第 III 章
解析延拓

任意的平面区域 D 都可作为全纯函数的存在性的自然区域: 总存在在 D 中全纯而不能解析延拓到区域之外的函数 (参看卷 I, 第 46 目). 与此不同, 在 $\mathbb{C}^n(n>1)$ 空间中存在有区域, 在它上的任意全纯函数必定都可以延拓到比它更大的区域中. 非对数凸的赖因哈特区域 (参看第 7 目) 可作为这种区域的例子.

本章主要致力于解析延拓问题, 特别是描述在 $\mathbb{C}^n$ 的区域的延拓, 其中的这些区域是全纯函数的存在区域. 解析延拓的主要方法是全纯函数的积分表示, 我们就从它开始.

§10. 积分表示

29. 马丁内利 – 博赫纳 (Martinelli-Bochner) 公式和勒雷 (Leray) 公式

在第 I 章中我们已知道了柯西公式

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \tag{1}$$

它表示了在多圆盘 $U^n=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_\nu|<r_\nu\}$ 全纯, 并在其闭包连续的函数 (在这里 $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_\nu|=r_\nu\}$ 为多圆盘的骨架, 而 $\dfrac{d\zeta}{\zeta-z}=\dfrac{d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}$). 这个表示非常方便, 但是只能运用到一个较窄的区域类型 (它可用显见的方式推广到平面区域的乘积上) 并且非常特殊: 公式 (1) 的积分并不是沿整个区域的边界而仅仅是

它的骨架, 即谢洛夫边界. 在这里, 我们将得到的表示是对任意具光滑边界或逐段光滑边界的有界区域成立的, 而积分是沿整个边界进行的.

为了得到它们中的第一个表示, 我们考虑在 $\mathbb{C}^n$ 中的一个双阶为 $(n, n-1)$ 的微分形式, 它在点 $z=0$ 为奇异:

$$\omega(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^{\nu-1}\overline{z}_\nu}{|z|^{2n}} d\overline{z}[\nu] \wedge dz, \tag{2}$$

其中 $d\overline{z}[\nu] = d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{\nu-1} \wedge d\overline{z}_{\nu+1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_n$, 和通常的 $dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$. 因为 $d(\overline{z}_\nu d\overline{z}[\nu]) = d\overline{z}_\nu \wedge d\overline{z}[\nu] = (-1)^{\nu-1} d\overline{z}$, 故当 $z \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}\left(\frac{\overline{z}_\nu}{|z|^{2n}}\right) d\overline{z} \wedge dz \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{|z|^{2n}} - \frac{n\overline{z}_\nu z_\nu}{|z|^{2n+2}}\right) d\overline{z} \wedge dz = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

(这里应用到 $\sum z_\nu \overline{z}_\nu = |z|^2$), 即这个形式在 $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ 中为闭.

另外, 对任意球面 $S_r = \{|z| = r\}$

$$\int_{S_r} \omega = \frac{1}{r^{2n}} \int_{S_r} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \overline{z}_\nu d\overline{z}[\nu] \wedge dz,$$

而由于右端积分内的形式已经不再有奇点, 故可以应用斯托克斯公式:

$$\int_{S_r} \omega = \frac{n}{r^{2n}} \int_{B_r} d\overline{z} \wedge dz,$$

其中 $B_r = \{|z| < r\}$ 为球. 然而如果 $z_\nu = x_\nu + i x_{n+\nu}$ 则 $d\overline{z}_\nu \wedge dz_\nu = 2i dx_\nu \wedge dx_{n+\nu}$, 故 $d\overline{z} \wedge dz = (2i)^n dx$[1], 其中的 $dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的体积元. 所以可以把前面的公式重写为

$$\int_{S_r} \omega = \frac{n}{r^{2n}} (2i)^n \int_{B_r} dx = \frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} \tag{4}$$

(在这里利用了右端积分等于 $\mathrm{Vol}\, B_r = \pi^n r^{2n}/n!$ 的事实).

设给出了一个有界区域 $D \subset \mathbb{C}^n$, 其具分段光滑的边界 ∂D, 以及函数 $f \in \mathscr{O}(D) \bigcap C(\overline{D})$; 假设 $0 \in D$. 由熟知的公式, 在点 $z \in D \backslash \{0\}$ 我们有 $d(f\omega) = df \wedge \omega + f \wedge d\omega$. 然而 $df \wedge \omega = 0$, 这是因为由全纯性质知, df 只通过微分 dz_ν 表达, 而 ω 包含了全部这些微分的乘积, 由于 (3) 第二项也有 $f d\omega = 0$. 因此, 形式

[1] 为了得到这个公式, 需要在左端和右端的因子中进行对换. 我们还注意到, 在这里假设 $\mathbb{R}^{2n}$ 的正定向是使它对应于有序的 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$, 而在第 19 目中则是有序的 $dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$ $(y_\nu = x_{n+\nu})$; 当 n 为奇数时这两个方向相同, 在偶数时相异.

$f\omega$ 闭于 $D\backslash\{0\}$ 并且按斯托克斯定理, 它沿 ∂D 的积分等于沿具充分小半径的球面 S_r 的积分. 再利用函数连续性以及公式 (4), 我们得到了

$$\int_{\partial D} f\omega = \int_{S_r} f\omega = f(0)\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} + \alpha(r),$$

其中当 $r \to 0$ 时 $\alpha(r) \to 0$. 因为这里的左端并不依赖于 r, 故 $\alpha(r) \equiv 0$, 从而

$$f(0) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D} f\omega. \tag{5}$$

还要取任意点 $z \in D$ 以代替 0, 以 ζ 表示被积分的变元并替换 $\omega(z)$ 为只与 $\omega(\zeta - z)$ 相差一个数量因子的形式, 这就是所谓的马丁内利 – 博赫纳形式:

$$\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}(\overline{\zeta}_\nu - \overline{z}_\nu)}{|\zeta - z|^{2n}} d\overline{\zeta}[\nu] \wedge d\zeta. \tag{6}$$

于是公式 (5) 给出了下面的结果:

定理 1. 对任意具分段光滑边界 ∂D 的有界区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 和任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)\bigcap C(\overline{D})$, 则在所有点 $z \in D$ 有

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z) \tag{7}$$

(马丁内利 – 博赫纳积分公式)[1)]

我们发现, 当 $n = 1$ 时形式 $\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z) = \dfrac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{|\zeta - z|^2}d\zeta = \dfrac{d\zeta}{\zeta - z}$, 从而马丁内利 – 博赫纳积分被约化为柯西公式. 与其相类似, 对于函数 $f \in \mathscr{O}(D)\bigcap C(\overline{D})$, 积分 (7) 在 $\overline{D}$ 外为零, 这是因为当 $z \in \mathbb{C}^n\backslash\overline{D}$, 形式 $\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z)$ 在 D 中为闭和非异, 从而由斯托克斯公式得到. 特别地, 令 $f(z) \equiv 1$, 我们得到

$$\int_{\partial D}\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z) = \chi(z), \tag{8}$$

其中 χ 为区域 D 的特征函数, 其在 $z \in D$ 时等于 1 而在 $\overline{D}$ 外为 0. 但是与柯西核不同, 马丁内利 – 博赫纳核在 $n > 1$ 时非全纯地依赖于参数 z.

* 证明:

(1) 当 $n > 1$,

$$\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\frac{\partial g}{\partial \zeta_\nu}d\overline{\zeta}[\nu] \wedge d\zeta,$$

其中 $g(z,\zeta) = -\dfrac{1}{n-1}|\zeta - z|^{2(n-1)}$ 调和地依赖于 z, 其中 $z \neq \zeta$.

[1)] 这个公式以不同方法由马丁内利在 1938 年和博赫纳于 1943 年得到.

(2) 对任意在 ∂D 上连续的函数 f, 马丁内利 – 博赫纳积分在 ∂D 外为 z 的调和函数.

(3) 对于函数 $f \in C^1(\overline{D})$ 成立下面的柯西 – 格林公式 (卷 I, 第 19 目) 的推广:

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z) - \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D}(\overline{\zeta}_\nu - \overline{z}_\nu)\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_\nu}\frac{d\overline{\zeta} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}}. *$$

最后, 我们指出, 马丁内利 – 博赫纳微分形式 (6) 具有 δ– 函数的性质. 事实上, 当 $z = 0$ 时 $d\omega(z) \neq 0$, 并且形式地将斯托克斯定理用于 (8) 和任意的区域 $D \ni 0$, 我们得到

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = 1;$$

因为当 $z \neq 0$ 时 $d\omega = 0$, 故 D 在此可以换为 $\mathbb{C}^n$. 当 $z = 0$ 时马丁内利 – 博赫纳公式也可以形式地写为

$$f(0) = \int_D d(f\omega) = \int_{\mathbb{C}^n} f d\omega$$

(我们利用了由 f 的全纯性得到 $d(f\omega) = fd\omega$). 因此, 马丁内利 – 博赫纳公式重新表现出了 δ– 函数的性质 [1]; 当 $n = 1$ 时对于柯西积分公式也同样如此.

我们转而推导出更一般的积分公式, 它是由勒雷在 1956 年发现的, 并称其为**柯西 – 凡塔皮耶 (Cauchy-Fantappiè) 公式**. 为此, 我们考虑形式

$$\begin{aligned}\delta(w) &= \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}w_\nu dw[\nu],\\ \Omega(z, w) &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\delta(w) \wedge dz}{\langle z, w\rangle^n},\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $dw[\nu] = dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_{\nu-1} \wedge dw_{\nu+1} \wedge \cdots \wedge dw_n, dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ 以及

$$\langle z, w\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu w_\nu = (z, \overline{w}). \tag{10}$$

当 $w = \overline{z}$ 时, 公式 Ω 显然等同于马丁内利 – 博赫纳形式:$\Omega(z, \overline{z}) = \omega_{\mathrm{MB}}(z)$. 这个形式在圆锥 $Q_0 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^{2n} : \langle z, w\rangle = 0\}$ 具有奇异性, 而在 $\mathbb{C}^{2n}\backslash Q_0$ 的点上为闭形式, 这是因为

$$d\Omega = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left\{n\frac{dw \wedge dz}{\langle z, w\rangle^n} - \frac{n}{\langle z, w\rangle^{n+1}}\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu w_\nu dw \wedge dz\right\} = 0.$$

可直接验证: $\delta(w) = w_1^n d\left(\frac{w_2}{w_1}\right) \wedge \cdots \wedge d\left(\frac{w_n}{w_1}\right)$, 一般地, 有

$$\delta(w) = (-1)^{\nu-1}w_\nu^n d\left(\frac{w_1}{w_\nu}\right) \wedge \cdots \wedge d\left(\frac{w_{\nu-1}}{w_\nu}\right) \wedge d\left(\frac{w_{\nu+1}}{w_\nu}\right) \wedge \cdots \wedge d\left(\frac{w_n}{w_\nu}\right),$$

[1] 对任意点 z 的情形以 $\omega(\zeta - z)$ 替换 $\omega(z)$.

而由于 $\langle z,w\rangle^n = w_\nu^n\langle z,w/w_\nu\rangle^n$, 故形式 Ω 实际上并不是依赖于 w 而是依赖于 w 与它的一个坐标的比值, 即在 $\mathbb{C}^n(w)$ 中经过原点的复直线上为常值.

设函数 f 和区域 D 如上所设. 如果 $0\in D$, 则由马丁内利 – 博赫纳公式有

$$f(0)=\int_{\partial D} f(z)\Omega(z,\overline{z}). \tag{11}$$

在这里, 我们可以假定对形式 $f(z)\Omega(z,\overline{z})$ 的积分是沿着 $(2n-1)$ 维闭链 $\gamma_0=\{(z,w)\in\mathbb{C}^{2n}: z\in\partial D, w=\overline{z}\}$ 进行的, 由于当 $z\in\partial D$ 时 $\langle z,\overline{z}\rangle=|z|^2\neq 0$, 故 γ_0 与锥 Q_0 不相交. 我们的这个证明方法 [1] 基于如下命题: 在这个公式中, γ_0 可以被换为任意其他的闭链 $\gamma_1=\{(z,w)\in\mathbb{C}^{2n}: z\in\partial D, w=\lambda(z)\}$, 其中的 $\lambda:\partial D\to\mathbb{C}^n$ 是一个光滑的向量值函数, 使得 $\langle z,\lambda(z)\rangle\neq 0$ 对所有 $z\in\partial D$ 成立 (即 γ_1 与 Q_0 不相交).

为了证明此命题, 我们首先利用在上面提及的那个形式 Ω 对 w 依赖性的特点; 由这个特点知, 在不改变积分值的情形下, 闭链 γ_0 和 γ_1 可以分别换作闭链 $\gamma_0'=\{z\in\partial D, w=\overline{z}/|z|^2\}$ 和 $\gamma_1'=\{z\in\partial D, w=\lambda(z)/\langle z,\lambda(z)\rangle\}$, 它们均位于二次曲面 $Q_1=\{(z,w)\in\mathbb{C}^{2n}:\langle z,w\rangle=1\}$ 上. 在闭链 γ_0',γ_1' 上张有一个 $(2n)$ 维的膜

$$\sigma=\left\{(z,w,t)\in\mathbb{C}^{2n}\times[0,1]: w=t\frac{\lambda(z)}{\langle z,\lambda(z)\rangle}+(1-t)\frac{\overline{z}}{|z|}\right\}.$$

其中的所有点满足 $\langle z,w\rangle=1$, 故 $\sigma\in Q_1$, 从而不包含形式 Ω 的奇点; 这个膜的定向边缘是 $\gamma_1'-\gamma_0'$. 由斯托克斯公式有

$$\int_{\gamma_1'} f\Omega-\int_{\gamma_0'} f\Omega=\int_\sigma d(f\Omega)=0,$$

这是因为形式 Ω 在 Q_0 外面的闭性质以及 df 只由微分 dz_ν 表达, 而 Ω 包含了它们的乘积, 故在 σ 上 $d(f\Omega)=df\wedge\Omega+fd\Omega=0$. 因此, 在改写过的公式 (11)

$$f(0)=\int_{\gamma_0'} f(z)\Omega(z,w)$$

中, 闭链 γ_0' 可以换为 γ_1' 或者 γ_1, 从而我们得到了

$$f(0)=\int_{\partial D} f(z)\Omega(z,\lambda(z)). \tag{12}$$

就像在对马丁内利 – 博赫纳公式的推导那样, 我们在这里改变记号, 便得到了下面的结果.

[1] 这个方法是辛钦 (G. M. Khenkin) 告诉我们的.

定理 2. 对具有逐段光滑边界的任意有界区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 和任意函数 $f \in \mathscr{O}(D) \bigcap C(\overline{D})$ 成立勒雷公式

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\zeta - z, \lambda(\zeta)) \\ &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} f(\zeta) \frac{\delta(\lambda(\zeta)) \wedge d\zeta}{\langle \zeta - z, \lambda(\zeta)\rangle^n}. \end{aligned} \tag{13}$$

这里的 λ 是在 ∂D 上任意光滑的向量值函数, 使得 $\langle \zeta - z, \lambda(\zeta)\rangle \neq 0$ 对所有 $z \in D$ 和 $\zeta \in \partial D$ 成立.

这个函数各种不同选取的可能性, 即它也可以依赖于点 z, 赋予了勒雷公式特别广泛的特征. 本质上说, 这个公式包含了所有最常使用的全纯函数的积分表示.

我们来考察几个例子.

(1) 对于球 $B^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ 可以取 $\lambda(\zeta) = \overline{\zeta}$, 这是由于 $\langle \zeta - z, \overline{\zeta}\rangle = |\zeta|^2 - \langle z, \overline{\zeta}\rangle = 1 - (z, \zeta) \neq 0$ 对于 $z \in B^n$ 和 $\zeta \in \partial B^n$ 成立 (由施瓦茨不等式 $|(z,\zeta)| \leqslant |z||\zeta| = |z| < 1$). 于是勒雷公式有形式

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial B^n} f(\zeta) \frac{\delta(\overline{\zeta}) \wedge d\zeta}{(1 - (z, \zeta))^n}. \tag{14}$$

(2) 设区域 $D = \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi(z) < 0\}$, 其中 $\varphi \in C^1(\overline{D})$ 及 $\bigtriangledown\varphi|_{\partial D} \neq 0$ 使得在每点 $\zeta \in \partial D$, 复切平面 $T^c_\zeta(\partial D)$ 位于 D 之外, 特别地, 这个条件为所有具光滑边缘的凸区域所满足. 在这里取 $\lambda(\zeta) = \bigtriangledown_\zeta \varphi$, 这是因为 $\langle \zeta - z, \bigtriangledown_\zeta\varphi\rangle = -(z - \zeta, \overline{\bigtriangledown_\zeta\varphi})$ 只在 $T^c_\zeta(\partial D)$ 取零值 (参看第 17 目) 从而对所有 $z \in D$ 和 $\zeta \in \partial D$ 不为零.

如果记 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_j} = \varphi_j$, 则 $\lambda = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$, 从而由公式 (9) 有

$$\delta(\lambda) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \varphi_j d\varphi[j],$$

而由于 $d\zeta$ 包含了全部微分 $d\zeta_\nu$ 的乘积, 于是在乘积 $\delta(\lambda) \wedge d\zeta$ 中可将所有 $d\varphi_\nu$ 换为 $\overline{\partial}\varphi_\nu$. 然而由外积的性质知

$$\overline{\partial}\varphi[j] = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \cdots, \varphi_n)}{\partial(\overline{\zeta}_1, \cdots, \overline{\zeta}_{\nu-1}, \overline{\zeta}_{\nu+1}, \cdots, \overline{\zeta}_n)} d\overline{\zeta}[\nu]$$

从而 $d\overline{\zeta}[\nu] \wedge d\zeta$ 在乘积 $\delta(\lambda) \wedge d\zeta$ 中的系数等于

$$\Phi_\nu = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \varphi_j \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \cdots, \varphi_n)}{\partial(\overline{\zeta}_1, \cdots, \overline{\zeta}_{\nu-1}, \overline{\zeta}_{\nu+1}, \cdots, \overline{\zeta}_n)}.$$

显然, 这个表达式可改写为行列式的形式

$$\Phi_\nu = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\bar{\zeta}_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\bar{\zeta}_1} \\ & \cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\bar{\zeta}_n} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\bar{\zeta}_n} \end{vmatrix}, \tag{15}$$

其中对 $\bar{\zeta}_\nu$的导数的行被略去.

于是, 对于所考虑类型的区域 (特别地, 凸区域), 勒雷公式可写成

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\langle\nabla_\zeta\varphi, \zeta - z\rangle^n}\sum_{\nu=1}^n \Phi_\nu d\bar{\zeta}[\nu]\wedge d\zeta. \tag{16}$$

这个公式的有用的特点是它的核对 z 的全纯依赖性, 在马丁内利 – 博赫纳公式则不是如此的 [1)].

* 证明, 对凸的有界区域 $D = \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi(z) < 0\}$ 成立勒雷 – 格林公式, 它与 (16) 在右端的项上有所不同:

$$-\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_D \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu-1}\Phi_\nu \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_\nu}\frac{d\bar{\zeta}\wedge d\zeta}{\langle\nabla_\zeta\varphi, \zeta - z\rangle^n}. \quad *$$

30. 韦伊 (Weil) 公式.

在这里我们还要推导一个公式, 其核全纯地依赖于可应用于某些特殊类型区域的参数.

定义 1. 设给出了区域 $D \subset \mathbb{C}^n$, 以及还有有限个函数 $W_i \in \mathscr{O}(D)$ 和平面区域 $D_i \Subset W_i(D), i = 1, \cdots, N$. 如果集合

$$\Pi = \{z \in D : W_i(z) \in D_i, \quad i = 1, \cdots, N\} \tag{1}$$

在 D 中为紧, 则称该集合为多面体集合.

这种集合不必是连通的; 称连通的形如 (1) 的集合为多面体区域. 常常考虑所有区域 D_i 为圆盘的情形; 对应的集合

$$\Pi = \{z \in D : |W_i(z)| < r_i, \quad i = 1, \cdots, N\} \tag{2}$$

被称为解析多面体. 如果所有函数 W_i 为多项式, 则称 (2) 为多项式多面体.

在 $N = n$ 和所有 $W_i(z) = z_i$ 的特殊情形, 多面体区域是多圆形, 而多面体则为多圆盘.

[1)] 我们注意到, 不管向量值函数 λ 依赖还是不全纯依赖于 z, 公式 (13) 中的核都全纯依赖于 z.

定义 2. 称多面体集合 (1) 为*韦伊集*是说, 如果 $N \geqslant n$, 并且

1) 所有它的面

$$\sigma_i = \{z \in D : W_i(z) \in \partial D_i, W_j(z) \in \overline{D}_j, j \neq i\} \tag{3}$$

是 $(2n-1)$ 维流形;

2) 任意 k 个不同的面 $(2 \leqslant k \leqslant n)$ 的交, 即韦伊集的边, 其维数不大于 $2n-k$.

称韦伊集的 n 维边

$$\sigma_{i_1\cdots i_n} = \sigma_{i_1} \bigcap \cdots \bigcap \sigma_{i_n} \tag{4}$$

的集合为其*骨架*. 称连通的韦伊集为*韦伊区域*.

为了得到在韦伊区域中全纯函数的积分表示, 我们需要定义在这些区域中函数 W_i 的一个特殊展开式. 这个展式的可能性由下面的定理得以保证.

赫费尔 (Hefer) 定理. 对任意函数 $W_i \subset \mathscr{O}(D)$, 其中 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的全纯区域, 则存在 n 个函数 $P_\nu^i(\zeta, z) \in \mathscr{O}(D \times D)$ $(\nu = 1, \cdots, n)$ 使得对所有点 $\zeta, z \in D$ 成立等式

$$W_i(\zeta) - W_i(z) = \sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu - z_\nu) P_\nu^i(\zeta, z). \tag{5}$$

在一般情形下赫费尔定理不是个初等的定理 [1], 我们将在第 50 目中证明它. 在这里我们只需注意到, 对于多项式, 恒等式 (5) 可以经过简单的重新安排函数 W_i 在点 z 的泰勒展式得到, 在这里的赫费尔展式的系数 P_ν^i 也是多项式.

定理 1 (A. 韦伊). 设 Π 为韦伊区域 (1), 它由具光滑边界的区域 D_i 定义. 于是任意函数 $f \in \mathscr{O}(\Pi) \bigcap C(\overline{\Pi})$ 在任意点 $z \in \Pi$ 可以用下面公式表示:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1 \cdots i_n}{}' \int_{\sigma_{i_1\cdots i_n}} \frac{f(\zeta)}{\prod_{\nu=1}^{n} \{W_{i_\nu}(\zeta) - W_{i_\nu}(z)\}} \begin{vmatrix} P_1^{i_1} & \cdots & P_n^{i_1} \\ & \cdots\cdots & \\ P_1^{i_n} & \cdots & P_n^{i_n} \end{vmatrix} d\zeta, \tag{6}$$

其中的和取遍所有有序指标组 $(1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant N)$, 它定义了区域的骨架的边, P_ν^i 为对 W_i 的赫费尔系数, 并且 $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$; 这些边由使所有 ∂D_i 以正向通过的方式定义.

在 Π 为多圆形区域 $(N = n, W_i \equiv z_i, i = 1, \cdots, N)$ 情形, 骨架 Γ 由一条边 $\sigma_{1\cdots n}$ 组成 (它与第 2 目中的骨架的意思一致) 并且 (6) 中的和也只有一项. 赫费尔系数 P_ν^i 在这种情形下, 当 $i = \nu$ 时等于 1, 当 $i \neq \nu$ 时等于 0, 即在韦伊公式中的行列式等于 1, 从而此公式为

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu - z_\nu)}. \tag{7}$$

[1] 赫费尔定理被证于 1942 年, 而韦伊公式 (6) 则是在他 1935 年的著作中被推导出的.

这样一来, 韦伊公式推广了对于在多圆形区域上的柯西积分式到韦伊区域上. 像柯西公式那样, 它的核对变量 ζ 和 z 为全纯.

为了缩短形式的计算, 我们将在 $n=2$ 和 $f \in \mathscr{O}(\overline{\Pi})$ 的情形下进行韦伊定理的证明 [1].

证明. 我们从马丁内利 – 博赫纳公式在 $\mathbb{C}^2$ 中韦伊区域上的情形开始着手, 这时它的形式为

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\sigma_i} f(\zeta)\frac{(\overline{\zeta}_1-\overline{z}_1)d\overline{\zeta}_2-(\overline{\zeta}_2-\overline{z}_2)d\overline{\zeta}_1}{|\zeta-z|^4}\wedge d\zeta, \tag{8}$$

其中 σ_i 为区域 Π 的面. 得出韦伊公式的想法在于: 我们试图将斯托克斯公式应用于 (8) 使得非全纯微分 $d\overline{\zeta}_\nu$ 化零, 而替代在面 σ_i 的是沿骨架的边 σ_{ij} 的积分; 这时发现核的非全纯部分 (变量 $\overline{\zeta}_\nu-\overline{z}_\nu$ 和 $|\zeta-z|$) 也消去. 赫费尔展式 (5) 在此变换中起着至关重要的作用.

首先我们注意到 (8) 中的被积形式 $\omega(\zeta,z)$ 为恰当形式; 它是下面 N 个形式中任一个的微分:

$$\Omega_i(\zeta,z)=\frac{1}{|\zeta-z|^2\{W_i(\zeta)-W_i(z)\}}\begin{vmatrix} P_1^i & P_2^i \\ \overline{\zeta}_1-\overline{z}_1 & \overline{\zeta}_2-\overline{z}_2\end{vmatrix} d\zeta. \tag{9}$$

我们通过直接计算验证这个论断; 为简单起见, 记 $z=0, W_i=W_i(\zeta)-W_i(0)$:

$$\begin{aligned}
d\Omega_i &= \frac{1}{W_i}\left\{-\frac{\zeta_1 d\overline{\zeta}_1+\zeta_2 d\overline{\zeta}_2}{|\zeta|^4}(P_1^i\overline{\zeta}_2-P_2^i\overline{\zeta}_1)+\frac{1}{|\zeta|^2}(P_1^i d\overline{\zeta}_2-P_2^i d\overline{\zeta}_1)\right\}\wedge d\zeta \\
&= \frac{1}{W_i|\zeta|^4}\left\{-\left(\zeta_1 d\overline{\zeta}_1+\zeta_2 d\overline{\zeta}_2\right)\left(P_1^i\overline{\zeta}_2-P_2^i\overline{\zeta}_1\right)+\right. \\
&\quad \left.(\zeta_1\overline{\zeta}_1+\zeta_2\overline{\zeta}_2)(P_1^i d\overline{\zeta}_2-P_2^i d\overline{\zeta}_1)\right\}\wedge d\zeta \\
&= \frac{1}{W_i|\zeta|^4}(\overline{\zeta}_1 d\overline{\zeta}_2-\overline{\zeta}_2 d\overline{\zeta}_1)(\zeta_1 P_1^i+\zeta_2 P_2^i)\wedge d\zeta \\
&= \frac{1}{|\zeta|^4}(\overline{\zeta}_1 d\overline{\zeta}_2-\overline{\zeta}_2 d\overline{\zeta}_1)\wedge d\zeta,
\end{aligned}$$

论断得证.

我们还注意到当 $z\in\Pi, \zeta\in\sigma_i$ 时只有差 $W_i(\zeta)-W_i(z)$ 不为零 (因为 $W_i(\zeta)\in\partial D_i, W_i(z)\in D_i$), 而所有其他的差则在某些点化零. 故而当 $z\in\Pi,\zeta\in\sigma_i$ 时只有形式 Ω_i 非异, 而所有其他的形式 $\Omega_j, j\neq i$ 为奇异, 从而在沿面 σ_i 取积分时, 只能这样

[1] 完全的论证可参看弗拉基米尔 (V. S. Vladimirov) 的《多复变函数论》(M.: Наука, 1964, p248—252)

地应用斯托克斯公式:

$$\int_{\sigma_i} f(\zeta)\omega(\zeta,z) = \int_{\sigma_i} d\{f(\zeta)\Omega_i(\zeta,z)\}$$
$$= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \int_{\sigma_{ij}} f(\zeta)\Omega_i(\zeta,z)$$

(我们在那里利用了全纯函数 f 可以放在形式 Ω_i 的微分符号之内).

如果像公式 (8) 所要求的那样, 把这些积分加在一起, 则每条边 σ_{ij} 会出现两次但具有相反的定向 (由边缘 σ_i 和 σ_j 的面得到). 所以我们有

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\sigma_i} f(\zeta)\omega(\zeta,z) = \sum_{i,j=1}^{N}{}' \int_{\sigma_{ij}} f(\zeta)\{\Omega_i(\zeta,z) - \Omega_j(\zeta,z)\},$$

其中取和是按有序偶对指标进行的 $(1 \leqslant i < j \leqslant N)$.

还要注意, 在相减时, 核 (9) 的非解析部分已消去:

$$\Omega_i - \Omega_j = \frac{1}{|\zeta|^2}\frac{|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2}{W_iW_j}(P_1^iP_2^i - P_1^jP_2^j)d\zeta$$
$$= \frac{1}{W_iW_j}\begin{vmatrix} P_1^i & P_2^i \\ P_1^j & P_2^j \end{vmatrix} d\zeta$$

(我们再次使用到上面提到的记号的简化以及赫费尔展式). 于是我们得到了公式

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{i,j=1}^{N}{}' \frac{f(\zeta)}{\{W_i(\zeta)-W_i(z)\}\{W_j(\zeta)-W_j(z)\}}\begin{vmatrix} P_1^i & P_2^i \\ P_1^j & P_2^j \end{vmatrix} d\zeta, \tag{10}$$

它即等于 $n=2$ 时的韦伊公式. □

注. 如果韦伊集 (1) 不连通, 则它被分解为最多可数个连通分支 (韦伊区域). 显然定理 1 在 Π 为不连通的韦伊集的情况下仍然有效. 在这种情形下, 对于属于某个分支的 z, 在韦伊公式 (6) 中不为零的只有沿此分支的骨架的积分, 而沿其他分支的骨架的积分则化为零. 这来自那样的事实, 即那个推导出韦伊积分的马丁内利 – 博赫纳积分在该区域外为零.

韦伊公式的核的全纯性被应用到, 例如, 由某类全纯函数的逼近问题. 我们来推导与此相关的基本事实.

定理 2. 任意全纯于解析多面体 (2) 和在其闭包上连续的函数 f, 可以在此多面体内展开为级数

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty}\sum_{(i)}{}' A_k^i[W_i(z)]^k, \tag{11}$$

其中 $k=(k_1,\cdots,k_n), i=(i_1,\cdots,i_n)$ 为向量指标, $[W_i(z)]^k=[W_{i_1}(z)]^{k_1}\cdots[W_{i_n}(z)]^{k_n}$, 里层的和是按有序组 $1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant N$ 取的, 系数则由公式

$$A_k^i=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_n}}\frac{f(\zeta)}{[W_{i_1}(\zeta)]^{k_1+1}\cdots[W_{i_n}(\zeta)]^{k_n+1}}\begin{vmatrix}P_1^{i_1} & \cdots & P_n^{i_1}\\ & \cdots\cdots & \\ P_1^{i_n} & \cdots & P_n^{i_n}\end{vmatrix}d\zeta \tag{12}$$

且级数 (11) 在该多面体的任意紧子集上一致收敛.

证明. 由韦伊公式得出展式 (11) 的方式完全像从柯西积分公式得到泰勒展式那样. 对任意点 $z\in\Pi$ 及 Π 的骨架上任意点 ζ 可以写出下面按几何级数的展开式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}[W_{i_\nu}(\zeta)-W_{i_\nu}(z)]}&=\sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{\infty}\frac{[W_{i_1}(z)]^{k_1}\cdots[W_{i_n}(z)]^{k_n}}{[W_{i_1}(\zeta)]^{k_1+1}\cdots[W_{i_n}(\zeta)]^{k_n+1}}\\&=\sum_{|k|=0}^{\infty}\frac{[W_i(z)]^k}{[W_i(z)]^{k+1}}.\end{aligned}$$

在固定 $z\in\Pi$ 时, 这个展开式在 $\sigma_{i_1\cdots i_n}$ 上对 ζ 一致收敛, 并且将其代入韦伊公式 (6) 我们便得到了具系数 (12) 的展式 (11).

级数 (11) 在多面体 Π 的紧子集上的一致收敛性由通常的方式即可加以证明. □

推论 1. 任意在解析多面体 Π 中全纯的函数 f, 在任意集合 $K\Subset\Pi$ 上可以被在区域 D 上全纯的函数作任意精确的逼近, 其中的区域 D 是在多面体的定义中所涉及的那个.

这个推论简单地说可以叙述为: 函数族 $\mathscr{O}(D)$ 稠于族 $\mathscr{O}(\Pi)$.

证明. 级数 (11) 的部分显然属于 $\mathscr{O}(D)$, 它们逼近于函数 $f\in\mathscr{O}(\overline{\Pi})$. 为了避免 f 在 $\overline{\Pi}$ 上为连续这个条件. 以多面体 $\Pi'=\{z\in\Pi:|W_i(z)|<r_i'\}$ 代替 Π, 其中的 $r_i'<r_i$ 且充分靠近 r_i (i 为数值指标). □

特别, 当 Π 为多项式的多面体 (即所有函数 W_i 为多项式) 时, 级数 (11) 的部分和为多项式. 我们于是有

推论 2. 任意在多项式多面体 Π 中全纯的函数 f 在任意集合 $K\Subset\Pi$ 上可以被多项式以任意精确度逼近.

$\mathbb{C}^n$ 中的那种区域, 其紧子集上的任意全纯函数可被多项式以任意精确度逼近, 则称其为*龙格* (Runge) *区域* (比较卷 I 第 23 目的龙格定理). 推论 2 可叙述为: *任意多项式多面体是龙格区域.*

§11. 延拓定理

考虑几个关于函数的全纯延拓的定理, 它们反映了高维情形的特点.

31. 从边界的延拓

这些定理的第一个断言, 在 $n>1$ 的 $\mathbb{C}^n$ 中, 每个在一个区域的边界上按某种意义为全纯的函数必定可以全纯地延拓到整个区域. 在边界上全纯性的准确意思是说, 函数在它上面满足所谓的柯西 – 黎曼切方程. 这些方程在分析和应用中起着很大的作用, 故而我们将更仔细地关注它们.

考虑在 $\mathbb{C}^n$ 中的实超曲面 S, 它在邻域 $U\supset S$ 中由方程 $\varphi(z)=0$ 给出, 其中 $\varphi\in C^1(U)$, 并且在 U 中梯度 $\bigtriangledown\varphi\neq 0$. 设在 U 中给出了一个复函数 f, 其为 C^1 类. 它的微分 $\overline{\partial}f=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial\overline{z}_\nu}d\overline{z}_\nu$ 在点 $\zeta\in S$ 分成了两项, 其中一个为 $\overline{\partial}_N f=\lambda\overline{\partial}\varphi$ $(\lambda\in\mathbb{C})$, 指向 S 在该点的复法线, 而另一个 $\overline{\partial}_T f=\overline{\partial}f-\overline{\partial}_N f$, 指向与此法线复正交的方向 [1]. 分别称 $\overline{\partial}_N f$ 和 $\overline{\partial}_T f$ 为 $\overline{\partial}f$ 的**法分量和切分量**, 而称算子 $\overline{\partial}_T$ 为**柯西 – 黎曼切向算子**. 这个算子是由柯恩 (J. J. Kohn) 在 1965 年引进的.

定义. 设 S 为 $\mathbb{C}^n$ 中实超平面, U 为上面所说的那个邻域. 如果在每点 $\zeta\in S$ 有

$$\overline{\partial}_T f\equiv 0 \tag{1}$$

则称函数 $f\in C^1(U)$ 在 S 上满足**柯西 – 黎曼切条件**, 或者简单地说是 S 上的 CR – 函数.

我们将证明这个定义的合理性, 它的意思是说在函数 f 上的切向算子 $\overline{\partial}_T$ 只由其在 S 上的值决定而不依赖于它到邻域 U 中 C^1– 延拓的方式. 为了证明这点, 需要下面类似魏尔斯特拉斯除法定理的引理.

引理. 如果在区域 $U\subset\mathbb{R}^n$ 中函数 $\varphi\in C^k, k\geqslant 1$, 以及 $\bigtriangledown\varphi=\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)\neq 0$, 而函数 $\psi\in C^k(U)$ 在 $\varphi=0$ 处处处为零, 则存在函数 $h\in C^{k-1}(U)$ 使得 $\psi(x)=h(x)\varphi(x)$ 对所有 $x\in U$ 成立.

证明. 由于论断的局部性, 可以假定点 $0\in S$ 的邻域 U 为充分小的凸集. 因为在 U 上 $\bigtriangledown\varphi\neq 0$, 故不失一般性, 设在此处 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\neq 0$ 且方程 $\varphi(x)=0$ 可解出为 $x_n=\varphi_1('x)$, 其中 $'x=(x_1,\cdots,x_{n-1})$. 在变量的同胚变换 $'x\mapsto' x, x_n\mapsto x_n-\varphi('x)$ 下将 C^k 的情形变到了 $\varphi(x)\equiv x_n$ 和 $\psi\in C^k(U)$ 使得 $\psi('x,0)=0$. 由显见的对所有

---

[1] 我们记得 (参看第 17 目), 复法线 $n_\zeta(S)$ 定义为复直线 $\{z-\zeta=\lambda\overline{\bigtriangledown_\zeta\varphi},\lambda\in\mathbb{C}\}$, 而与其复正交的方向构成复切平面 $T_\zeta^c=\{(z-\zeta,\overline{\bigtriangledown_\zeta\varphi})=0\}$; 这里我们将余向量 $\sum a_\nu d\overline{z}_\nu$ 与向量 $a=(a_\nu)$ 等同.

$x \in U$ 成立的等式

$$\psi(x) = x_n \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_n} \psi('x_1, tx_n) dt$$

可以看出, 可以取在这里出现的积分当作函数 h; 它显然属于 $C^{k-1}(U)$[1]. □

设 F 和 G 是函数 f 在区域 U 中的延拓, 其中的 f 只在 S 上给出. 因为 $F - G$ 在 S 上为零, 故由引理有 $F - G = h\varphi$, 其中 $h \in C^0(U)$. 那么在 S 的点上我们有 [2]

$$\overline{\partial} F - \overline{\partial} G = h \overline{\partial} \varphi,$$

而因为 $h\overline{\partial}\varphi$ 指向 S 的复法线, 故 $\overline{\partial}_T F - \overline{\partial}_T G = 0$. 故在 S 上必定有 $\overline{\partial}_T F = \overline{\partial}_T G$, 从而 $\overline{\partial}_T$ 对于函数 f 在 S 之外的延拓的无关性得证.

在应用中利用柯西 – 黎曼切条件的各种不同形式是方便的. 我们在这里推导出其中几个.

定理 1. 柯西 – 黎曼切条件(1) 等价于下列条件中的任一个: 在任意点 $\zeta \in S$

a) $\overline{\partial} f \wedge \overline{\partial} \varphi = 0$,

b) $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{u}} = 0$ 对任意复切方向 $u \in T_\zeta^c(S)$ 成立,

c) $df \wedge dz = 0$, 其中 $dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$.

证明. 由 (1) 知 $\overline{\partial} f = \lambda \overline{\partial} \varphi$, 而因为 $\lambda \overline{\partial} \varphi \wedge \overline{\partial} \varphi = 0$ 故 a) 成立. 反之, 如果 a) 成立, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_\nu} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_\mu} = 0$$

对所有 $\mu, \nu = 1, \cdots, n$ 成立, 从而 $\overline{\partial} f = \lambda \overline{\partial} \varphi$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 为某个复数, 即满足 (1).

为了证明第二个等价关系, 我们设 $\zeta = 0$. 如果选取坐标使得 $T_0^c(S) = \{z_n = 0\}$, 则法分量 $\overline{\partial}_N f = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}_n} d\overline{z}_n$, 而切分量

$$\overline{\partial}_T f = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu} d\overline{z}_\nu. \tag{2}$$

因为向量 $\dfrac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial z_{n-1}}$ 构成 $T_0^c(S)$ 的基, 故考虑到 (2) 方程 (1) 等价于方程组

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu} = 0, \quad \nu = 1, \cdots, n-1, \tag{3}$$

---

[1] 显然, 在 $\varphi(x) \neq 0$ 的地方函数 $h(x) = \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)} \in C^k$; 故在集合 $\{\varphi(x) = 0\}$ 上 h 的光滑性可能降低 1, 这可由下面的函数表明: $\varphi(x) = x_n, \psi(x) = x_n + x_n^2 \sin \dfrac{1}{x_n}$.

[2] 这不是从乘积的微分公式得到的 (因为只有 $h \in C^0$, 故不能应用), 而是直接由 $h\varphi$ 在 S 上的偏导数的定义得到.

而这个方程组就是条件 b).

最后, 如果选取坐标使得实切平面为 $T_0(S)=\{\mathrm{Im}\ z_n=0\}$, 故在其上有 $dz_n=d\overline{z}_n$. 如前面知 $T_0^c(S)=\{z_n=0\}$, 故而 $\overline{\partial}_T f$ 由公式 (2) 表达. 因为 dz 是所有 dz_ν 的乘积, 故在条件 c) 中形式 df 可以换作 $\overline{\partial}f$, 另外由于 $dz_n=d\overline{z}_n$, 在 $\overline{\partial}f$ 的表达式中最后一项, 即 $\overline{\partial}_n f$ 可以舍去:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_\nu}d\overline{z}_\nu\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n=0.$$

因为微分 $d\overline{z}_1,\cdots,d\overline{z}_{n-1},dz_1,\cdots,dz_n$ 在 $T_0(S)$ 上的无关性, 这个等式等价于方程组 (3), 即条件 b). □

对于应用而言, 形式 b) 特别方便. 如果超曲面 S 由方程 $\varphi(z)=0$ 给出, 则在它的 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_n}\neq 0$ 的点上, 复切平面的基可以取作向量

$$u_\nu=\frac{\partial\varphi}{\partial z_n}\frac{\partial}{\partial z_\nu}-\frac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}\frac{\partial}{\partial z_\nu},\quad \nu=1,\cdots,n-1 \tag{4}$$

(参看第 27 目), 故在这种情形 S 上的柯西 – 黎曼切条件可改写为

$$\overline{u}_\nu(f)=\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}_n}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_\nu}-\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}_\nu}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_n}=0,\quad \nu=1,\cdots,n-1. \tag{5}$$

例题.

(1) 对于球面 $\{z\in\mathbb{C}^n:|z|=1\}$, 函数 $\varphi(z)=\sum z_\nu\overline{z}_\nu-1$, 故而在 $z_n\neq 0$ 的点柯西 – 黎曼切向方程为

$$z_n\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_\nu}=z_\nu\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_n},\quad \nu=1,\cdots,n-1.$$

(2) 对于庞加莱球面 $\{z\in\mathbb{C}^n:y_n=|'z|^2\}$(参看卷 I 的问题 18), 函数 $\varphi(z)=\dfrac{z_n-\overline{z}_n}{2i}-\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}z_\nu\overline{z}_\nu$, 故在其所有点柯西 – 黎曼切条件可写成

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_\nu}=2iz_\nu\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_n},\quad \nu=1,\cdots,n-1.$$

我们特别留意 $n=2$ 的情形; 如果此时令 $z_1=z,z_2=t+i\tau$, 则此球面的方程为 $\tau=|z|^2.\tau$ 的值由量 z 确定, 故而在球面上的独立坐标为 z 和 t. 因为

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{\partial}{\partial\tau}\right),$$

而当 $z_1=z$ 固定及 $\tau=$ 常数时, 则有 $\dfrac{\partial}{\partial\overline{z}_2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}$ 以及唯一的柯西 – 黎曼切向方程有形式

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}=iz\frac{\partial f}{\partial t}.$$

这是在偏微分方程论中著名的卢伊 (H. Lewy) 方程 (1956 年).

当 $n=1$ 时, 不存在复切方向从而柯西 – 黎曼切向方程的概念失去了意义. 因此现在这目所致力的下面定理具有高维情形的特点. 它被博赫纳和塞韦里 (Severi) 在 1943 年分别独立证明.

定理 2. 设在 $\mathbb{C}^n, n>1$ 中给出了一个有界区域 D, 其边界 $S=\partial D$ 光滑并且其补集为连通. 如果函数 $f\in C^1(S)$ 在 S 的所有点上满足柯西 – 黎曼切向方程, 则它可以延拓到区域 D 里, 为 D 中的全纯函数并在 $\overline{D}$ 上连续.

证明. 在所采取的假设下这个延拓可以由马丁内利 – 博赫纳积分实现:

$$\widetilde{f}(z)=\int_S f(\zeta)\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta-z), \tag{6}$$

并且它完全被 f 在 S 上的值所决定. 为了证明此论断我们还需要形式 ω_{MB} 的某些性质.

首先我们注意到, 当 z 固定, 而点 ζ 满足 $\zeta_1\neq z_1$ 时形式 $\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta-z)$ 为微分形式 (对于变量 ζ 的)

$$\Omega_1(\zeta-z)=\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{(-1)^\nu}{|\zeta-z|^{2n-2}}\frac{\overline{\zeta}_\nu-\overline{z}_\nu}{\zeta_1-z_1}d\overline{\zeta}[1,\nu]\wedge d\zeta, \tag{7}$$

其中 $d\overline{\zeta}[1,\nu]=d\overline{\zeta}_2\wedge\cdots\wedge d\zeta_{\nu-1}\wedge d\zeta_{\nu+1}\wedge\cdots\wedge d\overline{\zeta}_n$. 这可经简单计算验证.[1)]

另外, 当形式 Ω_1 在复平面 $\zeta_1=z_1$ 上具奇异性的同时, 它的对参数 $\overline{z}_1$ 的偏导数仅在 $\zeta=z$ 上具奇异性:

$$\frac{\partial\Omega_1(\zeta-z)}{\partial\overline{z}_1}=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{(-1)^\nu}{|\zeta-z|^{2n}}(\overline{\zeta}_\nu-\overline{z}_\nu)d\overline{\zeta}[1,\nu]\wedge d\zeta.$$

最后, 由于函数 f 在 S 上满足柯西 – 黎曼切向方程, 且可以被写成定理 1 中 c) 的形式 (即 $df\wedge d\zeta=0$), 而形式 Ω 包含了因子 $d\zeta$, 故在 S 上当 $\zeta_1\neq z_1$ 时我们有

[1)]为简单起见设 $z=0$; 我们来进行这个计算:

$$\begin{aligned} d\Omega_1(\zeta)=&\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{|\zeta|^{2n}}\overline{\zeta}_\nu d\overline{\zeta}[1]+\\ &\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{(-1)^\nu}{\zeta_1}\left(-\frac{n-1}{|\zeta|^{2n}}|\zeta_\nu|^2+\frac{1}{|\zeta|^{2n-2}}\right)d\overline{\zeta}_\nu\wedge d\overline{\zeta}[2,\nu]\wedge d\zeta\\ =&\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{|\zeta|^{2n}}\overline{\zeta}_\nu d\overline{\zeta}[\nu]\wedge d\zeta\\ =&\,\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta).\end{aligned}$$

$df \wedge \Omega_1 = 0$. 因此, 当 $\zeta \in S$ 且 $\zeta_1 \neq z_1$ 时

$$d(f(\zeta)\Omega_1(\zeta - z)) = f(\zeta)d\Omega_1(\zeta - z) = f(\zeta)\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z), \tag{8}$$

而当 $\zeta \in S, \zeta \neq z$ 时

$$d\left(f(\zeta)\frac{\partial\Omega_1(\zeta - z)}{\partial\bar{z}_1}\right) = f(\zeta)\frac{\partial\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z)}{\partial\bar{z}_1} \tag{9}$$

(微分是对变量 ζ 取的, 偏导数是对 $\bar{z}_1$ 的, 可与其进行置换).

我们开始直接进行证明.

a) 由积分 (6) 定义的函数在 S 外处处全纯. 事实上, 如果 $z \notin S$, 则可应用公式 (9) 从而由斯托克斯公式,

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{z}_1} = \int_S f(\zeta)\frac{\partial\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z)}{\partial\bar{z}_1} = \int_S d\left(f(\zeta)\frac{\partial\Omega_1(\zeta - z)}{\partial\bar{z}_1}\right) = 0,$$

这是因为 $\partial S = 0$ (边缘 S 是个闭链). 挑出其他变量 $z_2, \cdots, z_n$ 以替代 z_1, 我们便构造了类似的形式 $\Omega_2, \cdots, \Omega_n$ 并可利用它们证明 $\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{z}_2}, \cdots, \dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial\bar{z}_n}$ 在 S 外等于 0.

b) 函数 $\widetilde{f}$ 在 $\overline{D}$ 外处处为 0. 事实上, 在 $\mathbb{C}^n \backslash \overline{D}$ 中 $|z_1| > \max\limits_{\zeta \in S}|\zeta_1|$ 的部分, 形式 (7) 非异, 故而可以利用等式 (8). 对于属于这个部分的 z, 我们有

$$\widetilde{f}(z) = \int_S f\omega_{\mathrm{MB}} = \int_S d(f\Omega_1) = 0$$

(我们再次利用斯托克斯公式, 并且 S 为闭链). 然而所提到的 $\overline{D}$ 的补集部分包含了内点, 而又因为由条件知此补集连通, 故由唯一性定理在整个补集上 $\widetilde{f} \equiv 0$.

c) 我们最后将证明函数 $\widetilde{f}$ 的边界值等于所给出的 f 的边界值. 考虑到马丁内利 – 博赫纳核的性质 (第 29 目的公式 (8)), 我们可以对任意 $\zeta^0 \in S$ 和任意 $z \notin S$ 写出

$$\widetilde{f}(z) - \chi(z)f(\zeta^0) = \int_S [f(\zeta) - f(\zeta^0)]\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z), \tag{10}$$

其中 χ 为区域 D 的特征函数.

如果证明了 (10) 式右端在点 ζ^0 为连续, 则此断言得证: 事实上, 从 D 外 $z \to \zeta^0$ 时右端的极限值显然为零; 由于连续性从 D 内 $z \to \zeta^0$ 时极限值等于零, 即当 $z \to \zeta^0, z \in D$ 时 $f(z) \to f(\zeta^0)$.

因此, 还需证明在点 ζ^0 函数

$$g(z) = \int_S [f(\zeta) - f(\zeta^0)]\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z)$$

的连续性. 为此, 我们首先注意存在有积分

$$g(\zeta^0) = \int_S [f(\zeta) - f(\zeta^0)]\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - \zeta^0). \tag{11}$$

事实上, 这个积分是沿 $(2n-1)$ 维曲面对出现在形式 ω_{MB} 中微分形式的乘积 $d\overline{\zeta}[\nu]\wedge d\zeta$ 取的, 它具有 $(2n-1)$ 维体积元的大小. 这些乘积的因子

$$\frac{|f(\zeta)-f(\zeta^0)|}{|\zeta-\zeta^0|^{2n}}(\overline{\zeta}_\nu-\overline{\zeta}_\nu^0)$$

的阶不大于 $1/|\zeta-\zeta^0|^{2n-2}$, 这是因为 $f\in C^1(S)$, 从而 $f(\zeta)-f(\zeta^0)$ 作为 $\zeta_\nu-\zeta_\nu^0$ 具有的阶不小于 $|\zeta-\zeta^0|$. 所以 (11) 中被积函数趋向无穷的阶至少比维数少 1, 从而积分 (11) 收敛 [1].

进一步的证明按分析的常规方法进行, 我们仅点到为止. 差

$$g(z)-g(\zeta^0)=\int_S|f(\zeta)-f(\zeta^0)|[\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta-z)-\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta-\zeta^0)]$$

可被分成两部分, 分别是沿 ζ^0 的充分小 (相对而言) 邻域 σ 上的积分和这个边界的剩余部分 $S\backslash\sigma$ 上的积分. 由于已证明的积分 (11) 的收敛性, 第一部分可以认为很小, 而在 $S\backslash\sigma$ 上的积分中的核是连续的, 从而如果点 z 充分靠近 ζ^0, 则此积分可以任意小. □

注. 所给出的这个证明在 $n=1$ 时却不能进行, 这是因为与马丁内利 – 博赫纳形式不同, 柯西形式 $d\zeta/(\zeta-z)$ 当 $z\in D$ 时不是 ∂D 上的恰当形式 (故不能在 $n=1$ 时按公式 (7) 构造 Ω_1). 积分

$$\widetilde{f}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

当然在 $z\notin\partial D$ 时为全纯, 然而 $\widetilde{f}$ 在 $\overline{D}$ 外却不必为零 [2].

作为博赫纳 – 塞韦里定理的应用例题, 我们来证明高维复分析的一个基本定理, 即关于紧奇点集的消去定理.

定理 3. 如果函数 f 在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ 中处处全纯但可能要除去一个不分离该区域的一个集合 $K\Subset D$ (就是使 $D\backslash K$ 连通), 则 f 可延拓到整个区域 D.

证明. 在 $D\backslash K$ 中选取两个 $(2n-1)$ 维的超曲面 S_1 和 S_2, 使得它们分别为区域 G_1 和 G_2 的边界, 而这些区域的补集为连通并使 $K\Subset G_1\Subset G_2$, 以及夹层 $G=G_2\backslash G_1\Subset D$ (图 31). 因为 f 在 $\overline{G}$ 中全纯, 故由马丁内利 – 博赫纳公式, 对 $z\in G$ 有

$$f(z)=\int_{S_2}f(\zeta)\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta-z)-\int_{S_1}f(\zeta)\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta-z). \tag{12}$$

[1] 转到在 S 上以 ζ^0 为极点的极坐标上可以更容易相信这一点.

[2] 参看卷 I 第 II 章的问题 1 和 3.

按同一个理由, 在 S_1 和 S_2 上满足了柯西 – 黎曼切向方程

$$df \wedge d\zeta|_{S_1} = df \wedge d\zeta|_{S_2} = 0.$$

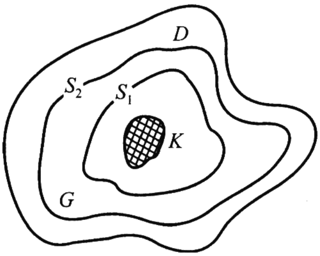

图 31

因为 z 位于曲面 S_1 之外, 故由定理 2 知公式 (12) 中的第二个积分等于零, 从而对所有 $z \in G$ 有

$$f(z) = \int_{S_2} f(\zeta)\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z). \tag{13}$$

然而由同一个定理, 在 (13) 右端的积分代表了一个在 G_2 中处处全纯并在 $G_2\backslash K$ 中等于 f 的一个函数. 因为按所设条件 $D\backslash K$ 为连通, 故此函数给出了 f 在整个区域 D 上的延拓. □

注. 在定理 3 中 K 不分离区域的条件是不可或缺的: 设 $K = \left\{|z| = \dfrac{1}{2}\right\}$ 为球面, 而 $D = \{|z| < 1\}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的球, $n > 1$; 于是函数 f, 它在 $\left\{|z| < \dfrac{1}{2}\right\}$ 为 0, 在 $\left\{\dfrac{1}{2} < |z| < 1\right\}$ 为 1, 从而在 $D\backslash K$ 中全纯, 但不能全纯地延拓到 D.

由此定理看出, $n \geqslant 2$ 个变量的全纯函数不可能有孤立奇点: 这类函数的奇点 (如果它们不分离区域) 必定超越了该区域的边缘或者到达了无穷远 [1].

关于复奇点消去的定理 (定理 3) 涉及许多多复变分析的最重要的结果. 第一个被正式阐述但并不完全令人信服的证明属于哈托格斯 (1906 年); 1907 年庞加莱对 $\mathbb{C}^2$ 中的球证明了它 (在有界球面的邻域中全纯的函数全纯地延拓到整个球). 对这个定理稍后的证明出现在奥斯古德 (Osgood) 的教科书 (1924 年) 和布朗 (Brown) 的著作 (1936 年) 中. 我们上面给出的证明基于博赫纳和塞韦里 (1943 年) 更后来的结果.

* 证明后面的强化的刘维尔 (Liouville) 定理: 如果 $n \geqslant 2$ 个变量的函数在球 $\{|z| < R\}$ 外全纯并有界, 则其为常数. *

[1] 比较: 在平面 z 上的函数 $f = 1/z$ 具有奇点 $\{0\}$, 而在空间 (z, w) 有奇异的复直线 $\{z = 0\}$, 它扩展到了无穷远.

32. 哈托格斯定理和奇点的可去性

在下面具有必然性的解析延拓的定理中, 这个延拓由柯西积分实现.

定理 1 (哈托格斯). 设给出了区域 $G \subset \mathbb{C}^m(z), G_0 \subset G$ 和多圆盘 $U \subset \mathbb{C}^n(w)$, 其骨架为 Γ; 我们又记 $U^\bullet = U \bigcup \Gamma, M = (G \times \Gamma) \bigcup (G_0 \times U^\bullet)$. 如果函数 $f : M \to \mathbb{C}$

1) 在 $G \times \Gamma$ 中连续, 并且对任意 $\omega \in \Gamma$ 在 G 中全纯.

2) 对任意 $z \in G_0$, 在 U 中全纯并在 $U^\bullet$ 中连续, 则它可全纯地延拓到区域 $G \times U$ 中 (参看图 32, 其中 $m = n = 1$).

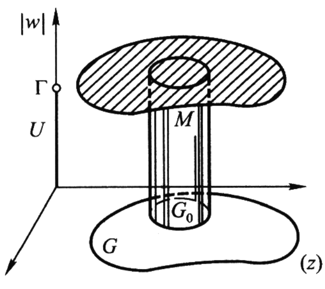

图 32

证明. 我们考虑由柯西重积分定义的函数

$$F(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(z, \omega)}{\omega - w} d\omega. \tag{1}$$

它的被积函数 $\dfrac{f(z,\omega)}{\omega - w}$ 对任意固定的参数值 $(z, w) \in G \times U$ 在 Γ 上连续, 并对任意 ω 全纯依赖于这些参量; 由第 5 目的引理知函数 F 也在乘积 $G \times U$ 中全纯. 然而在固定 $z \in G_0$ 时, 由条件 2) 函数 f 在 U 中由其柯西积分代表, 因此在 $G_0 \times U$ 中有

$$f(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(z, \omega)}{\omega - w} d\omega = F(z, w). \tag{2}$$

于是函数 F 是 f 在区域 $G \times U$ 中的全纯延拓. □

利用哈托格斯定理 (或者利用他的方法) 我们将证明三个关于奇点可去性的定理, 其中加在可去性集合上的条件一个比一个强, 而加在函数上的条件却一个比一个弱. 它们中的前两个对 $n = 1$ 也成立.

定理 2. 如果函数 f 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中连续并且在 $D \backslash S$ 中全纯, 其中 S 为光滑的实超曲面 [1], 则它在 D 中全纯.

[1] 在 $n = 1$ 时为光滑曲线.

证明. 只需证明在任意点 $a \in S$ 函数 f 全纯即可, 且不失一般性可设此点为 0, 并假定在此点的邻域中 S 由方程 $y_1 = \varphi(x_1, w)$ 给出, 其中 $w = (z_2, \cdots, z_n)$, 而 φ 为光滑的实函数 (图 33). 因为 $\varphi(0,0) = 0$, 故由 φ 的连续性知, 对任意 $\beta > 0$ 存在 $\alpha > 0$ 和多圆盘 $U \subset \mathbb{C}^{n-1}(w), 0 \in U$, 使得 $|\varphi(x_1, w)| < \beta$ 对所有 $|x_1| < \alpha$ 和 $w \in U$ 成立. 选取 β 充分小和充分靠近它的 $\gamma > \beta$, 我们得到区域 $G_0 \times U$ 属于 D, 其中 $G_0 = \{z_1 \in \mathbb{C} : |x_1| < \alpha, \beta < y_1 < \gamma\}$, 并且在 $G_0 \times U$ 中没有 S 的点, 即 $f \in \mathscr{O}(G_0 \times U)$.

另一方面, 对固定的 $w \in U$, 函数 $f(z_1, w)$ 在矩形 $G = \{|x_1| < \alpha, |y_1| < \gamma\}$ 中处处全纯, 但需去掉光滑曲线 $y_1 = \varphi(x_1, w)$, 并且在 G 中连续. 由此得到 (参看卷 I 第 42 目的引理的证明), $f(z_1, w)$ 对于固定的 $w \in U$ 在 G 中全纯. 由哈托格斯定理我们得出结论说, f 在包含点 $z = 0$ 的区域 $G \times U \subset \mathbb{C}^n$ 中全纯. □

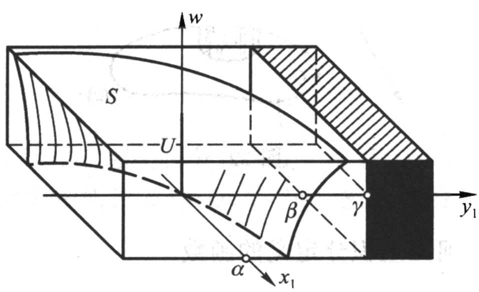

图 33

下面的定理是可去奇点定理的推广, 在这些奇点的邻域中这个全纯函数是有界的; 有时称其为关于延拓的*黎曼定理* (在 $n = 1$ 时, 是由孤立点组成的解析集合).

定理 3. 如果函数 f 在 $D \backslash A$ 全纯, 其中 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的区域, 而 A 为余维 1 的解析集, 并且 f 在 A 的点上为局部有界 [1)], 则它可以以唯一的方式延拓到 D 中的全纯函数.

证明. 因为集合 $D \backslash A$ 连通 (参看第 24 目), 故延拓的唯一性是显然的. 只需证明 f 在任意点 $a \in A$ 可以全纯延拓即可, 不妨设此点 a 等于 0. 可以假定在 0 的邻域中定义集合 A 的函数 g 满足条件 $g('0, z_n) \neq 0$. 于是存在具充分小半径的圆 $\{|z_n| = r\}$, 在其上 $g('0, z_n) \neq 0$, 从而 $g('z, z_n) \neq 0$ 对于充分小邻域 $'U \subset \mathbb{C}^{n-1}$ 中的 $'z$ 和 $|z_n| = r$ 成立.

[1)] 这表示, 对每个点 $z \in A$ 存在邻域 U_z 使得 f 在 $(D \backslash A) \bigcap U_z$ 中有界.

考虑柯西积分

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|\zeta_n|=r\}} \frac{f('z, \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n; \tag{3}$$

对于 $'z \in {}'U$, 因为点 $(z', \zeta_n) \in D \backslash A$, 且因为在其中 $g \neq 0$, 故积分号中的函数 $f('z, \zeta_n)$ 对于 z' 为全纯. 故 F 对 $'U$ 中的 $'z$ 全纯, 而对 z_n 它在圆盘 $U_n = \{|z_n| < r\}$ 中全纯, 所以 F 在区域 $U = {}'U \times U_n$ 中全纯. 然而对于固定的 $'z \in {}'U$, 函数 $g('z, z_n)$ 在圆盘 U_n 中有有限个对应于 A 中点的零点. 因为由定理的条件, 函数 f 在这些点的邻域中有界, 故对于 z_n 而言奇点已消去. 在消去这些奇点后, 函数 $f('z, z_n)$ 在圆盘 U_n 中由在圆 $\{|z_n| = r\}$ 上取值的柯西积分表示, 故与函数 F 相合, 而它在区域 $U \ni 0$ 中全纯. □

最后的这个定理只对 $n > 1$ 成立, 并且它关系到具必然性的解析延拓, 这是因为在其中并没有对函数加上任何附加条件.

定理 4. 如果 f 在 $D \backslash A$ 中全纯, 其中 D 为 $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ 中的区域, 而 A 为余维不小于 2 的解析集, 则它以唯一的方式延拓到 D 中的全纯函数.

证明. 首先, 延拓的唯一性是显然的. 对于延拓的可能性, 我们将对集合 A 的复维数进行归纳证明, 按假设, 它的维数 $m \leqslant n-2$. 如果 A 为零维 $(m = 0)$, 则它由孤立点组成 (由第 24 目定理 6 知), 而 f 在它们中每点的可延拓性可从紧奇点的可去性定理 (第 31 目定理 3) 得到.

设断言已对小于 $m \leqslant n-2$ 得证, 并且 A 为维数等于 m 的集合. 我们来证明 f 在任意正则点 $a \in A^0$ 的可延拓性, 在此不妨设其为 0. 因为在 0 的邻域 A 为余维不小于 2 的复流形, 则 (可能在经过复线性坐标变换之后) 可以找到两个在点 $''0 \in \mathbb{C}^{n-2}$ 的邻域 $''U$ 中的全纯函数 g_1 和 g_2, 使得 $z_{n-1} - g_1(''z)$ 和 $z_n - g_2(''z)$ 在 A 上化为零, 其中 $''z = (z_1, \cdots, z_{n-2})$.

设 $g_1(''0) = g_2(''0) = 0$ 和 $w = (z_{n-1}, z_n)$; 于是对充分小的 $r > 0$ 时, 环面 $\Gamma = \{(''0, w) : |z_{n-1}| = |z_n| = r\}$ 位于 $D \backslash A$ 中, 从而函数

$$F(''z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \frac{f(''z, \zeta)}{\zeta - w} d\zeta \tag{4}$$

对所有 $''z \in {}'' U$ 和所有双圆盘 $U^2 = \{|z_{n-1}| < r, |z_n| < r\}$ 中的点 w 为全纯. 然而对固定的 $''z$, 只有当 $z_{n-1} = g_1(''z)$ 和 $z_n = g_2(''z)$ 时, 点 $(''z, w) \in A$, 因此作为 w 的函数 F 只可能有可去的奇点. 故而 $F = f$, 即 f 在点 0 全纯地被延拓.

f 在 A 的正则点集 A^0 中的延拓性已经得证, 而因为临界点集构成了维数小于 m 的解析集, 故由归纳假定 f 在这些点也被延拓. □

* 证明, 在 $\mathbb{C}^2 \backslash \mathbb{R}^2$ 中全纯的函数 f 可延拓为整函数. *

某种更一般的有关延拓的定理我们将在下一节中进行推导. 它们与全纯 (区) 域

的概念有关, 我们将转而研究它们.

§12. 全纯域

全纯域是那样的区域, 在其中存在有全纯函数, 它不能被解析延拓到该区域之外. 上一节的那些定理表明在 $n>1$ 的空间 $\mathbb{C}^n$ 中并非任一个区域都是全纯域, 我们将在这里着手研究这种区域的特点和性质.

33. 全纯域的概念

必然性解析延拓的影响自然地导致了下面的定义:

定义 1. 称包含区域 D 的区域 G 为 D 的*全纯扩张*是说任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可延拓为 G 中的全纯函数.

可以清楚看到, 这个定义只在空间的情形才有意义. 这种情形的令人感兴趣的特别之处由下面简单的定理表现出来.

定理 1. 如果 G 为区域 D 的全纯扩张, 则任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 的延拓在 $G\backslash D$ 中只取那些 f 在 D 中所取的值.

证明. 设若相反, 某个函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 在 $G\backslash D$ 中取了某个它不在 D 中取的值 w_0. 于是函数 $g(z) = \dfrac{1}{f(z)-w_0}$ 显然在 D 中全纯, 但不能解析延拓至 G, 这是因为在 $G\backslash D$ 中某个点它将变为无穷. 这与定义 1 矛盾. □

推论. 有界区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的全纯扩张 G 也是有界区域.

证明. 由定理 1, 函数 $f_\nu(z) = z_\nu$ (点 z 的坐标) 在 G 中的取值是与其在 D 中的取值相同, 即

$$\sup_{z\in G}|z_\nu| = \sup_{z\in D}|z_\nu|, \quad \nu = 1,\cdots,n. \tag{1}$$

然而因为 D 有界, 故 (1) 的右端有限, 从而左端有限, 即 G 有界. □

全纯域不能简单地理解为与其自己在 $\mathbb{C}^n$ 中的全纯扩张相同. 问题在于, $\mathbb{C}^n$ 中区域的函数的解析延拓可能导致多叶的黎曼区域, 我们曾在第 22 目中考虑过它.

例题. 设 $D \subset \mathbb{C}^2$ 为单连通区域, 其哈托格斯图展示在图 34 中, 这是个圆柱 $\{x_1^2+y_1^2<1, |z_2|<2\}$, 但去掉了正方形 $\mathrm{I} = \{0 \leqslant x_1 < 1, y_1 = 0, |z_2| \leqslant 1\}, \mathrm{II} = \{0 \leqslant y_1 < 1, x_1 = 0,\ 1 \leqslant |z_2| < 2\}$ 和扇形 $S = \{|z_1|<1, x_1 \geqslant 0, y_1 \geqslant 0, |z_2| = 1\}$. 由哈托格斯定理, 每个函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可以通过扇形 S 被解析延拓, 既从上往下也

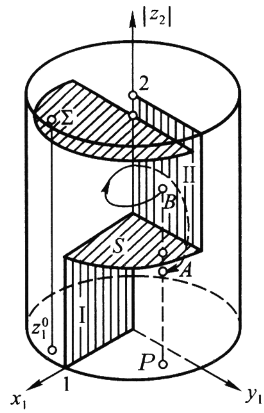

图 34

从下往上 [1]. 事实上, 例如我们考虑第一种延拓方式 (从上往下): 函数 f 在半圆盘 $\sum = \{|z_1| \leqslant 1-\varepsilon, x_1 \geqslant \varepsilon,\ |z_2| = 2-\varepsilon\}$ 和线段 $\{z_1 = z_1^0, |z_2| \leqslant 2-\varepsilon\}$ 的邻域中全纯, 其中 $|z_1^0| < 1, x_1^0 > 0, y_1^0 < 0$, 因此被延拓到 $\sum \times \{|z_2| < 2-\varepsilon\}$.

在这样的延拓下我们重新又到了区域 D 中, 但是该函数不必取它以前所具有的同一个值. 事实上, 例如我们考虑函数 $f_0(z_1, z_2) = \sqrt{z_1}$, 它被看作在 D 中连续的根的一个分支; 这个分支在半轴 $x_1 > 0$ 上取正值。显然它在 D 全纯，并且在图中的点 A 和 B 取了具不同符号的值, 其中 A 和 B 投射到平面 z_1 中同一个点 P 但位于 S 的不同的面上 (在 D 上从 A 过渡到 B 时我们应将 $\arg z_1$ 改变 2π). 另一方面, 由哈托格斯定理知, f_0 经 S 的延拓 (像前面所描述的那样) 得到的, 譬如在点 B 和它在点 A 的延拓应该是同一个值.

所以, f_0 的延拓把我们引向了*多值函数*; 我们不想讨论这些函数, 我们应该把这些延拓了的值带到 D 的第二个样本上, 然后与第一个样本沿集合 S 粘合.

.这个例题中的区域 D 不是个全纯域, 虽然它没有到 $\mathbb{C}^2$ 中区域的全纯扩张. 为了避免出现类似的现象, 我们应该在定义全纯区域时, 不仅对函数本身, 而且对它在部分区域上, 比如包含在该区域中的球上的限制排除解析延拓到区域界限之外的可能性.

定义 2. 称区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为*函数 f 的全纯区域*是说, 如果 $f \in \mathscr{O}(D)$ 并且对任意点 $z^0 \in D, f$ 在球 $B(z^0, r)$ 的限制不能解析延拓到球 $B(z^0, r_1)$, 其中 r 为 z^0 到 ∂D 的距离, 而 $r_1 > r$. 称区域 D 为*全纯域*是说, 如果它是某个函数的全纯域.

我们着手研究描述全纯域的特征条件, 就从简单的充分条件开始. 我们称在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的一个边界点 ζ 存在一个*障碍*是说, 如果对任意集合 $K \Subset D$ 及任意 $\varepsilon > 0$

[1] 为简明起见, 我们在谈及展示在哈托格斯图上的集合时总理解为相应的 $\mathbb{C}^2$ 中的集合.

存在函数 $g \in \mathscr{O}(D)$, 使得 $\|g\|_k = \max\limits_{z\in K}|g(z)| \leqslant 1$ 而 $|g(z)| > 1$ 对某个点 $z \in B(\zeta,\varepsilon)$ 成立.

显然, 如果函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 在点 $\zeta \in \partial D$ *无界* (即对某个序列 $z^\nu \in D, z^\nu \to \zeta$, 有 $f(z^\nu) \to \infty$), 则在此点存在一个障碍. 事实上, 对任意 $K \Subset D$ 和 $\varepsilon > 0$ 可以取 $g(z) = f(z)/\|f\|_K$. 其逆命题也成立, 但有下面更强的形式:

定理 2. 对任意一个包含障碍的点集 $E \subset \partial D$, 存在函数 $f \in \mathscr{O}(D)$, 它在 E 的所有点均无界.

证明. 首先我们注意到存在 ∂D 中最多可数个点的集合处处稠于 $\overline{E}$, 而且在它上无界的函数必在 E 上也无界. 所以可以认为 E 最多为一可数集. 在此假设下, 我们来构造一个序列 $\zeta^\nu \in E$ 使得 E 中每个点在其中出现无穷多次 [1]. 现在为了证明此定理只需找到函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 及点序列 $z^\nu \in D$ 使得 $|z^\nu - \zeta^\nu| \to 0$ 和 $f(z^\nu) \to \infty$.

我们以归纳法构造: 1) 一个递增集合序列 $K_\nu \Subset D$, 并穷竭了 D, 即 $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} K_\nu = D$, 2) 点 $z^\nu \in D$ 使得 $|z^\nu - \zeta^\nu| < 1/\nu$ 和 3) 函数 $f_\nu \in \mathscr{O}(D)$ 使得

$$\|f_\nu\|_{K_\nu} \leqslant 1, \quad 而 \quad |f_\nu(z^\nu)| > 1. \tag{2}$$

为此选取 K_1 为 D 中任一个紧集, 并按障碍的定义, 在点 ζ^1 存在函数 $f_1 \in \mathscr{O}(D)$ 和点 $z^1 \in D$ 使得 $|z^1 - \zeta^1| < 1$ 和 $|f_1(z^1)| > 1 \geqslant \|f_1\|_{K_1}$. 现在假定这种构造已经对所有 $\mu \leqslant \nu - 1$ 做好, 我们取

$$K_\nu = K_{\nu-1} \bigcup \left\{ z \in D : \rho(z, \partial D) \geqslant \frac{1}{\nu}, |z| \leqslant \nu \right\} \bigcup \{z^1, \cdots, z^{\nu-1}\}$$

并按障碍的定义知, 在 ζ^ν 存在函数 $f_\nu \in \mathscr{O}(D)$ 和点 $z^\nu \in D$, 使得 $|z^\nu - \zeta^\nu| < 1/\nu$ 和满足条件 (2). 我们构造的可能性已得证.

最后, 考虑到 $|f_\nu(z^\nu)| > 1$, 我们选取一个自然数的序列 p_ν (从 $p_1 = 1$ 开始) 使得其满足不等式

$$\frac{1}{\mu^2}|f_\mu(z^\mu)|^{p_\mu} \geqslant \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{1}{\nu^2}|f_\nu(z^\mu)|^{p_\nu} + \mu, \quad \mu \geqslant 2, \tag{3}$$

并考虑级数

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}\{f_\nu(z)\}^{p_\nu}. \tag{4}$$

对任意 $z \in K_\mu$, 我们有 $|f_\nu(z)| \leqslant 1$, 其中 $\nu \geqslant \mu$, 从而级数 (4) 在 K_μ 上一致收敛. 因为 K_μ 为紧且穷竭 D, 故由此得到级数 (4) 在 D 中处处收敛, 并且其和

[1] 设集合 E 的点被如此编号: 对已构造的序列 ζ^ν 我们按这样的次序来取点: $1; 1, 2; 1, 2, 3; \cdots$.

$f \in \mathscr{O}(D)$ (参看第 5 目的魏尔斯特拉斯定理). 最终对任意 $\mu = 1, 2, \cdots$ 我们有

$$|f(z^\mu)| \geqslant \frac{1}{\mu^2}|f_\mu(z^\mu)|^{p_\mu} - \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{1}{\nu^2}|f_\nu(z^\mu)|^{p_\nu} - \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$$
$$\geqslant \mu - \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2},$$

由此看出 $f(z^\mu) \to \infty$. □

由此定理的证明直接导出全纯域的一个充分条件:

推论. 如果在 D 的边界上一个处处稠密的点集上存在障碍, 则 D 为全纯域.

例如, 在球 $B = \{|z| < R\} \subset \mathbb{C}^n$ 边界的每个点中存在障碍, 这是因为存在函数

$$f(z) = \frac{1}{\mathbb{R}^2 - (z, \zeta)} \in \mathscr{O}(B),$$

它在点 ζ 无界. 因此球是个全纯域. 可以推广这个例子.

定理 3. 任意凸区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为全纯域.

证明. 由于 D 的凸性, 对任意点 $\zeta \in \partial D$ 可以构造一个支撑超平面 $\mathrm{Re}(z-\zeta, a) = 0$, 它通过 ζ 并且 D 位于它的一侧, 而在其中取复平面 $(z-\zeta, a) = 0$, 它也通过 ζ 并不包含 D 中的点. 于是函数 $f(z) = 1/(z-\zeta, a)$ 在 D 中全纯并在 ζ 无界, 即在 ζ 存在障碍. 由前面的推论知 D 是个全纯域. □

但是凸性条件并不是全纯域的必要条件. 譬如, 这可以由下面的定理看到.

定理 4. 如果 D_z 是空间 $\mathbb{C}^n(z)$ 中的全纯域, 而 D_w 是空间 $\mathbb{C}^m(w)$ 中的类似的区域, 则乘积 $D_z \times D_w$ 是空间 $\mathbb{C}^{n+m}(z, w)$ 中的全纯域.

证明. 取函数 f, 使 D_z 为其全纯域, 以及 g 是对 D_w 的这种函数. 于是 $f(z)g(w) \in \mathscr{O}(D_z \times D_w)$ 使得 $D_z \times D_w$ 为其全纯域. □

因为在 $\mathbb{C}^1$ 中任意区域都是全纯域, 而多圆形区域是平面区域的乘积, 故而我们有

推论. $\mathbb{C}^n$ 中的多圆形区域为全纯域.

特别地, 两个平面区域 D_1 和 D_2, 其中至少有一个是非凸集, 譬如说 D_1, 则它的乘积 D 虽然不是凸集却是个全纯域.

在下一目中, 我们将引进一个推广了的凸集概念, 它比起通常的定义来说不是那么直观, 但却给出全纯域的充分必要条件.

34. 全纯凸

$\mathbb{R}^n$ 中通常的 (几何的) 凸区域可以特征地描述为: 任何一个闭包紧于它的集合的凸包也闭包紧于该区域 (图 35). 一个集合 K 的凸包是所有包含这个集合的半空间的交集, 或者换句话说, 它是那样一些点的集合, 在这些点上任意实线性函数所取的值不超过它在 K 上的极大值. 可清楚看出, 对 $\mathbb{C}^n$ 中集合, 实线性的函数可以换为复的, 从而集合 K 的凸包可定义为集合 $\{z\in\mathbb{C}^n : |l(z)|\leqslant\|l\|_K, l$ 为所有复线性函数 $\}$ (像通常那样, $\|l\|_K$ 代表函数 l 在集合 K 上的极大模).

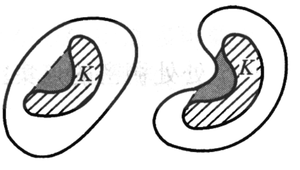

图 35

如果 D 不是全纯域, 则在它的任意全纯扩张中, 所有由 $\mathscr{O}(D)$ 延拓的函数只取它们在 D 中所取的值 (参看第 33 目). 所以在引进期望能对全纯域作特征刻画的凸性概念时, 自然地要以并非线性的而是在整个区域全纯的函数来构建它的包. 除此之外, 因为某些函数在 D 外无定义, 故它的子集的包应该只与该区域中的点有关.

这个概念是由嘉当 (H. Cartan) 和图伦 (P. Thullen) 在 1932 年提出来的.

定义 1. 集合 $M\subset D$ 的**全纯凸包**是指集合

$$\widehat{M}=\{z\in D:|f(z)|\leqslant\|f\|_M, \text{其中 } f\in\mathscr{O}(D) \text{ 为任意}\}. \tag{1}$$

定义 2. 称区域 D 为**全纯凸**是指, 如果对任意闭包紧于 D 的集合 K, 其全纯凸包 $\widehat{K}$ 也闭包紧于 D:

$$K\Subset D\Rightarrow\widehat{K}\Subset D \tag{2}$$

(参看图 35, 在那里展示出区域的非凸性如何违反这个条件的).

* 设 $D=\{|z_1|<1,|z_2|<1\}\backslash\{|z_1|\leqslant 1/2,|z_2|\leqslant 1/2\}$ 为 $\mathbb{C}^2$ 中的区域, $K=\{z_1=0,|z_2|=3/4\}$ 为圆, 其闭包紧于 D; 证明, $\widehat{K}$ 不是闭包紧于 D 的. *

在某些问题中应该考虑的不是关于 $\mathscr{O}(D)$ 中所有函数的包而仅需考虑某个子类 $F\subset\mathscr{O}(D)$ 中的函数, 这时可以说成是 $F-$ **凸包** (记为 $\widehat{M}_F$) 或者 $F-$ 凸包域. 那么, 如果 F 为全部 $\mathbb{C}-$ 线性 (或 $\mathbb{R}-$ 线性) 函数, 则 $F-$ 凸性等同于几何凸性, 如果 F 为所有多项式或有理函数, 则称之为**多项式凸包**或**有理凸包**.

显然, 类 F 越广, 则被要求满足不等式 (2) 的函数集就越大, 故而集合的 $F-$ 凸包越窄, 从而 $F-$ 凸区域的类就越大. 特别地, 所有凸区域都是多项式凸, 所有多项

式凸为全纯凸.

例题.

(1) 我们来解释在平面情形的嵌入. 任意区域 $D \subset \mathbb{C}^1$ 为全纯凸, 而多项式凸仅为其在 $\overline{\mathbb{C}}^1$ 中补集为连通的那些区域 (请证明!). 几何凸区域的类窄于多项式凸的类. 形象地说, 过渡到平面区域的多项式包可化为填满它上面的“洞”, 而过渡到 (几何) 凸包则化为填满靠近边界的“凹隔”处.

(2) 任意解析多面体 (参看第 30 目)

$$\Pi = \{z \in D : |W_\nu(z)| < 1, \nu = 1, \cdots, N\},$$

其中函数 $W_\nu \in \mathscr{O}(D)$, 是相对于类 $\mathscr{O}(D)$ 的凸集. 事实上, 如果 $K \Subset \Pi$, 则对任意 $\nu = 1, \cdots, N$, 我们有 $\|W_\nu\|_K \leqslant r < 1$. 则按 $\mathscr{O}-$ 凸包的定义有

$$\sup_{z \in \widehat{K}_{\mathscr{O}}} |W_\nu(z)| \leqslant \sup_{z \in K} |W_\nu(z)| \leqslant r,$$

而由此得到 $\widehat{K}_{\mathscr{O}} \Subset \Pi$.

正如我们现在将要明白的, 全纯凸确实是全纯域的充分必要条件.

定理 1 (嘉当 – 图伦). 如果区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 全纯凸, 则它为全纯域.

证明. 以完全类似上一目中关于障碍的定理的证明那样进行. 作为那里的 E, 必须取成在 ∂D 上处处稠密的可数集, 并且按照那里所提出的办法排序. 紧集 K_ν 同样由归纳法构造, 只是点 z^ν 和函数 f_ν 以另外的想法进行选取: 由于区域 D 的全纯凸性, 包 $\widehat{K}_\nu \Subset D$, 故而存在点 $z^\nu \in D, |z^\nu - \zeta^\nu| < 1/\nu$, 并且函数 $g_\nu \in \mathscr{O}(D)$ 使得 $|g_\nu(z^\nu)| \geqslant \|g_\nu\|_{K_\nu}$, 我们又令 $f_\nu(z) = g_\nu(z)/\|g_\nu\|_{K_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$. 证明的结尾部分仍保持原来的样子, 而函数

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}\{f_\nu(z)\}^{p_\nu} \tag{3}$$

全纯于 D, 并且在趋近 E 中所有点时无限增大, 即 D 是个全纯域. □

注. 显然, 在这个定理中全纯凸性可以被替换成对于任意类 $F \subset \mathscr{O}(D)$ 的凸性. 特别地, 如果 F 为线性函数类, 我们则重新得到了上一目的定理 3.

全纯凸性条件的必要性的证明基于一个被称为*同步延拓*的引理, 它也独立地具有自身的兴趣.

引理. 设 $K \Subset D$, 且 $\rho = \rho(K, \partial D)$ 是在多圆盘度量下从 K 到边界 ∂D 的距离. 对全纯凸包 $\widehat{K}$ 中任意点 a, 任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可全纯延拓到多圆盘 $U(a, \rho)$.

具本质性的一点是, 多圆盘 $U(a,\rho)$ 可以超越区域 D 的范围之外 (参看图 36 的图示); 这个多圆盘的半径不依赖于单个的函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 而只由 K 到 ∂D 的距离决定.

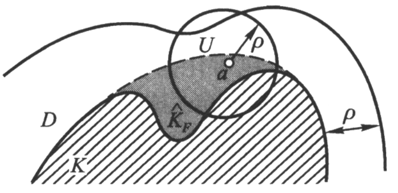

图 36

证明. 因为 $a \in D$, 故在 a 的邻域中任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可用泰勒级数表示

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \tag{4}$$

其中 $c_k = \dfrac{1}{k!} D^k f|_a, D^k f = \dfrac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}$. 但因为 $a \in \widehat{K}$, 故

$$|D^k f|_a \leqslant \|D^k f\|_K, \tag{5}$$

即在点 a 导数的估值化成了它们在 K 上的估值.

我们选取数 $r < \rho$ 并以 K^r 表示集合 K 的 $r-$ 膨胀 (即所有多圆盘 $U(z,r)$ 对所有 $z \in K$ 的并). 因为 $K^r \Subset D$, 故 f 在其上有界, 记

$$M_f(r) = \|f\|_{K^r}. \tag{6}$$

如果 $z \in K$, 则 $U(z,r) \subset K^r$, 并且对 (5) 的右端导数的估值可以利用柯西不等式 (第 5 目):

$$|c_k| \leqslant \frac{1}{k!}\|D^k f\|_K \leqslant \frac{M_f(r)}{r^{|k|}}.$$

现选取任一 $r_1 < r$; 对于任意点 $z \in U(a, r_1)$ 有

$$|c_k (z-a)^k| \leqslant M_f(r)(r_1/r)^{|k|}, \tag{7}$$

由此看出, 级数 (4) 在多圆盘 $U(a,r_1)$ 中收敛. 因为数 r 和 r_1 可以取得任意地靠近 ρ, 故 (4) 在 $U(a,\rho)$ 中处处收敛. 这个级数从而给出了函数 f 的所需要的全纯延拓. □

由此引理立即得到了全纯凸条件的必要性.

定理 2 (嘉当 – 图伦). 任意全纯域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为全纯凸.

证明. 取任意一个集合 $K \Subset D$, 并记 $\rho = \rho(K, \partial D)$. 因为 $\mathscr{O}(D)$ 包含了所有的坐标 z_ν, 故全纯凸包 $\widehat{K}$ 有界. 另外, 因为由上面的引理知, $\mathscr{O}(D)$ 中的任意函数被全纯地延拓到 $\widehat{K}$ 的 $\rho-$ 膨胀, 从而是一个函数 $f \in \mathscr{O}(D)$, 它没有延拓到 D 之外, 故这个膨胀属于 D, 即 $\widehat{K} \Subset D$. □

注. 在同步延拓引理中, $\mathscr{O}(D)$ 可以换为任意的类 F, 与它的每一个函数 f 一起的还应包含它的所有的导数. 为了使定理 2 成立还需要使这个类包含所有坐标 z_ν, 没有这个补充的假定, 它可能对于非有界区域不成立. 例如, 如果 $D_1 \subset \mathbb{C}$ 为函数 f 的全纯域, 其中 f 为变量 z_1 的函数, 故 $D = D_1 \times \mathbb{C}$ 就是那样的全纯域但它对于类 F 不是凸的, 其中 F 由 f 和它的对 z_1 的导数构成 (例如集合 $K_1 \times \{|z_2| < 1\}$ 的 $F-$ 凸包为 $K_1 \times \mathbb{C}$, 其中 $K_1 \Subset D_1$).

由同步延拓引理也可以得到一个全纯凸域的判别法, 着重的是它与几何凸的相似性: 这是那样的区域, 在其中从紧子集到它们全纯凸包的过程中没有减少它们到边缘的距离. 形象地说, 这种过程由填满这些子集的“洞”和“凹隔”构成.

定理 3. 对于区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为全纯凸的充分必要条件是对所有集合 $K \Subset D$ 有

$$\rho(\widehat{K}, \partial D) = \rho(K, \partial D). \tag{8}$$

证明. 条件 (8) 的充分性是显然的. 为了证明必要性, 我们注意到 (8) 的左端总不超过它的右端, 而如果那里确是一个不等式, 则在 $\widehat{K}$ 中能找到点 a, 它满足 $\rho(a, \partial D) < \rho(K, \partial D)$. 然而根据引理, 任意函数 f 便被延拓到中心为 a 半径为 $\rho(K, \partial D)$ 的多圆盘, 就是说已在区域 D 的范围之外了, 从而 D 不可能是全纯域. □

35. 全纯域的性质

$\mathbb{C}^n$ 中的全纯域就是全纯凸域. 我们给出它们的一些性质, 这是凸区域的已知性质的推广.

定理 1. 设 $D_\alpha, \alpha \in A$, 为 $\mathbb{C}^n$ 中一个任意的全纯域的族, 并且 $G = \bigcap\limits_{\alpha \in A} D_\alpha$ 是它们的交, 则开核 $\overset{\circ}{G}$ 的每个连通分支 D 是全纯域.

证明. 设 $K \Subset D$; 因为 $\mathscr{O}(D_\alpha)$ 中的每个函数均全纯于 D, 故 $\mathscr{O}(D) \supset \mathscr{O}(D_\alpha)$, 从而 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)} \subset \widehat{K}_{\mathscr{O}(D_\alpha)}$ 对所有 $\alpha \in A$ 成立. 故 $\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}, \partial D_\alpha) \geqslant \rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D_\alpha)}, \partial D_\alpha)$, 从而由 D_α 的全纯凸性, 对于所有 α 有 $\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}, \partial D_\alpha) \geqslant \rho(K, \partial D_\alpha) \geqslant \rho(K, \partial D)$. 如果 D 不是全纯域, 则对某个 K 便会有 $\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}, \partial D_\alpha) < \rho(K, \partial D)$, 与已证明过的事实矛盾. □

与交集不同, 全纯域的并不必再是这样的区域 (比较凸区域的相应性质). 这从简单的例子: $\{|z_1| < 1, |z_2| < 2\}$ 和 $\{|z_1| < 2, |z_2| < 1\}$ 可看清楚; 它们都是 $\mathbb{C}^2$ 中的全纯域, 而它们的并却不是 (在第 7 目已证过).

但是对于递增的全纯域序列的并却成立 (这与凸集情形一样). 为了证明它我们需要一个定理, 它是龙格定理 (卷 I, 第 23 目) 的推广, 它也具有自身的兴趣.

定理 2 (冈洁 – 韦伊 (Oka-Weil)). 设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意区域, $K \Subset D$ 为紧并与其对于类 $\mathscr{O}(D)$ 的凸包重合:

$$K = \widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}. \tag{1}$$

于是任意全纯于 K (即在其某个邻域中) 的函数 f 可被 $\mathscr{O}(D)$ 中函数在 K 上一致逼近.

证明. 设 f 在紧集 K 的邻域 $U \subset D$ 中全纯, $V \Subset U$ 为 K 的另一个邻域. 根据凸包的定义, 对任意点 $\zeta \in \partial V$ 存在函数 $W_\zeta(z) \in \mathscr{O}(D)$ 使得 $|W_\zeta(\zeta)| > 1 > \|W_\zeta\|_K$. 因为 ∂V 为紧, 故存在有限个函数 $W_{\zeta_j} = W_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ 使得对所有 $\zeta \in \partial V$ 有 $\max\limits_j |W_j(\zeta)| > 1$, 而 $\|W_j\|_K < 1$.

现在考虑解析多面体

$$\Pi = \{z \in V : |W_j(z)| < 1, j = 1, \cdots, N\}, \tag{2}$$

它包含了 K 并闭包紧地含在 V 中. 函数 f 在 $\overline{\Pi}$ 的邻域中全纯, 由 (第 30 目的) 韦伊定理知它在 K 上由 $\mathscr{O}(D)$ 中的函数一致地逼近. □

注. 在 $n = 1$ 时, 条件 (1) 意味着紧集 K 不分离区域 D, 其中 D 是单连通的. 由此看出, 第一, 这个条件是不可或缺的, 第二, 定理 2 实际上推广了龙格定理.

推论. 任意紧集 $K \Subset D$ 的包 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}$ 的任一连通分支与 K 有非空的交.

证明. 设 E 为 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}$ 的一个连通分支, 并且 $E \bigcap K = \varnothing$. 于是存在不相交的开集 $U \supset K$ 和 $V \supset E$, 使得 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)} \subset U \bigcup V$. 我们考虑全纯于 $U \bigcup V$ 的函数 f, 它在 U 上为 0 而在 V 上为 1. 由定理 2, 存在 $g \in \mathscr{O}(D)$ 使得 $\|f - g\|_{\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}} < \dfrac{1}{2}$. 特别地, 对任意点 $z^0 \in E$ 我们有

$$|g(z^0)| > 1/2 > \|g\|_K,$$

而这与 $E \subset \widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}$ 相矛盾. □

我们现在来证明前面所提到的定理.

定理 3 (贝恩克 – 施坦 (Behnke-Stein)). 递增的全纯域

$$D_1 \Subset D_2 \Subset \cdots \Subset D_\nu \Subset \cdots \tag{3}$$

的并 D 也是全纯域.

证明. 首先以有界区域替换 D_ν. 为此, 我们固定点 $a \in D_1$, 并以 D'_ν 表示开集 $D_\nu \bigcap \{|z-a| < \nu\}$ 中包含 a 的连通分支 —— 按定理 1, D'_ν 是全纯区域, 显然, 像前面那样, 有 $D'_\nu \Subset D'_{\nu+1}$ 和 $D = U D'_\nu$.

进一步, 从序列 D'_ν 中选取子序列 $D'_{p\nu} = G_\nu$ 使得对所有 $\nu = 1, 2, \cdots$ 满足条件

$$\sup_{z \in \partial G_\nu} \rho(z, \partial G_{\nu+1}) < \rho(G_{\nu-1}, \partial G_{\nu+1}). \tag{4}$$

我们以归纳法证明这种选取的可能性. 令 $G_1 = D'_1$, 并选取 p_2 如此之大使得 $G_2 = D_{p_2}$ 有 $\sup\limits_{z \in \partial G_2} \rho(z, \partial D) < \rho(G_1, \partial D)$; 在此之后我们选取 p_3, 使得区域 $G_3 = D'_{p_3}$ 的边界如此靠近 ∂D, 使得前面那个不等式可以换为在 ∂G_3 上的不等式 $\sup\limits_{z \in \partial G_3} \rho(z, \partial G_3) < \rho(G_1, \partial G_3)$. 设已对所有小于 ν 的自然数选好了 p_ν, 我们现在来选取 p_ν 使 $G_\nu = D'_{p_\nu}$ 满足

$$\sup_{z \in G_\nu} \rho(z, \partial D) < \rho(G_{\nu-1}, \partial D), \tag{5}$$

然后再选取 $p_{\nu+1}$ 使 $D'_{p_{\nu+1}} = G_{\nu+1}$ 如此靠近 ∂D 使在最后面的这个不等式中的 ∂D 被换成 $\partial G_{\nu+1}$, 从而得到了 (4).

因为 $G_{\nu-1} \Subset G_{\nu+1}$ 且 $G_{\nu+1}$ (作为全纯域) 为对于类 $\mathscr{O}(G_{\nu+1})$ 的凸集, 故由第 34 目的定理 3, 对于凸包 $G^*_{\nu-1} = \widehat{(G_{\nu-1})}_{\mathscr{O}(G_{\nu+1})}$ 有

$$\rho(G^*_{\nu-1}, \partial G_{\nu+1}) = \rho(G_{\nu-1}, \partial G_{\nu+1}). \tag{6}$$

但由 (4) 得到, 对于任意点 $a \in \partial G_\nu$ 有

$$\rho(a, \partial G_{\nu+1}) < \rho(G_{\nu-1}, \partial G_{\nu+1}),$$

即 ∂G_ν 与 $G^*_{\nu-1}$ 不相交. 根据定理 2 的推论我们得到

$$G^*_{\nu-1} \Subset G_\nu, \quad \nu = 1, 2, \cdots. \tag{7}$$

我们需要证明区域 D 为全纯凸. 为此我们固定任意一个紧集 $K \Subset D$, 且记 $r = \rho(K, \partial D)$ 并证明 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)} \subset \{z \in D : \rho(z, \partial D) \geqslant r\} = D_r$, 这就是我们所要证明的.

设 $a \in D \backslash D_r$ 为任意点, 且 $r_1 = \rho(a, \partial D) < r$. 于是存在 $\mu > 1$ 使得 $K \bigcup \{a\} \subset G_{\mu-1}$ 和 $\rho(a, \partial G_\mu) < \rho(K, \partial G_\mu)$. 根据第 34 目的定理 3, 由此得出 a 不属于 $\widehat{K}_\mu =$

$\widehat{K}_{\mathscr{O}(G_\mu)}$, 从而存在函数 $f_0 \in \mathscr{O}(G_\mu)$, 使得 $|f_0(a)| > \|f_0\|_K$. 乘其以某个适当的常数, 我们可以认为

$$|f_0(a)| > c+1, \quad 而 \quad \|f_0\|_K < c-1, \tag{8}$$

其中 $c > 1$. 根据 (7), 函数 f_0 在 $G^*_{\mu-1} = \widehat{(G_{\mu-1})}_{\mathscr{O}(G_{\mu+1})}$ 的邻域中全纯, 并且根据定理 2, 它可以在 $G^*_{\mu-1}$ 上被 $\mathscr{O}(G_{\mu+1})$ 中的函数所一致逼近, 即存在函数 $f_1 \in \mathscr{O}(G_{\mu+1})$ 使得 $\|f_1 - f_0\|_{G^*_{\mu-1}} < \dfrac{1}{2}$. 进而我们进行归纳: 我们假定已经构造了函数 $f_j \in \mathscr{O}(G_{\mu+j}), 1 \leqslant j \leqslant k$, 其满足

$$\|f_j - f_{j-1}\|_{G^*_{\mu+j-2}} < \frac{1}{2^j}. \tag{9}$$

因为根据 (7), 函数 f_k 在 $G^*_{\mu+k-1}$ 的邻域中全纯, 故由定理 2 存在函数 $f_{k+1} \in \mathscr{O}(G_{\mu+k+1})$, 它满足 $j = k+1$ 时的条件 (9); 于是序列 f_j 的存在性得证.

由所作的构造, 对所有 $k \geqslant 0$ 级数

$$f_k + \sum_{j=k+1}^{\infty} (f_j - f_{j-1}) \tag{10}$$

由那些在 $G_{\mu+k}$ 中全纯的函数构成, 而它在 $G^*_{\mu+k-1}$ 上一致收敛. 由于它的和显然不依赖于 k, 而诸集合 $G^*_{\mu+k-1}$ 穷竭了区域 D, 则 $f \in \mathscr{O}(D)$. 另外, 由于 (8) 和 (9)

$$|f(a)| \geqslant |f_0(a)| - \sum_{j=1}^{\infty} |f_j - f_{j-1}| \geqslant c,$$

$$\|f\|_K \leqslant \|f_0\|_K + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j - f_{j-1}\|_K < c,$$

从而 $a \notin \widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}$. 因为 a 是 $D \backslash D_r$ 中的任意点, 故 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)} \subset D_r$. □

最后, 我们将证明简单而重要的一个事实, 它建立了全纯区域对于双全纯映射下的不变性.

定理 4. 如果 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为全纯域, D^* 为其在双全纯映射 φ 下的像, 则 D^* 也是全纯域.

证明. 设 $K^* \Subset D^*$, 于是由 φ 的同胚性可知集合 $K = \varphi^{-1}(K^*) \Subset D$, 而因为 D 为全纯域, 则 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)} \Subset D$.

容易看出

$$\varphi(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}) \supset \widehat{K}^*_{\mathscr{O}(D^*)}. \tag{11}$$

事实上, 如果某个点 $w \in D^*\backslash\varphi(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)})$, 则 $z = \varphi^{-1}(w) \in D\backslash\widehat{K}$, 并存在函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 使得 $|f(z)| > \|f\|_K$; 我们记 $g = f \circ \varphi^{-1}$, 显然, $g \in \mathscr{O}(D^*)$ 且 $|g(w)| > \|g\|_{K^*}$, 而这意味着, $w \in D^*\backslash\widehat{K}^*_{\mathscr{O}(D^*)}$.

由 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)} \Subset D$, 我们得出结论: $\varphi(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}) \Subset D^*$, 并由 (11), 有 $\widehat{K}^*_{\mathscr{O}(D^*)} \Subset D^*$. 因此, D^* 为全纯凸, 从而是个全纯域. □

§13. 伪凸域

在这里我们来了解全纯凸概念的另一种解释, 它有两个重要的优点: 第一, 这个概念可以局部地阐述 (并且在此形式下它容易被验证), 第二, 它可以用几何的语言自然地表达.

36. 连续性原理

我们仍以一个关于必然性的解析延拓的定理着手. 为了阐述它, 我们约定称某个区域 $G \subset \mathbb{C}^m$ $(m < n)$ 在非退化全纯映射

$$\varphi : G \to \mathbb{C}^n \tag{1}$$

的像为空间 $\mathbb{C}^n$ 中一个 m 维**全纯曲面** S. 特别, 当 $m = 1$ 时这是条**全纯曲线**, 而如果 $G \subset \mathbb{C}$ 还是个圆盘并且 φ 在 $\overline{G}$ 上连续则称 $S = \varphi(\overline{G})$ 为**全纯圆盘**. 我们记得, 所谓映射 (1) 为**非退化**是说在 G 的所有点上雅可比矩阵 $\left(\dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_\nu}\right)$ 的秩等于 m. 称曲面 (1) 为**有界**是说集合 $S = \varphi(G)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中有界.

对于有界全纯曲面成立下面的**极大模原理**.

如果函数 f 在某个包含了有界全纯曲面 S 的区域 $U \subset \mathbb{C}^n$ 全纯, 并在其闭包 $\overline{S}$ (在 $\mathbb{C}^n$ 的拓扑下) 上连续, 则

$$\sup_S |f| \leqslant \sup_{\partial S} |f|, \tag{2}$$

其中 $\partial S = \overline{S}\backslash S$.

事实上, 如果在某点 $b \in S$ 达到 $\sup\limits_{\overline{S}} |f| > \sup\limits_{\partial S} |f|$, 则存在点 $a \in \varphi^{-1}(b) \subset G$, 使在 G 中全纯的函数 $f \circ \varphi$ 的模达到极大值. 但是因此而有在 $\overline{S}$ 上 $f \equiv$ 常数, 而这与点 b 的选取矛盾.

另外, 我们称集合序列 M_ν 收敛于集合 M (记为 $M_\nu \to M$) 是说, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在指标 ν_0 使得对所有 $\nu \geqslant \nu_0$ 有

$$M_\nu \subset M^{(\varepsilon)} \quad 和 \quad M \subset M_\nu^{(\varepsilon)}, \tag{3}$$

其中以 $M^{(\varepsilon)}$ 和 $M_\nu^{(\varepsilon)}$ 代表相应集合的 $\varepsilon-$ 膨胀 (即所有多圆盘 $U(z,\varepsilon)$ 的并, 其中的多圆盘的中心 z 为该集合中的点).

定理 (贝恩克 – 佐默 (Behnke-Sommer)). 设 S_ν 为有界全纯曲面的序列, 它们连同其边界 ∂S_ν 都属于区域 $D \subset \mathbb{C}^n$. 如果 S_ν 收敛于某个集合 S, 而 ∂S_ν 收敛于集合 Γ 且 $\Gamma \Subset D$ (图 37). 那么任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 全纯地延拓到集合 S 的某个邻域中.

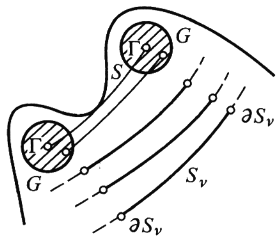

图 37

证明. 因为 $\Gamma \Subset D$, 故存在区域 $G \Subset D$ 使得 $\Gamma \Subset G$; 记 $\rho(G, \partial D) = r$. 由于 $\partial S_\nu \to \Gamma$ 的收敛性, 故存在 ν_0 使得当 $\nu \geqslant \nu_0$ 有

$$\partial S_\nu \subset G. \tag{4}$$

对任意 $f \in \mathscr{O}(D)$ 和任意点 $z \in S_\nu$, 根据极大模原理有

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_{\partial S_\nu},$$

从而由 (4), 当 $\nu \geqslant \nu_0$ 时我们有

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_G.$$

然而这表明 z, 从而所有曲面 S_ν, 当 $\nu \geqslant \nu_0$ 时属于凸包 $\widehat{G}_{\mathscr{O}(D)}$. 由同步延拓引理 (第 34 目) 从而得到, 任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可全纯地延拓到所有曲面 S_ν 的 $r-$ 膨胀 $S_\nu^{(r)}$ 中, 其中的指标 $\nu \geqslant \nu_0$.

最后, 由于 $S_\nu \to S$ 的收敛性, 存在 $\nu_1 \geqslant \nu_0$ 使 $S \subset S_\nu^{(r/2)}$ 对所有 $\nu \geqslant \nu_1$ 成立, 因而, 任意 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可全纯地延拓到集合 S 的 $\dfrac{r}{2}-$ 膨胀中. □

注. 正如在证明中所看到的, 在贝恩克 – 佐默定理中, 类 $\mathscr{O}(D)$ 可以替换为另一个函数类, 其中的函数只要在 D 和极限集合 $S \bigcup \Gamma$ 的某个邻域的交上为全纯的函数即可.

称贝恩克 – 佐默定理为**连续性原理**[1]. 可描述性地表达其为, 在全纯曲面 S_ν 的邻域中函数为全纯的性质在这些曲面的极限集上仍然保持不变.

[1] 贝恩克 – 佐默的特殊情形, 即 $\overline{S}_\nu$ 为复直线 $'z = 'a_\nu$ 的闭子集, S 也是复直线 $'z = 'a = \lim\limits_{\nu \to \infty} 'a_\nu$ 的闭子集, 是哈托格斯证明的; 并被称之为关于连续性的哈托格斯定理.

作为应用连续性原理的例子, 我们证明一个引理, 我们在下一节讨论在管状区域中全纯函数的延拓时要用到它.

引理. 设 x^0, x^1, x^2 为空间 $\mathbb{R}^n(x)$ 中三个不共线的点, $l_1 = [x^0, x^1]$ 和 $l_2 = [x^0, x^2]$ 为闭线段, 而 $\Delta = x^0x^1x^2$ 为闭三角形. 如果函数 f 在集合 $(l_1 \bigcup l_2) \times \mathbb{R}^n(y)$ 的邻域中全纯, 则它可全纯地延拓到 $\Delta \times \mathbb{R}^n(y)$ 的邻域中.

换句话说, 任意在三角棱柱的两个面的并的邻域中全纯的函数 f (图 38) 必定可全纯延拓到整个棱柱上.

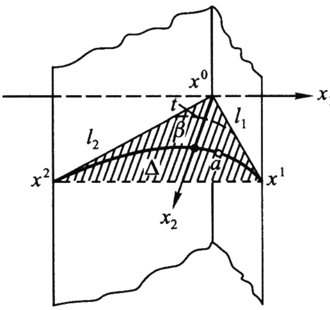

图 38

证明. 不失一般性, 可设 $x^0 = (0, 0, \cdots, 0), x^1 = (1, 1, 0, \cdots, 0), x^2 = (-1, 1, 0, \cdots, 0)$, 这是因为可由 $\mathbb{C}^n(z)$ 中的线性变换达到, 而此变换的系数为实数 [1]. 只要证明 f 在集合 $M = \Delta \times \mathbb{R}^n(y)$ 中的任意点 a 可全纯延拓即可. 可以假定 a 位于 M 和实子空间 $\{y = 0\}$ 的交集中, 即在三角形 Δ 中 (这可以用具纯虚坐标向量作平移达到).

因此必需证明 f 可全纯延拓到任意点 $a = (a_1, a_2, 0, \cdots, 0)$, 其中 a_1, a_2 为实数, 满足条件 $|a_1| < a_2 \leqslant 1$ (在我们的轴的位置下, 这个条件表明 $a \in \Delta \backslash \{l_1 \bigcup l_2\}$; 当 $a \in l_1 \bigcup l_2$ 时由假定, f 已是全纯). 为了证明这点, 我们引进通过点 x^1, a 和 x^2 的抛物线

$$x_2 = \alpha x_1^2 + \beta \tag{5}$$

(为此需取 $\alpha = \dfrac{1 - a_2}{1 - a_1^2}, \beta = 1 - \alpha$; 当 $a_2 = 1$ 时该抛物线退化为直线 $x_2 = 1$) 并且对任意 $t, 0 < t \leqslant \beta$, 考虑全纯曲线

$$S_t = \{z \in M : z_2 = \alpha z_1^2 + t, z_3 = \cdots = z_n = 0\}. \tag{6}$$

[1] 这种变换将 $\mathbb{R}^n(x)$ 变到自己而不破坏这些条件和引理的断言.

我们把变量 z_1 看作是 S_t 上的参数. 为了证明 S_t 的有界性只需证明当 $z \in S_t$ 时, z_1 的值在 z_1- 平面的有界区域中变化. 但是, S_t 在 z_1- 平面上的投影由条件 $(\mathrm{Re}\ z_1, \mathrm{Re}\ z_2, 0, \cdots, 0) \in \Delta$ 定义, 它由形式

$$|x_1| < \alpha(x_1^2 - y_1^2) + t \leqslant 1 \tag{7}$$

描述, 且由包含在双曲线

$$\left(x_1 \pm \frac{1}{2\alpha}\right)^2 - y_1^2 = \frac{1}{4\alpha^2} - \frac{t}{\alpha}$$

之间的有界区域界定 (在图 39 中的阴影部分). 我们还发现, 在 $0 < t \leqslant \beta$ 时曲线 S_t 交 $\mathbb{R}^n(x)$ 于属于 Δ 的抛物线

$$x_2 = \alpha x_1^2 + t \tag{8}$$

中的一段, 其平行于抛物线 (5) (图 38 中用虚线表出).

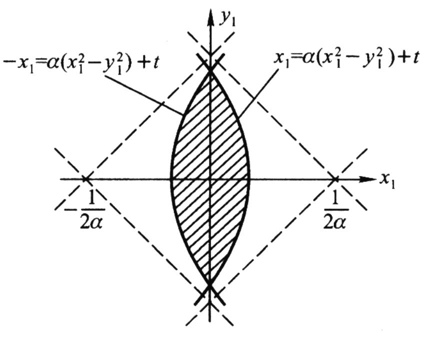

图 39

以 E 表示那些 $t \in (0, \beta]$ 使 f 在 S_t 的邻域中为全纯的集合. 它显然为开集. 因为在充分小的 $t > 0$, 如同在图 39 看到的, z_1 的变化区域 (7) 位于 $z_1 = 0$ 的点的任意小邻域中, 从而 S_t 也位于点 $z = 0$ 的任意小邻域中, 在其中由假设条件 f 为全纯, 所以 E 非空. 然而同时 E 也为闭. 事实上, 如果 $t_0 \in (0, \beta]$ 为 E 的极限点, 则存在序列 $S_{t_\nu} \to S_{t_0}, t_\nu \in E$, 于是 $\partial S_{t_\nu} \to \partial S_{t_0}$, 并且 f 在所有 S_{t_ν} 和 ∂S_{t_ν} 的邻域中全纯 (我们注意到, 对任意 $t \in (0, \beta], \partial S_t$ 属于集合 $(l_1 \bigcup l_2) \times \mathbb{R}^n(y)$, 在此由所给条件, f 为全纯). 因此, 我们能够应用连续性原理 (见在其证明后面的附注) 并得到 $t_0 \in E$. 这样一来, $E \equiv (0, \beta]$, 从而 f 解析延拓到了 S_β 的邻域, 然而 S_β 包含了点 a. □

37. 局部伪凸性

具 C^2 类边界的区域 $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) < 0\}$ 在其边界点 a 的通常的 (几何的) 凸性是指, 在这个点的充分小邻域 U 中 D 位于切平面 $T = T_a(\partial D)$ 的一侧. 不失一般性, 可设 $a = 0$, 并且 φ 在点 0 的泰勒展式为

$$\varphi(x) = L_0(x) + \frac{1}{2}H_0(x) + 0(|x|^2), \tag{1}$$

其中 L_0 为线性项全体, 而

$$H_0(x) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\Big|_0 x_\mu x_\nu. \tag{2}$$

因为在 T 上线性项 $L_0(x) \equiv 0$, 于是凸性可由二次型 H_0 在 T 上的限制确定: 如果 D 在点 0 为凸, 则 $H_0(x)|_T \geqslant 0$, 而如果 $H_0(x)|_T > 0$ 在 $x \neq 0$ 成立, 则 D 为凸.

在构建这个判别法的复类比时出现了局部伪凸性这个概念. 设在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的边界点 a 的邻域 U 中, 区域 D 由条件

$$D \bigcap U = \{z \in U : \varphi(z) < 0\} \tag{3}$$

给出, 其中 $\varphi \in C^2(U), \nabla_z \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial z_n}\right)_z \neq 0$, 以及 $z \in U$: 我们称具这种性质 的函数 φ *局部定义了*在邻域 U 中的区域 D.

不难看出, 两个这样的函数 φ 和 ψ 在 U 充分小时相差一个正的因子 $h \in C^1(U)$. 事实上, 根据除法引理 (第 31 目) 存在函数 $h \in C^1(U)$ 使得 $\psi = h\varphi$, 而因为 φ 和 ψ 在 $U \bigcap D$ 都为负, 而在 $U \backslash \overline{D}$ 为正, 故在 $U \backslash \partial D$ 上 $h > 0$. 但在 ∂D 上 $h \neq 0$: 因为由同一个引理, 有 $\varphi = h_1 \psi$, 其中 $h_1 = 1/h \in C^1(U)$, 故在 U 处处有 $h > 0$.

* 设 φ 在邻域 U 中局部定义了区域 D. 证明, 如果 U 充分小, 则在 $\partial D \bigcap U$ 上为零的任意形式 $\omega \in C^k(U)$ 具有形式 $\omega = \varphi \omega_1$, 其中 $\omega_1 \in C^{k-1}(U)$ 为某个形式. *

φ 在点 $a = 0$ 的邻域中的泰勒展式为

$$\varphi(z) = 2\mathrm{Re}\ L_0(z) + \mathrm{Re}\ K_0(z) + \frac{1}{2} H_0(z) + 0(|z|^2), \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned} L_0(z) &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu}\Big|_0 z_\nu, \quad K_0(z) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial z_\nu}\Big|_0 z_\mu z_\nu, \\ H_0(z) &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu}\Big|_0 z_\mu \overline{z}_\nu. \end{aligned} \tag{5}$$

为了得到这个展式, 只要写出 φ 按变量 z_ν 和 $\overline{z}_\nu$ 的泰勒展式, 并且注意到因为 φ 是实函数, 那些对 $\overline{z}_\nu$ 取导数项的全体复共轭于对 z_ν 取导数的那些对应项, 从而在和号中给出了两倍的实部分即可.

我们看到, 有别于 (1), 展式 (4) 的二阶项分成了两组: Re $K_0(z)$ 和 $\frac{1}{2}H_0(z)$. 我们把第二组表示为有点不同的样子:

$$H_z(\varphi, \omega) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu}\Big|_z \omega_\mu \overline{\omega}_\nu, \tag{6}$$

并称其为函数 φ 在点 z 的莱维 (Levi) 形式. 由于 φ 的实性质, 这是个埃尔米特形式 $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu} = \overline{\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\mu}}\right)$ 从而在所有向量 $\omega \in \mathbb{C}^n$ 上取实数值. 可直接验证它的下列性质.

a) 如果 $h \in C^2$ 在点 z 的邻域中为实的, 则

$$H_z(h\varphi, \omega) = hH_z(\varphi, \omega) + \varphi H_z(h, \omega) + 2\mathrm{Re}\ \partial\varphi(\omega)\overline{\partial h(\omega)}, \tag{7}$$

其中 $\partial\varphi(\omega) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}\omega_\nu$, 相似地也可这样理解 $\partial h(\omega)$.

b) 如果在点 $\varphi(z)$ 的邻域中 $\psi \in C^2$ 为变量 φ 的函数, 则

$$H_z(\psi \circ \varphi, \omega) = \psi'(\varphi) H_z(\varphi, \omega) + \psi''(\varphi)|\partial\varphi(\omega)|^2. \tag{8}$$

c) 如果 $f: U \to \mathbb{C}^m$ 为全纯映射, 而 $\psi \in \mathbb{C}^2$ 为在点 $f(z)$ 的邻域中的函数, 则

$$H_z(\psi \circ f, \omega) = H_{f(z)}(\psi, f_*\omega), \tag{9}$$

其中 $f_* = df$ 为 f 在点 z 的微分映射.

其中的最后一个性质表明, 莱维形式对于双全纯映射不变. 形式 K_0 则不具有不变性; 进一步, 则可经过适当的双全纯变换可以把它完全消去.

引理. 如果区域 D 的边界以二阶光滑地靠近点 a, 则存在双全纯映射 $f, f(a) = 0$, 以及 a 的邻域 $U \ni a$, 使得 $G = f(D \bigcap U)$ 在点 $w = 0$ 的邻域中具有定义函数 ψ, 而 ψ 的泰勒展式为

$$\psi(\omega) = \mathrm{Re}\, w_n + \frac{1}{2} H_0(\psi, w) + o(|w|^2). \tag{10}$$

证明. 设点 $a = 0$ 且在其邻域中存在局部定义的区域 D: 设其为具泰勒展式 (4) 的函数 φ. 我们在邻域 $U \ni 0$ 选取一个新的坐标 w 使得 $w_1, \cdots, w_{n-1}$ 是在复切平面 $\{L_0(z) = 0\}$ 中的坐标, 而 $w_n = L_0(z) + \frac{1}{2}K_0(z)$. 因为 K_0 由平方项构成, 故映射 $w = f(z)$ 为双全纯, 只要 U 为充分小即可.

像 $G = f(D \bigcap U)$ 由不等式 $\psi(w) < 0$ 刻画, 其中 $\psi = \varphi \circ f^{-1}$, 并替换 $z = f^{-1}(w)$ 到展式 (5) 中, 则它可重写为

$$\varphi(z) = 2\mathrm{Re}\ f_n(z) + \frac{1}{2} H_0(\varphi, z) + o(|z|^2),$$

根据 (9) 我们得到了

$$\psi(w) = 2\mathrm{Re}\ w_n + \frac{1}{2} H_0(\psi, w) + o(|w|^2). \qquad \square$$

因此, 在局部定义函数的泰勒展式的二阶项中, 在复分析中较重要的是莱维形式. 就是说, 它是凸性的复类比的基础之一: 代替考虑所有二阶项在切平面 $T_a(\partial D)$ 的限制的是这个形式在复切平面 $T_a^c(\partial D)$ 上的限制.

定义 1. 称具二阶光滑边界的区域在点 a 的邻域中*在该点为伪凸*是说, 如果在 a 的邻域存在区域 D 的局部定义函数 φ 使得

$$H_a(\varphi,\omega) \geqslant 0 \quad 对所有 \quad \omega \in T_a^c(\partial D) \text{ 成立}, \tag{11}$$

称其为*严格伪凸*是说, 如果有

$$H_a(\varphi,\omega) > 0 \text{ 对所有 } \omega \in T_a^c(\partial D), \quad \omega \neq 0 \text{ 成立}. \tag{12}$$

举几个例子.

(1) 多圆盘 $U^n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$. 设点 $a \in \partial U^n$, 其属于边界 $S_\nu = \{|z_\nu| = 1\}$ 但不属于骨架 Γ, 作为定义函数可取 $\varphi(z) = z_\nu \bar{z}_\nu - 1$. 莱维形式 $H_a(\varphi,\omega) = |\omega_\nu|^2$ 非负, 但在 $\omega_\nu = 0$ 的向量 ω 上为零, 就是说, 正好是在复切平面 $T_a^c(\partial U^n)$ (后者的方程为 $\bar{a}_\nu(z_\nu - a_\nu) = 0$ 或 $\bar{a}_\nu\omega_\nu = 0$, 其中 $a_\nu \neq 0$, 故 $\omega_\nu = 0$) 上. 所以在这些点上多圆盘为伪凸域但不是严格伪凸域.

(2) 球 $B^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$. 这里对于任意点 $a \in \partial B^n$ 其定义函数为 $\varphi(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} z_\nu \bar{z}_\nu - 1$, 它的莱维形式 $H_a(\varphi,\omega) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \omega_\nu \bar{\omega}_\nu = |\omega|^2 > 0$, 其中 $\omega \neq 0$. 因此, 球在所有边缘点上为严格伪凸.

* 证明, 1) 任一区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 在一点为 (严格) 凸, 则它在该点也 (严格) 伪凸, 但其逆命题不真;

2) 区域 $D = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^4 < 1\}$ 在 ∂D 的所有点为严格伪凸, 但须除去圆 $\{|z_1| = 1, z_2 = 0\}$, 在这里它为伪凸. *

不难看出, 在伪凸和严格伪凸的定义中的性质不依赖于局部定义函数的选取. 事实上, 因为对所有 $\omega \in T_a^c(\partial D)$, 我们有 $\varphi(a) = 0$ 和 $\partial\varphi(\omega) = 0$, 故对另外的定义函数 $\psi = h\varphi$ 按公式 (7) 有

$$H_a(\psi,\omega) = h(a)H_a(\varphi,\omega)^{1)}.$$

但由前面所证 $h(a) > 0$, 故函数 φ 和 ψ 的莱维形式在 $T_a^c(\partial D)$ 上的限制具有相同的符号.

定理 1. 在点 a 的邻域严格伪凸的区域 D 有一个定义函数, 其莱维形式不仅在复切平面 $T_a^c(\partial D)$ 上为正而且对所有 $\omega \neq 0$ 也为正.

---

1) 因为我们有 $\varphi(a)$=0, 故公式 (7) 对函数 $h \in C^1(U)$ 成立.

证明. 由于点 $a \in \partial D$ 的邻域 U 中的严格伪凸性, 存在有定义函数 φ, 它满足条件 (12). 如果 U 充分小时, 则在其中 $\psi = \varphi + k\varphi^2$ 也是定义函数, 其中 $k \geqslant 0$ 为任意常数 (特别地, $\bigtriangledown\psi = \psi'(\varphi)\bigtriangledown\varphi \neq 0$). 因为 $\varphi(a) = 0$, 故在此点有 $\psi'(\varphi) = 1+2k\varphi = 1$, 并由公式 (8) 有

$$H_a(\psi, \omega) = H_a(\varphi, \omega) + 2k|\partial\varphi(\omega)|^2. \tag{13}$$

因为 $H_a(\psi, \lambda\omega) = |\lambda^2|H_a(\psi, \omega)$, 故只需证明形式 $H_a(\psi, \omega)$ 在球面 $S = \{\omega \in \mathbb{C}^n : |\omega| = 1\}$ 上为正即可. 记 $S_0 = \{\omega \in S : H_a(\varphi, \omega) \leqslant 0\}$; 如果这个集合为空, 则可令 $k = 0$. 如果其非空, 则由紧性知, 存在常数 $M \geqslant 0$ 使得 $H_a(\varphi, \omega) \geqslant -M$ 对所有 $\omega \in S_0$ 成立. 由于在 $\partial\varphi(\omega) = 0$, 即在 $\omega \in T_a^c(\partial D)$ 时的 (12), 有 $H_a(\varphi, \omega) > 0$; 因此, 在 S_0 上必有 $\partial\varphi(\omega) \neq 0$, 从而存在常数 $m > 0$, 使得 $|\partial\varphi(\omega)| \geqslant m$. 如果我们取 $k > M/2m^2$, 则由 (13) 和已得到的在 S_0 上的估值, 有

$$H_a(\psi, \omega) \geqslant -M + 2km^2 > 0,$$

而在 $S\backslash S_0$ 上 $H_a(\psi, \omega)$ 为正则是显然的. □

因为二阶光滑函数 φ 的莱维形式连续地依赖于 z, 故由定理 1 得出

推论. 如果区域 D 在其边界点 a 为严格伪凸, 则在此点的充分小的邻域 U 中存在定义函数 φ, 使得

$$H_z(\varphi, \omega) > 0 \text{ 对所有 } z \in U \text{ 和 } \omega \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}. \tag{14}$$

成立

由此同一个定理得到另一个命题, 它建立了严格伪凸和几何凸之间的联系:

定理 2. 如果区域 D 在边界点 a 为严格伪凸, 则存在某个邻域 $U \ni a$ 的双全纯变换, 它把 $\partial D \bigcap U$ 变到一个几何凸域边界上一些片段.

证明. 设 $a = 0$ 且 φ 为区域 D 的局部定义函数, 其情形如定理 1 那样. 进行在前面引理的证明中 (见前面的引理) 所描述的那个双全纯变换 $f : U \to \mathbb{C}^n$, 我们得到, 在点 $f(0) = 0$ 的邻域中区域 D 的定义函数 $\psi = \varphi \circ f^{-1}$ 具有泰勒展式 (10), 其中全部的二阶项化为

$$\frac{1}{2}H_0(\psi, w) = \frac{1}{2}H_0(\varphi, f_*^{-1}w).$$

由定理 1, 这个形式对所有 $w \neq 0$ 为正, 这表明, 它在充分靠近 $w = 0$ 的点上, 对 $f(\partial D \bigcap U)$ 的实切平面的限制为正. 从而其表明为几何凸性. □

伪凸性和严格伪凸性具有对全纯凸性的实质性的优越性: 这是些局部性质, 因而可以被有效地验证. 但是不同于全纯凸, 它们只能对于全纯域的*局部*特性有所作为.

定义 2. 称区域 D 为在边界点 a 非全纯扩张是说, 如果存在该点的邻域 U_a 及一个在开集 $U_a \bigcap D$ 全纯且不能全纯延拓到点 a 的函数 f.

可清楚看出, 任意全纯域不能在 ∂D 的任何一个点被全纯扩张. 早在 1910 年莱维提出了它的逆问题:

莱维问题. *在一个边界点非全纯扩张的区域是否是个全纯域?*

这个问题中的主要困难在于要从局部性质过渡到整体. 如果 D 在点 $a \in \partial D$ 非全纯扩张, 则存在一个局部的障碍: 函数 $f_a(z)$ 全纯于 $U_a \bigcap D$ 但不能全纯延拓到点 a. 然而, 如何由这种局部障碍构建出整体障碍, 即一个在*整个区域* D 全纯的函数而不能延拓到 a? 这个困难在 1953 年被 (日本数学家) 冈洁克服, 他证明了对任意区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的莱维问题有肯定的解答. 在下一章中我们要谈及这个问题的解.

关于非全纯扩张区域的局部问题原来只是个简单的问题, 可用局部伪凸的方法去解决.

定理 3 (莱维 – Krzoska).[1)] 如果在点 a 的邻域中具二阶光滑边界的区域 D, 在此点为严格伪凸, 则 D 在此点为非全纯扩张. 反之, 如果 D 在点 a 为非全纯扩张, 则它在此点为伪凸.

证明. 设 $a = 0$ 且 φ 为该区域在此点的局部定义函数. 不失一般性可设 φ 在点 z 的泰勒展式的线性部分为 0, 即 $L_0(z) = z_n/2$: 一般情形可经由非退化线性变换化为这种情形, 这个变换既不改变定理的条件也不改变其断言. 于是根据 (4) 这个展式具有形式

$$\varphi(z) = \mathrm{Re}(z_n + K_0(z)) + \frac{1}{2}H_0(z) + o(|z|^2), \tag{15}$$

而复切平面为 $T_0^c(\partial D) = \{z_n = 0\}$.

a) 设 D 在点 $a = 0$ 为严格伪凸. 于是就像定理 1 的证明中那样, 可以将 φ 变换为函数 $\varphi + k\varphi^2$, 其中 k 为适当的常数使得莱维形式 $H_0(z)$ 不仅在 T_0^c 上为正, 而且对所有 $z \neq 0$ 也如此, 并且这个变换不会破坏 φ 的展式 (15) 的形式. 然而, 由齐次性有

$$H_0(z) = |z|^2 H_0(z/|z|) \geqslant m|z|^2,$$

其中的 $m > 0$ 是 H_0 在球面 $\{|z| = 1\}$ 上的极小值.

现在我们考虑函数 $f(z) = z_n + K_0(z)$; 根据 (15), 在其零水平空间 $\{f(z) = 0\}$ 上, 当 $|z|$ 充分小时有

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}H_0(z) + o(|z|^2) \geqslant \frac{m}{2}|z|^2 + o(|z|^2) > 0.$$

[1)] $n = 2$ 时的定理由莱维在 1909 年证明, 一般情形的证明出现在 Krzoska 1933 年的学位论文中.

因此, 水平空间 $\{f(z)=0\}$ 在充分小的邻域 $U \ni 0$ 整个都位于区域 D 之外, 其中的水平空间通过 $a=0$. 我们最后有, 函数 $1/f$ 在 $D \bigcap U$ 全纯, 但不能全纯延拓到点 $a=0$, 即 D 在此点不能全纯扩张.

b) 设 D 在点 $a=0$ 不是伪凸的. 于是存在向量 $\omega \in T_0^c$, 即 $\omega = ('\omega, 0)$, 使得 $H_0(\omega)<0$. 我们考虑全纯曲线 S_0, 它是由曲面 $\{z_n + K(z) = 0\}$ 与通过轴 z_n 和向量 ω 的复二维曲面的截线得到. 这条曲线可借助于复参数 ζ 以方程

$$'z =' \omega\zeta, \quad z_n = g(\zeta) = \alpha\zeta^2 + o(|\zeta|^2)$$

给出 (我们考虑到, S_0 在点 $z=0$ 切于向量 ω). 就像在证明的第一部分那样, 我们得到了 $\varphi|_{S_0} = \dfrac{1}{2}H_0(\omega)|\zeta|^2 + o(|\zeta|^2)$. 因为 $H_0(\omega)<0$, 故现在在充分小 $|\zeta|$, 设 $|\zeta| \leqslant \delta$, 曲线 S_0 的所有点, 除了 $z=0$ 外, 都在区域 D 中.

可以清楚看出, 在充分小的 $t>0$ 下, 有界全纯圆盘 $S_t = \{'z =' \omega\zeta, z_n = g(\zeta) - t : |\zeta| < \delta\}$ 整个地属于区域 D, 而当 $t \to 0$ 时 $S_t \to S_0$ 和 $\partial S_t \to \partial S_0$. 根据连续性原理 (参看第 36 目) 得到: D 在点 $z=0$ 不是不能全纯扩张. □

推论. 设在点 $a \in \mathbb{C}^n$ 的邻域中实函数 $\varphi \in C^2$ 有 $\varphi(a)=0$, 且莱维形式 $H_a(\varphi,\omega)$ 在复切平面 $T_a^c(S)$ 至少有一个负的特征值 (即存在向量 $\omega \in T_a^c(S)$, 使得 $H_a(\varphi,\omega)<0$), 其中 $S=\{\varphi(z)=0\}$. 于是全纯于 S 的满足 $\varphi<0$ 的邻域部分的函数 f 全纯地被延拓到点 a.

证明. 这个事实已在莱维 – Krzoska 定理的证明 b) 中得证. □

注. 设区域 D 在某个边界点 a 从外部切于复超曲面 $A=\{f(z)=0\}$, 这表示 $f(a)=0$, 但在某个邻域 U_a 中曲面 A 在 D 的外部. 于是, D 不能在点 a 全纯扩张 (函数 $1/f$ 不能延拓), 从而根据所证的定理, 它在此点为伪凸. 这个伪凸的充分条件相似于几何凸性的条件 (在那里 A 必须换成实的超曲面).

迄今为止我们所考虑的是具 C^2 类边界的区域, 但是局部伪凸性可以在一般的情形中被阐述. 为此我们约定, 称区域 D 在边界点 a *可以从内部由全纯圆盘族相切*是说, 如果存在全纯圆盘族 $S_t \Subset D, 0<t\leqslant t_0$, 当 $t\to 0$ 时收敛于圆盘 S, 故而 $S_t \to S, \partial S_t \to \partial S$, 并且 $\partial S \Subset D$, 而 S 包含了点 a(图 40). 我们采用不具有这个性质作为在具任意边界的区域情形下的关于局部伪凸性的定义.

定义 3. 称区域 D 在边界点 a 为*伪凸*是说, 如果在此点它不能从内部由全纯圆盘族相切.

如果特别地, ∂D 在点 a 的邻域中为二阶光滑并在该点为在定义 1 的意义下伪凸, 则它也在定义 3 的意义下伪凸. 在莱维 – Krzoska 定理的证明 b) 中表明, 如果

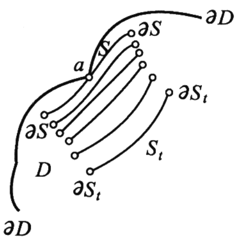

图 40

∂D 在点 a 不是在定义 1 意义下伪凸的, 则它在该点可以用全纯圆盘族从内部相切. 我们强调指出, 严格伪凸的概念意味着边缘的 C^2- 光滑性, 从而不能推广到任意的区域.

38. 多重次调和函数

为了从局部的伪凸性过渡到整体的伪凸性需要引进多重次调和函数的概念. 在卷 I 的附录中我们曾注意到, 次调和函数是单变量实函数凸性的高维类比. 事实上, 函数 $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ 为凸 (向下) 是说, 如果对任意 $x',x''\in[\alpha,\beta]$, 在区间 $[x',x'']$ 上 f 的最佳线性优势函数, 即一个函数, 它在点 $x=(1-t)x'+tx''$ 的取值为 $h(x)=(1-t)f(x')+tf(x'')$, 并满足条件:

$$\text{对所有 } x\in[x',x''],\quad \text{有 } f(x)\leqslant h(x).$$

(我们记得, 单变量的线性函数是调和函数的一维类比).

多变量的凸函数可以这样定义, 即它在任意实直线上的限制是个单变量凸函数, 二阶光滑的单变量函数的凸性条件是二阶导数为非负, 而由复合函数的微分法则, 对 C^2 类的多元函数 f 在直线 $x=x^0+\omega t$ 上的限制我们有

$$\frac{d^2}{dt^2}f(x^0+\omega t)=\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\Big|_x\omega_\mu\omega_\nu.$$

因此这种函数的凸性条件可化成所得到的这个二次型对所有 $\omega\in\mathbb{R}^n$ 的非负性.

多重次调和函数是多元凸函数的复类比.

定义 1. 称函数 $\varphi:D\to[-\infty,\infty)$ 在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中为**多重次调和函数**是说, 如果 1) 它在 D 上为上半连续, 以及 2) 对任意点 $z^0\in D$ 和对任意复直线 $z=l(\zeta)=z^0+\omega\zeta$, 其中 $\omega\in\mathbb{C}^n,\zeta\in\mathbb{C},\varphi$ 在这些直线上的限制, 即函数 $\varphi\circ l(\zeta)$, 是开集 $\{\zeta\in\mathbb{C}:l(\zeta)\in D\}$ 上的次调和函数.

我们记得, 在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中的上半连续函数是 D 上的一个实函数 φ, 它可取 $-\infty$ 值但不取 $+\infty$, 并在每点 $z^0\in D$, 它满足

$$\varlimsup_{z\to z^0}\varphi(z)\leqslant\varphi(z^0),\tag{1}$$

或者换句话说, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(z^0, \varepsilon) > 0$ 使得

$$|z - z^0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} \varphi(z) - \varphi(z^0) < \varepsilon, & \text{如果 } \varphi(z^0) \neq -\infty, \\ \varphi(z) < -1/\varepsilon, & \text{如果 } \varphi(z^0) = -\infty. \end{cases} \tag{2}$$

对于上半连续性而言, 其充分必要条件是对于任意的 $\alpha \in (-\infty, \infty)$, 使值小于它的集合 $\{z \in D : \varphi(z) < \alpha\}$ 为开. 上半连续函数从上面的那一面看表现得像连续函数. 特别地, 在紧集 $K \Subset D$ 上它为上有界并取得极大值 (不必下有界和达到极小值).

全纯函数的对数模是多重次调和函数的重要例子: 如果 $f \in \mathscr{O}(D)$, 则 $\varphi(z) = \ln|f(z)|$ 在 D 中为上半连续 (它在使 $f(z) \neq 0$ 的点上连续, 而当 f 逼近 0 时它趋向于 $-\infty$), 而它在任意复直线 $z = l(\zeta)$ 上的限制作为单变全纯函数 $f \circ l$ 的对数模是次调和的 (参看卷 I 的附录).

C^2 类的次调和函数可以通过拉普拉斯算子 $\triangledown = 4\dfrac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}$ 的非负性来进行特征刻画. 如果这个函数 φ 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中为二阶光滑, 则由复合函数的微分法则, 对于它在复直线 $z = z^0 + \omega\zeta$ 上的限制, 有

$$\frac{\partial^2 \varphi(z^0 + \omega\zeta)}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu}\Big|_{z^0} \omega_\mu \overline{\omega}_\nu.$$

我们因此得到下面的判别法.

定理 1. 对于函数 $\varphi \in C^2(D)$, 其为多重次调和的充分必要条件是在每点 $z \in D$, 对所有 $\omega \in \mathbb{C}^n$, 形式

$$H_z(\varphi, \omega) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu}\Big|_{z} \omega_\mu \overline{\omega}_\nu \geqslant 0. \tag{3}$$

我们又一次遇到了莱维形式: 我们曾在上一目中在与伪凸域相关的问题中考虑过它. 我们还要挑出一个二阶光滑的多重次调和函数的重要类, 它们与严格伪凸的概念有关.

定义 2. 称函数 φ 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为*严格多重次调和*是说, 如果 1) $\varphi \in C^2(D)$ 和 2) 在每个点 $z \in D$, 莱维形式对于所有 $\omega \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ 有

$$H_z(\varphi, \omega) > 0. \tag{4}$$

注. 埃尔米特莱维形式

$$H_z(\varphi, dz) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu} dz_\mu d\overline{z}_\nu$$

按在第 18 目中谈到过的标准规则, 其对应于微分形式

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu\partial\overline{z}_\nu}dz_\mu\wedge d\overline{z}_\nu=dd^c\varphi.$$

根据在第 18 目中所采用的约定, 二阶光滑函数 φ 的 (严格) 多重次调和函数可以由形式 $dd^c\varphi$ 的 (严格) 正性所刻画.

我们将在下一目中考察多重次调和函数与伪凸区域之间的联系. 在这里我们将专注于这些函数的性质, 其中我们感兴趣的函数不必是二阶光滑的, 而在一般情形它只是上半连续的而已.

由定义 1 可看出, 多重次调和函数的性质可径直约化为次调和函数的性质. 特别地, 由在卷 I 附录中所证的定理, 直接得到了下列的命题:

1° 如果在区域 D 中的多重次调和函数 φ 在某个点 $z^0\in D$ 达到其局部极大值, 则它在 D 中为常值.

2° 在每个点 $z^0\in D$ 的某个邻域中多重次调和函数是区域 D 中的多重次调和函数.

3° 如果函数族 $\varphi_\alpha,\alpha\in A$, 在区域 D 中为多重调和函数, 并在区域 D 中上半连续, 则其上确界函数

$$\varphi(z)=\sup_{\alpha\in A}\varphi_\alpha(z)$$

在此区域中为多重次调和函数.

4° 使上半连续函数 φ 在区域 D 中为多重次调和函数的充分必要条件是, 对每个点 $z\in D$ 和每个向量 $\omega\in\mathbb{C}^n$, 存在数 $r_0=r_0(z,\omega)$, 使得对所有 $r<r_0$ 有

$$\varphi(z)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z+\omega re^{it})dt \tag{5}$$

(多重次调和性判别法).

还存在命题:

5° 在点 $z^0\in\mathbb{C}^n$ 的邻域中的任意多重次调和函数 φ, 其值 $\varphi(z^0)$ 不超过其在球面 $\{|z-z^0|=r\}$ 上的平均值:

$$\varphi(z^0)\leqslant\frac{1}{\sigma(r)}\int_{\{|z-z^0|=r\}}\varphi(z)d\sigma, \tag{6}$$

其中半径 r 充分小, $\sigma(r)$ 为此球面的面积, 而 $d\sigma$ 为面积元.

证明. 不失一般性可设 $z^0=0$, 于是 (6) 式右端的均值可改写为

$$S(r)=\int_{S_r}\varphi(z)\sigma_0, \tag{7}$$

其中 $S_r = \{|z| = r\}$, 而 $\sigma_0 = d^c\ln|z|^2 \wedge (dd^c\ln|z|^2)^{n-1}/\pi^n$ 为庞加莱形式 (参看第 19 目). (7) 中的积分首先按照 S_r 与复直线 $l_\omega = \{z = \omega\zeta\}$ 的交线进行, 即按照圆 $\{|\zeta| = r\}$ 进行, 然后再沿这些直线的集合 $\{l_\omega\} = \mathbb{P}^{n-1}$ 进行 (我们假设 $|\omega| = 1$). 因为在 l_ω 上, 形式 $\dfrac{1}{\pi}d^c\ln|z|^2 = \dfrac{dt}{2\pi}$, 其中 $t = \arg\zeta$ (参看第 19 目), 则

$$S(r) = \int_{\mathbb{P}^{n-1}} \frac{1}{\pi^{n-1}}(dd^c\ln|z|^2)^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega re^{it})dt. \tag{8}$$

由其中 $z=0$ 的公式 (5) 知, 上面公式里面的那个积分不小于 $\varphi(0)$, 而 $dd^c\ln|z|^2/\pi = \omega_0$ 是 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的富比尼 - 施图迪法化形式. 因此

$$S(r) \geqslant \varphi(0)\int_{\mathbb{P}^{n-1}}\omega_0^{n-1} = \varphi(0)$$

(在这里我们利用第 19 目中的定理 1). □

像在卷 I 中那样, 由 5° 推导出

6° 任意在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中的多重次调和函数是 $2n$ 个实变量的次调和函数, 即对任意点 $z^0 \in D$ 和球 $B = \{|z - z^0| < r\}$, 其中半径 r 充分小, 则任意在 B 中调和[1)]并在 $\overline{B}$ 中连续的函数 h 具有性质

$$\varphi\Big|_{\partial B} \leqslant h\Big|_{\partial B} \Rightarrow \varphi\Big|_{B} \leqslant h\Big|_{B}. \tag{9}$$

我们还需要一个命题:

7° 如果函数 φ 在点 $z^0 \in \mathbb{C}^n$ 的一个邻域中多重次调和, 则它在球面 $\{|z-z^0| = r\}$ 上的平均值 $S(r)$ 是 r 的递增函数.

证明. 再次假设 $z^0 = 0$. 正如由 (8) 看到的, 只需证明次调和函数 $u(\zeta) = \varphi(\omega\zeta)$ 在圆 $\{|\zeta| = r\}$ 上的平均值递增, 即

$$s(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{it})dt$$

为递增函数.

设 $r_2 > r_1$ 且 $h(\zeta)$ 为函数 u 在圆盘 $\{|\zeta| < r_2\}$ 中的最佳调和优势函数 (参看卷 I 的附录第 3 目). 根据次调和与调和函数的性质, 我们于是有

$$s(r_1) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(r_1e^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(r_2e^{it})dt = s(r_2). \quad \square$$

现在我们来证明, 任意多重次调和函数可以被相同类型但无限可微的函数所逼近.

---

1) 我们记得, 称 C^2 类函数 h 为调和是说, 在每个点, 成立 $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 h}{\partial\zeta_\nu\partial\overline{\zeta}_\nu} = 0$.

定理 2. 对任意在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中多重次调和函数 φ, 可以构造一个开集的递增序列 G_μ $(\mu = 1, 2, \cdots)$, $\bigcup\limits_{\mu=1}^{\infty} G_\mu = D$, 以及一个递降函数序列 $\varphi_\mu \in C^\infty(G_\mu)$, 它在 G_μ 中为多重次调和函数, 并在每个点 $z \in D$ 上收敛于 φ:

$$\varphi_\mu(z) \to \varphi(z), \quad \varphi_{\mu+1}(z) \leqslant \varphi_\mu.$$

证明. 如果 $\varphi \equiv -\infty$, 则作为 φ_μ 我们可取序列 $\varphi_\mu(z) \equiv -\mu$. 在一般情形我们利用平均法进行构造. 取函数

$$K(z) = \begin{cases} ce^{-1/(1-|z|^2)}, & |z| < 1, \\ 0, & |z| \geqslant 1, \end{cases} \tag{10}$$

并选取 c 使得 K 沿整个空间 $\mathbb{C}^n$ 的积分等于 1 (实际上是沿球 $\{|z| < 1\}$ 的积分, 这是由于在球外 $K = 0$). 我们令

$$\varphi_\mu(z) = \int \varphi\left(z + \frac{w}{\mu}\right) K(w) dV, \tag{11}$$

把这个函数作为平均的核, 其中 dV 为 $2n$ 维体积元, 积分则取在整个 $\mathbb{C}^n$ 上 (实际在单位球上). 可清楚看出, 每个函数 φ_μ 被定义在区域 D 的 $(1/\mu)$– 收缩之中, 即开集

$$G_\mu = \{z \in D : \delta(z, \partial D) > 1/\mu\}$$

之中, 其中的 δ 为欧几里得距离. 也清楚看到, 对任意 μ 有 $G_\mu \subset G_{\mu+1}$, 并且 $\bigcup\limits_{\mu=1}^{\infty} G_\mu = D$.

在变量变换 $z + \dfrac{w}{\mu} \mapsto w$ 之后, 积分 (11) 有形式

$$\varphi_\mu(z) = \mu^{2n} \int \varphi(w) K(\mu(w - z)) dV,$$

由其看出 $\varphi_\mu \in C^\infty(G_\mu)$ (事实上, 被积函数从而积分本身无限可微地依赖于 z). 利用由不等式 (5) 表达的判别式容易建立函数 φ_μ 的多重次调和性质: 对所有 $z \in G_\mu$, $\omega \in \mathbb{C}^n$ 及所有充分小的 r 有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_\mu(z + \omega r e^{it}) dt \\ &= \int K(w) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi\left(z + \frac{w}{\mu} + \omega r e^{it}\right) dt \right\} dV \\ &\geqslant \int K(w) \varphi\left(z + \frac{w}{\mu}\right) dV = \varphi_\mu(z) \end{aligned}$$

(我们利用了 φ 的多重次调和性和核 K 的非负性).

变换 $dV = d\sigma_r dr$, 其中 $d\sigma_r$ 为球面 $\{|w| = r\}$ 的曲面元, 而在变量变换 $z+\dfrac{w}{\mu} \mapsto w$ 之后, 我们变 (11) 为

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(z) &= \int_0^1 K(r)dr \int_{\{|w|=r\}} \varphi\left(z + \frac{w}{\mu}\right) d\sigma_r \\ &= \int_0^1 K(r)dr\mu^{2n-1} \int_{\{|w-z|=\frac{r}{\mu}\}} \varphi(w) d\sigma_{\frac{r}{\mu}} \\ &= \int_0^1 K(r)\mu^{2n-1}\sigma\left(\frac{r}{\mu}\right) S\left(\frac{r}{\mu}\right) dr \\ &= \int_0^1 K(r)\sigma(r)S\left(\frac{r}{\mu}\right) dr,\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $S(r/\mu)$ 为 φ 在球面 $\{|w-z| = r/\mu\}$ 上的平均值, 而 $\mu^{2n-1}\sigma(r/\mu) = \sigma(r)$ 为半径为 r 的球面面积 [1]. 现在根据性质 7°, 可得出结论说, 函数 φ_μ 随 μ 增大而减小.

由于函数 φ 的次调和性, 其平均值 $S(r/\mu) \geqslant \varphi(z)$, 而因为

$$\int_0^1 K(r)\sigma(r)dr = \int KdV = 1,$$

则由 (12) 得出, 在任意点 $z \in D$, 对从某个 μ_0 开始的所有的 μ, 有 $\varphi_\mu(z) \geqslant \varphi(z)$. 另一方面, 由函数 φ 的半连续性, 对任意 $\varepsilon > 0$ 及对所有充分靠近 z 的 w, 有 $\varphi(w)-\varphi(z) < \varepsilon$, 即对所有 $\mu \geqslant \mu_0$ 有 $S(r/\mu) \leqslant \varphi(z)+\varepsilon$; 对这些 μ, 我们由 (12) 得到 $\varphi_\mu(z) < \varphi(z)+\varepsilon$. 因此, 对所有 $z \in D$

$$\lim_{\mu\to\infty} \varphi_\mu(z) = \varphi(z). \quad \square$$

注. (1) 次调和函数的递降序列的极限仍是次调和函数 (参看卷 I 附录的问题 10), 并且这个断言立即可能换到多重次调和函数上. 因而定理 2 的逆成立.

(2) 在定理 2 中, 用作逼近的函数可假定为*严格*多重次调和的, 为此只要替换 $\varphi_\mu(z)$ 为 $\varphi_\mu(z) + \dfrac{1}{\mu}|z|^2$ 即可.

定理 3. 如果函数 φ 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中为多重次调和, 而 $\psi : \varphi(D) \to \mathbb{R}$ 为 C^2 类递增凸函数, 则 $\psi \circ \varphi$ 为 D 中的多重次调和函数.

证明. 先设 $\varphi \in C^2(D)$. 由莱维形式的性质 b) (第 37 目)

$$H_z(\psi \circ \varphi, \omega) = \psi' \circ \varphi(z) H_z(\varphi, \omega) + \psi'' \circ \varphi(z)|\partial\varphi(\omega)|^2,$$

而因为我们有 $\psi', \psi'' \geqslant 0$, 故这种情形下定理得证.

在一般情形中, 我们将利用定理 2 及其逆定理: 以光滑的多重次调和函数序列逼近 $\varphi : \varphi_\mu \searrow \varphi$; 依照我们所证过的结果知, 函数 $\psi \circ \varphi_\mu$ 为多重次调和, 而由于 ψ 是递增的连续函数, 故而 $\psi \circ \varphi_\mu \searrow \psi \circ \varphi$, 从而 $\psi \circ \varphi$ 为多重次调和. $\square$

[1] 我们替代 $K(w)$ 记作 $K(r)$, 这是因为根据 (10), K 只依赖于 $|w| = r$.

由多重次调和函数定义的要求, 它在复直线上的限制是个次调和函数. 这个性质让我们有下面更强的命题:

定理 4. 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中, 多重次调和函数 φ 在任意 m 维全纯曲面 $f: G \to \mathbb{C}^n, G \subset \mathbb{C}^m$ 上的限制也是在开集 $\Omega = \{\zeta \in G : f(\zeta) \in D\}$ 上的多重次调和函数.

证明. 为简明起见, 形式的计算仅限于 $m = 1$ 的情形, 即我们将证明 φ 在全纯曲线 $z = f(\zeta)$ 上的限制是个次调和函数.

先设 $\varphi \in C^2(D)$. 于是对于 $u = \varphi \circ f$ 由复合函数的微分法则知, 在任意点 $\zeta \in G$ 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu} \frac{\partial f_\mu}{\partial \zeta} \left(\overline{\frac{\partial f_\nu}{\partial \zeta}} \right).$$

因为 φ 为多重次调和, 故由定理 1 知, 在右端的那个形式为非负, 而这意味着 $u(\zeta)$ 为次调和函数.

一般的情形则用定理 2 及随其后的那个注解化成了前面所考虑过的情形. □

推论. 对于在全纯曲面 S 的邻域中的多重次调和函数 φ 而言, 它在 S 上的限制成立极大值原理.

特别, 对于有界全纯曲面 S (参看第 36 目) 这个原理可表述为

$$\|\varphi\|_S = \|\varphi\|_{\partial S}. \tag{13}$$

我们还将不加证明地叙述关于多重次调和函数的一个延拓定理 [1], 它类比于关于全纯函数延拓的黎曼定理 (第 32 目定理 3):

定理 (格劳尔特 – 雷默特 (Grauert-Remmert)). 任何一个在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中除去一个解析集外处处多重次调和, 并且在 D 上有界的函数, 可延拓为 D 中多重次调和的函数.

39. 伪凸域

在此, 我们将考虑在其边界的每个点为伪凸的区域, 从而引进伪凸性的整体性质. $\mathbb{R}^n$ 中凸域的一个特征是, 它们可以被小于凸函数值的那些集合所穷竭, 即在其上存在凸函数, 它们在趋向边缘时无限地增大. 如果把实结构换作复结构, 我们则转到了整体伪凸的概念.

---

[1] Grauert, H., Remmert. R. “复空间中的多重次调和函数”, Math. Zeitschr., 1956, 65; 2,175 — 194.

定义 1. 称区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为 (整体) 伪凸是说, 如果在其上存在多重次调和函数 u, 使得当 $z \to \partial D$ 时, $u(z) \to +\infty$, 或者换句话说, 使得对所有 $\alpha \in \mathbb{R}$, 有

$$\{z \in D : u(z) < \alpha\} \Subset D. \tag{1}$$

我们发现, 平面 $\mathbb{C}$ 中的任意区域都是伪凸的. 事实上, 对 $\overline{\mathbb{C}}\backslash\{\zeta\}$, 作为定义中的函数 u 可取为: 当 $\zeta \neq \infty, u(z) = 1/|z-\zeta|$; 当 $\zeta = \infty$, 则 $u(z) = |z|$. 在一般情形, 函数

$$u(z) = |z| + \sup_{\zeta \in \partial D} \frac{1}{|z-\zeta|} = |z| + \frac{1}{\partial(z, \partial D)}$$

满足定义中的条件 (δ 表示欧几里得距离), 这是因为它连续 [1)] 并且是一个次调和函数族的上确界.

对于 $n > 1$, 这个概念具有的意义是: 它区分出了一个重要区域类, 像我们现在要证明的那样, 它等同于在第 37 目中在所有边缘点上为伪凸的区域类.

* 证明, 当 $n > 1$ 时区域 $D = \{z \in \mathbb{C}^n : r < |z| < R\}$ 不是在所有边缘点伪凸. *

我们约定称 $R(a)$ 为区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 在点 $a \in D$ 的哈托格斯半径是指中心在 a 的, 属于 D 与复直线 $l = \{'z = 'a, z_n = \zeta\}$ 交集的, 并平行于 z_n 轴的最大圆盘的半径:

$$R(a) = \delta(a, \partial D \bigcap l). \tag{2}$$

引理. 如果区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 在其所有边界点为伪凸, 则函数 $u(z) = -\ln\ R(z)$ 在 D 中为多重次调和, 其中 $R(z)$ 为区域 D 在点 z 的哈托格斯半径.

证明. 对任意区域 $D \subset \mathbb{C}^n$, 其哈托格斯半径 R 为下半连续, 而函数 $u = -\ln\ R(z)$ 在 D 中为上半连续. 事实上, 对任意点 $a \in D$, 显然有 (参看图 41) $\lim\limits_{z \to a} R(z) \geqslant R(a)$. 还需要证明, 在引理的条件下, 函数 $u = -\ln\ R$ 在任意复直线

$$l_\omega = \{z \in \mathbb{C}^n : z = l(\zeta) = a + \omega\zeta\} \tag{3}$$

上的限制是在点 $\zeta = 0$ 的邻域中的次调和函数, 其中 $a \in D, \omega \in \mathbb{C}^n$. 如果 $'\omega = '0$, 即 l_ω 平行于 z_n 轴, 我们则有了平面的情形: $R|_{l_\omega} = \inf\limits_{z' \in \partial D \cap l_\omega} |z_n - z'_n|$, 从而函数

$$u|_{l_\omega} = -\ln\ R|_{l_\omega} = \sup_{z' \in \partial D \cap l_\omega} \{-\ln|z_n - z'_n|\}$$

作为次调和函数的上确界的上半连续函数是次调和的.

在 $'\omega \neq '0$ 的情形我们以归谬法证明. 如果函数

$$u|_{l_\omega} = -\ln\ R \circ l(\zeta) = v(\zeta) \tag{4}$$

[1)] 由三角不等式, 函数 $\delta(z, \partial D)$ 满足利普希茨条件, 且当 $z \in D$ 时 $\delta(z, \partial D) \neq 0$.

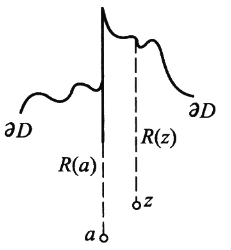

图 41

在 $\zeta=0$ 的邻域中不是次调和的, 则存在圆盘 $U=\{|\zeta|<r\}$ 和在 $\overline{U}$ 上连续而在 U 中调和的函数 h, 使得 $v(\zeta)\leqslant h(\zeta)$ 在 ∂U 上成立, 但是在某个点 $\zeta_0\in U$ 有

$$h(\zeta_0)-v(\zeta_0)=\inf_{\overline{U}}\{h(\zeta)-v(\zeta)\}=-\varepsilon<0$$

(我们利用了那样的事实, 即下半连续的函数 $h-v$ 在紧集上取得其下界). 我们以 $g(\zeta)=-h(\zeta)-\varepsilon$ 表示在 U 中调和且在 $\overline{U}$ 中连续的函数; 我们有

$$\begin{aligned}&g(\zeta)<-v(\zeta)\ \text{在}\ \partial U\ \text{上},\\&g(\zeta)\leqslant -v(\zeta)\ \text{在}\ \overline{U}\ \text{上},\\&g(\zeta_0)=-v(\zeta_0).\end{aligned}\tag{5}$$

设在 (3) 中的函数 $l(\zeta)=('l(\zeta),\lambda(\zeta))$, 使得 $'l(\zeta)='a+'\omega\zeta$ 和 $\lambda(\zeta)=a_n+\omega_n\zeta$. 由哈托格斯半径的定义, 存在点 $b=('b,b_n)\in\partial D$ 使得 $'b='l(\zeta_0),|b_n-\lambda(\zeta_0)|=R\circ l(\zeta_0)$. 构造在 U 中全纯的函数 $G=g+ig_*$, 使得 $G(\zeta_0)$ 等于某个值 $\ln(b_n-\lambda(\zeta_0))$: 因为由 (4) 和 (5) 我们有 $\ln|b_n-\lambda(\zeta_0)|=-v(\zeta_0)=g(\zeta_0)$, 故这是可以做到的.

现在考虑全纯圆盘族

$$S_t=\{z\in\mathbb{C}^n:'z='l(\zeta),z_n=\lambda(\zeta)+te^{G(\zeta)},\zeta\in\overline{U}\}.\tag{6}$$

对于任意点 $z\in S_t,0\leqslant t\leqslant 1$, 我们有 $'z='l(\zeta)$ 并且由于 (5) 中第二个不等式有

$$|z_n-\lambda(\zeta)|=te^{g(\zeta)}\leqslant te^{-u(\zeta)}=tR\circ l(\zeta).$$

由哈托格斯半径的定义得知, 当 $t<1$ 时所有的 $S_t\subset D$. 由 (5) 的第一个不等式, 类似地我们得到在所有 $t,0\leqslant t\leqslant 1$, 有 $\partial S_t\subset D$. 当 $t\to 1$ 时圆盘 $S_t\to S_1$, 而因为当 $\zeta=\zeta_0$ 时有 $'z='l(\zeta_0)='b$ 和 $z_n=\lambda(\zeta_0)+e^{G(\zeta_0)}=b_n$ (我们有 $\ln G(\zeta_0)=b_0-\lambda(\zeta_0)$), 故 S_t 包含了点 $b\in\partial D$. 我们便得到了矛盾, 因为由条件, 区域 D 在点 b 为局部伪凸. □

注. 在第 8 目我们曾引进过哈托格斯级数

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu('z) z_n^\mu \tag{7}$$

的收敛区域, 它是这个级数的收敛集 $D = \{('z, z_n) : 'z \in 'D, |z_n| < R('z)\}$ 的开核 (在这里, 我们假定了 g_μ 在 $'D$ 中全纯). $R('z)$ 显然是区域 D 的哈托格斯半径. 重复在 $'\omega \neq '0$ 情形的引理的证明, 只要稍加变化 [1] 便可证明函数 $-\ln\ R('z)$ 在 $'D$ 中为多重次调和.

定理 1. 如果区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 在其每个边界点为局部伪凸, 则它是整体伪凸.

证明. 函数 $u(z) = -\ln\ \delta(z, \partial D)$ 在区域 D 中连续 (但除去平凡情形 $D = \mathbb{C}^n$), 并且当 $z \to \partial D$ 时趋向于 $+\infty$. 还要证明它在 D 中为次调和的.

以 l_ω 表示复直线 $\zeta \mapsto z + \omega\zeta$, 它沿向量 ω 的方向通过点 $z \in D$, 并记 $R_\omega(z) = \delta(z, \partial D \bigcap l_\omega)$. 显然, 对所有的 $z \in D$, 有

$$\delta(z, \partial D) = \inf_\omega\ R_\omega(z),$$

其中下界是对所有 $\omega \in \mathbb{C}^n, |\omega| = 1$ 取的.

利用复旋转 $z \mapsto Cz$, 其中 $C = (c_{\mu\nu})$ 为 $n \times n$ 的酉矩阵, 方向 ω 可以变化到 z_n 轴的方向, 于是 R_ω 变成了区域 D 的哈托格斯半径. 因为这样的旋转保持了欧几里得距离和伪凸性 (局部的和整体的), 故由引理可以断言函数 $-\ln\ R_\omega(z)$ 在区域 D 中为多重次调和. 但是因而

$$u(z) = -\ln\ \delta(z, \partial D) = \sup_\omega(-\ln\ R_\omega(z))$$

作为多重次调和函数的连续上确界, 故也在 D 中为多重次调和. □

定理 2. 任意伪凸域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 在每个边界点为伪凸.

证明. 相反地设 D 在某点 $a \in \partial D$ 不是伪凸的. 于是存在全纯圆盘序列 S_ν, 使得 $S_\nu \to S, \partial S_\nu \to \partial S$, 并且 $\overline{S}_\nu, \partial S \subset D$, 而 S 包含了点 a. 由于 D 的伪凸性, 存在

---

[1] 这些变化如下: ① 需要取 $-\ln\ R$ 在直线 $'z = l(\zeta)$ 上的限制; ② 令 $'b = l(\zeta_0)$, 需要选取 b_n 使得 $|b_n| = R('b)$, 并且点 $b = ('b, b_n)$ 为 f 的奇点; 因为在每个圆 $\{'z, |z_n| = r('z)\}$ 上至少有一个 f 的奇点, 故这是可以做到的; 在这里的 $r('z)$ 为级数 (7) 对固定 $'z$ 的收敛半径, 而 $R('b) = \varliminf_{z \to 'b} r('z)$ (参看第 8 目的第 1 个脚注), 从而在圆 $\{'b, |b_n| = R('b)\}$ 上有奇点的极限点; ③ 函数 $G = g + ig_*$ 需要选取得使 $G(\zeta_0) = \ln\ b_n$ (因为 $g(\zeta_0) = \ln\ |b_n|$, 故这可以做到), 又替代 (6), 取曲线族 $S_t = \{'z = l(\zeta), z_n = te^{G(\zeta)}, \zeta \in U\}$. 断言由归谬法证明, 基于的事实是: 由连续性原理, f 被延拓至点 b, 而它是奇点.

在 D 中多重次调和的函数 $u(z)$, 它在 $z \to \partial D$ 时趋向于 $+\infty$. 按照对多重次调和函数的极大值原理 (前一目中定理 4 的推论)

$$\sup_{S_\nu} u \leqslant \sup_{\partial S_\nu} u < c < \infty, \tag{8}$$

其中的常数 c 与 ν 无关, 这是因为 ∂S_ν 的并为闭包紧于 D. 然而从另一方面看, 存在收敛于点 $a \in \partial D$ 的点序 $z^\nu \in S_\nu$, 于是由此得到 $u(z^\nu) \to \infty$, 这与 (8) 矛盾. □

定理 1 和 2 联合在一起表明了, 区域的整体伪凸性的概念实际上等价于在其每个边界点的伪凸性. 我们还发现有

推论. 区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为伪凸当且仅当函数 $-\ln\,\delta(z, \partial D)$ 在 D 中为多重次调和.

证明. 函数 $-\ln\,\delta(z, \partial D)$ 的多重次调和性作为充分条件来自于伪凸性的定义. 这个条件是必要的: 设 D 为伪凸; 由定理 2, 它在每个边缘点为伪凸, 然而由定理 1 的证明中看到, 函数 $-\ln\,\delta(z, \partial D)$ 在 D 中为多重次调和. □

对于具二阶光滑边界的区域, 整体伪凸性可以不用穷竭的语言描述 (就像在定义 1 中那样) 而类似在第 37 目中对局部伪凸性所做的那样, 利用定义函数. 我们称函数 φ *整体定义了*区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 是说, 如果它在整个边界 ∂D 的某个邻域 Ω 中属于 C^2 类, 并在此邻域中对于所有的 $z \in \partial D$ 成立, 有 $D \bigcap \Omega = \{z \in \Omega : \varphi(z) < 0\}$ 且梯度 $\nabla_z \varphi \neq 0$ (参照第 37 目).

定义 2. 称具 C^2 类边界的区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为 (*整体*) *伪凸的*是说, 如果它有整体定义函数 φ, 使它的莱维形式 $H_z(\varphi, \omega) \geqslant 0$, 其中所有的 $z \in \partial D, \omega \in T_z^c(\partial D)$; 称其为*严格伪凸的*是说, 如果它有界, 并且 $H_z(\varphi, \omega) > 0$, 其中所有的 $z \in \partial D, \omega \in T_z^c(\partial D), \omega \neq 0$.

像在第 37 目中那样, 可以证明这些条件不依赖于定义函数的选取, 故而它们对其中某一个满足, 则对其他所有的也满足. 由隐函数定理可以知道, 对于具二阶光滑边界的区域的定义函数可以选为具形式

$$\varphi(z) = \begin{cases} -\delta(z, \partial D), & z \in \Omega \bigcap D, \\ \delta(z, \partial D), & z \in \Omega \backslash \overline{D}, \end{cases} \tag{9}$$

其中 $\delta(z, \partial D)$ 为点 z 到 ∂D 的欧几里得距离, 并且这条带状邻域充分狭窄. 也可看出, 区域为 (严格) 伪凸当且仅当它在每个边界点在第 37 目的意义下为 (严格) 伪凸.

我们将指出整体伪凸性和多重次调和性之间的关联. 它对于严格伪凸的区域特别简单.

定理 3. 区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 严格伪凸当且仅当它具有严格多重次调和的定义函数.

证明. 条件的充分性是显然的, 而必要性的证明实质上与第 37 目中定理 1 的证明相同. 设 φ 为区域 D 的某个定义函数, 例如 (9); 如果带状 Ω 充分狭窄, 则定义函数从而也可以是函数 $\psi=\varphi+k\varphi^2$, 其中 $k\geqslant 0$ 为某个常数, 并且对所有 $z\in\partial D$ 有

$$H_z(\psi,\omega)=H_z(\varphi,\omega)+2k|\partial\varphi(\omega)|^2 \tag{10}$$

(参照第 37 目的 (13)). 只需证明 $H_z(\psi,\omega)$ 在紧集 [1] $E=\{(z,\omega):z\in\partial D,\omega\in\mathbb{C}^n,|\omega|=1\}$ 上为正即可. 记 $E_0=\{(z,\omega)\in E:H_z(\varphi,\omega)\leqslant 0\}$; 如果 E_0 为空则令 $k=0$, 如果非空, 则选取常数 $M\geqslant 0$ 使得 $H_z(\varphi,\omega)\geqslant -M$ 对所有 $(z,\omega)\in E_0$ 成立.

按照在 $\partial\varphi(\omega)=0$ 即在 $T_z^c(\partial D)$ 上时严格伪凸的定义, 对于所有 $z\in\partial D,\omega\neq 0,H_z(\varphi,\omega)>0$, 因此在 E_0 上有 $\partial\varphi(\omega)\neq 0$, 并且由于紧性, 存在 $m>0$ 使得 $|\partial\varphi(\omega)|\geqslant m$. 选取 $k>M/(2m^2)$, 我们由 (10) 得到: 在 E_0 上形式 $H_z(\psi,\omega)\geqslant -M+2km^2>0$, 而在 $E\backslash E_0$ 上它为正是显然的. 由连续性的考虑可清楚看到, 如果 Ω 充分狭窄, 则当 $\omega\neq 0$ 时不仅在 ∂D 上 $H_z(\psi,\omega)>0$, 而且对所有 $z\in\Omega$ 也成立, 然而这意味着函数 ψ 为严格多重次调和. □

我们注意到, 函数 ψ 可以在带状 Ω 内部延拓到负的严格多重次调和函数 (例如, 在水平曲面 $\psi(z)=-\varepsilon$ 内部令它等于 $-\varepsilon$, 然后再使其光滑; 对此详细的证明却相当的繁复). 因此严格伪凸的区域可以定义为在一个闭区域的邻域中使严格多重次调和函数取负值的集合.

对于只是伪凸的区域, 事情更为复杂. 在一般情形它们不能表示为次调和函数的负值集合.

* 对于在第 11 目中法图 (Fatou) 映射下 $\mathbb{C}^2$ 的像而言, 证明上面所说的断言. *

但是不久前狄德里希 (K. Diederich) 和弗纳斯 (J. Fornæss) 证明了 [2], 对于具有二阶光滑边缘的任意有界伪凸区域 $D\subset\mathbb{C}^n$, 在 $\overline{D}$ 的邻域中存在 C^2 类的定义方程 φ, 使得在 $\eta>0$ 充分小时 $\psi=-(-\varphi)^\eta$ 在 D 中为多重次调和 (甚至是严格的). 但是, 我们发现, 函数 φ 本身不必是多重次调和的 (函数 $\varphi=-(-\psi)^{1/\eta}$ 递增却不是凸的, 参看第 38 目的定理 3), 而 ψ 也不为定义函数 (它在 $\overline{D}$ 外无定义, 而在 ∂D 它的梯度可能不存在).

在本目最后, 我们给出刻画 $\mathbb{C}^n$ 中全纯域的各种条件的一个总结.

定理 4. 下面的五个条件等价:

(I) D 为全纯域 (即存在函数 $f\in\mathscr{O}(D)$, 它不能被延拓到更大的区域中, 参看第 33 目);

---

[1] 我们已知, 严格伪凸的区域 D 为有界, 从而 ∂D 为紧.

[2] 参看 Diederich 和 J. Fornæss, *Pseudoconvex domains: bounded strictly plurisubharmonic exhaustion functions*, Invent. Math. 39 (1977), 129 — 141.

(Ⅱ) D 全纯凸 (即对任意集合 $K \Subset D$, 其全纯凸包 $\widehat{K}_{\mathscr{O}} = \{z \in D : |f(z)| \leqslant \|f\|_K$, 对所有 $f \in \mathscr{O}(D)\} \Subset D$, 参看第 34 目);

(Ⅲ) 在其每个边界点 D 不能全纯扩张 (即对每个点 $a \in \partial D$, 存在邻域 U 及函数 $f \in \mathscr{O}(D \bigcap U)$, 它不能延拓到点 a, 参看第 37 目);

(Ⅳ) 在其每个边界点 D 为局部伪凸 (即在每个点 $a \in \partial D$ 它都不能被全纯圆盘族从内部相切, 参看第 37 目);

(Ⅴ) D 为伪凸 (即存在 D 中的多重次调和函数, 当点趋向 ∂D 时它趋向 $+\infty$, 参看第 39 目).

证明. 在前面我们已经证明了下面的蕴含关系;

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \Leftrightarrow \mathrm{II} \\ \Downarrow \\ \mathrm{III} \Rightarrow \mathrm{IV} \Leftrightarrow \mathrm{V} \end{array}$$

(等价关系 Ⅰ $\Leftrightarrow$ Ⅱ 构成了第 34 目的定理 1 和 2 的内容, Ⅳ $\Leftrightarrow$ Ⅴ 是本目的定理 1 和 2, 蕴含 Ⅲ $\Rightarrow$ Ⅳ 为第 36 目的连续性原理, Ⅰ $\Rightarrow$ Ⅲ 是平凡的). 在下一章中, 我们将证明 (第 45 目) 在 $\mathbb{C}^n$ 中任何一个伪凸域是全纯域, 即证明了蕴含关系 Ⅴ $\Rightarrow$ Ⅰ. 这样就使我们的等价链封闭了起来.

§14. 全纯包

如果 D 不是全纯域, 则任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可全纯延拓至更大的区域. 这便产生了找寻所称做的区域 D 的全纯包的问题, 即那个使 $\mathscr{O}(D)$ 中所有函数均在其中可延拓的最大区域. 这个问题不仅作为基础性观点看是重要的, 而且从应用的观点看, 例如在量子物理中 [1], 也是重要的.

40. 单叶包

在第 33 目中我们曾给出了一个区域 D 的例子, 其上的每个全纯函数都可延拓至更大的区域, 并且在延拓时某些函数被发现是多值的, 从而这个区域的全纯包是个黎曼 (多叶) 区域. 我们将在下一目中考虑这种区域, 而在这里我们仅局限于那些不会产生类似现象的情形.但是我们将给出的定义要使其能推广到多叶情形.

定义. 称区域 $\widetilde{D} \subset \mathbb{C}^n$ 为区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的 (单叶) 全纯包是说, 如果:

1) $D \subset \widetilde{D}$, 且每个函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可延拓为 $\widetilde{D}$ 中全纯的函数;

[1] 参看 N. N. BOGOLYUBOV 和 D. V. SHIRKOV, *Introduction to quantum field theory*, 3rd revised ed., "Nauka", Moscow, 1976; 英译本, Wiley, New York, 1980.

2) 对任意点 $z^0 \in \widetilde{D}$, 存在函数 $f_0 \in \mathscr{O}(\widetilde{D})$, 它在球 $B(z^0, r)$ 的限制不能全纯延拓到球 $B(z^0, R)$, 其中 $r = \delta(z^0, \partial\widetilde{D}), R > r$[1].

由前面所谈到过的, 并不是所有 $\mathbb{C}^n$ 的区域都有单叶全纯包. 在这一目中我们将考虑单叶全纯包的基本性质, 也考虑对最简单类型的区域构造全纯包的问题.

首先我们注意到, 全纯包是在第 33 目的意义下的区域的全纯扩张. 因此由第 33 目定理 1 知, 任意在区域 D 中全纯的函数在该区域的全纯包 $\widetilde{D}$ 中所取的值, 只是它在 D 中所取的那些值. 特别地, 有界区域的全纯包总是有界区域 (这个论断由前面所说得到, 这时只要应用它到坐标 $z_\nu, \nu = 1, \cdots, n$ 上).

进一步, 在全纯包定义中极大性条件 2) 可以实质性地强化. 这个条件是 $\mathscr{O}(\widetilde{D})$ 中某个函数的不可局部延拓的性质, 然而可以断言, 在 $\mathscr{O}(\widetilde{D})$ 中存在整体不可延拓的函数. 换句话说成立

定理 1. 区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的单叶全纯包 $\widetilde{D}$ 是个全纯域.

证明. 根据第 34 目的结果只需证明 $\widetilde{D}$ 为全纯凸. 设 $K \Subset \widetilde{D}$ 以及 $\rho(K, \partial\widetilde{D}) = r$, 按照同步延拓引理 (第 34 目), 任意函数 $f \in \mathscr{O}(\widetilde{D})$ 可全纯延拓到以任意点 $z \in \widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}$ 为中心的多圆柱 $U(z, r)$ 中. 由全纯包定义中的条件 2) 推出 $\rho(z, \partial\widetilde{D}) \geqslant r$, 从而 $\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(\widetilde{D})}, \partial\widetilde{D}) \geqslant r$. 然而因为这个距离不可能大于 r, 故 $\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(\widetilde{D})}, \partial\widetilde{D}) = \rho(K, \partial\widetilde{D})$, 从而 $\widetilde{D}$ 为全纯凸. □

推论. 如果区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 具有单叶全纯包 $\widetilde{D}$, 则后者是包含 D 的最小全纯域 (即所有包含 D 的全纯域的交).

证明. 如果 G 为包含 D 的全纯域, 则 $G \supset \widetilde{D}$ (因为 $\mathscr{O}(G) \subset \mathscr{O}(D)$, 故任意 $f \in \mathscr{O}(G)$ 可全纯延拓到 $\widetilde{D}$). 但由定理 1, $\widetilde{D}$ 是全纯域, 从而 $\widetilde{D}$ 是包含 D 的最小全纯域. □

注. 初看起来可能表明了: 相似于定理 1, 从局部的非扩张区域可推导出它的整体不可扩张性, 即在上一目的定理 4 中的蕴含关系 (Ⅲ) $\Rightarrow$ (I). 但是在条件 (Ⅲ) 中考虑的函数不是在整个区域上全纯, 而只是在边界点的邻域中全纯, 因而定理 1 的证明在这里过不去. 正像我们已经说过的, 蕴含 (Ⅲ) $\Rightarrow$ (I) 构成了非常精妙的冈洁定理的内容.

为了证明后面的定理我们需要一个引理.

引理. 如果 D 为全纯域, 则它的 $r-$ 收缩 $D_r = \{z \in D : \rho(z, \partial D) > r\}$ 的任一连通分支 Δ 也是全纯域.

[1]代替球可以取多圆盘 $U(z^0, r)$, 其中 $r = \rho(z^0, \partial D)$.

证明. 设 $K \Subset \Delta, \rho(K, \partial\Delta) = \rho$; 对任意点 $z \in K$ 和 $\zeta \in \partial D$, 在线段 $[z, \zeta]$ 上存在点 $z' \in \partial\Delta$ 使得

$$\rho(z, \zeta) = \rho(z, z') + \rho(z', \zeta) \geqslant \rho + r.$$

因此 $\rho(K, \partial D) \geqslant \rho + r$, 而因为 D 为全纯域, 故由第 34 目定理 3 有

$$\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}, \partial D) \geqslant \rho + r. \tag{1}$$

我们需要证明 $\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(\Delta)}, \partial\Delta) \geqslant \rho$, 即对任意点 $z^0 \in \widehat{K}_{\mathscr{O}(\Delta)}$ 和 $z' \in \partial\Delta$ 有 $\rho(z^0, z') \geqslant \rho$. 然而因为 $\Delta \subset D$, 则 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(\Delta)} \subset \widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}$, 从而 $z^0 \in \widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}$. 并根据 (1) 有 $\rho + r \leqslant \rho(z^0, \partial D) \leqslant \rho(z^0, z') + \rho(z', \partial D) = \rho(z^0, z') + r$ (因为 $z' \in \partial\Delta$, 我们有 $\rho(z', \partial D) = r$). 由此得到 $\rho(z^0, z') \geqslant \rho$. □

定理 2. 如果 $D \subset G$ 并且这两个区域都有单叶全纯包 $\widetilde{D}$ 和相应的 $\widetilde{G}$, 则 $\widetilde{D} \subset \widetilde{G}$, 并且

$$\rho(\partial\widetilde{D}, \partial\widetilde{G}) \geqslant \rho(\partial D, \partial G). \tag{2}$$

证明. 因为 $\mathscr{O}(G) \subset \mathscr{O}(D)$, 故任意函数 $f \in \mathscr{O}(G)$ 可全纯延拓到 $\widetilde{D}$, 从而 $\widetilde{D} \subset \widetilde{G}$. 设 $\rho(\partial D, \partial G) = r > 0$ (对 $r = 0$, 定理为平凡), 于是 $D \subset G_r \subset (\widetilde{G})_r$. 显然, D 属于集合 $(\widetilde{G})_r$ 的某个连通分支, 根据所证的引理它是个全纯域. 但是 $\widetilde{D}$ 属于此分支, 从而也属于集合 $(\widetilde{G})_r$; 故 $\rho(\partial\widetilde{D}, \partial\widetilde{G}) \geqslant r$. □

推论. 如果 D 为有界区域, 并具有单叶全纯包 $\widetilde{D}$, 则交集 $\partial D \bigcap \partial\widetilde{D}$ 非空.

证明. 对区域 D 和 $G = \widetilde{D}$ 应用定理 2:

$$\rho(\partial D, \partial\widetilde{D}) \leqslant \rho(\partial\widetilde{D}, \partial\widetilde{D}) = 0$$

(我们利用的事实是: 全纯域的全纯包等于此区域). 因为 ∂D 为紧 (因为 D 有界), 故由等式 $\rho(\partial D, \partial\widetilde{D}) = 0$ 得出集合 ∂D 和 $\partial\widetilde{D}$ 相交. □

我们来描述一些最简单类型的区域的全纯包.

(1) 管状域. 我们记得, 称做底为 $B \subset \mathbb{R}^n$ 的管状域的是区域 $T = B \times \mathbb{R}^n(y)$, 即 $T = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : x \in B\}$ (参看第 2 目).

定理 3. 管状域 T 的全纯包是其凸包 $\widehat{T}$.

证明. 显然, $\widehat{T} = \widehat{B} \times \mathbb{R}^n(y)$, 其中 $\widehat{B}$ 是底 B 在空间 $\mathbb{R}^n(x)$ 中的凸包. 我们来证明, 任意函数 $f \in \mathscr{O}(T)$ 可全纯延拓至 $\widehat{T}$. 区域 $\widehat{B}$ 是线段 $[x^1, x^2]$ 中点的集合,其中 $x_1, x_2 \in B$. 如果 x^1 和 x^2 可以在 B 中用两段折线相连接 $[x^1, x^0] \bigcup [x^0, x^2]$, 则由棱柱引理 (第 36 目) 直接推出 f 可延拓到集合 $[x^1, x^2] \times \mathbb{R}^n(y)$ 的邻域中.

在一般情形, 点 $x^1, x^2 \in B$ 可以由 B 中有限条折线相连接 (图 42). 利用同一个引理, 我们对折线的条数进行归纳, 再次证明了 f 可全纯延拓到 $[x^1, x^2] \times \mathbb{R}^n(y)$ 的邻域中. 同一个引理还证明了函数 f 在所描述过的延拓中保持了单值. 事实上, 设 x 为两条线段 $[x^1, x^2]$ 和 $[\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2]$ 的交点, 其中这两条线段的端点属于 B 并且在点 $z = x + iy$ 我们得到两个值 f 和 $\widetilde{f}$. 考虑棱柱 $[x^1, x, \widetilde{x}^1] \times \mathbb{R}^n(y)$; 由所引述的引理知, 函数 f 和 $\widetilde{f}$ 在其中为全纯, 而因为它们在点 $x^1 + iy$ 和 $\widetilde{x}^1 + iy$ 的邻域中相等, 故由唯一性定理, 它们在整个棱柱上相等.

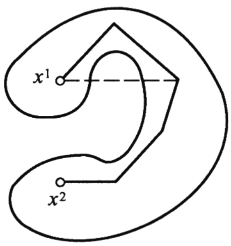

图 42

因此, 任意函数 $f \in \mathscr{O}(T)$ 可全纯延拓到 $\widehat{T}$. 然而 $\widehat{T}$ 是个凸域从而是全纯域 (第 33 目). 故 $\widehat{T}$ 为区域的全纯包. □

(2) **赖因哈特域**. 在第 7 目中我们曾证明, 任意在中心为点 a 的完全赖因哈特域 [1)] D 中全纯的函数 f, 可全纯地延拓到这个区域的对数凸包 $\widehat{D}_L$ 中. 这种延拓通过 f 的泰勒展式

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{3}$$

实现, 此级数的收敛区域是对数凸的区域 (第 7 目的定理 3).

定理 4. 完全赖因哈特域 D 的全纯包是它的对数凸包 $\widehat{D}_L$.

证明. 因为任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 都可全纯延拓至 $\widehat{D}_L$, 故还需证明的只是 $\widehat{D}_L$ 为全纯域. 不难看出, $\widehat{D}_L$ 相对于单项式类 $z^k = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ 为凸, 这里的 k_ν 为非负整数. 事实上, 区域的对数凸性意味着其在映射 $\lambda : z \mapsto (\ln\,|z_1|, \cdots, \ln|z_n|)$ 下的像为几何凸 (参看第 7 目). 在此映射下, 单项式转换为线性函数 $k_1 \ln\,|z_1| + \cdots + k_n \ln|z_n|$, 而由 $\lambda(\widehat{D}_L)$ 的几何凸性得到 $\widehat{D}_L$ 的相对于单项式类的凸性. 因为当 $k_\nu \geqslant 0$ 时单项式 $z^k \in \mathscr{O}(\widehat{D}_L)$, 故由第 34 目的定理 1 (参看随其后的附注) 知 $\widehat{D}_L$ 为全纯域. □

推论. 任意对数凸的完全赖因哈特域是某个幂级数的收敛区域.

---

1) 完全赖因哈特域的定义见第 2 目.

证明. 由刚刚证过的定理知, 这样的区域是全纯域, 从而存在函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 不可延拓到 D 的范围之外. f 的泰勒展式便以 D 为其收敛区域. □

注. 如果我们不考虑泰勒展式而替代地考虑洛朗展式, 则会得到更加一般的结果: 任意相对完全的赖因哈特域 (参看第 8 目) 的全纯包是它的对数凸包.

(3) 哈托格斯域[1)]. 为了使书写简化, 我们仅局限于具对称平面 $a_n = 0$ 的区域, 这并不失一般性.

定理 5. 其在空间 $\mathbb{C}^{n-1}$ 上投影 $'D$ 为全纯域的完全哈托格斯域 $D = \{z = (z', z_n) : z' \in {}'D, |z_n| < r('z)\}$ 的全纯包是个哈托格斯域

$$\widetilde{D} = \{z = ('z, z_n) : {}'z \in {}'D, |z_n| < e^{V('z)}\}, \tag{4}$$

其中 $V('z)$ 为函数 $\ln\, r('z)$ 在区域 $'D$ 中的最佳多重次调和的优势函数.

证明. 事实上, 由第 8 目中所证明的事实知道, 任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可由在 D 中的哈托格斯级数

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{n} g_\mu('z) z_n^\mu \tag{5}$$

表示, 从而可全纯地延拓到这个级数的收敛区域 $G_f = \{'z \in D, |z_n| < R_f('z)\}$. 显然, R_f 是区域 G_f 的哈托格斯半径. 由第 39 目的引理 (参看随其后的附注), 函数 $\ln\, R_f$ 在 $'D$ 中为多重次调和, 即 G_f 是形如 (4) 的区域, 其中的 $V = \ln\, R_f$ 是函数 $\ln\, r$ 的某个多重次调和的优势函数. 因此, 对任意 $f \in \mathscr{O}(D)$, 区域 $G_f \supset \widetilde{D}$, 其中 $\widetilde{D}$ 为 (4) 中所定义的区域, 而因为区域 D 的全纯包是所有这种 G_f 的交集, 故此全纯包包含了 $\widetilde{D}$.

还需证明 $\widetilde{D}$ 是个全纯域. 因为由定理条件, $'D$ 是个全纯域, 故它为伪凸, 即存在在 $'D$ 中的多重次调和函数 $u_1('z)$, 当点趋向边界时它趋向 $+\infty$. 进而, 由于 V 的多重次调和性知函数 $\ln \dfrac{|z_n|}{e^V} = \ln\, |z_n| - V$, 以及由第 38 目定理 3, 函数 $u_2(z) = -\ln\, \ln \dfrac{e^V}{|z_n|}$ 都在 $\widetilde{D}$ 中为多重次调和. 于是函数 $u(z) = \max(u_1('z), u_2(z))$ 在 $\widetilde{D}$ 中为多重次调和, 而当趋近 ∂D 时它趋向 $+\infty$. 故而 $\widetilde{D}$ 伪凸, 从而由第 39 目定理 4 得到结论: 它是个全纯域. □

注. 如果考虑哈托格斯 – 洛朗展开, 则可以得到更为一般的结果: 其投影 $'D$ 是空间 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中的全纯区域, $D = \{('z, z_n) : {}'z \in {}'D, r_1('z) < |z_n| < r_2('z)\}$ 的全纯包是

$$\widetilde{D} = \{('z, z_n) : {}'z \in {}'D, e^{V_1('z)} < |z_n| < e^{V_2('z)}\}, \tag{6}$$

[1)] 哈托格斯域的定义见第 2 目.

其中 V_1 是函数 $\ln r_1$ 的最佳多重次调和优势函数, 而 V_2 是 $\ln r_2$ 的最佳多重次调和优势函数 [1].

在定理 5(及其推广) 中, 实质性的条件是区域 D 的投影 $'D$ 是个全纯域, 不然的话, 区域 (4) 和 (6) 将不再是个全纯包而仅仅是个 D 的全纯扩张. 我们发现, 不是任何一个哈托格斯域都有单叶色. 为了确信这点, 只要在 $\mathbb{C}^3$ 中取一个区域, 其在 $\mathbb{C}^2$ 中的投影为第 33 目的例子中的那个具非单叶全纯包的区域即可.

41. 多叶包

我们现在考虑黎曼区域的扩张问题 (参看第 22 目) 及在其上全纯函数的延拓. 为此, 首先需要推广嵌入概念到这样的区域.

定义 1. 设给了两个在 $\mathbb{C}^n$ 上的黎曼域 (D_1,π^1) 和 (D_2,π^2); 如果存在连续映射 $\varphi: D_1 \to D_2$, 使得在 D_1 上有

$$\pi^1 = \pi^2 \circ \varphi, \tag{1}$$

则称第一个区域弱 $\varphi-$ 嵌入到第二个区域中, 并记作 $(D_1,\pi^1) \underset{\varphi}{\subset} (D_2,\pi^2)$. 如果此时 φ 为相互一一的 D_1 到 D_2 中的映射, 则说 $(D_1,\pi^1)\varphi-$ 嵌入到 (D_2,π^2) 中. 如果 φ 还是 D_1 到 D_2 上的同胚, 则称 (D_1,π^1) 与 (D_2,π^2) 等价.

这个定义推广了通常的嵌入概念: 如果 $D_1 \subset D_2$ 是在通常意义下的, 则 $\pi^1 = \pi^2\big|_{D_1}$ 是函数 π^2 在 D_1 上的限制, 可以取自然的包含映射作为 $\varphi: D_1 \to D_2$, 其中的 φ 把每个点 $p \in D_1$ 变到同一个点 p, 但将其看作是 D_2 中的点 [2]. 显然, 等价的区域 (D_1,π^1) 和 (D_2,π^2) 相互嵌入 (一个方向借助于 φ, 另一方向借助 φ^{-1}). 在弱嵌入 $(D_1,\pi^1) \underset{\varphi}{\subset} (D_2,\pi^2)$ 情形, 第一个区域可以表现为比第二个有“更多的分歧”. 于是, 函数 $w = \sqrt[4]{z}$ 在 $\mathbb{C}^1$ 上的黎曼面表现为到 $w = \sqrt{z}$ 的黎曼面的弱嵌入 (作为 φ 需要取那样的映射, 它把第一个曲面的一对点粘合为 $\sqrt{z}$ 在其上取相同值的那个点). 任意黎曼区域 $\pi: D \to \mathbb{C}^n$ 是到 $\mathbb{C}^n$ 中的弱 π – 嵌入.

我们注意到在 $\mathbb{C}^n$ 上的黎曼域 (D_1,π^1) 和 (D_2,π^2) 间的 (甚至弱) 嵌入映射 $\varphi: D_1 \to D_2$ 无疑是全纯的. 事实上, 由 π^1 在点 $p_0 \in D_1$ 的邻域中的同胚性和条件 (1), 我们有 $\pi^2 \circ \varphi \circ \pi^1\big|_U^{-1}(z) \equiv z$, 其中 $\pi^1\big|_U$ 为 π^1 的限制, 且 $z = \pi^1(p)$ (参看流形的全纯映射的定义, 第 12 目). 黎曼域的等价性意味着双全纯等价.

定义 2. 设 (D_1,π^1) 和 (D_2,π^2) 为两个 $\mathbb{C}^n$ 上的黎曼域, 并且 $D_1 \underset{\varphi}{\subset} D_2$ 和 $f_2: D_2 \to \mathbb{C}$ 为在第二个区域上的函数. 称函数 $f_1: D_1 \to \mathbb{C}$ 为 f_2 在 D_1 上的 φ –

---

[1] 参看 V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of functions of several complex variables*, Chapter Ⅲ, §21, subsection 3, “Nauka”, Moscow, 1964, p.217; 英译本, MIT Press, Cambridge, MA, 1966.

[2] 因为映射 $\varphi(p) = p$ 相互一一, 故通常的包含是个 $\varphi-$ 嵌入.

限制 (记为 $f_1 = f_2\big|^{\varphi}_{D_1}$) 是说, 如果对所有 $p \in D_1$ 有

$$f_1(p) = f_2 \circ \varphi(p); \tag{2}$$

这时则称 f_2 为 f_1 的 φ – 延拓.

如果 $D_1 \subset D_2$, 而 φ 是自然的包含映射, 故我们有通常的限制映射 $f_1 = f_2\big|_{D_1}$.

为了正式阐述多叶的全纯包的定义, 我们约定, 称复流形 M 为**全纯可分的**是说, 如果对任意两个不同的点 $p, q \in M$, 存在函数 $f \in \mathscr{O}(M)$ 分离这两个点, 即使得 $f(p) \neq f(q)$.

如果 M 是 $\mathbb{C}^n$ 的子空间 (特别地, 是个单叶区域), 则全纯可分性的条件自动满足, 这是因为作为分离函数可取为其坐标之一. 然而一般情形则不是这样的: 例如我们考虑区域 $D = \mathbb{C}^2 \backslash \Gamma$ 上的二叶覆叠 $\widetilde{D}$, 其中 $\Gamma = \{|z_1| = 1, |z_2| = 1\}$ 是个环面, 在图 43 中所表示的是它的赖因哈特图 (这是具有分歧点 (1,1) 和 ∞ 的二叶黎曼面的一段).

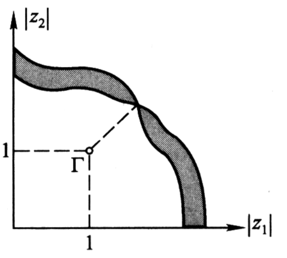

图 43

我们考虑在 $\widetilde{D}$ 上全纯的任意函数 f. 它在 $\widetilde{D}$ 两叶中任一叶上的值在 $\{|z| > \sqrt{2}\}$ 上为全纯, 其原因在于分歧流形 (即环面 Γ) 位于球面 $\{|z| = \sqrt{2}\}$ 之上, 并且在球之外的覆叠为非分歧的. 由关于紧奇异点集的定理 (第 31 目) 知, 这些值可延拓为整函数, 而因为在 Γ 上它们必须相等, 故它们恒等 (参看第一章的问题 9). 因此, f 在区域 $\widetilde{D}$ 的不同叶中位于同一个点 $z \in \mathbb{C}^2$ 上的点有相同的值: $\widetilde{D}$ 中具相同投影的点不可分.

定义 3. 称全纯可分的黎面域 $(\widetilde{D}, \widetilde{\pi})$ 为黎曼域 (D, π) 的**全纯包**是说, 如果

1) 存在 φ – 嵌入 $D \underset{\varphi}{\subset} \widetilde{D}$ 使得任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可以 φ – 扩张到函数 $\widetilde{f} \in \mathscr{O}(\widetilde{D})$;

2) 对任意点 $p \in \widetilde{D}$ 存在函数 $f_0 \in \mathscr{O}(D)$, 对它在 $U(z^0, \rho)$ 的限制 $f_0 \circ \widetilde{\pi}^{-1}$ 不能解析延拓到某个半径为 $R > \rho$ 的多圆盘 $U(z^0, R)$, 其中 $z^0 = \widetilde{\pi}(p), \rho = \rho(p, \partial\widetilde{D})$ (参照第 40 目的定义, 在那里以多圆盘替代球没有本质的影响).

正如我们曾看到的, 在 $\mathbb{C}^n$ 中的 (单叶) 区域类中的全纯包构造问题并不总有解.

在这里我们要证明在黎曼域的类中这个问题总有解. 这个证明的基础是对全纯函数族的同步延拓和由这种族的芽去构造它们的包.

考虑偶对 (U, F), 它由多圆盘 $U \subset \mathbb{C}^n$ 和某个函数族 $F \subset \mathscr{O}(U)$ 构成; 这个族可假设以某个参数为指标集: $F = \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$. 我们固定任意点 $z \in U$, 并称第二个这样的偶对 (V, G) 在点 z 等价于第一个偶对是说, 如果多圆盘 $V \ni z$, 且族 G 可以以相同的指标集参数化 $(G = \{g_\alpha\}_{\alpha \in A})$ 使得 $f_\alpha(z') = g_\alpha(z')$ 对所有 $\alpha \in A$ 和所有 $z' \in U \bigcap V$ 成立. 由此等价关系得到的等价类称为*族 F 在点 z 的芽*, 记为 $\mathbf{F}_z$ (特别地, 如果 F 就由一个函数 f 构成, 我们得到通常的芽 $\mathbf{f}_z$).

在所有可能的全纯函数族的芽组成的空间 $\mathfrak{R}^n$ 中按通常的办法引进拓扑: 设 $\mathbf{F}_\alpha$ 为某个芽, 而 (U, F) 为它的一个代表元; 点 $\mathbf{F}_\alpha$ 的邻域是指那些芽 $\mathbf{G}_z, z \in U$ 的集合, 它具有在 z 点等价于 (U, F) 的代表元. 不难看出, 空间 $\mathfrak{R}^n$ 连同投射 $\boldsymbol{\pi} : \mathfrak{R}^n \to \mathbb{C}^n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个层 (如果考虑的只是一个函数构成的族, 我们便得到了全纯函数芽层; 参看第 28 目).

$\mathfrak{R}^n$ 的连通和开的子集显然是个黎曼域, $\mathfrak{R}^n$ 的连通分支, 即它的极大连通子集, 起着特殊的作用, 这是因为 $\mathfrak{R}^n$ 为局部连通, 故它们是些开集合, 即区域. 这些分支不仅在连通性上为极大而且关于同步解析延拓也是极大. 就是说, 成立

定理 1. 空间 $\mathfrak{R}^n$ 的任一分支 $\widetilde{D}$ 与自己的全纯包相等.

证明. 我们取恒同映射作为定义 3 中的 φ; 于是这个定义中的 1) 自动满足, 还需证明条件 2). 假设它不被满足, 即存在点 $p_0 \in \widetilde{D}$ 使得对所有函数 $\tilde{f} \in \mathscr{O}(\widetilde{D})$ 在多圆盘 $U(a, r)$ 上的限制 $\tilde{f} \circ \boldsymbol{\pi}^{-1}$ 可延拓到多圆盘 $U(a, R)$, 其中 $a = \boldsymbol{\pi}(p^0), r = \rho(p^0, \partial\widetilde{D})$ 及半径 $R > r$. 按空间 $\mathfrak{R}^n$ 的构造, 点 p^0 是在点 $a \in \boldsymbol{\pi}(\widetilde{D})$ 的一个带指标的全纯函数族 $F = \{f_\alpha\}$ 的芽. 因为在任意固定 α 下 $f_\alpha(z)$ 的值对于芽 $\mathbf{F}_z = p$ 的所有代表元都是相同的, 故 $f_\alpha \circ \boldsymbol{\pi}(p)$ 可以看成是 $\widetilde{D}$ 上的函数, 它显然是全纯的. 由我们所做的假定, 所有 $f_\alpha \circ \boldsymbol{\pi} \circ \boldsymbol{\pi}^{-1} = f_\alpha$ 可全纯延拓到多圆盘 $U(a, R)$, 因此, 族 F 在这个多圆盘的点上的芽在 $\mathfrak{R}^n$ 中构成了中心在 p^0, 半径为 R 的多圆盘 $\widetilde{U}$, 而这与 $\rho(p^0, \partial\widetilde{D}) = r < R$ 相矛盾. □

空间 $\mathfrak{R}^n$ 是万有的: 每个黎曼域均可弱 φ – 嵌入 (在定义 1 的意义下) 到 $\mathfrak{R}^n$ 的某个分支中, 使得在此区域全纯的函数被 φ – 延拓 (在定义 2 的意义下) 到这个分支中. 这便建立了

定理 2. 对任意黎曼域 (D, π) 和任意族 $F \subset \mathscr{O}(D)$ 存在空间 $\mathfrak{R}^n$ 的分支 $\widetilde{D}_F$ 和映射 $\varphi : D \to \widetilde{D}_F$, 使得 $D \underset{\varphi}{\subset} \widetilde{D}_F$ 和任意 $f_\alpha \in F$ 为某个函数 $\tilde{f}_\alpha \in \mathscr{O}(\widetilde{D}_F)$ 的 φ – 限制.

证明. 对任意点 $p \in D$, 我们以 $\varphi(p) = \mathbf{F}_z$ 表示在点 $z = \pi(p)$ 的族 $F \circ \pi^{-1}$ 的

芽; 我们所定义的 φ 显然是连续的. 按照在 $\mathfrak{R}^n$ 上投射的定义, 我们有 $\boldsymbol{\pi}:\mathbf{F}_2\mapsto z$ 使得 $\boldsymbol{\pi}\circ\varphi(p)\equiv\pi(p)$ 并且 φ 为弱嵌入. 像 $\varphi(D)$ 连通, 因而属于空间 $\mathfrak{R}^n$ 的某个分支 $\widetilde{D}_F$.

对任意点 $p\in D$ 和函数 $f_\alpha\in F$, 我们以 $\widetilde{f}_\alpha$ 表示对于芽 $\varphi(p)=\mathbf{F}_z$ 取值 $f_\alpha(p)$ 的函数, 显然, 这个函数被全纯延拓至 $\widetilde{D}_F$. 由构造有 $f_\alpha(p)=\widetilde{f}_\alpha\circ\varphi(p)$, 故而定义 2 的条件被满足, 并且 $f_\alpha=\widetilde{f}_\alpha\big|_D^\varphi$. □

我们转向本目的基本定理的证明, 这是关于全纯包的存在性和唯一性的定理, 其中的唯一性是在定义 1 意义下的等价关系内的唯一.

定理 3. 设 (D,π) 为任意全纯可分的黎曼域, 而 $\mathscr{O}=\mathscr{O}(D)$ 为 D 上所有全纯函数的族. 于是由定理 2 对应的 D 的分支 $\widetilde{D}_{\mathscr{O}}$ 是区域 D 的全纯包, 并且这个区域的任意全纯包都等价于 $\widetilde{D}_{\mathscr{O}}$.

证明. 设 $\varphi:D\to\widetilde{D}_{\mathscr{O}}$ 为定理 2 的证明中所描述的那个映射. 因为 D 全纯可分, 故对任意的不同点 $p,q\in D$ 存在 $f_\alpha\in\mathscr{O}(D)$ 使得 $f_\alpha(p)\neq f_\alpha(q)$, 从而族 $\mathscr{O}$ 的芽在这些点不同, 即 $\varphi(p)\neq\varphi(q)$. 因此, 映射 φ 相互一一, 即为嵌入, 于是定义中的条件 1) 得到满足. 这个定义中的条件 2) 由定理 1 得到满足, 故定理的第一部分得证.

为了证明第二部分, 我们假设 $(\widetilde{G},\widetilde{\pi})$ 为区域 D 的另一个全纯包, $\psi:D\to\widetilde{G}$ 它的相应嵌入. 在区域 $\varphi(D)\subset\widetilde{D}_{\mathscr{O}}$ 中定义了到 $\widetilde{G}$ 中的双全纯映射 $\chi=\psi\circ\varphi^{-1}$, 又根据定义 1, 在 $\varphi(D)$ 中处处有

$$\widetilde{\boldsymbol{\pi}}\circ\chi(p)=\boldsymbol{\pi}(p). \tag{3}$$

因为 $\widetilde{D}_{\mathscr{O}}$ 是 D 的全纯包, 故 χ 被延拓到全纯映射 $\widetilde{D}_{\mathscr{O}}\to\widetilde{G}$. 事实上, 由 (3) 可看出, 局部地有 $\chi=\widetilde{\boldsymbol{\pi}}^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}$, 而且这个映射延拓的障碍只可能在下述情况中遇到: 即如果存在点 $p\in\widetilde{D}_{\mathscr{O}}$, 当逼近它时 $\chi(p)$ 趋向 $\partial\widetilde{G}$. 但是因为 $\widetilde{G}$ 局部地不可扩张到它自身的边界点, 故存在函数 $\widetilde{g}\in\mathscr{O}(\widetilde{G})$ 使得 $\widetilde{f}=\widetilde{g}\circ\chi$ 不能全纯地延拓到点 p; 而这是不可能的, 理由是: 在 D 中我们有 $\widetilde{f}\circ\varphi=\widetilde{g}\circ\psi$, 并由全纯域的定义知, $\widehat{f}$ 必定能延拓为 $\widetilde{D}_{\mathscr{O}}$ 中的全纯函数.

因此, χ 全纯地映 $\widetilde{D}_{\mathscr{O}}$ 到 $\widetilde{G}$ 中, 而因为前面的讨论可以对在 $\psi(D)$ 中等于 $\chi^{-1}=\varphi\circ\psi^{-1}$ 的映射同样进行, 故 χ 是 $\widetilde{D}_{\mathscr{O}}$ 到 $\widetilde{G}$ 的双全纯映射. 因为它显然保持了投射, 故 $\widetilde{G}$ 等价于 $\widetilde{D}_{\mathscr{O}}$. □

最后我们要讨论全纯黎曼域.

定义 4. 称黎曼域 (D,π) 为全纯域是说, 如果存在函数 $f\in\mathscr{O}(D)$, 它具有如下性质: 如果某个区域 $(D_1,\pi^1)\underset{\varphi}{\supset}(D,\pi)$ 以及函数 $f_1\in\mathscr{O}(D_1)$ 是函数 f 的 φ - 延拓, 则 可得到 (D_1,π^1) 等价于 (D,π) (即 φ 为 D 到 D_1 上的相互一一的映射).

由定理 3 看出全纯可分的黎曼域的全纯包是个全纯域. 全纯域的一个充分必要条件由下面的定理给出.

定理 4 (嘉当 – 图伦). 黎曼域 (D,π) 为全纯域当且仅当它为全纯凸 [1] 并且全纯可分.

我们将不详细地叙述其证明而只描述在需要引进多叶情形时的变化.

证明. *必要性*. 同步延拓引理的证明 (第 33 目) 可以没有实质改变地转移到黎曼域上, 而由此定理得出全纯域 D 的全纯凸性.

为了证明全纯可分性, 我们按照定理 2 将具有由一个函数 f 依定义 4 构成的族 F 的区域 D φ– 嵌入到空间 $\mathfrak{R}^n$ 中, 另外, 根据同一定义, 映射 φ 为相互一一的. 设 p 和 q 为 D 中不同的点, 于是 $\varphi(p) \neq \varphi(q)$, 因而由函数 φ 的构造知 $f \circ \boldsymbol{\pi}^{-1}$ 的芽在点 $\pi(p)$ 和 $\pi(q)$ 不同, 而这表明在点 p 和 q 函数 f 或它的某个导数的值不同.

充分性. 设 K_ν $(\nu = 1, 2, \cdots)$ 为区域 D 的一个紧的穷竭序列. 利用 D 的全纯凸性我们可假定 $K_\nu = (\widehat{K}_\nu)_{\mathscr{O}(D)}$. 我们以有限个多圆盘覆盖 ∂K_ν, 并在它们中每个与 $D\backslash K_\nu$ 的交集中取点 p_{ν_j} $(j = 1, \cdots, k_\nu)$; 以 f_{ν_j} 表示 $\mathscr{O}(D)$ 中的函数使得

$$f_{\nu_j}(p_{\nu_j}) = \nu, \quad \|f_{\nu_j}\|_{K_\nu} < 2^{-\nu-j} \quad 和 \quad f_{\nu_j}(p_{\nu_k}) = 0, \quad j \neq k.$$

函数 $f = \sum f_{\nu_j} \in \mathscr{O}(D)$, 和

$$|f(p_{\nu_j})| \geqslant \nu - 1. \tag{4}$$

利用全纯可分性, 可以修改函数 f 使得在保持在 D 中的全纯性和满足不等式 (4) 下, 它在任意两个不同点 $p, q \in D, \pi(p) = \pi(q)$ 有不同的元素 (关于如何实现这种修正可参看福克斯 (B.A.Fuks) 的书 [2], 193 页)

我们将证明 (D,π) 是 (修改过的) 函数 f 的全纯域. 设存在函数 f 在区域 (D_1,π^1) 的 φ– 延拓; 我们需要证明 φ 是 D 到 D_1 上的一一映射. 如果 $\varphi(p) = \varphi(q)$, 则按定义 1 和 2 有 $\pi(p) = \pi(q)$ 和 $f(p) = f(q)$. 由 f 的构造推出 $p = q$. 除此之外, $\varphi(D) = D_1$, 这是因为设若相反, 区域 $\varphi(D)$ 在 D_1 中具有边缘点, 而在此点由不等式 (4) 知函数 $f_1 = f \circ \varphi$ 不可能是全纯的. □

注. 冈洁在 1953 年证明了任意在 $\mathbb{C}^n$ 上全纯凸黎曼域为全纯可分. 因此定理 4 的条件并不是彼此独立的.

作为全纯域的黎曼域属于一个重要的类, 即*施坦* (Stein) *流形*. 被如此称谓的这个 n 维复流形 M 具有如下性质: 1) 全纯凸; 2) 全纯可分; 3) 对任意点 $p \in M$ 存在 n 个函数 $f_\nu \in \mathscr{O}(M)$, 它构成其在点 p 的邻域中的局部坐标.

[1] 将全纯凸的定义转移到黎曼域上不需作改变. 例如, 可以把它叙述为这样的条件: $\rho(K, \partial D) = \rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}}, \partial D)$, 其中 K 为 D 中的任意紧子集, 而 $\widehat{K}_{\mathscr{O}}$ 是它关于在 D 上全纯函数类的包.

[2] 福克斯, *Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables*, Fizmatgiz, Moscow, 1962; 英译本, Transl. Math. Monographs, vol.8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963.

我们不加证明[1] 地引进施坦流形的一些性质, 它们表明这种流形是全纯域的自然推广.

I) 复流形 M 为施坦流形当且仅当在其上存在光滑的严格多重次调和函数 u, 它在 M 的边界无穷增大, 即使得集合 $\{p \in M : u(p) < \alpha\} \Subset M$ 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ 成立.

II) 如果施坦流形 M 是一个复流形 $\widetilde{M}$ 的开子流形 (具诱导复结构), 则存在函数 $f \in \mathscr{O}(M)$, 它不能全纯延拓到 $\widetilde{M} \backslash M$ 的点上.

我们还注意到, n 维施坦流形可作为闭子流形嵌入到 $\mathbb{C}^{2n+1}$, 或者换句话说,

III) 对于任意施坦流形 M 存在逆紧的嵌入[2] $f : M \to \mathbb{C}^{2n+1}$, 其中 $n = \dim_{\mathbb{C}} M$.

42. 奇点集的解析性

在这一章的最后我们将讨论某些与解析函数在广泛意义下的奇点有关的问题. 其意义是这样的: 每个在 $\mathbb{C}^n$ 中某个区域里的全纯函数 f 可以解析延拓到它的全纯 (单叶或黎曼) 域; 称后面这个区域的边界点为函数 f 的奇点.

在一般情形这个奇点集具有实维数 $2n-1$ 并且不必具有任何光滑性的性质. 但是在某些重要的特殊情形中可以证明这个集合的解析性. 我们由那个在许多应用中都有用的嵌入边定理 (1932 年) 开始.

定理 1 (K. 克内泽尔 (Kneser)). 设两个 C^2 类实超曲面 $S_j = \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi_j(z) = 0\}$ 相交于处于一般位置的 $(2n-2)$ 维边 Γ, 即使得在 Γ 上处处有

$$d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \neq 0^{3)}, \tag{1}$$

并设函数 f 在 Γ 的邻域里至少有一个 $\varphi_j < 0$ 的部分中为全纯 (图 44). 如果 f 不能全纯延拓到 Γ 上的任意点, 则 Γ 为复超曲面.

证明. a) 设存在点 $a \in \Gamma$, 在其上有

$$\partial\varphi_1 \wedge \partial\varphi_2 \neq 0. \tag{2}$$

我们考虑函数 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - k(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$, 其中 $k > 0$ 是个我们马上就要选取的常数. 因为 $\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = 0$, 故由第 37 目的莱维形式的性质 b) 有

$$H_a(\varphi, \omega) = H_a(\varphi_1, \omega) + H_a(\varphi_2, \omega) - 2k(|\partial\varphi_1(\omega)|^2 + |\partial\varphi_2(\omega)|^2), \tag{3}$$

其中 $\partial\varphi_j(\omega) = (\omega, \overline{\bigtriangledown\varphi_j})$ 表示向量 $\omega \in \mathbb{C}^n$ 和曲面 S_j 在点 a 的法向量 $n_j = \overline{\bigtriangledown\varphi_j}$ 的埃尔米特内积 (参看第 17 目).

---

[1] 这些论断的证明可以在赫尔曼德尔 (L. Hörmander) 的书 *An introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1966 找到, 见定理 5.2.10, 5.4.2 和 5.3.9.

[2] 我们记得, 映射 $f : M \to N$ 为逆紧是说 $\widetilde{N}$ 的每个紧子集的逆像为 M 的紧子集. 称映射 f 为嵌入是说, 如果它是 M 到 $f(M)$ 的同胚.

[3] 这表明在 Γ 上矩阵 $\left(\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial z_k}, \dfrac{\partial\varphi_j}{\partial \bar{z}_k}\right)$ 的秩等于 2, 其中 $j = 1, 2$ 而 $k = 1, \cdots, n$.

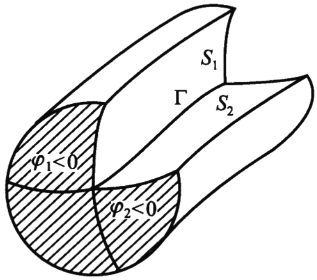

图 44

曲面 $S=\{\varphi(z)=0\}$ 在点 a 的复切平面 $T_a^c(S)$ 的方程显然为 $(z-a,n_1+n_2)=0$; 使 $\omega\in T_a^c(S)$ 当且仅当 $(\omega,n_1+n_2)=0$. 然而条件 (2) 从几何上意味着向量 $n_1=\overline{\bigtriangledown\varphi_1}$ 和 $n_2=\overline{\bigtriangledown\varphi_2}$ 复线性无关 (参看第 17 目), 故当条件满足时, 存在向量 $\omega\in T_a^c(S)$ 使得 $\partial\varphi_j(\omega)=(n,n_j)\neq 0, j=1$ 或 2. (事实上, 如果对所有 $\omega\in T_a^c(S)$ 有 $(\omega,n_j)=0$, 则两个向量 n_j 复正交于超平面 $T_a^c(S)$, 从而相互成复比例.)

对于这样的 ω 可以选取 k 如此大, 使得

$$2k(|(\omega,n_1)|^2+|\omega,n_2|^2)>H_a(\varphi_1,\omega)+H_a(\varphi_2,\omega),$$

于是根据 (3), 莱维形式 $H_a(\varphi,\omega)<0$. 由第 37 目的莱维 – Krzoska 定理的推论可以断言, 在点 a 的邻域中使 $\varphi<0$ 的部分中全纯的任意函数可全纯延拓到这个点. 但是当 $0<\varphi_1<1/k$ 和 $0<\varphi_2<1/k$ 时函数 $\varphi=\varphi_1(1-k\varphi_1)+\varphi_2(1-k\varphi_2)$ 为正, 因而曲面 $S=\{\varphi=0\}$ 在 a 的邻域中位于至少有一个 $\varphi_j<0$ 的部分. 在这一部分中, 定理所考虑的函数 f 由假设条件为全纯. 但在这里也有 a 的邻域中 $\varphi<0$ 的部分, 从而由刚才所证, f 全纯延拓到点 a, 这与假设条件矛盾.

因此, 情形 a) 被排除, 并且在 Γ 的所有点上有

$$\partial\varphi_1\wedge\partial\varphi_2=0. \tag{4}$$

b) 条件 (4) 表明, 在所有点 $z\in\Gamma$ 上向量 $n_1=\overline{\bigtriangledown\varphi_1}$ 和 $n_2=\overline{\bigtriangledown\varphi_2}$ 成复比例, 即 $T_z^c(S_1)=T_z^c(S_2)$, 从而 $T_z^c(\Gamma)=T_z^c(S_1)\bigcap T_z^c(S_2)=T_z^c(S_j)$ 具有实的维数 $2n-2$. 然而根据条件 (1), 实切平面 $T_z(S_1)$ 和 $T_z(S_2)$ 互不相同, 并且 $T_z(\Gamma)=T_z(S_1)\bigcap T_z(S_2)$ 的实维同样为 $2n-2$. 因此 $T_z(\Gamma)=T_z^c(\Gamma)$ 在所有点 $z\in\Gamma$ 成立, 并由第 17 目的列维 – 齐维塔 (Levi-Civita) 定理我们的结论是: Γ 为复超曲面. □

∗ 证明在全纯于环面 $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}^2:|z_1|=|z_2|=1\}$ 的邻域中或 $|z_1|<1$ 或 $|z_2|<1$ 的部分的函数 f 可全纯延拓到 Γ. ∗

推论. 如果函数 f 在某个 C^2 类 $(2n-2)$ 维子流形 $\Gamma\subset\mathbb{C}^n$ 的 $2n$ 维邻域中全纯, 并不能全纯延拓到 Γ 上, 则 Γ 是个全纯曲面.

证明. 设 $z^0 \in \Gamma$ 为任一点. 因为 $\Gamma \subset C^2$ 并为 $(2n-2)$ 维曲面, 则在 z^0 的邻域它由两个实方程 $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ 给出, 其中 $\varphi_j \in C^2$, 并在此邻域中有 $d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \neq 0$. 因为 f 在 Γ 的邻域中的 $\min(\varphi_1, \varphi_2) < 0$ 部分确为全纯并不可延拓到 Γ 上, 从而 Γ 为全纯曲线. □

在推论的证明中, 奇点集合的解析性由其光滑性和余维 2 所保证. 在下面更加经典的结果 (1909 年) 中并没有假定奇点集的光滑性, 但却转而要求它与平行于某方向的直线最多交于一个点.

定理 2 (哈托格斯). 设 a 为函数 f 的奇点并对每点 $'z, \|'z - 'a\| < \varepsilon$, 在多圆盘 $U(a, \varepsilon)$ 中存在最多一个点 $('z, z_n)$ 为此函数的奇点. 于是存在多圆盘 $'V('a, \delta)$ 使得每个点 $'z \in {'V}$ 恰好对应一个数 z_n, 使每个 $('z, z_n)$ 是 f 在 U 中的奇点, 并且函数 $z_n = g('z)$ 在 $'V$ 中全纯.

证明. a) 函数 g 的连续性. 不失一般性可设 $a = 0$. 因为 0 是 f 的唯一一个其射影为 $'0$ 的奇点, 故圆 $\gamma_0 = \{'z = '0, |z_n| = \eta\}, 0 < \eta < \varepsilon$, 属于 f 的全纯的区域. 圆盘族 $K_b = \{'z = 'b, |z_n| \leqslant \eta\}$ 在 $'b \to '0$ 时趋向于 $K_0 = \{'z = '0, |z_n| \leqslant \eta\}$, 并且 $\partial K_b \to \partial K_0 = \gamma_0$. 因为 K_0 包含了奇点 0, 故由连续性原理 (第 36 目) 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\|'b\| < \delta$ 时, 在圆盘 K_b 上至少有一个 f 的奇点. 由假设条件知, 最多只有一个这样的点, 因此, 函数 $z_n = g('z)$ 在 $'V = \{\rho('z, '0) < \delta\}$ 中被唯一确定. 同样的讨论证明 g 在点 $'0$ 的连续性: 我们有 $g('0) = 0$, 并且对任意 $\eta > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\|'z\| < \delta$ 时 $|g('z)| < \eta$. 因为作为 $'0$ 可以取 $'V$ 中的任意点, 故 g 在整个 $'V$ 中为连续.

b) 函数 g 的**全纯性**. 可以假定数 δ 为如此之小, 以致当 $'z \in {'V}$ 时有 $|g('z)| < \varepsilon/3$, 并且当 f 在区域 $\left\{'z \in {'V}, \dfrac{1}{3}\ \varepsilon < |z_n| < \dfrac{2}{3}\varepsilon\right\}$ 时为全纯. 选取数 $\rho, \dfrac{1}{3}\varepsilon < \rho < \dfrac{2}{3}\varepsilon$ 和点 $z_n^0 = \rho e^{i\theta}$; 于是 f 在多圆盘 $\{'z \in {'V}, |z_n - z_n^0| < \rho - \varepsilon/3\}$ 中为全纯. 根据这些构造, 对于任意 $'z \in {'V}$ 点 $('z, g('z))$ 是 f 的奇点, 而所有满足 $|z_n - z_n^0| < |g('z) - z_n^0|$ 的点 $('z, z_n)$ 为正则点. 因为函数 g 连续, 故

$$R('z) = |g('z) - z_n^0| \tag{5}$$

是哈托格斯半径 (参看第 39 目). 由于 $|g('z)| < \varepsilon/3$, 而 $|z_n^0| = \rho > \varepsilon/3$, 故 $R('z) \geqslant |z_n^0| - |g('z)| > 0$, 从而 $\ln R('z)$ 在 $'V$ 连续.

我们将用第 39 目中所证明的函数 $-\ln R('z)$ 的多重次调和性来证明 g 的全纯性. 只要证明当固定 $z_\mu = a_\mu, |a_\mu| < r, \mu \neq \nu$ 时, g 对每个变量 $z_\nu, \nu = 1, \cdots, n-1$ 在某个圆盘 $|z_\nu| < r$ 为全纯即可. 为简单起见, 我们以 $R(z_\nu)$ 替代 $R(a_1, \cdots, z_\nu, \cdots, a_{n-1})$, 以及类似的记号 $g(z_\nu)$. 因为 $-\ln R(z_\nu)$ 在圆盘 $\{|z_n| < r\}$ 为次调和并在 $\{|z_n| \leqslant r\}$

中连续, 故

$$\ln R(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln R(re^{it})dt$$

或者根据 (5),

$$\ln|g(0)-\rho e^{i\theta}|\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g(re^{it})-\rho e^{i\theta}|dt^{1)} \tag{6}$$

这个不等式对所有 $\theta\in[0,2\pi]$ 成立; 对其按 θ 进行积分并改变右端的积分顺序 (它显然是合理的), 我们有

$$\int_0^{2\pi}\ln|g(0)-\rho e^{i\theta}|d\theta\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dt\int_0^{2\pi}\ln|g(re^{it})-\rho e^{i\theta}|d\theta. \tag{7}$$

由留数定理, 对任意 $w,|w|<\rho$ 有

$$\int_{\{|\zeta|=\rho\}}\ln\frac{\zeta-w}{\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta}=0,$$

从此看出, 积分

$$\int_0^{2\pi}\ln|\rho e^{i\theta}-w|d\theta=\operatorname{Re}\int_{\{|\zeta|=\rho\}}\ln(\zeta-w)\frac{d\zeta}{\zeta}=\operatorname{Re}\int_{\{|\zeta|=\rho\}}\ln\zeta\frac{d\zeta}{\zeta}$$

与 w 无关, 即在圆盘 $\{|w|<\rho\}$ 上为常数. 因为对所有 $z'\in{}'V$ 我们有 $|g('z)|<\rho$, 故而可在 (7) 的右端以 $g(0)$ 替换 $g(re^{it})$. 但是由此我们看出 (7), 从而 (6), 对所有 θ 转变为等式, 即次调和函数 $-\ln|g(z_\nu)-\rho e^{i\theta}|$ 在点 $z_\nu=0$ 等于它自己的调和优势函数. 由此得到 (参看卷 I, 附录的第 3 目), 函数 $\ln|g(z_\nu)-\rho e^{i\theta}|$ 在圆盘 $\{|z_\nu|<r\}$ 中对任意 $\theta\in[0,2\pi]$ 为调和.

从 (5) 我们得到

$$R^2=(g-\rho e^{i\theta})(\overline{g}-\rho e^{-i\theta})=g\overline{g}-\rho\left(e^{-i\theta}g+e^{i\theta}\overline{g}\right)+\rho^2, \tag{8}$$

另外由于 $\ln R$ 的调和性, 这个函数属于 C^∞ 类 (相对于变量 z_ν 和 $\overline{z}_\nu$), 其中 θ 为任意. 构造 (8) 在 $\theta=\theta_0$ 和 $\theta=\theta_0+\pi$ 的差值, 我们看到 $e^{-i\theta_0}g+e^{i\theta_0}\overline{g}\in C^\infty$, 而在此令 $\theta_0=0$ 和 $\pi/2$, 则求出 $g+\overline{g},g-\overline{g}\in C^\infty$, 从而 $g\in C^\infty$. 还需证明 $\dfrac{\partial g}{\partial\overline{z}_\nu}\equiv 0$.

为此, 我们利用的事实是, 替代 $\ln R,\ln R^2$ 是在任意 $\rho\in(\varepsilon/3,2\varepsilon/3)$ 和任意 $\theta\in[0,2\pi]$ 时对 z_n 为调和函数. 对于 $\ln R^2$ 的拉普拉斯方程的形式为

$$R^2\frac{\partial^2R^2}{\partial z_\nu\partial\overline{z}_\nu}-\frac{\partial R^2}{\partial z_\nu}\frac{\partial R^2}{\partial\overline{z}_\nu}=0,$$

并且函数 (8) 对上述区间中的 ρ 和 θ 应该满足它. 将表达式 (8) 代入并将 ρ^3 前的系数等于零, 我们发现

$$e^{-i\theta}\frac{\partial^2g}{\partial z_\nu\partial\overline{z}_\nu}+e^{i\theta}\frac{\partial^2\overline{g}}{\partial z_\nu\partial\overline{z}_\nu}=0$$

1) 在此公式中, $g(0)=g(a_1,\cdots,0,\cdots,a_{n-1})$ 不必等于 0.

其中 θ 为任意, 由此当 $|z_\nu| < r$ 时 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\nu} \equiv 0$. 让 ρ^2 前的系数等于 (将其考虑在内) 零我们得到

$$e^{2i\theta}\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}_\nu}\frac{\partial \overline{g}}{\partial z_\nu} + e^{-2i\theta}\frac{\partial g}{\partial z_\nu}\frac{\partial g}{\partial \overline{z}_\nu} = 0$$

对任意 θ 成立, 因此对 $|z_\nu| < r$, $\dfrac{\partial g}{\partial z_\nu}\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}_\nu} \equiv 0$.

于是, 在圆盘 $\{|z_\nu| < r\}$ 中每个点上或者 $\dfrac{\partial g}{\partial z_\nu} = 0$ 或者 $\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}_\nu} = 0$. 为了排除第一种可能性, 以函数 $f(z_\nu, z_n + z_\nu)$ 代替 $f(z_\nu, z_n)$ (我们将不写出对其他变量 $z_\mu, \mu \neq \nu, \mu \neq n$ 的依赖关系). 它满足定理的所有假设条件, 而它的奇点曲面方程由 $z_n = g(z_\nu)$ 换作 $z_n = g(z_\nu) - z_\nu$. 故而, 重复我们的讨论, 我们对在 $z_\nu = 0$ 的邻域中的 g 发现条件 $\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}_\nu} = 0$ 和 $\dfrac{\partial g}{\partial z_\nu} - 1 = 0$ 中的一个能够被满足. 考虑到先前得到的结果我们得到在 $z_\nu = 0$ 的邻域中 $\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}_\nu} \equiv 0$. □

成立更一般的定理.

定理 3 (哈托格斯). 设 $a \in \mathbb{C}^n$ 为函数 f 的奇点并且对每个 $'z, \|'z - 'a\| < \varepsilon$, 在多圆盘 $U(a, \varepsilon)$ 中存在有限个点 $('z, z_n^{(\mu)})$, 它们是这个函数的奇点. 于是在 a 的某个邻域中 f 的奇点构成一个解析集, 其定义方程为

$$(z_n - a_n)^k + c_1('z)(z_n - a_n)^{k-1} + \cdots + c_k('z) = 0, \tag{9}$$

其中的函数 c_ν 在点 $'a$ 全纯.

问题

1. 所谓区域 $D \subset \mathbb{C}$ 中的**亚纯曲线**是指映射 $f: D \to \overline{\mathbb{C}}^n$, 它的分量是 D 中的亚纯函数. 称点 $\zeta_0 \in D$ 为 f 的零点是说在其上所有的 $f_\nu(\zeta_0) = 0$; $f_\nu (\nu = 1, \cdots, n)$ 的零点阶数最低的那个被称做 f 的零点阶数. 称点 $\zeta_0 \in D$ 为曲线 f 的一个极点是说, 在此点至少有一个 $f_\nu(\zeta_0) = \infty$; 在此点 f_ν 的极点阶数中最高的被称做 f 在此极点的阶. 证明, 对于亚纯曲线的下列类似的辐角原理:

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{(f', f)}{(f, f)}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\frac{(f', f)}{(f, f)}d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$$

(在这里假设 ∂D 为光滑曲线, f 全纯地延拓到 ∂D 中 $f \neq 0$ 的地方; N 和 P 为 f 在 D 中的零点和极点个数, 包括它们的重数; (z, w) 为埃尔米特内积). 这时右端的第二项为非正与为零当且仅当曲线 f 位于通过 $0 \in \mathbb{C}^n$ 的直线.

2. 证明下面的广义马丁内利 – 博赫纳积分公式: 如果对多重指标 $k=(k_1,\cdots,k_n)$ 引进形式

$$\omega_k(z)=\frac{(n-k)!k!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}\overline{z}^{k_\nu+1}}{\langle z,\overline{z}^{k+1}\rangle}d\overline{z}^{k+1}[\nu]\wedge dz,$$

故对任意函数 $f\in\mathscr{O}(D)$ 在点 $z\in D$ 有

$$\frac{d^kf(z)}{dz^k}=\int_{\partial D}f(\zeta)\omega_k(\zeta-z)$$

(Andreotti-Norguet 公式, 是对导数的柯西公式的高维类比).

3. 设 $\overline{\Pi}=\{z\in\mathbb{C}^n:|p_\mu(z)|\leqslant 1,\mu=1,\cdots,n\}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的多项式多面体, 使得 $\det\left(\dfrac{\partial p_\mu}{\partial z_\nu}\right)$ 在它的骨架 Γ 上不等于 0. 证明, 任意函数 $f\in\mathscr{O}(\Gamma)\bigcap C(\Pi\bigcup\Gamma)$ 可被多项式一致逼近 (因此特别地, 可延拓到 $C(\overline{\Pi})$ 中的函数).

4. 设 $S\subset\mathbb{C}^m$ 为光滑的实超曲面, $f:S\to\mathbb{C}^n$ 为光滑映射. 证明其图像 $\{(z,f(z)):z\in S\}$ 为极大复流形当且仅当 f 的坐标为 CR – 函数.

5. 设 $M=\{z\in\mathbb{C}^n:\varphi_1(z)=\cdots=\varphi_k(z)=0\}$ 为一生成流形, φ_j 为定义函数. 证明 $f\in C^1(M)$ 为 M 上的 CR – 函数当且仅当 $\overline{\partial}f\wedge\overline{\partial}\varphi_1\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}\varphi_k=0$ 在 M 上成立.

6. 设 f 为在多圆盘 $U\subset\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数, 并且在集合 $U\bigcup\Gamma$ 上连续, 其中 Γ 为 U 中骨架. 证明 f 可延拓为 $C(\overline{U})$ 中的函数.

7. 设函数 f 在单位多圆盘 $U\subset\mathbb{C}^n$ 的边缘 ∂U 上连续并在每个圆盘 $\Delta_{\nu,\alpha}=\{\zeta:\zeta_\mu=e^{i\alpha_\mu},\mu\neq\nu,|\zeta_\mu|<1\}\subset\partial U$ 中对 ζ_ν 全纯, $\nu=1,2,\cdots,n$. 证明 f 可延拓为 $\mathscr{O}(U)\bigcap C(\overline{U})$ 中的函数.

8. 设函数 f 在单位多圆盘 $U\subset\mathbb{C}^n$ 的骨架 Γ 上连续. 证明 f 可延拓为 $\mathscr{O}(U)\bigcap C(\overline{U})$ 中的函数当且仅当 $\int_\Gamma f(\zeta)\zeta^k d\zeta=0$ 对所有 $k=(k_1,\cdots,k_n)$, 其中 k_ν 为整数, 且其中至少有一个 $\geqslant 0$.

9. 设函数 f 在区域 $D\subset\mathbb{R}^{2n}$ 中对每个坐标 $x_1,\cdots,x_{2n}$ 为解析, 并且在某个球中对复坐标 $z_\nu=x_\nu+ix_{n+\nu},\nu=1,\cdots,n$ 全纯. 证明 f 在 D 中 (相对于坐标 z_ν) 全纯.

10. 证明, 广义单位圆盘 (参看第 10 目) 为凸域.

11. 证明, 连通紧集的多项式凸包仍为连通.

12. 证明下列集合为多项式凸:

a) 韦伊多项式多面体;

b) 任意位于 $\mathbb{C}^n$ 的实子空间中的紧集;

c) 在法图例子中映射下的像 $G=f(\mathbb{C}^2)$ (第 11 目).

13. 证明由多项式 (相应地, 有理函数) 组成的级数的收敛域是多项式 (有理) 凸的.

14. 证明, 紧集 $K \subset \mathbb{C}^n$ 的有理凸包 $\widehat{K}_R$ 与集合 $\{z \in \mathbb{C}^n : p(z) \in p(K)$ 对所有多项式 $p\}$ 重合.

15. 证明由缺一小段弧的圆 $\{z_1 = e^{it}, \delta \leqslant t \leqslant 2\pi, z_2 = 0\}$ 和圆柱 $\{z_1 = e^{it}, 0 \leqslant t \leqslant \delta; |z_2| = 1\}$ 组成的集合 $M \subset \mathbb{C}^2$ 的多项式凸包包含了圆盘 $\{|z_1| \leqslant 1, z_2 = 0\}$.

16. 证明, 区域 $D = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + x_2^2 \geqslant \rho^2\}$ 不是全纯域.

17. 设 D 为全纯域, M 为 D 中的解析集; 证明对任意紧集 $K \subset M$, 其相关于 $\mathscr{O}(D)$ 的凸包属于 M.

18. 证明, 紧集 $K = \{|z_1| \leqslant 1, |z_2| \leqslant |z_1|\}$ 不能表示为全纯域的递降序列的极限.

19. 证明, 属于 C^2 的完全实流形 $M \subset \mathbb{C}^n$ 是全纯域的递降序列的极限.

20. 证明, 对于实函数 $\varphi \in C^2$, 所谓莱维行列式

$$-\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_k} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_j} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \end{pmatrix}$$

等于 $H_z(\varphi, \omega)$ 在 $T_z^c\{\varphi = 0\}$ 上限制的特征值的乘积乘以 $|\bigtriangledown \varphi|^2$.

21. 证明第 37 目中定理 2 的下列条件: 如果区域 D 在点 $0 \in \partial D$ 为严格伪凸, 则在该点邻域中存在双全纯坐标变换把它的定义函数转变为形式

$$\varphi(z) = \mathrm{Re}\ z_n + |z|^2 + o(|z|^2).$$

22. 证明, 在点 $a \in \partial D$ 为严格伪凸的区域 D 可以从内部由全纯函数 f 的水平曲面切于它, 即 $\{f = 0\} \bigcap \partial D = \{a\}$.

23. 证明, 区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 伪凸当且仅当对任意全纯圆盘 $S \subset D$, 距离 $\delta(S, \partial D) = \delta(\partial S, \partial D)$.

24. 设具 C^2 类边缘的区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 属于球 B; 证明 D 在其所有切于 $2B$ 的边缘点上为严格伪凸.

25. 证明, 区域 $D = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1, z_n \neq 0\}$ 是个伪凸域, 并且它不是由使多重次调和函数为负值的集合 [提示. 利用 Grauert-Remmert 定理 (见第 38 目的最后) 和极大值原理].

26. 次调和性的定义不加改变地转移到空间 $\mathbb{R}^m$ 的情形, 这时只要把优势函数假定为 m 个实变量的调和函数就可以了. 证明在区域 $D \subset \mathbb{C}^n (= \mathbb{R}^{2n})$ 多重次调和函数构成 D 中次调和函数的子类.

27. 证明每个在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中调和并在某个球 $B \subset D$ 中多重次调和的函数, 在 D 中为多重调和.

28. 紧集 $K \subset \mathbb{C}^n$ 的多项式凸包等于集合

$$\{z \in \mathbb{C}^n : u(z) \leqslant \sup_K u \text{ 对所有在 } \mathbb{C}^n \text{ 中为多重次调和的函数 } u\}.$$