Křivkový integrál skalární funkce

(křivkový integrál 1. druhu)

Cvičení 6.4.

S A M O S T U D I U M

teorie: skripta J. NEUSTUPA, Matematika II, vydání r. 2016, str. 79-84

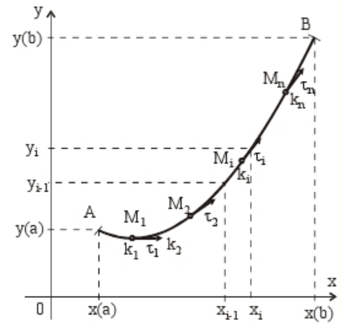
Příklady v elektronické sbírce:

`https://mat.nipax.cz/_media/19krivk-skalar.pdf`

424 – 497

Existence

Mějme spojitou hladkou křivku k zadanou vektorovou funkcí $\vec{p}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$, kladně orientovanou vzhledem k parametru $t \in \langle a,\ b \rangle$. Interval $\langle a,\ b \rangle$ rozdělíme posloupností bodů $a = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b$ na dílčí intervaly. Tomuto dělení odpovídá rozdělení křivky k na n jednoduchých hladkých křivek $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Označíme Δ délku i-té dílčí křivky, $i = 1, 2, \ldots, n$. Na každé dílčí křivce k_i libovolně zvolíme bod $M_i = [x(t_i), y(t_i), z(t_i)]$, kterému odpovídá hodnota parametru t_i. V každém bodě M_i sestrojíme tečný vektor $\tau_i = \tau(M_i)$, který orientujeme souhlasně s křivkou k. **V možině $\mathcal{D}$, ve které leží křivka k, mějme definované, omezené a spojité: skalární funkci $f(x, y, z)$ a vektorovou funkci $\vec{F}(x, y, z)$.**



Tyto funkce nabývají v bodech M_i hodnot $f(M_i) = f(x(t_i), y(t_i), z(t_i)), \vec{F}(M_i)$.
Vytvoříme součiny $f(M_i)\Delta s_i$ a skalární součiny $\vec{F}(M_i)\tau_i\Delta s_i$.

Vytvoříme integrální součty $$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\tau_i\Delta s_i$$

Existuje-li pro $n \to \infty$ a $\Delta s_i \to 0$ pro všechna $i = 1, \ldots n$ limita intergálního součtu, nazveme tuto limitu křivkovým integrálem funkce $f(x, y, z)$ po křivce k, resp. vektorové funkce $\vec{F}(x, y, z)$ po kladně orientované křivce k.
Pro skalární funkci $f(x, y, z)$ křivkový integrál nezávisí na orientaci křivky.

Množinou integrace křivkového integrálu je rovinná nebo prostorová křivka.

Výpočet křivkového integrálu

1. Parametrické vyjádření křivky:

$$P(t) = [x(t),\ y(t),\ z(t)]\,, \quad t \in \langle a,\ b\rangle$$

2. Vypočítáme derivace

$$\dot{P}(t) = (\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t))$$

   a určíme

$$\mathrm{d}s = \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ \mathrm{d}t \quad \text{resp.} \quad \underbrace{\mathrm{d}\vec{s} = \dot{P}(t)\ \mathrm{d}t}_{\text{pro vektorovou funkci}}$$

3. Vyjádříme $f(P(t))$

4. $$\int_C f\mathrm{d}s = \int_a^b f(P(t))\ \|\dot{P}(t)\|\ \mathrm{d}t \text{ resp. } \overbrace{\int_C \vec{f}\mathrm{d}\vec{s} = \pm\int_a^b \vec{f}(P(t)) \cdot \dot{P}(t)\mathrm{d}t}^{\text{pro vektorovou funkci}}$$

- Pro křivku vyjádřenou explicitně $y = g(x)$ lze při $P(t) = [t,\ y(t)]$ vyjádřit $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$
- Pro vektorovou funkci $\vec{f} = (U, V, W)$ lze zapsat $\mathrm{d}\vec{s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ a $\vec{f} \cdot \dot{P}(t)\ \mathrm{d}t = U\mathrm{d}x + V\mathrm{d}y + W\mathrm{d}z$

Příklad 1.

$$\int_C (y-2z)\,\mathrm{d}s,\ C \text{ je úsečka } AB: A=[1,\ 0,\ -1],\ B=[-2,\ 2,\ 0].$$

Integrovaná funkce $f(x,y,z)=y-2z$ je definovaná a spojitá v $\mathbb{E}_3$, integrál existuje

1. parametrické vyjádření úsečky : $X = A + t(B-A), t \in \langle 0,\ 1\rangle$
   $P(t) = [1-3t;\ 2t;\ -1+t],\ t \in \langle 0,\ 1\rangle$

2. $\dot{P}(t) = (-3,\ 2,\ 1),\ \|\dot{P}\| = \sqrt{(-3)^2+2^2+1^2} = \sqrt{14}$

3. $f(P(t)) = \underbrace{2t}_{y} - 2\underbrace{(-1+t)}_{z} = 2$

4. $\displaystyle\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \underbrace{2}_{f(P(t))} \cdot \underbrace{\sqrt{14}}_{\|\dot{P}(t)\|}\ \mathrm{d}t = 2\sqrt{14}$

Příklad 2.

$\int_C (x^3 - 2y)\,\mathrm{d}s$, C je úsečka AB, kde A, B jsou průsečíky přímky $2x + 3y - 6 = 0$ se souřadnicovými osami. (tj. $A = [0,\ 2],\ B = [3,\ 0]$).

Integrovaná funkce $f(x, y, z) = x^3 - 2y$ je definovaná a spojitá v $\mathbb{E}_3$, integrál existuje

1. Parametrické vyjádření úsečky : $X = A + t(B - A), t \in \langle 0,\ 1\rangle$
   $P(t) = [3t;\ 2 - 2t],\ t \in \langle 0,\ 1\rangle$
2. $\dot{P}(t) = (3,\ -2),\ \|\dot{P}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$
3. $f(P(t)) = \underbrace{27t^3}_{x^3} - 2\underbrace{(2 - 2t)}_{y} = 27t^3 + 4t - 4$
4. $\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_0^1 (\underbrace{27t^3 + 4t - 4}_{f(P(t))}) \cdot \underbrace{\sqrt{13}}_{\|\dot{P}(t)\|}\ \mathrm{d}t = \sqrt{13}\dfrac{19}{4}$

Příklad 3.

$$\int_C \frac{z^4}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s,\ C \text{ je závit šroubovice:}$$

$$x = 2\cos t;\ \ y = 2\sin t;\ \ z = t,\ \ t \in \langle 0,\ 2\pi\rangle$$

Integrovaná funkce $f(x, y, z)$ je není definovaná v bodech $[0, 0, z] \in \mathbb{E}_3$, tyto body na C neleží, integrál na C existuje.

1. Křivka C je zadaná parametricky.
   $P(t) = [2\cos t;\ 2\sin t;\ t],\ t \in \langle 0,\ 2\pi\rangle$
2. $\dot{P}(t) = (-2\sin t,\ 2\cos t,\ 1),\ \|\dot{P}\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1} = \sqrt{5}$
3. $f(P(t)) = \dfrac{t^4}{4}$
4. $\displaystyle\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{t^4}{4}}_{f(P(t))} \cdot \underbrace{\sqrt{5}}_{\|\dot{P}(t)\|}\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\frac{8}{5}\pi^5$

Příklad 4.

$$\int_C (x^2 + y^2 + z^2)\, \mathrm{d}s, \ C \text{ je zadaná rovnicemi:}$$

$$x = e^t \cos t; \ y = e^t \sin t; \ z = e^t, \ t \in \langle 0, \ 1 \rangle$$

Integrovaná funkce $f(x, y, z)$ je definovaná a spojitá v $\mathbb{E}_3$, integrál existuje.

1. Křivka C je zadaná parametricky.
   $P(t) = [e^t \cos t; \ e^t \sin t; \ e^t], \ t \in \langle 0, \ 1 \rangle$

2. $\dot{P}(t) = (e^t(\cos t - \sin t), \ e^t(\sin t + \cos t), \ e^t),$
   $\|\dot{P}\| = \sqrt{e^{2t}(\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1)} = e^t\sqrt{3}$

3. $f(P(t)) = e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t + 1) = 2e^{2t}$

4. $\displaystyle\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \underbrace{2e^{2t}}_{f(P(t))} \cdot \underbrace{e^t\sqrt{3}}_{\|\dot{P}(t)\|}\ \mathrm{d}t = \sqrt{3}\frac{2}{3}(e^3 - 1)$

Příklad 5.

$$\int_C (x+y^2)\,\mathrm{d}s,\ C = \{[x,\ y] \in \mathbb{E}_2 : x^2+y^2 = 9,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$$

Integrovaná funkce $f(x,y,z) = x + y^2$ je definovaná a spojitá v $\mathbb{E}_3$, integrál existuje

1. Kružnici vyjádříme rovnicemi $x = 3\cos t,\ \ y = 3\sin t,\ \ t \in \langle \dfrac{\pi}{2},\ \pi\rangle$
   $P(t) = [3\cos t;\ 3\sin t],\ \ t \in \langle \frac{\pi}{2},\ \pi\rangle$

2. $\dot{P}(t) = (-3\sin t,\ 3\cos t),\ \ t \in \langle \frac{\pi}{2},\ \pi\rangle,\ \|\dot{P}\| = \sqrt{9)} = 3$

3. $f(P(t)) = \underbrace{3\cos t}_{x} + \underbrace{9\sin^2 t}_{y^2}$

4. $\displaystyle\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\underbrace{3\cos t + 9\sin^2 t}_{f(P(t))}) \cdot \underbrace{3}_{\|\dot{P}(t)\|}\ \mathrm{d}t = -9 + \frac{27}{4}\pi$

Příklad 6.

$$\int_C y \,\mathrm{d}s, \; C \text{ je část kubické paraboly } y = x^3, \; x \in \langle 0, \; 1\rangle$$

$$\text{t.j. } C = \{[x, \; y] \in \mathbb{E}_2 : \; y = x^3, \; x \in \langle 0, \; 1\rangle\}$$

1. $P(t) = [t; \; t^3], \; t \in \langle 0, \; 1\rangle$
2. $\dot{P}(t) = (1, \; 3t^2), \; t \in \langle 0, \; 1\rangle, \; \|\dot{P}\| = \sqrt{1 + 9t^4}$
3. $f(P(t)) = t^3$
4. $\displaystyle\int_C f \mathrm{d}s = \int_0^1 \underbrace{t^3}_{f(P(t))} \cdot \underbrace{\sqrt{1 + 9t^4}}_{\|\dot{P}(t)\|} \,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ q = 1 + 9t^4, \; \mathrm{d}q = 36t^3 \,\mathrm{d}t \\ q_d = 1, \; q_h = 10 \end{array} \right|$

$$= \int_1^{10} \frac{1}{36} \sqrt{q} \,\mathrm{d}q = \frac{1}{54}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

Aplikace křivkového integrálu skalární funkce

Předpokládejme, že drát nebo struna má tvar křivky C, jejíž délková hustota je v libovolném bodě X určena funkcí $\rho(X)$.

- délka C $\quad \ell = \int_C \mathbf{1}\, \mathrm{d}s$
- hmotnost C o hustotě $\rho(x, y, z)$ $\quad m = \int_C \rho\, \mathrm{d}s$

statický moment $C \subset \mathbb{E}_2$

- vzhledem k ose x $\quad m_x = \int_C y\ \rho\, \mathrm{d}s$
- vzhledem k ose y $\quad m_y = \int_C x\ \rho\, \mathrm{d}s$
- souřadnice těžiště C:

$$T = \left[\frac{m_y}{m}, \ \frac{m_y}{m}\right]$$

statický moment $C \subset \mathbb{E}_3$

- vzhledem k rovině xy $\quad m_{xy} = \int_C z\ \rho\, \mathrm{d}s$
- vzhledem k rovině xz $\quad m_{xz} = \int_C y\ \rho\, \mathrm{d}s$
- vzhledem k rovině yz $\quad m_{yz} = \int_C x\ \rho\, \mathrm{d}s$
- souřadnice těžiště C:

$$T = \left[\frac{m_{yz}}{m}, \ \frac{m_{xz}}{m}, \ \frac{m_{xy}}{m}\right]$$

- moment setrvačnosti C

příklady 482-497