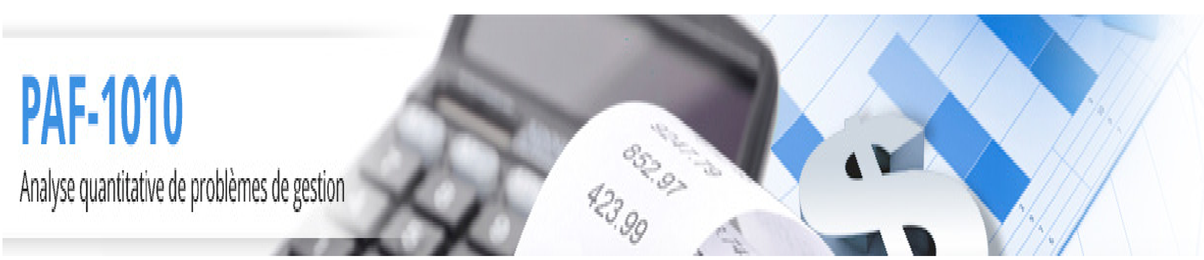
MODULE 6

VARIABLE ALÉATOIRE



Louis Houde
Département de Mathématiques et d’informatique
Université du Québec à Trois-Rivières

MODULE 6 Variable aléatoire

Objectifs et compétences

L'objectif de cette section est de donner à l'étudiant les outils nécessaires pour comprendre la notion de variable aléatoire et l'appliquer à des concepts de gestion. Dans un premier temps, la relation entre la fonction de probabilité et la variable aléatoire est examinée puis les différentes propriétés de la variable aléatoire seront étudiées.

L'étudiant sera en mesure de

- définir une variable aléatoire
- déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète
- évaluer des probabilités sur une variable aléatoire discrète
- calculer et interpréter l'espérance et la variance d'une variable aléatoire
- calculer une probabilité sur une variable aléatoire continue
- interpréter les mesures d'espérance et de variance pour une variable aléatoire continue
- comparer les mesures d'espérance et de variance lors de translation et de changement d'échelle

6.1 Variable aléatoire

La notion de probabilité sur l'ensemble des événements possibles impose un nouvel espace échantillonnage pour chaque expérience aléatoire ainsi la redéfinition de la fonction de probabilité. Or il y a plusieurs expériences aléatoires qui sont semblables sans avoir le même espace échantillon. Le lancer d'une pièce de monnaie pour déterminer si c'est «pile» ou «face» est identique à l'expérience consistant à lancer deux pièces de monnaies pour vérifier si c'est «pareil» ou «pas pareil». Pour comparer les expériences aléatoires, il faut standardiser les espaces échantillonnals.

L'ensemble des nombres réels est un espace échantillonnal qui peut avantageusement servir de base commune à l'ensemble des expériences aléatoires surtout en considérant le fait que les nombres sont des entités que nous manipulons aisément. Pour faire le lien entre les résultats possibles d'une expérience aléatoire c'est-à-dire l'espace échantillonnal et les nombres réels il faut définir la notion de variable aléatoire.

Définition 1.1 une variable aléatoire est une fonction entre un espace échantillonnal et les nombres réels telle que pour chaque événement élémentaire il y a un et un seul nombre réel qui lui est associé.

Une variable aléatoire est généralement noté par une lettre de la fin de l'alphabet en majuscule comme par exemple $X,\ T,\ W$, etc. Cela est une convention généralement acceptée et comme toutes les conventions il y a certaines exceptions. La définition des événements sur l'ensemble des nombres réels est facilitée par les relations d'ordre entre les nombres ($=, <, \leq, \neq, \geq, >$). On peut ainsi définir l'événement "le résultat est 7" par $X = 7$ ou "le résultat est de moins de 4" par $X < 4$, etc.

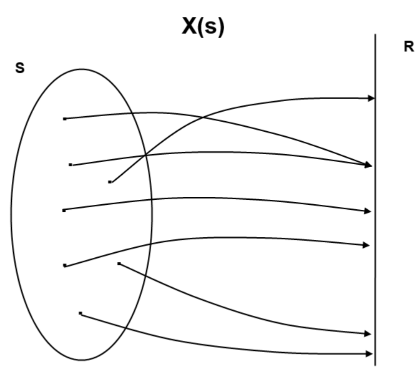
Définition 1.2 L'ensemble des nombres réels que la variable aléatoire peut prendre s'appelle le support et on le note S_X.

Définition 1.3 Lorsque l'ensemble des résultats possibles de la v.a., S_X, est fini ou dénombrable, on dit que la variable aléatoire est discrète. Lorsque les résultats possibles d'une v.a. est un intervalle de l'ensemble des nombres réels, on dit que la v.a. est continue.

Il y a deux facettes à la notion de variable aléatoire : la fonction qui fait l'association et l'expérience aléatoire sur les nombres

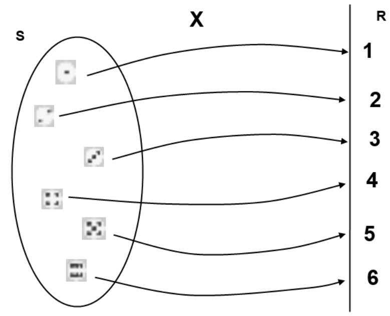
Fonction de S vers R

La fonction qui fait l'association entre l'expérience et l'ensemble des nombres réels. Cela veut dire qu'on a une expérience aléatoire avec un espace échantillonnal S puis une fonction $X : S \to R$ comme illustré par le dessin suivant :



Pour chaque élément $s \in S$, $X(s)$ est un nombre qui donne la valeur de la fonction.

Une variable aléatoire assez évidente est celle qui associe le nombre de points obtenus lors du lancer d'un dé à la surface visible. Graphiquement cela donne



Cela veut dire que X (⚃) $= 4$, X (⚁) $= 2$, etc. Cette façon de voir la variable aléatoire est indissociable de l'expérience qui a servi à la définition de S. On a $S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et pour l'événement $X = 5$ par exemple on fait référence à $s \in S$ tel que $X(s) = 5$. Il y a donc équivalence entre les événements $X = 5$ et {⚄}

Exemple 1.1 On lance un dé équilibré,

$S = \{$ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅ $\}$

On cherche la probabilité de l'événement $X \leq 2$.

Solution : Posons X la variable aléatoire qui donne le nombre de points sur la face du dé. Puisque la v.a. est une fonction de S vers les nombres réels, il faut définir l'association pour toutes les valeurs de S : X (⚀) $= 1$, X (⚁) $= 2$, etc. On a

$$S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

L'événement $X \leq 2$ correspond aux valeurs 1 et 2 donc à l'événement {⚀, ⚁}. On peut alors évaluer

Pr $(X \leq 2) =$ Pr ({⚀, ⚁}) $= 1/3$

Expérience aléatoire sur des nombres

On peut aussi voir la variable aléatoire comme une expérience aléatoire particulière parce qu'elle a comme espace échantillonnal un sous ensemble des nombres réels. Dans un tel cas on ne considère jamais S parce que celui-ci est exactement donné par S_X. Cela veut dire que pour définir une variable aléatoire on n'impose pas l'existance d'une expérience aléatoire sur un espace quelconque puis une fonction de cet espace vers R mais une définition directe à partir de R.

Cette façon de voir les variables aléatoires a certains avantages : on peut définir des expériences virtuelles et ensuite les analyser dans le détail. On cherchera ensuite à quels types d'expériences de la réalité cela correspond.

Cette façon de voir mène à la création des lois de probabilité qui seront abordées dans le module suivant et qui dressent des portraits types pour quelques situations. Il reste à trouver des cas concrets qui se rapportent à une ou l'autre des lois.

Exemple 1.2 Considérons une expérience aléatoire qui donne comme résultat 1 avec probabilité $1/3$ et 2 avec probabilité $2/3$. C'est une expérience aléatroire définie directement sur les nombres et on peut dire que $S = S_X$. L'énoncé du problème permet aussi de dire que $\Pr(X = 1) = 1/3$ et que $\Pr(X = 2) = 2/3$. On a une probabilité donc toutes les propriétés des probabilités sont respectées.

On peut par exemple dire

$$\Pr\left((X = 1)^c\right) = 1 - \Pr\left(X = 1\right) = 1 - 1/3 = 2/3$$

6.2 Variable aléatoire discrète

Lorsqu'une variable aléatoire est discrète, il suffit de connaître la probabilité de chaque événement de la forme $X = x$[1] pour chaque valeur x possible pour être en mesure d'évaluer la probabilité d'un événement quelconque.

On peut donc dire que la v.a. est entièrement définie par son support, S_X, et l'ensemble des probabilités associées.

Définition 2.1 Soit X une variable aléatoire de support S_X et notons $f(x)$ la fonction qui permet de calculer la probabilité de chaque résultat possible de la variable aléatoire :

$$f(x) = \Pr\left(X = x\right)$$

on dit que f est la loi de probabilité de la variable aléatoire ou sa fonction de masse.

Remarque 2.1 On note la loi de probabilité simplement par f lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité possible et par f_X lorsqu'il peut y avoir plusieurs variables aléatoires dans un même contexte.

Exemple 2.1 On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré. On veut la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

Solution : L'ensemble S est les 6 résultats possibles (les six faces du dé) tandis que la variable aléatoire qui donne le nombre de points sur la face visible du dé prend les valeurs de 1 à 6, $S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si on veut par exemple calculer la probabilité d'obtenir un 3, on doit avoir la fonction de masse de la variable aléatoire qui donne le nombre de points sur la face du

[1] Lorsqu'on écrit X, cela représente la v.a. et lorsqu'on utilise un minuscule, x c'est un nombre fixé.

dé visible : X ≡«le nombre de points sur le dé». On peut déterminer cette fonction de masse par un argument d'équiprobabilité :

$$f(x) = 1/6 \text{ pour } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Cela veut dire que $\Pr(X = 2) = f(2) = 1/6$ et ainsi de suite pour toutes les valeurs.

Proposition 2.1 Soit X une variable aléatoire de support S_X et A un événement défini sur ce support alors

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \sum_{x \in A} \Pr(X = x) \\ &= \sum_{x \in A} f_X(x)\end{aligned}$$

On peut donc calculer une probabilité quelconque en se basant sur la loi de probabilité (fonction de masse). En fait on applique le principe des événements disjoints pour une fonction de probabilité : la loi de probabilité est une fonction de probabilité donc cette propriété s'applique. Pour obtenir la probabilité d'un événements quelconque défini sur R il suffit de prendre chaque élément du support qui est dans l'événement puis de faire la somme des valeurs pour la fonction de masse.

Si une variable aléatoire a un support donné par $S_X = \{4, 16, 64, 256\}$ alors pour calculer la probabilité $\Pr(X > 16)$ il suffit de trouver les valeurs du support satisfaisant cet événement (64 et 256) puis d'y appliquer la fonction de masse :

$$\begin{aligned}\Pr(X > 16) &= \Pr(X = 64 \text{ ou } X = 256) \\ &= f(64) + f(256)\end{aligned}$$

Exemple 2.2 On lance 2 dés équilibrés et on pose X la variable aléatoire qui donne la somme des points visibles sur les deux dés. On veut la loi de probabilité de X ainsi que la probabilité d'obtenir une valeur de 7 ou plus.

Solution : Le support de cette v.a. est donné par les nombres de 2 à 12,

$$S_X = \{2, 3, 4, ..., 10, 11, 12\}$$

Pour la valeur $x = 2$, on a $f(2) = \Pr(X = 2)$, soit la probabilité d'obtenir deux "⚀" c'est-à-dire l'événement {(⚀, ⚀)}. Il n'y a qu'un élément dans cet événement donc $f(2) = 1/36$.

Pour la valeur $x = 3$, on a $f(3) = \Pr(X = 3)$, soit la probabilité que la somme des points soit de 3. Il y a 2 possibilités : (⚀, ⚁) et (⚁, ⚀). Chaque possibilité a une probabilité de $1/36$ d'où $f(3) = 2/36$.

Pour la valeur $x = 4$, on a $f(4) = \Pr(X = 4)$, soit la probabilité quie la somme des points soit de 4. Il y a 3 possibilités : (⚀, ⚂), (⚂, ⚀) et (⚁, ⚁). L'événement a une cardinalité de 3 sur l'ensemble équiprobable alors $\Pr(X = 4) = 3/36$.

En utilisant les mêmes arguments pour chaque valeur du support on obtient la fonction de masse :

$$f(x)=\begin{cases} 1/36 & \text{si } x=2 \text{ ou } 12\\ 2/36 & \text{si } x=3 \text{ ou } 11\\ 3/36 & \text{si } x=4 \text{ ou } 10\\ 4/36 & \text{si } x=5 \text{ ou } 9\\ 5/36 & \text{si } x=6 \text{ ou } 8\\ 6/36 & \text{si } x=7 \end{cases}$$

Si on cherche la probabilité d'obtenir 7 ou plus :

$$\begin{aligned} \Pr(X\geq 7) &= \Pr(X=7 \text{ ou } X=8\ldots \text{ ou } X=12)\\ &= f(7)+f(8)\ldots+f(12)\\ &= 6/36+5/36+4/36+3/36+2/36+1/36\\ &= 21/36 \end{aligned}$$

Exemple 2.3 On pige 3 cartes dans un jeu de 52 cartes et on s'intéresse au nombre de "Rouges".

Solution : Soit X la v.a. qui donne le nombre de cartes rouges sur 3 cartes, $S_X=\{0,1,2,3\}$.

- Pour $x=0$, $f(0)=\Pr(X=0)$, soit la probabilité d'aucune carte rouge[2] : $\frac{26}{52}\frac{25}{51}\frac{24}{50}=\frac{2}{17}$.
- Pour $x=1$, $f(1)=\Pr(X=1)$, soit la probabilité d'exactement une carte rouge. On peut avoir une carte rouge
  - au premier tirage : $\frac{26}{52}\frac{26}{51}\frac{25}{50}=\frac{13}{102}$
  - au deuxième tirage $\frac{26}{52}\frac{26}{51}\frac{25}{50}=\frac{13}{102}$
  - au troisième tirage $\frac{26}{52}\frac{25}{51}\frac{26}{50}=\frac{13}{102}$.

  Ainsi $\Pr(X=1)=3*\frac{13}{102}=\frac{13}{34}$
- Pour $x=2$, $f(2)=\Pr(X=2)$, soit la probabilité d'exactement deux cartes rouges. Puisque les cartes rouges sont aussi nombreuse que les cartes noires alors cette probabilité est la même que celle d'exactement une carte noire : $\frac{13}{34}$ par symétrie entre les cartes rouges et les cartes noires.
- Pour $x=3$, $f(3)=\Pr(X=3)=\frac{2}{17}$

La loi de probabilité est donnée par

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{2}{17} & \text{si } x=0 \text{ ou } 3\\ \frac{13}{34} & \text{si } x=1 \text{ ou } 2 \end{cases}$$

[2] Le calcul de cette probabilité est une application des propriétés de la probabilité conditionnelle.

Exemple 2.4 Dans un fête foraine il y a une roue de fortune qui permet de gagner 5$, 10$ ou 100$. Sur la roue il y a 100 cases dont 10 marquées 5$, 5 marquées 10$ et une marquée 100$. S'il en coûte 5$ pour tourner cette roue et qu'elle n'est pas truquée donner la loi de probabilité de la variable aléatoire que donne le gain net à ce jeu.

Solution : Posons X la variable aléatoire que donne le gain net en \$, $S_X = \{-5, 0, 5, 95\}$.

- Si $x = -5$, $f(x) = \Pr(X = -5) = \Pr(\text{"aucune case gagnante"}) = 84/100$ puisqu'il y a 84 cases qui n'ont aucun montant inscrit.
- Si $x = 0$, $f(x) = \Pr(X = 0) = \Pr(\text{"une case marquée 5\$"}) = 10/100$ puisqu'il y a 10 cases qui redonnent le 5$ de la mise.
- Si $x = 5$, $f(x) = \Pr(X = 5) = \Pr(\text{"une case marquée 10\$"}) = 5/100$ puisqu'il y a 5 cases qui redonnent 10$ donc 5$ de profit en considérant la mise.
- Si $x = 95$, $f(x) = \Pr(X = 95) = \Pr(\text{"une case marquée 100\$"}) = 1/100$ puisqu'il y a 1 case qui redonne 100$ donc 95$ de profit en considérant la mise.

La loi de probabilité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} .84 & \text{si } x = -5 \\ .10 & \text{si } x = 0 \\ .05 & \text{si } x = 5 \\ .01 & \text{si } x = 95 \end{cases}$$

Espérance et variance d'une v.a. discrète

Une variable aléatoire discrète est entièrement définie par sa fonction de masse. L'information est cependant très dense et il est difficile de comprendre le comportement de la variable aléatoire en considérant toute l'information. Il est plus facile de se baser sur des mesures ponctuelles pour décrire certaines caractéristiques des variables aléatoires et visualiser un angle à la fois. Il y a plusieurs angles différents qui contiennent tous des éléments d'information pertinent pour l'interprétation. Les deux principales caractéristiques abordées ici sont la notion de "centre" et d'"éparpillement" ou de dispersion des valeurs du support.

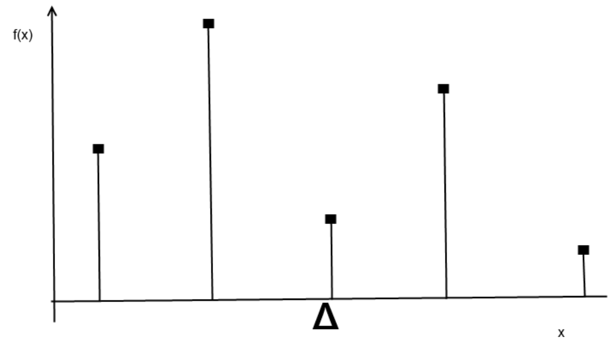
La première caractéristique est la moyenne ou l'espérance.

Définition 2.2 Soit X une variable aléatoire de support S_X son espérance est définie par

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} x\, f(x)$$

On note aussi ce paramètre μ ou μ_X s'il peut y avoir une ambiguïté entre plusieurs variables aléatoires et on parle alors de la moyenne. Ce paramètre s'interprète de la façon suivante : si une expérience est répétée très souvent, $E(X)$ est la valeur autour de laquelle on observera toutes les valeurs.

En fait la moyenne est le centre de masse de la loi de probabilité dans le sens suivant : si la loi de probabilité de la variable aléatoire est représentée par un graphique qui un bâton de hauteur équivalent à la probabilité pour chaque élément du support alors la moyenne est le point sur l'axe des x pour lequel les bâtons seront en équilibre :



Une propriété de l'espérance connue sous l'appellation "loi de la moyenne" est que si on observe un grand nombre de répétition d'une variable aléatoire et que l'on calcule la moyenne (somme des valeurs divisée par le nombre d'observations) alors la valeur obtenue sera très proche de l'espérance.

L'interprétation de cette propriété est la suivante : si une voiture a une expérance de vie de 10 ans, cela veut dire que sur le lot de voitures de la même marque, la moyenne des durées de vie de toutes les voitures sera de 10 ans. De même, si un billet de loto donne une espérance de gain de 1$, cela veut dire que si un joueur joue très souvent sa moyenne de gains après quelques siècles sera de 1$ par billet.

La notion de moyenne n'est pas suffisante pour donner une idée du comportement de la variable aléatoire : la notion de variation est très importante c'est-à-dire dans quelle mesure il y aura des valeurs plus ou moins éloignées de la moyenne. Une voiture qui a une durée de vie entre 8.5 ans et 11.5ans avec une moyenne de 10 ce n'est pas la même chose qu'une voiture qui a une durée de vie entre 1 et 16 ans avec une moyenne de 10 ans.

La variance permet de mesurer l'écart entre les différentes valeurs possibles c'est un indice de la dispersion des valeurs autour de la moyenne :

Définition 2.3 Soit X une variable aléatoire, sa variance est définie par

$$Var(X) = \sum_{x \in S_X} (x - \mu)^2 f(x)$$

C'est en fait l'espérance (moyenne) des distances entre les valeurs du support et la moyenne de la v.a. **On note aussi** σ^2.

L'**écart type**, noté σ est donné par la racine de la variance, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Une grande variance veut dire que l'on retrouve des valeurs du support loin de la moyenne tandis qu'une petite variance veut dire que les valeurs du support sont regroupées près de la moyenne. Il n'y a pas d'interprétation direct de la valeur de la variance ou de l'écart type comme dans le cas de la moyenne.

Remarque 2.2 Les deux paramètres qui résument la loi de probabilité en terme de nombre ont deux notations. Cela vient du fait qu'on utilise ces quantités dans différents contextes et qu'il est plus facile de comprendre une formule lorsque les éléments qui la compose sont simples. Ainsi la variance peut aussi être donnée comme étant

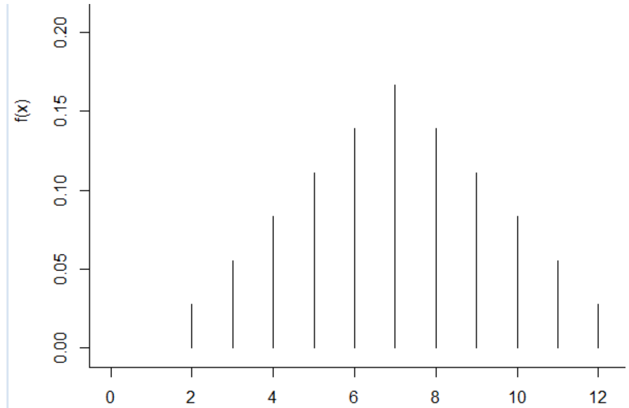
$$\sum_{x \in S_X} (x - E(X))^2 f(x)$$

On remarquera que le fait d'utiliser la lettre μ comme dans l'équation ci-haut rend la lecture un peu plus facile. Par contre si on a une variable aléatoire définie par une formule comme $X^2 + 2X - 2$ et que l'on veut illustrer sa moyenne, il est plus facile d'ulitiser la formulation $E(X^2 + 2X - 2)$ plutôt que μ_{X^2+2X-2}. Les deux notations ont donc leur place et ce n'est pas simplement une lubie pour confondre le néophyte.

Exemple 2.5 Posons X la variable aléatoire qui donne la somme des points au lancer de deux dés, on observe une moyenne et une variance de

$$\begin{aligned} E(X) &= 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} \ldots + 12\frac{1}{36} = 7 \\ Var(X) &= (2-7)^2 \frac{1}{36} + (3-7)^2 \frac{2}{36} + \cdots \\ &= \frac{35}{6} = 5.833\,3 \end{aligned}$$

Il est intéressant de constater que la moyenne de cette variable aléatoire est très facile à calculer si on se réfère à l'interprétation du paramètre : La loi de probabilité est visualisée sur le graphique suivant :



Or étant donné la symétrie par rapport à la valeur 7 on peut déduire visuellement que le centre de masse est justement la valeur 7. Cette remarque est plus générale puisque s'il y a une symétrie de la loi de probabilité par rapport à une certaine valeur alors cette dernière est nécessairement la moyenne.

Exemple 2.6 Dans une entreprise il y a trois catégories de primes de fin d'année, la première donne 1% du salaire, la deuxième 2% et la troisième 3%. On sait qu'il y a 10% qui reçoivent la première prime et 40% la deuxième et que le reste reçoivent la prime de 3%. Posons X la v.a. qui donne le % du salaire qu'un employé recevra en prime en considérant qu'on choisit un employé au hasard. La loi de probabilité de X est

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{si } x = 1 \\ 0.4 & \text{si } x = 2 \\ 0.5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

L'espérance de X est

$$E(X) = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.5 = 2.4$$

et sa variance est

$$\begin{aligned} Var(X) &= (1-2.4)^2 \times 0.1 + (2-2.4)^2 \times 0.4 \\ &\quad + (3-2.4)^2 \times 0.5 \\ &= .44 \end{aligned}$$

Exemple 2.7 Une étude sur la satisfaction de la clientèle des hôpitaux du québec donne les résultats suivants

très satisfait	40%
satisfait	30%
peu satisfait	20%
pas satisfait	10%

Une personne est prise au hasard et on considère X la v.a. qui donne 0 si «pas satisfait», 1 si «peu satisfait», 3 si «satisfait» et 4 si «très satisfait».

La loi de probabilité de cette v.a. est

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{si } x = 0 \\ 0.2 & \text{si } x = 1 \\ 0.3 & \text{si } x = 2 \\ 0.4 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Son espérance est

$$E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.4 = 2.0$$

et sa variance est

$$\begin{aligned} Var(X) &= (0-2)^2 \times 0.1 + (1-2)^2 \times 0.2 \\ &\quad + (2-2)^2 \times 0.3 + (3-2)^2 \times 0.4 \\ &= 1.0 \end{aligned}$$

Transformation

La variable aléatoire étant une mesure physique elle peut être affectée par un changement d'échelle ou une translation. Un changement d'échelle peut être de considérer une mesure en cm plutôt qu'en mètre, un dollar canadien à 90¢ US plutôt qu'à 97¢ US ou une mesure en million \$ plutôt qu'en millier \$. La translation est addition à chaque valeur d'une même constance comme une surtaxe de 10\$ au billet d'avion pour tous les passagers d'un aéroport, la majoration de 3\$ à chaque action d'une compagnie cotée en bourse, etc. Dans presque tous les cas il n'est pas nécessaire de refaire les calculs lors de ces transformations pour obtenir les différents paramètres de la nouvelle variable aléatoire.

Voici les propriétés des variables aléatoires qui permettent de tenir compte de ces changements. Posons a un nombre réel, X et Y des variables aléatoires,

- Changement d'échelle :
  - $E(aX) = aE(X)$
  - $Var(aX) = a^2 Var(X)$
  - $\sigma_{aX} = |a|\,\sigma_X$
- Translation :
  - $E(X+a) = E(X) + a$
  - $Var(X+a) = Var(X)$
- Somme :
  - $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
  - $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ si X et Y sont des variables aléatoires indépen-

dantes[3]

Exemple 2.8 Dans un jeu de hasard on peut lancer un dé et on gagne autant de \$ que le nombre de points, posons X est la variable aléatoire qui donne le gain. On sait que ce gain espéré est de 3.5\$. Supposons que le prix à payer pour jouer est de 4\$ et posons Y la v.a. qui donne le gain net.

On a $Y = X - 4$ donc le gain net espéré

$$E(Y) = E(X-4) = E(X) - 4 = 3.5 - 4 = -0.5$$

et ce dernier est négatif. Cela veut dire que si on joue très souvent, on devra perdre en moyenne 0.5\$ par partie et plus simplement le dépositaire du jeu gagne 50¢ par jeu. Si deux personnes jouent à ce jeu alors le dépositaire gagne en moyenne 1\$ et si 300 personnes jouent à ce jeu alors le dépositaire gagne en moyenne 150\$, etc.

Si c'est un jeu entre amis on veut établir le prix à payer pour que le jeu soit juste, il suffit de payer 3.5\$ puisque le gain espéré sera alors de 0.

Exemple 2.9 Considérons le jeu ci-haut et supposons que l'organisateur du jeu veuille faire un profit (disons 30% de la mise) quelle devra être la mise ?

Solution : Posons a la mise en \$ et Y le gain net du joueur en \$. L'organisateur veut empocher en moyenne $a * 0.3$ puisque a est la mise. Cela veut aussi dire que le joueur doit perdre ce montant d'où une espérance pour le gain net de

$$E(Y) = -0.3a$$

Or si la mise est de a, le gain net pour le joueur est $Y = X - a$ et son espérance $E(Y) = 3.5 - a$. Il suffit de trouver a qui satisfait les deux équations :

$$E(Y) = -0.3a = 3.5 - a$$

En solutionnant on trouve $a = 5.0$.

S'il en coûte 5\$ pour jouer, le gain net du joueur aura une espérance de $3.5 - 5 = -1.5$. C'est dire que l'organisateur remportera en moyenne 1.5\$ par partie ce qui correspond effectivemetn à 30% de la mise.

Exemple 2.10 La température d'un four de cuisson des aliments dans une entreprise de préparation d'aliments sous vide, en degrés Celcius, est donnée par une v.a. de moyenne 200 et de variance 50. Donner la température moyenne et la variance en ^oF.

Solution : Si la température est donnée en °F, la v.a. qui donne la température aura une moyenne de

$$200 \times 1.8 + 32 = 392.0$$

et une variance de $50 \times (1.8)^2 = 162.0$

[3] Deux v.a X et Y sont indépendantes si $\Pr(X = x \cap Y = y) = \Pr(X = x)\Pr(Y = y)$ pour tout $x \in S_X$ et $y \in S_Y$.

Définition 2.4 Deux variables aléatoires sont indépendantes si la probabilité conjointe est le produit des probabilités. Cela veut dire que $\Pr(X = x \text{ et } Y = y) = f_X(x) f_Y(y)$ pour une variable aléatoire discrète.

Remarque 2.3 Lorsque deux variables aléatoires sont indépendantes,

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

et

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$$

6.3 Variable aléatoire continue

Une variable aléatoire continue peut prendre des valeurs réelles dans un intervalle. Cela veut dire qu'il y a toujours une infinité non dénombrable de valeurs possibles dans le support. Une conséquence immédiate est que pour une variable aléatoire continue la probabilité d'un point est nulle :

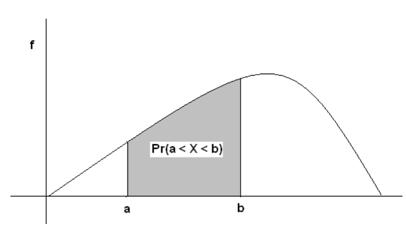
$$\Pr(X = x) = 0$$

et cela pour chaque point dans l'intervalle. On ne peut alors évaluer une probabilité que sur un intervalle de valeurs c'est-à-dire pour un événement du type $a > X > b$. La loi de probabilité est alors la fonction qui permet de calculer les probabilités pour la variable aléatoire :

Définition 3.1 Densité. La densité ou loi de probabilité d'une variable aléatoire continue est la fonction f non négative telle que pour tout $a < b$

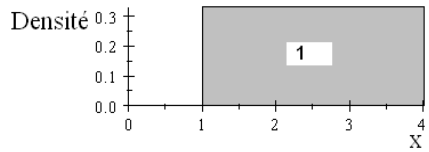
$$\Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

L'opérateur $\int$ est un outil mathématique pour calculer la surface sous une courbe entre deux bornes. On peut donc dire que le calcul d'une probabilité pour une variable aléatoire continue consiste à calculer une surface sous une courbe entre deux points comme l'illustre le graphique suivant :



On aura toujours une surface totale de 1 sous l'ensemble de la courbe pour satisfaire la propriété $\Pr(S_X) = 1$.

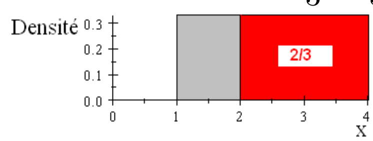
Exemple 3.1 Considérons la fonction de densité suivante



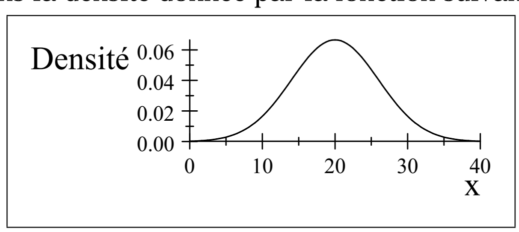
La fonction prend la valeur $1/3$ si $1 < x < 4$ et 0 sinon. Le support de la v.a. est de (1,4) et on a effectivement une densité puisque la surface sous la courbe au total donne 1 et que la fonction est non négative.

Pour évaluer la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur entre 2 et 4 il faut évaluer la surface sous la courbe. La surface est un rectangne de base 2 et de hauteur $1/3$ et ainsi

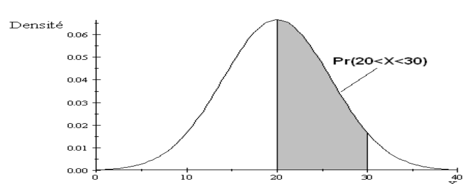
$$\Pr(2 \leq X \leq 4) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



Exemple 3.2 Considérons la densité donnée par la fonction suivante



on cherche la probabilité que la variable aléatoire soit entre 20 et 30. Il suffit de calculer la surface sous la densité entre ces deux valeurs



Encore faut-il être capable de faire ce calcul...

Certaines variables aléatoires continues ont des densités qui permettent l'évaluation des probabilités par calculs géométriques comme dans l'exemple précédant tandis que d'autres ne peuvent se faire qu'en utilisant l'opérateur d'intégration[4].

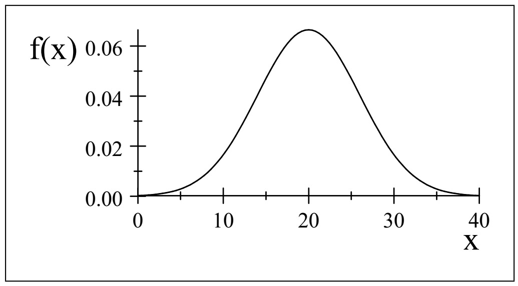
Les notions d'espérance et de variance sont basées sur les mêmes idées pour les variables aléatoires continues mais les calculs demandent l'utilisation de l'intégrale ($\int$).

Définition 3.2 Soit X une v.a. continue de support S_X, l'espérance est donnée par

$$E(X) = \int_{S_X} x\, f(x)$$

C'est le centre de masse de la fonction de probabilité c'est-à-dire de la densité.

Exemple 3.3 Considérons la v.a. de densité



on a $\mu = 20$ puisque c'est le centre de masse de la densité.

Définition 3.3 Soit X une v.a. continue, sa variance est définie par

$$Var(X) = \int_{S_X} (x - E(X))^2\, f(x)$$

Il n'y a pas de façon de contourner le problème de l'évaluation de cette quantité par l'intégrale.

Ces caractéristiques des v.a. continues possèdent les même propriétés que dans le cas discret.

Exemple 3.4 On s'intéresse au prix de l'action d'une compagnie cotée en bourse. On sait que le prix de vente est en moyenne de 9,92\$CAN avec une variance de 0.07. Si on veut considérer le prix en \$US et que ce dernier vaut 1.12\$CAN alors on obtient que la v.a. Y qui représente ce prix en \$US a comme moyenne

$$E(Y) = 9.92/1.12 = 8.8571$$

[4] L'opérateur d'intégration est l'outil mathématique permettant de faire le calcul d'une surface sous une fonction. Pour une fonction $f(x)$, la surface sous cette courbe entre 20 et 30 s'exprime

$$\int_{20}^{30} f(x)\, dx$$

mais cela dépasse largement les outils que nous utilisons pour ce cours-ci.

et comme variance

$$Var\,(Y) = 0.07/1.12^2 = 5.\,580\,4 \times 10^{-2}$$

6.4 Résumé

Une variable aléatoire est une expérience aléatoire définie sur les nombres réels, les valeurs possibles sont le support de la variable noté S_X. Il y a deux types de variables aléatoires :

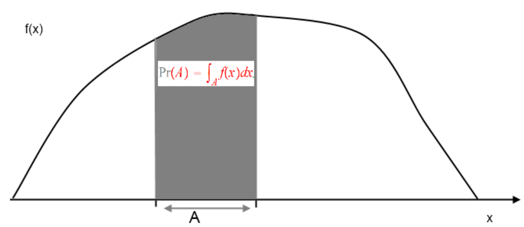
- Discrète : le support est fini ou dénombrable
- Continue : le support est un intervalle des nombres réels.

La loi de probabilité est la fonction qui donne les probabilités pour les événements. Elle est définie selon le type de variable aléatoire.

Cas discret : La loi de probabilité ou fonction de masse donne la probabilité pour chaque valeur du support, $f\,(x) = \Pr\,(X = x)$ pour $x \in S_X$. La probabilité d'un événement est donnée par $\Pr\,(A) = \sum_{x \in A} f(x)$ c'est-à-dire la somme des probabilités pour chaque élément de l'ensemble.

Si on doit trouver la loi d'une variable aléatoire discrète il faut trouver le support S_X, soit l'ensemble des valeurs possibles puis pour chaque valeur $x \in S_X$ calculer $f_X\,(x)$ en utilisant la définition suivante : $f\,(x) = \Pr\,(X = x)$

Cas continue : La loi de probabilité ou fonction de densité est une fonction non négative qui permet de calculer la probabilité d'un évémement A comme étant la surface sous la fonction pour l'intervalle A. Mathématiquement la probabilité est donnée par $\Pr\,(A) = \int_A f\,(x)\,dx$ mais plus simplement c'est la surface suivante :



Comme on ne demande pas de maîtriser l'outil d'intégration les probabilités pour une variable aléatoire continue doivent correspondre à une surface facile à évaluer géométriquement.

Les variables aléatoires sont caractérisées par des indices : la moyenne notée μ ou $E\,(X)$ est $\sum_{x \in S_X} x * f(x)$ pour les variables discriètes et $\int_{x \in S_X} x * f(x)dx$ pour les variables continues tandis que la variance notée σ^2 ou $Var(X)$ est $\sum_{x \in S_X} (x - \mu)^2 * f(x)$ pour les variables discriètes et $\int_{x \in S_X} (x - \mu)^2 * f(x)dx$ pour les variables continues.

Ces indices sont affectés de la façon suivante pour une translation et un changement d'échelle : si $Y = aX + b$ alors $E(Y) = aE(X) + b$ et $Var(Y) = a^2 Var(X)$.