Dvojný integrál v POLÁRNÍCH souřadnicích

cvičení

S A M O S T U D I U M

teorie: skripta J. NEUSTUPA, Matematika II, vydání r. 2016, str. 58-60

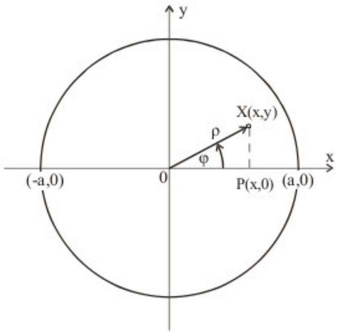
Příklady v elektronické sbírce:

`https://mat.nipax.cz/_media/dvojny19_2.pdf`

283 – 292

Polární souřadnice v $\mathbb{E}_2$

Dvojrozměrné integrály, jejichž množinou integrace je **kruh, případně část kruhu**, lze jednoduše vyřešit transformací do polárních souřadnic.



V trojúhelníku OPX platí: $\cos\varphi = \dfrac{x}{\rho}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\rho}$.

Kartézské souřadnice x, y bodu nahradíme polárními souřadnicemi ρ, φ , v nichž

- ρ znamená vzdálenost bodu o souřadnicích (x, y) od počátku soustavy souřadnic $(\rho \geq 0)$
- φ označuje orientovaný úhel, měřený od kladné části osy x po průvodič bodu (x, y) v kladném smyslu.

Transformační rovnice

Transformační rovnice při přechodu z kartézských souřadnic do polárních souřadnic mají tvar

$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$

dxdy v dvojrozměrném integrálu nahradíme výrazem **J** $\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$, kde

$$J = J(\rho,\ \varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \rho$$

se nazývá **jakobián** transformace.

Pro dvojrozměrný integrál pak platí

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega f(\rho \cos \varphi\ , \rho \sin \varphi)\ \underbrace{\rho}_{J} \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho$$

Množina Ω je obrazem množiny D v polárních souřadnicích.

Určení mezí: $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\ , \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

1. D je kruh $x^2+y^2 \le a^2$ $\quad 0 \le r \le a \quad 0 \le \varphi < 2\pi$
2. D je ohraničena: $x^2+y^2 = 2ax$, doplníme na čtverec:
   $x^2-2ax+a^2+y^2 = a^2 \Rightarrow (x-a)^2+y^2 = a^2$
   Kružnice je celá v 1. a 4. kvadrantu $\Rightarrow$ $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$,
   např. dosazením: $0 \le r \le 2a\cos\varphi$
3. D je ohraničena $x^2+y^2 = 2ay$, doplníme na čtverec:
   $x^2+y^2-2ay+a^2 = a^2 \Rightarrow x^2+(y-a)^2 = a^2$
   Kružnice je celá v 1. a 2. kvadrantu $\Rightarrow$ $0 \le \varphi \le \pi$,
   např. dosazením: $0 \le r \le 2a\sin\varphi$
4. D je mezikruží $b^2 \le x^2+y^2 \le a^2$ $\quad b \le r \le a \quad 0 \le \varphi < 2\pi$

Zobecněné polární souřadnice v $\mathbb{E}_2$

Používáme v případě, když množina integrace

- je elipsa nebo její část
- nemá počátek v $[0,0]$

D je ohraničena

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$$

Transformační rovnice:

$$\begin{aligned} x &= ar\cos\varphi & 0 &\le r \le 1 \\ y &= br\sin\varphi & 0 &\le \varphi < 2\pi \\ J &= abr \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= abr\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r\cos\varphi & 0 &\le r \le a \\ y &= y_0 + r\sin\varphi & 0 &\le \varphi < 2\pi \\ J &= r \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Příklad

$$\iint_D \sqrt{4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

D je ohraničena $4x^2 + 9y^2 = 36$ tj. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

$$\begin{aligned} x &= 3r\cos\varphi \\ y &= 2r\sin\varphi \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} 0 &\le r \le 1 \\ 0 &\le \varphi < 2\pi \end{aligned}, \qquad J = 6r, \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 6r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

Příklady

1. $$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D: x^2+y^2 \le a^2,\ y \ge 0$$
2. $$\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D: 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ y \ge x,\ x \ge 0$$
3. $$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad D: \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$$

Příklady

https://mat.nipax.cz/_media/dvojny19_2.pdf

283 – 292