

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Vícebodové okrajové úlohy s asymetrickými nelinearitami  
a tlumením

Plzeň 2012

Iveta Looseová

---

## Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne . . . . .

. . . . .

podpis

---

## Poděkování

V první řadě bych chtěla velmi poděkovat svému vedoucímu práce Ing. Petru Nečesalovi, Ph.D. za odborné vedení, vstřícný přístup, ochotu a trpělivost při zpracování celé práce. Dále bych ráda poděkovala Doc. RNDr. Milanu Tvrděmu, CSc. z Matematického ústavu Akademie věd ČR za jeho cenné konzultace k bakalářské práci, které proběhly v rámci týdenní stáže v Matematickém ústavu Akademie věd ČR. Tato stáž byla podpořena z projektu A-Math-Net - síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (č. projektu CZ.1.07/2.4.00/17.0100). Dále bych chtěla poděkovat Ing. Zdeňkovi Loosemu za pomoc při korekturách práce.

---

## Abstrakt

Tato bakalářská práce je zaměřena na vícebodové okrajové úlohy, zejména na tvar vlastních čísel příslušných diferenciálních operátorů a Fučíkovo spektrum. Nejdříve vyšetřujeme Neumannovu a periodickou okrajovou úlohu, poté se zabýváme třibodovou okrajovou úlohou, která obě předchozí úlohy propojuje. Hlavní výsledky práce se týkají třibodové okrajové úlohy s tlumením, pro niž jsou analyticky odvozeny hodnoty parametrů, pro které má tato úloha pouze triviální řešení. Dále je provedena numerická konstrukce Fučíkova spektra a konstrukce jeho nepřipustných oblastí, tj. množiny bodů, které do Fučíkova spektra nepatří.

**Klíčová slova:** okrajová úloha, vícebodová okrajová úloha, vlastní čísla, Fučíkovo spektrum, nepřipustné oblasti Fučíkova spektra

## Abstract

This Bachelor Thesis is devoted to the multi-point boundary value problems, the eigenvalues and the Fučík spectrum of the corresponding differential operators are investigated. First, the Neumann and the periodic boundary value problem are studied, then the three-point boundary value problem, which connects both previous problems, is investigated. Main results of this Thesis concern the three-point boundary value problem with damping. We provide the analytic description of the values of parameters for which the problem has only the trivial solution. Finally, the numerical construction of the Fučík spectrum is provided as well as the construction of its inadmissible sets (i.e. the sets of points, which do not belong to the Fučík spectrum).

**Keywords:** the boundary value problem, the multi-point boundary value problem, eigenvalues, the Fučík spectrum, inadmissible sets of the Fučík spectrum

# Obsah

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Úvod a základní pojmy</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Existence a jednoznačnost řešení . . . . .                              | 1         |
| 1.1.1    | Počáteční úloha . . . . .   | 2         |
| 1.1.2    | Okrajová úloha . . . . .  | 3         |
| 1.1.3    | Obecné řešení homogenní rovnice . . . . .                               | 3         |
| 1.2      | Fučíkovo spektrum . . . . .   | 5         |
| 1.3      | Matematické kyvadlo . . . . .   | 5         |
| 1.3.1    | Odvození rovnice . . . . .  | 5         |
| 1.3.2    | Model několika matematických kyvadel . . . . .                          | 7         |
| <b>2</b> | <b>Dvoubodové okrajové úlohy</b>  | <b>12</b> |
| 2.1      | Vlastní čísla a vlastní funkce . . . . .                                | 12        |
| 2.1.1    | Neumannova úloha . . . . .  | 12        |
| 2.1.2    | Periodická úloha . . . . .  | 16        |
| 2.2      | Fučíkovo spektrum . . . . .   | 19        |
| <b>3</b> | <b>Třibodová úloha bez tlumení</b>                                      | <b>25</b> |
| 3.1      | Vlastní čísla . . . . .   | 25        |
| <b>4</b> | <b>Třibodová úloha s tlumením</b>                                       | <b>30</b> |
| 4.1      | Třibodová úloha pro $\lambda \leq \left(\frac{b}{2}\right)^2$ . . . . . | 30        |
| 4.2      | Třibodová úloha pro $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$ . . . . .    | 32        |
| 4.2.1    | Vlastní čísla . . . . .   | 33        |
| 4.2.2    | Úloha pro $\eta = \frac{1}{2}$ . . . . .                                | 36        |
| 4.2.3    | Počet netriviálních řešení . . . . .                                    | 41        |
| 4.2.4    | Shrnutí pro $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$ . . . . .            | 45        |
| 4.3      | Fučíkovo spektrum . . . . .   | 47        |
| 4.3.1    | Nepřípustná oblast Fučíkova spektra . . . . .                           | 48        |
| 4.3.2    | Fučíkovo spektrum pro $\eta = \frac{1}{2}$ . . . . .                    | 51        |
|          | <b>Shrnutí</b>  | <b>52</b> |
|          | <b>Literatura</b>   | <b>53</b> |
|          | <b>Příloha</b>  | <b>54</b> |

# Kapitola 1

## Úvod a základní pojmy

Tématem této bakalářské práce jsou některé vícebodové okrajové úlohy a to i s tlumením. Jako motivaci začneme s matematickým kyvadlem a uplatněním diagramu řešení a Fučíkova spektra v modelu několika matematických kyvadel. V kapitole 2 se budeme zabývat dvoubodovými okrajovými úlohami, konkrétně Neumannovou a periodickou okrajovou úlohou. Najdeme vlastní čísla a sestrojíme Fučíkovo spektrum příslušných diferenciálních operátorů. V kapitole 3 se budeme zabývat třibodovou okrajovou úlohou, která tvoří přechod mezi Neumannovou okrajovou úlohou a periodickou okrajovou úlohou. Odvodíme tvar vlastních čísel. V poslední kapitole 4 prozkoumáme analyticky i numericky chování a některé vlastnosti třibodové okrajové úlohy s tlumením a numericky sestrojíme Fučíkovo spektrum s nepřípustnými oblastmi (tj. množiny bodů, které do Fučíkova spektra nepatří).

### 1.1 Existence a jednoznačnost řešení

Mějme zadánu lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$y''(x) + by'(x) + \lambda y(x) = f(x), \quad x \in I, \quad (1.1)$$

kde  $I$  je interval,  $b \geq 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  a  $f = f(x)$  je reálná spojitá funkce. Řešením diferenciální rovnice (1.1) rozumíme funkci  $y = y(x)$  z prostoru  $C^2(I)$ , která splňuje ve všech bodech  $x \in I$  diferenciální rovnici.

Diferenciální rovnici druhého řádu (1.1) můžeme převést na ekvivalentní soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu (viz [7])

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2, \\ y_2'(x) &= -by_2(x) - \lambda y_1(x) + f(x). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Označíme-li  $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$  a  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) = (f_1(x, \mathbf{y}(x)), f_2(x, \mathbf{y}(x)))$ , kde  $f_1(x, \mathbf{y}(x)) = y_2(x)$ ,  $f_2(x, \mathbf{y}(x)) = -by_2(x) - \lambda y_1(x) + f(x)$ , můžeme soustavu (1.2) zapsat jako  $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$ .

**Poznámka 1.1.** Uvažujme rovnici (1.1). Konstantu  $b \geq 0$  u  $y'$  nazveme podle jejího fyzikálního významu tlumením.

Diferenciální rovnice (1.1) pro  $f \equiv 0$  je homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Fundamentálním systémem homogenní diferenciální rovnice rozumíme systém funkcí (jejich počet odpovídá řádu diferenciální rovnice, tedy pro diferenciální rovnici (1.1) pro  $f \equiv 0$  rozumíme systém dvou funkcí), které jsou řešením homogenní diferenciální rovnice a jsou lineárně nezávislé. Pro homogenní lineární diferenciální rovnici dokážeme vždy sestrotit fundamentální systém. Obecné řešení lineární homogenní diferenciální rovnice dostaneme jako lineární kombinaci prvků fundamentálního systému. Obecné řešení lineární rovnice s pravou stranou dostaneme jako lineární kombinaci prvků fundamentálního systému, ke které přičteme partikulární řešení, tj. libovolné řešení rovnice s pravou stranou. Obecným řešením lze zapsat všechna řešení diferenciální rovnice (1.1).

### 1.1.1 Počáteční úloha

Počáteční úlohou druhého řádu s rovnicí (1.1) rozumíme

$$\begin{cases} y''(x) + by'(x) + \lambda y(x) = f(x), & x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0^1, \end{cases} \quad (1.3)$$

kde  $x_0 \in I, y_0, y_0^1 \in \mathbb{R}$ . Počáteční podmínky  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^1$  můžeme zapsat jako  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ , kde  $\mathbf{y}_0 = (y_0, y_0^1)$ .  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  je definována na  $D = \{(x, \mathbf{y}) : |x - x_0| \leq c, \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \leq d\}$ , kde  $c, d$  jsou libovolné reálné konstanty. Zápisem  $\|\cdot\|$  rozumíme 1-normu v  $\mathbb{R}^2$ , tj.  $\|\mathbf{y}\| = |y_1| + |y_2|$ .

**Věta 1.2** (Existence a jednoznačnost řešení soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu). *Nechť  $\mathbf{f}$  je spojitá v obou složkách a  $\mathbf{f}$  splňuje Lipschitzovu podmínku (vzhledem k  $\mathbf{y}$ ) na  $D = \{(x, \mathbf{y}) : |x - x_0| \leq c, \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \leq d\}$ . Označme*

$$M = \max_D \|\mathbf{f}(x, \mathbf{y})\|, \\ h = \min \left( c, \frac{d}{M} \right)$$

*a necht'  $I = \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$  je interval. Potom existuje právě jedno řešení počáteční úlohy (1.3) na intervalu  $I$ .*

*Důkaz.* Viz [2, věta 7.1, strana 22].

Musíme ověřit předpoklady věty 1.2 pro diferenciální rovnici (1.1), kterou jsme převedli na ekvivalentní soustavu diferenciálních rovnic (1.2). Soustavu (1.2) můžeme zapsat jako  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ , kde  $\mathbf{f} = (y_2, -by_2 - \lambda y_1 + f)$ . Vektorová funkce  $\mathbf{f}$  je spojitá v obou složkách. Aby  $\mathbf{f}$  splnila Lipschitzovu podmínku (vzhledem k  $\mathbf{y}$ ), musí existovat konstanta  $L > 0$  taková, že pro všechna  $(x, \mathbf{y}), (x, \bar{\mathbf{y}}) \in D$  platí

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \bar{\mathbf{y}})\| \leq L\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|.$$

Využitím vlastností normy můžeme psát (viz [1])

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \bar{\mathbf{y}})\| &= \|(y_2, -by_2 - \lambda y_1 + f) - (\bar{y}_2, -b\bar{y}_2 - \lambda\bar{y}_1 + f)\| \\ &= \|(y_2 - \bar{y}_2, -by_2 - \lambda y_1 + f + b\bar{y}_2 + \lambda\bar{y}_1 - f)\| \\ &= \|(y_2 - \bar{y}_2, -\lambda(y_1 - \bar{y}_1) - b(y_2 - \bar{y}_2))\| \\ &= |y_2 - \bar{y}_2| + |-\lambda(y_1 - \bar{y}_1) - b(y_2 - \bar{y}_2)| \\ &\leq |-\lambda||y_1 - \bar{y}_1| + (1 + | -b|)|y_2 - \bar{y}_2| \\ &\leq \max\{|-\lambda|, 1 + | -b|\}(|y_1 - \bar{y}_1| + |y_2 - \bar{y}_2|) \\ &= \max\{|\lambda|, 1 + b\}\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|.\end{aligned}$$

Našli jsme Lipschitzovu konstantu  $L = \max\{|\lambda|, 1 + b\}$  nezávislou na volbě  $c, d$ . Díky tomu, že  $\mathbf{f}$  je spojitá v obou složkách a splňuje Lipschitzovu podmínku, splňuje  $\mathbf{f}$  předpoklady věty 1.2. Proto má počáteční úloha (1.3) právě jedno řešení.  $\square$

### 1.1.2 Okrajová úloha

Uvažujme interval  $I = (x_0, x_1)$ . Okrajovou úlohou druhého řádu rozumíme diferenciální rovnici druhého řádu a okrajové podmínky  $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, y'(x_0) = y_0^1, y'(x_1) = y_1^1$ , kdy známe alespoň jednu podmínku v obou krajních bodech intervalu a  $y_0, y_1, y_0^1, y_1^1 \in \mathbb{R}$ .

Dosazením obecného řešení do okrajových podmínek dostaneme soustavu dvou lineárních rovnic pro konstanty  $C_1, C_2$ , které jsou konstantami lineární kombinace prvků fundamentálního systému.

Nechť řešení diferenciální rovnice je určeno jednoznačně až na konstanty. Okrajová úloha má právě jedno řešení, pokud matice soustavy pro konstanty je regulární. Je-li singulární, soustava, tedy i okrajová úloha, buď řešení nemá, nebo jich má nekonečně mnoho.

Diferenciální rovnici druhého řádu s okrajovými podmínkami tvaru  $y'(x_0) = 0, y'(x_1) = 0$  nazveme Neumannovou okrajovou úlohou. Periodickou úlohou rozumíme diferenciální rovnici druhého řádu spolu s podmínkami  $y(x) = y(x + T), T > 0$ . Periodické okrajové podmínky můžeme zapsat ve tvaru  $y(0) = y(T), y'(0) = y'(T)$ .

### 1.1.3 Obecné řešení homogenní rovnice

Mějme diferenciální rovnici

$$y''(x) + by'(x) + \lambda y(x) = 0. \tag{1.4}$$

Nejdříve uvažujme  $b = 0$ . Předpokládejme, že řešení rovnice (1.4) má tvar  $y(x) = e^{ax}$ . Dosadíme-li toto řešení do diferenciální rovnice (1.4), dostaneme  $e^{ax}(a^2 + \lambda) = 0$ . Tedy  $y(x) = e^{ax}$  je řešením (1.1), je-li  $a$  kořenem tzv. charakteristického polynomu  $a^2 + \lambda = 0$ . Další postup rozdělme na tři případy.



1. Pro  $\lambda < 0$  má charakteristická rovnice tvar  $a^2 + \lambda = 0$ , tedy její kořeny jsou  $a_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ . Tím získáme dvě řešení  $y_1(x) = e^{\sqrt{-\lambda}x}$ ,  $y_2(x) = e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ . Z nenulovosti Wronskiánu

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^{\sqrt{-\lambda}x} & e^{-\sqrt{-\lambda}x} \\ \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}x} & -\sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda}x} \end{bmatrix} = -2\sqrt{-\lambda} \neq 0$$

plyne, že řešení  $y_1, y_2$  jsou lineárně nezávislá, tedy tvoří fundamentální systém. Obecné řešení rovnice (1.4) pro  $\lambda < 0$  má tvar  $y(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ , kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ , protože obecné řešení diferenciální rovnice je tvořeno lineární kombinací prvků fundamentálního systému.

2. Pro  $\lambda = 0$  má charakteristická rovnice jeden dvojnásobný kořen  $a_{1,2} = 0$ , tedy jedno řešení diferenciální rovnice má tvar  $y_1(x) = 1$ . Lineárně nezávislé k řešení  $y_1$  je řešení  $y_2(x) = x$ . Proto má obecné řešení diferenciální rovnice (1.4) pro  $\lambda = 0$  tvar  $y(x) = C_1 + C_2 x$ , kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .
3. Pro  $\lambda > 0$  jsou řešením charakteristické rovnice komplexní čísla  $a_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i$ . Fundamentální systém má tedy tvar  $\{e^{\sqrt{\lambda}ix}, e^{-\sqrt{\lambda}ix}\}$ . Protože lineární kombinace řešení diferenciální rovnice (1.4) je také jejím řešením, můžeme získat reálné řešení užitím Eulerovy identity. Lineární kombinace zvolíme ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sqrt{\lambda}ix} + e^{-\sqrt{\lambda}ix}}{2} &= \cos(\sqrt{\lambda}x), \\ \frac{e^{\sqrt{\lambda}ix} - e^{-\sqrt{\lambda}ix}}{2i} &= \sin(\sqrt{\lambda}x). \end{aligned}$$

Protože  $\cos(\sqrt{\lambda}x)$  a  $\sin(\sqrt{\lambda}x)$  jsou lineárně nezávislé funkce, získáme reálný fundamentální systém  $\{\cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x)\}$ . Obecné řešení rovnice (1.4) pro  $\lambda > 0$  má tvar  $y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$ , kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Celkem můžeme zapsat obecné řešení diferenciální rovnice (1.4) pro  $b = 0$  jako

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, & \text{pro } \lambda < 0, \\ C_1 + C_2 x, & \text{pro } \lambda = 0, \\ C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), & \text{pro } \lambda > 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Všechna řešení rovnice (1.4) pro  $b = 0$  můžeme tedy zapsat pomocí obecného řešení (1.5).

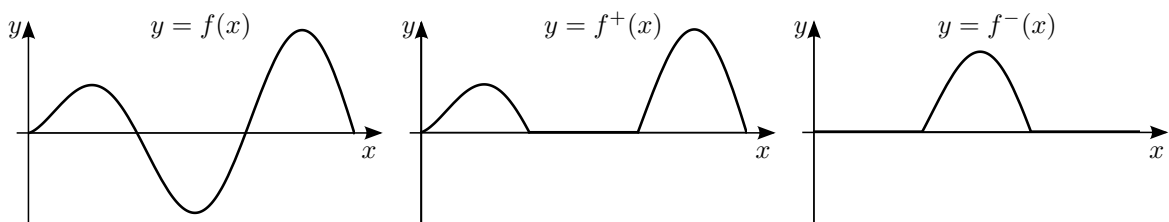
Pro  $b > 0$  dostaneme podobnými úvahami jako pro  $b = 0$  obecné řešení diferenciální rovnice (1.4)

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{2}bx - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}bx + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}x}, & \text{pro } \lambda < \left(\frac{b}{2}\right)^2, \\ C_1 e^{-\frac{1}{2}bx} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}bx}, & \text{pro } \lambda = \left(\frac{b}{2}\right)^2, \\ C_1 e^{-\frac{1}{2}bx} \cos(\sqrt{\lambda - \left(\frac{b}{2}\right)^2}x) + C_2 e^{-\frac{1}{2}bx} \sin(\sqrt{\lambda - \left(\frac{b}{2}\right)^2}x), & \text{pro } \lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2, \end{cases} \quad (1.6)$$

kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Poznamenejme, že obecné řešení (1.6) pro  $b \rightarrow 0^+$  přechází v obecné řešení (1.5).

## 1.2 Fučíkovo spektrum

Nechť  $f$  je reálná funkce. Její kladnou částí rozumíme funkci  $f^+ = \max\{f, 0\}$  a zápornou částí funkci  $f^- = \max\{-f, 0\}$ . Zřejmě platí  $f = f^+ - f^-$ . Ukázkou kladné i záporné části jisté funkce vidíme na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Kladná a záporná část funkce.

Rovnici (1.4) můžeme ekvivalentně přepsat pomocí kladné a záporné části funkce  $y$  jako

$$y''(x) + by'(x) + \lambda y^+(x) - \lambda y^-(x) = 0.$$

Uvažujeme-li koeficienty u kladné a záporné části obecně různé, dostaneme

$$y''(x) + by'(x) + \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) = 0, \quad (1.7)$$

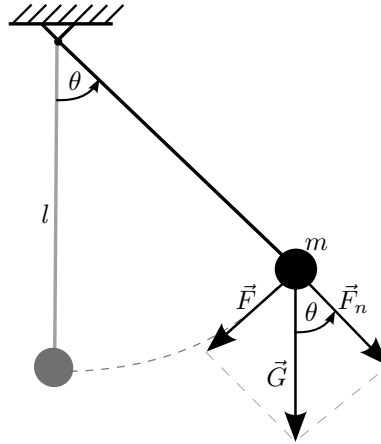
kde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dvojici  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , pro kterou má rovnice (1.7) netriviální řešení, budeme nazývat Fučíkovým vlastním číslem. Množina všech Fučíkových vlastních čísel se nazývá Fučíkovo spektrum. Definicí Fučíkova spektra uvedeme v následujících kapitolách pro každý diferenciální operátor zvlášť.

## 1.3 Matematické kyvadlo

Nejjednodušším modelem kyvadla je matematické kyvadlo, kterým rozumíme matematický model kyvadla. U matematického kyvadla zkoumáme hmotný bod zavěšený na pevném vlákně zanedbatelné hmotnosti. Zanedbáváme odpor vzduchu a tření v závěsu. Gravitační pole považujeme za homogenní.

### 1.3.1 Odvození rovnice

Je-li kyvadlo vychýleno z rovnovážné polohy, na hmotný bod o hmotnosti  $m$  na konci závěsu působí kolmo dolů tíha  $\vec{G}$  o velikosti  $G = mg$ , kde  $g$  je velikost gravitačního zrychlení.



Obrázek 1.2: Matematické kyvadlo.

Situaci vidíme na obrázku 1.2. Tíhu rozložíme na dvě složky. Složka  $\vec{F}_n$  působící ve směru závěsu při pohybu kyvadla napíná vlákno. Pro odvození rovnice matematického kyvadla nás zajímá složka, která je kolmá na závěs a působí proti směru pohybu. Její velikost vyjádříme jako  $F = mg \sin \theta$ , kde  $\theta$  je orientovaný úhel vychýlení kyvadla od rovnovážné polohy. Úhel  $\theta$  je proměnný v čase. Tíha působí na kyvadlo momentem  $M$  vzhledem k ose kyvadla. Pro velikost momentu platí  $M = -lF = -lmg \sin \theta$ , kde  $l$  je délka závěsu. Pro moment současně platí  $M = J\ddot{\theta}$ , kde  $J = ml^2$  je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k jeho ose. Celkem dostaneme

$$ml^2\ddot{\theta} = -lmg \sin \theta,$$

tedy pohybová rovnice matematického kyvadla je diferenciální rovnicí a má tvar

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Pro malé výchylky asi do  $5^\circ$  můžeme místo  $\sin \theta$  uvažovat  $\theta$ , protože absolutní chyba Taylorova rozvoje prvního řádu funkce sinus kolem nuly je do pěti stupňů menší než  $10^{-5}$ . Potom dostaneme linearizovaný tvar rovnice

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (1.8)$$

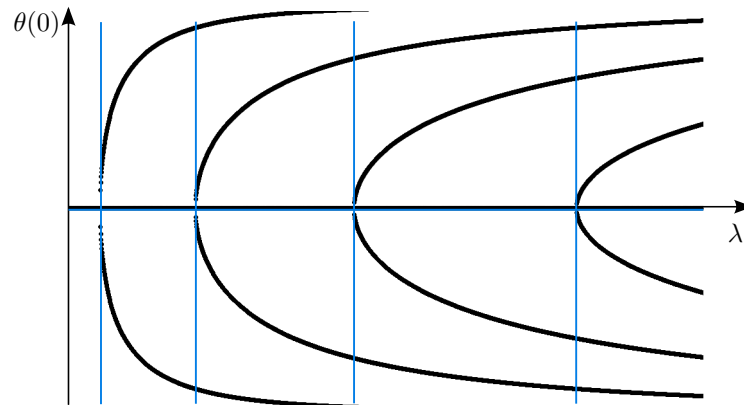
Lineárním případem, tedy rovnicí (1.8), se budeme zabývat v dalších kapitolách. Pohyb kyvadla můžeme popsat periodickou okrajovou úlohou

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0, & t \in (0, T), \\ \theta(0) = \theta(T), \\ \theta'(0) = \theta'(T), \end{cases} \quad (1.9)$$

kde  $T$  je doba periody. Porovnání nelineárního modelu (1.9) a linearizovaného modelu

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t), & t \in (0, T), \\ \theta(0) = \theta(T), \\ \theta'(0) = \theta'(T), \end{cases} \quad (1.10)$$

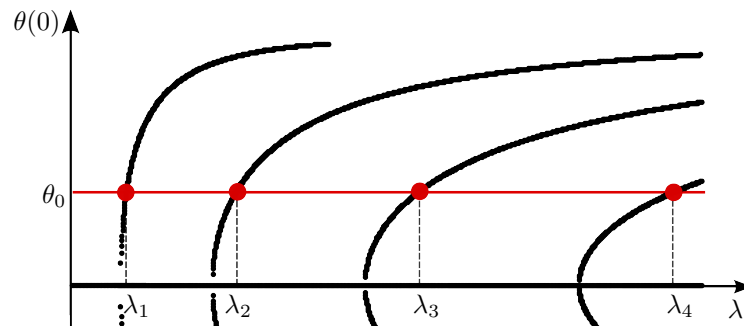
vidíme na obrázku 1.3, kde je zobrazen diagram řešení pro oba případy a uvažujeme  $\lambda = \frac{g}{l}$ . Modře je zobrazen diagram řešení pro linearizovanou úlohu a černě je diagram řešení pro nelineární úlohu. Z diagramu je patrné, že čím více vychýlíme kyvadlo od rovnovážné polohy, tím větší bude rozdíl mezi chováním obou modelů. Navíc pro malé výchylky si diagramy velmi dobře odpovídají.



Obrázek 1.3: Diagramy řešení nelineární úlohy (1.9) (černě) a její linearizace (1.10) (modře).

### 1.3.2 Model několika matematických kyvadel

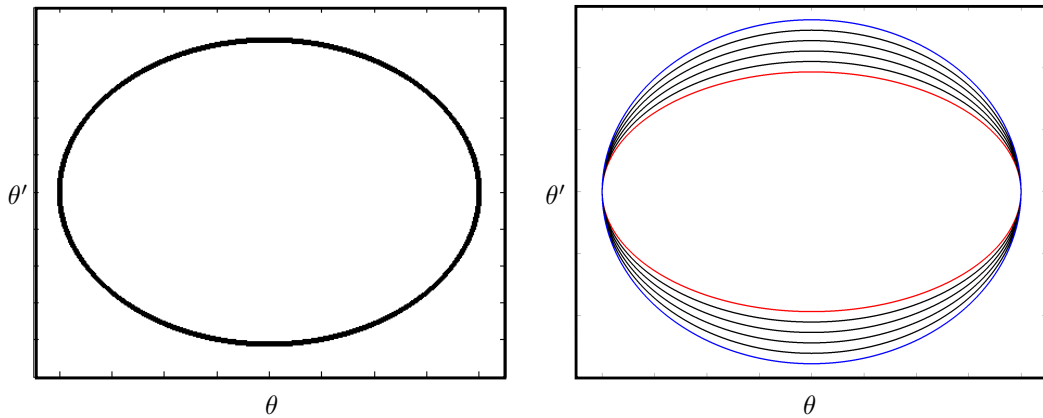
Známou aplikací je model několika matematických kyvadel, tzv. Pendulum Waves. Jedná se o model několika navzájem nezávislých kyvadel s různými délkami závěsů na tyči. Na model se díváme zepředu, takže po rozkývání všech kyvadel vidíme zajímavé jevy, které připomínají vlny.



Obrázek 1.4: Určení délek závěsů z diagramu řešení.

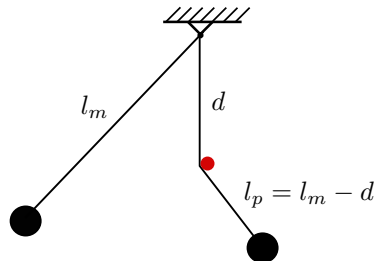
Experiment probíhá následovně. Nejdříve se všechna kyvadla vychýlí o stejný úhel a potom se bez buzení s nulovou počáteční rychlostí nechají kývat. Všechna kyvadla se po určité době v jednu chvíli dostanou do výchozí polohy. Tím je určena společná perioda  $T$  kyvadel. Volbou společné periody všech kyvadel jsou určeny vhodné délky závěsů. Naším cílem je najít způsob, kterým tyto délky určíme.

Periodu  $T$  bereme jako předem známou hodnotu. Pro všechna kyvadla dostaneme společné podmínky:  $\theta(0) = \theta(T)$ ,  $\theta'(0) = \theta'(T) = 0$ . Abychom úlohu mohli vyřešit a tím získat diagram řešení, uvažujeme Neumannovy okrajové podmínky  $\theta'(0) = \theta'(T) = 0$  a z nich vybereme vhodná řešení splňující i podmínku  $\theta(0) = \theta(T)$ . Abychom získali délky závěsů, zafixujeme v diagramu řešení počáteční výchylku  $\theta_0$ . Průsečíky této přímky s větvemi diagramu (viz obrázek 1.4) řešení udávají čísla  $\lambda = \frac{g}{l}$ , z kterých již délky závěsů  $l$  zjistíme. Diagram řešení tedy jednoznačně určuje délky závěsů pro pevně zvolenou počáteční výchylku  $\theta_0$ . Jakým způsobem z diagramu řešení zjistit délky závěsů vidíme na obrázku 1.4. Pokud bychom uvažovali reálný model, v kterém již nezanedbáváme veškeré tlumení, princip získání délek závěsů je obdobný. V takovém případě však nevybíráme řešení, která splňují  $\theta(0) = \theta(T)$ , protože tlumený model tuto podmínku s nulovou počáteční derivací nikdy nesplní.



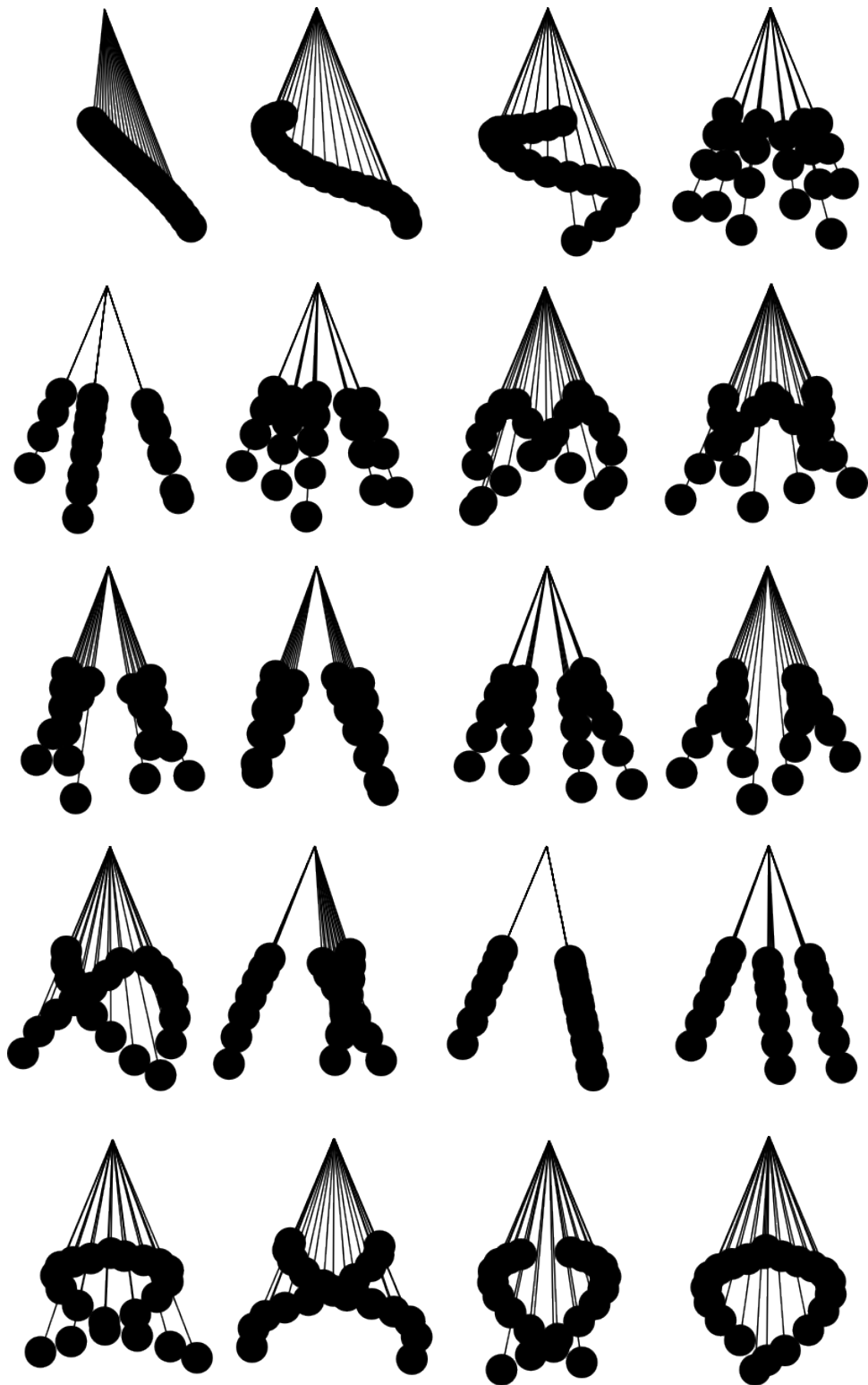
Obrázek 1.5: Fázový portrét jednoho kyvadla (vlevo) a fázové portréty několika kyvadel (vpravo).

Na obrázku 1.7 vidíme ukázky z modelu Pendulum Waves. Na obrázku 1.5 vidíme pohyb kyvadla ve fázové rovině (vlevo) a pohyby všech kyvadel (vpravo). Červeně je zobrazeno kyvadlo s nejdélší délkou závěsu a modře kyvadlo s nejkratší délkou závěsu.

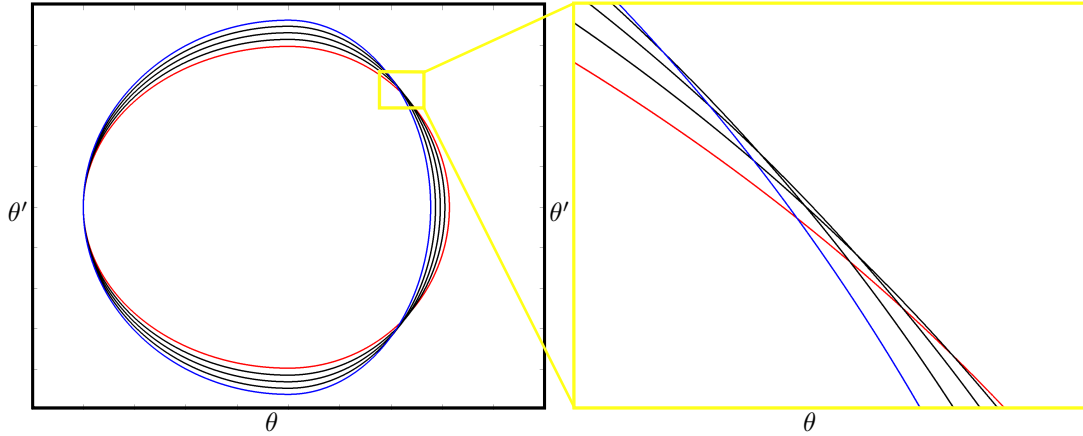


Obrázek 1.6: Kyvadlo se zarážkou (červeně).

Do modelu přidáme zarážku (viz obrázek 1.6). Zarážkou docílíme toho, že na jedné straně bude délka závěsů kratší. Takový model pro jedno kyvadlo můžeme popsat jako



Obrázek 1.7: Model několika kyvadel.



Obrázek 1.8: Fázové portréty několika kyvadel se zarážkou.

okrajovou úlohu

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l_p} \sin \theta^+(t) - \frac{g}{l_m} \sin \theta^-(t) = 0, & t \in (0, T), \\ \theta(0) = \theta(T), \\ \theta'(0) = \theta'(T) = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

kde  $l_p, l_m$  jsou délky závěsů na opačných stranách. I pro tento model získáme jevy podobající se vlnám. Při linearizaci (tj. pro malé výchylky  $\theta$ ) dostaneme

$$\ddot{\theta}(t) + \alpha \theta^+(t) - \beta \theta^-(t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (1.12)$$

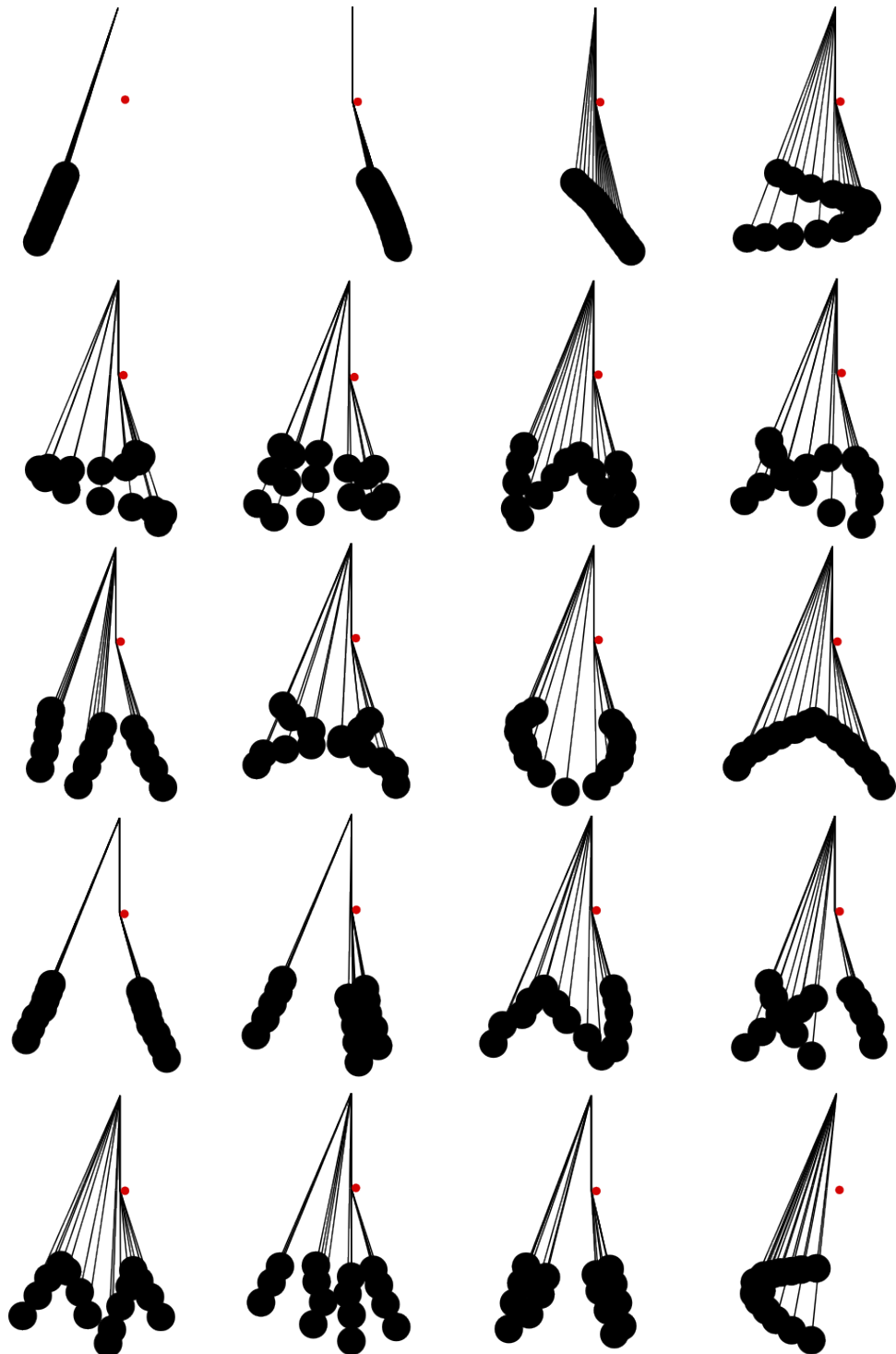
kde  $\alpha = \frac{g}{l_p}$ ,  $\beta = \frac{g}{l_m}$ .

Vhodné délky závěsů můžeme opět získat z diagramu řešení, v kterém uvažujeme závislost  $\theta(0)$  na  $l_m$ . Délku  $l_p$  dopočítáme podle vztahu  $l_p = l_m - d$ . Pokud uvažujeme linearizaci úlohy (1.12), tedy

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l_p} \theta^+(t) - \frac{g}{l_m} \theta^-(t) = 0, & t \in (0, T), \\ \theta(0) = \theta(T), \\ \theta'(0) = \theta'(T) = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

můžeme přibližné vhodné délky závěsů zjistit z Fučíkova spektra příslušného operátoru. Délky závěsů získáme jako společné body Fučíkova spektra a parametrické křivky  $k(l_m) = (\frac{g}{l_m}, \frac{g}{l_m-d})$ , kde  $d$  je vzdálenost zarážky od horního rámu. Na obrázku 1.8 vidíme pohyby několika kyvadel se zarážkou. Červeně je zobrazeno kyvadlo s nejdelší délkou závěsu a modře kyvadlo s nejkratší délkou závěsu. Žlutě je zvýrazněno křížení jednotlivých fázových portrétů a vpravo je detail tohoto křížení.

Na obrázku 1.9 vidíme ukázky z modelu Pendulum Waves se zarážkou (červeně).



Obrázek 1.9: Model několika kyvadel se zarážkou.



# Kapitola 2

## Dvoubodové okrajové úlohy

V této kapitole se zabýváme dvěma typy dvoubodových úloh, a to Neumannovu okrajovou úlohou a periodickou okrajovou úlohou.

### 2.1 Vlastní čísla a vlastní funkce

V první části hledáme všechna řešení těchto úloh a zejména nás zajímají vlastní čísla odpovídajících operátorů.

#### 2.1.1 Neumannova úloha

Uvažujme Neumannovu úlohu

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ y'(0) = y'(1) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

kde  $\lambda \in \mathbb{R}$  je parametr. Řešením úlohy (2.1) rozumíme funkci z prostoru  $C^1(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2(0, 1)$ , která splňuje ve všech bodech  $x \in (0, 1)$  diferenciální rovnici v (2.1) a splňuje okrajové podmínky v (2.1). Neumannova okrajová úloha (2.1) má vždy triviální řešení (tj.  $y \equiv 0$ ) pro libovolné  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Definujme operátor  $L^N$

$$\begin{aligned} (L^N y)(x) &:= -y''(x), \\ D(L^N) &:= \{y \in C^1(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2(0, 1) : y'(0) = y'(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Okrajovou úlohu (2.1) lze zapsat v operátorové podobě

$$L^N y = \lambda y. \quad (2.2)$$

Čísla  $\lambda$ , pro která má úloha (2.2) netriviální řešení  $y$ , se nazývají vlastní čísla operátoru  $L^N$ . A odpovídajícím netriviálním řešením se říká vlastní funkce operátoru  $L^N$ . Řešení úlohy (2.1) je lineární kombinací vlastních funkcí pro pevné vlastní číslo  $\lambda$ .

**Věta 2.1.** *Vlastní čísla operátoru  $L^N$  mají tvar  $\lambda_k = (k\pi)^2$  a příslušné vlastní funkce mají tvar  $u_k(x) = \cos(k\pi x)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .*

*Důkaz.* Abychom našli tvar vlastních čísel, budeme hledat taková čísla  $\lambda$ , pro která má úloha (2.1) netriviální řešení. Obecné řešení rovnice v (2.1), jak jsme odvodili v kapitole 1, má tvar

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, & \text{pro } \lambda < 0, \\ C_1 + C_2 x, & \text{pro } \lambda = 0, \\ C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), & \text{pro } \lambda > 0, \end{cases}$$

kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Určíme konstanty  $C_1, C_2$  tak, aby byly splněny podmínky v (2.1).

1. Pro  $\lambda < 0$  dopočítáme  $C_1$  a  $C_2$  tak, abychom splnili Neumannovy podmínky v (2.1). Podmínky v (2.1) vyjádříme jako soustavu rovnic pro dvě neznámé  $C_1$  a  $C_2$ ,

$$C_1 \sqrt{-\lambda} - C_2 \sqrt{-\lambda} = 0, \quad (2.3)$$

$$C_1 \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}} - C_2 \sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0. \quad (2.4)$$

Z rovnice (2.3) je zřejmé, že konstanty  $C_1$  a  $C_2$  musí být shodné. Rovnice (2.4) za podmínky  $C_1 = C_2$  a po vydělení  $\sqrt{-\lambda} \neq 0$  má tvar

$$C_1 (e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0. \quad (2.5)$$

Rovnice (2.5) je splněna pouze pro  $C_1 = 0$ , čímž dostaneme triviální řešení. Neumannova úloha (2.1) pro  $\lambda < 0$  má tedy pouze triviální řešení a proto nemá operátor  $L^N$  pro  $\lambda < 0$  žádné vlastní číslo.

2. Pro  $\lambda = 0$  má derivace řešení tvar  $y'(x) = C_2$ , proto z podmínek v (2.1) plyne, že konstanta  $C_2$  je nulová. Řešení Neumannovy úlohy (2.1) má tvar libovolných konstantních funkcí a  $\lambda = 0$  je vlastním číslem operátoru  $L^N$  a k němu je příslušnou vlastní funkcí  $u_0(x) = 1$ .
3. Pro  $\lambda > 0$  okrajové podmínky v (2.1) představují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} C_2 \sqrt{\lambda} &= 0, \\ -C_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}) + C_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}) &= 0. \end{aligned}$$

Protože  $\sqrt{\lambda} \neq 0$ , je z první rovnice zřejmé, že konstanta  $C_2$  je nulová. Tím dostaneme z druhé rovnice

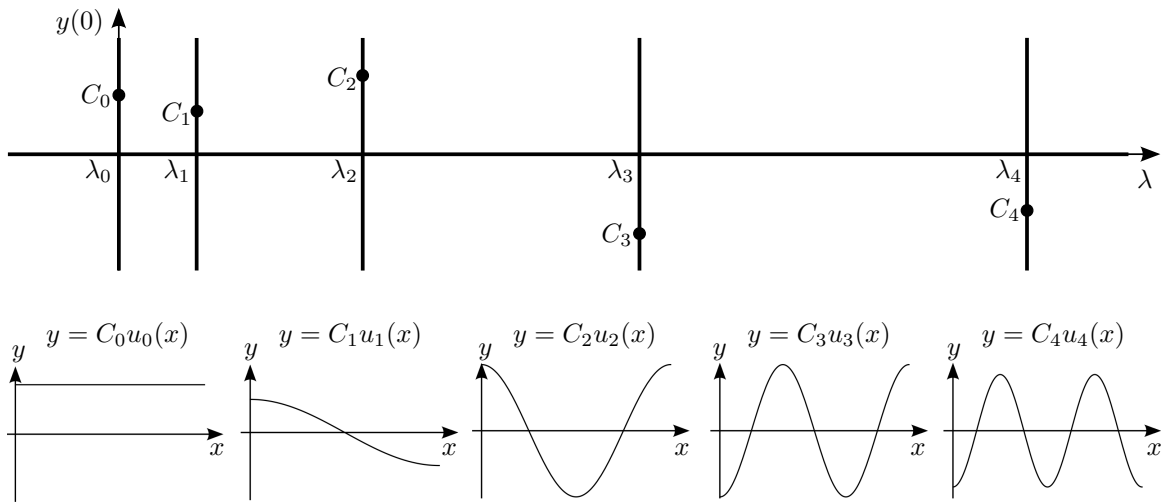
$$C_1 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Rovnice je splněna, pokud je konstanta  $C_1$  nulová (pak dostaneme triviální řešení) a nebo pokud je  $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ , tedy pokud  $\lambda = (k\pi)^2$ , kde  $k \in \mathbb{N}$ . Čísla  $\lambda = (k\pi)^2$  jsou vlastními čísly operátoru  $L^N$ . K nim příslušné vlastní funkce mají tvar  $u(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x)$ . Řešení Neumannovy úlohy (2.1) pro  $\lambda > 0$  má tvar  $y(x) = C \cos(\sqrt{\lambda}x)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

## 2.1. VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ FUNKCE

Vycházeli jsme z obecného řešení rovnice v (2.1), proto jsme výše uvedeným postupem našli všechna řešení, která splňují Neumanovu úlohu (2.1). Celkem můžeme zapsat vlastní čísla operátoru  $L^N$  ve tvaru  $\lambda_k = (k\pi)^2$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  a příslušné vlastní funkce ve tvaru  $u_k(x) = \cos(k\pi x)$ .  $\square$

Na obrázku 2.1 vidíme diagram řešení pro úlohu (2.1) a některá řešení pro prvních pět vlastních čísel  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = \pi^2$ ,  $\lambda_2 = (2\pi)^2$ ,  $\lambda_3 = (3\pi)^2$  a  $\lambda_4 = (4\pi)^2$ . Vzhledem k tomu, že řešení má tvar  $y(x) = Cu_k(x)$ , určuje konstanta  $C$  amplitudu řešení.



Obrázek 2.1: Diagram řešení pro Neumannovu okrajovou úlohu bez tlumení (2.1) a některá řešení.

Uvažujme Neumannovu okrajovou úlohu

$$\begin{cases} y''(x) + by'(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ y'(0) = y'(1) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

kde  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ . Řešením úlohy (2.6) rozumíme funkci z prostoru  $C^1((0, 1)) \cap C^2(0, 1)$ , která splňuje ve všech bodech  $x \in (0, 1)$  diferenciální rovnici v (2.6) a splňuje okrajové podmínky v (2.6). Neumannova okrajová úloha (2.6) má triviální řešení pro libovolné  $\lambda \in \mathbb{R}$  a  $b > 0$ . Definujme operátor  $L_b^N$

$$\begin{aligned} (L_b^N y)(x) &:= -y''(x) - by'(x), \\ D(L_b^N) &:= \{y \in C^1((0, 1)) \cap C^2(0, 1) : y'(0) = y'(1) = 0\}. \end{aligned}$$

I zde hledáme taková  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pro která má úloha  $L_b^N y = \lambda y$  netriviální řešení.

**Věta 2.2.** *Vlastní čísla operátoru  $L_b^N$  mají tvar  $\lambda_0 = 0$  a  $\lambda_k = (k\pi)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . K nim příslušné vlastní funkce jsou  $u_0 = 1$  a  $u_k = e^{-\frac{1}{2}bx} \sin(k\pi x) + \frac{2k\pi}{b} e^{-\frac{1}{2}bx} \cos(k\pi x)$ .*

*Důkaz.* Obecné řešení rovnice v (2.6) má tvar

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{2}bx - \sqrt{(b/2)^2 - \lambda}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}bx + \sqrt{(b/2)^2 - \lambda}x}, & \lambda < \left(\frac{b}{2}\right)^2, \\ C_1 e^{-\frac{1}{2}bx} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}bx}, & \lambda = \left(\frac{b}{2}\right)^2, \\ C_1 e^{-\frac{1}{2}bx} \sin(\sqrt{\lambda - (b/2)^2}x) + C_2 e^{-\frac{1}{2}bx} \cos(\sqrt{\lambda - (b/2)^2}x), & \lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2, \end{cases}$$

kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Vyšetříme existenci netriviálních řešení.

1. Pro  $\lambda < \left(\frac{b}{2}\right)^2$  dostaneme z podmínek v (2.6) a obecného řešení soustavu rovnic, kterou můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \frac{-b-2\sqrt{(b/2)^2 - \lambda}}{2} & \frac{-b+2\sqrt{(b/2)^2 - \lambda}}{2} \\ \frac{-b-2\sqrt{(b/2)^2 - \lambda}}{2} e^{-\frac{1}{2}b - \sqrt{(b/2)^2 - \lambda}} & \frac{-b-2\sqrt{(b/2)^2 - \lambda}}{2} e^{-\frac{1}{2}b - \sqrt{(b/2)^2 - \lambda}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tato soustava má vždy triviální řešení. Aby měla i netriviální řešení, musí mít výše uvedená soustava více jak jedno řešení, proto matice soustavy musí být singulární. Singularita matice je ekvivalentní nulovému determinantu. Položíme determinant matice soustavy roven nule a úpravou dostaneme rovnici

$$\lambda e^{-\frac{1}{2}b - \sqrt{(b/2)^2 - \lambda}} = \lambda e^{-\frac{1}{2}b + \sqrt{(b/2)^2 - \lambda}}. \quad (2.7)$$

Pokud je  $\lambda = 0$ , je rovnice (2.7) vždy splněna a proto je  $\lambda_0 = 0$  vlastním číslem operátoru  $L_b^N$ . Příslušnou vlastní funkcí k tomuto vlastnímu číslu je  $u_0(x) = 1$ . Pro  $\lambda \neq 0$  rovnici (2.7) vydělíme  $\lambda e^{-\frac{1}{2}b} \neq 0$ . Dostaneme

$$e^{-\sqrt{(b/2)^2 - \lambda}} = e^{\sqrt{(b/2)^2 - \lambda}}.$$

Tato rovnost je splněna pouze pro  $\sqrt{(b/2)^2 - \lambda} = 0$ , tedy pro  $\lambda = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ .

2. Pro  $\lambda = \left(\frac{b}{2}\right)^2$  dostaneme dosazením do podmínek v (2.6) soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}bC_1 + C_2 &= 0 \\ -\frac{1}{2}bC_1 e^{-\frac{1}{2}b} - \frac{1}{2}bC_2 e^{-\frac{1}{2}b} + C_2 e^{-\frac{1}{2}b} &= 0, \end{aligned}$$

která je splnitelná pouze pro  $b = 0$ .

3. Pro  $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$  získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \sqrt{(b/2)^2 - \lambda}C_1 - \frac{b}{2}C_2 &= 0, \\ \left(-\frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}} \sin \sqrt{(b/2)^2 - \lambda} + \sqrt{(b/2)^2 - \lambda} e^{-\frac{b}{2}} \cos \sqrt{(b/2)^2 - \lambda}\right) C_1 \\ + \left(-\frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}} \cos \sqrt{(b/2)^2 - \lambda} - \sqrt{(b/2)^2 - \lambda} e^{-\frac{b}{2}} \sin \sqrt{(b/2)^2 - \lambda}\right) C_2 &= 0. \end{aligned}$$

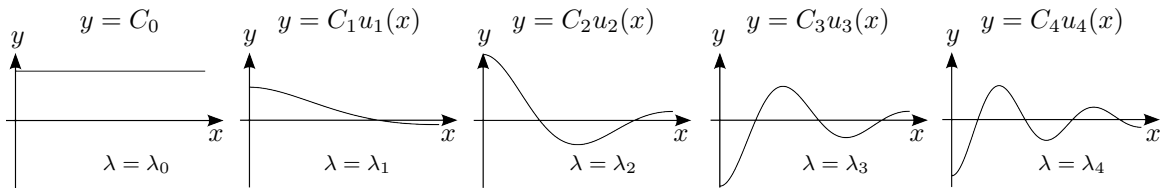
## 2.1. VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ FUNKCE

Stejně jako v předchozích částech důkazu položíme determinant matice soustavy roven nule. Úpravou získáme rovnici

$$\lambda \sin \sqrt{\lambda - (b/2)^2} = 0,$$

kterou splníme, pokud je  $\lambda = (k\pi)^2 + (\frac{b}{2})^2$ , kde  $k \in \mathbb{N}$ . Proto  $\lambda_k = (k\pi)^2 + (\frac{b}{2})^2$  jsou vlastní čísla operátoru  $L_b^N$ . K nim příslušné vlastní funkce jsou  $u_k(x) = e^{-\frac{1}{2}bx} \sin(k\pi x) + \frac{2k\pi}{b} e^{-\frac{1}{2}bx} \cos(k\pi x)$ .

□



Obrázek 2.2: Některá řešení pro Neumannovu úlohu s tlumením (2.6) pro  $b = 4$ .

Na obrázku 2.2 vidíme některá netriviální řešení úlohy (2.6) pro  $b = 4$ . Řešení má tvar  $y(x) = C$  pro  $\lambda_0 = 0$  a  $y(x) = C(e^{-\frac{1}{2}bx} \sin(k\pi x) + \frac{2k\pi}{b} e^{-\frac{1}{2}bx} \cos(k\pi x))$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , pro  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Hodnotu  $\lambda$  pro příslušné řešení dostaneme z  $\lambda_k = (k\pi)^2 + (\frac{b}{2})^2$ .

### 2.1.2 Periodická úloha

Vyšetřujeme periodickou úlohu

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) = y(1), \\ y'(0) = y'(1), \end{cases} \quad (2.8)$$

kde  $\lambda \in \mathbb{R}$  je parametr. Řešením úlohy (2.8) rozumíme funkci z prostoru  $C^1(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2(0, 1)$ , která splňuje ve všech bodech  $x \in (0, 1)$  diferenciální rovnici v (2.8) a splňuje podmínky v (2.8). Periodická okrajová úloha (2.8) má triviální řešení pro libovolné  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Definujme operátor  $L^P$

$$\begin{aligned} (L^P y)(x) &:= -y''(x), \\ D(L^P) &:= \{y \in C^1(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2(0, 1) : y(0) = y(1), y'(0) = y'(1)\}. \end{aligned}$$

**Věta 2.3.** *Vlastní čísla operátoru  $L^P$  mají tvar  $\lambda_k = (2k\pi)^2$  a k nim jsou příslušné dvě vlastní funkce  $u_{k_1} = \cos(2k\pi x)$  a  $u_{k_2} = \sin(2k\pi x)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ .*

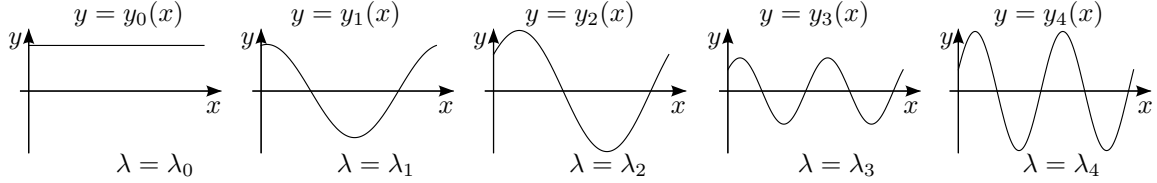
*Důkaz.* Důkaz provedeme analogicky k postupu v důkazu věty 2.1. Pro  $\lambda > 0$  získáme dvě vlastní funkce, tedy násobnost vlastního čísla je dvě. Řešení má tvar lineární kombinace vlastních funkcí, proto volíme dvě libovolné konstanty. □

## 2.1. VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ FUNKCE

Na obrázku 2.3 vidíme ukázky některých řešení úlohy (2.8). Řešení má tvar

$$y_k(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda_k}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda_k}x),$$

kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  a alespoň jedna konstanta  $C_1$  nebo  $C_2$  je nenulová (tedy musí platit  $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ ) a  $\lambda_k = (2k\pi)^2$ .



Obrázek 2.3: Některá řešení periodické úlohy bez tlumení (2.8).

Uvažujme periodickou úlohu

$$\begin{cases} y''(x) + by'(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) = y(1), \\ y'(0) = y'(1), \end{cases} \quad (2.9)$$

kde  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ . Řešením úlohy (2.9) rozumíme spojitě diferencovatelnou funkci na uzavřeném intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  a současně dvakrát spojitě diferencovatelnou na  $(0, 1)$ , tj. funkci z prostoru  $C^1(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2(0, 1)$ , která splňuje rovnici (2.9) pro všechny body  $x \in (0, 1)$  a splňuje podmínky v (2.9). Definujme operátor  $L_b^P$

$$\begin{aligned} (L_b^P y)(x) &:= -y''(x) - by'(x), \\ D(L_b^P) &:= \{y \in C^1(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2(0, 1) : y(0) = y(1), y'(0) = y'(1)\}. \end{aligned}$$

Hledáme taková  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pro která má úloha  $L_b^P y = \lambda y$  pro pevné  $b > 0$  netriviální řešení. Periodická úloha (2.9) má jediné netriviální řešení a tím jsou konstantní funkce.

**Věta 2.4.** *Operátor  $L_b^P$  má pouze jedno vlastní číslo  $\lambda = 0$  a k němu příslušnou vlastní funkci  $u = 1$ .*

*Důkaz.* Stejně jako v důkazech předchozích vět (např. 2.2), i tentokrát důkaz rozdělíme do tří částí.

1. Pro  $\lambda < \left(\frac{b}{2}\right)^2$  dostaneme dosazením z podmínek v (2.9) soustavu rovnic, jejíž matice soustavy má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-\frac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}} & 1 - e^{-\frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}} \\ \frac{-b - 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}{2} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}\right) & \frac{-b - 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}{2} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}\right) \end{bmatrix}.$$

## 2.1. VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ FUNKCE

Pokud předpokládáme, že  $(1 - e^{-\frac{1}{2}b - \sqrt{(b/2)^2 - \lambda}})(1 - e^{-\frac{1}{2}b + \sqrt{(b/2)^2 - \lambda}}) \neq 0$ , potom determinant matice  $\mathbf{A}$  je nenulový. Za podmínky  $(1 - e^{\frac{1}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4\lambda})})(1 - e^{\frac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4\lambda})}) = 0$  je nulovost determinantu zajištěna. Podmínku splníme, pokud  $(1 - e^{-\frac{1}{2}b + \sqrt{(b/2)^2 - \lambda}}) = 1$ , tedy pokud je  $\lambda = 0$ . Proto je  $\lambda = 0$  vlastním číslem operátoru  $L_b^p$ . Vlastní funkcí je  $u(x) = 1$ .

2. Pro  $\lambda = (\frac{b}{2})^2$  dostaneme soustavu dvou rovnic, v níž hledáme takové hodnoty  $b$ , pro které je soustava vždy splněna.

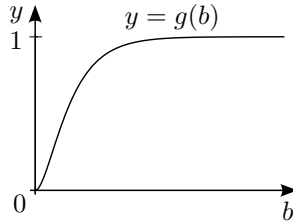
$$\begin{aligned} C_1 - C_1 e^{-\frac{1}{2}b} - C_2 e^{-\frac{1}{2}b} &= 0 \\ -\frac{1}{2}bC_1 + C_2 + \frac{1}{2}bC_1 e^{-\frac{1}{2}b} + \frac{1}{2}bC_2 e^{-\frac{1}{2}b} - C_2 e^{-\frac{1}{2}b} &= 0 \end{aligned}$$

Vyjádřením konstanty  $C_2$  z první rovnice a dosazením do rovnice druhé, dostaneme

$$1 - 2e^{-\frac{1}{2}b} + e^{-b} = 0. \quad (2.10)$$

Vyšetříme funkci

$$g(b) := 1 - 2e^{-\frac{1}{2}b} + e^{-b}. \quad (2.11)$$



Obrázek 2.4: Graf funkce  $g$ .

Pro funkci  $g = g(b)$  (viz obrázek 2.4) platí

$$\lim_{b \rightarrow 0} g(b) = 0, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} g(b) = 1, \quad \frac{dg(b)}{db} = -e^{-b} + e^{-\frac{1}{2}b} \geq 0.$$

Vzhledem k tomu, že derivace funkce  $g$  je nulová pouze pro  $b = 0$  a vzhledem k hodnotám limit, je funkce  $g$  rostoucí na intervalu  $(0, +\infty)$ . Rovnost (2.10) je proto splněna pouze pro  $b = 0$ .

3. Pro  $\lambda > (\frac{b}{2})^2$  dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \left(-e^{-\frac{b}{2}} \sin \sqrt{\lambda - (b/2)^2}\right) C_1 + \left(1 - e^{-\frac{b}{2}} \cos \sqrt{\lambda - (b/2)^2}\right) C_2 &= 0 \\ \left(\sqrt{\lambda - (b/2)^2} \left(1 - e^{-\frac{b}{2}} \cos \sqrt{\lambda - (b/2)^2}\right) + \frac{b}{2} e^{-\frac{b}{2}} \sin \sqrt{\lambda - (b/2)^2}\right) C_1 \\ - \left(\frac{b}{2} + e^{-\frac{b}{2}} \left(\frac{b}{2} \cos \sqrt{\lambda - (b/2)^2} + \sqrt{\lambda - (b/2)^2} \sin \sqrt{\lambda - (b/2)^2}\right)\right) C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Podmínka nulovosti determinantu matice soustavy představuje rovnici

$$1 - 2e^{-\frac{1}{2}b} \cos \sqrt{\lambda - (b/2)^2} + e^{-b} = 0. \quad (2.12)$$

Definujeme funkci  $h(\lambda, b) := 1 - 2e^{-\frac{1}{2}b} \cos \sqrt{\lambda - (b/2)^2} + e^{-b}$ . Ukážeme, že funkce  $h = h(\lambda, b)$  nemá žádný nulový bod pro  $\lambda > (\frac{b}{2})^2$  a  $b > 0$ . Uvažujme libovolné pevně zvolené  $\lambda$ . Tím dostaneme pro pevné  $\lambda$  funkci jedné proměnné, kterou můžeme omezit zdola funkcí  $g = 1 - 2e^{-\frac{1}{2}b} + e^{-b}$ . Funkci  $g$  jsme vyšetřili v předchozím bodu důkazu (2.11). Ukázali jsme, že je kladná pro všechna  $b > 0$ . Protože  $\lambda$  volíme pevné, ale libovolné, je i funkce  $h$  je kladná pro  $\lambda > (\frac{b}{2})^2$  a  $b > 0$ . Tedy, nenašli jsme žádnou hodnotu  $\lambda$ , pro kterou by byla splněna rovnost (2.12). Proto operátor  $L_b^p$  pro  $\lambda > (\frac{b}{2})^2$  nemá žádné vlastní číslo. □

## 2.2 Fučíkovo spektrum

V druhé části této kapitoly prozkoumáme Fučíkovo spektrum.

Uvažujme úlohu

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ y'(0) = y'(1) = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

kde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Ukažme konstrukci řešení úlohy (2.13) v případě, že řešení je na intervalu  $(0, \gamma)$  kladné a na intervalu  $(\gamma, 1)$  záporné pro  $\gamma \in (0, 1)$ . Nejdříve hledíme řešení pro okrajovou úlohu

$$\begin{cases} y_k''(x) + \alpha y_k(x) = 0, & x \in (0, \gamma), \\ y_k(\gamma) = y_k'(0) = 0, \end{cases}$$

tak, aby řešení bylo pouze kladné na  $(0, \gamma)$ . Potom hledíme řešení pro

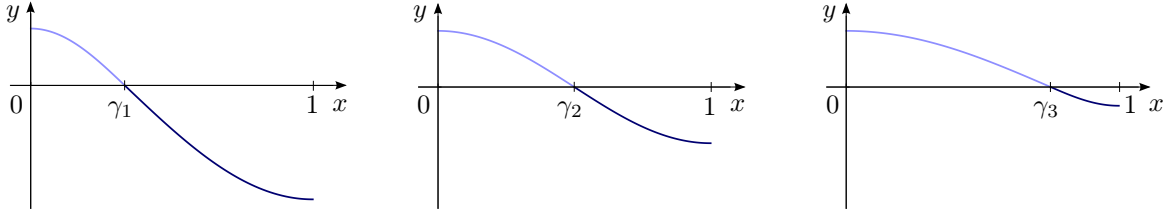
$$\begin{cases} y_z''(x) + \beta y_z(x) = 0, & x \in (\gamma, 1), \\ y_z(\gamma) = y_z'(1) = 0, \end{cases}$$

tak, že řešení je na intervalu  $(\gamma, 1)$  záporné. Dostaneme dvě funkce, které ovšem v bodu  $\gamma$  obecně nemají shodné derivace. Pro kladné i záporné řešení platí  $y_k(\gamma) = y_z(\gamma) = 0$ . Podmínka  $y_k''(\gamma) = y_z''(\gamma)$  je vždy splněna z předpisu diferenciální rovnice  $y''(\gamma) = \alpha y_k(\gamma) = 0$ . Musíme ale splnit i rovnost prvních derivací. Toho docílíme tak, že zvolíme například konstantu pro kladné řešení a tím jednoznačně určíme konstantu pro záporné řešení, protože v bodě  $\gamma$  musí být zaručena shodnost derivací až do řádu dvě. Některá řešení okrajové úlohy (2.13) jsou na obrázku 2.5.

Množina

$$\Sigma(L^N) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : L^N = \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) \text{ má netriviální řešení}\}$$





Obrázek 2.5: Některá řešení úlohy (2.13).

se nazývá Fučíkovo spektrum [3] operátoru  $L^N$ . Dvojici  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , pro kterou má úloha (2.13) netriviální řešení, budeme nazývat Fučíkovým vlastním číslem operátoru  $L^N$ . Pro  $\alpha = \beta$  získáme úlohu nalezení vlastních čísel operátoru  $L^N$ , takže všechna vlastní čísla patří do Fučíkova spektra operátoru  $L^N$ .

Abychom našli Fučíkovo spektrum  $\Sigma(L^N)$ , budeme postupovat následovně. Řešení může vypadat několika způsoby. Buď nemá nulový bod (tj. na celém intervalu funkční hodnoty nezmění znaménko) nebo má konečně popřípadě nekonečně mnoho nulových bodů (tj. znaménko funkčních hodnot se změní konečně krát, popřípadě nekonečně krát). Nejdříve uvažujme, že je řešení na části intervalu nulové. Díky větě 1.2 je řešení procházející daným bodem jednoznačně dáno. Počáteční úloha v bodu, kde řešení přestane být nulové, je splněna pouze triviálním řešením. Proto se nemůže v žádném bodě z nulového řešení stát nenulové. Tedy možnost, že řešení je nulové pouze na části intervalu, nemůže nastat.

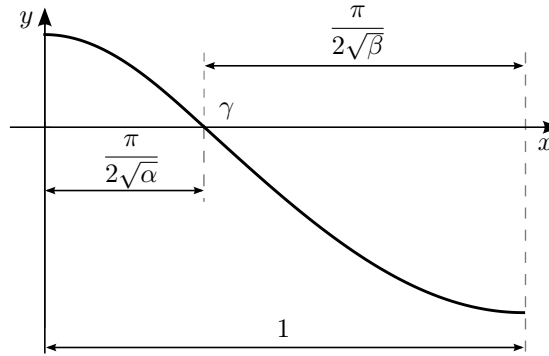
1. Žádný nulový bod: Nejdříve předpokládejme, že řešení je na celém intervalu  $I = (0, 1)$  kladné, tedy splňuje  $y = y^+$ . Protože  $y^-$  se v rovnici vůbec nevyskytne,  $\beta$  volíme libovolně. Úlohu (2.13) tak převedeme na úlohu

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha y(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ y'(0) = y'(1) = 0, \end{cases}$$

pro kterou již známe z předchozího textu hodnotu  $\alpha$ , pro niž má úloha netriviální řešení, konkrétně  $\alpha = (k\pi)^2$ , kde  $k \in \mathbb{N}_0$ . My ale hledáme pouze takové řešení, pro které bude funkce  $y$  na intervalu  $I$  kladná. Kladnost na celém intervalu  $I$  splňuje pouze řešení pro  $\alpha = 0$ . Uvedeným postupem získáme Fučíkova vlastní čísla ve tvaru  $\alpha = 0, \beta \in \mathbb{R}$  libovolně. Úvahu, že hledané řešení je na celém intervalu  $I$  záporné, tedy že splňuje  $y = -y^-$ , provedeme analogicky, čímž dostaneme další Fučíkova vlastní čísla ve tvaru  $(\alpha, 0)$ , kde  $\alpha \in \mathbb{R}$  je libovolné. Můžeme souhrnně napsat, že do Fučíkova spektra operátoru  $L^N$  patří

$$K_0^N := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha\beta = 0\}.$$

2. Právě jeden nulový bod: Nyní budeme uvažovat, že řešení je na části intervalu kladné a na druhé části je záporné, tedy že existuje jeden nulový bod  $\gamma \in I$ . Uvažujme, že na intervalu  $(0, \gamma)$  máme kladné řešení a na intervalu  $(\gamma, 1)$  řešení záporné. Abychom


 Obrázek 2.6: Rozdělení intervalu  $(0, 1)$  na dva podintervaly a jejich délky.

získali řešení úlohy na celém intervalu, musíme je v bodě  $\gamma$  napojit. Vzdálenost bodu  $\gamma$  od počátku můžeme vyjádřit (díky tvaru řešení a nulové derivaci v nule) jako  $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$ . Stejně tak vzdálenost bodu  $\gamma$  od konce intervalu můžeme vyjádřit jako  $\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}$ . Protože délka intervalu je rovna jedné, dostaneme podmínku  $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} = 1$  (viz obrázek 2.6). Dostaneme

$$K_1^{\mathbb{N}} := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} = 1\}$$

. Křivka  $K_1^{\mathbb{N}}$  je Fučíkovou větví operátoru  $L^{\mathbb{N}}$ . Pro popis křivky, která využívá znalosti polohy bodu  $\gamma$ , můžeme také pokračovat následovně. Na intervalu  $(0, \gamma)$  chceme kladné řešení, z toho dostaneme podmínku  $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} = \gamma$ , tedy  $\alpha = \left(\frac{\pi}{2\gamma}\right)^2$ . Nakonec vyjádříme  $\beta = \left(\frac{\pi}{2(1-\gamma)}\right)^2$ . Tím dostaneme Fučíkovou větev s předpisem  $\alpha = \left(\frac{\pi}{2\gamma}\right)^2$ ,  $\beta = \left(\frac{\pi}{2(1-\gamma)}\right)^2$ , kde  $\gamma \in (0, 1)$ . Vzhledem ke konstrukci je zřejmé, že nezáleží na tom, zda budeme uvažovat nejdříve kladné a potom záporné řešení nebo obráceně.

3. Konečně mnoho nulových bodů: Pro více nulových bodů postupujeme analogicky. Protože jednotlivá řešení opět navazujeme, musí být splněna podmínka  $\frac{m\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{m\pi}{2\sqrt{\beta}} = 1$ , kde  $m$  je počet nulových bodů. Tím dostaneme

$$K_m^{\mathbb{N}} := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{m\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{m\pi}{2\sqrt{\beta}} = 1\},$$

kde  $m \in \mathbb{N}$ . Je-li první nulový bod ve vzdálenosti  $\gamma$  od počátku, musí být  $\alpha = \left(\frac{\pi}{2\gamma}\right)^2$  a  $\beta = \left(\frac{m\pi}{2(1-m\gamma)}\right)^2$ .

4. Nekonečně mnoho nulových bodů: Vzdálenost mezi dvěma nulovými body netriviálního řešení je konečná, nenulová. Proto na konečném intervalu může být pouze konečný počet nulových bodů.

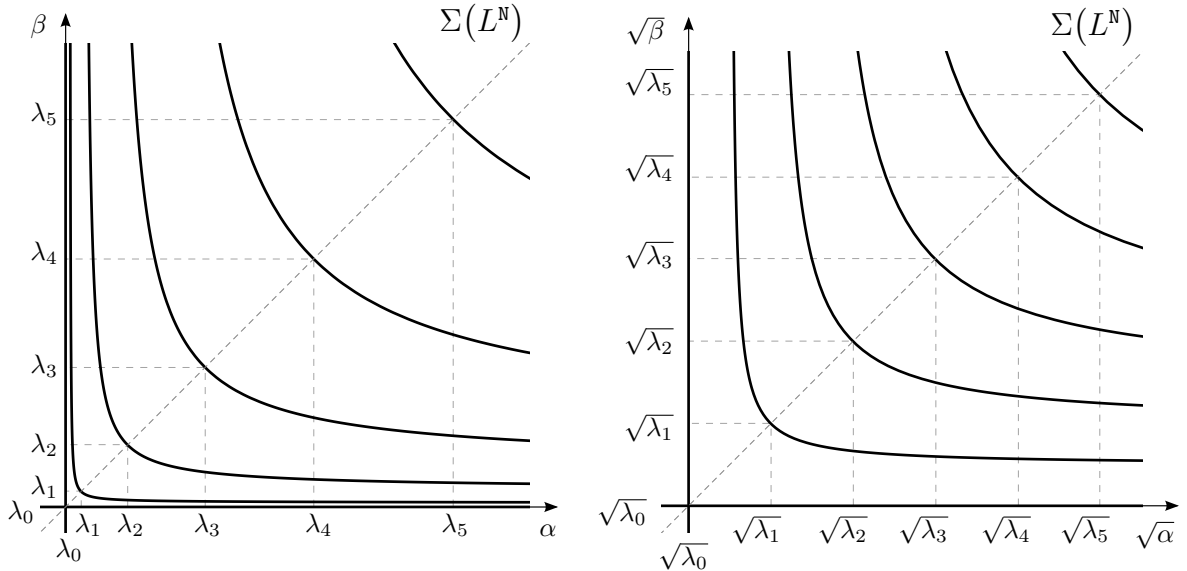
Fučíkovo spektrum operátoru  $L^{\mathbb{N}}$  je na obrázku 2.7.

**Věta 2.5.** *Fučíkovo spektrum operátoru  $L^N$  je dáno jako*

$$\Sigma(L^N) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} K_m^N,$$

kde  $K_0^N = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha\beta = 0\}$ ,  $K_m^N = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{m\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{m\pi}{2\sqrt{\beta}} = 1\}$ .

*Důkaz.* Řešení úlohy (2.13) jsme našli jako navázání řešení na příslušných intervalech, kde řešení nezměnilo znaménko. Na těchto intervalech je díky větě 1.2 řešení jednoznačné. V bodě navázání je nulová hodnota řešení a z tvaru rovnice v (2.13) plyne, že i druhá derivace řešení je v tomto bodě nulová. Volbou derivace v bodě navázání na prvním intervalu jednoznačně určíme řešení i na všech ostatních intervalech. Tím je řešení na celém intervalu jednoznačně dáno. A výše uvedeným postupem je nalezen jeho tvar. □



Obrázek 2.7: Fučíkovo spektrum operátoru  $L^N$ .

Uvažujme

$$\begin{cases} y''(x) + by'(x) + \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ y'(0) = y'(1) = 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

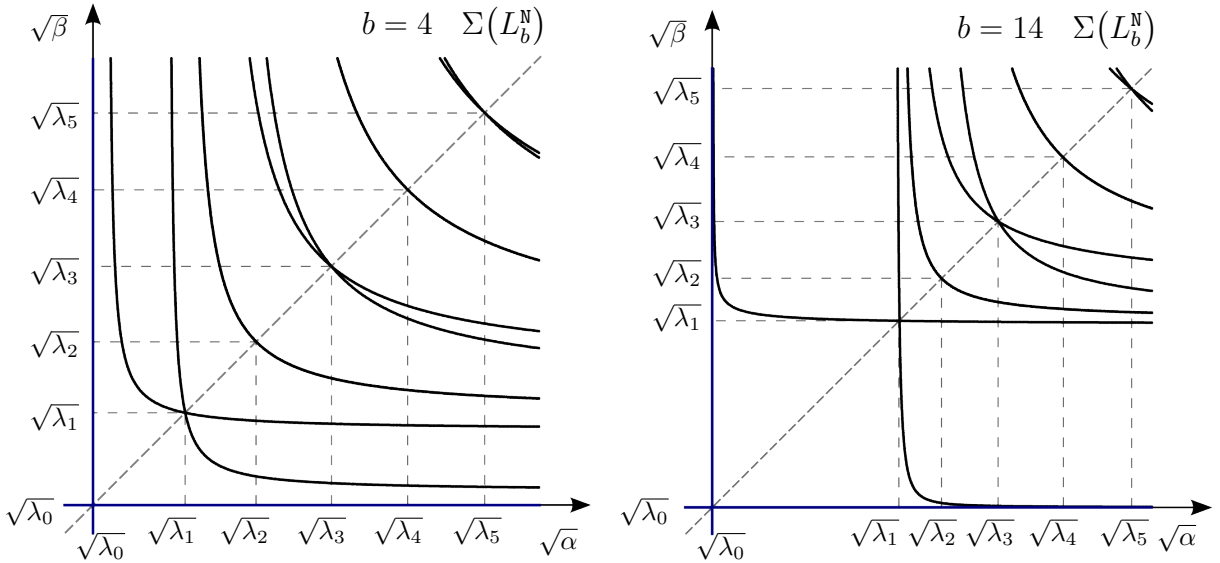
kde  $b > 0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Množina

$$\Sigma(L_b^N) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : L_b^N = \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) \text{ má netriviální řešení}\}$$

se nazývá Fučíkovo spektrum operátoru  $L_b^N$ . Fučíkovo spektrum operátoru  $L_b^N$  sestrojíme numericky. K tomu využijeme tzv. metodu střelby. Jejím principem je převod okrajové úlohy na posloupnost počátečních úloh, které budeme řešit numericky. Převod se provede

## 2.2. FUČÍKOVÉ SPEKTRUM

následovně. Známe jednu počáteční podmínku (nulová derivace) a druhou (počáteční hodnotu) volíme libovolně a kontrolujeme, zda je splněna i druhá okrajová podmínka. Tímto postupem získáme spektrum, které je na obrázku 2.8 (černě). Numericky jsme nezískali větev, která odpovídá konstantnímu řešení, tedy takové dvojice  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , pro které platí  $\alpha\beta = 0$  (na obrázku 2.8 modře). Porovnáme-li Fučíkovo spektrum operátoru  $L^N$  a  $L_b^N$ , tedy bez tlumení a s tlumením, vidíme, že některé větve ve Fučíkovu spektru  $L_b^N$  se oproti Fučíkovu spektru  $L^N$  rozdvojily a navíc se změnou tlumení dochází k posunu.



Obrázek 2.8: Fučíkovo spektrum operátoru  $L_b^N$  s tlumením.

Uvažujme

$$\begin{cases} y''(x) + \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) = y(1), \\ y'(0) = y'(1), \end{cases} \quad (2.15)$$

kde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Množina

$$\Sigma(L^P) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : L^P = \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) \text{ má netriviální řešení}\}$$

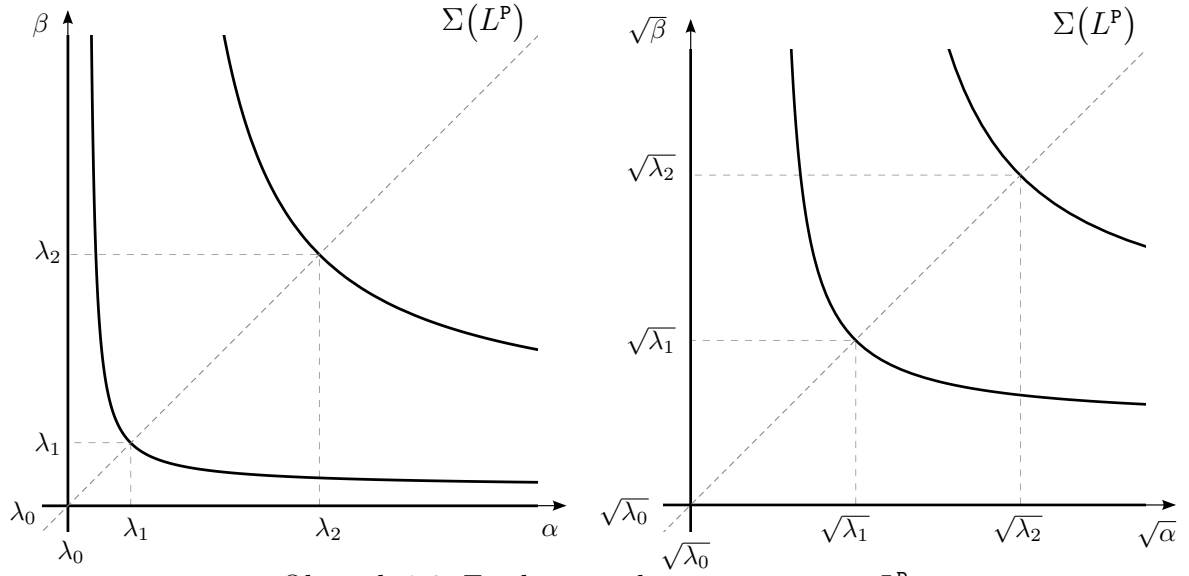
se nazývá Fučíkovo spektrum operátoru  $L^P$ . Vzhledem k tvaru řešení periodické úlohy (2.8) je zřejmé, že řešení periodické úlohy (2.15) dostaneme z řešení Neumannovy úlohy (2.13) výběrem pouze některých vlastních čísel.

**Věta 2.6.** *Fučíkovo spektrum operátoru  $L^P$  je dáno jako*

$$\Sigma(L^P) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} K_m^P,$$

$$\text{kde } K_0^P = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha\beta = 0\}, \quad K_m^P = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{m\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{m\pi}{\sqrt{\beta}} = 1\}.$$

## 2.2. FUČÍKOVÉ SPEKTRUM



Obrázek 2.9: Fučíkovo spektrum operátoru  $L^P$ .

Na obrázku 2.9 je vidět Fučíkovo spektrum operátoru  $L^P$ . Pro porovnání jsou rozsahy na osách voleny stejně, jako rozsahy pro  $\Sigma(L^N)$  (obrázek 2.7) a  $\Sigma(L_b^N)$  (obrázek 2.8).

Uvažujme periodickou okrajovou úlohu

$$\begin{cases} y''(x) + by'(x) + \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) = y(1), \\ y'(0) = y'(1), \end{cases} \quad (2.16)$$

kde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ . Množina

$$\Sigma(L_b^P) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : L_b^P = \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) \text{ má netriviální řešení}\}$$

se nazývá Fučíkovo spektrum operátoru  $L_b^P$ . Fučíkovo spektrum operátoru  $L_b^P$  je tvořeno dvojicemi  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , které splňují  $\alpha\beta = 0$ . Úlohu (2.16) tedy řeší pouze konstantní funkce.

# Kapitola 3

## Tříbodová úloha bez tlumení

V kapitole 2 jsme vyšetřovali dvoubodové okrajové úlohy. V této kapitole a v kapitole 4 se zaměříme na způsob, jakým můžeme realizovat přechod od Neumannovy okrajové úlohy k periodické okrajové úloze.

### 3.1 Vlastní čísla

V této části nás bude zajímat tvar vlastních čísel příslušného operátoru. Necht'  $\eta \in (0, 1)$  je dáno. Vyšetřujeme úlohu

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) = y(\eta), \\ y'(0) = y'(1), \end{cases} \quad (3.1)$$

kde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Řešením úlohy (3.1) rozumíme funkci z prostoru  $C^1(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2(0, 1)$ , která splňuje ve všech bodech  $x \in (0, 1)$  diferenciální rovnici v (3.1) a splňuje podmínky v (3.1). Pro volbu  $\eta = 1$  podmínky v (3.1) představují periodické okrajové podmínky. Periodickou úlohu jsme vyšetřili v kapitole 2. Z podmínky  $y(0) = y(\eta)$  plyne podle Rolleovy věty, že existuje  $\xi \in (0, \eta)$  takové, že  $y'(\xi) = 0$ . Jestliže  $\eta \rightarrow 0^+$ , znamená to, že  $\xi \rightarrow 0^+$  a tudíž ze spojitosti  $y'$  na  $\langle 0, 1 \rangle$  dostáváme

$$0 = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} y'(\xi) = y'(0^+) = y'(0).$$

Tímto limitním přechodem získáme Neumannovy okrajové podmínky. Neumannovu úlohu jsme také vyšetřili v kapitole 2. Je zřejmé, že tříbodovou úlohu (3.1) vždy splňuje triviální řešení.

Definujme operátor  $L^\eta$

$$\begin{aligned} (L^\eta y)(x) &:= -y''(x), \\ D(L^\eta) &:= \{y \in C^1(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2(0, 1) : y(0) = y(\eta), y'(0) = y'(1)\}. \end{aligned}$$

Okrajovou úlohu (3.1) lze zapsat v operátorové podobě

$$L^\eta y = \lambda y. \quad (3.2)$$

Čísla  $\lambda$ , pro která má úloha (3.2) netriviální řešení  $y$ , se nazývají vlastními čísly operátoru  $L^\eta$ .

**Věta 3.1.** *Vlastní čísla operátoru  $L^\eta$  mají tvar*

$$\begin{aligned} {}^1\lambda_k &= \left(\frac{(2k+1)\pi}{\eta-1}\right)^2, k \in \mathbb{N}_0, \\ {}^2\lambda_m &= \left(\frac{2m\pi}{\eta}\right)^2, m \in \mathbb{N}, \\ {}^3\lambda_n &= (2n\pi)^2, n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

*Důkaz.* Abychom získali tvar vlastních čísel operátoru  $L^\eta$ , úlohu na vlastní čísla  $L^\eta y = \lambda y$  převedeme na ekvivalentní úlohu nalezení takových čísel  $\lambda$ , pro která má úloha (3.1) netriviální řešení.

Pro  $\lambda < 0$  má soustava rovnic, kterou dostaneme z podmínek v (3.1), tvar

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\eta} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}\eta}, \\ C_1 \sqrt{-\lambda} - C_2 \sqrt{-\lambda} &= C_1 \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}\eta} - C_2 \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}\eta}. \end{aligned}$$

Protože nás zajímají taková čísla  $\lambda$ , pro která má úloha (3.1) netriviální řešení, musí být determinant soustavy nulový. Po úpravách dojdeme k rovnici  $e^{\sqrt{-\lambda}\eta} = -e^{\sqrt{-\lambda}\eta}$ . Protože  $\sqrt{-\lambda}\eta > 0$  a  $\sqrt{-\lambda} > 0$ , nemá rovnice  $e^{\sqrt{-\lambda}\eta} = -e^{\sqrt{-\lambda}\eta}$  žádné nenulové řešení. Proto má tříbodová úloha pro  $\lambda < 0$  pouze triviální řešení a operátor  $L^\eta$  nemá žádné vlastní číslo menší než nula.

Pro  $\lambda = 0$  je podmínka  $y'(0) = y'(\eta)$  splněna automaticky, neboť  $y' = C_2$ . Z podmínky  $y(0) = y(\eta)$  dostaneme rovnici  $C_1 = C_1 + C_2\eta$ , z které plyne, že konstanta  $C_2$  je nulová a konstantu  $C_1$  volíme libovolně. Řešením jsou libovolné konstantní funkce a číslo  $\lambda = 0$  je vlastním číslem operátoru  $L^\eta$ .

Pro  $\lambda > 0$  najdeme více vlastních čísel. Z podmínek v (3.1) dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} C_1 &= C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\eta) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\eta), \\ C_2 \sqrt{\lambda} &= -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

Determinant matice soustavy položíme roven nule a tím získáme rovnici

$$(1 - \cos(\sqrt{\lambda}\eta))(1 - \cos \sqrt{\lambda}) + \sin(\sqrt{\lambda}\eta) \sin \sqrt{\lambda} = 0. \quad (3.3)$$

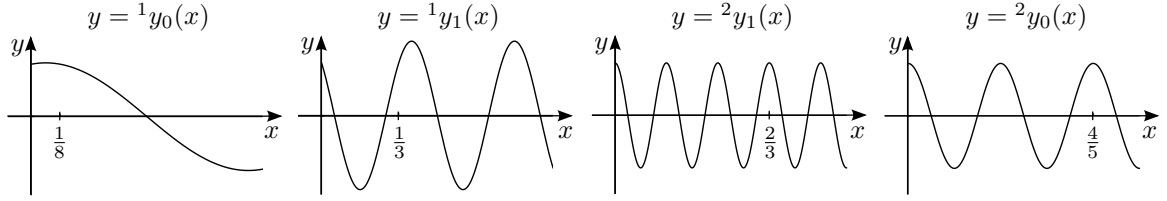
Předpokládejme, že  $1 - \cos(\sqrt{\lambda}\eta) \neq 0$  a  $\sin \sqrt{\lambda} \neq 0$ . Vydělením rovnice (3.3) těmito výrazy získáme

$$\cotg\left(\frac{\sqrt{\lambda}\eta}{2}\right) = -\tg\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right).$$

Využitím součtových goniometrických vzorců dostaneme rovnici  $\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\eta}{2} - \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) = 0$ , kterou splníme, pokud

$$\lambda = \left(\frac{(2k+1)\pi}{\eta-1}\right)^2, \quad (3.4)$$

### 3.1. VLASTNÍ ČÍSLA



Obrázek 3.1: Některá řešení pro  $\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{\eta-1}\right)^2$ .

kde  $k \in \mathbb{N}_0$ . Čísla  ${}^1\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{\eta-1}\right)^2$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , jsou vlastními čísly operátoru  $L^\eta$ .

Pro  $\lambda = \left(\frac{(2k+1)\pi}{\eta-1}\right)^2$  máme řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} {}^1y_k(x) &= C \cotg\left(\frac{\sqrt{\lambda}\eta}{2}\right) \cos(\sqrt{\lambda}x) + C \sin(\sqrt{\lambda}x), \\ {}^2y_k(x) &= C \cos(\sqrt{\lambda}x) + C \tg\left(\frac{\sqrt{\lambda}\eta}{2}\right) \sin(\sqrt{\lambda}x), \end{aligned}$$

kde  $C \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Pro každé  $\lambda = \left(\frac{(2k+1)\pi}{\eta-1}\right)^2$  máme alespoň jedno z výše uvedených řešení. Na obrázku 3.1 vidíme některá netriviální řešení úlohy (3.1) pro vlastní číslo  ${}^1\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{\eta-1}\right)^2$  pro hodnoty  $\eta = \frac{1}{8}$ ,  $\eta = \frac{1}{3}$ ,  $\eta = \frac{2}{3}$ ,  $\eta = \frac{4}{5}$ .

Celý postup jsme provedli za předpokladu, že  $\cos(\sqrt{\lambda}\eta) \neq 1$  a  $\sin \sqrt{\lambda} \neq 0$ . Uvažujeme-li  $\cos(\sqrt{\lambda}\eta) = 1$ , tedy  $\lambda = \left(\frac{2m\pi}{\eta}\right)^2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , rovnici (3.3) splníme, protože

$$\sin(\sqrt{\lambda}\eta) = \sin\left(\frac{2m\pi}{\eta}\eta\right) = 0.$$

Tedy čísla  ${}^2\lambda_m = \left(\frac{2m\pi}{\eta}\right)^2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , jsou vlastními čísly operátoru  $L^\eta$ .

Pro  $\lambda = \left(\frac{2m\pi}{\eta}\right)^2$  je podmínka  $y(0) = y(\eta)$  vždy splněna a z podmínky  $y(0) = y(\eta)$  dostaneme řešení

$$\begin{aligned} {}^3y_m(x) &= -C \cotg\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) \sin(\sqrt{\lambda}x) + C \cos(\sqrt{\lambda}x), \\ {}^4y_m(x) &= C \sin(\sqrt{\lambda}x) - C \tg\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) \cos(\sqrt{\lambda}x), \end{aligned}$$

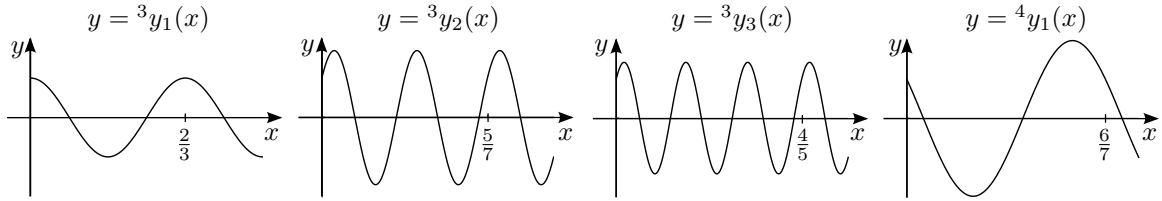
kde  $C \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Pro každé  $\lambda = \left(\frac{2m\pi}{\eta}\right)^2$  máme alespoň jedno z výše uvedených řešení. Na obrázku 3.2 vidíme některá netriviální řešení úlohy (3.1) pro  ${}^2\lambda_m = \left(\frac{2m\pi}{\eta}\right)^2$  pro hodnoty  $\eta = \frac{2}{3}$ ,  $\eta = \frac{5}{7}$ ,  $\eta = \frac{4}{5}$ ,  $\eta = \frac{6}{7}$ .

Uvažujeme-li  $\sin \sqrt{\lambda} = 0$ , tedy  $\lambda = (n\pi)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , rovnici (3.3) nesplníme vždy, protože

$$1 - \cos(\sqrt{\lambda}) = 1 - \cos(n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ -2 & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$



### 3.1. VLASTNÍ ČÍSLA

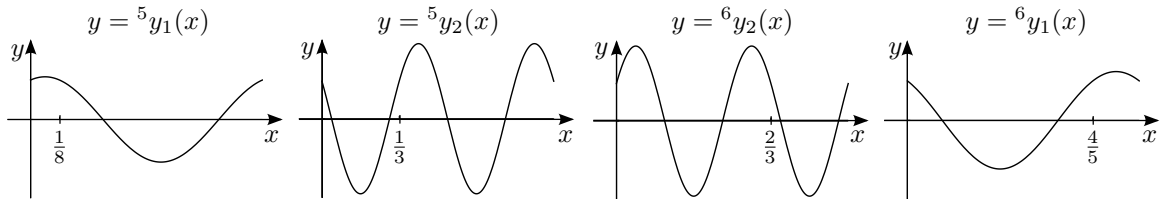


Obrázek 3.2: Některá řešení pro  $\lambda_m = \left(\frac{2m\pi}{\eta}\right)^2$ .

Proto musí mít vlastní čísla operátoru  $L^\eta$  tvar  ${}^3\lambda_n = (2n\pi)^2, n \in \mathbb{N}$ . Pro  $\lambda = (2n\pi)^2$  je podmínka  $y'(0) = y'(1)$  je vždy splněna a z podmínky  $y(0) = y(\eta)$  dostaneme řešení

$$\begin{aligned} {}^5y_n(x) &= C \operatorname{cotg}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\eta}{2}\right) \cos(\sqrt{\lambda}x) + C \sin(\sqrt{\lambda}x), \\ {}^6y_n(x) &= C \cos(\sqrt{\lambda}x) + C \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{\lambda}\eta}{2}\right) \sin(\sqrt{\lambda}x), \end{aligned}$$

kde  $C \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ . Pro každé  $\lambda = (2n\pi)^2$  máme alespoň jedno z výše uvedených řešení. Na obrázku 3.3 vidíme některá netriviální řešení úlohy (3.1) pro  ${}^2\lambda_n = (2n\pi)^2$  pro hodnoty  $\eta = \frac{1}{8}, \eta = \frac{1}{3}, \eta = \frac{2}{3}, \eta = \frac{4}{5}$ .



Obrázek 3.3: Některá řešení pro  $\lambda_n = (2n\pi)^2$ .

Vycházeli jsme z rovnice (3.3), kterou jsme vydělili výrazy  $1 - \cos(\sqrt{\lambda}\eta)$  a  $\sin(\sqrt{\lambda})$ . Můžeme postupovat i jinak. Rovnici (3.3) vydělíme výrazy  $1 - \cos(\sqrt{\lambda}) \neq 0$  a  $\sin(\sqrt{\lambda}\eta) \neq 0$ . Podmínka  $\cos(\sqrt{\lambda}) = 1$  je splněna pro čísla  $\lambda = (2n\pi)^2, n \in \mathbb{N}$ , u kterých jsme již určili, že se jedná o vlastní čísla operátoru  $L^\eta$ . Stejně tak čísla  $\lambda = \frac{2m\pi}{\eta}, m \in \mathbb{N}$ , která dostaneme z podmínky  $\sin(\sqrt{\lambda}\eta) = 0$ , jsou vlastními čísly operátoru  $L^\eta$ .

Výše uvedeným postupem jsme našli všechna vlastní čísla operátoru  $L^\eta$ . □

Najdeme hodnoty, pro které vlastní čísla  ${}^1\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{\eta-1}\right)^2$  a  ${}^2\lambda_m = \left(\frac{2m\pi}{\eta}\right)^2$  splynou, tedy

$$\left(\frac{(2k+1)\pi}{\eta-1}\right)^2 = \left(\frac{2m\pi}{\eta}\right)^2. \quad (3.5)$$

Rovnici (3.5) splníme pro  $\eta = \frac{2m}{-1-2k-2m}$  a pro  $\eta = \frac{2m}{1+2k-2m}$ . Příslušná řešení pro  ${}^1\lambda_k = {}^2\lambda_m$  jsou  ${}^2y, {}^3y$ .

### 3.1. VLASTNÍ ČÍSLA

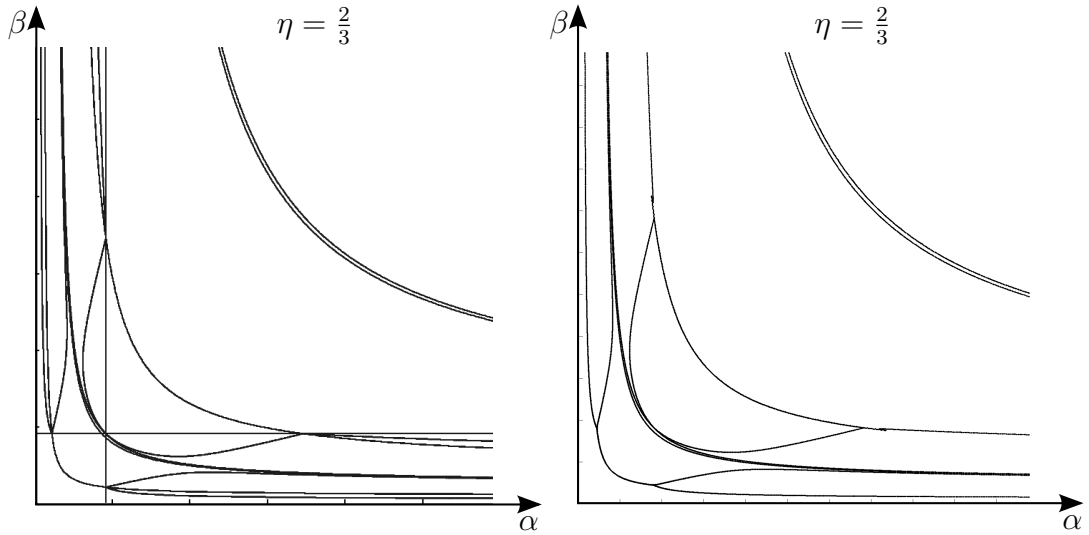
Stejně tak hledáme hodnoty, pro které splynou vlastní čísla  ${}^1\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{\eta-1}\right)^2$  a  ${}^3\lambda_n = (2n\pi)^2$ , tedy

$$\left(\frac{(2k+1)\pi}{\eta-1}\right)^2 = (2n\pi)^2. \quad (3.6)$$

Rovnici (3.6) splníme pro  $\eta = \frac{-1-2k-2n}{2n}$  a pro  $\eta = \frac{1+2k-2n}{2n}$ . Příslušná řešení pro  ${}^1\lambda_k = {}^3\lambda_n$  jsou  ${}^2y = {}^6y, {}^5y$ .

Totéž provedeme pro  ${}^2\lambda_m = \left(\frac{2m\pi}{\eta}\right)^2$  a  ${}^3\lambda_n = (2n\pi)^2$ . Vlastní čísla splynou, pokud  $\eta = \frac{m}{l}$ . Příslušná řešení pro  ${}^2\lambda_m = {}^3\lambda_n$  jsou  ${}^4y, {}^6y$ .

Fučíkovo spektrum operátoru  $L^\eta$  a jeho detailní popis včetně analytického popisu můžeme najít v článku [6]. Na obrázku 3.4 vidíme Fučíkovo spektrum operátoru  $L^\eta$  pro  $\eta = \frac{2}{3}$ . Vlevo je sestrojeno podle analytického předpisu z článku [6] a vpravo je získané spektrum sestrojeno numericky metodou střelby.



Obrázek 3.4: Fučíkovo spektrum operátoru  $L^\eta$ . Vlevo z analytického předpisu, vpravo numericky.

# Kapitola 4

## Třibodová úloha s tlumením

V této kapitole se budeme věnovat třibodové úloze s tlumením. Třibodová úloha s tlumením je dána stejně jako v kapitole 3, tedy tvoří přechod mezi Neumannovou okrajovou úlohou a periodickou okrajovou úlohou. V této kapitole provedeme několik numerických experimentů, které nám pomohou odpovědět na otázky ohledně chování třibodové úlohy s tlumením.

Nechť  $\eta \in (0, 1)$  je dáno. Vyšetřujme úlohu

$$\begin{cases} y''(x) + by'(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) = y(\eta), \\ y'(0) = y'(1), \end{cases} \quad (4.1)$$

kde  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ . Řešením úlohy (4.1) rozumíme funkci z prostoru  $C^1(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2(0, 1)$ , která splňuje ve všech bodech  $x \in (0, 1)$  diferenciální rovnici v (4.1) a splňuje podmínky v (4.1). Stejně, jako v úloze bez tlumení (3.1), i úloha s tlumením se pro  $\eta = 1$  stane periodickou okrajovou úlohou a pro  $\eta \rightarrow 0^+$  se stane Neumannovu okrajovou úlohou. Protože jsme obě úlohy vyšetřovali v kapitole 2, budeme se dále zabývat úlohou (4.1) pro  $\eta \in (0, 1)$ . Třibodová úloha (4.1) má vždy triviální řešení.

Uvažujme operátor

$$\begin{aligned} (L_b^\eta y)(x) &:= -y''(x) - by'(x), \\ D(L_b^\eta) &:= \{y \in C^1(\langle 0, 1 \rangle) \cap C^2(0, 1) : y(0) = y(\eta), y'(0) = y'(1)\}. \end{aligned}$$

Úloha  $L_b^\eta y = \lambda y$  je úlohou nalezení vlastních čísel operátoru  $L_b^\eta$ , tedy takových čísel  $\lambda$ , pro která má úloha (4.1) netriviální řešení.

### 4.1 Třibodová úloha pro $\lambda \leq \left(\frac{b}{2}\right)^2$

V první části se budeme věnovat úloze (4.1) pro  $\lambda \leq \left(\frac{b}{2}\right)^2$ . Analyticky odvodíme, že operátor  $L_b^\eta$  má pro  $\lambda \leq \left(\frac{b}{2}\right)^2$  pouze jediné vlastní číslo.

#### 4.1. TŘÍBODOVÁ ÚLOHA PRO $\lambda \leq \left(\frac{b}{2}\right)^2$

---

**Věta 4.1.** Operátor  $L_b^\eta$  má pro  $\lambda \leq \left(\frac{b}{2}\right)^2$  vlastní číslo  $\lambda = 0$ .

*Důkaz.* Nejdříve odvodíme, co se děje v případě  $\lambda < \left(\frac{b}{2}\right)^2$  a potom v případě  $\lambda = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ .

1. Pro  $\lambda < \left(\frac{b}{2}\right)^2$  postupujeme podobně jako v důkazu věty (2.2). Z podmínek v (4.1) dostaneme soustavu rovnic s maticí soustavy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-\frac{1}{2}\eta b - \eta\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}} & 1 - e^{-\frac{1}{2}\eta b + \eta\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}} \\ \frac{-b - 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}{2} (1 - e^{-\frac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}) & \frac{-b + 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}{2} (1 - e^{-\frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}) \end{bmatrix}.$$

Determinant matice soustavy  $\mathbf{A}$  položíme roven nule a dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} & (1 - e^{-\frac{1}{2}\eta b - \eta\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}) \frac{-b + 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}{2} (1 - e^{-\frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}) \\ & - (1 - e^{-\frac{1}{2}\eta b + \eta\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}) \frac{-b - 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}{2} (1 - e^{-\frac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}) = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Protože uvažujeme  $\lambda < \left(\frac{b}{2}\right)^2$ , musí být  $(-b - 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}) \neq 0$ . Z toho plyne, že i  $1 - e^{-\frac{1}{2}\eta b - \eta\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}} \neq 0$  a  $1 - e^{-\frac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}} \neq 0$  a my můžeme těmito výrazy rovnici (4.2) vydělit. Tím získáme

$$\frac{1 - e^{-\frac{1}{2}\eta b + \eta\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}\eta b - \eta\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}} \frac{-b - 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}{2} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}} \frac{-b + 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}{2}. \quad (4.3)$$

Vidíme, že je-li  $\lambda = 0$ , rovnice (4.3) je splněna pro všechny hodnoty  $\eta$  i  $b$ . Řešení má pro  $\lambda = 0$  tvar libovolných konstantních funkcí. Číslo  $\lambda = 0$  je vlastním číslem operátoru  $L_b^\eta$  a funkce  $u(x) = 1$  je vlastní funkcí příslušnou k tomuto vlastnímu číslu.

Dále ukážeme, že rovnice (4.3) je splněna pouze pro  $\lambda = 0$ . Pro  $\lambda \in (-\infty, 0)$  nemůže být rovnice (4.3) splněna, protože platí

$$\underbrace{\frac{1 - e^{-\frac{1}{2}\eta b + \eta\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}\eta b - \eta\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}}_{<0}} \underbrace{\frac{-b - 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}{2}}_{<0} = \underbrace{\frac{1 - e^{-\frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}}_{<0}} \underbrace{\frac{-b + 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}{2}}_{>0},$$

tedy jedna strana rovnice je vždy kladná a druhá je vždy záporná. Pro  $\lambda \in (0, \left(\frac{b}{2}\right)^2)$  jsou obě strany rovnice (4.3) záporné, ale protože platí

$$\frac{1 - e^{-\frac{1}{2}\eta b + \eta\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}\eta b - \eta\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}} \frac{-b - 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}{2} < \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}b + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}}{1 - e^{-\frac{1}{2}b - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}} \frac{-b + 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \lambda}}{2},$$

## 4.2. TŘÍBODOVÁ ÚLOHA PRO $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$

tedy jedna strana rovnice je větší než ta druhá, nemůže opět být rovnice (4.3) splněna pro žádné  $b$  a  $\eta$ . Rovnice (4.3) tedy nemůže být splněna pro žádné jiné  $\lambda \leq \left(\frac{b}{2}\right)^2$  než  $\lambda = 0$ .

2. Pro  $\lambda = \left(\frac{b}{2}\right)^2$  postupujeme následovně. Z první podmínky  $y(0) = y(\eta)$  tvaru

$$C_1 = C_1 e^{-\frac{1}{2}b\eta} + C_2 e^{-\frac{1}{2}b\eta}$$

vyjádříme konstantu  $C_2$

$$C_2 = C_1 \frac{1}{\eta} (-1 + e^{\frac{1}{2}b\eta}).$$

Dosadíme-li vyjádřenou konstantu  $C_2$  do druhé podmínky  $y'(0) = y'(\eta)$  a po zjednodušení dostaneme rovnost

$$-4C_1 \frac{1}{\eta} \sinh\left(\frac{1}{4}b\eta\right)^2 = 0,$$

kteřou splníme pouze tehdy, pokud bude konstanta  $C_1$  nulová. Tím musí být ale nulová i konstanta  $C_2$  a získáme triviální řešení. Tedy, pro  $\lambda = \left(\frac{b}{2}\right)^2$  má úloha (4.1) pouze triviální řešení a číslo  $\lambda = \left(\frac{b}{2}\right)^2$  není vlastním číslem operátoru  $L_b^\eta$ .

□

## 4.2 Tříbodová úloha pro $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Z důvodu přehlednosti zavedme pro  $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$  novou proměnnou  $\mu = \sqrt{\lambda - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ , tedy  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . Řešení rovnice v (4.1) má potom tvar

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}bx} \sin(\mu x) + C_2 e^{-\frac{1}{2}bx} \cos(\mu x),$$

kde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . Vyjádřením podmínek v (4.1) dostaneme soustavu rovnic, jejíž matice má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -e^{-\frac{b\eta}{2}} \sin(\mu\eta) & 1 - e^{-\frac{b\eta}{2}} \cos(\mu\eta) \\ \mu + \frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}} \sin(\mu) - \mu e^{-\frac{b}{2}} \cos(\mu) & -\frac{b}{2} + \frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}} \cos(\mu) + \mu e^{-\frac{b}{2}} \sin(\mu) \end{bmatrix}.$$

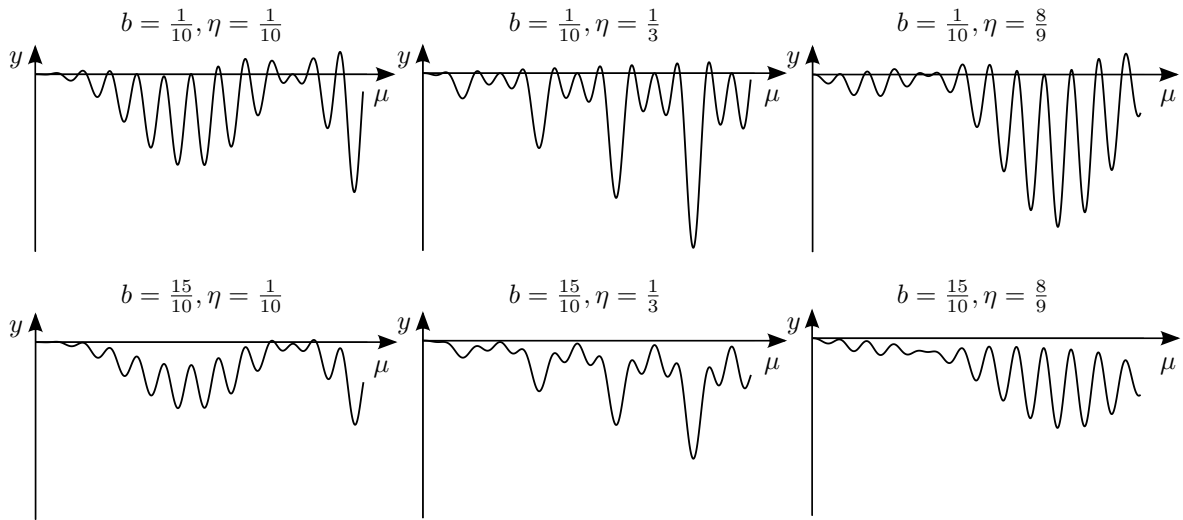
Protože hledáme netriviální řešení, položíme determinant matice soustavy  $\mathbf{A}$  roven nule. Tím získáme spojitou funkci  $\phi = \phi(\mu, b, \eta)$

$$\begin{aligned} \phi(\mu, b, \eta) &= \frac{b}{2}e^{-\frac{b\eta}{2}} \sin(\mu\eta) - \frac{b}{2}e^{-\frac{b\eta}{2}} e^{-\frac{b}{2}} \sin(\mu\eta) \cos(\mu) - e^{-\frac{b\eta}{2}} e^{-\frac{b}{2}} \mu \sin(\mu) \sin(\mu\eta) - \frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}} \sin(\mu) \\ &- \mu + e^{-\frac{b}{2}} \mu \cos(\mu) + e^{-\frac{b\eta}{2}} \mu \cos(\mu\eta) + \frac{b}{2}e^{-\frac{b\eta}{2}} e^{-\frac{b}{2}} \sin(\mu) \cos(\mu\eta) - e^{-\frac{b\eta}{2}} e^{-\frac{b}{2}} \mu \cos(\mu) \cos(\mu\eta). \end{aligned} \quad (4.4)$$

## 4.2. TŘÍBODOVÁ ÚLOHA PRO $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Nejdříve jsme úlohu nalezení vlastních čísel operátoru  $L_b^\eta$  převedli na ekvivalentní úlohu nalezení takových hodnot  $\lambda$ , pro které má úloha (4.1) netriviální řešení. Potom jsme pro zjednodušení zavedli proměnnou  $\mu$  a nakonec jsme celý problém převedli na hledání nulových bodů funkce  $\phi$ . Nulové body funkce  $\phi$  (pro pevné hodnoty  $b, \eta$ ) totiž určují vlastní čísla  $\lambda = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \mu^2$  operátoru  $L_b^\eta$ , kde  $\mu$  představují nulové body funkce  $\phi$ .

Vzhledem ke složitosti funkce  $\phi$  nejsme schopni pro pevně dané  $b, \eta$  najít analytický předpis pro nulové body funkce  $\phi$ , proto nemůžeme použít podobné postupy jako v kapitolách 2 a 3, abychom odpověděli na otázky, co se v případě tříbodové úlohy s tlumením děje s vlastními čísly operátoru  $L_b^\eta$ .



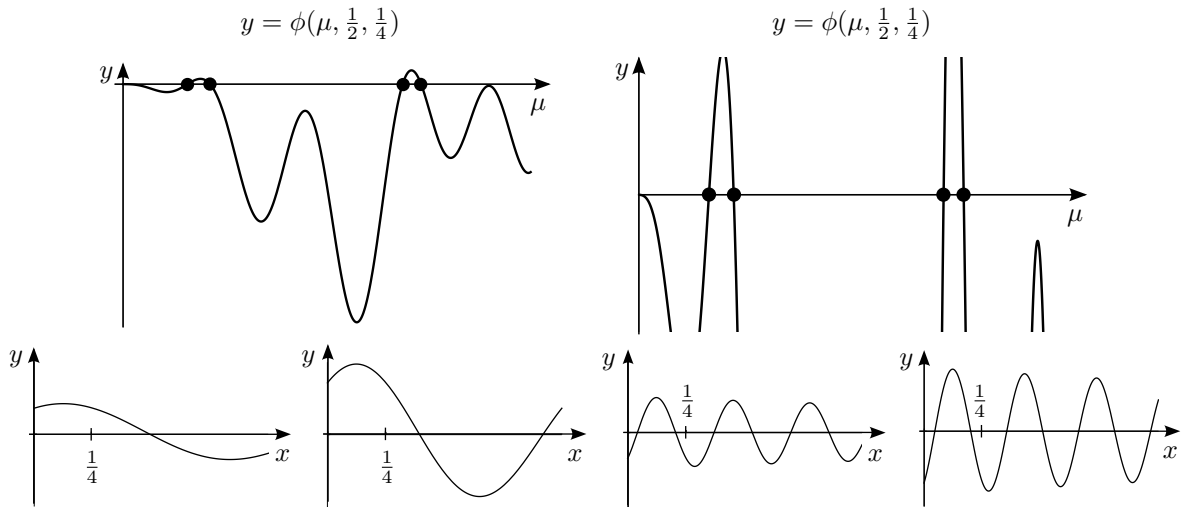
Obrázek 4.1: Grafy funkce  $y = \phi(\mu, b, \eta)$  pro pevně zvolené hodnoty  $b, \eta$ .

Na obrázku 4.1 je několik ukávek grafů funkce  $\phi$  pro pevně zvolené  $b, \eta$ . Funkce se chová pro různé hodnoty  $b, \eta$  velmi odlišně a tlumení má na nulové body velký vliv. Současně ale můžeme odhadovat, že nulové body pravděpodobně existují, tedy pro tyto hodnoty  $b, \eta$  zřejmě existuje netriviální řešení a operátor  $L_b^\eta$  pravděpodobně má vlastní čísla i pro  $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$ . Pokud se dále v textu budeme zmiňovat o vlastních číslech, vždy máme na mysli vlastní čísla operátoru  $L_b^\eta$ . Na obrázku 4.2 je vlevo graf funkce  $\phi$  pro pevnou volbu  $\eta = \frac{1}{4}$ ,  $b = \frac{1}{2}$ , vpravo je detail grafu funkce  $\phi$  a dole jsou některá netriviální řešení, která odpovídají zvýrazněným nulovým bodům funkce  $\phi$ , tedy po přepočtu vlastními čísly operátoru  $L_b^\eta$ .

### 4.2.1 Vlastní čísla

V této části budeme hledat odpověď na otázku, jestli najdeme netriviální řešení pro každou volbu  $b > 0$  a  $\eta \in (0, 1)$ .

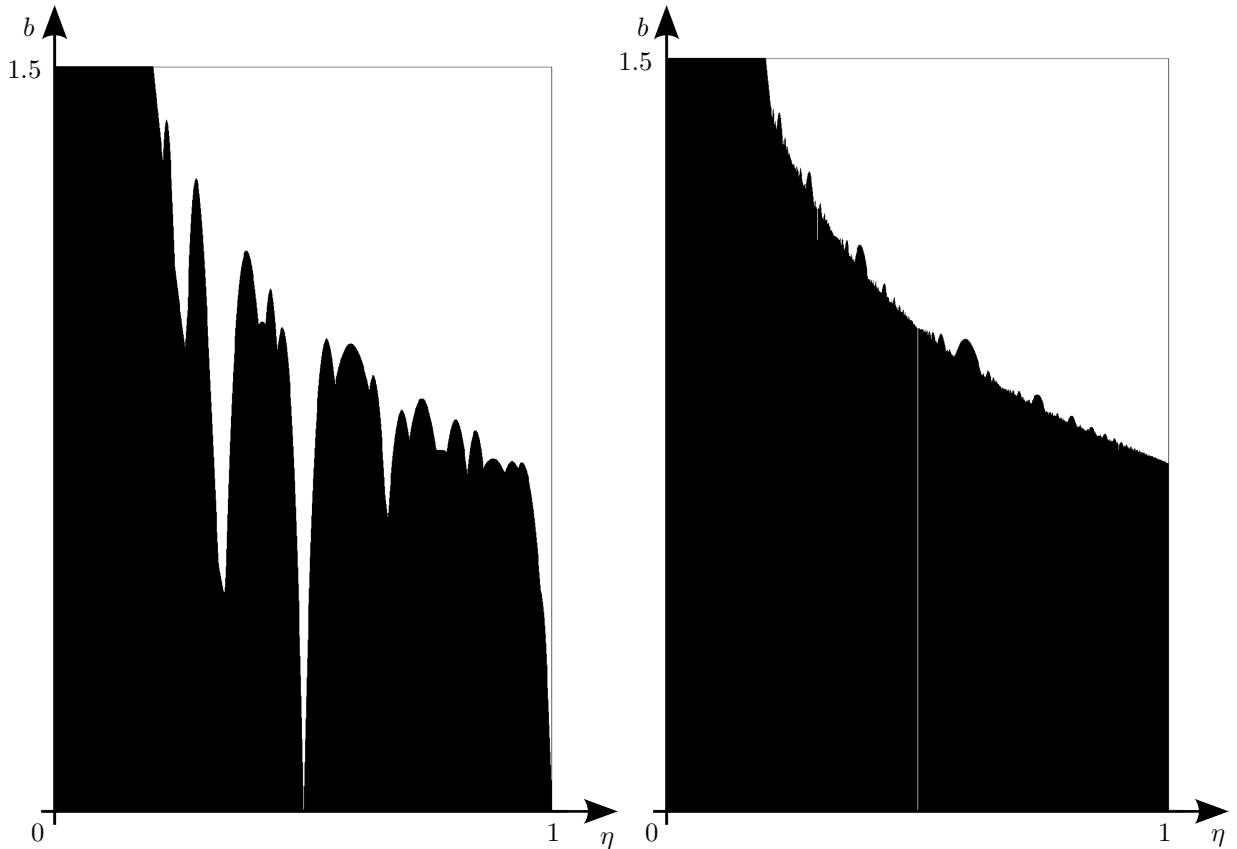
## 4.2. TŘÍBODOVÁ ÚLOHA PRO $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$



Obrázek 4.2: Graf funkce  $\phi$  pro  $\eta = \frac{1}{4}$ ,  $b = \frac{1}{2}$  a některá netriviální řešení úlohy (4.1).

### První numerický experiment

V prvním numerickém experimentu vyjdeme z analytického předpisu (4.4) funkce  $\phi$ . Funkce  $\phi$  je funkcí tří proměnných, ale pro výpočty a odvození bude nejlepší uvažovat vždy pevně  $b, \eta$  a tím využít funkci v jejím zúžení jako funkci jedné proměnné  $\mu$ . Funkce  $\phi$  je spojitá, umožňuje nám tedy velmi dobře hledat nulové body numericky, protože mezi dvěma body s odlišnými znaménky funkčních hodnot se musí nacházet nulový bod. Numerický experiment provedeme následovně. Postupně volíme body  $(\eta, b)$  a pro tuto dvojici numericky hledáme první nulový bod funkce  $\phi$ . Pokud jej najdeme, v diagramu bod o souřadnicích  $(\eta, b)$  obarvíme černě. Nulový bod hledáme pro hodnoty  $\mu^2 \in (0, 1000)$ . Pokud ani do hodnoty  $\mu^2 = 1000$  nulový bod nenajdeme, bod necháme bílý. Současně ověříme, jak moc získané netriviální řešení splňuje úlohu (4.1) a zkontrolujeme, zda je nalezený nulový bod (po přepočtu do proměnné  $\lambda$ ) dostatečně blízký vlastnímu číslu. Diagram prvního numerického experimentu je na obrázku 4.3 vlevo. Na diagramu je možné pozorovat „propady“ do černé oblasti. Pro porovnání provedeme tentýž numerický experiment, ale s mnohem větším rozsahem, konkrétně s rozsahem  $\mu^2 \in (0, 10^6)$ . Výsledný diagram je na obrázku 4.3 vpravo. Vidíme, že většina „propadů“ do černé oblasti zmizela, ale například v bodě  $\eta = \frac{1}{2}$  stále „propad“ zůstává. Na obou diagramech vidíme velkou bílou oblast vpravo, kde jsme nebyli schopni najít do námi zvolené maximální hodnoty  $\mu$  žádné řešení. Oba diagramy můžeme globálně popsat následovně: Čím více se blížíme Neumannově okrajové úloze (tedy  $\eta \rightarrow 0^+$ ), tím vyšší je maximální tlumení, pro které ještě existuje netriviální řešení. Naopak, čím blíže jsme periodické okrajové úloze ( $\eta \rightarrow 1^-$ ), tím menší je maximální tlumení, pro které ještě najdeme netriviální řešení. Navíc podle diagramů 4.3 pravděpodobně existuje oblast, kde žádné netriviální řešení nenajdeme a zajímavý je bod  $\eta = \frac{1}{2}$ .



Obrázek 4.3: Diagramy existence netriviálních řešení.

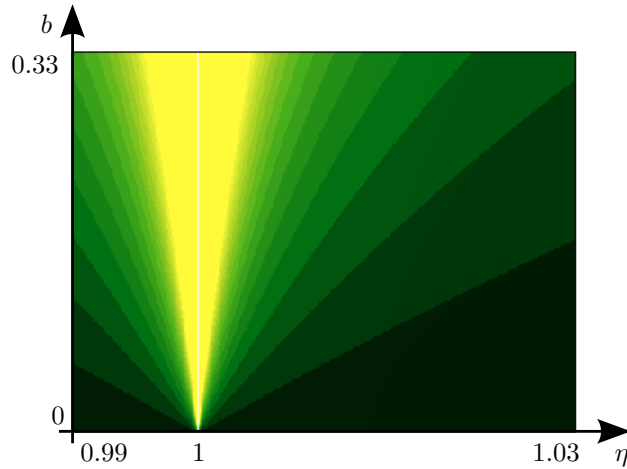
### Druhý numerický experiment

V prvním numerickém experimentu jsme získali určitou představu o tom, co se děje s vlastními čísly při přechodu mezi Neumannovou a periodickou okrajovou úlohou. Kombinovali jsme zde analytický a numerický přístup. Analyticky jsme odvodili funkci  $\phi$  a numericky jsme získali nulové body této funkce. Tentokrát k úloze přistoupíme jinak. Netriviální řešení budeme hledat numerickou metodou střelby. Výsledkem tohoto experimentu je obdobný diagram jako v prvním experimentu, tedy obrázek 4.3 vlevo. Máme tedy ověřeno dvěma zcela odlišnými způsoby, jak přibližně vypadá rozložení existence netriviálních řešení v určité oblasti.

### Třetí numerický experiment

V posledním numerickém experimentu této části se zaměříme na velikost prvního nalezeného vlastního čísla. Postup je stejný jako v prvním numerickém experimentu a navíc  $\mu^2 \in (0, 10^6)$ . Pokud najdeme nulový bod  $\mu_0$  funkce  $\phi$ , bod o souřadnicích  $(\eta, b)$  obarvíme v závislosti na velikosti  $\mu_0$ . Barevná škála je zvolena následovně. Tmavě zelený bod znamená velmi nízkou hodnotu  $\mu_0$  a naopak žlutý bod znamená velmi vysokou hodnotu  $\mu_0$ .





Obrázek 4.4: Diagram růstu velikosti prvního nulového bodu funkce  $\phi$  kolem bodu  $\eta = 1$ .

Bílá opět znamená, že pro danou dvojici  $(\eta, b)$  jsme žádný nulový bod nenašli. Výsledný diagram je na obrázku 4.5.

Z barevného rozložení je zřejmé, že zafixujeme-li  $\eta$  a budeme zvyšovat  $b$ , pro většinu hodnot  $\eta$  v určitou chvíli dojde k velkému skoku ve velikosti prvního nalezeného vlastního čísla, což je zobrazeno jako zřetelná změna v barvě. Pro zvyšující  $b$  jsme sice očekávali růst prvního vlastního čísla, ale růst spojitý a ne po částech nespojitý. Proč se tyto skoky vyskytují, zkusíme odpovědět v dalších částech této kapitoly. Dále vidíme, že skoky ve velikosti vlastních čísel tvoří jakousi strukturu.

Na obrázku 4.4 vidíme detailní pohled na okolí bodu  $\eta = 1$ , tedy co se děje v blízkosti periodické úlohy. Diagram je spočítán i pro hodnoty  $\eta > 1$ , což sice v zadání neuvažujeme, ale je zajímavé, že struktura diagramu se v určitém smyslu zachovává.

V dalším textu se pokusíme odpovědět na otázky, které se díky těmto třem numerickým experimentům objevily.

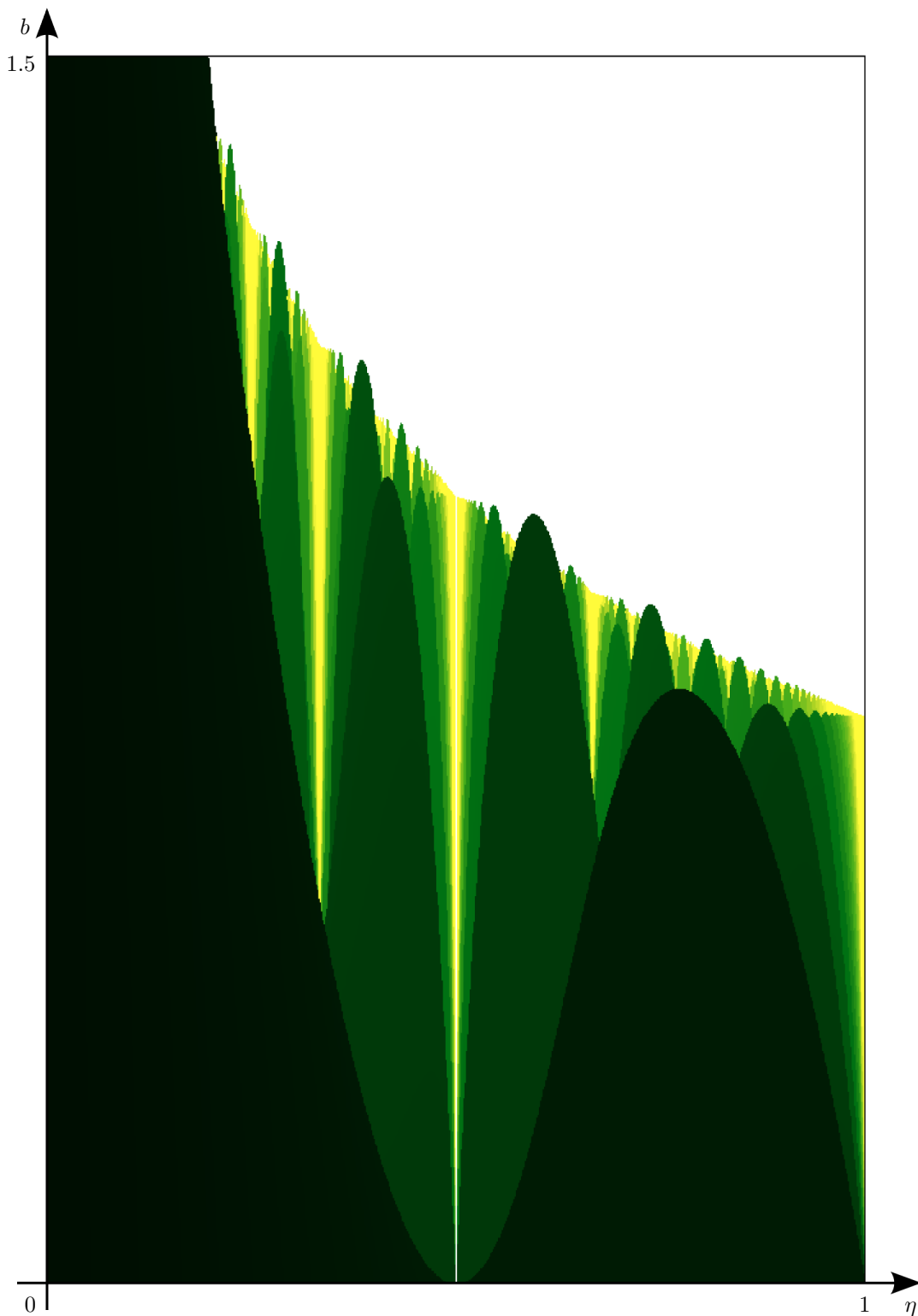
### 4.2.2 Úloha pro $\eta = \frac{1}{2}$

V této části detailně prozkoumáme, co se děje s řešitelností úlohy (4.1) pro volbu  $\eta = \frac{1}{2}$ . Z numerických experimentů plyne, že pro tuto hodnotu se děje něco zvláštního. Nepodařilo se najít žádný nulový bod funkce  $\phi$  a numerickou metodou střelby jsme řešení pro  $b$  v řádu  $10^{-6}$  sice našli, ale rozsahem maximálních a minimálních hodnot na intervalu  $(0, 1)$  odpovídalo téměř triviálnímu řešení. Na základě numerických experimentů předpokládáme, že pro  $\eta = \frac{1}{2}$  a libovolnou hodnotu  $b > 0$  žádné vlastní číslo neexistuje.

Na obrázku 4.6 vidíme vlevo diagram chování vlastních čísel kolem bodu  $\eta = \frac{1}{2}$ . Jedná se o detail z třetího numerického experimentu. Uprostřed vidíme několik grafů funkce  $\phi$  pro  $\eta = \frac{1}{2}$  a různé hodnoty  $b$ . A vpravo je graf funkce  $\phi(\mu, b, \frac{1}{2})$ . Z diagramu je patrné, že čím blíže jsme bodu  $\eta = \frac{1}{2}$ , tím vyšší je vlastní číslo při pevné volbě  $b$ . Až přesně v bodě  $\eta = \frac{1}{2}$  podle diagramu žádné vlastní číslo nenajdeme. Díky vlastnostem funkce  $\phi$  pro  $\eta = \frac{1}{2}$

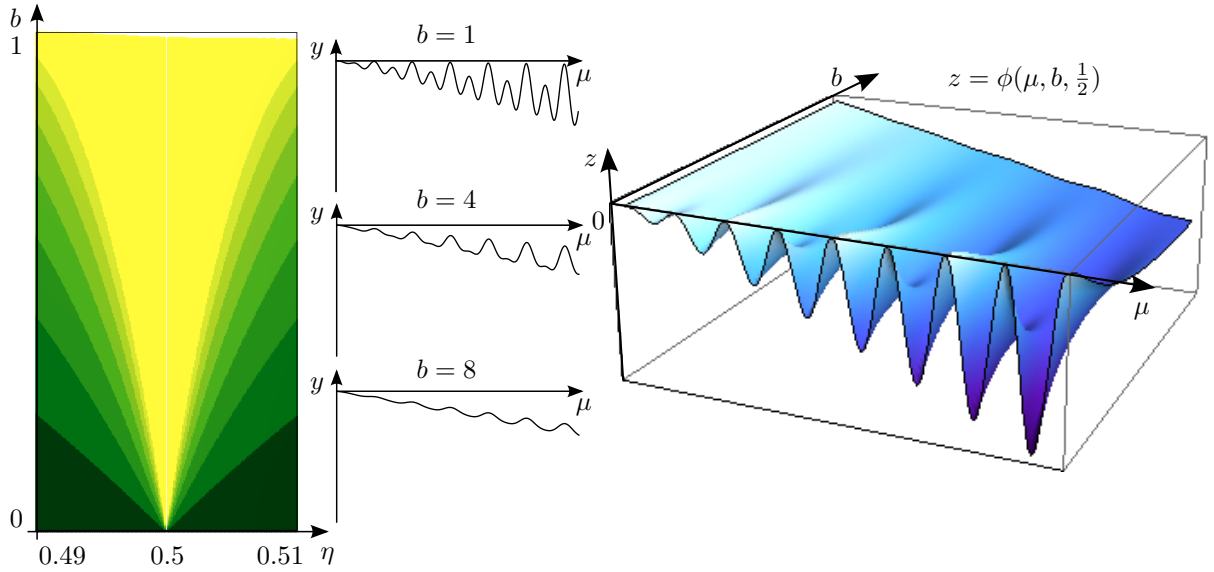
4.2. TŘÍBODOVÁ ÚLOHA PRO  $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$

---



Obrázek 4.5: Diagram růstu velikosti prvního nulového bodu funkce  $\phi$ .

## 4.2. TŘÍBODOVÁ ÚLOHA PRO $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$



Obrázek 4.6: Vlevo je diagram závislosti  $\eta$  na  $b$  pro  $\eta$  v blízkosti  $\frac{1}{2}$ . Uprostřed jsou grafy funkce  $\phi(\mu, b, \frac{1}{2})$  pro pevné  $b$ . Vpravo je graf funkce  $\phi(\mu, b, \frac{1}{2})$ .

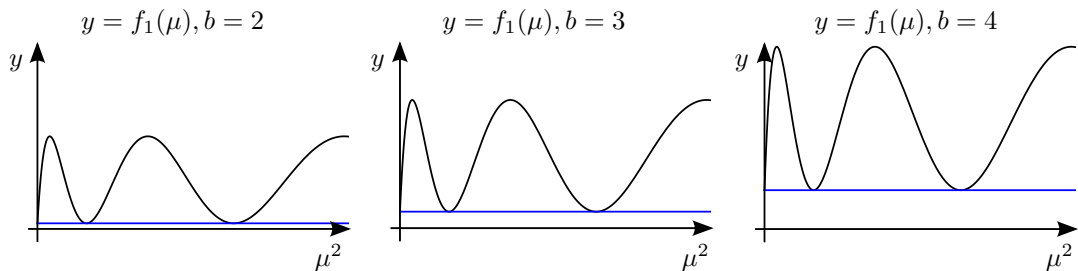
můžeme formulovat následující větu.

**Věta 4.2.** *Operátor  $L_b^\eta$  nemá pro  $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$  a  $\eta = \frac{1}{2}$  žádné vlastní číslo.*

*Důkaz.* Zavedli jsme proměnnou  $\mu = \sqrt{\lambda - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ , tedy dokážeme, že pro  $\eta = \frac{1}{2}$  a  $\mu > 0$  má úloha (4.1) pouze triviální řešení.

Při důkazu vyjdeme z analytického předpisu funkce  $\phi = \phi(\mu, b, \frac{1}{2})$ .

$$\phi(\mu, b, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{3b}{4}} \left(1 + e^{\frac{b}{2}} - 2e^{\frac{b}{4}} \cos\left(\frac{\mu}{2}\right)\right) \left(2e^{\frac{b}{4}}\mu + 2\mu \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) - b \sin\left(\frac{\mu}{2}\right)\right). \quad (4.5)$$



Obrázek 4.7: Graf funkce  $f_1 = f_1(\mu)$  (černě) a omezení zdola konstantou (modře).

Abychom ukázali, že pro tříbodovou úlohu (4.1) pro  $\eta = \frac{1}{2}$  najdeme pouze triviální řešení, ukážeme, že funkce  $\phi(\mu, b, \frac{1}{2})$  nemá žádný nulový bod. Konkrétně, že funkce  $\phi(\mu, b, \frac{1}{2})$  je záporná pro  $\mu > 0$ . Budeme postupovat následovně. Na  $\phi(\mu, b, \frac{1}{2})$  se budeme dívat jako

## 4.2. TŘÍBODOVÁ ÚLOHA PRO $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$

na funkci jedné proměnné  $\mu$  s pevnou hodnotou  $b$ . Ukážeme, že pro všechny hodnoty  $b$  je funkce záporná. Máme ji rozloženu na součin tří činitelů. První činitel  $-\frac{1}{2}e^{-\frac{3b}{4}}$  je zřejmě záporný, u dalších dvou ukážeme, že jsou vždy kladné.

Uvažujme pevné  $b$ . Abychom ukázali, že pro druhý činitel

$$f_1(\mu) = 1 + e^{\frac{b}{2}} - 2e^{\frac{b}{4}} \cos\left(\frac{\mu}{2}\right)$$

platí  $f_1(\mu) > 0$ , najdeme infimum této funkce a ukážeme, že je vždy větší než nula. Tedy

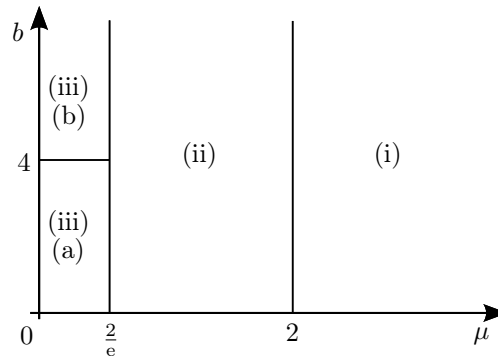
$$\inf_{\mu \in (0, +\infty)} f_1(\mu) = 1 + e^{\frac{b}{2}} - \sup_{\mu \in (0, +\infty)} (2e^{\frac{b}{4}} \cos\left(\frac{\mu}{2}\right)) = 1 + e^{\frac{b}{2}} - 2e^{\frac{b}{4}} = (e^{\frac{b}{4}} - 1)^2 > 0.$$

Protože funkci  $f_1$  umíme omezit zdola kladnou konstantou, je druhý činitel vždy kladný. Na obrázku 4.7 vidíme graf funkce  $f_1$  a její omezení zdola konstantou  $(e^{\frac{b}{4}} - 1)^2$ .

U posledního činitele

$$f_2(\mu) = 2e^{\frac{b}{4}}\mu + 2\mu \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) - b \sin\left(\frac{\mu}{2}\right)$$

opět uvažujme pevné  $b$ . Postup rozdělíme do několika částí. Schematicky je postup znázorněn na obrázku 4.8.



Obrázek 4.8: Schematický postup, který použijeme při důkazu toho, že funkce  $f_2(\mu)$  je kladná pro všechny hodnoty  $\mu, b$ .

- (i) První omezení funkce  $f_2$  provedeme pro  $\mu > 2$ . Funkci  $f_2$  omezíme zdola funkcí

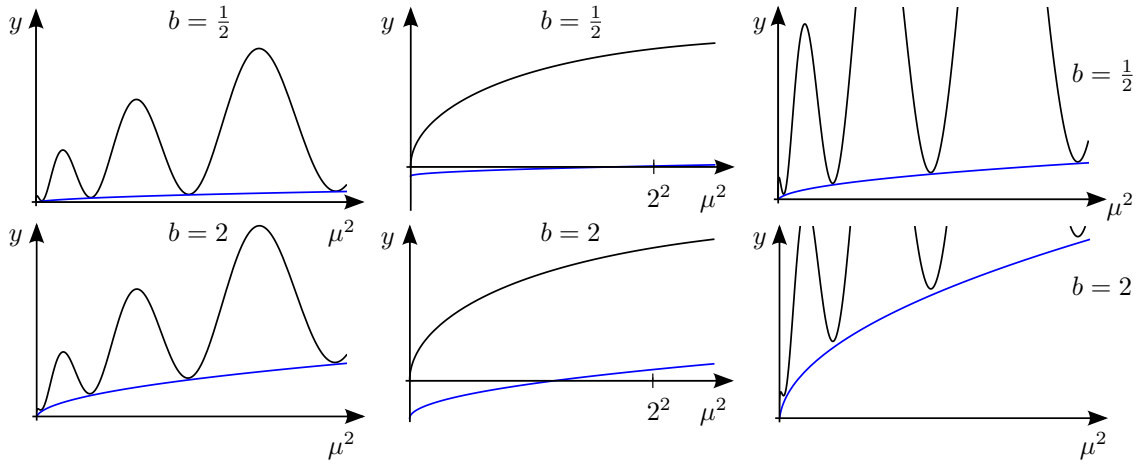
$$f_3(\mu) = 2e^{\frac{b}{4}}\mu - 2\mu - b.$$

Funkce  $f_3$  je kladná pro  $\mu > \frac{b}{2(e^{\frac{b}{4}} - 1)}$ . Označme  $g_1(b) = \frac{b}{2(e^{\frac{b}{4}} - 1)}$ . Ukážeme, že přesto, že kladnost funkce  $f_3$  závisí na hodnotě  $b$ , je od určitého  $\mu$  kladná pro všechna  $b$ . Limity funkce  $g_1$  jsou

$$\lim_{b \rightarrow 0} g_1(b) = 2, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} g_1(b) = 0$$

a navíc je  $g_1$  klesající pro  $b > 0$ . Tedy, funkce  $f_3$  je kladná pro  $\mu > 2$ . Z toho plyne, že i funkce  $f_2$  je kladná pro  $\mu > 2$  nezávisle na hodnotě  $b$ . Na obrázku 4.9 vidíme grafy funkcí  $f_2$  a  $f_3$  a jakým způsobem vypadá jejich omezení.

4.2. TŘÍBODOVÁ ÚLOHA PRO  $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$

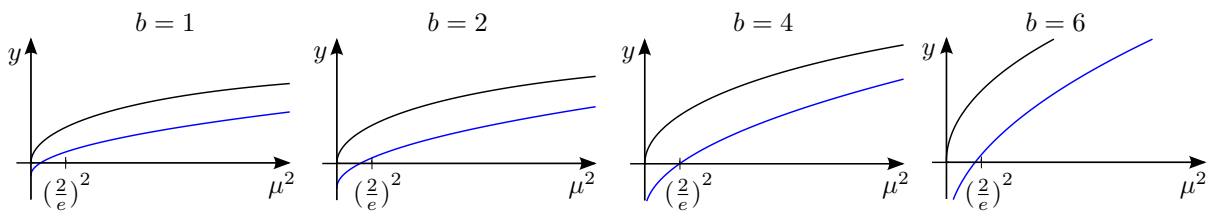


Obrázek 4.9: Graf funkce  $f_2$  (černě) a omezení zdola funkcí  $f_3$  (modře).

- (ii) Druhé omezení provedme pro  $\mu \in \left(\frac{2}{e}, 2\right)$ . Využijeme toho, že funkce  $\cos\left(\frac{\mu}{2}\right)$  i  $\sin\left(\frac{\mu}{2}\right)$  jsou na intervalu  $(0, 2)$  kladné.

$$\begin{aligned} 2e^{\frac{b}{4}}\mu + \inf_{\mu \in (0,2)} \left(2\mu \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) - b \sin\left(\frac{\mu}{2}\right)\right) &= 2e^{\frac{b}{4}}\mu + \inf_{\mu \in (0,2)} \left(2\mu \cos\left(\frac{\mu}{2}\right)\right) - \sup_{\mu \in (0,2)} \left(b \sin\left(\frac{\mu}{2}\right)\right) \\ &= 2e^{\frac{b}{4}}\mu - b. \end{aligned}$$

Označme  $f_4(\mu) = 2e^{\frac{b}{4}}\mu - b$ . Funkce  $f_4$  je kladná pro  $\mu > \frac{b^2}{4e^{\frac{b}{2}}}$ . Stejně jako v bodu II., i zde závisí omezení na velikosti  $b$ . Označme  $g_2(b) = \frac{b}{2e^{\frac{b}{4}}}$ . Maximum této funkce je  $\frac{2}{e}$  (v bodě  $b = 4$ ), tedy dojdeme k závěru, že funkce  $f_2$  je kladná na intervalu  $\left(\frac{2}{e}, 2\right)$ . Omezení vidíme na obrázku 4.10.



Obrázek 4.10: Graf funkce  $f_2$  (černě) a omezení zdola funkcí  $f_4$  (modře).

- (iii) Abychom ověřili, že funkce  $f_2$  je kladná i pro  $\mu \in \left(0, \frac{2}{e}\right)$ , využijeme derivaci funkce  $f_2$ , tedy

$$f_2'(\mu) = \frac{1}{4\mu} \left( e^{\frac{b}{4}} + (4-b) \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) - 2\mu \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \right)$$

Člen  $\frac{1}{4\mu}$  je vždy kladný, proto dále budeme uvažovat pouze

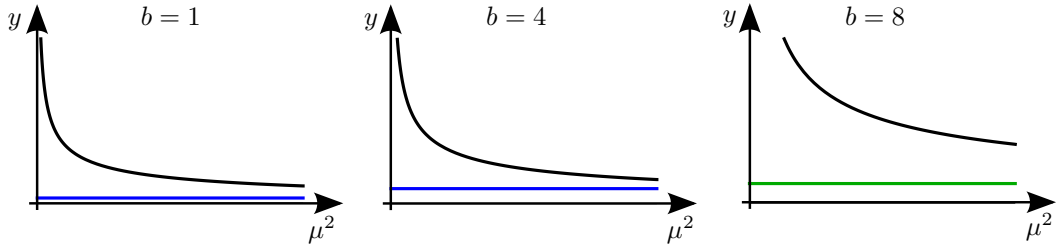
$$q(\mu) = e^{\frac{b}{4}} + (4-b) \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) - 2\mu \sin\left(\frac{\mu}{2}\right). \quad (4.6)$$

## 4.2. TŘÍBODOVÁ ÚLOHA PRO $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Výpočet rozdělíme na dvě části.

- (a) Nejdříve podobnými úvahami jako v předchozích bodech důkazu najdeme pro  $b \leq 4$  funkci  $g_3(b) := e^{\frac{b}{4}} - \frac{4}{e} \sin\left(\frac{1}{e}\right)$ , která je pro funkci  $q(\mu)$  kladnou konstantou a ji omezuje zdola.
- (b) Pro  $b > 4$  funkcí se stejnými vlastnostmi je  $g_4(b) := e^{\frac{b}{4}} + 4 - b - \frac{4}{e} \sin\left(\frac{1}{e}\right)$ .

Našli jsme kladné konstanty, kterými můžeme funkci  $q(\mu)$  zdola omezit, proto je funkce  $q(\mu)$  kladná. Tedy, kladná je i derivace funkce  $f_2$  a funkce  $f_2$  je na intervalu  $(0, \frac{2}{e})$  rostoucí. Navíc  $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} f_2(\mu) = 0$ . Proto je funkce  $f_2$  na  $(0, \frac{2}{e})$  kladná. Na obrázku 4.11 vidíme graf funkce  $d(\mu)$  a její omezení zdola konstantami.



Obrázek 4.11: Průběh funkce  $q$  (černě) a omezení zdola konstantou  $e^{\frac{b}{4}} - \frac{4}{e} \sin\left(\frac{1}{e}\right)$  (modře) a konstantou  $e^{\frac{b}{4}} + 4 - b - \frac{4}{e} \sin\left(\frac{1}{e}\right)$  (zeleně).

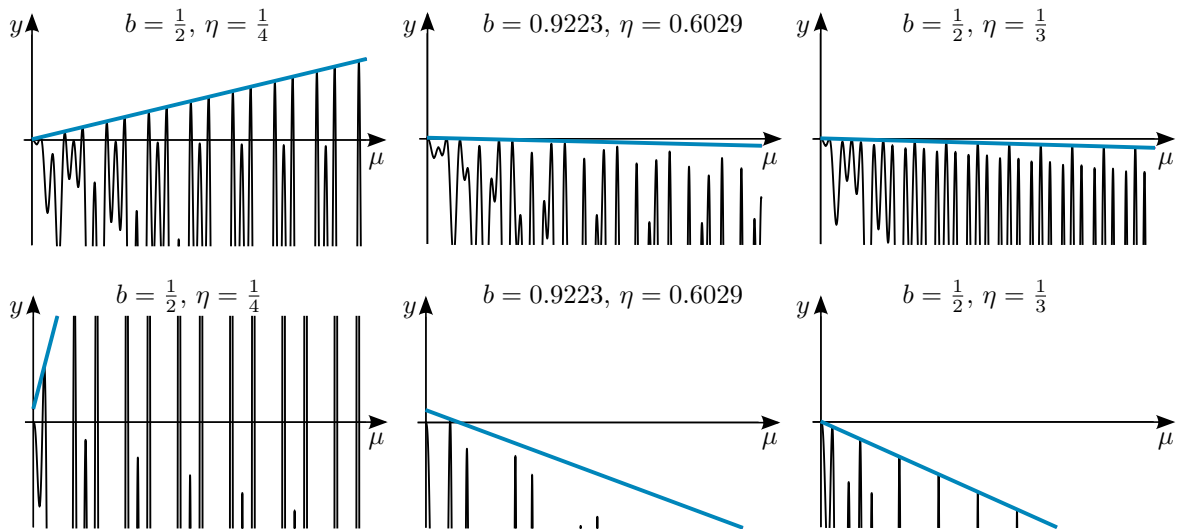
Celkem jsme ukázali, že funkce  $\phi$  pro  $\eta = \frac{1}{2}$  je záporná pro libovolné  $\mu > 0$  a libovolné  $b > 0$ . Proto nemá operátor  $L_b^\eta$  pro  $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ,  $b > 0$  a  $\eta = \frac{1}{2}$  žádné vlastní číslo.  $\square$

Podarilo se nám najít bod  $\eta = \frac{1}{2}$ , pro který má úloha (4.1) libovolné  $b > 0$  a  $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$  pouze triviální řešení.

### 4.2.3 Počet netriviálních řešení

Již v předchozím textu jsme viděli průběhy funkce  $\phi$  pro několik voleb  $b, \eta$  (viz obrázek 4.6). Nabízí se otázka, kolik vlastních čísel pro danou dvojici  $b, \eta$  existuje. V předchozí části 4.2.2 jsme ukázali, že pro bod  $\eta = \frac{1}{2}$  a libovolné  $b > 0$  existuje pouze triviální řešení, tedy že neexistuje žádné vlastní číslo pro  $\eta = \frac{1}{2}, \mu > 0, b > 0$ . Současně z kapitoly 2 víme, že totéž nastane pro  $\eta = 1$ . Z numerických experimentů plyne, že pravděpodobně existují hodnoty  $b$  a  $\eta$ , pro které minimálně jedno vlastní číslo existuje. Stále ale nevíme, zda vlastních čísel existuje nekonečně nebo konečně mnoho. Navíc se nám nepodařilo v jisté oblasti najít ani jedno vlastní číslo (oblast vpravo v diagramu na obrázku 4.5). V této části se pokusíme rozmístění počtu vlastních čísel popsat.

#### 4.2. TŘÍBODOVÁ ÚLOHA PRO $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$



Obrázek 4.12: Graf funkce  $\phi$  (černě) pro pevné  $b, \eta$  a omezení přímkou (modře). Zleva: nekonečně mnoho nulových bodů, konečně mnoho nulových bodů a žádný nulový bod.

#### Omezení přímkou a čtvrtý numerický experiment

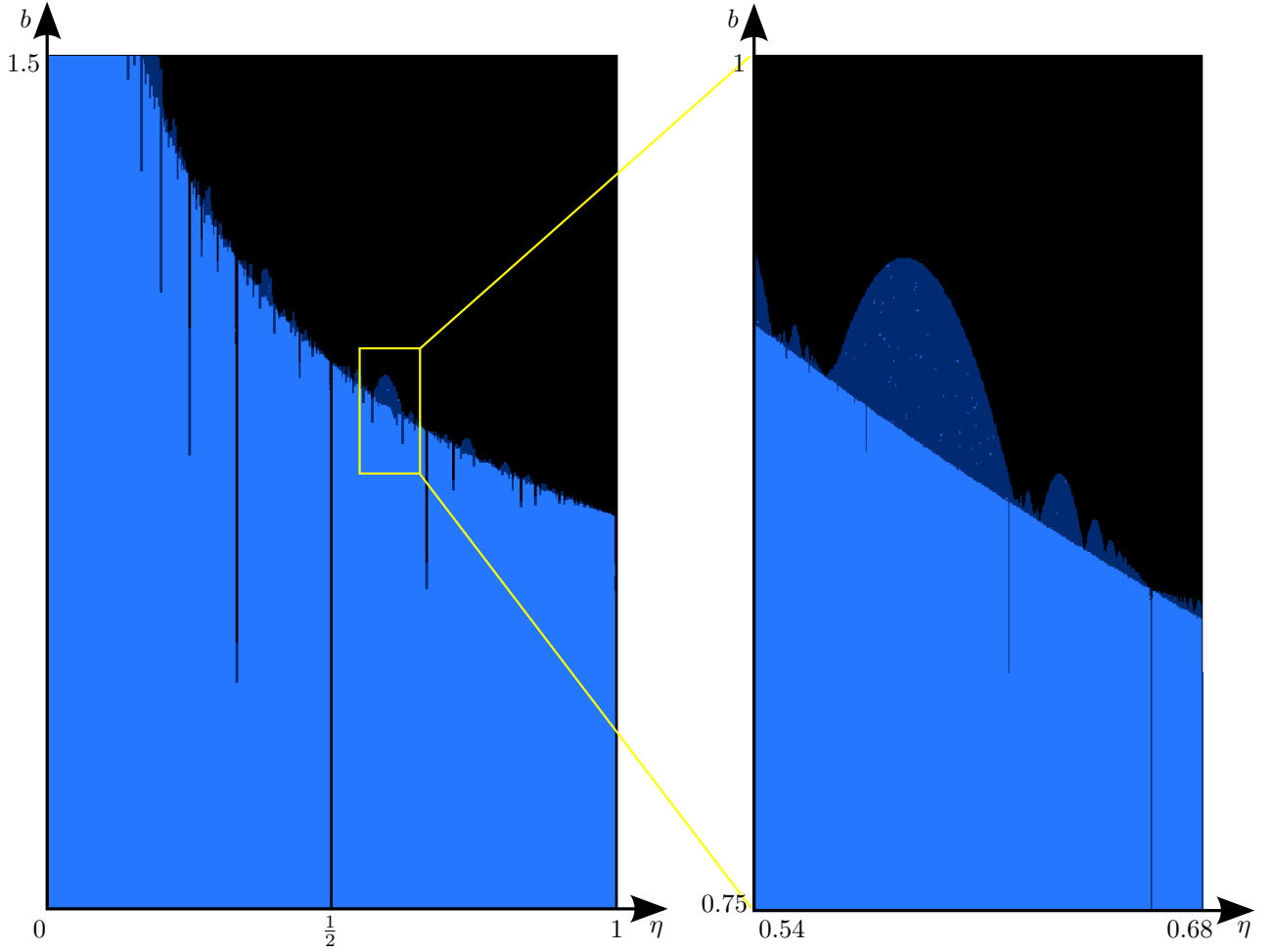
Abychom rozlišili, zda funkce  $\phi$  pro pevně zvolené  $b, \eta$  má konečně mnoho, nekonečně mnoho nebo žádný nulový bod, provedeme numerickou konstrukci přímky, kterou graf shora omezíme. Konstrukce bude vypadat následujícím způsobem. Nejprve zvolíme interval  $I = (0, d)$  pro  $d \gg 1$ , v němž numericky určíme maximum funkce (např.  $\mu \in (0, 600)$ ). Poté zvolíme další rozsáhlý interval mnohonásobně dál, než je délka prvního intervalu, kde provedeme totéž (např.  $\mu \in (4\,000, 8\,000)$ ). Obě maxima spojíme přímkou. Tato přímka (pokud maxima vybíráme z velkých intervalů) velmi dobře omezuje funkci shora. U této přímky určíme směrnici. Je-li směrnice kladná, nejspíše se jedná o nekonečně mnoho nulových bodů. Je-li záporná, ale první maximum je kladné, jedná se zřejmě o konečný počet nulových bodů a je-li záporná a první maximum je záporné, funkce zřejmě žádný nulový bod nemá. Ukázky tohoto numerického určení počtu řešení vidíme na obrázku 4.12. Vlevo je zřejmě nekonečně mnoho nulových bodů, uprostřed je konečně mnoho nulových bodů a vpravo žádný nulový bod neexistuje.

Tohoto omezení můžeme využít v numerickém experimentu. Podobně jako v předchozích experimentech, i zde bod  $(\eta, b)$  obarvíme. A to podle toho, kolik řešení jsme pro danou volbu  $b, \eta$  našli. Světle modrá reprezentuje nekonečně mnoho nulových bodů, tmavě modrá konečně mnoho nulových bodů a černá žádný nulový bod. Diagram vidíme na obrázku 4.13 vlevo. Vpravo pak vidíme detailní pohled na žlutě vyznačenou oblast.

#### Oblast bez netriviálních řešení

Ze všech čtyř numerických experimentů plyne, že by mohla existovat oblast v rovině  $\eta, b$ , kde nenajdeme žádné netriviální řešení. Analyticky takovou oblast neumíme najít, ale

#### 4.2. TŘÍBODOVÁ ÚLOHA PRO $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$



Obrázek 4.13: Numericky určené rozmístění počtů netriviálních řešení.

umíme alespoň analyticky najít oblast, kde je maximálně konečný počet netriviálních řešení. Uvažujme funkci  $\phi$  proměnné  $\mu$  pro pevně zvolené  $b, \eta$

$$\begin{aligned} \phi(\mu) = & \frac{b}{2}e^{-\frac{b\eta}{2}} \sin(\mu\eta) - \frac{b}{2}e^{-\frac{b\eta}{2}}e^{-\frac{b}{2}} \sin(\mu\eta) \cos(\mu) - e^{-\frac{b\eta}{2}}e^{-\frac{b}{2}}\mu \sin(\mu) \sin(\mu\eta) - \frac{b}{2}e^{-\frac{b}{2}} \sin(\mu) \\ & - \mu + e^{-\frac{b}{2}}\mu \cos(\mu) + e^{-\frac{b\eta}{2}}\mu \cos(\mu\eta) + \frac{b}{2}e^{-\frac{b\eta}{2}}e^{-\frac{b}{2}} \sin(\mu) \cos(\mu\eta) - e^{-\frac{b\eta}{2}}e^{-\frac{b}{2}}\mu \cos(\mu) \cos(\mu\eta). \end{aligned}$$

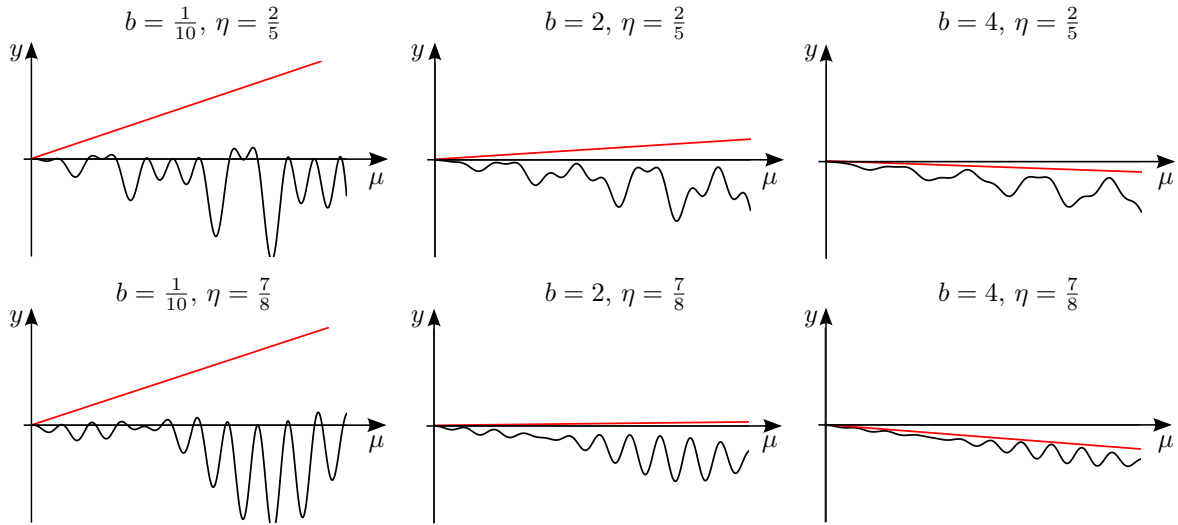
Všechny funkce kosinus a sinus nahradíme jejich supremem v případě, že sinus nebo kosinus přičítáme a infimem opačně. Tím dostaneme lineární funkci

$$p(\mu) = \mu \left( -1 + e^{-\frac{1}{2}b} + e^{-\frac{1}{2}b\eta} + 2e^{-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b\eta} \right) + \frac{1}{2}be^{-\frac{1}{2}b} + \frac{1}{2}be^{-\frac{1}{2}b\eta} + be^{-\frac{1}{2}b\eta - \frac{1}{2}b\eta}.$$

Funkce  $p(\mu)$  funkci  $\phi$  omezuje shora. Protože  $p(\mu)$  je lineární funkcí, určíme, zda je rostoucí nebo klesající podle členu  $a = -1 + e^{-\frac{1}{2}b} + e^{-\frac{1}{2}b\eta} + 2e^{-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b\eta}$ . Je-li  $a < 0$ , je funkce  $p$  ostře klesající, což znamená, že funkce  $\phi$  musí být od nějakého  $\mu_1$  záporná. Tedy, musí mít maximálně konečný počet nulových bodů. Omezení vidíme na obrázku 4.14.



4.2. TŘÍBODOVÁ ÚLOHA PRO  $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$

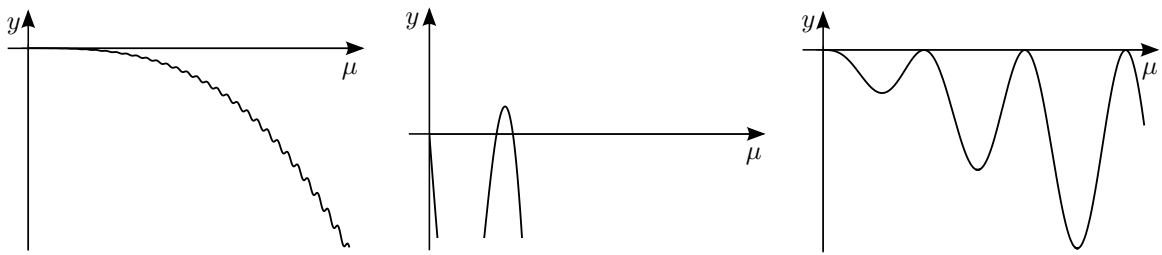


Obrázek 4.14: Graf funkce  $\phi$  (černě) a omezení lineární funkcí  $p(\mu)$  (červeně).

Tohoto omezení nejdříve využijeme k tomu, abychom našli případ dvojice  $b, \eta$ , pro kterou je člen  $a$  omezující funkce  $p$  záporný a my i přesto najdeme nulový bod. Tedy takovou funkci  $\phi$ , u které víme, že má konečný počet nulových bodů. Graf této funkce vidíme na obrázku 4.15. Vlevo je pohled na funkci, kde vidíme lokální chování. Uprostřed detail dvou nulových bodů a vpravo je globální chování funkce.

Označme neomezenou otevřenou oblast, kde je maximálně konečný počet netriviálních řešení, jako  $\Omega_1$ . Potom hranice oblasti  $\partial\Omega_1$  je dána jako nulová hladina funkce

$$a_1(\eta, b) = -1 + e^{-\frac{1}{2}b} + e^{-\frac{1}{2}b\eta} + 2e^{-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b\eta}.$$



Obrázek 4.15: Graf funkce  $y = \phi\left(\mu, \frac{165}{10}, \frac{1}{10\,000}\right)$ , která má konečný počet nulových bodů.

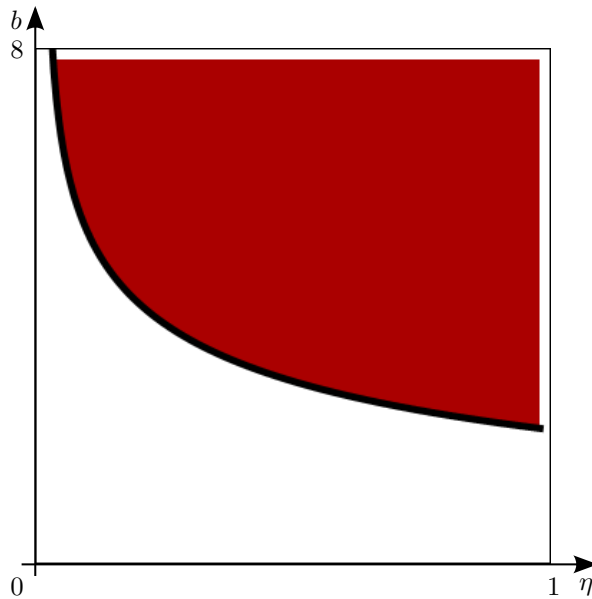
Označme  $\Omega_2$  podoblast oblasti  $\Omega_1$ , kde neexistuje netriviální řešení. Hranici této oblasti  $\partial\Omega_2$  zkonstruujeme numericky. Na obrázku 4.15 vidíme funkci  $\phi$ , pro kterou hodnoty  $b, \eta$  patří do oblasti  $\Omega_1$ , přesto existují nulové body. Proto  $\partial\Omega_1$  a  $\partial\Omega_2$  nemohou být shodné. Pro pevné  $b, \eta$  není funkční hodnota  $p(\mu)$  pro  $\mu \rightarrow 0^+$  nulová. Pokud je člen  $a = -1 + e^{-\frac{1}{2}b} + e^{-\frac{1}{2}b\eta} + 2e^{-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b\eta}$  záporný, je interval  $I_1$ , na kterém je funkce  $p(\mu)$  nezáporná, omezený a

## 4.2. TŘÍBODOVÁ ÚLOHA PRO $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$I_1 = (0, c)$ , kde

$$c = -\frac{\frac{1}{2}be^{-\frac{1}{2}b} + \frac{1}{2}be^{-\frac{1}{2}b\eta} + be^{-\frac{1}{2}b\eta - \frac{1}{2}b\eta}}{-1 + e^{-\frac{1}{2}b} + e^{-\frac{1}{2}b\eta} + 2e^{-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b\eta}}.$$

V numerické konstrukci  $\partial\Omega_2$  volíme body hranice  $\partial\Omega_1$  a zkontrolujeme, zda na intervalu  $I_1$  existuje nulový bod funkce  $\phi$ . Pokud neexistuje, je z chování funkce  $\phi$  pro zvyšující se tlumení zřejmé, že ani pro vyšší  $b$  již funkce  $\phi$  mít nulové body nemůže. Na obrázku 4.16 vidíme jak analyticky sestrojenou oblast, kde je maximálně konečný počet netriviálních řešení (červeně), tak numerickou hranici oblasti, kde žádné netriviální řešení není (černě). Obě hranice vizuálně splývají a začnou se lišit až v blízkosti Neumannovy okrajové úlohy, tedy pro  $\eta$  blízké nule.

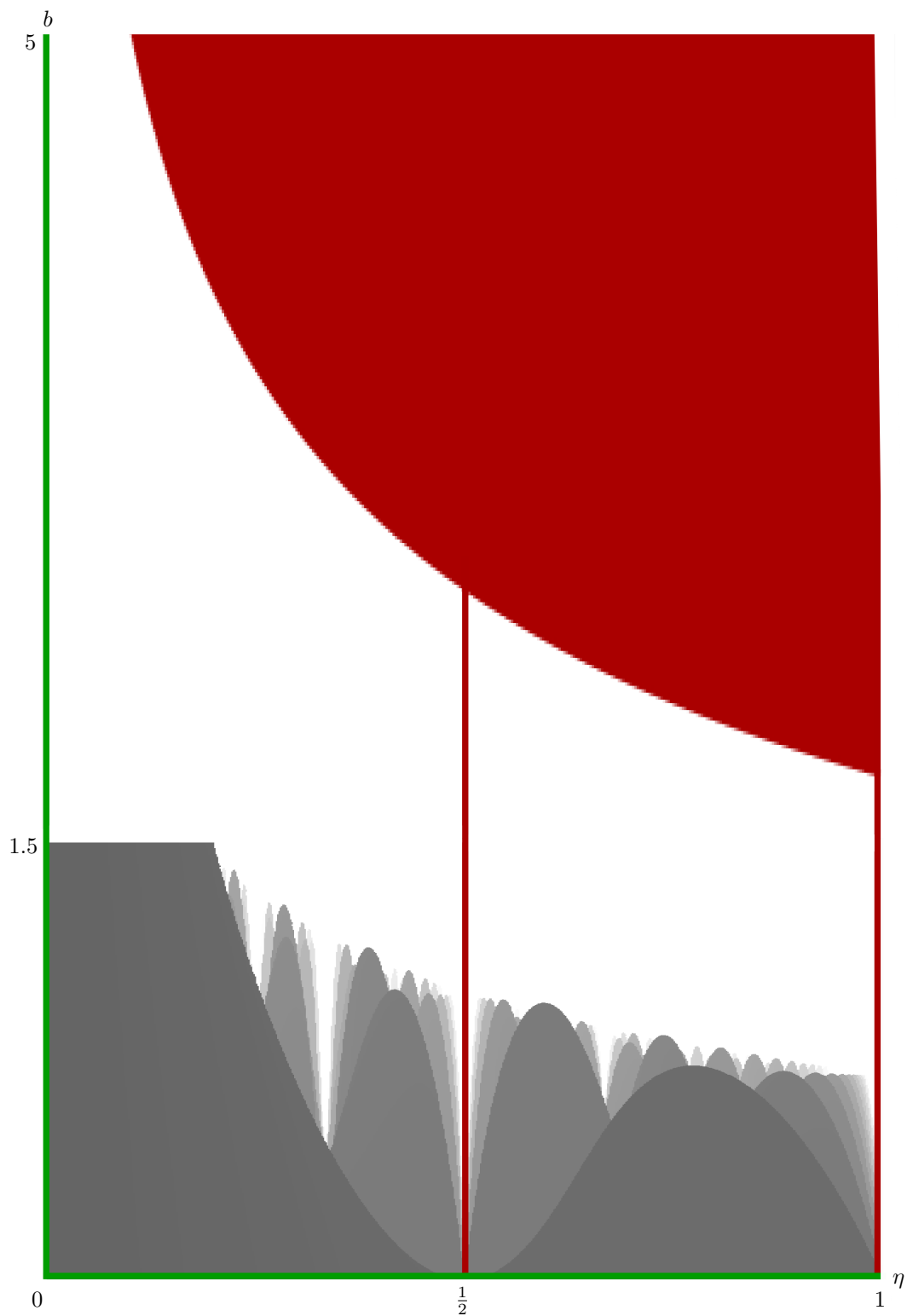


Obrázek 4.16: Oblast, kde je maximálně konečný počet netriviálních řešení (červeně) a hranice  $\partial\Omega_2$ , od ní nenajdeme žádné netriviální řešení (černě).

### 4.2.4 Shrnutí pro $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Celkem můžeme chování tříbodové úlohy s tlumením pro  $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$  shrnout následovně. Existuje zde neomezená oblast, kde není žádné netriviální řešení (viz obrázek 4.16). Pro hodnoty  $\eta = 1$  a  $\eta = \frac{1}{2}$  víme, že pro  $b > 0$  existuje pouze triviální řešení. Našli jsme konečný počet netriviálních řešení (viz obrázek 4.15). Numericky jsme našli oblast, kde netriviální řešení existuje (viz obrázek 4.5) a pravděpodobné rozdělení počtů řešení (konečně a nekonečně mnoho) je na obrázku 4.15.

Na obrázku 4.17 vidíme celkový pohled na existenci vlastních čísel operátoru  $L_b^\eta$  pro  $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$  a operátoru  $L^\eta$  pro  $\lambda > 0$ . Zelená barva znamená, že existuje nekonečně mnoho vlastních čísel. Zeleně je zobrazena úsečka odpovídající hodnotám  $b = 0$  a  $\eta \in \langle 0, 1 \rangle$ , tedy

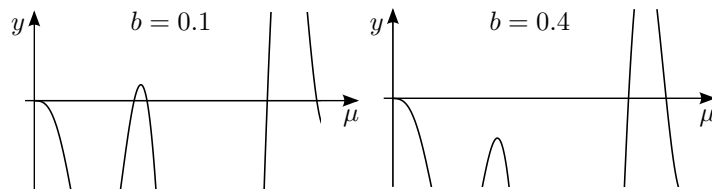


Obrázek 4.17: Existence vlastních čísel operátoru  $L_b^\eta$  pro  $\lambda > \left(\frac{b}{2}\right)^2$ .

Neumannova okrajová úloha bez tlumení ( $\eta = 0$ ), tříbodová úloha bez tlumení ( $\eta \in (0, 1)$ ) a periodická úloha bez tlumení  $\eta = 1$ . Dále je zeleně zobrazena polopřímka  $\eta = 0, b \geq 0$  která reprezentuje Neumannovu okrajovou úlohu. Naopak červená barva znamená, že žádné vlastní číslo neexistuje. Jedná se o polopřímku (respektive o polopřímku bez krajního bodu)  $\eta = 1, b > 0$  (odpovídající periodické okrajové úloze s tlumením), o polopřímku  $\eta = \frac{1}{2}, b > 0$  (respektive o polopřímku bez krajního bodu) a o neomezenou oblast, kterou jsme se zabývali v předchozím odstavci. Barvami šedi je zobrazen třetí numerický experiment, tedy body, kde alespoň jedno vlastní číslo existuje. A bíle jsou oblasti, u kterých neumíme rozhodnout.

### 4.3 Fučíkovo spektrum

V předchozích částech této kapitoly jsme na řadu otázek ohledně chování tříbodové úlohy s tlumením odpověděli. Jednou otázkou jsme se ale ještě nezabývali. Proč pro pevné  $\eta$  a rostoucí  $b$  neroste hodnota prvního vlastního čísla spojitě? Z chování funkce  $\phi$  je zřejmé, proč tomu tak je. Příklad, kdy dojde k nespojitě změně velikosti prvního vlastního čísla, vidíme na obrázku 4.18. První vlastní číslo je v případě grafu vlevo v blízkosti prvního lokálního maxima funkce  $\phi$  pro pevné  $b, \eta$ . Oproti tomu napravo (pro vyšší tlumení) je první vlastní číslo v blízkosti až druhého lokálního maxima funkce  $\phi$  pro pevné  $b, \eta$ . Proto dojde k nespojitému skoku ve velikosti vlastního čísla. Navíc, vlastní čísla se vyskytují po dvojicích. Velikost prvního vlastního čísla roste a velikost druhého vlastního čísla klesá, až se v momentu, kdy se lokální maximum dotkne osy  $\mu$ , stanou jedním vlastním číslem. Všechny tyto vlastnosti vlastních čísel bychom měli pozorovat i na Fučíkově spektru, na diagonále, kde najdeme vlastní čísla operátoru.



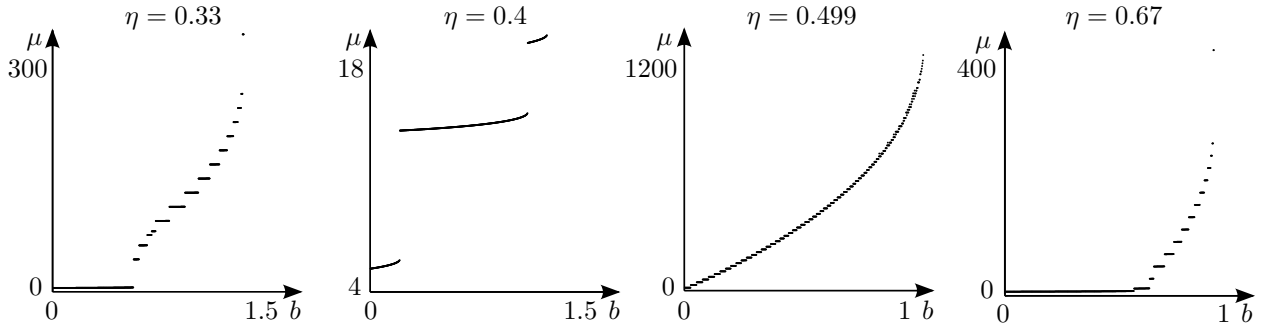
Obrázek 4.18: Graf funkce  $y = \phi(\mu, b, \frac{2}{5})$  pro pevné  $b$ , u které pozorujeme nespojitý růst prvního vlastního čísla pro zvyšující  $b$ .

Průběh změny velikosti prvního vlastního čísla pro různé hodnoty  $\eta$  vidíme na obrázku 4.19. Hodnoty jsou získány z třetího numerického experimentu.

Uvažujme

$$\begin{cases} y''(x) + by'(x) + \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) = 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) = y(\eta), \\ y'(0) = y'(1), \end{cases} \quad (4.7)$$

kde  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .


 Obrázek 4.19: Změna velikosti vlastních čísel. Závislost  $b$  na  $\mu$  pro pevně zvolené  $\eta$ .

Množina  $\Sigma(L_b^\eta) := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : L_b^\eta = \alpha y^+(x) - \beta y^-(x) \text{ má netriviální řešení}\}$  se nazývá Fučíkovo spektrum operátoru  $L_b^\eta$ .

Fučíkovo spektrum operátoru  $L_b^\eta$  hledáme vzhledem k obtížnosti úlohy numericky. Ukázky Fučíkova spektra vidíme na obrázku 4.20, kde je Fučíkovo spektrum získáno numericky. Všimněme si odchylování Fučíkova spektra od diagonály  $\alpha = \beta$  pro zvyšující tlumení. Vlevo je Fučíkovo spektrum získáno metodou střelby a vpravo je náhled na Fučíkovo spektrum metodou TopView. Princip metody TopView pro náhled na Fučíkovo spektrum operátoru  $L_b^\eta$  spočívá v tom, že splníme metodou střelby podmínku  $y'(0) = y'(1)$  a u druhé podmínky hlídáme znaménko rozdílu  $y(0) - y(\eta)$ . Je-li rozdíl záporný, obarvíme bod  $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$  světle modře, je-li kladný, obarvíme jej tmavě modře. Bod Fučíkova spektra vidíme přibližně na hranici, mezi barvami. Numerickým výpočtem získáme část spektra ležící nad diagonálou. Abychom získali část pod diagonálou, stačí část nad diagonálou zrcadlit podle diagonály  $\alpha = \beta$ . Jestliže do Fučíkova spektra patří dvojice  $(\alpha, \beta)$  s odpovídajícím řešením  $y$ , patří do něj i dvojice  $(\beta, \alpha)$  s odpovídajícím řešením  $-y$ . Další ukázky Fučíkova spektra vidíme v příloze, kde jsou zobrazeny i s nepřípustnou oblastí, jejíž smysl vysvětlíme v následujícím odstavci.

### 4.3.1 Nepřípustná oblast Fučíkova spektra

V této části zkonstruujeme aproximaci nepřípustných oblastí Fučíkova spektra. Množina

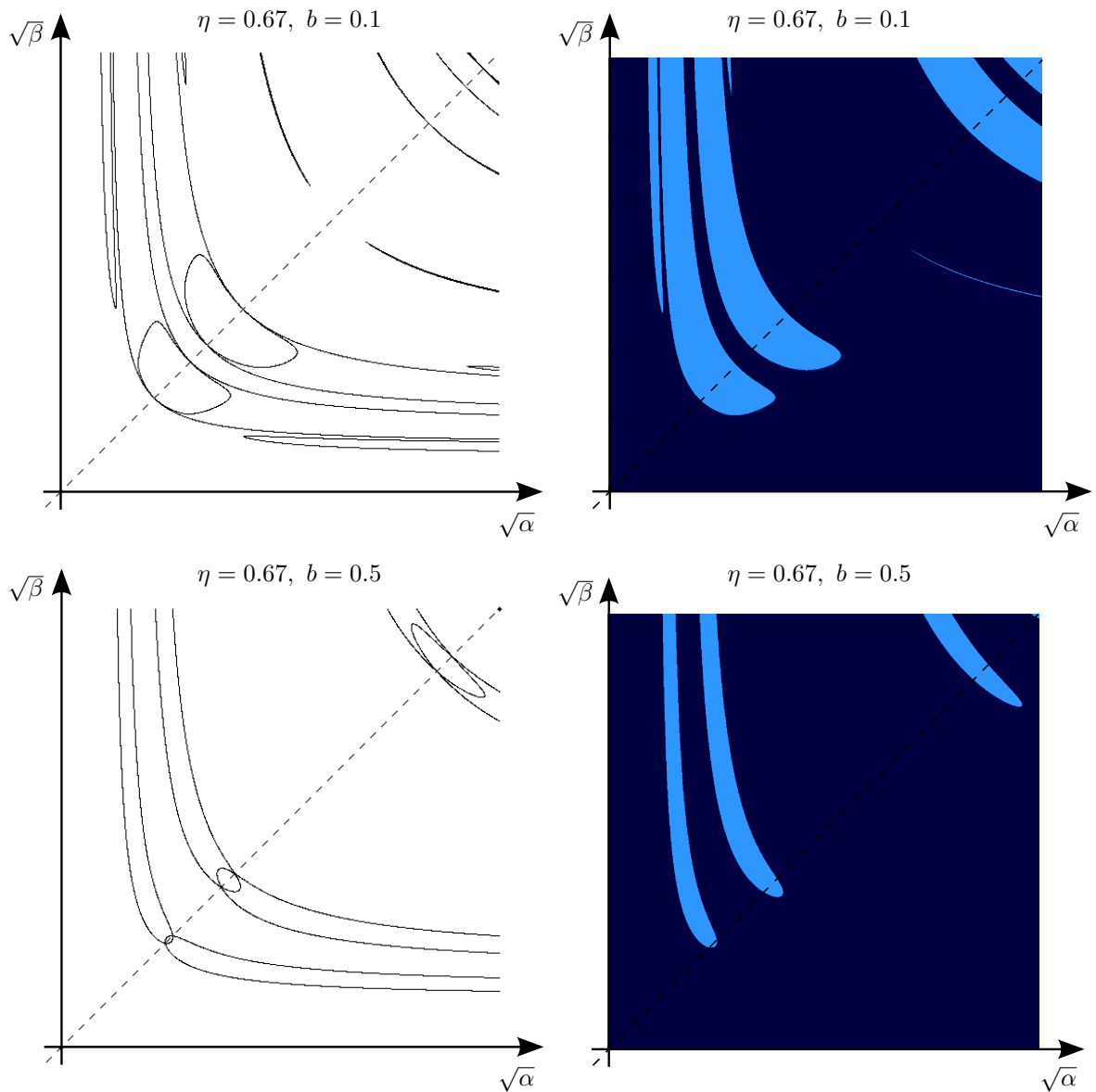
$$\Pi(L_b^\eta) = \{(\nu - td(\nu), \nu + td(\nu)) \in \mathbb{R}^2 : d(\nu) = \frac{1}{\|(L_b^\eta - \nu I)^{-1}\|}, t \in (-1, 1), \nu \in \mathbb{R} \setminus \sigma(L_b^\eta)\}$$

je nepřípustnou oblastí Fučíkova spektra  $\Sigma(L)$  (viz [5]), kde  $\sigma(L_b^\eta)$  je spektrum operátoru  $L_b^\eta$ , které je v našem případě tvořeno vlastními čísly operátoru. Nepřípustnou oblastí rozumíme takovou oblast, jejíž průnik s Fučíkovým spektrem je prázdný.

Abychom byli schopni nepřípustnou oblast zkonstruovat, operátor  $L_b^\eta$  nahradíme dostatečně velkou maticí  $\mathbf{A}$  a tím přejdeme k diskrétní úloze. Protože matice  $\mathbf{A}$  je diskretizací, zkonstruujeme pouze přibližnou oblast. Čím větší zvolíme řád matice, tím lépe spojitou úlohu aproximujeme a tím přesnější získáme výsledky.

Abychom aproximovali operátor  $L_b^\eta y = -y''(x) - by'(x)$  maticí  $\mathbf{A}$ , zvolíme nejdříve

### 4.3. FUČÍKOVÉ SPEKTRUM



Obrázek 4.20: Numericky získané Fučíkovo spektrum operátoru  $L_b^\eta$  (vlevo) a náhled na Fučíkovo spektrum metodou TopView (vpravo).

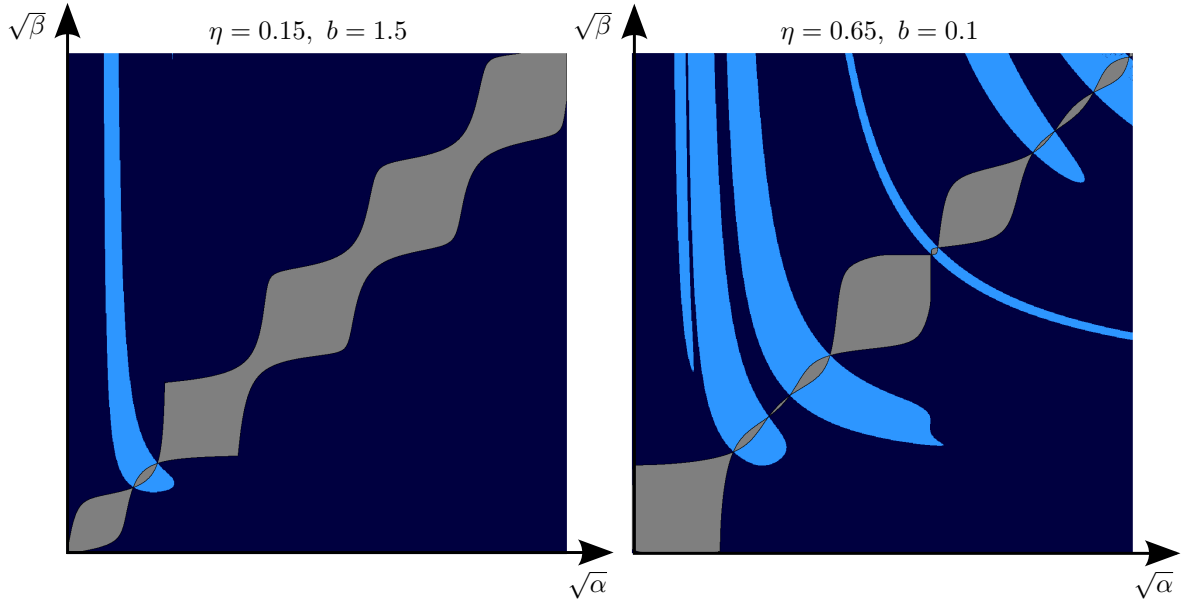
počet  $n$  stejných podintervalů, na které chceme interval  $\langle 0, 1 \rangle$  rozdělit. Diskretizační krok je potom  $h = \frac{1}{n}$  [8]. Proto je matice  $\mathbf{A}$  čtvercová rozměru  $n - 1$ .

Na vnitřku intervalu aproximujeme derivace centrálními diferencemi

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h},$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1}))}{h^2}.$$

### 4.3. FUČÍKOVÉ SPEKTRUM



Obrázek 4.21: Náhled na Fučíkovo spektrum operátoru  $L_b^\eta$  a nepřístupné oblasti (šedě).

Protože pracujeme s diskretizovaným intervalem, označíme  $y(x_i) = Y_i$ . Tím získáme proměnné  $Y_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , kterých je  $n + 1$ .

Označme  $j$  bod diskretizovaného intervalu, který odpovídá ve spojitě úloze bodu  $\eta \in (0, 1)$ . Vyjádříme podmínku  $y(0) = y(\eta)$  jako  $Y_0 = Y_j$  a podmínku  $y'(0) = y'(1)$  vyjádříme pomocí dopředné a zpětné diference jako

$$\frac{Y_1 - Y_0}{h} = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{h} \Rightarrow Y_n = Y_1 - Y_0 + Y_{n-1}.$$

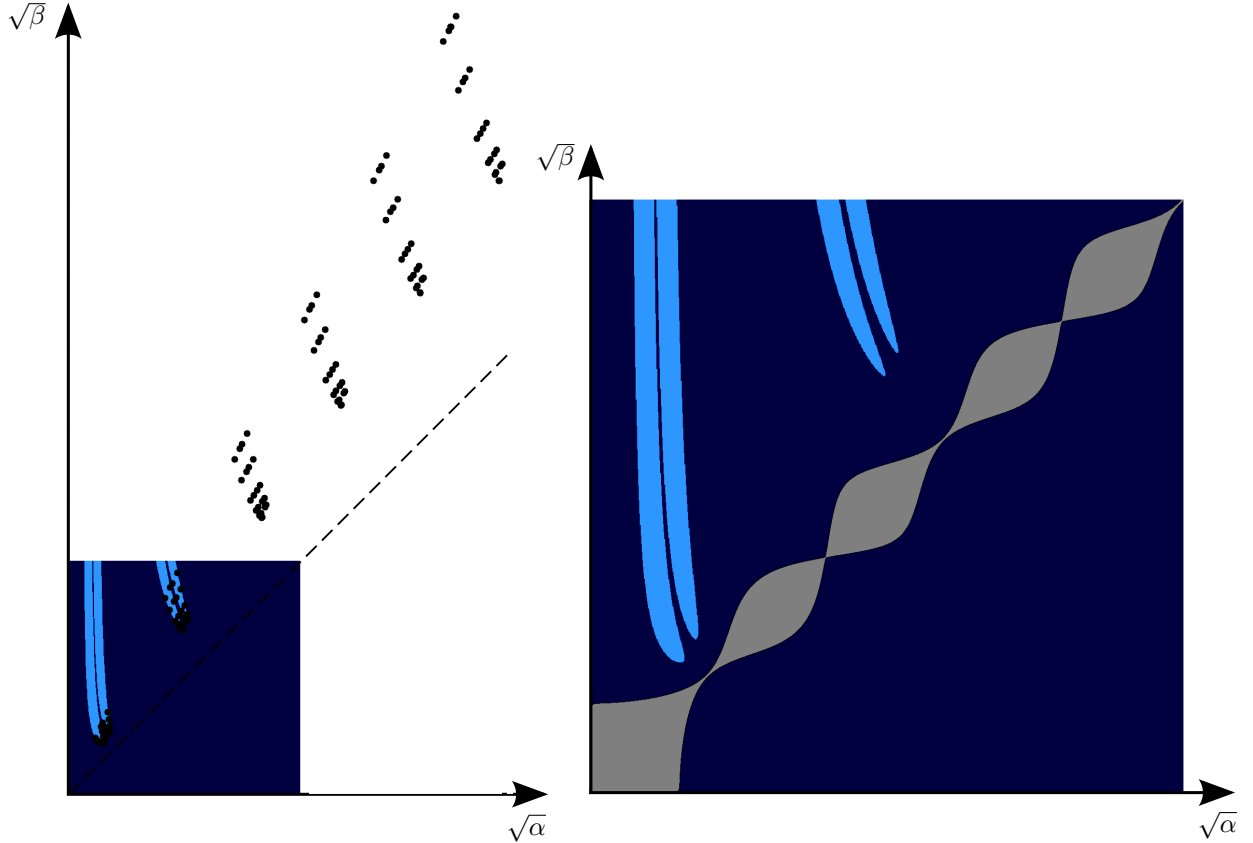
Tedy  $Y_0$  nahradíme  $Y_j$  a  $Y_n$  nahradíme  $Y_1 - Y_j + Y_{n-1}$ . Tímto postupem dostaneme matici  $\mathbf{A}$  ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & j-1 & j & & n-2 & n-1 \\ -\frac{2}{h^2} + \frac{b}{2h} & -\frac{1}{h^2} - \frac{b}{2h} & \dots & 0 & -\frac{1}{h^2} + \frac{b}{2h} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} + \frac{b}{2h} & \frac{2}{h^2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} - \frac{b}{2h} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{h^2} + \frac{b}{2h} & \frac{2}{h^2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} + \frac{b}{2h} \\ -\frac{1}{h^2} - \frac{b}{2h} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h^2} + \frac{b}{2h} & \dots & -\frac{1}{h^2} + \frac{b}{2h} & \frac{1}{h^2} - \frac{b}{2h} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ j-1 \\ j \\ \\ n-2 \\ n-1 \end{matrix}$$

Nepřístupnou oblast zkonstruujeme a výsledek pro některé hodnoty  $b, \eta$  vidíme na obrázku 4.21. Fučíkova spektra pro jiné hodnoty  $b, \eta$  i s nepřístupnou oblastí najdeme v příloze.

### 4.3.2 Fučikovo spektrum pro $\eta = \frac{1}{2}$

Zjistili jsme, že v pro  $\eta = \frac{1}{2}$  a libovolné kladné tlumení, nenajdeme žádné vlastní číslo operátoru  $L_b^\eta$  pro  $\lambda > (\frac{b}{2})^2$ . Protože víme, že pro  $b = 0$  vlastní čísla najdeme, tedy Fučikovo spektrum není prázdné, zajímá nás, co se s Fučikovým spektrem stane pro zvyšující tlumení.



Obrázek 4.22: Náhled na Fučikovo spektrum operátoru  $L_b^\eta$  pro  $\eta = \frac{1}{2}$  a  $b = \frac{1}{10}$ . Vlevo velký rozsah a body Fučikova spektra, vpravo nepřípustná oblast.

Fučikovo spektrum jsme získali využitím programovacího jazyka Fortran90, který je pro tento typ výpočtu velmi rychlý. Ale pro hodnoty  $\alpha > 1000$ , si již numericky neporadí s řešením diferenciálních rovnic. Abychom získali představu, co se děje s Fučikovým spektrem i pro hodnoty větší než je  $\alpha = 1000$ , použijeme podstatně pomalejší, ale stabilnější a přesnější výpočet. Konstrukce celého Fučikova spektra do daného rozsahu by byla časově neúnosná, proto volíme jiný postup. Nebudeme hledat celé Fučikovo spektrum, ale pouze body, které patří do Fučikova spektra a leží na přímce o směrnici  $k$ ,  $k > 1$ , v souřadnicích  $\sqrt{\alpha}$ ,  $\sqrt{\beta}$ . Na obrázku 4.22 vidíme vpravo Fučikovo spektrum pro  $\eta = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{10}$  i s nepřípustnou oblastí. Vlevo vidíme některé body Fučikova spektra pro velký rozsah. Větve Fučikova spektra se od diagonály odchyľují v souřadnicích  $\sqrt{\alpha}$ ,  $\sqrt{\beta}$  přibližně po přímce se směrnici  $k = 1.39$ .



# Shrnutí

Cílem této bakalářské práce bylo prozkoumat Neumannovu okrajovou úlohu, periodickou okrajovou úlohu a přechod mezi těmito úlohami, který je reprezentován tříbodovou okrajovou úlohou.

V kapitole 1 jsme zkoumali model několika matematických kyvadel (tzv. Pendulum Waves) i se zarážkou. Našli jsme postup, kterým získáme vhodné délky závěsů jednotlivých kyvadel a to použitím diagramu řešení a Fučíkova spektra.

V kapitole 2 jsme se zabývali základními úlohami - Neumannovou okrajovou úlohou a periodickou okrajovou úlohou. Odvodili jsme tvar vlastních čísel jednotlivých diferenciálních operátorů a detailně popsali postup analytického odvození Fučíkova spektra u Neumannovy okrajové úlohy bez tlumení.

V kapitole 3 jsme se zabývali tříbodovou okrajovou úlohou bez tlumení, popsali jsme postup, kterým získáme vlastní čísla daného operátoru a numericky zkonstruovali Fučíkovo spektrum.

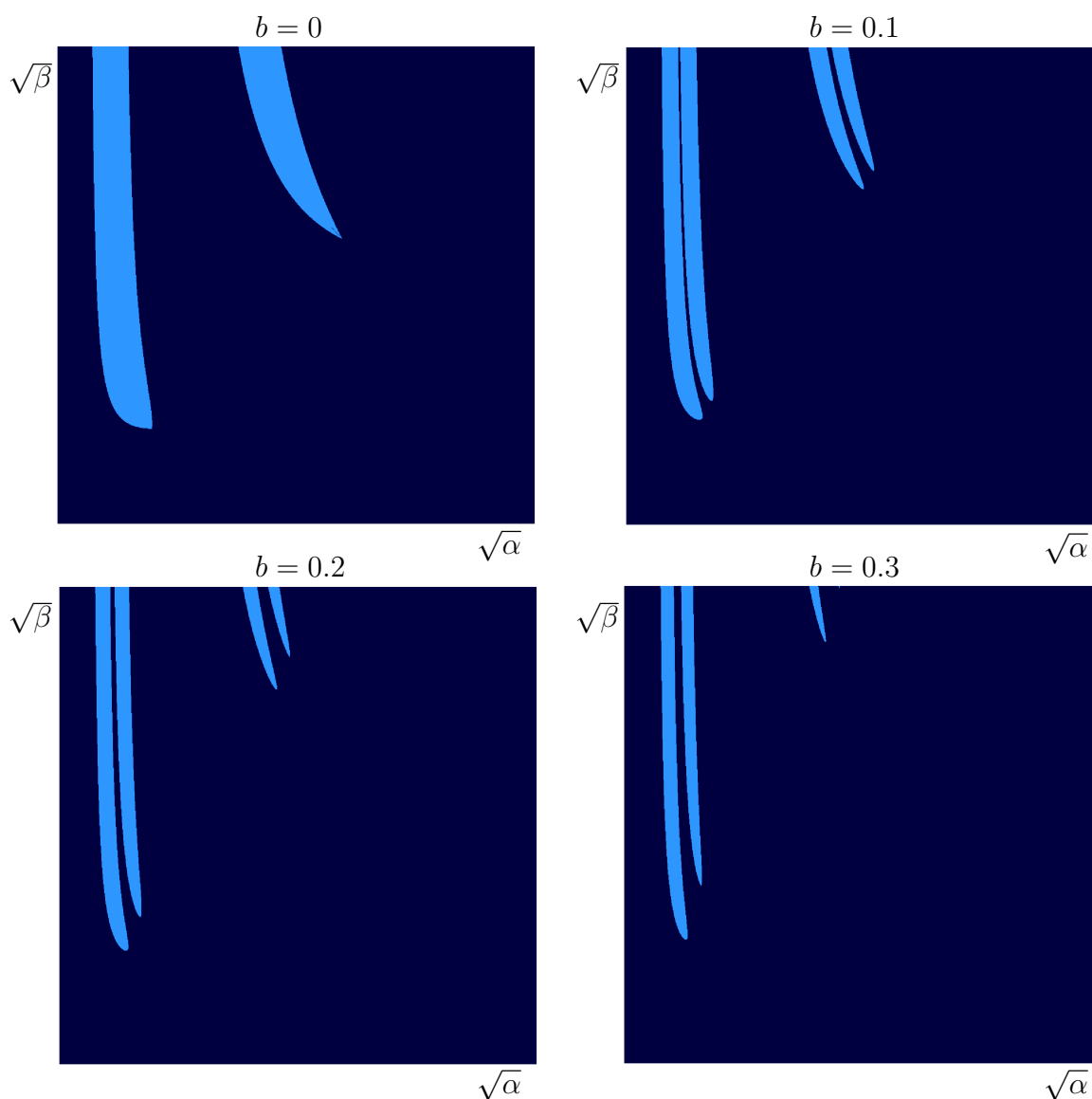
V kapitole 4 najdeme hlavní výsledky této práce. Zkoumali jsme zde vlastnosti tříbodové úlohy s tlumením. Protože vlastní čísla jsme nebyli schopni získat analyticky, zaměřili jsme se na několik důležitých otázek. Podařilo se nám analyticky najít hodnotu parametru  $\eta$ , pro kterou má příslušný diferenciální operátor jediné vlastní číslo. V rovině  $\eta, b$  jsme analyticky našli oblast, kde existuje pouze konečný počet vlastních čísel a numericky jsme našli oblast, pro kterou má příslušný diferenciální operátor jediné vlastní číslo. Numericky jsme sestrojili Fučíkovo spektrum a diskretizací získali přibližnou nepřípustnou oblast Fučíkova spektra.

Jedním z cílů práce bylo prozkoumat tříbodovou okrajovou úlohu s tlumením a nenulovou pravou stranou. Vzhledem k obtížnosti získání jakýchkoliv informací o úloze s nulovou pravou stranou (kapitola 4), jsme usoudili, že toto téma přesahuje rozsah této bakalářské práce a je zajímavým podnětem pro další práci.

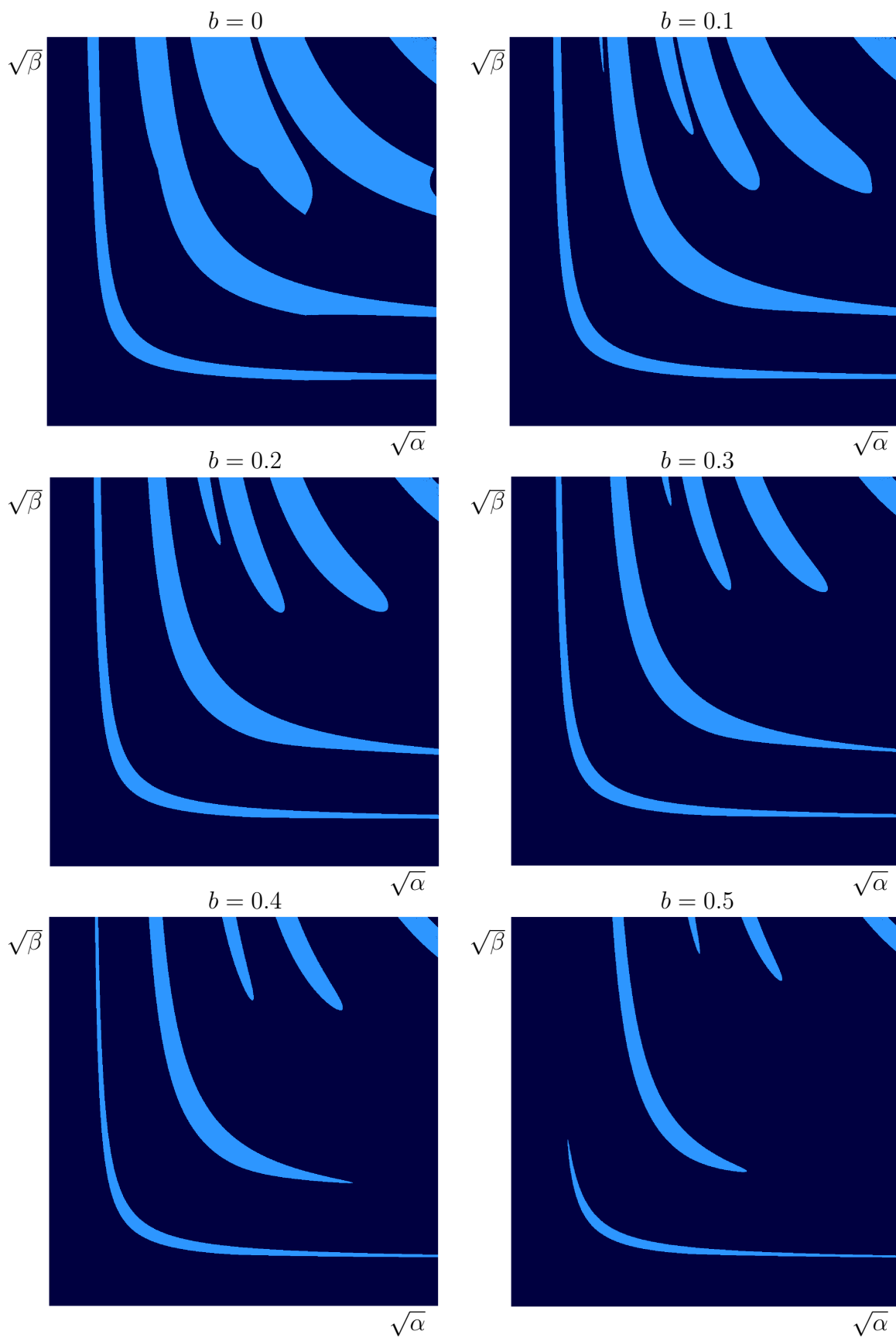
# Literatura

- [1] Agarwal, R.; O'Regan, D.: An introduction to ordinary differential equations. Universtext. New York, NY: Springer. XII, 322 p. (2008).
- [2] Coddington, E. A.; Levinson, N.: Theory of ordinary differential equations. New York, Toronto, London: McGill-Hill Book Company, Inc. XII, 429 p. (1955).
- [3] Fučík, S.: Solvability of nonlinear equations and boundary value problems. Mathematics and its Applications, 4. Dordrecht - Boston - London: D. Reidel Publishing Company. X, 390 p. (1980).
- [4] Holodniok, M.; Klíč, A.; Kubíček, M.; Marek, M.: Metody analýzy nelineárních dynamických modelů. Academia, Praha, 424 p. (1986).
- [5] Holubová, G.; Nečesal, P.: Fučík spectrum in general: principal eigenvalues and inadmissible sets. Zasláno do tisku.
- [6] Holubová, G.; Nečesal, P.: Nontrivial Fučík spectrum of one non-selfadjoint operator. Nonlinear Anal. 69 (2008), no. 9, 2930-2941.
- [7] Kufner, A.: Obyčejné diferenciální rovnice. Plzeň: Západočeská univerzita, 159 p. (1993).
- [8] Míka, S.; Příkryl, P.; Brandner, M.: Speciální numerické metody. Plzeň: 305 p. (2006).

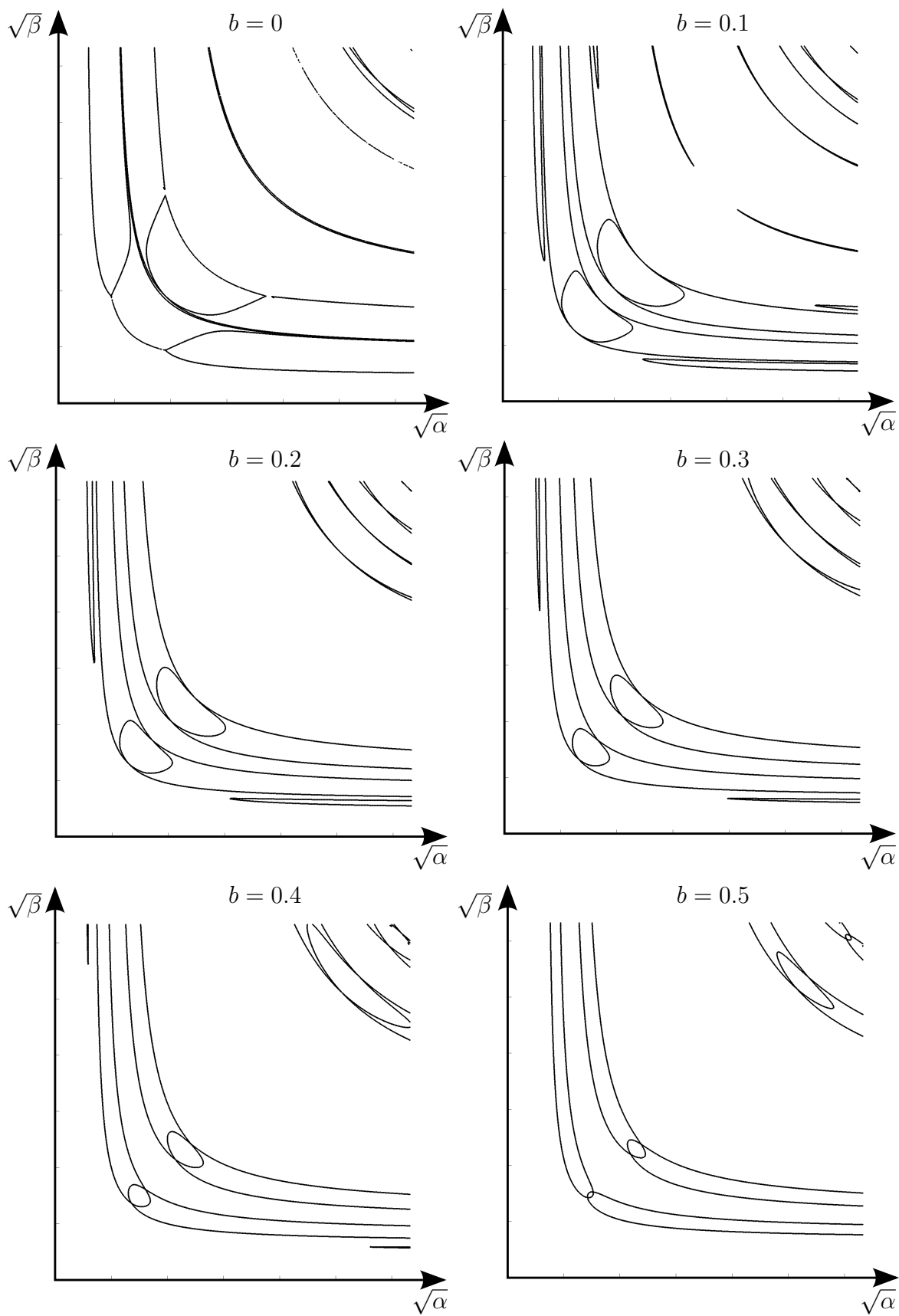
# Příloha



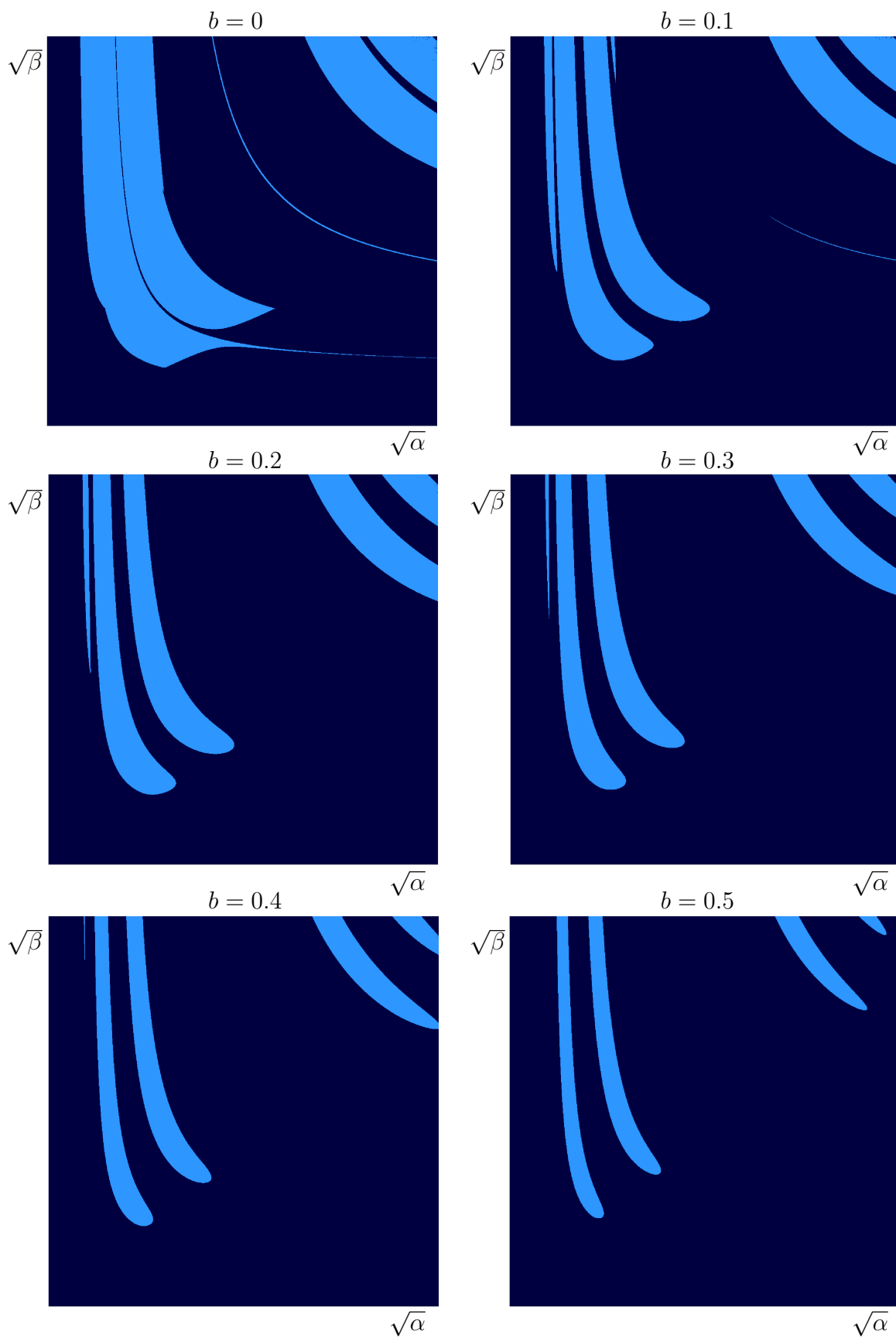
Obrázek P.1: Náhled na Fučíkovo spektrum  $\Sigma(L_b^\eta)$  pro  $\eta = 0.5$  pro rostoucí koeficient tlumení  $b$ .



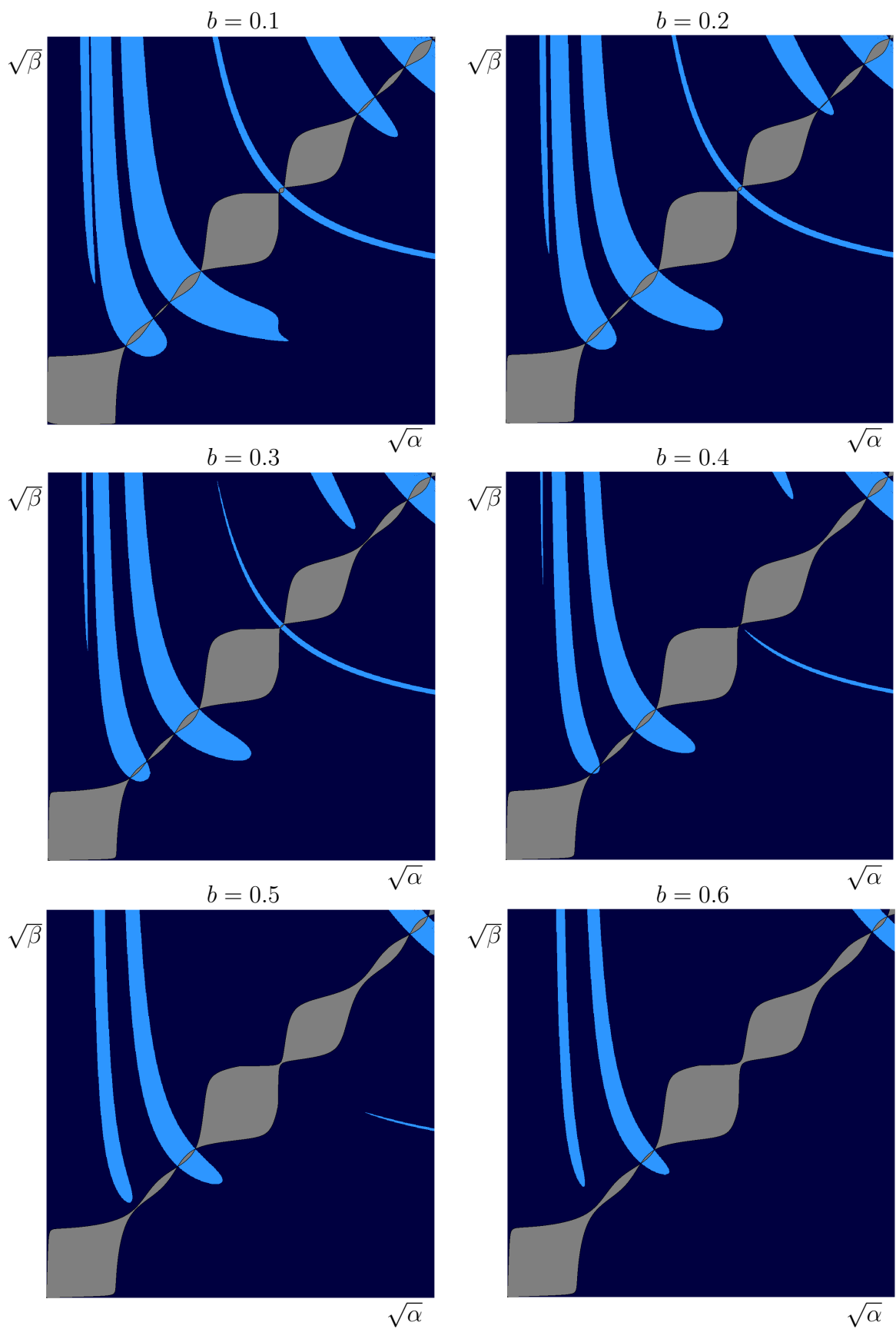
Obrázek P.2: Náhled na Fučíkovo spektrum  $\Sigma(L_b^\eta)$  pro  $\eta = 0.85$  pro rostoucí koeficient tlumení  $b$ .



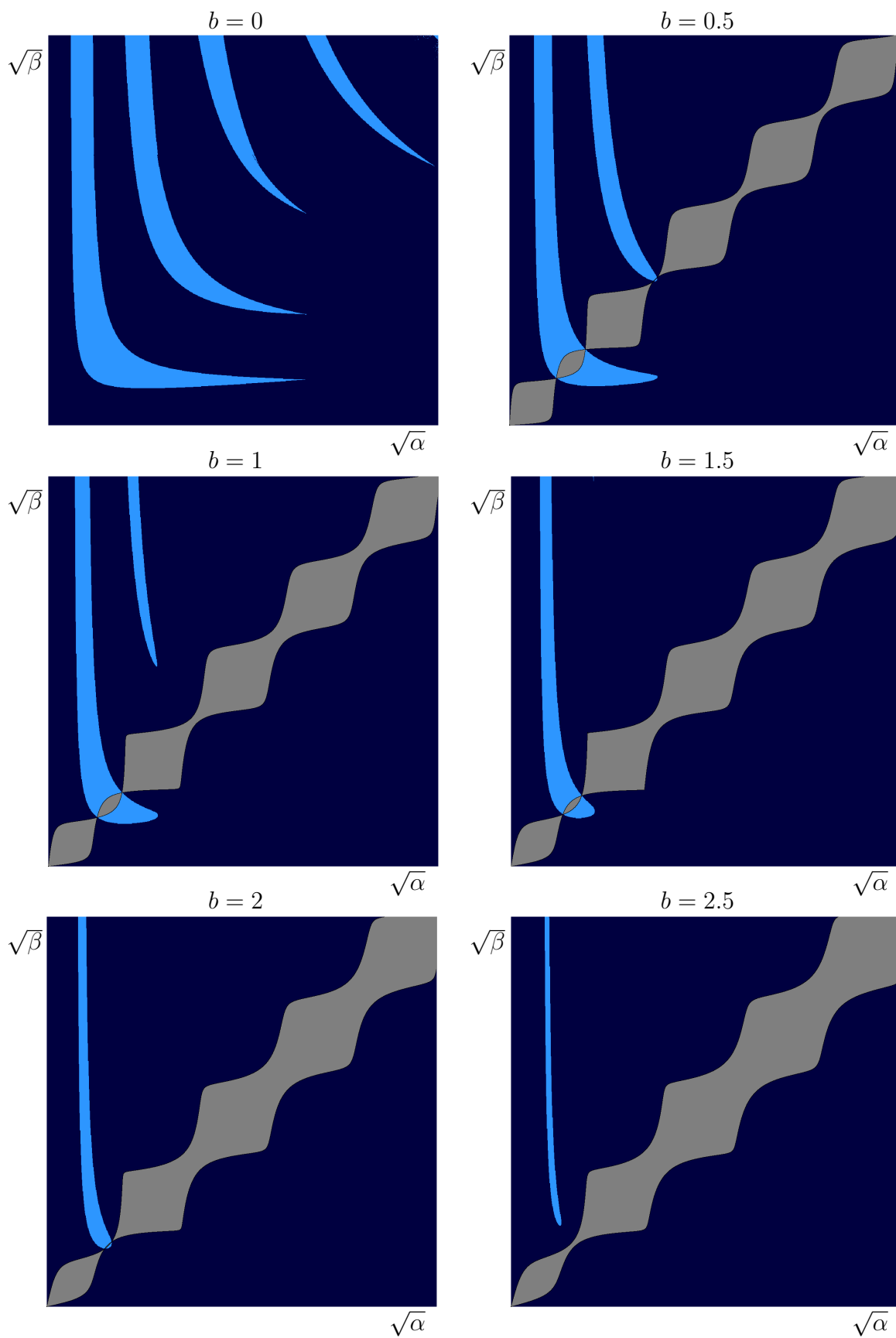
Obrázek P.3: Fučíkovo spektrum  $\Sigma(L_b^\eta)$  pro  $\eta = 0.67$  získané tzv. metodou střelby.



Obrázek P.4: Náhled na Fučíkovo spektrum  $\Sigma(L_b^\eta)$  pro  $\eta = 0.67$  získaný metodou TopView pro rostoucí koeficient tlumení  $b$ .



Obrázek P.5: Náhled na Fučíkovo spektrum  $\Sigma(L_b^\eta)$  pro  $\eta = 0.65$  a nepřístupné oblasti pro rostoucí koeficient tlumení  $b$ .



Obrázek P.6: Náhled na Fučíkovo spektrum  $\Sigma(L_b^\eta)$  pro  $\eta = 0.15$  a nepřístupné oblasti pro rostoucí koeficient tlumení  $b$ .