavu lze tedy výhodně řešit speciálními metodami pro řídké matice.

Naznačme výpočet prvků matice tuhosti a vektoru pravé strany pro bázovou funkci Φ_1 :

$$a_{11} = a(\Phi_1, \Phi_1) = \int_{\Omega} \text{grad } \Phi_1 \cdot \text{grad } \Phi_1 dx dy = \sum_{i=1}^6 \int_{t_i} \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{t_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \Big|_{t_i} \right)^2 \right] dx dy.$$

$$L(\Phi_1) = \int_{\Omega} f \Phi_1 dx dy = \sum_{i=1}^6 \int_{t_i} \left(f \Phi_1 \Big|_{t_i} \right) dx dy.$$

Na jednotlivých trojúhelnících spočítáme jednotlivé dvojně integrály, které sečteme a dostaneme prvek matice \mathbf{A} :

na t_1

$$\int_{t_1} 25 dx dy = \int_0^{0,2} \left(\int_0^x 25 dy \right) dx = \int_0^{0,2} 25x dx = 0,5,$$

na t_2

$$\int_{t_2} [(-5)^2 + 5^2] dx dy = 50 \int_{t_2} dx dy = 50 \int_{0,2}^{0,4} \left(\int_{x-0,2}^{0,2} dy \right) dx = 1.$$

Takto spočítáme všechny potřebné dvojně integrály pro všechny báze funkce a dostaneme prvky matice \mathbf{A} a obdobně i pravou stranu $\vec{\mathbf{b}}$.

Proces je to poněkud zdouhavý, protože pro každou báze funkci počítáme integrály na šesti trojúhelnících. Zkusme jiný postup. Vezměme báze funkci Φ_1 a jeden trojúhelník, např. t_3 (na obrázku 9 vpravo červeně vyšrafovaný). Jaké báze funkce jsou na t_3 nenulové? Jsou to funkce $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_4(x, y)$, $\Phi_5(x, y)$. Do kterých prvků matice \mathbf{A} a pravé strany $\vec{\mathbf{b}}$ tyto funkce přispívají? Připomeňme, že matice \mathbf{A} je symetrická.

$$\begin{array}{ll} a(\Phi_1, \Phi_1) \mapsto a_{11} & \\ a(\Phi_1, \Phi_4) \mapsto a_{41} = a_{14} & (f, \Phi_1) \mapsto b_1 \\ a(\Phi_1, \Phi_5) \mapsto a_{51} = a_{15} & (f, \Phi_4) \mapsto b_4 \\ a(\Phi_4, \Phi_4) \mapsto a_{44} & (f, \Phi_5) \mapsto b_5 \\ a(\Phi_4, \Phi_5) \mapsto a_{54} = a_{45} & \\ a(\Phi_5, \Phi_5) \mapsto a_{55} & \end{array}$$

Obdobně na t_4 jsou nenulové báze funkce $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_5(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ (vrcholy procházíme proti směru hodinových ručiček). Kam přispívají tyto báze funkce?

$$\begin{array}{ll} a(\Phi_1, \Phi_1) \mapsto a_{11} & \\ a(\Phi_1, \Phi_5) \mapsto a_{51} = a_{15} & (f, \Phi_1) \mapsto b_1 \\ a(\Phi_1, \Phi_2) \mapsto a_{21} = a_{12} & (f, \Phi_5) \mapsto b_5 \\ a(\Phi_5, \Phi_2) \mapsto a_{25} = a_{52} & (f, \Phi_2) \mapsto b_2 \\ a(\Phi_5, \Phi_5) \mapsto a_{55} & \\ a(\Phi_2, \Phi_2) \mapsto a_{22} & \end{array}$$

Po projití trojúhelníků t_1 a t_2 máme v matici \mathbf{A} a ve vektoru $\vec{\mathbf{b}}$ uloženy hodnoty

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{11} & a_{12} & \circ & a_{14} & a_{15} + a_{15} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \circ & \circ & a_{25} & \dots \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \dots \\ a_{41} & \circ & \circ & a_{44} & a_{45} & \dots \\ a_{51} + a_{51} & a_{52} & \circ & a_{54} & a_{55} + a_{55} & ((ots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 + b_1 \\ b_2 \\ \circ \\ b_4 \\ b_5 + b_5 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Takto projdeme všech šest trojúhelníků, které tvoří nosič báze funkce Φ_1 a zapíšeme příspěvky příslušné bilineární formy do matice tuhosti.

Výsledná složka a_{11} matice \mathbf{A} je

$$a_{11} = a_{11}^{(1)} + a_{11}^{(2)} + a_{11}^{(3)} + a_{11}^{(4)} + a_{11}^{(5)} + a_{11}^{(6)},$$

horní index značí číslo trojúhelníka.

Celý proces opakujeme s bázovými funkcemi $\Phi_2 \dots, \Phi_{16}$. Každá z nich má opět nosič, který je sjednocením šesti trojúhelníků.

Poznámka 7.1 *Poznámka k výpočtu integrálů: Integrály*

$$a(\Phi_j, \Phi_i) = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{K}} \nabla \Phi_j \nabla \Phi_i dx$$

$$(f, \Phi_i) = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h} \int_{\mathcal{K}} f \Phi_i dx$$

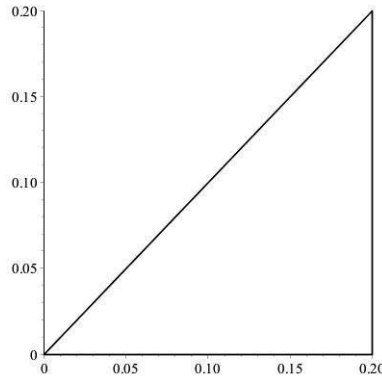
obvykle nepočítáme přesně, a to dokonce i když formule pro $a(\cdot, \cdot)$ a f jsou jednoduché. Obvykle používáme k jejich aproximaci nějakou kvadraturní formuli, např.

$$\int_{\mathcal{K}} g_{\mathcal{K}} dx \approx |\mathcal{K}| \cdot g_{\mathcal{K}}(P_k),$$

kde $|\mathcal{K}|$ je plocha trojúhelníka \mathcal{K} a P_k je těžiště (souřadnice) \mathcal{K} , t.j. má-li trojúhelník souřadnice $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ a $C = (c_1, c_2)$, pak těžiště má souřadnice

$$P_k = \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right).$$

V našem konkrétním příkladu má trojúhelník t_1 souřadnice $A = [0, 0]$, $B = [0, 2; 0]$, $C = [0, 2; 0, 2]$, $|\mathcal{K}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50}$, $P_k = [\frac{2}{15}, \frac{1}{15}]$, $\Phi_1(x, y)|_{t_1} = 5y$, $\text{grad } \Phi_1|_{t_1} = 5$.



Pak

$$a(\Phi_1, \Phi_1)|_{t_1} = \int_{t_1} \text{grad } \Phi_1|_{t_1} \cdot \text{grad } \Phi_1|_{t_1} dx dy = 25 \int_{t_1} dx dy = 0,5.$$

Zde je tedy konkrétně $g_{\mathcal{K}}(x, y) = \nabla \Phi_1|_{\mathcal{K}} \nabla \Phi_1|_{\mathcal{K}}$. Postup aplikujeme na libovolné $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_h$.

8 Konstrukce prostoru konečných prvků

Variační úloha:

$$\begin{aligned} &? u \in H \quad (H \dots \text{Hilbertův}) \\ &a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \quad (\text{např. } V = H_0^1) \end{aligned} \tag{70}$$

kde $a(u, v)$ je nějaká bilineární forma a F je lineární spojitý funkcionál na V .
Konstruujeme prostor $S \subset V$, $\dim S < \infty$. Co musíme vědět?

1. Jak vypadají funkce z S na dané podmnožině?
2. Jak tyto funkce najdeme?
3. Jak se restrikce funkcí na dvou sousedních "elementech" chovají na společné hranici?

Definice 8.1 Konečný prvek (Ciarlet 1978) *Nechť*

- (i) $K \subseteq \mathbb{R}^n$ je omezená, uzavřená množina s neprázdným vnitřkem a s po částech hladkou hranicí (element domain)
- (ii) \mathcal{P} je konečnědimenzionální prostor funkcí na K (prostor tvarových funkcí – shape functions)
- (iii) $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_k\}$ je báze \mathcal{P}' (omezené (spojité) lineární funkcionály nad \mathcal{P}). $\mathcal{N} =$ množina uzlových proměnných.

Pak (trojice) $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ se nazývá **konečný prvek**.

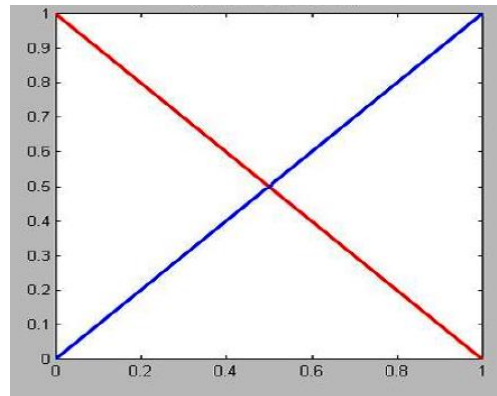
Báze $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k\}$ prostoru \mathcal{P} taková, že $N_i(\Phi_j) = \delta_{ij}$ se nazývá **uzlová báze** \mathcal{P} .

Příklad 8.1 *Jednodimenzionální Lagrangeův prvek*

Konečný prvek $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$, kde $K = \langle 0, 1 \rangle$, \mathcal{P} je množina lineárních polynomů jedné proměnné, $\mathcal{N} = \{N_1, N_2\}$, kde $N_1(v) = v(0)$, $N_2(v) = v(1) \forall v \in \mathcal{P}$

Pak $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ je konečný prvek s uzlovou bází $\{\Phi_1, \Phi_2\}$,

$$\Phi_1(x) = 1 - x, \quad \Phi_2(x) = x.$$



Co je $N_1(v)$, $N_2(v)$ $v \in \mathcal{P}$, kde $v = \alpha(1 - x) + \beta x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$?

$$N_1(v) = N_1(\alpha(1 - x) + \beta x) = \alpha \cdot N_1(1 - x) + \beta N_1(x) = \alpha_1 N_1(\Phi_1(x)) + \beta N_1(\Phi_2(x)) = \alpha \quad \forall v \in \mathcal{P}$$

$$N_2(v) = N_2(\alpha(1 - x) + \beta x) = \alpha \cdot N_2(1 - x) + \beta N_2(x) = \alpha_1 N_2(\Phi_1(x)) + \beta N_2(\Phi_2(x)) = \beta \quad \forall v \in \mathcal{P}$$

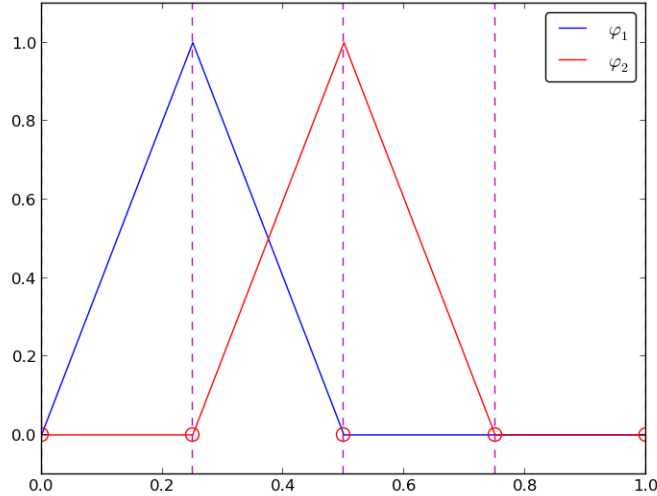
$\alpha, \beta \dots$ koeficienty lineární kombinace Φ_1, Φ_2 .

Obecně jednodimenzionální Lagrangeův prvek je prvek $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N}_k)$, kde $K = \langle a, b \rangle$, \mathcal{P} je množina po částech lineárních polynomů jedné proměnné, $\mathcal{N}_k = \{N_0, N_1, \dots, N_k\}$,

$$N_i(v) = v \left(a + \frac{i(b-a)}{k} \right), \quad i = 0, \dots, k, \quad \forall v \in \mathcal{P}_k.$$

Poznamenejme, že množina bodů

$$\left\{ a + \frac{i(b-a)}{k}, \quad i = 0, \dots, k \right\} = \left\{ a, a + h, a + 2h, \dots, a + kh = b, \quad h = \frac{b-a}{k} \right\}.$$



Jak vypadá báze $\mathcal{P} = \{\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_k(x)\}$?

$$\Phi_1(a) = 0, \quad \Phi_1(a+h) = 1, \quad \Phi_1(a+2h) = \dots = \Phi_1(b) = 0,$$

$$\Phi_2(a) = 0, \quad \Phi_2(a+h) = 0, \quad \Phi_2(a+2h) = 1, \quad \Phi_2(a+3h) = \dots = \Phi_2(b) = 0, \quad \text{atd.}$$

přičemž bázové funkce $\Phi_i(x)$ jsou po částech lineární,

$$\Phi_i(x) = \alpha_i x + \beta_i \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad \forall x \in K = \langle a, b \rangle.$$

Pak

$$v \in \mathcal{P} \implies v = \sum_{i=1}^k \alpha_i \Phi_i, \quad \alpha_1 = v(a), \quad \alpha_i = v\left(a + \frac{i(b-a)}{k}\right), \quad i = 2, \dots, k.$$

8.1 Trojúhelníkové konečné prvky

Nechť K je libovolný trojúhelník, $\mathcal{P}_k =$ množina všech polynomů ve dvou proměnných stupně $\leq k$ (tzv. **funkce tvaru, shape functions**).

k	Polynomy \mathcal{P}_k	Báze \mathcal{P}_k	$\dim \mathcal{P}_k$
1	$ax + by + c$	$\{x, y, 1\}$	3
2	$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$	$\{x^2, xy, y^2, x, y, 1\}$	6
3	$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 +$ $+ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + j$	$\{x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^2, xy, y^2, x, y, 1\}$	10

Obecně pro dané k je $\dim \mathcal{P}_k = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$.

Příklady trojúhelníkových elementů:

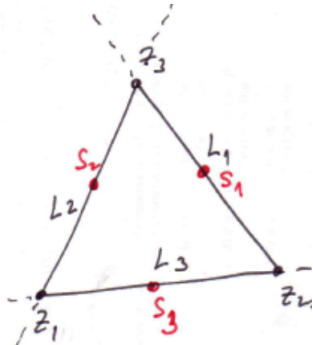
- **Lagrangeův element**

$k = 1 \implies S_h = \mathcal{P}_1 =$ polynomy stupně nejvýše 1, $\dim \mathcal{P}_1 = 3$, Množinu uzlů na jednom elementu určuje (lineární) polynom:

$$\mathcal{N}_1 = \{\underbrace{N_1, N_2, N_3}_{\text{Lagrangeovy}}\} : N_i(v) = v(z_i), \text{ kde } z_1, z_2, z_3 \text{ jsou vrcholy } \Delta K.$$

uzly (uzlové proměnné) = báze \mathcal{P}'_1

Označme L_1, L_2, L_3 lineární funkce, které definují přímky, na nichž leží strany trojúhelníka.



$$\begin{aligned} \text{báze } \mathcal{P}_1 &= \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\} \\ v \in \mathcal{P}_1 &\Rightarrow v(x, y) = \\ &\alpha_1 \Phi_1(x, y) + \alpha_2 \Phi_2(x, y) + \alpha_3 \Phi_3(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= 1, & \Phi_1(z_2) &= 0, & \Phi_1(z_3) &= 0 \\ \Phi_2(z_1) &= 0, & \Phi_2(z_2) &= 1, & \Phi_2(z_3) &= 0 \\ \Phi_3(z_1) &= 0, & \Phi_3(z_2) &= 0, & \Phi_3(z_3) &= 1 \end{aligned}$$

Tedy

$$v(z_1) = \alpha_1 \Phi_1(z_1) + \alpha_2 \Phi_2(z_1) + \alpha_3 \Phi_3(z_1) = \alpha_1.$$

Obecně je

$$v(z_i) = \alpha_i \quad \forall v \in \mathcal{P}_1.$$

- Jiný výběr uzlových bodů: středy stran • - tzv. **Crouzeix-Raviartův prvek**

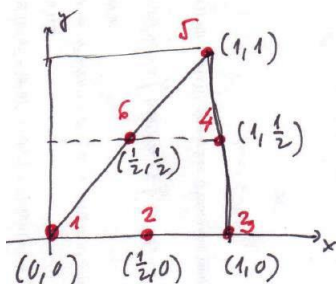
$\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 \Rightarrow \dim \mathcal{P}_2 = 6 \Rightarrow$ potřebujeme 6 rovnic k nalezení všech koeficientů.

$S_h \dots$ po částech kvadratické funkce, kvadratický Lagrangeův trojúhelník.

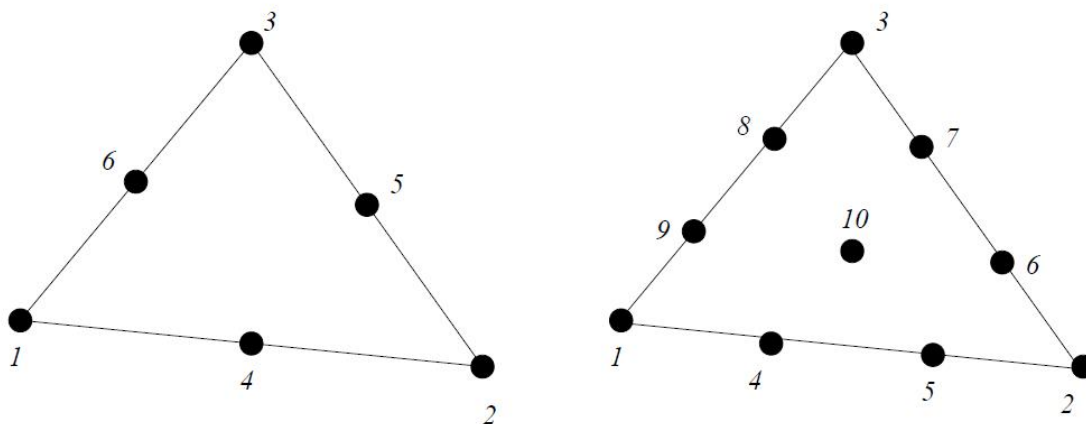
$\mathcal{P} = \mathcal{P}_3 \Rightarrow \dim \mathcal{P}_3 = 10 \Rightarrow$ potřebujeme 10 rovnic k nalezení všech koeficientů.

$S_h \dots$ po částech kubické funkce, kubický Lagrangeův trojúhelník.

Příklad 8.2 *Kvadratický Lagrangeův trojúhelník*



$$\begin{aligned} P(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \\ \Phi_1, \dots, \Phi_6 &\text{ báze funkce } \mathcal{P}. \\ \Phi_1(0, 0) &= 1, \quad v \text{ ostatních uzlech} = 0 \\ &\vdots \\ \text{atd. projdu body } &1 \dots 6. \end{aligned}$$



Obrázek 10: Vlevo: kvadratický Lagrangeův trojúhelník, vpravo: kubický Lagrangeův trojúhelník (desátý může být libovolný vnitřní bod trojúhelníka).

Konkrétně:

$$\begin{aligned}
 (0, 0) \quad \Phi_1(0, 0) &= 1 \Rightarrow f = 1 \\
 (\frac{1}{2}, 0) \quad \Phi_1(\frac{1}{2}, 0) &= 0 \Rightarrow a + 2d + 4 = 0 \\
 (1, 0) \quad \Phi_1(1, 0) &= 0 \Rightarrow a + d + 1 = 0 \\
 (1, \frac{1}{2}) \quad \Phi_1(1, \frac{1}{2}) &= 0 \Rightarrow 4a + 2b + c + 4d + 2e + 4 = 0 \\
 (1, 1) \quad \Phi_1(1, 1) &= 0 \Rightarrow a + b + c + d + e + 1 = 0 \\
 (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad \Phi_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= 0 \Rightarrow a + b + c + 2d + 2e + 4 = 0
 \end{aligned}$$

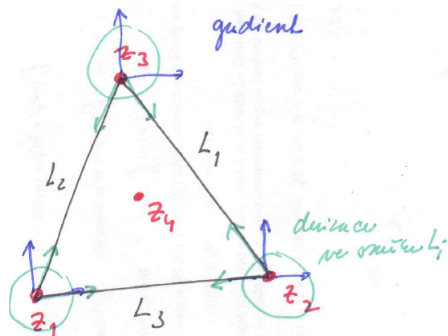
Tuto soustavu šesti rovnic pro šest neznámých koeficientů vyřešíme a dostaneme

$$\Phi_1(x, y) = 2x^2 - 3x + 1.$$

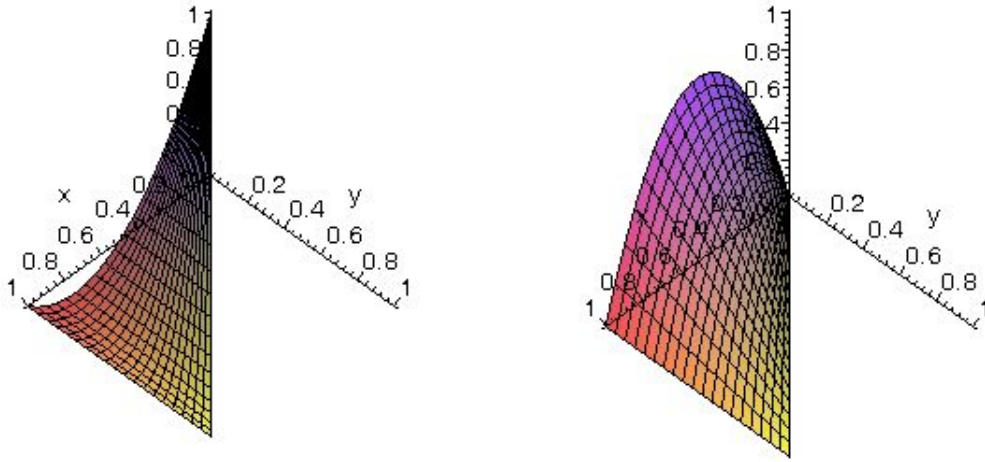
Obdobně

$$\begin{aligned}
 \Phi_2(x, y) &= -4x^2 + 4xy + 4x - 4y \\
 \Phi_3(x, y) &= 2x^2 - 4xy + 2y^2 - x + y \\
 \Phi_4(x, y) &= 4xy - 4y^2 \\
 \Phi_5(x, y) &= -xy + 2y^2 - y \\
 \Phi_6(x, y) &= -4xy + 4y
 \end{aligned}$$

• **Kubický Hermiteův prvek**



$\Phi_i(x, y) \dots$ bázové funkce
 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_3 \dots$ polynomy stupně nejvýše 3 (10 rovnic):
 4 rovnice - hodnoty ve vrcholech a v těžišti
 +2 · 3 rovnice - vyčíslení gradientu (2 rovnice) v bodech z_1, z_2, z_3



Obrázek 11: Kvadratické elementy

Označme L_1, L_2, L_3 netriviální lineární funkce, které definují hrany trojúhelníka. Pak pro restrikci $\Phi_1|_{L_1}$ je $\Phi_1(z_2) = 0, \Phi_1(z_3) = 0$ a pro derivace ve směru \vec{L}_1 je

$$D\Phi_1(z_2, \vec{L}_1) = \text{grad}(\Phi_1 \cdot \vec{L}_1) = 0, \quad D\Phi_1(z_3, \vec{L}_1) = 0$$

Tedy 4 rovnice z deseti jsou identicky nulové a výpočet je nejednoznačný.

Obecně pro Hermiteův prvek platí:

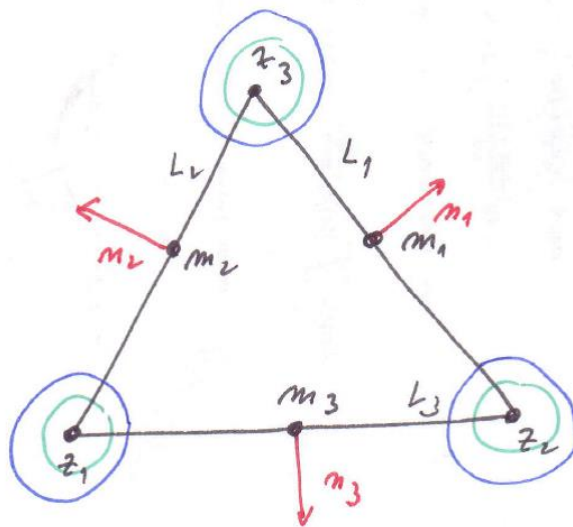
	$k=3$	$k=4$
3 rovnice ve vrcholech trojúhelníka	3	3
6 směrových derivací	6	6
$3(k-3)$ uzlů na hranici (stranách) \triangle	0	3
$\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ vnitřních uzlů	1	3
celkem rovnic	10	15

Pro $k = 4$ se element nazývá *kvartický Hermiteův trojúhelník*.

Poznamenejme, že $\dim P_k = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ stejně jako pro Lagrangeův element.

- *Kvintický Argyrisův trojúhelník*

$\mathcal{P} = P_5$, $\dim P_5 = 21$, tj. 21 stupňů volnosti \Rightarrow potřebují 21 rovnic.



3 rovnice ve vrcholech z_1, z_2, z_3	3
$3 \cdot 2$ rovnic - grad v bodech z_1, z_2, z_3	6
$3 \cdot 3$ rovnice - druhé derivace	9
3 derivace ve směru normály ve středech stran	3
celkem	21

8.2 Obdélníkové konečné prvky

Nechť

$$Q_k = \left\{ \sum_{i,j=0}^k c_{ij} p_i(x) q_j(y), \quad p_i, q_j \dots \text{polynomy st } \leq k \right\},$$

Tedy Q_k jsou polynomy $st \leq k$ ve dvou proměnných.

Lze ukázat, že

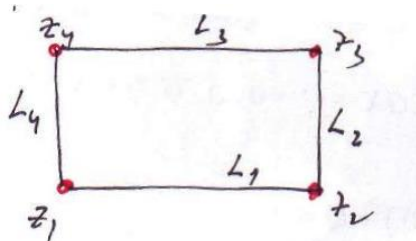
$$\dim Q_k = (\dim P_k^1)^2,$$

kde P_k^1 je prostor polynomů stupně menšího nebo rovného k v jedné proměnné.

Příklady obdélníkových elementů:

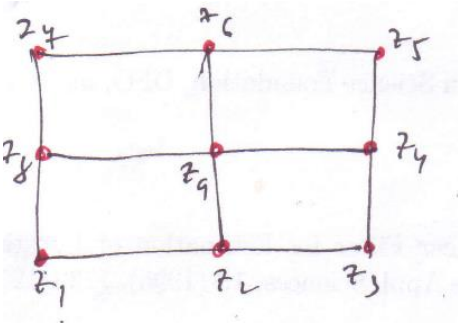
- **Tenzorové elementy**

– $k = 1$, K je libovolný obdélník, $\mathcal{P} = Q_1$



bilineární Lagrangeův obdélník
 $\Phi(x, y) = ax + by + cxy + d.$

– $k = 2$, K je libovolný obdélník, $\mathcal{P} = Q_2$, $\Phi(z_j) = \delta_{ij}$. K určení bázových funkcí potřebujeme 9 rovnic.



bikvadratický Lagrangeův obdélník

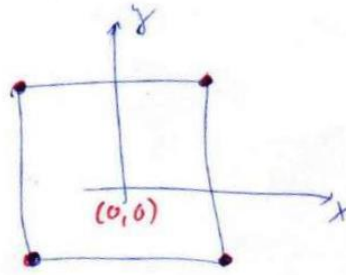
$$\Phi(x, y) = \underbrace{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f + gx^2y + hxy^2 + ux^2y^2}_{9 \text{ koeficientů} = 9 \text{ rovnic} = 9 \text{ uzlových bodů}}.$$

• Serendipity elementy

V serendipity elementech jsou uzly vybírány tak, aby ležely co nejvíce pouze na hranicích elementů.

Otcem slova serendipita (1754) je spisovatel Horáce Walpole a matkou perská pohádka "Tři princové ze Serendipu" (= Srí Lanka). Hrdinové této pohádky náhodou i prozíravostí objevili cenné věci, které nehledali.

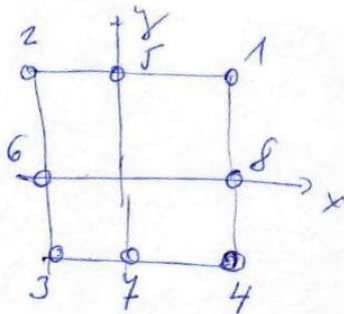
- Lineární dvoudimenzionální serendipity elementy - identické s bilineárními Lagrangeovými prvky



$$N(x, y) = ax + by + cxy + d$$

$$k = 1 : \begin{matrix} 1 \\ x & y \\ xy \end{matrix}$$

Kvadratické dvoudimenzionální serendipity elementy



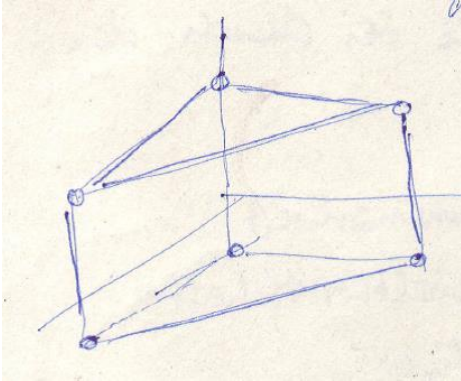
8 uzlů,
 $N(x, y) = ax^2y + bxy^2 + cx^2 + dxy + ey^2 + fx + gy + h$

$$k = 2 : \begin{matrix} 1 \\ x & y \\ x^2 & xy & y^2 \\ x^2y & xy^2 \end{matrix}$$

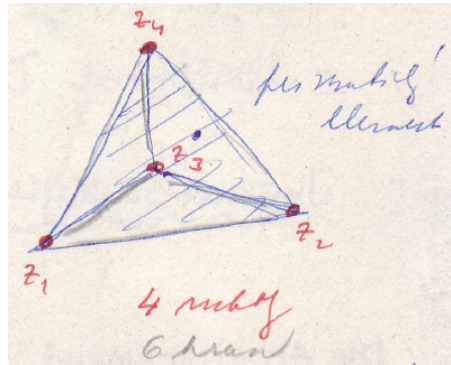
8.3 Třídímenzionální konečné prvky

Uzlové body volíme ve vrcholech, další pak uvnitř hran a vrcholy uvnitř stěn tak, abychom určili polynomy požadovaného stupně.

\mathcal{P}_k jsou polynomy $st \leq k$ ve třech proměnných.



kollmý hranol



prismatický element

Libovolný polynom P stupně k ve třech proměnných lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$P(x, y, z) = p(x, y) + zq(x, y, z), \quad st p = k \quad st q \leq k - 1.$$

Položíme $p(x, y) = P(x, y, 0)$ a pak $P - p$ rozložíme jako $z \cdot q$. Například

$$P(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 + z^2 \Rightarrow P(x, y, 0) = x^3 + xy + y^2 = p(x, y).$$

$$P(x, y, z) - p(x, y) = z^2 \Rightarrow q = z.$$

Indukcí lze dokázat, že

$$\dim P_k = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) + \dim P_{k-1} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k (j+1)(j+2).$$

$\dim P_k$ pro funkce 2 proměnných

Dimenze polynomů P_k $st k$ ve třech dimenzích:

k	polynomy P_k	báze	dim
1	$ax + by + cz + d$	$\{1, x, y, z\}$	4
2	$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f + gz^2 + hz + uxz + vyz$	$\{1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz\}$	10
3			20
4			35

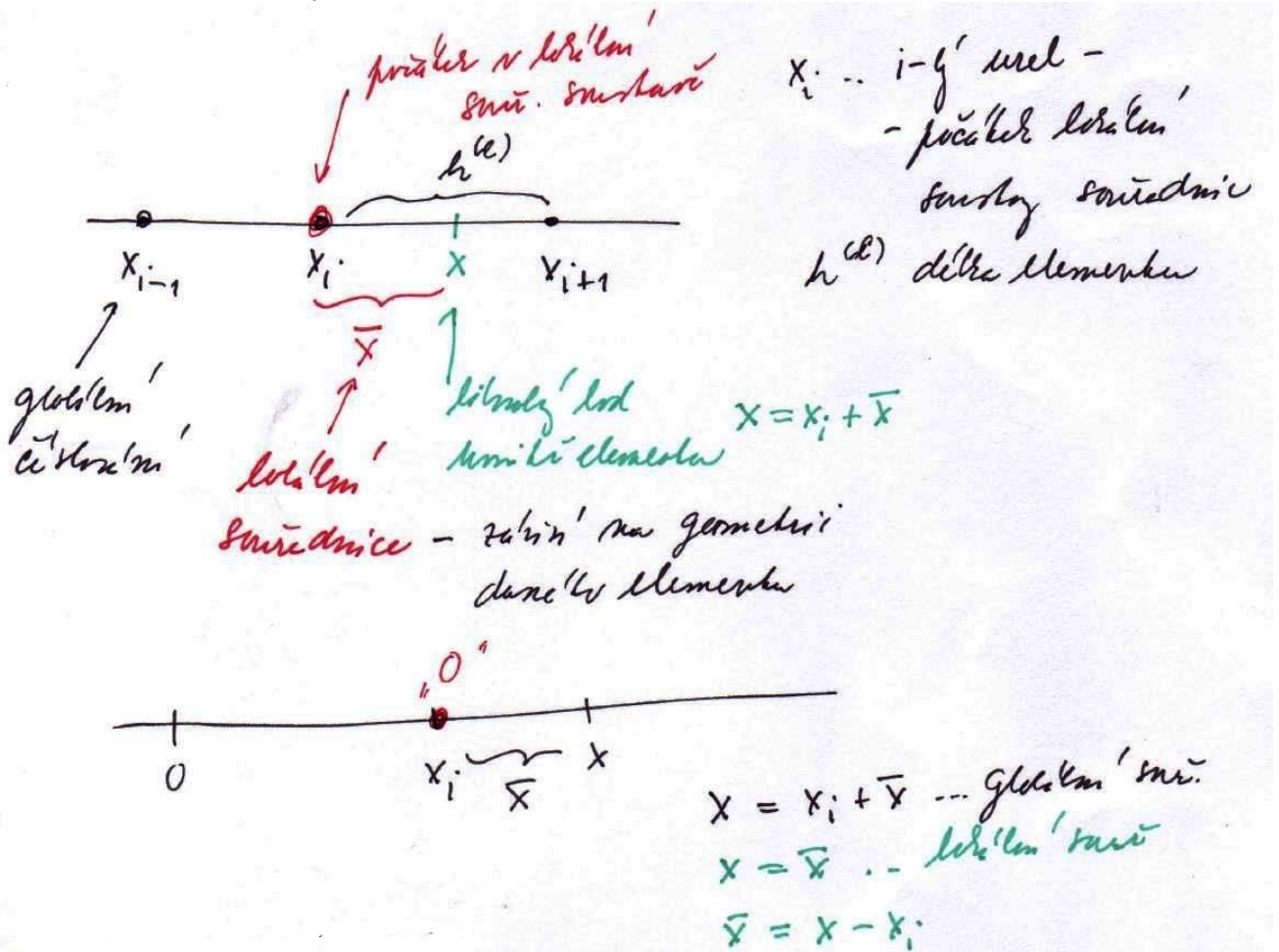
Poznámka 8.1 *Stěna = rovina*

$$ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}.$$

Dosadíme za z a dostaneme na každé stěně polynom v proměnných xy .

8.4 Zobrazení elementů

- Počátek souřadné soustavy v bodě x_i



- Jiný lokální systém souřadnic

Počátek souřadného systému je uprostřed elementu, tj. v bodě $x = \bar{x}$.

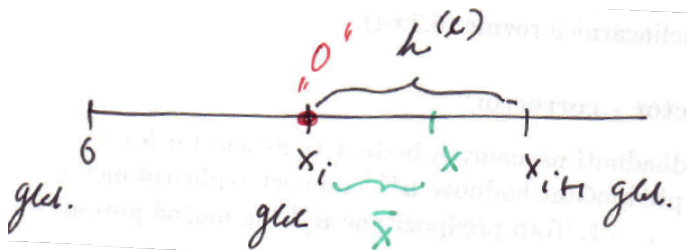
$x = x_i + \frac{1}{2}h^{(e)} + \bar{x} \dots$ globální souřadnice bodu x

$\bar{x} = x - x_i - \frac{1}{2}h^{(e)} \dots$ lokální souřadnice

- Přirozený souřadnicový systém** = lokální souřadnicový systém, který specifikuje bod uvnitř prvku bezrozměrným číslem λ , $|\lambda| < 1$ (často šité na míru integraci).

Jednodimenzionální přirozený souřadnicový systém

$h^{(e)}$... délka elementu



$$\lambda = \frac{\bar{x}}{h^{(\ell)}} = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \begin{array}{l} \lambda = 0 \Leftrightarrow x = x_i \\ \lambda = 1 \Leftrightarrow x = x_{i+1} \end{array} \quad (71)$$

Poznámka 8.2 $\lambda = 0$ *nový počátek*.

Ve formuli (71) nemusí jít o dva sousední uzly.

9 Eliptické parciální diferenciální rovnice

9.1 Dirichletova úloha

$$Au := -\nabla(a\nabla u) + b\nabla u + cu = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma = \partial\Omega,$$

$a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$ jsou hladké funkce na $\bar{\Omega}$, $a(x) \geq a_0 > 0$, $c(x) - \frac{1}{2}\nabla b(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$, f daná funkce, $f \in L_2(\Omega)$.

Speciální případy:

$$-\Delta u = 0 \dots \text{Laplaceova rovnice}$$

$$-\Delta u = f \neq 0 \dots \text{Poissonova rovnice}$$

10 Parabolické parciální diferenciální rovnice

Řešme nyní následující úlohu parabolického typu

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{v } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (71)$$

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \quad (72)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{v } \Omega. \quad (73)$$

Variační formulaci jako obvykle získáme tak, že rovnici (71) vynásobíme funkcí $\varphi = \varphi(x)$, takovou, že $\varphi \in C_0^1$, i.e φ je dostatečně hladká funkce, nulová na hranici Γ , zintegrujeme přes Ω a použijeme Greenovu formuli:

$$(u_t, \varphi) + a(u, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \text{kde}$$

$$a(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx, \quad (v, w) = \int_{\Omega} v w dx.$$

Naším cílem je tedy řešit variační úlohu: Hledáme $u = u(x, t) \in H_0^1(\Omega) \quad \forall t > 0$ tak, aby

$$(u_t, \varphi) + a(u, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$u(\cdot, 0) = v \quad \text{v } \Omega.$$

Opět lze ukázat, že je-li u klasické řešení, je u i slabé řešení. Naopak, je-li u slabé řešení a $u \in C^2(\Omega)$, $t > 0$, pak u je klasické řešení.

10.1 Metoda konečných prvků pro parabolickou rovnici

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená, konvexní oblast s hladkou hranicí Γ .

V prvním kroku aproximujeme řešení $u(x, t)$ funkcí $u_h(x, t)$, která je pro každé pevné t po částech lineární funkcí na triangulaci $\mathcal{T}_h = \{K\}$ oblasti Ω . Prostor S_h bude opět prostor spojitých, po trojúhelníkových lineárních funkcích, nulových na hranici Γ oblasti Ω . Jeho dimenze je rovna počtu vnitřních uzlů \mathcal{T}_h , označme tyto uzly $\{P_j\}_{j=1}^{M_h}$. Za bázi S_h zvolíme opět "stanové" funkce: $\{\Phi_i\}_{i=1}^{M_h} \subset S_h$, $\Phi_i(P_j) = \delta_{ij}$.

Uvedme nejprve slabou formulaci, při níž diskretizujeme naši úlohu pouze v proměnné x . Jde o tzv. prostorově semidiskrétní problém:

$$? u_h(t) = u_h(\cdot, t) \in S_h \quad \forall t \geq 0 :$$

$$((u_h)_t, \chi) + a(u_h, \chi) = (f, \chi) \quad \forall \chi \in S_h, \quad t > 0 \quad (74)$$

$$u_h(0) = v_h, \quad (75)$$

kde $v_h \in S_h$ je aproximace funkce v (viz. počáteční podmínka).

Ekvivalentně

$$? \text{ koeficienty } \alpha_j(t) : \quad u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{M_h} \alpha_j(t) \Phi_j(x) \quad \text{tak, aby}$$

$$\sum_{j=1}^{M_h} \alpha_j'(t) (\Phi_j, \Phi_k) + \sum_{j=1}^{M_h} \alpha_j(t) a(\Phi_j, \Phi_k) = (f(t), \Phi_k), \quad k = 1, \dots, M_h,$$

$$\alpha_j(0) = \gamma_j, \quad j = 1, \dots, M_h,$$

kde γ_j jsou uzlové hodnoty aproximace v_h funkce v (viz počáteční podmínka zadaná v čase $t = 0$). Maticově:

$$\mathbf{B}\alpha'(t) + \mathbf{A}\alpha(t) = \mathbf{b}(t), \quad t > 0, \quad (76)$$

$$\alpha(0) = \gamma, \quad (77)$$

kde $\mathbf{B} = (b_{kj})$, $b_{kj} = (\Phi_j, \Phi_k)$, je tzv. hmotová matice (mass matrix), $\mathbf{A} = (a_{kj})$, $a_{kj} = a(\Phi_j, \Phi_k)$ je příslušná matice tuhosti (stiffness matrix), $\mathbf{b} = (b_k)$, $b_k = (f, \Phi_k)$ je vektor pravé strany a konečně $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_{M_h}(t))^T$ je vektor hledaných koeficientů.

Poznamenejme, že v tomto případě jsou matice \mathbf{A} a \mathbf{B} symetrické, pozitivně definitní, tedy existuje \mathbf{B}^{-1} . Rovnice (76), (77) můžeme přepsat:

$$\alpha'(t) + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\alpha(t) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}(t), \quad t > 0,$$

$$\alpha(0) = \gamma,$$

Tato soustava má pro $t > 0$ jediné řešení.

Zmiňme se ještě krátce o několika metodách úplné diskretizace (v prostoru i v čase) naší parabolické úlohy.

1. Zpětná Eulerova-Galerkinova metoda

Nechť k je časový krok, $U^n \in S_h$ aproximace $u(t)$ v čase $t = t_n = n \cdot k$.

Metoda spočívá v nahrazení derivace $(u_h)_t$ v rovnici (74) zpětným diferencním kvocientem

$$\bar{\partial}_t U^n = k^{-1}(U^n - U^{n-1}),$$

což vede na úlohu

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_t U^n, \chi) + a(U^n, \chi) &= (f(t_n), \chi) \quad \forall \chi \in S_h, \quad n \geq 1, \\ U^0 &= v_h. \end{aligned}$$

Známe-li už U^{n-1} , vyjádříme U^n z této rovnice, a dále vyjádříme U^n pomocí báze S_h :

$$U^n(x) = \sum_{j=1}^{M_h} \alpha_j^n \Phi_j(x).$$

Pro n -tou iteraci vektoru α^n a pro počáteční aproximaci $\alpha^0 = \gamma$ dostaneme soustavu

$$(\mathbf{B} + k\mathbf{A})\alpha^n = \mathbf{B}\alpha^{n-1} + k\mathbf{b}^n, \quad n \geq 1.$$

Metoda je numericky stabilní bez ohledu na vztah mezi h a k .

2. Eulerova-Galerkinova metoda vpřed

Derivaci $(u_h)_t$ v rovnici (74) nahradíme diferencí vpřed:

$$\partial_t U^n = \frac{1}{k}(U^{n+1} - U^n).$$

Analogicky jako pro zpětnou metodu odvodíme výslednou rovnici pro n -tou iteraci:

$$\mathbf{B}\alpha^{n+1} = (\mathbf{B} - k\mathbf{A})\alpha^n + k\mathbf{b}^n, \quad n \geq 0.$$

Metoda není pro libovolnou volbu k a h numericky stabilní. Její stabilita závisí na největším vlastním čísle diskretního Jacobiánu.

3. Crank-Nicolson-Galerkinova metoda

Semidiskretní rovnice je diskretizována v čase symetricky kolem bodu

$$t_{n-\frac{1}{2}} = (n - \frac{1}{2})k.$$

11 Reakčně-difúzně-konvekční rovnice

V tomto odstavci se budeme zabývat numerickým řešením reakčně-difúzně-konvekčních rovnic, přesněji rovnic lineární konvekce a difuze s nelineární chemickou reakcí. Matematicky je časový vývoj chemických nebo biologických dějů popsán parciálními diferenciálními rovnicemi odvozenými obvykle z hmotnostní bilance.

Uvažujme koncentraci $u(x, t)$ chemické látky, kde $x \in \mathbb{R}$ je prostorová proměnná, $t \geq 0$ je časová proměnná. Nechť $h > 0$ je nějaké malé číslo. Uvažujme průměrnou koncentraci $\bar{u}(x, t)$ na intervalu $\langle x - \frac{1}{2}h, x + \frac{1}{2}h \rangle$,

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{h} \int_{x-\frac{1}{2}h}^{x+\frac{1}{2}h} u(s, t) ds = u(x, t) + \frac{1}{24} h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + \dots$$

Nechť se látka šíří médiem rychlostí $a(x, t)$. Z hmotnostní bilance dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x, t) = \frac{1}{h} \left[a\left(x - \frac{1}{2}h, t\right)u\left(x - \frac{1}{2}h, t\right) - a\left(x + \frac{1}{2}h, t\right)u\left(x + \frac{1}{2}h, t\right) \right].$$

Pak pro $h \rightarrow 0$ platí pro koncentraci

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (a(x, t)u(x, t)) = 0.$$

Tato rovnice se nazývá rovnicí konvekce.

Obdobně popíšeme efekt difúze. Rovnice difúze má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(d(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right),$$

kde $d(x, t)$ je difúzní koeficient.

Koncentrace $u(x, t)$ se také mění vlivem zdroje a chemické reakce, což zapíšeme jako

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = f(x, t, u(x, t)).$$

Zkombinujeme-li efekt konvekce, difúze a chemické reakce, dostaneme reakčně-difúzně-konvekční rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (a(x, t)u(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(d(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) + f(x, t, u(x, t)). \quad (78)$$

Budeme řešit rovnici (78) na intervalu $\Omega \in \mathbb{R}$ pro čas $t > 0$. Bude dána počáteční podmínka $u(x, 0)$ a vhodné okrajové podmínky.

Rovnici (78) obvykle zapisujeme ve tvaru (vynecháváme závislost u na x a parciální derivace zapisujeme pomocí indexů)

$$u_t + (au)_x = (du_x)_x + f(u). \quad (79)$$

V rovnici (79) předpokládáme, že koeficienty konvekce $a(x, t)$ a difúze $d(x, t)$ jsou dány a jsou nezávislé na koncentraci $u(x, t)$, a tedy konvekční a difúzní člen je lineární.

11.1 Modelová reakčně-difúzně-konvekční rovnice

Zkoumejme nejprve jednodimenzionální konvekčně-difúzní rovnici

$$u_t + au_x = du_{xx}, \quad (80)$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a $d \geq 0$ jsou konstanty, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, s počáteční podmínkou $u(x, 0) = u_0(x)$ a s periodickou okrajovou podmínkou

$$u(x \pm 1, t) = u(x, t). \quad (81)$$

S touto okrajovou podmínkou stačí řešit rovnici na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a pak "slepit" $x = 0$ a $x = 1$.

Poznamenejme, že je-li $u(x, t)$ koncentrace, pak integrál

$$M(t) = \int_0^1 u(x, t) dx$$

reprezentuje hmotu na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ v čase t . Řešení konvekčně-difúzní rovnice splňují princip maxima

$$\min_{0 \leq \xi \leq 1} u(\xi, 0) \leq u(x, t) \leq \max_{0 \leq \xi \leq 1} u(\xi, 0), \quad (82)$$

a tedy konkrétně je-li $u(x, 0) \geq 0$, pak $u(x, t) \geq 0$ pro všechna x .

Je-li v rovnici (80) $a = 0$, dostaneme tzv. rovnici vedení tepla.

V praktických aplikacích řešíme většinou vícedimenzionální úlohy s proměnlivými koeficienty. Například obdoba rovnice (80) ve třech dimenzích má tvar

$$u_t = (a_1 u)_x + (a_2 u)_y + (a_3 u)_z = (d_1 u_x)_x + (d_2 u_y)_y + (d_3 u_z)_z. \quad (83)$$

Budeme používat značení z klasické vektorové analýzy: $\underline{a} \cdot \underline{b}$ je Euklidovský skalární součin vektorů $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$,

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)^T, \quad \text{gradu} \equiv \nabla u = (u_x, u_y, u_z)^T,$$

divergence diferencovatelné vektorové funkce $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$

$$\text{div} \underline{a} \equiv \nabla \cdot \underline{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}.$$

Dále $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ je Laplaceův operátor,

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Vícedimenzionální konvekčně-difúzní rovnici (83) pak přepíšeme ve tvaru

$$u_t + \nabla \cdot (\underline{a}u) = \nabla \cdot (D\nabla u), \quad (84)$$

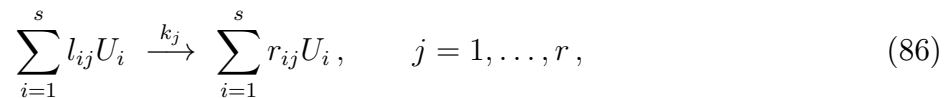
kde D je diagonální matice, $D = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$.

Je-li $a = 0$, pak difúzní rovnice

$$u_t = \nabla \cdot (D\nabla u) \quad (85)$$

je tzv. (vícedimenzionální) rovnice vedení tepla.

Uvažujme nyní r chemických reakcí mezi s prvky U_i , $i = 1, \dots, s$, s koncentracemi u_i . Předpokládejme, že s prvků reaguje současně v r reakcích



kde l_{ij} , r_{ij} jsou stoichiometrické koeficienty, $k_j > 0$ je řád chemické reakce a necht' rychlost j -té reakce

$$g_j(t, u) = k_j(t) \prod_{n=1}^s (u_n)^{l_{nj}},$$

je přímo úměrná součinu všech koncentrací na levé straně reakce. Pro všechny reakce prvku U_i dostaneme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$u_i'(t) = \sum_{j=1}^r (r_{ij} - l_{ij}) g_j(t, u(t)), \quad i = 1, \dots, s,$$

kteřou pro $u = (u_1, \dots, u_s)^T$ přepíšeme

$$u'(t) = Sg(t, u(t)), \quad u(0) \text{ dáno}, \quad (87)$$

kde S je $s \times r$ stoichiometrická matice a $g(t, u) = (g_j(t, u)) \in \mathbb{R}^r$.

Spojíme-li konvekčně-difúzní rovnici (84) s obecným reakčním systémem (87), dostaneme obecnou reakčně-difúzně-konvekční rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j + \nabla \cdot (\underline{a}_j u_j) = \nabla \cdot (D_j \nabla u_j) + f_j(u), \quad j = 1, \dots, s, \quad (88)$$

kde $\underline{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3})^T$ je vektor rychlostí pro koncentrace prvků u_j a D_j je odpovídající difúzní matice. Připomeňme, že $u = (u_1, \dots, u_s)^T$ reprezentuje vektor koncentrací prvků, a že s rovnic je "zkaplováno" nelineární chemickou reakcí.

Numerickým řešením těchto rovnic pomocí metody konečných prvků se nyní budeme zabývat.

11.2 Jednodimenzionální metoda konečných prvků

Připomeňme, že přibližná řešení diferenciálních rovnic získaná metodou konečných prvků jsou spojitá, a tedy umožňují zjistit přibližnou hodnotu řešení v libovolném bodě dané oblasti a na její hranici.

Nechť $w^h(x, t) \approx u(x, t)$ je taková aproximace řešení, že pro každé pevné t leží funkce $w^h(\cdot, t)$ v konečnědimenzionálním prostoru funkcí. Vybereme v tomto prostoru báze funkce $\varphi_j(x)$. Pak $w^h(x, t)$ je lineární kombinací těchto báze funkcí:

$$w^h(x, t) = \sum_j w_j(x) \varphi_j(x).$$

Báze funkce volíme jako po částech polynomiální funkce s kompaktním nosičem, [2], [8], [7]. Zde pro jednoduchost budeme obvykle volit báze funkce spojitě, po částech lineární.

11.2.1 Stacionární úlohy

Pro jednoduchost uvažujme nejprve konvekčně-difúzní časově nezávislou rovnici v jedné dimenzi

$$au_x = du_{xx} - cu + s(x), \quad 0 < x < 1, \quad (89)$$

s lineárním reakčním zdrojem $-cu + s(x)$ a konstantními koeficienty $a \in \mathbb{R}$, $d, c \geq 0$. Okrajové podmínky uvažujme například

$$u(0) = \gamma_0, \quad u_x(1) = 0. \quad (90)$$

Až dosud jsme se nezabývali prostorem funkcí, ve kterém hledáme řešení. Klasické řešení rovnice (89) by vyžadovalo řešení u se dvěma spojitými derivacemi na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Budeme řešit slabou formulaci problému, [7], [2], [8], [6], [3]. Vynásobíme rovnici (89) testovací funkcí v splňující $v(0) = 0$ a zintegrujeme per partes. Dostaneme

$$\int_0^1 (du_x(x)v_x(x) + au_x(x)v(x) + cu(x)v(x)) dx = \int_0^1 s(x)v(x) dx.$$

Toto lze jednoduše zapsat jako

$$[u, v] = (s, v),$$

kde skalární součin (\cdot, \cdot) a bilineární forma $[\cdot, \cdot]$ jsou definovány předpisem

$$(w, v) = \int_0^1 w v dx, \quad [w, v] = \int_0^1 (dw_x v_x + aw_x v + cvv) dx. \quad (91)$$

Prostorem funkcí, ve kterém je definován uvedený skalární součin (\cdot, \cdot) , je prostor $L_2[0, 1]$, což je prostor funkcí integrovatelných s kvadrátem na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, tj. funkcí v , pro které je $\int_0^1 v^2 dx < \infty$. Tyto funkce nemusí být spojité, ale pro jednoduchost budeme předpokládat, že jsou nespojité v nejvýše konečném počtu bodů intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Bilineární formu uvažujme na prostoru

$$\mathcal{H} = \{v : v \in C^0\langle 0, 1 \rangle, v_x \in L_2[0, 1]\}.$$

Toto je nejjednodušší příklad Sobolevova prostoru, viz odstavec 3.6.3. Další podrobnosti najde čtenář např. v [1], [3], [2], [7]. Nechť nyní

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{H} : v(0) = \gamma_0\}, \quad \mathcal{V}_0 = \{v \in \mathcal{H} : v(0) = 0\}. \quad (92)$$

Slabá formulace úlohy (89): hledáme $u \in \mathcal{V}$ tak, aby

$$[u, v] = (s, v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_0. \quad (93)$$

Řešení $u \in \mathcal{V}$ úlohy (93) je slabé řešení úlohy (89). Je-li $d(x) \geq d_0 > 0$ a $c(x) - \frac{1}{2}a'(x) \geq 0$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, $s \in L_2[0, 1]$, pak existuje právě jedno slabé řešení $u \in \mathcal{V}$ úlohy (93), viz odstavec 4.1.

Povšimněme si ještě speciálního případu, kdy v rovnici (89) je $a = 0$. Pak bilineární forma

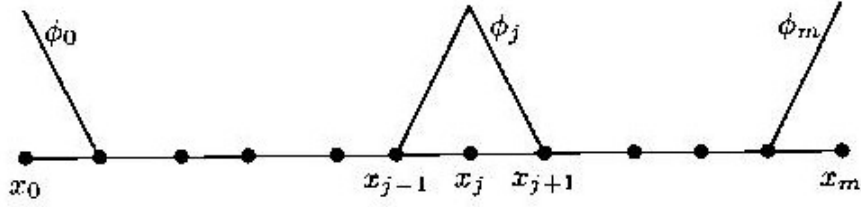
$$[w, v] = \int_0^1 (dw_x v_x + cvv) dx$$

je symetrická, pozitivně definitní, koercivní, omezená a indukuje na prostoru \mathcal{V}_0 energetickou normu (31), kterou později využijeme při odhadech chyby řešení, viz. (97).

Nechť $s \in L_2[0, 1]$. Je-li u klasickým řešením problému (89), (90), pak bude jistě splňovat rovnici (93), a tedy bude i slabým řešením. Naopak, je-li u dvakrát spojitě diferencovatelná funkce a splňuje rovnici (93), lze ukázat, že splňuje rovnice (89), (90), tedy dostatečně hladké slabé řešení je i klasickým řešením daného problému, [2], [6], [3], [7]. Zdůrazněme nicméně, že slabé řešení (93) nemusí být dvakrát spojitě diferencovatelné, stačí požadovat $u \in \mathcal{H}$.

Homogenní Neumannovu okrajovou podmínku $u_x(1) = 0$ v bodě $x = 1$ jsme využili pouze v integraci per partes při odvozování slabé formulace (93). Homogenní Neumannova okrajová podmínka se někdy nazývá přirozenou okrajovou podmínkou. Dirichletovy okrajové podmínky, které musí být zabudovány do definice aproximacího prostoru \mathcal{V}_0 , se obvykle nazývají esenciální okrajové podmínky. Kdybychom předpokládali nehomogenní Neumannovy okrajové podmínky, vznikl by nám při integraci per partes další člen na pravé straně rovnice (93).

Předpokládejme nyní, že numerická aproximace řešení w^h je po částech lineární. Nechť $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$, $x_0 = 0$, $x_m = 1$, jsou uzlové body sítě na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, \mathcal{H}^h je množina spojitých po částech lineárních funkcí na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, které jsou lineární na každém intervalu (x_j, x_{j+1}) . Uvažujme tzv. stanové funkce $\varphi_j(x) \in H^h$, $j = 1, \dots, m$, pro které platí, že $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$ (pro $i = j$ je $\delta_{ij} = 1$, pro $i \neq j$ je $\delta_{ij} = 0$). Tyto funkce generují konečnědimensionální prostor funkcí \mathcal{H}^h , [6], [3], [2], [7].



Stanové bázové funkce $\varphi_0, \dots, \varphi_m$

Nechť \mathcal{V}^h a \mathcal{V}_0^h je restrikce \mathcal{V} a \mathcal{V}_0 na prostor \mathcal{H}^h .

Numerická aproximace slabého řešení (93): hledáme $w^h \in \mathcal{V}^h$ tak, aby

$$[w^h, v^h] = (s, v^h) \quad \forall v^h \in \mathcal{V}_0^h. \quad (94)$$

Prostor \mathcal{V}^h a prostor testovacích funkcí \mathcal{V}_0^h jsou navzájem posunuty o γ_0 , jinak se neliší. Metoda konečných prvků s touto vlastností prostorů \mathcal{V}^h a \mathcal{V}_0^h se obecně nazývá Galerkinova (Bubnovova–Galerkinova) metoda.

Přepíšme nyní rovnici (94) pomocí bázových funkcí φ_j :

$$w^h(x) = \sum_{j=0}^m w_j \varphi_j(x),$$

a necht' testovací funkcí v_h je také funkce φ_j , $j = 1, \dots, m$. Z rovnice (94) dostaneme následující soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé koeficienty w_1, \dots, w_m :

$$\sum_{k=0}^m [\varphi_k, \varphi_j] w_k = (s, \varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (95)$$

s rovnicí pro splnění okrajové podmínky $w_0 = \gamma_0$.

Vypočt'eme prvky $[\varphi_k, \varphi_j]$. Je-li $|k - j| > 1$, pak $[\varphi_k, \varphi_j] = 0$. Pripust'eme, že dělení intervalu není rovnoměrné. Položme

$$\Delta_j = x_j - x_{j-1}, \quad h_j = \frac{1}{2}(\Delta_j + \Delta_{j+1}) = \frac{1}{2}(x_{j+1} - x_{j-1}).$$

Diskretizaci (derivate jsme nahradili centrálními diferencemi) ve vnitřních dělicích bodech intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ zapíšeme ve tvaru, [6]:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2h_j}(-w_{j-1} + w_{j+1}) - \frac{d}{h_j} \left(\frac{1}{\Delta_j} w_{j-1} - \left(\frac{1}{\Delta_j} + \frac{1}{\Delta_{j+1}} \right) w_j + \frac{1}{\Delta_{j+1}} w_{j+1} \right) + \\ + \frac{c}{6h_j}(\Delta_j w_{j-1} + 4h_j w_j + \Delta_{j+1} w_{j+1}) = \frac{1}{h_j}(s, \varphi_j). \end{aligned} \quad (96)$$

Předpokládáme-li, že také zdroj $s(x)$ je po částech lineární funkcí,

$$s(x) = \sum_k s_k \varphi_k(x),$$

pak na pravé straně rovnice (96) dostaneme

$$\frac{1}{h_j}(s, \varphi_j) = \frac{1}{6h_j}(\Delta_j s_{j-1} + 4h_j s_j + \Delta_{j+1} s_{j+1}).$$

Zmiňme se ještě o odhadech chyb řešení.
Nechť v rovnici (89) je $d > 0$ a $c \geq 0$. Pak

$$\|v\|_* = \left(\int_0^1 (dv_x^2 + cv^2) dx \right)^{1/2} \quad (97)$$

je energetická norma na prostoru \mathcal{V}_0 . Připomeňme, že $\|v\| = (v, v)^{1/2}$ je L_2 -norma funkce v . Lze ukázat, že bilineární forma $[\cdot, \cdot]$ je omezená:

$$[v, w] \leq C_1 \|v\|_* \|w\|_* \quad \forall v, w \in \mathcal{V}_0, \quad C_1 > 0, \quad (98)$$

a koercivní

$$[v, v] \geq C_2 \|v\|_*^2 \quad \forall v, w \in \mathcal{V}_0, \quad C_2 > 0. \quad (99)$$

Poznamenejme, že v případě $a = 0$ je v (98) a v (99) $C_1 = C_2 = 1$.

Protože v našem případě je $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ a $\mathcal{V}_0^h \subset \mathcal{V}_0$ říkáme, že naše metoda konečných prvků je konformní.

Pro odhad chyby platí v energetické normě odhad

$$\|u - w^h\|_* \leq \frac{C_1}{C_2} \min_{v^h \in \mathcal{V}^h} \|u - v^h\|_*, \quad (100)$$

tedy v energetické normě je pro chybu $u - w^h$ určující, jak dobře umíme u aproximovat ve \mathcal{V}^h . Konvergence v energetické normě je prvního řádu, výhodou našeho odhadu je, že platí i pro nerovnoměrné dělení. V L_2 normě lze dokázat konvergenci 2. řádu, [2], [3], [10], [7], [6], [1].

11.2.2 Časově závislé problémy

Uvažujme problém

$$u_t + au_x = du_{xx} - cu + s(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (101)$$

s danou počáteční podmínkou $u(x, 0)$ a s okrajovými podmínkami (90). Na člen u_t můžeme pohlížet jako na zdrojový člen, tj. jednoduše místo s dosadit $\bar{s} := s - u_t$. Pro $u(\cdot, t) \in \mathcal{V}$ pro všechna $t \in \langle 0, T \rangle$ dostaneme slabou formulaci problému (101)

$$(u_t, v) + [u, v] = (s, v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_0, \quad 0 < t \leq T. \quad (102)$$

Numerická aproximace $w^h(x, t)$ musí splňovat

$$(w_t^h, v^h) + [w^h, v^h] = (s, v^h) \quad \forall v^h \in \mathcal{V}_0^h, \quad 0 < t \leq T, \quad (103)$$

a dále počáteční podmínku $w^h(x, 0) = u_0^h(x)$, kde $u_0^h \in \mathcal{V}^h$ je vhodná reprezentace funkce $u(x, 0)$.

Rozepíšeme w^h pomocí báзовých funkcí φ_j

$$w^h(x, t) = \sum_{j=0}^m w_j(t) \varphi_j(x), \quad (104)$$

koefficienty $w_j(t)$ jsou časově závislé. Diskrétní slabá formulace (103) dává soustavu podobnou soustavě (96), ale na levé straně dostaneme ještě časové derivace, [3], [6], [2], [7]:

$$\frac{1}{h_j} (w_t^h, \varphi_j) = \frac{1}{6h_j} (\Delta_j w'_{j-1}(t) + 4h_j w'_j(t) + \Delta_{j+1} w'_{j+1}(t)). \quad (105)$$

Označíme-li $w(t) = (w_j(t))_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$, pak tzv. semidiskrétní soustavu pro homogenní okrajové podmínky můžeme zapsat ve tvaru, see [6], [3], [7],

$$Bw'(t) = Aw(t) + Bg(t), \quad (106)$$

kde

$$A = (a_{jk}) = -([\varphi_k, \varphi_j])_{j,k=1}^m, \quad B = (b_{jk}) = ((\varphi_k, \varphi_j))_{j,k=1}^m; \quad (107)$$

po částech lineární zdrojový člen je $g(t) = (s_j(t))_{j=1}^m$.

Nehomogenní okrajové podmínky přidají další členy k první a poslední komponentě $g(t)$. V teorii konečných prvků se matice B obvykle nazývá hmotová matice (mass matrix). Matici A říkáme matice tuhosti (stiff matrix).

Poznamenejme, že v rovnici (106) bychom mohli aproximovat také derivaci $w'(t)$,

$$\frac{1}{h_j}(w_t^h, \varphi_j) \approx w'_j(t).$$

Dostali bychom semidiskrétní soustavu

$$w'(t) = Aw(t) + Bg(t).$$

Tento proces nahrazení $Bw'(t)$ derivací $w'(t)$ se v literatuře nazývá "mass lumping", [6]. Může mít negativní vliv na přesnost řešení.

Pro odhad chyby lze obdobně jako ve stacionárním případě dokázat v L_2 normě konvergenci 2. řádu. Podrobnosti najde čtenář např. v [2], [3], [10], [6].

Poznamenejme ještě, že dominuje-li v rovnici konvekční člen, může standardní Galerkinova metoda konečných prvků vést k oscilacím v prostorové proměnné. Pak je třeba aplikovat Petrovovu–Galerkinovu metodu, ve které se prostor, v němž hledáme aproximaci řešení, neshoduje s prostorem testovacích funkcí, [6].

11.3 Vícedimenzionální úlohy

Standardní reakčně-difúzně-konvekční rovnici ve vícedimenzionálním prostoru lze zapsat ve tvaru

$$u_t + \sum_{k=1}^d (a_k u)_{x_k} = \sum_{k=1}^d (d_k u_{x_k})_{x_k} + s(\underline{x}, t), \quad (108)$$

kde $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)^T \in R^d$. Zdrojová část může obsahovat i nelineární reakční členy (pak $s = s(\underline{x}, t, u)$) a další nelinearity se mohou skrývat v konvekčním nebo difúzním členu. Obecný tvar reakčně-difúzně-konvekční rovnice je tedy:

$$u_t + \nabla \cdot (\underline{a}u) = \nabla \cdot (D\nabla u) + s(\underline{x}, t), \quad (109)$$

kde $\underline{a} = (a_k) \in \mathbb{R}^d$, $D = \text{diag}(d_k)$.

My se omezíme na dvoudimenzionální úlohy, konkrétně na příklad dvoudimenzionální rovnice vedení tepla s Dirichletovými okrajovými podmínkami.

11.3.1 Vedení tepla ve dvou dimenzích

Uvažujme dvoudimenzionální rovnici vedení tepla se zdrojem a s Dirichletovými okrajovými podmínkami na jednotkovém čtverci.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u_{yy} + s(x, y, t) \quad \text{na } \Omega, \\ u(x, y, t) &= u_\Gamma(x, y, t) \quad \text{na } \Gamma = \partial\Omega, \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y) \quad \text{na } \Omega, \end{aligned} \quad (110)$$

kde $t > 0$ a $(x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Prostorové derivace nahradíme standardními diferencemi 2. řádu na pravoúhlé síti a dostaneme lineární semidiskrétní soustavu

$$w'(t) = Aw(t) + g(t).$$

Matice A má dvě části, $A = A_1 + A_2$, kde A_1 "působí" ve směru osy x , A_2 ve směru osy y . Jak A_1 , tak A_2 jsou v podstatě matice hodnoty 1.

Proberme si vše podrobněji. Uvažujme pravoúhlou síť Ω_h na Ω ,

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j) : x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, 1 \leq i \leq m_1, 1 \leq j \leq m_2\},$$

kde $\Delta x = (m_1 + 1)^{-1}$, $\Delta y = (m_2 + 1)^{-1}$. Předpokládejme, že uzly jsou na Ω_h číslovány po řádcích, vektory leží v prostoru \mathbb{R}^M , kde $M = m_1 m_2$. Na Ω_h definujeme funkci $w : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^M$ takovou, že

$$w = (w_1^T, \dots, w_{m_2}^T)^T \in \mathbb{R}^M, \quad \text{kde } w_j = (w_{1j}, \dots, w_{m_1j})^T \in \mathbb{R}^{m_1}, \quad w_{ij}(t) \approx u(x_i, y_j, t). \quad (111)$$

Označme I_m jednotkovou matici typu $m \times m$, necht' B_m je matice diskretizace jednodimenzionálního operátoru difuze pro m vnitřních bodů a pro Dirichletovy okrajové podmínky,

$$B_m = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad h = \frac{1}{m+1}.$$

Matice A , A_1 , A_2 můžeme přepsat ve tvaru

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 = I_{m_2} \otimes B_{m_1}, \quad A_2 = B_{m_2} \otimes I_{m_1}, \quad (112)$$

kde \otimes je Kroneckerův direktní součin. Pro hodnoty na hranici je

$$b(t) = b_1(t) + b_2(t) \in \mathbb{R}^M,$$

přičemž $b_1(t)$ má nenulové složky $\Delta x^{-2} u_\Gamma(x \pm \Delta x, y, t)$ v bodech $(x, y) \in \Omega_h$, které sousedí se dvěma vodorovnými částmi hranice, jinde je $b_1(t)$ nulová. Obdobně $b_2(t)$ má nenulové složky $\Delta y^{-2} u_\Gamma(x, y \pm \Delta y, t)$ v bodech $(x, y) \in \Omega_h$ sousedících se dvěma svislými částmi hranice, jinde je $b_2(t)$ nulová. Necht' $f(t)$ je restrikce funkce $s(x, y, t)$ na Ω_h . Pak

$$g(t) = b(t) + f(t) \in \mathbb{R}^M. \quad (113)$$

Nyní máme definovány všechny členy v semidiskrétním formulaci $w'(t) = Aw(t) + g(t)$. Matice A_1 , A_2 a A jsou symetrické. Stabilitu semidiskrétní formulace v L_2 -normě určíme tedy ze spektra matice A , [6], [3], [2].

11.3.2 Metoda konečných prvků

Řešme rovnici (109) pro $t > 0$, pro danou počáteční podmínku $u_0(\underline{x})$ a okrajové podmínky

$$u = \gamma_0(\underline{x}) \quad \text{na } \Gamma_0, \quad \underline{n} \cdot (\underline{a}u - D\nabla u) = \gamma_1(\underline{x}) \quad \text{na } \Gamma_1, \quad (114)$$

kde $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$ je hranice Ω a \underline{n} je vektor vnější normály k této hranici.

Nejprve odvodíme slabou formulaci (93) pro slabé řešení u našeho problému. Pak budeme hledat po částech lineární aproximaci w^h tohoto slabého řešení.

Zaveďme L_2 –skalární součin funkcí v, w nebo vektorových funkcí $\underline{f}, \underline{g}$ na Ω :

$$(w, v) = \int_{\Omega} w v d\Omega, \quad (\underline{g}, \underline{f}) = \int_{\Omega} \underline{g} \cdot \underline{f} d\Omega.$$

Připomeňme, že integrace per-partes (Greenova formule) v tomto případě dává, viz např. [2], [10], [11], [16], [13],

$$(\nabla \cdot \underline{f}, v) = -(\underline{f}, \nabla v) + \int_{\partial\Omega} (\underline{f} \cdot \underline{n}) v d\Gamma.$$

Nechť \mathcal{H} je prostor funkcí u spojitých na Ω , takových, že $\nabla u \in L_2(\Omega)$, dále

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{H} : v = \gamma_0 \text{ na } \Gamma_0\}, \quad \mathcal{V}_0 = \{v \in \mathcal{H} : v = 0 \text{ na } \Gamma_0\}.$$

Uvažujme bilineární formu (není symetrická)

$$[w, v] = (D\nabla w - \underline{a}w, \nabla v)$$

a funkcionál

$$G(v) = (s, v) - \int_{\Gamma_1} \gamma_1 v d\Gamma.$$

Rovnici (108) vynásobíme testovací funkcí $v \in \mathcal{V}_0$, zintegrujeme per partes a dostaneme slabou formulaci úlohy (108), (114):

Hledáme $u(\cdot, t) \in \mathcal{V}$ tak, aby

$$(u_t, v) + [u, v] = G(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_0, \quad t > 0. \quad (115)$$

Máme-li triangulaci Ω , je Galerkinova metoda konečných prvků určena výběrem báze funkcí. Nechť \underline{x}_j jsou uzly triangulace Nejjednodušší báze je tvořena po částech lineárními stanovými (pyramidálními) funkcemi φ_i , které jsou lineární na každém trojúhelníku a splňují

$$\varphi_i(\underline{x}_j) = \delta_{ij}.$$

Nechť v indexových množinách $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}$ je uloženo číslování uzlů: $j \in \mathcal{I}_0$ jestliže $\underline{x}_j \in \Gamma_0$ a $j \in \mathcal{I}$, jestliže $\underline{x}_j \in \Omega \cup \Gamma_1$. Formulace metody konečných prvků je nyní analogická jako v jedné dimenzi. Položme

$$w^h(\underline{x}, t) = \sum_{j \in \mathcal{I} \cup \mathcal{I}_0} w_j(t) \varphi_j(\underline{x}), \quad (116)$$

$$w_j(t) = \gamma_0(\underline{x}_j) \quad \text{pro } j \in \mathcal{I}_0. \quad (117)$$

Ostatní $w_j(t)$ získáme vyřešením semidiskrétní soustavy obyčejných diferenciálních rovnic

$$\sum_{j \in \mathcal{I} \cup \mathcal{I}_0} (\varphi_j, \varphi_i) w_j'(t) = - \sum_{j \in \mathcal{I} \cup \mathcal{I}_0} [\varphi_j, \varphi_i] w_j(t) + G(\varphi_i), \quad i \in \mathcal{I}, \quad (118)$$

s počátečními podmínkami $w_j(0) = u_0(\underline{x}_j)$, $j \in \mathcal{I}$. Formulace zahrnuje i případ, kdy funkce γ_0, γ_1 definující okrajové podmínky jsou funkcemi času.

Poznámka k literatuře zabývající se metodou konečných prvků

Zájemce, kteří opravdu pracují s metodou konečných prvků, odkazujeme na širokou škálu literatury. Doporučit lze například knihu [10], v níž čtenář najde jednak základy funkcionální analýzy, dále metodu konečných diferencí a metodu konečných prvků, včetně některých technických detailů. Mezi matematiky je asi nejpopulárnější kniha [2], která obsahuje velké množství matematického aparátu včetně přehledné teorie Sobolevových prostorů. Obsahuje také velmi podrobné odhady chyb. K podrobnému studiu teorie Sobolevových prostorů je určena kniha [1]. Zmiňme se ještě o knize [8], v níž najde čtenář konkrétní příklady především z mechaniky kontinua a dále velké množství technických detailů potřebných pro algoritmizaci, jako je popis různých tvarů konečných prvků nebo podrobný popis transformací na referenční prvky. Jednou z nejobsáhlejších knih o klasické teorii parciálních diferenciálních rovnic je kniha [11]. Obsahuje mimo jiné i podrobnou teorii distribucí, včetně Diracovy δ -funkce a odvození jejích vlastností. Klasickou učebnicí numerické matematiky je kniha [13]. Inspirací pro napsání tohoto příspěvku byla především kniha [6], která se mj. velmi podrobně zabývá metodou konečných prvků a metodou konečných objemů pro reakčně-difúzně-konvekční rovnice. Velmi inspirativní je také kniha [3].

Ve sborníku [7] byl uveden příspěvek, který stručně popisoval matematické základy metody konečných prvků, tak, jak jsou probírány v přednášce Metody aplikované matematiky na VŠCHT, Praha.

12 Víceúrovňové metody

12.1 Metoda prosté iterace

Soustava

$$\mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{F}, \quad (119)$$

$\mathbf{S} \dots$ **matice tuhosti**, symetrická, pozitivně definitní \implies vlastní čísla λ matice \mathbf{S} jsou reálná kladná:

$$0 < \lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max} < \infty$$

\mathbf{x} řešení $\implies \mathbf{S}\mathbf{x} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$, a tedy také

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} - \tau(\mathbf{S}\mathbf{x} - \mathbf{F}) \text{ pro libovolné } \tau \in \mathbb{R}. \quad (120)$$

Metoda prosté iterace:

Dáno $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}$ nenulový parametr.

Definujeme posloupnost iterací $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ takto:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - \tau(\mathbf{S}\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{F}). \quad (121)$$

Jestliže $\mathbf{x}^{(n)} \rightarrow \mathbf{x}$ pro $n \rightarrow \infty \implies \mathbf{x}$ řeší soustavu (119).

Parametr $\tau \neq 0$ lze zvolit tak, aby posloupnost $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ konvergovala pro libovolnou počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)}$.

Označme $\varepsilon^{(n)} := \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}$ vektor chyby n -té iterace. Pak

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(n+1)} &= (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})\mathbf{x}^{(n)} + \tau\mathbf{F} \\ \mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x} &= (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x} + \tau\mathbf{F}\end{aligned}$$

Na pravé straně rovnice dosadíme za (\mathbf{x}) z formule (120):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x} &= (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x} + \tau\mathbf{S}\mathbf{x} - \tau\mathbf{F} + \tau\mathbf{F} \\ \mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x} &= (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})\mathbf{x}^{(n)} - (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})(\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}) \\ \varepsilon^{(n+1)} &= (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})\varepsilon^{(n)}\end{aligned}$$

Tedy

$$\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})^n \varepsilon^{(0)},$$

kde $\varepsilon^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}$ je chyba počáteční aproximace.

Chceme zvolit $\tau \neq 0$ tak, aby

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varepsilon^{(n)}\| = 0 \quad \text{pro libovolné } \varepsilon^{(0)}.$$

Říkáme, že τ je **konvergentní parametr**.

Dostáváme odhad chyby ($\|\cdot\|$ je Euklidovská norma)

$$\|\varepsilon^{(n)}\| \leq \|(\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})^n\| \cdot \|\varepsilon^{(0)}\|.$$

Věta 12.1 \mathbf{S} symetrická, pozitivně definitní.

Parametr $\tau \in \mathbb{R}$ je konvergentní parametr metody prosté iterace \iff

$0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{\max}}$, λ_{\max} je největší vlastní číslo matice \mathbf{S} . Pro toto τ je

$$\|(\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})^n\| = c^n(\tau), \quad \text{kde } 0 < c(\tau) < 1,$$

konkrétně

$$c(\tau) = \max\{|1 - \tau\lambda_{\max}|, |1 - \tau\lambda_{\min}|\}, \quad \lambda_{\min} \quad \text{je nejmenší vlastní číslo matice } \mathbf{S}.$$

Poznámka 12.1

1. \mathbf{S} symetrická $\implies (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})^n$ je také symetrická, neboť

$$(\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})^T = \mathbf{I} - \tau\mathbf{S}^T = \mathbf{I} - \tau\mathbf{S}.$$

Dále

$$[(\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})(\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})]^T = (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})^T(\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})^T = (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})(\mathbf{I} - \tau\mathbf{S}).$$

2. **Spektrální poloměr** symetrické matice \mathbf{A} :

$$|\mathbf{A}| = \rho(\mathbf{A}) = \max_{i=1, \dots, N} |\mu_i|, \quad \mu_i \dots \text{ vlastní čísla matice } \mathbf{A}.$$

Věta o zobrazení spektra:

λ vlastní číslo, β odpovídající vlastní vektor matice \mathbf{S} : $\mathbf{S}\beta = \lambda\beta, \beta \neq \mathbf{0}$

$\iff \beta$ je vlastní vektor a $\mu = (1 - \tau\lambda)^n$ vlastní číslo matice $(\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})^n$.

Tedy vlastní čísla μ matice $(\mathbf{I} - \tau\mathbf{S})^n$ spočteme z vlastních čísel λ matice \mathbf{S} .

O iteračních metodách se říká, že **zhlazují chybu**. Ukážeme si to konkrétně na příkladu.

Příklad 12.1 Vraťme se k příkladu 4.1:

$$-u'' = f \quad v \quad \Omega = (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Variační formulace:

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx,$$

$$a(v, w) = \int_0^1 v'(x)w'(x)dx, \quad L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx,$$

$a(v, w)$ je symetrická, koercivní (positivně definitní).

Označme \mathbf{S}_h odpovídající matici tuhosti (h je krok dělení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$):

$$\mathbf{S}_h := \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Její vlastní čísla jsou

$$\lambda_k = \frac{2}{h}(1 - \cos k\pi h) = \frac{4}{h} \sin^2 \frac{k\pi h}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

a odpovídající vlastní vektory jsou

$$\psi^{(k)} = (\psi_1^{(k)}, \dots, \psi_N^{(k)}), \quad \psi_i^{(k)} = \sin k\pi i h, \quad i = 1 \dots N, \quad k = 1, \dots, N.$$

Chybu $\varepsilon^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}$ rozvedeme do vlastních vektorů matice \mathbf{S}_h : Jestliže

$$\varepsilon^{(0)} = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \psi^{(k)}, \quad \text{pak}$$

$$\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S}_h)^n \varepsilon^{(0)} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (\mathbf{I} - \tau\mathbf{S}_h)^n \psi^{(k)} = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k (1 - \tau\lambda_k)^n \psi^{(k)}.$$

Tedy souřadnice chyby $\varepsilon^{(0)} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$ se po n iteracích změni na souřadnice

$$(\varepsilon_1(1 - \tau\lambda_1)^n, \dots, \varepsilon_N(1 - \tau\lambda_N)^n) = \text{souřadnice chyby } \varepsilon^{(n)} \text{ } n - \text{té iterace.}$$

Pokud je $|1 - \tau\lambda_j|$ malé číslo, potom j -tá souřadnice $\varepsilon_j(1 - \tau\lambda_j)^n$ rychle klesá s rostoucím n . Říkáme, že j -tá složka se rychle tlumí. \square

13 Agregáční metody

V tomto odstavci se budeme zabývat pouze dvojúrovňovými metodami.

Uvažujme problém diskretizovaný na triangulaci \mathcal{T}_h metodou konečných prvků. Výsledná soustava lineárních algebraických rovnic má tvar

$$\mathbf{A}_h u_h = b_h \quad (122)$$

a budeme ji řešit dvojúrovňovou metodou.

Reference

- [1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier: Sobolev Spaces, 2nd edition, Academic Press/Elsevier, Amsterdam, 2003.
- [2] D. Braess: Finite Elements, Cambridge University Press, 1997.
- [3] S. C. Brenner, L. R. Scott: The Mathematical Theory of Finite Elements, Texts in Applied Mathematics, Vol. 15, Springer, New York, 1994.
- [4] G. H. Golub, C. F. van Loan: Matrix Computations, 3rd ed, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
- [5] A. Greenbaum: Iterative Methods for Solving Linear Systems, SIAM, Philadelphia, 2003.
- [6] W. Hundsdorfer, J. Verwer: Numerical solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [7] D. Janovská: Stručně o metodě konečných prvků. Sborník prací ze semináře "Reakční a transportní jevy II", Konopiště 8.–11.6.2007, ed. M. Marek, I. Schreiber, L. Schreiberová, Vydavatelství VŠCHT, Praha, 2007, pp. 46–60.
- [8] V. N. Kaliakin: Introduction to Approximate Solution Techniques, Numerical Modeling, and Finite Element Methods, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2002.
- [9] M. Kubíček, M. Dubcová, D. Janovská: Numerické metody a algoritmy, skripta VŠCHT, 2. vydání, 2005.
- [10] S. Larsson, V. Thomée: Partial Differential Equations with Numerical Methods, Springer-Verlag New York, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [11] M. Renardy, R. C. Rogers: An Introduction to Partial Differential Equations, Springer-Verlag New York, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [12] J. Saad: Iterative Methods for Sparse Linear Systems (2nd edition), SIAM, Philadelphia, 2003.
- [13] J. Stoer, R. Bulirsch: Introduction to Numerical Analysis, 2nd Edition, Springer-Verlag New York, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [14] A. E. Taylor: Úvod do funkcionální analýzy, Academia, Praha, 1973.

- [15] P. Wesseling: An Introduction to Multigrid Methods, John Wiley & Sons, 1992.
- [16] L. Zajíček: Vybrané úlohy z matematické analýzy, Matfyzpress, Praha, 2002.