

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

KATEDRA MATEMATIKY

Bakalářská práce

Vlastní čísla a poloviční vlastní čísla
diferenciálních a diferenčních operátoru
druhého řadu

Plzeň, 2016

Kateryna Fedchenko

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne _____

Kateryna Fedchenko

Poděkování

Nejprve děkuji Ing. Petru Nečasalu, Ph.D. za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích a vypracování bakalářské práce, trpělivost a věnovaný čas. Dále bych chtěla poděkovat Ing. Milanu Becvařu za pomoc při korekturách gramatiky práce. Moje velké poděkování patří také mé milované rodině.

Abstrakt

Tato bakalářská práce je zaměřena na studium vlastních čísel, Fučíkovo vlastních čísel a polovičních vlastních čísel obyčejných diferenciálních operátorů druhého řádu. Nejprve najdeme analytické předpisy bodového spektra a Fučíkovo spektra vybraných samoadjungovaného a nesamoadjungovaného operátorů. Na příkladu operátoru Dirichleta popíšeme pojem polovičních vlastních čísel a jejich vztah k Fučíkovo vlastním číslům. Potom aproximujeme popsané bodové spektra spektry odpovídajících diferenčních operátorů a porovnáme je. Pomoci integrované funkce *bvp4c* programu MATLAB provedeme numerickou konstrukci Fučíkovo spektra vybraných operátorů.

Klíčová slova: vlastní čísla, Fučíkovo spektrum, poloviční vlastní čísla, samoadjungovaný operátor, nesamoadjungovaný operátor.

Abstract

This bachelor thesis is focused on the research of eigenvalues, Fučík eigenvalues and half eigenvalues of ordinary differential operators of the second order. First, we will find analytical regulations of the point spectrum and the Fučík spectrum of the selected self-adjoint and non-self-adjoint operators. In the example of the Dirichlet operator, we will describe the concept of half-eigenvalues and their relationship to Fučík eigenvalues. Then we will approximate described point spectrums to corresponding difference operators' spectrums and compare them. Using the integrated MATHLAB function *bvp4c*, we will perform the numeric construction of the Fučík spectrum of the selected operators.

Keywords: eigenvalues, the Fučík spectrum, half-eigenvalues, the self-adjoint operator, the non self-adjoint operator.

Obsah

1	Teoretické podklady	1
1.1	Existence a jednoznačnost řešení počáteční úlohy	1
1.2	Samoadjungované a nesamoadjungované operátory	1
2	Diferenciální operátory	4
2.1	Vlastní čísla a vlastní funkce	4
2.1.1	Spektrum samoadjungovaného operátoru	4
2.1.2	Spektrum nesamoadjungovaného operátoru	6
2.2	Fučíkovo spektrum	7
2.2.1	Fučíkovo spektrum samoadjungovaného operátoru	7
2.2.2	Fučíkovo spektrum nesamoadjungovaného operátoru	18
2.3	Poloviční vlastní čísla	24
2.3.1	Poloviční vlastní čísla samoadjungovaného operátoru	24
3	Diskretizace diferenciálních operátorů	28
3.1	Vlastní čísla diferenčních operátorů	28
3.1.1	Diferenční operátor odpovídající samoadjungovanému operátoru	28
3.1.2	Diferenční operátor odpovídající nesamoadjungovanému operátoru	30
3.2	Fučíkovo spektrum diferenčních operátorů	33
3.2.1	Fučíkovo spektrum diferenčního operátoru \mathbf{A}	33
3.2.2	Fučíkovo spektrum diferenčního operátoru $\hat{\mathbf{A}}$	36
3.3	Numericky výpočet Fučíkovo spektra pomocí funkce <i>bvp4c</i>	36
3.3.1	Fučíkovo spektrum samoadjungovaného operátoru	37
3.3.2	Fučíkovo spektrum nesamoadjungovaného operátoru	38
A	Fučíkovo spektrum diferenčního operátoru \mathbf{A}	42
B	Fučíkovo spektrum diferenčního operátoru $\hat{\mathbf{A}}$	46

Úvod

Práce je rozdělena do třech kapitol.

V první kapitole zdefinujeme pojmy samoadjungovaného a nesamoadjungovaného operátoru, zavedeme operátory s kterými budeme dále pracovat.

Druhá kapitola je věnovaná studování vlastních čísel a Fučíkovo vlastních čísel vybraných diferenciálních operátorů. Uvedeme poměrně málo studovaný pojem polovičního vlastního čísla na příkladu operátoru Dirichleta a ukážeme jeho přímou závislost na pojmu Fučíkovo vlastního čísla.

Ve třetí kapitole provedeme diskretizace výše popsaných diferenciálních operátorů. Pro tyto diferenční operátory najdeme jejich vlastní čísla a Fučíkovo vlastní čísla. Pomoci integrované funkce programu MATLAB navrhne algoritmus numerické aproximaci Fučíkovo vlastních čísel uvažovaných operátorů.

Kapitola 1

Teoretické podklady

1.1 Existence a jednoznačnost řešení počáteční úlohy

Nechť máme počáteční úlohu v maticovém tvaru:

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \\ \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ukážeme kdy pro úlohu (1.1) existuje jednoznačné řešení.

Věta 1.1 (Picardová věta o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy). [viz [5]]

Uvažujme počáteční úlohu (1.1) a předpokládáme, že funkce \mathbf{f} je definována v oblasti $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a $G = \{(x, \mathbf{u}) : \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_k \leq b\} \subset D$ (kde $\|\mathbf{x}\|_k = (|x_1|^k + |x_2|^k + \dots + |x_n|^k)^{\frac{1}{k}}$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $k, n \in \mathbb{N}$).

Nechť platí podmínky:

1. $\mathbf{f} \in C(G)$;
2. funkce \mathbf{f} splňuje Lipschitzovou podmínku vzhledem k \mathbf{u} na G ze konstantou N .

Potom pro $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M = \max_G \|\mathbf{f}\|_k$, na intervalu $[x_0 - h, x_0 + h]$ existuje právě jedno řešení \mathbf{u} úlohy (1.1).

Důkaz. Důkaz je uveden v [5, str.79], s poznámkou 3.6 str.81. □

1.2 Samoadjungované a nesamoadjungované operátory

Definice 1.1. Budiž $A : L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$ lineární operátor, jehož definiční obor $D(A)$ je hustý v $L^2(a, b)$. Označme $D(A^*)$ množinu všech těch prvků $u \in L^2(a, b)$, k nimž existuje prvek $w \in L^2(a, b)$ tak, že pro všechna $v \in D(A)$ platí

$$(u, Av) = (w, v). \quad (1.2)$$

Pro každé $u \in D(A^*)$ pak píšeme

$$w = A^*u, \quad (1.3)$$

a operátor $A^* : L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$, přiřazující prvku $u \in D(A^*) \subset L^2(a, b)$ prvek $w \in L^2(a, b)$ předpisem (1.2), nazýváme operátorem adjungovaným k A . [2]

Definice 1.2. Operátor A je symetrický, platí-li pro všechny prvky $u, v \in D(A)$ rovnost

$$(Au, v) = (u, Av). \quad (1.4)$$

[2]

Definice 1.3. Lineární operátor $A : L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$, definovaný na husté množině $D(A) \subset L^2(0, \pi)$, se nazývá samoadjungovaný, je-li symetrický a platí-li $D(A) = D(A^*)$, tj. je-li $A^* = A$. [2]

Definujme diferenciální operátor druhého řádu $L^D : D(L^D) \subset L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$:

$$\begin{aligned} L^D u &:= -u'', \\ D(L^D) &:= \{u \in C^2(0, \pi) \cap C^1[0, \pi] : u(0) = 0, u(\pi) = 0\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

a diferenciální operátor druhého řádu $L^N : D(L^N) \subset L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$:

$$\begin{aligned} L^N u &:= -u'', \\ D(L^N) &:= \{u \in C^2(0, \pi) \cap C^1[0, \pi] : u'(0) = 0, u(0) = 2u(\pi) = 0\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Tvrzení 1.2. Operátor L^D je samoadjungovaný.

Důkaz. Dokážeme, že L^D je symetricky podle definice 1.3 :

$$(L^D u, v) = - \int_0^\pi u''(x)v(x) dx = -[u'(\pi)v(\pi) - u'(0)v(0)] + [u(\pi)v'(\pi) - u(0)v'(0)] - \int_0^\pi u(x)v''(x) dx.$$

Protože $u, v \in D(L^D)$ tak $u(0) = u(\pi) = 0$ a $v(0) = v(\pi) = 0$, a tehdy

$$(L^D u, v) = - \int_0^\pi u''(x)v(x) dx = -0 + 0 - \int_0^\pi u(x)v''(x) dx = (u, L^D v)$$

.

□

Tvrzení 1.3. Operátor L^N není samoadjungovaný.

Důkaz. Předpokládejme, že L^N je samoadjungovaný operátor. Pak pro libovolné $u, v \in D(L^N)$ platí rovnost (1.4) . Použijeme dvakrát per-partes a dostaneme:

$$(L^N u, v) = - \int_0^\pi u''(x)v(x) dx = -[u'(\pi)v(\pi) - u'(0)v(0)] + [u(\pi)v'(\pi) - u(0)v'(0)] - \int_0^\pi u(x)v''(x) dx.$$

Protože $u, v \in D(L^N)$ tak $u'(0) = 0, u(0) = 2u(\pi)$ a $v'(0) = 0, v(0) = 2v(\pi)$, a tedy

$$\begin{aligned} (L^N u, v) &= - \int_0^\pi u''(x)v(x) \, dx = -u'(\pi)v(\pi) + u(\pi)v'(\pi) - \int_0^\pi u(x)v''(x) \, dx = \\ &= -u'(\pi)v(\pi) + u(\pi)v'(\pi) + (u, L^N v). \end{aligned}$$

Vidíme, že symetricky operátor není. Tedy operátor L^N je nesamoadjungovaný. \square

Tvrzení 1.4. Operátor $L^{N*} : D(L^{N*}) \subset L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$:

$$\begin{aligned} L^{N*}u &:= -u'', \\ D(L^{N*}) &:= \{u \in C^2(0, \pi) \cap C^1[0, \pi] : u(\pi) = 0, 2u'(0) = u'(\pi)\} \end{aligned}$$

je adjungovaný operátor k operátoru L^N .

Důkaz. Pro libovolné $u \in D(L^N)$ a $v \in D(L^{N*})$:

$$(L^N u, v) = - \int_0^\pi u''(x)v(x) \, dx = -[u'(\pi)v(\pi) - u'(0)v(0)] + [u(\pi)v'(\pi) - u(0)v'(0)] - \int_0^\pi u(x)v''(x) \, dx.$$

Protože $u \in D(L^N)$, $v \in D(L^{N*})$ tak $u'(0) = 0, u(0) = 2u(\pi)$ a $v(0) = 0, 2v'(0) = v'(\pi)$, a tedy

$$(L^N u, v) = - \int_0^\pi u''(x)v(x) \, dx = - \int_0^\pi u(x)v''(x) \, dx = (u, L^{N*}v).$$

Potom z definice 1.1 L^{N*} je adjungovaný k L^N . \square

Kapitola 2

Diferenciální operátory

2.1 Vlastní čísla a vlastní funkce

2.1.1 Spektrum samoadjungovaného operátoru

V této kapitole popíšeme vlastní čísla samoadjungovaného operátoru (3.30). Budeme uvažovat operátorovou rovnici

$$L^D u = \lambda u$$

které odpovídá okrajová úloha tvaru:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Řešením úlohy budeme nazývat takovou funkci $u(x) \in C^2(0, \pi)$, která splňuje diferenciální rovnice úlohy na daném intervalu a vyhovuje okrajovým podmínkám této úlohy.

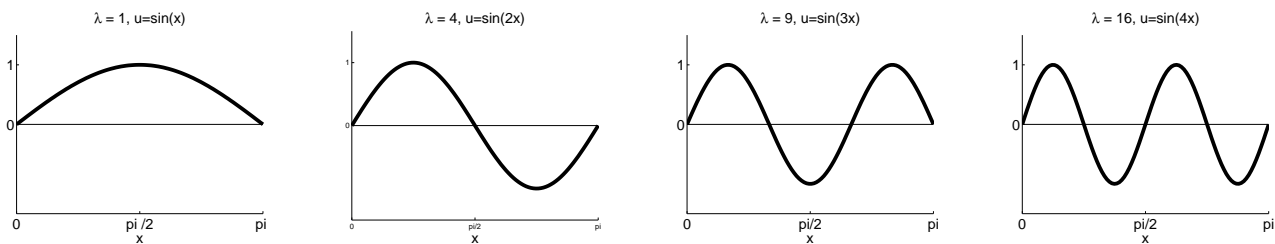
Definice 2.1. *Parametr λ při kterém úloha (2.1) má netriviální řešení $u(x)$ nazveme vlastním číslem operátoru L^D a příslušnou funkci $u(x)$ (a její nenulové násobky) nazveme vlastní funkce operátoru L^D odpovídající vlastnímu číslu λ .*

Množinu všech vlastních čísel operátoru L^D $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R} : \text{úloha má netriviální řešení}\}$ nazveme bodovým spektrem tohoto operátoru.

Tvrzení 2.1. *Bodový spektrum operátoru L^D je množina $\Lambda = \{\lambda = k^2, k \in \mathbb{N}\}$. Každému vlastnímu číslu $\lambda = k^2$ odpovídá vlastní funkce $u(x) = c \sin kx$, $c \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Charakteristická rovnice úlohy (2.1) má tvar $k^2 + \lambda = 0$. Prošetříme pak 3 možných varianty parametru λ .

1. Položíme $\lambda = 0$. Tedy charakteristická rovnice má 2-násobné kořeny $k_1 = 0, k_2 = 0$ a obecný tvar řešení $u(x) = c_1 + c_2 x$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Aby zjistit hodnoty c_1 a



Obrázek 2.1: První vlastní funkce Dirichletové úlohy .

c_2 dosadíme toto řešení do okrajových podmínek úlohy (2.1) a dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \cdot 0 = 0, \\ c_1 + c_2 \cdot \pi = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

odkud je zřejmé, že $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$, a tehdy úloha (2.1) má triviální řešení. Což znamená, že $\lambda = 0$ není vlastní číslo operátoru L^D .

2. Položíme $\lambda < 0$. Dostaneme z obecného tvaru řešení $u(x) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a okrajových podmínek úlohy (2.1) soustavu rovnic pro neznámé c_1 a c_2 :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

Z první rovnici platí vztah $c_2 = -c_1$, použijeme jeho v druhé rovnici a dostaneme

$$c_1(e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi}) = 0.$$

Taková rovnice platí jen pro $e^{\sqrt{-\lambda}\pi} = 1$, tj. pro $\lambda = 0$, tím pádem pro náš předpoklad $\lambda < 0$ řešení neexistuje.

3. Položíme $\lambda > 0$. Tehdy charakteristický polynom má za kořeny dva sdružených komplexních čísla $k_1 = \sqrt{\lambda}i$ a $k_2 = -\sqrt{\lambda}i$ a obecný tvar řešení je $u(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dosadíme jeho do okrajových podmínek a budeme řešit soustavu rovnic:

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0, \\ c_1 \sin \sqrt{\lambda}\pi + c_2 \cos \sqrt{\lambda}\pi = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

Řešením přijdeme na to, že $c_2 = 0$. Potom aby soustava měla netriviální řešení má platit $c_1 \neq 0$ a $\sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$, tj. $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{N}$, a vlastní funkce je $u(x) = c_1 \sin kx$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

□

Na obrázku 2.1 ukážeme jak vypadají první 4 vlastní funkce Dirichletové úlohy (položíme $c = 1$).

2.1.2 Spektrum nesamoadjungovaného operátoru

Nyní najdeme vlastní čísla a vlastní funkce vybraného nesamoadjungovaného operátoru. Pracovat budeme s okrajovou úlohou

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = 2u(\pi), u'(\pi) = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, odpovídající operátorové rovnici

$$L^N u = \lambda u.$$

Tvrzení 2.2. Bodový spektrum nesamoadjungovaného operátoru L^N je množina Λ^N taková, že

$$\Lambda^N = \Lambda_1^N \cup \Lambda_2^N,$$

kde $\Lambda_1^N = \{\lambda : \lambda = (\frac{1}{3} + 2k)^2\}$, $\Lambda_2^N = \{\lambda : \lambda = (\frac{5}{3} + 2k)^2\}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Vlastní funkce odpovídající množině Λ_1^N máji tvar

$$u(x) = C \cos \frac{6k+1}{3}x$$

a množině Λ_2^N

$$u(x) = C \cos \frac{6k+5}{3}x,$$

$C \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Jako v předchozí kapitole zanalyzujeme 3 možné varianty parametru λ .

1. Položíme $\lambda = 0$. Obecný tvar řešení je dán funkcí $u(x) = c_1 + c_2x$. Z tvaru okrajových podmínek úlohy(2.5) vidíme, že budeme potřebovat ještě první derivace $u'(x) = c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Dosadíme do okrajových podmínek a dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{cases} c_1 = 2c_1 + 2c_2 \cdot \pi, \\ c_2 = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

odkud je zřejmé, že $c_1 = 0$ a $c_2 = 0$, a tehdy úloha (2.5) ma triviální řešení tj. $\lambda = 0$ není vlastní číslo operátoru L^N .

2. Položíme $\lambda < 0$. Obecný tvar řešení $u(x) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a jeho první derivace $u'(x) = -\sqrt{-\lambda}c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + \sqrt{-\lambda}c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ spolu s okrajovými podmínkami úlohy (2.5) vedou na soustavu rovnic pro neznáme c_1 a c_2 :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + 2c_2 e^{\sqrt{-\lambda}\pi}, \\ -\sqrt{-\lambda}c_1 + \sqrt{-\lambda}c_2 = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

Z druhé rovnice $c_1 = c_2$ a potom první rovnice

$$\begin{aligned} 2c_1 &= 2c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + 2c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} \\ e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + e^{\sqrt{-\lambda}\pi} &= 1 \quad | \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\pi} \neq 0 \\ e^{2\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnici převodem na řešení kvadratické rovnice dostaneme výsledek, že řešení neexistuje a $\lambda < 0$ není vlastní číslo operátoru L^N .

3. Položíme $\lambda > 0$. Pak charakteristický polynom má za kořeny dvě sdružené komplexní čísla a obecný tvar řešení je dán funkcí $u(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $u'(x) = \sqrt{\lambda}c_1 \cos \sqrt{\lambda}x - c_2 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dosadíme do okrajových podmínek a budeme řešit soustavu rovnic:

$$\begin{cases} 2c_1 \sin \sqrt{\lambda}\pi + 2c_2 \cos \sqrt{\lambda}\pi = c_2, \\ \sqrt{\lambda}c_1 = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

Protože náš předpoklad je $\lambda > 0$ tak z druhé rovnice plyne, že $c_1 = 0$, tím z první rovnici dostaneme $\cos \sqrt{\lambda}\pi = \frac{1}{2}$. Taková rovnice platí pro $\lambda = (\frac{1}{3} + 2k)^2$ a $\lambda = (\frac{5}{3} + 2k)^2$ $k \in \mathbb{N}_0$. Vlastní funkce má tvar souhlasně $u(x) = C \cos \frac{6k+1}{3}x$ a $u(x) = C \cos \frac{6k+5}{3}x$, $C \in \mathbb{R}$.

□

V tabulce 2.1 a na obrázku 2.2 ukážeme jak vypadají vlastní funkce nesamoadjungovaného operátoru pro $k = 0$, $k = 1$ a $k = 2$ (položíme $C = 1$).

Tabulka 2.1: Tabulka vlastních čísel a vlastních funkcí nesamoadjungovaného operátoru pro $k = 0, k = 1$ a $k = 2$.

	Λ_1^N	u	Λ_2^N	u
k=0	$\frac{1}{9}$	$\cos \frac{x}{3}$	$\frac{25}{9}$	$\cos \frac{5x}{3}$
k=1	$\frac{49}{9}$	$\cos \frac{7x}{3}$	$\frac{121}{9}$	$\cos \frac{11x}{3}$
k=2	$\frac{169}{9}$	$\cos \frac{13x}{3}$	$\frac{289}{9}$	$\cos \frac{17x}{3}$

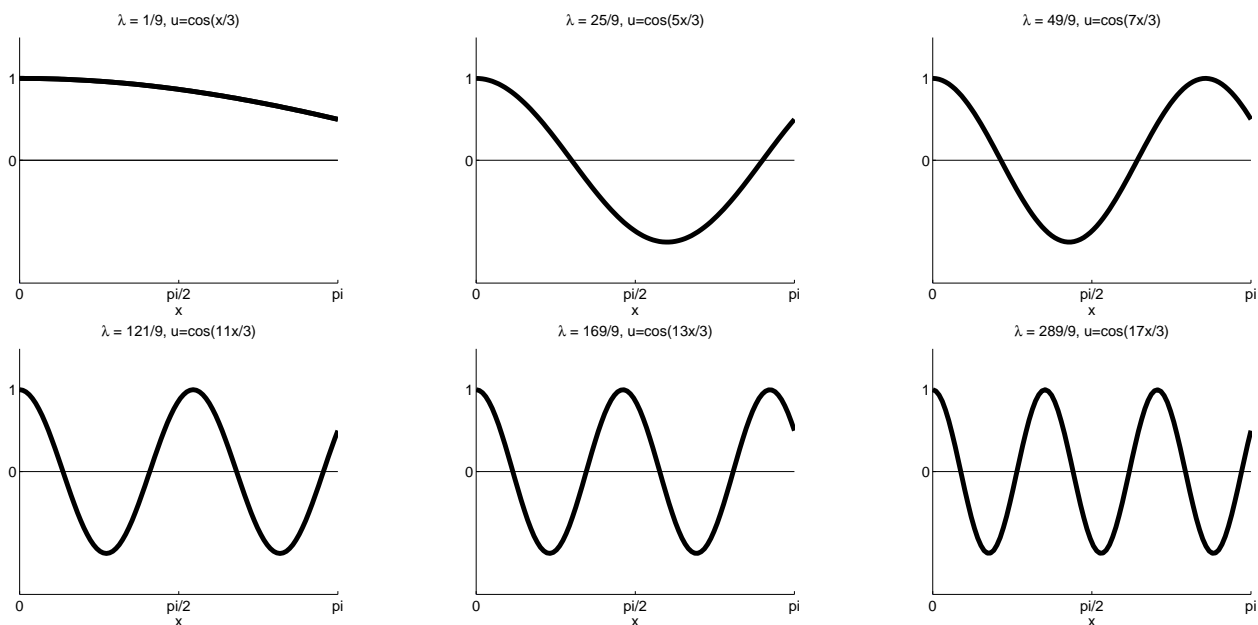
2.2 Fučíkovo spektrum

2.2.1 Fučíkovo spektrum samoadjungovaného operátoru

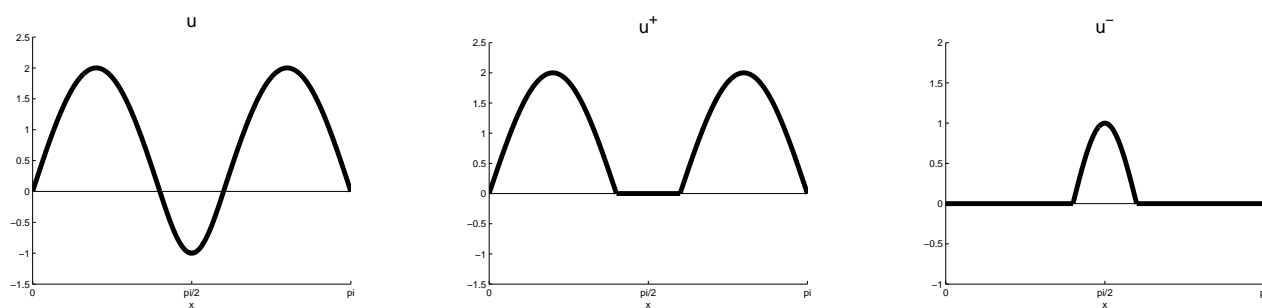
Uvažujme okrajovou úlohu:

$$\begin{cases} u'' + \alpha u^+ - \beta u^- = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

kde



Obrázek 2.2: Vlastní funkce nesamoadjungovaného operátoru odpovídající $\lambda = \frac{1}{9}$, $\lambda = \frac{25}{9}$, $\lambda = \frac{49}{9}$, $\lambda = \frac{121}{9}$, $\lambda = \frac{169}{9}$, $\lambda = \frac{289}{9}$.



Obrázek 2.3: Příklad konstrukce u^+ a u^- .

$$u^+ = u^+(x) = \begin{cases} u(x) & \text{pro } u(x) > 0, \\ 0 & \text{pro } u(x) \leq 0, \end{cases}$$

$$u^- = u^-(x) = \begin{cases} -u(x) & \text{pro } u(x) < 0, \\ 0 & \text{pro } u(x) \geq 0, \end{cases}$$

(2.10)

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. [3]

Příklad konstrukce funkcí u^+ a u^- z funkce u je uveden na obrázku 2.3

Z (2.10) pro funkce u^+ a u^- platí:

$$u = u^+ - u^-, \quad (2.11)$$

$$|u| = u^+ + u^-. \quad (2.12)$$

Řešením úlohy (2.9) budeme nazývat funkci $u \in C^2(0, \pi) \cap C^1([0, \pi])$, která řeší diferenciální rovnici úlohy na intervalu $(0, \pi)$ a splňuje dané okrajové podmínky úlohy.

Poznámka. Úloha (2.9) odpovídá operátorové rovnici

$$L^D u = \alpha u^+ - \beta u^- \quad (2.13)$$

a tedy vlastní čísla a vlastní funkce které řeší úlohu (2.9) jsou bodovým spektrem a vlastními funkcemi operátoru L^D .

Definice 2.2. Dvojici čísel (α, β) nazveme Fučíkovým vlastním číslem operátoru L^D pokud existuje taková funkce u , která je netriviálním řešením úlohy (2.9). Taková funkce u (a každý její kladný násobek) se nazývá Fučíkova vlastní funkce odpovídající Fučíkovu vlastnímu číslu (α, β) .

Množinu všech Fučíkových vlastních čísel operátoru L^D značíme Σ :

$$\Sigma := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{úloha(2.9) má netriviální řešení}\} \quad (2.14)$$

Množinu Σ nazveme Fučíkovým bodovým spektrem operátoru L^D .

Konstrukce řešení

Najdeme všechny dvojice (α, β) , pro které existuje netriviální řešení úlohy (2.9) $u \neq 0$.

1. Prozkoumáme případ, kdy vlastní funkce u nemá žádný nulový bod na intervalu $(0, \pi)$ (označíme ji u_1), což znamená, že buď je na celém intervalu $(0, \pi)$ kladná $u_1(x) > 0$, nebo záporná $u_1(x) < 0$.

Nechť $u_1(x) > 0$ pro $x \in (0, \pi)$, pak $u_1^+ = u_1$, a $u_1^- = 0$. Potom diferenciální rovnice úlohy (2.9) nabude tvaru

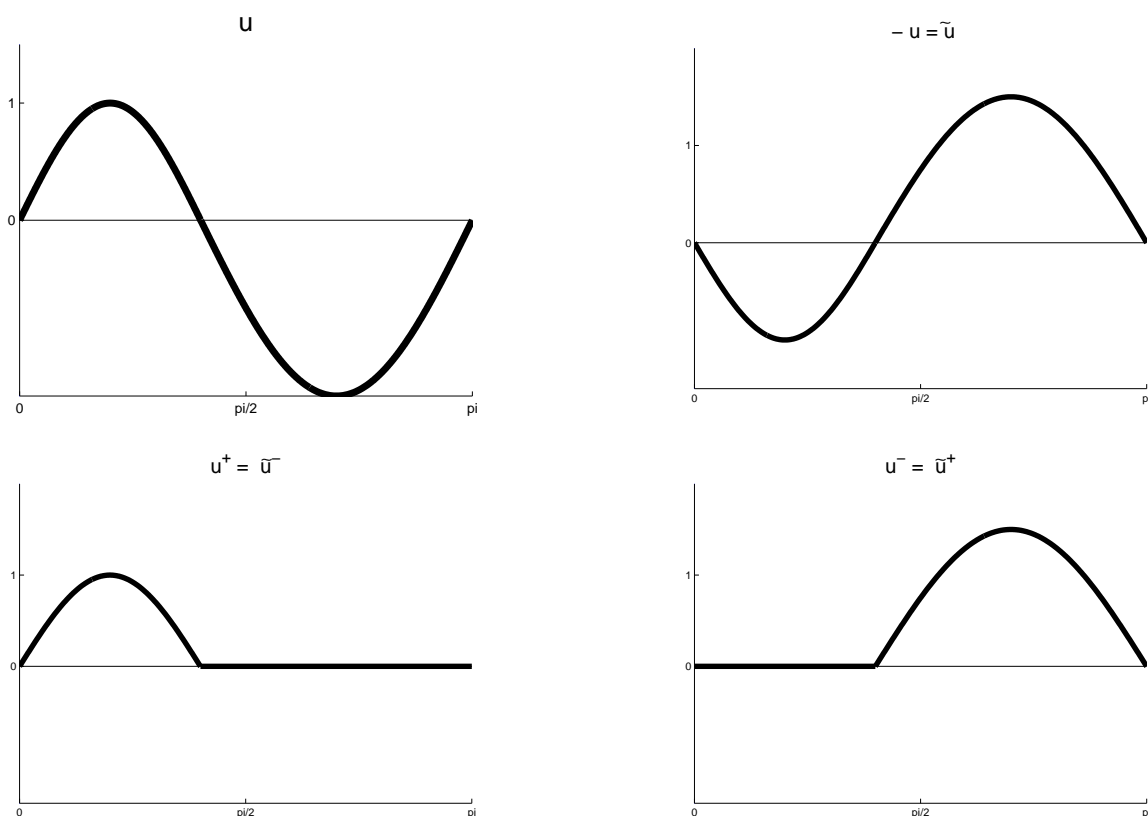
$$u_1'' + \alpha u_1^+ - \beta \cdot 0 = 0, \quad (2.15)$$

což můžeme zapsat

$$u_1'' + \alpha u_1 = 0. \quad (2.16)$$

Viz (2.1.1) řešením okrajové úlohy s diferenciální rovnicí (2.16) a okrajovými podmínkami $u_1(0) = 0, u_1(\pi) = 0$ bude funkce $u_1 = C_1 \sin(\sqrt{\alpha}x)$, $C_1 \in \mathbb{R}$ (je libovolná konstanta), odpovídající $\alpha = k^2, k \in \mathbb{N}$. Ale našemu předpokladu $u_1(x) > 0$ pro $x \in (0, \pi)$ vyhovuje jen řešení $u_1 = C_1 \sin(x)$, $C_1 > 0$ odpovídající $\alpha = 1$. Z rovnice (2.15) vyplývá, že β při tom lze volit libovolně.

Potom Fučíkovo vlastní čísla, odpovídající kladnému řešení $u_1 = C_1 \sin(x)$ mají tvar $(\alpha, \beta) = (1, c)$, $c \in \mathbb{R}$.



Obrázek 2.4: Vztahy mezi \tilde{u}^- a u .

Poznámka. Bez ujmu na obecnost při hledání řešení i dále budeme předpokládat, že každá hledána vlastní funkce $u(x)$ se začíná s kladné půlvlny.

Prozkoumáme případ kdy řešení úlohy (2.9) začíná se s záporné půlvlny. Označíme takovou funkci $\tilde{u}(x) = -u(x)$. Na obrázku 2.4 pro lepší představu zobrazíme funkce $\tilde{u}(x)$ a odpovídající jim funkce (2.10).

Zřejmě platí $u^+ = \tilde{u}^-$ a $u^- = \tilde{u}^+$. Tedy zapíšeme diferenciální rovnice úlohy (2.9) takto: $-\tilde{u}'' + \alpha\tilde{u}^- - \beta\tilde{u}^+ = 0$, a po upravě dostaneme

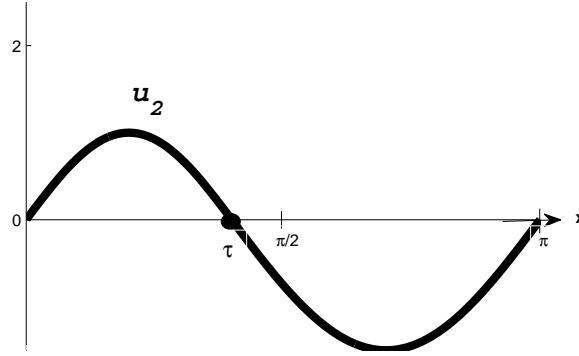
$$\begin{cases} \tilde{u}'' + \beta\tilde{u}^+ - \alpha\tilde{u}^- = 0, \\ \tilde{u}(0) = 0, \tilde{u}(\pi) = 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

Vidíme, že úloha (2.17) je ekvivalentní úloze (2.9), jen že se ve výsledcích prohodí α a β . Takže pokud (α, β) je Fučikovo vlastní číslo, pak taky i (β, α) .

2. Ted' budeme uvažovat případ, kdy vlastní funkce u (označíme ji u_2) má právě jeden nulový bod $x = \tau$ na intervalu $(0, \pi)$. Tedy $u(\tau) = 0$, $\tau \in (0, \pi)$.

Předpokládejme, že $u_2(x) > 0$ pro $x \in (0, \tau)$ a $u_2(x) < 0$ pro $x \in (\tau, \pi)$. Příklad konstrukce funkce u_2 je uvedeno na obrázku 2.5

Pak můžeme úlohu (2.9) rozdělit na 2 úlohy:



Obrázek 2.5: Příklad konstrukce funkce u_2 .

$$\begin{cases} u_2'' + \alpha u_2^+ - \beta \cdot 0 = 0, & x \in (0, \tau) \\ u_2(0) = 0, u_2(\tau) = 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

a

$$\begin{cases} u_2'' + \alpha \cdot 0 - \beta u_2^- = 0, & x \in (\tau, \pi) \\ u_2(\tau) = 0, u_2(\pi) = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Poněvadž $u_2^+ = u_2$ na $(0, \tau)$ diferenciální rovnici úlohy (2.18) můžeme zapsat ve tvaru $u_2'' + \alpha u_2 = 0$. Obecný tvar řešení takové diferenciální rovnice je dán vzorcem $u_2 = c_1 \sin(\sqrt{\alpha}x) + c_2 \cos(\sqrt{\alpha}x)$, c_1, c_2 jsou libovolné konstanty (viz předchozí kapitola). Dosazením tohoto řešení do okrajových podmínek úlohy (2.18) dostaneme systém rovnic:

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ c_1 \sin(\sqrt{\alpha}\tau) = 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

kde c_1, c_2 jsou neznámé, a α, τ - parametry. Aby u_2 bylo netriviálním řešením úlohy (2.18) potřebujeme $c_1 \neq 0$, proto $\sin(\sqrt{\alpha}\tau) = 0$. Tedy $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}k$, $k \in \mathbb{N}$. Protože u_2 je kladná na celém uvažovaném intervalu volíme $k = 1$. Takže

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, \quad (2.21)$$

$$u_2 = c_1 \sin(\sqrt{\alpha}x), c_1 \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

Nyní prošetříme úlohu (2.19). Na (τ, π) $u_2^- = -u_2$, proto diferenciální rovnice úlohy (2.19) nabude tvaru $u_2'' + \beta u_2 = 0$ a jejím obecným řešením je funkce $u_2 = c_1 \sin(\sqrt{\beta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\beta}x)$,

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (jako v předchozí úloze (2.18)). Dosazením do okrajových podmínek úlohy (2.19) dostaneme systém rovnic:

$$\begin{cases} c_1 \sin \sqrt{\beta}\tau + c_2 \cos \sqrt{\beta}\tau = 0 \\ c_1 \sin \sqrt{\beta}\pi + c_2 \cos \sqrt{\beta}\pi = 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

Tento systém je homogenní soustavou lineárních rovnic o 2 neznámých c_1 a c_2 . Jedno z řešení soustavy je $c_1 = 0, c_2 = 0$. Viz [8, Veta 7.5] pokud determinant matice koeficientů soustavy (2.23) nebude roven nule tak systém má jediné řešení, což v našem případě znamená $c_1 = 0, c_2 = 0$. Tedy aby u_2 bylo netriviálním řešením úlohy (2.19) determinant matice koeficientů soustavy (2.23) má být roven nule:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \sin \sqrt{\beta}\tau & \cos \sqrt{\beta}\tau \\ \sin \sqrt{\beta}\pi & \cos \sqrt{\beta}\pi \end{vmatrix} &= \sin \sqrt{\beta}\tau \cdot \cos \sqrt{\beta}\pi - \cos \sqrt{\beta}\tau \cdot \sin \sqrt{\beta}\pi = \\ &= \sin(\sqrt{\beta}\tau - \sqrt{\beta}\pi) = \sin(\sqrt{\beta}(\tau - \pi)) = 0. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme, že systém má nenulové řešení pro: $\sqrt{\beta}(\tau - \pi) = \pi k, k \in \mathbb{N}$. Jelikož z našeho předpokladu $u_2(x) < 0$ pro $x \in (\tau, \pi)$ volíme $k = 1$.

Máme: $\tau - \pi = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$. Místo parametru τ pak dosadíme už známý předpis (2.21) a dostaneme:

$$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi. \quad (2.24)$$

Tím pádem máme vztah mezi α a β a můžeme zapsat ho ve tvaru:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 1. \quad (2.25)$$

Pak pro všechny dvojice $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, která splňují vztah (2.25) Fučíkova vlastní funkce má právě jeden nulový bod $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, \tau \in (0, \pi)$.

Takovou vlastní funkci skládáme po částech z řešení úloh (2.18): $u_2 = c_1 \sin(\sqrt{\alpha}x), x \in (0, \tau)$ a (2.19): $u_2 = -c_2 \sin(\sqrt{\beta}(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}})), x \in (\tau, \pi)$, kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, s uvažováním toho, že funkce $u_2(x)$ musí být spojitě diferencovatelná na intervalu $(0, \pi)$, to znamená, že $u_2(x)$ má mít stejnou derivaci v bodě $x = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ zleva a zprava. Tedy: $-c_1\sqrt{\alpha} = -c_2\sqrt{\beta}$, a odtud c_1, c_2 se volí takto:

$$c_2 = c_1 \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}. \quad (2.26)$$

Pak vlastní funkce, odpovídající Fučíkovo vlastním číslu (α, β) , která má právě jeden nulový

bod na intervalu $(0, \pi)$ má předpis:

$$u_2(x) = \begin{cases} A \sin(\sqrt{\alpha}x) & \text{pro } x \in (0, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}), \\ -A \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \sin(\sqrt{\beta}(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}})) & \text{pro } x \in (\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, \pi), \end{cases} \quad A \in \mathbb{R}. \quad (2.27)$$

3. Půjdeme o kousek dál, a prošetříme případ, kdy vlastní funkce $u = u_3$ má právě dva nulové body $x = \tau_1$, $u(\tau_1) = 0$ a $x = \tau_2$, $u(\tau_2) = 0$ na intervalu $(0, \pi)$, $\tau_1 < \tau_2$.

Uvažujme případ, kdy funkce u_3 se začíná z kladné půlvlny, tedy $u_3(x) > 0$ pro $x \in (0, \tau_1)$, $u_3(x) < 0$ pro $x \in (\tau_1, \tau_2)$ a $u_3(x) > 0$ pro $x \in (\tau_2, \pi)$.

Potom můžeme úlohu (2.9) rozdělit na 3 úlohy:

$$\begin{cases} u_3'' + \alpha u_3^+ - \beta \cdot 0 = 0, & x \in (0, \tau_1) \\ u_3(0) = 0, u_3(\tau_1) = 0. \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\begin{cases} u_3'' + \alpha \cdot 0 - \beta u_3^- = 0, & x \in (\tau_1, \tau_2) \\ u(\tau_1) = 0, u(\tau_2) = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} u_3'' + \alpha u_3^+ - \beta \cdot 0 = 0, & x \in (\tau_2, \pi) \\ u_3(\tau_2) = 0, u_3(\pi) = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Úloha (2.28) se řeší stejně jako (2.18), odkud máme, že

$$\tau_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}. \quad (2.31)$$

Úloha (2.29) se řeší obdobně, jako (2.19), jen že místo π máme parametr τ_2 . Tedy úloha má nenulové řešení pro: $\sqrt{\beta}(\tau_2 - \tau_1) = \pi k, k \in \mathbb{N}$. Volíme $k = 1$ (důvod jsme vysvětlili dříve) a místo τ_1 dosadíme vztah (2.31). Dostaneme:

$$\tau_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}. \quad (2.32)$$

Stejně k řešení úlohy (2.30) použijeme už hotový výsledek z řešení úlohy (2.19), a místo bodu $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ budeme uvažovat bod $\tau_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$. A tedy místo vztahu (2.24) budeme mít

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi. \quad (2.33)$$

Tím pádem máme vztah mezi α a β a můžeme zapsat ho ve tvaru:

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 1. \quad (2.34)$$

Vlastní funkce u_3 skládáme po částech z řešení 3 předchozích úloh

$$\begin{aligned} u_3^1 &= C_1 \sin(\sqrt{\alpha}x) && \text{pro } x \in (0, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}), \\ u_3^2 &= -C_2 \sin(\sqrt{\beta}(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}})) && \text{pro } x \in (\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}), \\ u_3^3 &= C_3 \sin(\sqrt{\alpha}(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\pi}{\sqrt{\beta}})) && \text{pro } x \in (\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}, \pi), \end{aligned}$$

kde $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Protože vlastní funkce úlohy je spojitě diferencovatelná na uvažovaném intervalu, pak volíme C_1, C_2 a C_3 tak, aby $u_3(x)$ měla stejnou derivace v bodech $x = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ a $x = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$ zleva a zpráva:

$$\begin{aligned} -C_1\sqrt{\alpha} &= -C_2\sqrt{\beta}, \\ C_2\sqrt{\beta} &= C_3\sqrt{\alpha}, \end{aligned}$$

a odtud C_1, C_2 se voli takto:

$$C_2 = C_1 \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}, \quad (2.35)$$

C_2, C_3 se voli takto:

$$C_2 = C_3 \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}. \quad (2.36)$$

Z vztahů (2.35) a (2.36) vyplývá, že $C_1 = C_3$.

Pak vlastní funkce, odpovídající Fučikovo vlastnímu číslu (α, β) , která má právě dva nulové body má předpis

$$u_3(x) = \begin{cases} A \sin(\sqrt{\alpha}x) & \text{pro } x \in (0, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}), \\ -A \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \sin(\sqrt{\beta}(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}})) & \text{pro } x \in (\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}), \\ A \sin(\sqrt{\alpha}(x - \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\pi}{\sqrt{\beta}})) & \text{pro } x \in (\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}, \pi), \end{cases} \quad (2.37)$$

kde $A \in \mathbb{R}$.

4. Prozkoumáme případ, kdy vlastní funkce $u = u_k$ má právě $k \in \mathbb{N}$ nulových bodů na intervalu $(0, \pi)$. Proto uděláme úsudek z předchozích výsledků. Z hodnot obdržných dříve pro uvažované body τ, τ_1, τ_2 a vztahů (2.24),(2.33) vyplývá, že délka intervalu kladných půlvln řešení úlohy (2.9) se rovná $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$, záporných tedy $\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$. Potom obecný vztah pro α, β můžeme zapsat takto:

$$\frac{n_k}{\sqrt{\alpha}} + \frac{n_z}{\sqrt{\beta}} = 1, \quad (2.38)$$

kde n_k je počet kladných půlvln, n_z - počet záporných půlvln.

Nechť $k \in \mathbb{N}$ je počet nulových bodů funkce $u(x)$, $x \in (0, \pi)$. Pokud $u(x)$ se začíná z kladné půlvlny, pak (2.38) můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}{\sqrt{\beta}} = 1, \quad (2.39)$$

a posloupnost nulových bodů funkce u : $(\tau_i)_{i=1}^k$

$$\tau_{2j} = \tau_{2j-1} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}, \quad \tau_{2j+1} = \tau_{2j} + \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, \quad \tau_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2.40)$$

Vlastní funkce, odpovídající Fučíkovo vlastnímu číslu (α, β) , $\forall \alpha, \beta$ splňující vztah (2.39), která má právě k nulových bodů má tvar

$$u(x) = \begin{cases} A \sin(\sqrt{\alpha}x) & \text{pro } x \in (0, \tau_1), \\ -A \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \sin(\sqrt{\beta}(x - \tau_1)) & \text{pro } x \in (\tau_1, \tau_2), \\ \dots & \\ A \sin(\sqrt{\alpha}(x - \tau_{2i})) & \text{pro } x \in (\tau_{2i}, \tau_{2i+1}), \\ -A \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \sin(\sqrt{\alpha}(x - \tau_{2i+1})) & \text{pro } x \in (\tau_{2i+1}, \tau_{2i+2}), \\ \dots & \end{cases} \quad (2.41)$$

kde $A \in \mathbb{R}$.

5. Ukážeme že vlastní funkce u má jen spočetný počet nulových bodů na intervalu $(0, \pi)$. Pro každé $u'(0)$ dokážeme najít nějaké řešení, které má právě k nulových bodů. V silu věty 1.1 o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy tedy takové řešení bude jediné, a pro každé $u(x_0) = 0$ platí $u'(x_0) \neq 0$ to znamená, že existuje okolí bodu x_0 které nemá nulových bodů odlišných od x_0 , a tedy řešení může mít jen spočetný počet nulových bodů.

Ukážeme že pro úlohu (2.9) platí věta 1.1. Diferenciální rovnici z úlohy (2.9) zapíšeme ve tvaru soustavy dvou diferenciálních rovnic prvního řádu. Položíme $u_1(x) = u(x)$, $u_2(x) = u'(x)$, $\forall x \in (0, \pi)$ a tedy dostaneme:

$$\begin{cases} u_1' = u_2, & x \in (0, \pi), \\ u_2' = -\alpha u_1^+ + \beta u_1^-, \\ u_1(0) = 0, u_1(\pi) = 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

Převědeme řešení okrajové úlohy na řešení posloupnosti počátečních úloh, kde podmínku $u_1(0) = 0$ známe, a místo podmínky $u_1(\pi) = 0$ budeme provádět odhad $u_2(0) = K, K \in \mathbb{R}$ takový, aby řešení splňovalo podmínku $u_1(\pi) = 0$. Dostaneme:

$$\begin{cases} u_1' = u_2, & x \in (0, \pi), \\ u_2' = -\alpha u_1^+ + \beta u_1^-, \\ u_1(0) = 0, u_2(0) = K, & K \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.43)$$

Počáteční úlohu (2.43) zapíšeme v maticovém tvaru (1.1):

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}), \\ \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad (2.44)$$

kde $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$, $\mathbf{f} = [u_2, -\alpha u_1^+ + \beta u_1^-]^T$, $x_0 = 0, \mathbf{u}_0 = [0, K]^T$.

Dovedeme, že úloha (2.44) splňuje předpoklady věty 1.1:

- (a) $\mathbf{f} = [u_2, -\alpha u_1^+ + \beta u_1^-]^T$ je spojitá v každé svojí složce vzhledem k \mathbf{u} .
- (b) Aby funkce \mathbf{f} splňovala Lipschitzovou podmínku vzhledem k \mathbf{u} na G má existovat $N = \text{const} > 0$ taková, že platí vztah:

$$\| \mathbf{f}(x, \mathbf{v}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{w}) \| \leq N \| \mathbf{v} - \mathbf{w} \|, \forall (x, \mathbf{v}), (x, \mathbf{w}) \in D \quad (2.45)$$

Ukážeme, že taková konstanta N existuje pro danou \mathbf{f} :

$$\begin{aligned} \| \mathbf{f}(x, \mathbf{v}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{w}) \| &= \| (v_2, -\alpha v_1^+ + \beta v_1^-)^T - (w_2, -\alpha w_1^+ + \beta w_1^-)^T \| = \\ &= \| (v_2 - w_2, \alpha(-v_1^+ + w_1^+) + \beta(v_1^- - w_1^-))^T \| \end{aligned} \quad (2.46)$$

Dále pro hledání konstanty N využijeme pojem ekvivalence norem.

Definice 2.3. Normy $\| \cdot \|_p$ a $\| \cdot \|_q$, $p, q \in \mathbb{N}, p, q > 0$, na lineárním prostoru X jsou ekvivalentní, pokud existují kladná reálná čísla c a C taková, že $\forall \mathbf{x} \in X$ platí:

$$c \| \mathbf{x} \|_p \leq \| \mathbf{x} \|_q \leq C \| \mathbf{x} \|_p,$$

kde $\| \mathbf{x} \|_k = (|x_1|^k + |x_2|^k + \dots + |x_n|^k)^{\frac{1}{k}}$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, k, n \in \mathbb{N}$.

Věta 2.3 (Ekvivalence norem). [viz Kreyszig]

Na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru X jsou všechny normy navzájem ekvivalentní.

Důkaz. Důkaz je uveden v Erwin Kreyszig "INTRODUCTORY FUNCTIONAL ANALYSIS WITH APPLICATIONS". □

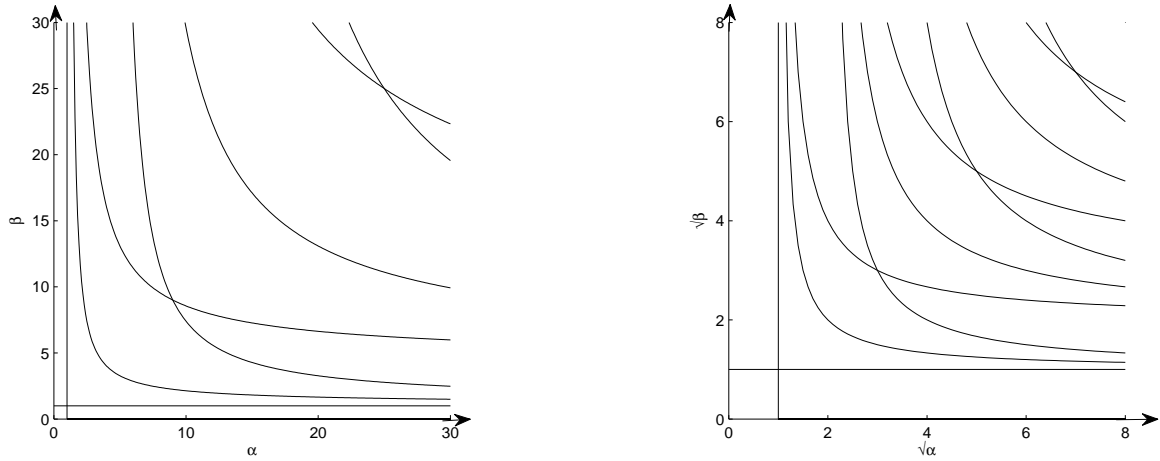
A tehdy stačí dokázat platnost podmínky (2.45) aspoň pro jednu z norem $\| \mathbf{x} \|_k$. Pokud najdeme $N = konst > 0$ pro normu $\| \cdot \|_2$, tak bude existovat nějaká Lipschitzova konstanta i pro normy $\| \mathbf{x} \|_k$, $k > 0$.

$$\begin{aligned}
& \| (v_2 - w_2, \alpha(-v_1^+ + w_1^+) + \beta(v_1^- - w_1^-))^T \|_2 = \\
& = \sqrt{(v_2 - w_2)^2 + (\alpha(-v_1^+ + w_1^+) + \beta(v_1^- - w_1^-))^2} \leq \\
& \leq \sqrt{(v_2 - w_2)^2 + (\max\{|\alpha|, |\beta|\} \cdot (-v_1^+ + w_1^+ + v_1^- - w_1^-))^2} = \\
& = \sqrt{(v_2 - w_2)^2 + \max\{|\alpha|^2, |\beta|^2\} \cdot (w_1 - v_1)^2} \leq \\
& = \sqrt{\max\{1, |\alpha|^2, |\beta|^2\} \cdot ((v_2 - w_2)^2 + (v_1 - w_1)^2)} \leq \\
& \leq \max\{1, |\alpha|, |\beta|\} \cdot \| \mathbf{v} - \mathbf{w} \|_2 .
\end{aligned} \tag{2.47}$$

potom $N = \max\{1, |\alpha|, |\beta|\} > 0$ a dokázali jsme že \mathbf{f} splňuje Lipschitzovou podmínku vzhledem k \mathbf{u} na G .

Pak na intervalu $[x_0 - h, x_0 + h]$ existuje právě jedno řešení úlohy (2.43).

Obdržené vztahy mezi α a β zobrazíme na obrázku 2.6 a tím pádem ukážeme jak vypadá Fučíkovo spektrum pro úlohu (2.9).



Obrázek 2.6: Fučíkovo spektrum Dirichletovy úlohy v souřadnicích (α, β) a $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$.

Definice 2.4. *Křivky C_k^+ a C_k^- budeme nazývat Fučíkovo větve:*

$$C_k^+ = \{(\alpha, \beta) \in \Sigma : \text{odpovídající } u(x) \text{ má právě } k \text{ nulových bodů a začíná se s kladné půlvlny}\},$$

$$C_k^- = \{(\alpha, \beta) \in \Sigma : \text{odpovídající } u(x) \text{ má právě } k \text{ nulových bodů a začíná se s záporné půlvlny}\}$$

Tvrzení 2.4. $(\lambda, \lambda) \in \Sigma$ právě tehdy, když $\lambda \in \Lambda$.

Důkaz. 1. Mějme $\lambda \in \Lambda$. Tehdy existují funkce u taková, že u je řešením úlohy:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, u(\pi) = 0. \end{cases} \quad (2.48)$$

Tehdy můžeme použitím vztahů (2.11) pro funkce u upravit diferenciální rovnici v úloze (2.48) na tvar $u'' + \lambda u^+ - \lambda u^- = 0$ a tehdy $(\lambda, \lambda) \in \Sigma$.

2. Mějme $(\lambda, \lambda) \in \Sigma$. Tehdy existují funkce u , která řeší úlohu (2.9). Použijeme k u vztah (2.11) a upravíme diferenciální rovnici v úloze (2.9) na tvar $u'' + \lambda u = 0$ a tehdy $\lambda \in \Lambda$. □

2.2.2 Fučíkovo spektrum nesamoadjungovaného operátoru

Popíšeme Fučíkovo spektrum úlohy

$$\begin{cases} u'' + \alpha u^+ - \beta u^- = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = 2u(\pi), u'(0) = 0, \end{cases} \quad (2.49)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, která odpovídá operátorové rovnici nesamoadjungovaného operátoru (3.31):

$$L^N u = \alpha u^+ - \beta u^-; \quad (2.50)$$

Stejným postupem jako pro Dirichletovu úlohu budeme hledat vlastní funkce úlohy podle počtu nulových bodů.

1. Prošetříme případ, kdy vlastní funkce u nemá žádný nulový bod na intervalu $(0, \pi)$ (označíme ji u_1), což znamená, že buď je na celém intervalu $(0, \pi)$ kladná $u_1(x) > 0$, nebo záporná $u_1(x) < 0$.

Nechť $u_1(x)$ je na celém intervalu $(0, \pi)$ kladná, pak $u_1^+ = u_1$, a $u_1^- = 0$. Potom diferenciální rovnice úlohy (2.5) zapíšeme tvaru

$$u_1'' + \alpha u_1 = 0. \quad (2.51)$$

Viz kapitola (2.1.2) řešením okrajové úlohy s diferenciální rovnici (2.51) a okrajovými podmínkami $u_1(0) = 2u_1(\pi), u_1'(0) = 0$ které vyhovuje předpokladu $u_1(x) > 0$ pro $x \in (0, \pi)$ bude funkce $u_1 = C \cos(\frac{x}{3})$, $C \in \mathbb{R}, C > 0$, odpovídající $\alpha = \frac{1}{9}$. Protože $u_1^- = 0$ tak β volíme libovolně.

Potom Fučíkovo vlastní čísla, odpovídající kladnému řešení $u = C \cos(\frac{x}{3})$ mají tvar $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{9}, c)$, $c \in \mathbb{R}$.

V této kapitole budeme stejně uvažovat poznámku 1, a tehdy $(c, \frac{1}{9})$, $c \in \mathbb{R}$ je taky Fučíkovo vlastní číslo, ale odpovídající zápornému řešení $u_1 = -C \cos(\frac{x}{3})$.

2. Příklad, kdy vlastní funkce úlohy má 1 nulový bod neexistuje (resp. obecně lichý počet).
Dokážeme to v následujícím tvrzení.

Tvrzení 2.5. *Vlastní funkce operátoru L^N mají jen sudý počet nulových bodů.*

Důkaz. Ukážeme případ neexistence pro 1 nulový bod. Z okrajové podmínky $u(0) = 2u(\pi)$ vyplývá $\text{sign } u(0) = \text{sign } u(\pi)$, a při přechodu přes nulový bod funkce $u(x)$ se mění svoje znaménko. Pokud funkce $u(x)$ má stejné znaménko v okolí nulového bodu tak to znamená, že má v nulovém bodě lokální extrém.

Předpokládejme, že vlastní funkce $u(x)$ má na intervalu $(0, \pi)$ právě jeden nulový bod $x = \tau$, $u(\tau) = 0$ a má v bodě $x = \tau$ svůj extrém. Pripustíme tedy, že $u(x) \geq 0$ pro $x \in (0, \pi)$. Potom můžeme úlohu (2.9) rozdělit na 2 úlohy:

(a)

$$\begin{cases} u''_{11} + \alpha u_{11}^+ - \beta \cdot 0 = 0, & x \in (0, \tau) \\ u'_{11}(0) = 0, u_{11}(\tau) = 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Obecný tvar řešení je dán vzorcem $u_{11}(x) = d_1 \sin \sqrt{\alpha}x + d_2 \cos \sqrt{\alpha}x$, jeho derivace $u'_{11}(x) = \sqrt{\alpha}d_1 \cos \sqrt{\alpha}x - d_2 \sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha}x$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Dosadíme do okrajových podmínek a řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{cases} \sqrt{\alpha}d_1 = 0, \\ d_1 \sin \sqrt{\alpha}\tau + d_2 \cos \sqrt{\alpha}\tau = 0. \end{cases} \quad (2.53)$$

Z této soustavy dostaneme $d_1 = 0$ a $\cos \sqrt{\alpha}\tau = 0$, odkud $\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$.

(b)

$$\begin{cases} u''_{12} + \alpha \cdot u_{12}^+ - \beta \cdot 0 = 0, & x \in (\tau, \pi) \\ u_{12}(\tau) = 0, u'_{12}(\tau) = 0. \end{cases} \quad (2.54)$$

Okrajová podmínka $u'_{12}(\tau) = 0$ vyplývá z předpokladu o existenci v bodě $x = \tau$ extrému funkce $u(x)$.

Obecný tvar řešení je dán vzorcem $u(x)_{12} = c_1 \sin \sqrt{\alpha}x + c_2 \cos \sqrt{\alpha}x$, jeho derivace $u'_{12}(x) = \sqrt{\alpha}c_1 \cos \sqrt{\alpha}x - c_2 \sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha}x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Dosadíme do okrajové podmínky $u_{12}(\tau) = 0$ obecné řešení a vypočtenou v oddílu (a) hodnotu $\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$:

$$c_1 \sin \sqrt{\alpha} \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} + c_2 \cos \sqrt{\alpha} \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} = 0$$

odkud dostaneme $c_1 = 0$.

Dosadíme do okrajové podmínky $u'_{12}(\tau) = 0$ derivace obecného řešení a vypočtenou v

oddílu (a) hodnotu $\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$:

$$\sqrt{\alpha}c_1 \cos \sqrt{\alpha} \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}c_2 \sin \sqrt{\alpha} \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} = 0$$

odkud dostaneme $c_2 = 0$. Tedy úlohu, která splňuje naše předpoklady, řeší jen triviální funkce a tím pádem Fučikovo vlastní číslo neexistuje.

Uvedené úvahy platí i pro obecně lichý počet nulových bodu.

□

3. Prošetříme případ, kdy vlastní funkce $u(x)$ má právě dva nulové body $x = \tau_1$, $u(\tau_1) = 0$ a $x = \tau_2$, $u(\tau_2) = 0$ na intervalu $(0, \pi)$, $\tau_1 < \tau_2$. Uvažujme případ, kdy funkce u se začíná z kladné půlvlny, tedy $u(x) > 0$ pro $x \in (0, \tau_1) \cup (\tau_2, \pi)$, $u(x) < 0$ pro $x \in (\tau_1, \tau_2)$.

Potom můžeme úlohu (2.9) rozdělit na 3 úlohy:

$$\begin{cases} u_1'' + \alpha u_1^+ - \beta \cdot 0 = 0, & x \in (0, \tau_1) \\ u_1'(0) = 0, u_1(\tau_2) = 0. \end{cases} \quad (2.55)$$

$$\begin{cases} u_2'' + \alpha \cdot 0 - \beta u_2^- = 0, & x \in (\tau_1, \tau_2) \\ u(\tau_1) = 0, u(\tau_2) = 0. \end{cases} \quad (2.56)$$

$$\begin{cases} u_3'' + \alpha u_3^+ - \beta \cdot 0 = 0, & x \in (\tau_2, \pi) \\ u_3(\tau_2) = 0, \\ u_3'(\tau_2) = -u_1'(\tau_1). \end{cases} \quad (2.57)$$

Obecný tvar řešení úlohy (2.55) je dán vzorcem $u_1(x) = d_1 \sin \sqrt{\alpha}x + d_2 \cos \sqrt{\alpha}x$, jeho derivace $u_1'(x) = \sqrt{\alpha}d_1 \cos \sqrt{\alpha}x - d_2\sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha}x$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Dosadíme do okrajových podmínek z (2.55) a budeme řešit soustavu rovnic pro neznáme d_1 a d_2 :

$$\begin{cases} \sqrt{\alpha}d_1 = 0, \\ d_1 \sin \sqrt{\alpha}\tau + d_2 \cos \sqrt{\alpha}\tau = 0. \end{cases} \quad (2.58)$$

kde τ_1 - parametr. Z te soustavy dostaneme $d_1 = 0$ a $\cos \sqrt{\alpha}\tau = 0$, odkud

$$\tau_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (2.59)$$

$$u_1(x) = D \cos \sqrt{\alpha}x, x \in (0, \tau_1), D \in \mathbb{R}. \quad (2.60)$$

Úloha (2.56) se řeší obdobně, jako (2.19), jen že místo π máme parametr τ_2 . Tedy úloha má nenulové řešení pro: $\sqrt{\beta}(\tau_2 - \tau_1) = \pi k, k \in \mathbb{N}$. Volíme $k = 1$ (důvod jsme vysvětlili dříve) a místo τ_1 dosadíme vztah (2.59). Dostaneme:

$$\tau_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}. \quad (2.61)$$

Úlohu podobnou (2.57) jsme ještě neřešily, proto probereme ji do detailů.

Obecný tvar řešení je dán vzorcem $u_3(x) = c_1 \sin \sqrt{\alpha}x + c_2 \cos \sqrt{\alpha}x$, jeho derivace $u_3'(x) = \sqrt{\alpha}c_1 \cos \sqrt{\alpha}x - c_2\sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha}x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. V okrajové podmínce $u_3'(\tau_2) = -u_1'(\tau_1)$ už známe analytický předpis pro funkce $u_1(x)$ a parametr τ_1 . Tedy s využitím (2.59) a (2.60)

$$-u_1'(\tau_1) = D\sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha} \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} = D\sqrt{\alpha}.$$

Dosadíme do okrajových podmínek z (2.57) do obecného tvaru řešení a budeme řešit soustavu rovnic pro neznáme c_1 a c_2 :

$$\begin{cases} c_1 \sin \sqrt{\alpha}\tau_2 + c_2 \cos \sqrt{\alpha}\tau_2 = 0, \\ \sqrt{\alpha}c_1 \cos \sqrt{\alpha}\tau_2 - \sqrt{\alpha}c_2 \sin \sqrt{\alpha}\tau_2 = D\sqrt{\alpha}. \end{cases} \quad (2.62)$$

kde τ_2 - parametr.

Takový systém je nehomogenní soustavou lineárních rovnic o 2 neznámých c_1 a c_2 . Viz [8] Nehomogenní soustava lineárních algebraických rovnic má řešení pouze v případě, že hodnost matice soustavy $h(\mathbf{A})$ je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy $h(\mathbf{A}|\vec{b})$. Pokud je $h(\mathbf{A})$ rovna počtu neznámých, má soustava jediné řešení.

Zapišeme rozšířenou matici systému rovnic (2.62):

$$\left(\begin{array}{cc|c} \sin \sqrt{\alpha}\tau_2 & \cos \sqrt{\alpha}\tau_2 & 0 \\ \cos \sqrt{\alpha}\tau_2 & -\sin \sqrt{\alpha}\tau_2 & D \end{array} \right) \quad (2.63)$$

Řádkovými úpravami převedeme tuto matici do tvaru:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & D \cos \sqrt{\alpha}\tau_2 \\ 0 & -1 & D \sin \sqrt{\alpha}\tau_2 \end{array} \right) \quad (2.64)$$

A tedy je patrné, že hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy a rovná se 2. Proto existuje jediné řešení

$$c_1 = D \cos \sqrt{\alpha}\tau_2 \quad (2.65)$$

$$c_2 = -D \sin \sqrt{\alpha}\tau_2 \quad (2.66)$$

Potom s použitím (2.61) a (2.65)

$$u_3(x) = D \cos\left(\frac{\pi\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\pi}{2}\right) \sin \sqrt{\alpha}x - D \sin\left(\frac{\pi\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\pi}{2}\right) \cos \sqrt{\alpha}x. \quad (2.67)$$

Abychom našli vztah mezi α a β využijeme okrajovou podmínku úlohy (2.5) $u(0) = 2u(\pi)$, která v našem značení vypadá takhle: $u_1(0) = 2u_3(\pi)$. Dosadíme do něj (2.67) a (2.60):

$$D \cos\left(\frac{\pi\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\pi}{2}\right) \sin \sqrt{\alpha}x - D \sin\left(\frac{\pi\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\pi}{2}\right) \cos \sqrt{\alpha}x = D \quad (2.68)$$

Vydělíme obě části rovnice D a použitím součtových vzorců goniometrických funkcí dostaneme, $\sin(\sqrt{\alpha}\pi - \frac{\pi\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$. Aby taková rovnice platila má argument sinusu být roven $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ nebo $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Volíme $k = 0$. Potom pro α , β platí 2 rovnice:

$$\frac{2}{3} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi. \quad (2.69)$$

$$\frac{4}{3} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = \pi. \quad (2.70)$$

Tím pádem máme vztahy mezi α a β a můžeme zapsat ho ve tvaru:

$$\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 1. \quad (2.71)$$

$$\frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 1. \quad (2.72)$$

4. Prozkoumáme případ, kdy vlastní funkce $u = u_k$ má právě $k \in \mathbb{N}$ nulových bodů na intervalu $(0, \pi)$. Pro to uděláme úsudek z předchozích výsledků.

Z obrázků 2.2 vlastních funkcí úlohy usoudíme, že se zvýšením k na intervalu $(\tau_1, \tau_{\frac{k}{2}-1})$ (kde $\tau_1, \dots, \tau_{\frac{k}{2}-1}$ je posloupnost nulových bodů uprostřed intervalu $(0, \pi)$), se budou objevovat úlohy Dirichleta, o kterých už víme (z oddílu 2.1.1), že délka intervalu jejich kladné půlvlny se rovna $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$, a záporné $\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$. Protože úloha může mít jen sudý počet nulových bodů tedy minimálně můžeme přidat 2 body. Pak s každým zvýšením počtu nulových bodů budeme přidávat jednu vlnu na délce $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ a jednu $\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$. Jak zjistíme délku intervalů $(0, \tau_1)$ a $(\tau_{\frac{k}{2}-1}, \pi)$? Odpověď na tuto otázku se skrývá v podmínce $u'(0) = 0$. Tato podmínka říká, že v bodě $x = 0$ funkce $u(x)$ má svůj extrém, buď lokální maximum nebo minimum. A tedy na intervalu $(0, \tau_1)$ je jen půlka vlny délky $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$ nebo $\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}$. Potom délku intervalu $(\tau_{\frac{k}{2}-1}, \pi)$ vypočteme pomocí vztahu (2.71) a obrázku vlastní funkcí nesamoadjungovaného operátoru pro dva nulových body 2.2. Taková vlastní funkce má jednu celou zápornou vlnu a dvě

kouskoví kladné vlny. Tedy

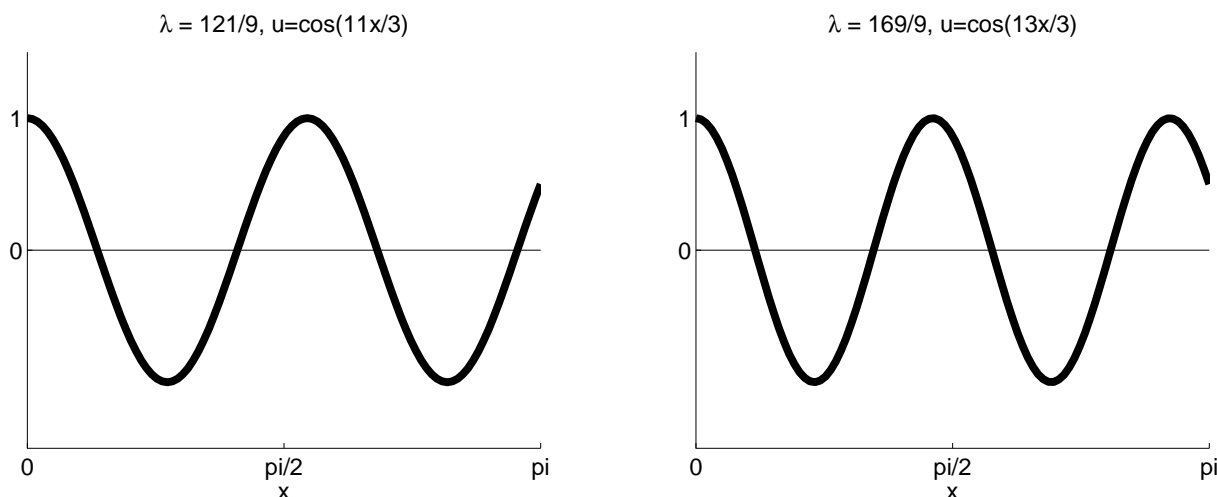
$$\frac{2}{3} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{6} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$$

nebo

$$\frac{4}{3} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{5}{6} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} \tag{2.73}$$

jsou délky intervalu $(\tau_{\frac{k}{2}-1}, \pi)$.

Na obrázku 2.7 uvedeme příklad vlastní funkce rozebírané úlohy pro 4 nulové body.



Obrázek 2.7: Vlastní funkce nesamoadjungovaného operátoru pro $k = 4$ a $\lambda = \frac{121}{9}$ a $\lambda = \frac{169}{9}$.

Potom obecný vztah pro α, β úlohy (2.49) můžeme zapsat takto (pro vlastní funkci začínající se z kladné půlvlny):

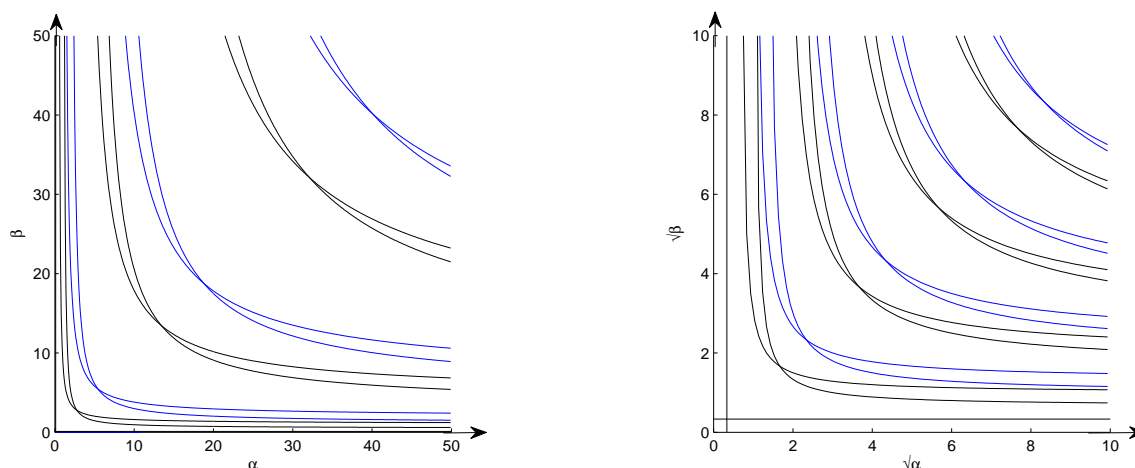
$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3} + (m-1)\right) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{m}{\sqrt{\beta}} &= 1, \\ \left(\frac{4}{3} + (m-1)\right) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{m}{\sqrt{\beta}} &= 1 \end{aligned} \tag{2.74}$$

kde m je krok iteraci , $k = 2m$ - počet nulových bodů vlastních funkcí.

Pro vlastní funkci začínající se z záporné půlvlny ve vztazích (2.74) se jen prohodí α a β .

- Uvedené úvahy o spočetnosti nulových bodů úlohy (2.9) v oddílu 2.2.1 platí i pro úlohu (2.49), protože diferenciální rovnice úlohy se zůstala stejná, změnily se jen okrajové podmínky, které neovlivňují předpoklady věty 1.1.

Obdržené vztahy mezi α a β zobrazíme na obrázku 2.8 a tím pádem ukážeme jak vypadá Fučíkovo spektrum pro operátor L^N .



Obrázek 2.8: Fučíkovo spektrum nesamoadjungovaného operátoru v souřadnicích (α, β) a $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$.

2.3 Poloviční vlastní čísla

2.3.1 Poloviční vlastní čísla samoadjungovaného operátoru

Uvažujme operátorovou rovnici :

$$L^D u = au^+ - bu^- + \lambda u, \quad (2.75)$$

kde L^D je operátor (3.30), $\lambda \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $u^+(x)$ a $u^-(x)$ je popsáno v (2.10). Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že $a, b > 0$.

Definice 2.5. Číslo λ nazveme polovičním vlastním číslem operátoru L^D , pokud existuje taková nenulová funkce $u_\lambda(x)$, která je netriviálním řešením operátorové rovnice (2.75). Funkce $u_\lambda(x)$ (a všechny její kladné násobky) se nazývá poloviční vlastní funkce operátoru L^D odpovídající polovičnímu vlastnímu číslu λ .

Množinu všech polovičních vlastních čísel operátoru L^D značíme $\sigma(L^D, a, b)$:

$$\sigma(L^D, a, b) := \{\lambda \in \mathbb{R} : \text{operátorová rovnice (2.75) má netriviální řešení}\} \quad (2.76)$$

Bodové spektry $\Sigma(L^D)$ a $\sigma(L^D, a, b)$ jsou souvislé. Můžeme problém polovičních vlastních čísel snadno převést na problém Fučíkova spektra. [1] Takové souvislosti popíšeme v tvrzení (2.77).

V poslední rovnici užitím substituce $a + \lambda = \alpha, b + \lambda = \beta$ obdržíme:

$$L^D u = \alpha u^+ - \beta u^-.$$

Tvrzení 2.6. Platí vztahy:

1. $\lambda \in \sigma(L, a, b)$ právě tehdy, když $(a + \lambda, b + \lambda) \in \Sigma(L)$,
2. $(a, b) \in \Sigma(L)$ právě tehdy, když $0 \in \sigma(L, a, b)$,

kde $L : D(L) \subset L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$ je obyčejný diferenciální operátor druhého řádu.

Důkaz. 1. Necht' platí $\lambda \in \sigma(L, a, b)$. Potom pomocí vztahu (2.11): $u = u^+ - u^-$ postupně upravíme operátorovou rovnici:

$$\begin{aligned} Lu &= au^+ - bu^- + \lambda u; \\ Lu &= au^+ - bu^- + \lambda u^+ - \lambda u^-; \\ Lu &= (a + \lambda)u^+ - (b + \lambda)u^-; \end{aligned} \tag{2.77}$$

a tehdy $(a + \lambda, b + \lambda) \in \Sigma(L)$.

Necht' platí $(a + \lambda, b + \lambda) \in \Sigma(L)$. Potom $a + \lambda, b + \lambda$ vyhovují rovnici

$$Lu = (a + \lambda)u^+ - (b + \lambda)u^-.$$

Po její upravení s použitím vztahu (2.11) dostaneme platnost rovnice:

$$Lu = au^+ - bu^- + \lambda u,$$

odkud je vidět, že $\lambda \in \sigma(L, a, b)$.

2. Necht' platí $(a, b) \in \Sigma(L)$. Potom platí rovnost $Lu = au^+ - bu^-$, kterou můžeme zapsat i ve tvaru $Lu = au^+ - bu^- + 0 \cdot u$. Odkud je patrné, že 0 vyhovuje rovnici (2.75) a tím pádem $0 \in \sigma(L, a, b)$.

Necht' platí $0 \in \sigma(L, a, b)$. Potom platí $Lu = au^+ - bu^- + 0 \cdot u$, což znamená, že platí $Lu = au^+ - bu^-$ a a, b splňují rovnici ... (operátorova rovnici Fučíková spektra), tedy $(a, b) \in \Sigma(L)$. □

Na obrázku 2.9 ukážeme jak vypadají poloviční vlastní čísla pro pevně zvolené a, b pro operátor $L^D.C_k^\pm$, $k \in \mathbb{N}$ jsou křivky Fučíkova spektra, popsáné v předchozím oddílu.

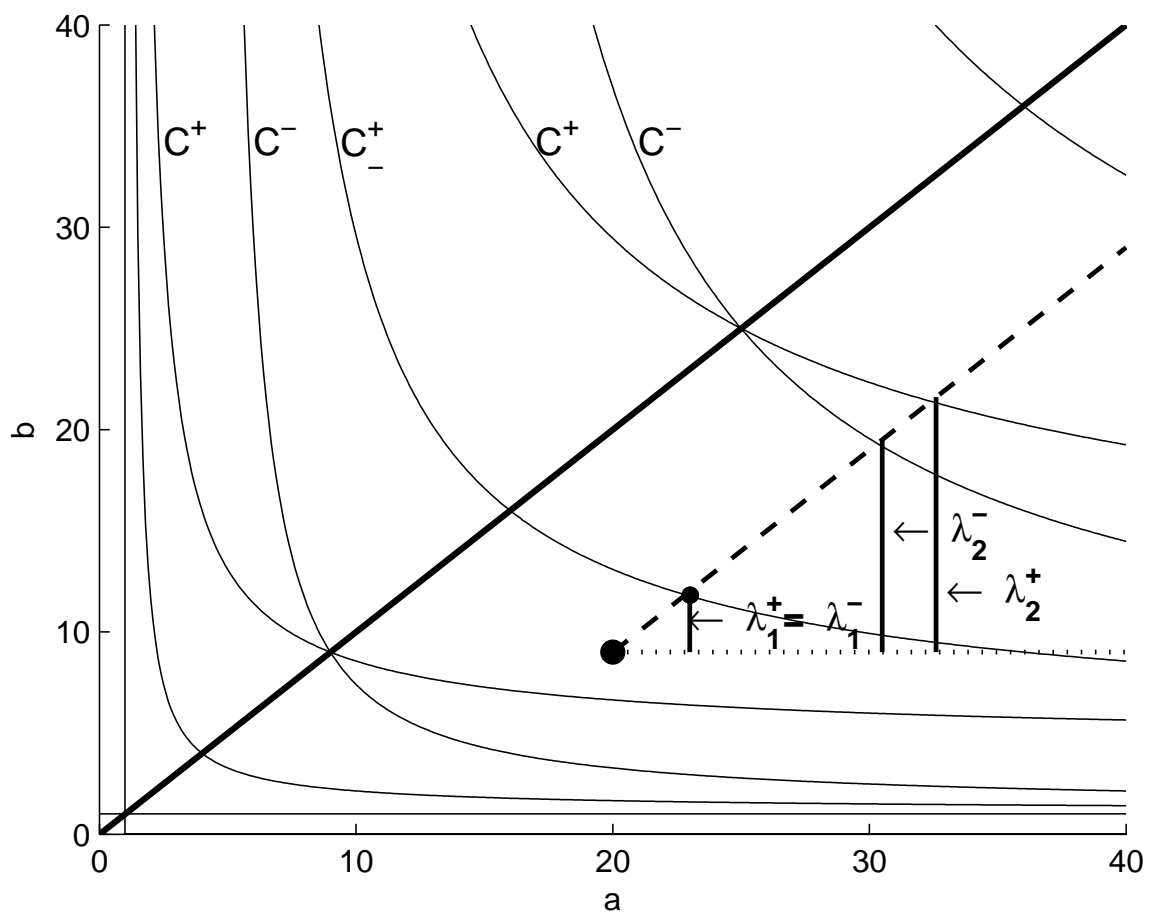
Z vztahu(2.77) a obrázku 2.9 vidíme, že λ vyjadřuje, jak musíme změnit souřadnice bodu (a, b) , aby operátorová rovnice (2.13) měla netriviální řešení.

Existují dvě posloupnosti polovičních vlastních čísel λ_k^+ a λ_k^- , $k \in \mathbb{N}$ operátoru L . Poloviční vlastní funkce u_k^+ a u_k^- odpovídající polovičním vlastním číslům λ_k^+ a λ_k^- mají stejný počet nulových bodů pro pevné $k \in \mathbb{N}$, ale odlišují se znaménkem jejich derivace v okolí bodu 0.

Věta 2.7 (viz [4], [7]). *Předpokládáme, že $a, b > 0$. Pro každé $k \geq 1$ existuje právě jedno poloviční vlastní číslo $\lambda_k^+ = \lambda_k^+(a, b)$ a právě jedno poloviční vlastní číslo $\lambda_k^- = \lambda_k^-(a, b)$ operátoru (2.9), a odpovídající jim poloviční vlastní funkci $u_k^+ = u_k^-(a, b)$ a $u_k^- = u_k^+(a, b)$, takové že $\|u_k^\pm\| = 1$.*

Platí taky, že pokud $k' > k \geq 1$ pak $\lambda_{k'}^+ > \lambda_k^\pm$ a $\lambda_{k'}^- > \lambda_k^\pm$.

Důkaz. Důkaz je uveden v [7, str.102] pro Sturm-Liouville operátor $Lu = -(pu')' + qu$ kde $p \in C^1[0, \pi]$, $q \in C^0[0, \pi]$, $p > 0$, což odpovídá úloze (2.75) při $p \equiv 1$ a $q \equiv 0$. □



Obrázek 2.9: Příklad polovičních vlastních čísel na Dirichletové úloze.

Posloupnost všech polovičních vlastních čísel $\lambda_1^-, \lambda_1^+, \lambda_2^-, \lambda_2^+, \lambda_3^-, \lambda_3^+, \dots$, je monotónně rostoucí. Pokud ale budeme uvažovat dvě různé posloupnosti polovičních vlastních čísel:

$$\lambda_1^-, \lambda_2^-, \lambda_3^-, \lambda_4^- \dots$$

a

$$\lambda_1^+, \lambda_2^+, \lambda_3^+, \lambda_4^+ \dots$$

pak každá z nich je ostře rostoucí.

Kapitola 3

Diskretizace diferenciálních operátorů

3.1 Vlastní čísla diferenčních operátorů

3.1.1 Diferenční operátor odpovídající samoadjungovanému operátoru

Metoda konečných diferencí je metodou diferenčního typu diskretizace diferenciálních úloh, který aproximuje samotnou původní diferenciální úlohu. [6]

Tvrzení 3.1. Matice \mathbf{A} rozměrnosti $(N - 1) \times (N - 1)$:

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

kde $h = \frac{\pi}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, je diferenčním operátorem diferenciálního operátoru L^D .

Důkaz. V diferenciální rovnici úlohy (2.1) vyskytuje druhá derivace hledané funkce $u(x)$, nahradíme ji numerickou aproximací druhé derivace podle jednoho ze vzorců v [6]. Pro to rozdělíme interval $[0, \pi]$ na kterém hledáme řešení na N rovnoměrných pod-intervalů délky $h = \frac{\pi}{N}$. Tím nám vznikne množina bodů $S_i = \{x_i : x_0 = 0, x_i = x_{i-1} + h, i = 0, \dots, N\}$ která se nazývá síť. Protože krok h je stejný pro každý uzel x_i tak síť je rovnoměrná (ekvidistantní). Potom v každém uzlu sítě budeme hledat aproximace původní funkce $u(x)$ podle vzorce (druhá diference):

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2}. \quad (3.2)$$

Aproximaci funkce $u(x)$ na intervalu $[0, \pi]$ tedy je vektor $U = [u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_n)]$, složky kterého jsou rovné hodnotám aproximace funkci $u(x)$ v uzlových bodech. Tím pádem místo úlohy (2.1) budeme mít systém rovnic:

Tabulka 3.1: Tabulka vlastních čísel samoadjungovaného operátoru pro $N = 10$.

Spojité úloha	Diskrétní úloha	Chyba diskretizace
0.9918	0.0082	0.0082
4.0000	3.8701	0.1299
9.0000	8.3532	0.6468
16.0000	14.0022	1.9978
25.0000	20.2642	4.7358
36.0000	26.5262	9.4738
49.0000	32.1753	16.8247
64.0000	36.6583	27.3417
81.0000	39.5367	41.4633

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) &= \lambda U_i; \\
 U_0 &= 0, \\
 U_N &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

kde $i = 1..N - 1$.

Systém rovnic (3.1) je systémem diferenčních rovnic úlohy (2.1).

Takový systém zapíšeme v maticovém tvaru :

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U}
 \tag{3.4}$$

kde $\mathbf{U} = [u(x_1), \dots, u(x_{n-1})]$,

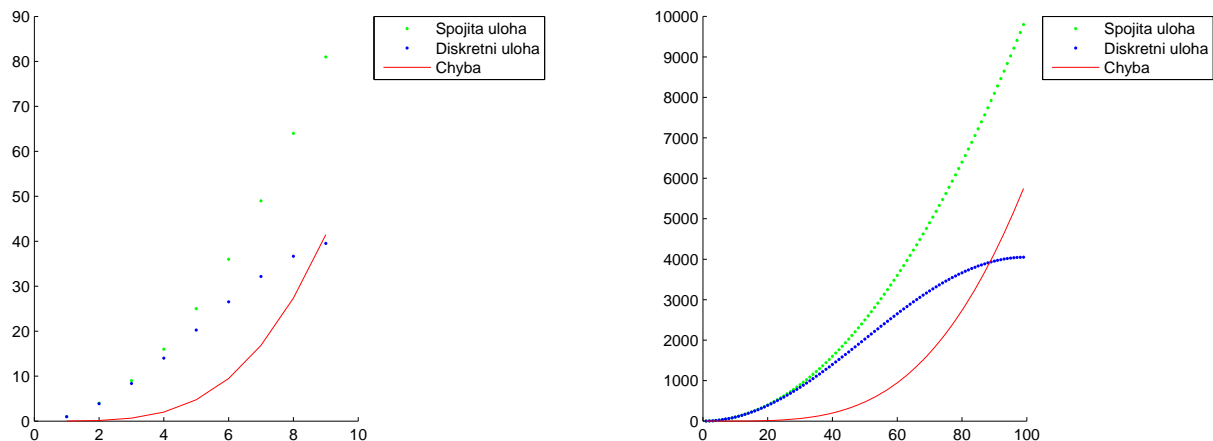
$$\mathbf{A} = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}
 \tag{3.5}$$

rozměrnosti $(N - 1) \times (N - 1)$.

Tehdy úlohu najít vlastní čísla λ_k , $k \in \mathbb{N}_0$ spojitého diferenciálního operátoru L^D můžeme aproximovat úlohou najít vlastní čísla λ_k , $k = 0, \dots, N - 1$ diskrétního operátoru \mathbf{A} , a matice \mathbf{A} je diferenčním operátorem diferenciálního operátoru L^D . \square

Najít vlastní čísla λ_k , $k = 0, \dots, N - 1$ diskrétního operátoru \mathbf{A} da se lehce udělat pomoci programu MATLAB. V tabulce 3.1 uvedeme výsledky obdržené výpočtem pro $N = 10$ uzlových bodů, a porovnáme jejich z výsledky spojitě úlohy obdržené v oddílu 2.1.1. Na obrázku 3.1 graficky porovnáme data z tabulky 3.1 a výsledky pro $N = 100$.

Děláme závěr, že nejlépe se aproximují první hodnoty vlastních čísel a že celkem přesnost se zvyšuje ze zvýšením počtu uzlových bodů.



Obrázek 3.1: Spektrum spojitého a diskrétního samoadjungovaného operátoru Dirichleta pro $N = 10$ a $N = 100$ v souřadnicích k a λ .

3.1.2 Diferenční operátor odpovídající nesamoadjungovanému operátoru

Stejně úvahy použijeme i pro diskretizace nesamoadjungované úlohy (2.5).

Tvrzení 3.2. Matice $\hat{\mathbf{A}}$ rozměrnosti $N \times N$:

$$\hat{\mathbf{A}} = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

kde $h = \frac{\pi}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, je diferenčním operátorem diferenciálního operátoru L^N .

Důkaz. V okrajových podmínkách se vyskytuje první derivace funkce $u(x)$, kterou aproximujeme vzorcem:

$$u'(x_i) \approx \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h}. \quad (3.7)$$

Protože taková okrajová podmínka platí jen pro bod x_0 použijme vzorec (3.7) přímo k bodu x_0 :

$$U'_0 = \frac{U_1 - U_{-1}}{2h} = 0. \quad (3.8)$$

Pak dostaneme vztah

$$U_{-1} = U_1. \quad (3.9)$$

Druhá okrajová podmínka $u(0) = 2u(\pi)$ nesamoadjungované úlohy (2.5) se zapíše v diskrétním tvaru takto:

$$U_N = \frac{1}{2}U_0. \quad (3.10)$$

Ted' můžeme zapsat systém rovnic, který dostaneme aproximaci původní úlohy pomocí vzorce (3.2). Protože platí (3.9) tak můžeme vzorec pro druhou derivaci (3.2) použít i k bodu x_0 :

$$-\frac{1}{h^2}(U_{-1} - 2U_0 + U_1) = \lambda U_0; \quad (3.11)$$

Využijeme (3.9) a dostaneme:

$$-\frac{1}{h^2}(-2U_0 + 2U_1) = \lambda U_0; \quad (3.12)$$

Konečný systém diferenčních rovnic bude vypadat takhle:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h^2}(-2U_0 + 2U_1) &= \lambda U_0, \\ -\frac{1}{h^2}(U_0 - 2U_1 + U_2) &= \lambda U_1, \\ &\vdots \\ -\frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) &= \lambda U_i, \\ &\vdots \\ -\frac{1}{h^2}(U_{N-2} - 2U_{N-1} + \frac{1}{2}U_0) &= \lambda U_i; \end{aligned} \quad (3.13)$$

Systém (3.13) zapíšeme v maticovém tvaru :

$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{U} = \lambda\mathbf{U} \quad (3.14)$$

kde $\mathbf{U} = [u(x_0), \dots, u(x_{N-1})]$,

$$\hat{\mathbf{A}} = -\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

rozměrnosti $N \times N$.

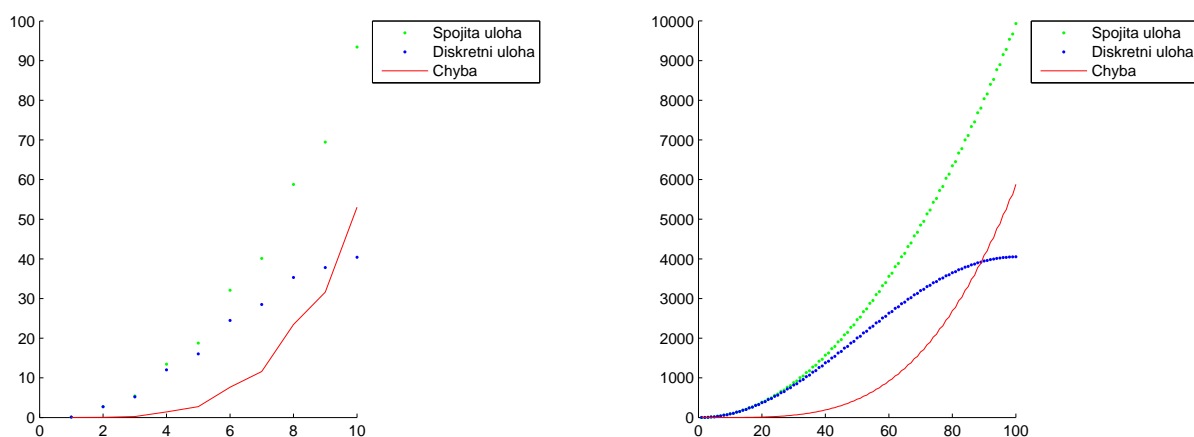
□

Výsledky výpočtu vlastních čísel matice $\hat{\mathbf{A}}$ a spojitě úlohy pro $N = 10$ jsou uvedené v tabulce 3.2.

Na obrázku 3.2 graficky znázorněné výsledky pro $N = 10$ a $N = 100$.

Tabulka 3.2: Tabulka vlastních čísel nesamoadjungovaného operátoru pro $k = 0 \dots 9$.

Spojité úloha	Diskrétní úloha	Chyba diskretizace
0.1111	0.1110	0.0001
2.7778	2.7149	0.0629
5.4444	5.2050	0.2395
13.4444	12.0220	1.4224
18.7778	16.0511	2.7267
32.1111	24.4774	7.6337
40.1111	28.5064	11.6047
58.7778	35.3235	23.4543
69.4444	37.8136	31.6309
93.4444	40.4175	53.0270



Obrázek 3.2: Spektrum spojitého a diskrétního nesamoadjungovaného operátoru pro $N = 10$ a $N = 100$ v souřadnicích k a λ .

3.2 Fučíkovo spektrum diferenčních operátorů

3.2.1 Fučíkovo spektrum diferenčního operátoru \mathbf{A}

Pro diferenční operátor \mathbf{A} (3.1) uvazujeme rovnici:

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \alpha\mathbf{U}^+ - \beta\mathbf{U}^-, \quad (3.16)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$, $\mathbf{U} = [u(x_1), \dots, u(x_{N-1})]$,

$$U_i^+ = \begin{cases} U_i & \text{pro } U_i > 0, \\ 0 & \text{pro } U_i \leq 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$U_i^- = \begin{cases} -U_i & \text{pro } U_i < 0, \\ 0 & \text{pro } U_i \geq 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

Zapišeme vektory \mathbf{U}^+ a \mathbf{U}^- v maticovém tvaru:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^+ &= \mathbf{D}_1\mathbf{U}, \\ \mathbf{U}^- &= \mathbf{D}_2\mathbf{U}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

kde \mathbf{D}_1 je diagonální matice z hodnotami vektoru $\text{sign}(\mathbf{U}^+)$ na hlavní diagonále, \mathbf{D}_2 je diagonální matice z hodnotami vektoru $-\text{sign}(\mathbf{U}^-)$ na hlavní diagonále.

Potom nelineární rovnici (3.16) zapišeme v lineární formě:

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \alpha\mathbf{D}_1\mathbf{U} - \beta\mathbf{D}_2\mathbf{U}. \quad (3.20)$$

Definice 3.1. Dvojice čísel $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ nazveme Fučíkovým vlastním číslem diferenčního operátoru \mathbf{A} , pokud existuje takový nenulový vektor \mathbf{U} , který řeší rovnici (3.20). Takový vektor \mathbf{U} se nazývá Fučíkovo vlastní vektor odpovídající Fučíkovo vlastnímu číslu (α, β) .

Aby najít diagram Fučíkovo vlastních čísel operátoru \mathbf{A} použijeme 3 různé přístupy:

1. Budeme hledat Fučíkovo vlastní čísla (α, β) po přímkách $\beta = \text{konst} \geq 0$

Upravíme rovnice (3.20) :

$$(\mathbf{A} + \beta\mathbf{D}_2)\mathbf{U} = \alpha\mathbf{D}_1\mathbf{U}. \quad (3.21)$$

Rovnice (3.20) odpovídá problému hledání zobecněného vlastního čísla α .

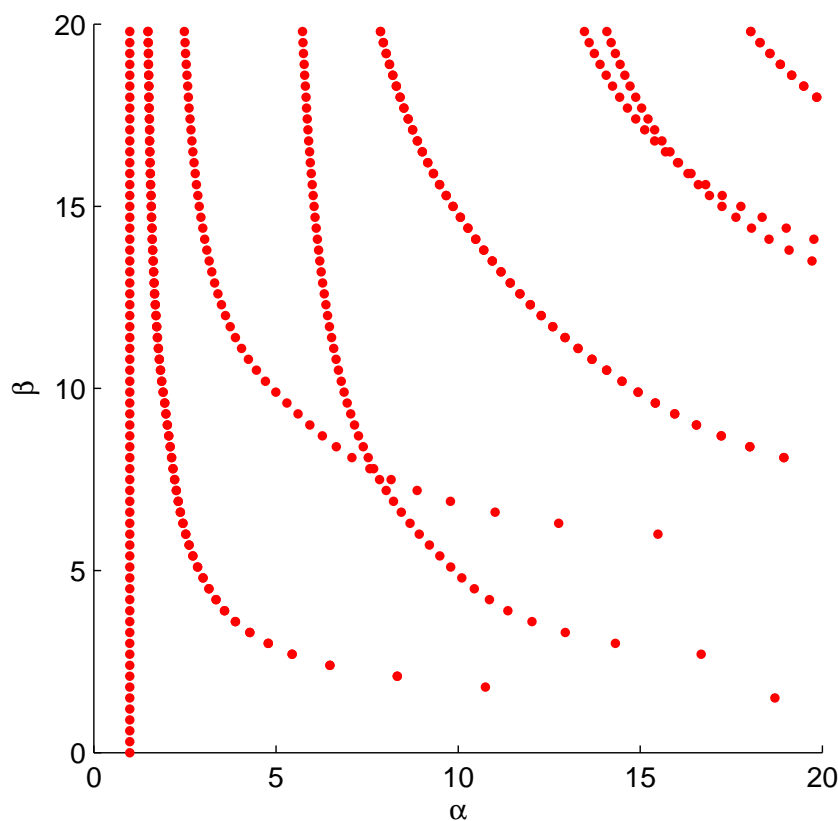
Definice 3.2. Číslo μ nazveme zobecněným vlastním číslem, pokud existuje nenulový vektor \mathbf{u} , který řeší rovnici

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mu\mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (3.22)$$

Takový vektor \mathbf{u} se nazývá zobecněný vlastní vektor.

Úlohu najít zobecněné vlastní čísla a vlastní vektory dokážeme řešit pomocí integrované funkce MATLABu $eig(A, B)$, tedy v našem případě $eig((\mathbf{A} + \beta\mathbf{D}_2), \mathbf{D}_1)$, kde \mathbf{A} je matice (3.1), $\beta = konst$, matice \mathbf{D}_1 má na její hlavní diagonále jedna ze všech možných kombinací 0 a 1 (zobecněné vlastní čísla hledáme pro každou kombinaci), $\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1 - \mathbf{I}$, \mathbf{I} - jednotková matice. Všechny uvedené matice rozměrnosti $(N - 1) \times (N - 1)$.

Výsledky výpočtu uvedeme na obr. 3.3.



Obrázek 3.3: Fučíkovo vlastní čísla (α, β) hledané po přímkách $\beta = konst \geq 0$.

Pro zjištění přesností metody srovnáme obdržené výsledky s výsledky spojitě úlohy popsáné v oddílu 2.2.1. Pro srovnání vybereme křivky $C_1^\pm, C_2^+, C_2^-, C_3^\pm$. Chybu metody budeme uvažovat jako nejmenší vzdálenost mezi bodem (α, β) z numerického výsledku a odpovídající spojitou křivkou popsanou v definici 2.4.

Grafické výsledky porovnání uvedeme na obr. A

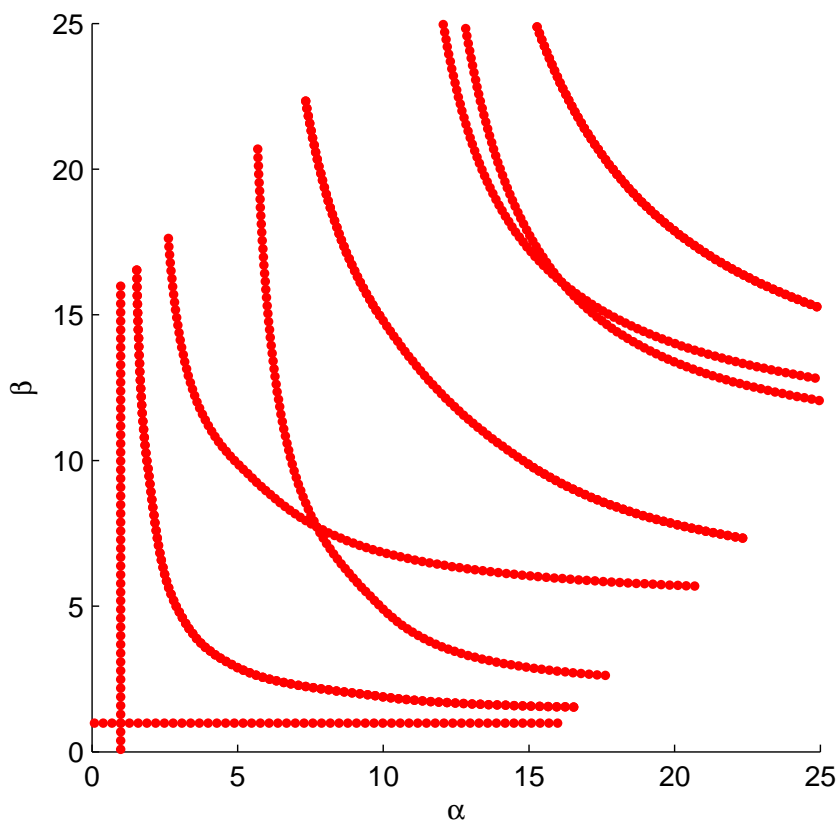
2. Budeme hledat Fučíkovo vlastní čísla (α, β) po přímkách $\beta = \alpha + h$, $h \in \mathbb{R}$.

Podle této úvahy upravíme rovnice (3.20):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}\mathbf{U} &= \alpha\mathbf{D}_1\mathbf{U} - \beta\mathbf{D}_2\mathbf{U}, \\
 \mathbf{A}\mathbf{U} &= \alpha\mathbf{D}_1\mathbf{U} - (\alpha + h)\mathbf{D}_2\mathbf{U}, \\
 \mathbf{A}\mathbf{U} &= (\alpha\mathbf{D}_1 - \alpha\mathbf{D}_2 + h\mathbf{D}_2)\mathbf{U}, \\
 (\mathbf{A} + h\mathbf{D}_2)\mathbf{U} &= \alpha(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)\mathbf{U},
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pomocí integrované funkce MATLABu $\text{eig}(A, B)$, tedy v našem případě $\text{eig}((\mathbf{A} + h\mathbf{D}_2), (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2))$, najdeme všechny zobecněné vlastní čísla α a pak i odpovídající jim $\beta = \alpha + h$.

Výsledky výpočtu uvedeme na obr. 3.4.



Obrázek 3.4: Fučíkovo vlastní čísla (α, β) hledané po přímkách $\beta = \alpha + h$.

Grafické výsledky porovnání křivek $C_1^\pm, C_2^+, C_2^-, C_3^\pm$ obdržných pro operatory L^D a \mathbf{A} uvedeme na obr. A.

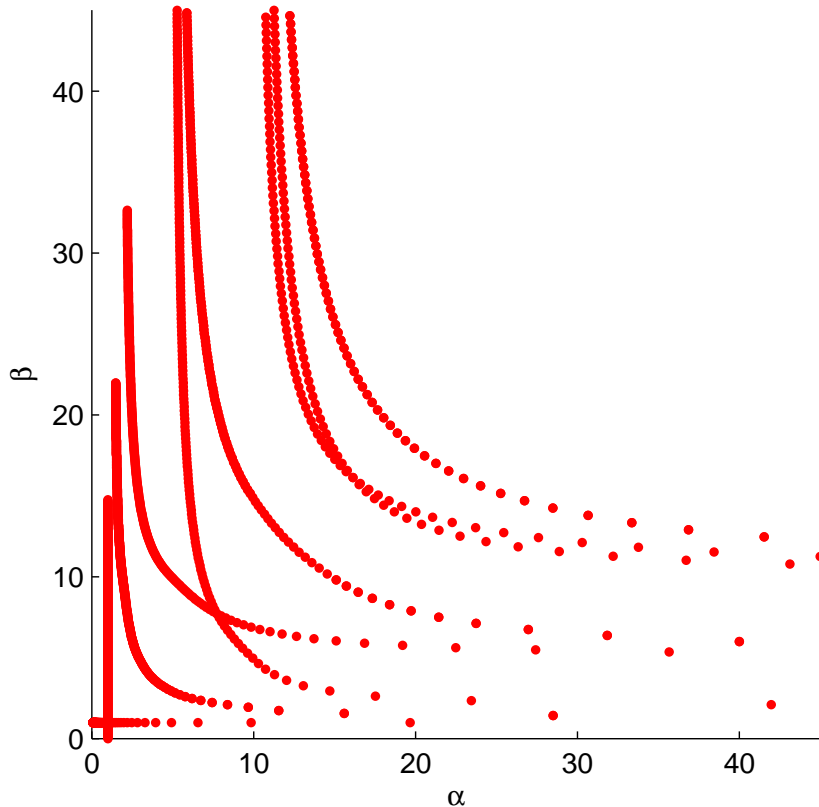
- Budeme hledat Fučíkovo vlastní čísla (α, β) po přímkách $\beta = k\alpha$, $k \in \mathbb{R}, k > 0$.

Podle této úvahy upravíme rovnice (3.20):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}\mathbf{U} &= \alpha\mathbf{D}_1\mathbf{U} - \beta\mathbf{D}_2\mathbf{U}, \\
 \mathbf{A}\mathbf{U} &= \alpha\mathbf{D}_1\mathbf{U} - k\alpha\mathbf{D}_2\mathbf{U}, \\
 \mathbf{A}\mathbf{U} &= \alpha(\mathbf{D}_1 - k\mathbf{D}_2)\mathbf{U},
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Výsledky výpočtu uvedeme na obr. 3.5.

Grafické výsledky porovnání křivek $C_1^\pm, C_2^+, C_2^-, C_3^\pm$ obdržných analytickým a numerickým způsobem uvedeme na obr. A.



Obrázek 3.5: Fučíkovo vlastní čísla (α, β) hledané po přímkách $\beta = k\alpha$, $k > 0$.

3.2.2 Fučíkovo spektrum diferenčního operátoru $\hat{\mathbf{A}}$

Pro diferenční operátor $\hat{\mathbf{A}}$ (3.6) a operátorovou rovnicí

$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{U} = \alpha\mathbf{U}^+ - \beta\mathbf{U}^-, \quad (3.25)$$

provedeme analogické výpočty jako v oddílu 3.2.1 a na obr. uvedeme výsledné Fučíkovo křivky diferenčního operátoru $\hat{\mathbf{A}}$. Chybu takové aproximace v porovnání ze Fučíkovo křivkami spojitého nesamoadjungovaného operátoru L^N se těžko da spočítat pro každou křivku, a proto srovnání provedeme jen vizuálně a to tak, že Fučíkovo křivky spojitě a diferenční úlohy zobrazíme na jednom obrázku.

3.3 Numerický výpočet Fučíkovo spektra pomoci funkce *bvp4c*

Další numerický výpočet Fučíkovo vlastních čísel provedeme pomoci funkce *bvp4c*, která je součástí prostředí MATLAB. Funkce *bvp4c* se používá pro hledání řešení okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice. Tuto funkce se da použít buď pro integrování systému obyčejných diferenciálních rovnic na nějakém intervalu (a, b) na základě dvoubodové okrajové podmínky, a nebo pro hledání

neznámých parametrů p pro úlohu z parametry p odpovídá parametrům. Nutnou podmínkou v tomhle případě je počáteční odhad pro všechny neznáme parametry.

Funkce $bvp4c$ vrátí přibližné řešení $r = r(x)$, které je spojitě na intervalu (a, b) a má spojitou první derivaci na daném intervalu a splňuje podmínky okrajové úlohy. V případě úlohy z parametry zároveň vrátí hodnoty pro neznáme parametry, které budou odpovídat řešení r .

3.3.1 Fučíkovo spektrum samoadjungovaného operátoru

Položíme $u_1(x) = u(x)$, $u_2(x) = u'(x)$, $\forall x \in (0, \pi)$ a zapíšeme úlohu (2.9) ve tvaru soustavy dvou diferenciálních rovnic prvního řádu (2.42):

$$\begin{cases} u_1' = u_2, & x \in (0, \pi), \\ u_2' = -\alpha u_1^+ + \beta u_1^-, \\ u_1(0) = 0, u_1(\pi) = 0. \end{cases}$$

Z vztahů (2.11) a (2.12) dostaneme:

$$\begin{aligned} u^+ &= \frac{1}{2}(|u| + u); \\ u^- &= \frac{1}{2}(|u| - u); \end{aligned} \tag{3.26}$$

Dosadíme vztahy (3.26) do soustavy (2.42) a dostaneme:

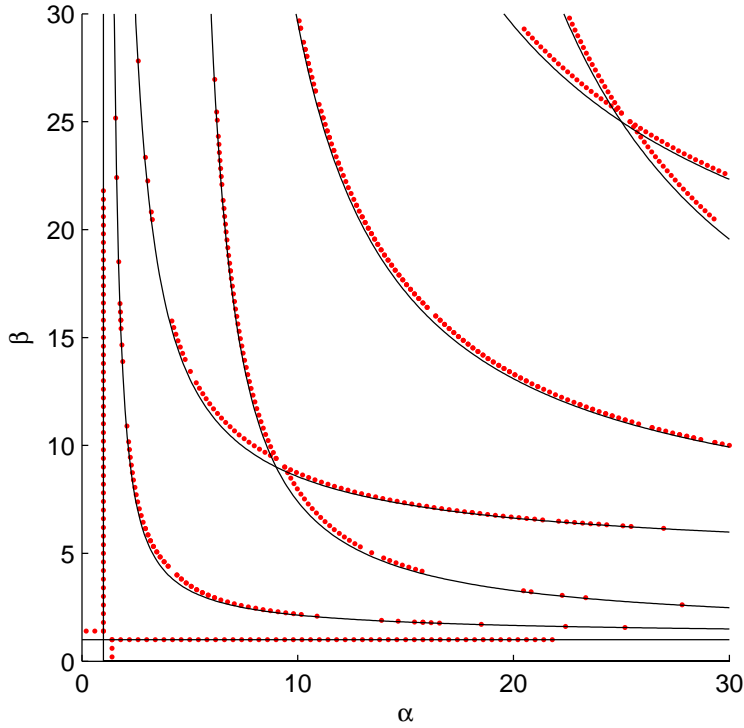
$$\begin{cases} u_1' = u_2, & x \in (0, \pi), \\ u_2' = -\frac{\alpha}{2}(|u_1| + u_1) + \frac{\beta}{2}(|u_1| - u_1), \\ u_1(0) = 0, u_1(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Budeme předpokládat, že parametr $\beta = \alpha + h$, $h \in \mathbb{R}$, $0 < h < 1$.

$$\begin{cases} u_1' = u_2, & x \in (0, \pi), \\ u_2' = -\frac{\alpha}{2}(|u_1| + u_1) + \frac{\alpha + h}{2}(|u_1| - u_1), \\ u_1(0) = 0, u_1(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3.28}$$

Protože v úloze (3.28) máme jeden parametr tak přidáme k okrajovým podmínkám ještě podmínku $u_2(0) = 1$ a aby neztratit řešení s opačným znaménkem potom uděláme výpočet ještě jednou pro podmínku $u_2(0) = -1$.

Funkce $bvp4c$ požaduje zadat odhad hledaných parametrů a řešení. Nastavíme počáteční odhady α a funkci u_1 na hodnoty nalezené analyticky v oddílu 2.1.1 pro spojitou úlohu (2.9). A potom v každém následujícím kroku odhady nastavíme na hodnoty vypočtené funkci $bvp4c$ v předchozím kroku. Výsledek uvedeme na obr. 3.3.1



Obrázek 3.6: Fučíkovo křivky operátoru L^D vypočtené analyticky a numericky pomocí funkce $bvp4c$.

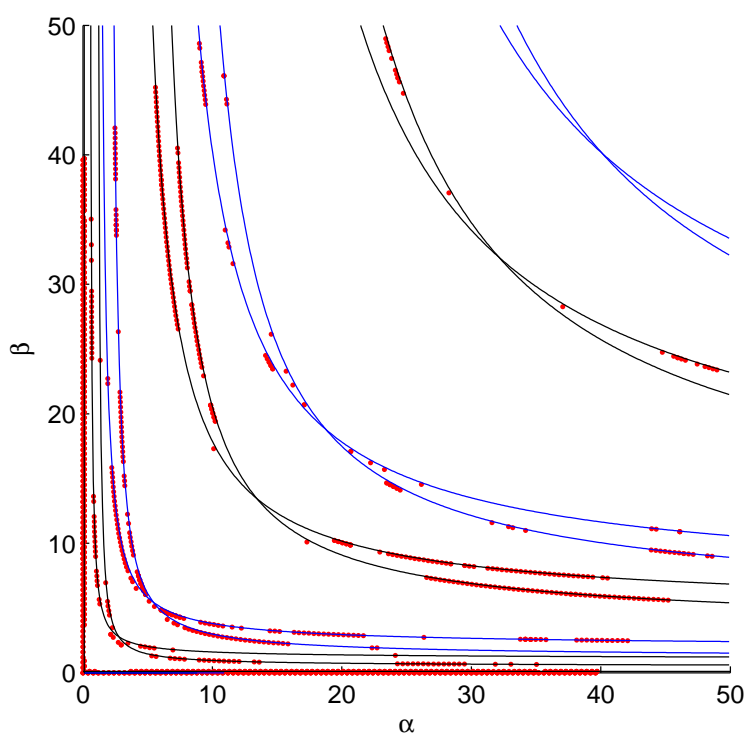
3.3.2 Fučíkovo spektrum nesamoadjungovaného operátoru

V souladu s úvahami uvedenými v předchozím oddílu zapíšeme soustavu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu odpovídající úloze (2.5) a tedy i operátorové rovnici (2.50):

$$\begin{cases} u_1' = u_2, & x \in (0, \pi), \\ u_2' = -\frac{\alpha}{2}(|u_1| + u_1) + \frac{\alpha + h}{2}(|u_1| - u_1), \\ u_1(0) = 2u_1(\pi); \\ u_2(0) = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Kvůli neznámé hodnotě parametru α přidáme k okrajovým podmínkám ještě podmínku $u_1(0) = 1$ a aby neztratit řešení s opačným znaménkem potom uděláme výpočet ještě jednou pro podmínku $u_1(0) = -1$. Počáteční odhady parametru α a funkci u_1 nastavíme na hodnoty nalezené analyticky v oddílu 2.1.2 pro spojitou úlohu (2.5). Tedy budeme uvažovat 2 posloupnosti parametru α a odpovídající jim vlastní funkce viz tvrzení 2.2. Potom v každém následujícím kroku odhady nastavíme na hodnoty vypočtené funkcí $bvp4c$ v předchozím kroku. Výsledek uvedeme na obr. 3.3.2.

Jak vidíme, obdržené výsledky velmi přesně aproximují Fučíkovo spektrum operátorů L^D a L^N .



Obrázek 3.7: Fučíkovo křivky operátoru L^N vypočtené analyticky a numericky pomocí funkce *bvp4c*.

Shrnutí

Poloviční vlastní čísla je poměrně mladá (první zavedení pojmu Henri Berestyckim v roce 1976, [1]) a málo prozkoumaná téma. Existují jen články několika autorů, které se zabývají studiem tohoto problému. Proto tato práce byla zaměřena sice na seznámení z novým pojmem a jeho krátkým popisem. Nicméně tím, že uvedení popis poloviční vlastních čísel a Fučíkovo vlastní čísla jsou souvislé můžeme problém polovičních vlastních čísel snadno převést na problém Fučíkovo spektra, který už je dost opracovaný. Proto dále zaměřili jsme svoje úvahy na detailní zpracování právě Fučíkovo spektra.

Pro samoadjungovaný operátor $L^D : D(L^D) \subset L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$:

$$\begin{aligned} L^D u &:= -u'', \\ D(L^D) &:= \{u \in C^2(0, \pi) \cap C^1[0, \pi] : u(0) = 0, u(\pi) = 0\}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

a nesamoadjungovaný operátor $L^N : D(L^N) \subset L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$:

$$\begin{aligned} L^N u &:= -u'', \\ D(L^N) &:= \{u \in C^2(0, \pi) \cap C^1[0, \pi] : u'(0) = 0, u(0) = 2u(\pi) = 0\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

jsme popsali bodové spektry a Fučíkovo spektry.

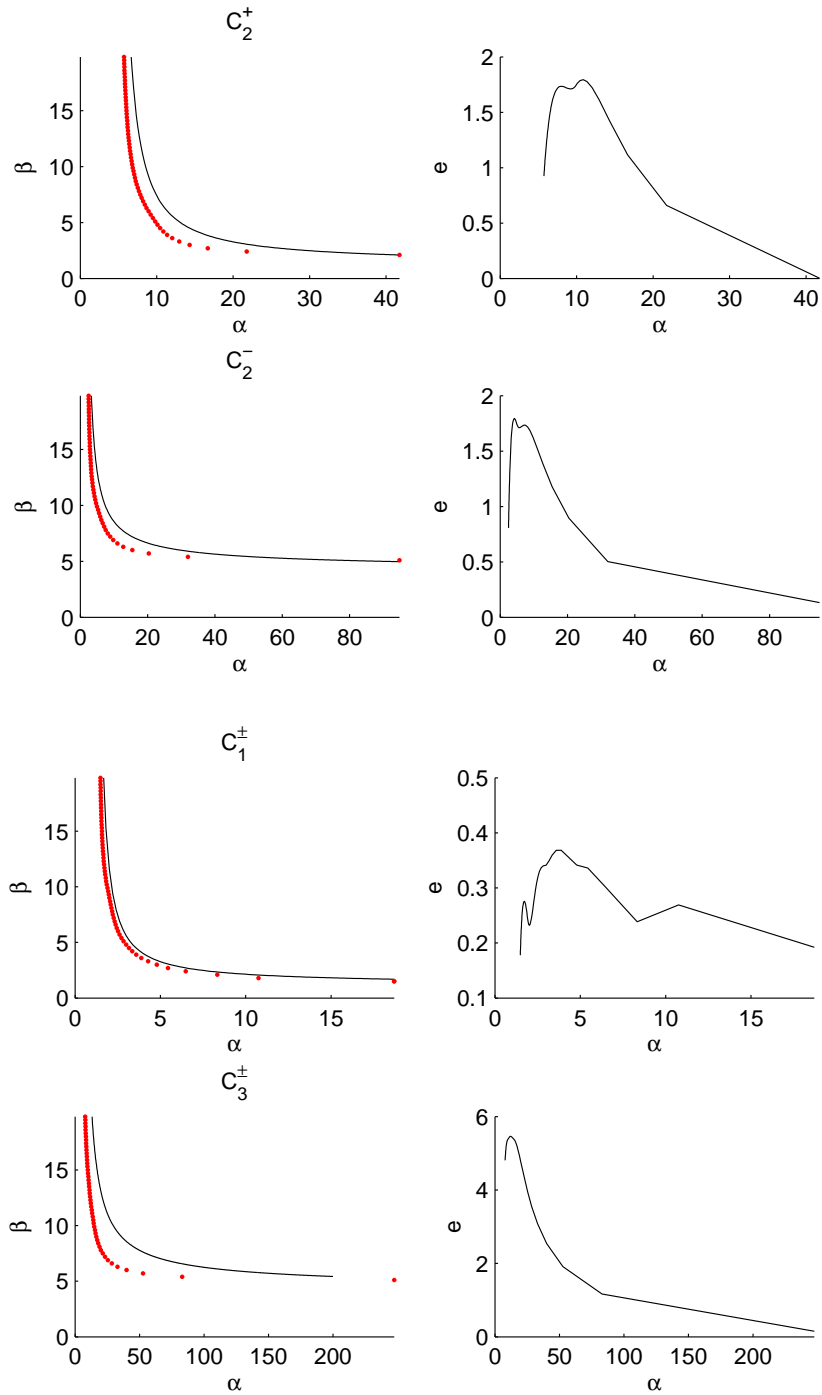
V kapitole 3 popsali jsme diferenční operátory, odpovídající vybraným diferenciálním operátorům. Pro tyto diferenční operátory jsme našli jejich vlastní čísla a Fučíkovo vlastní čísla. Pomocí integrované funkce programu MATLAB provedli jsme numerickou aproximaci Fučíkovo spektra vybraných diferenciálních operátorů. Taková aproximace ukázala se přesnější než aproximace Fučíkovo spektrem odpovídajících diferenčních operátoru.

Literatura

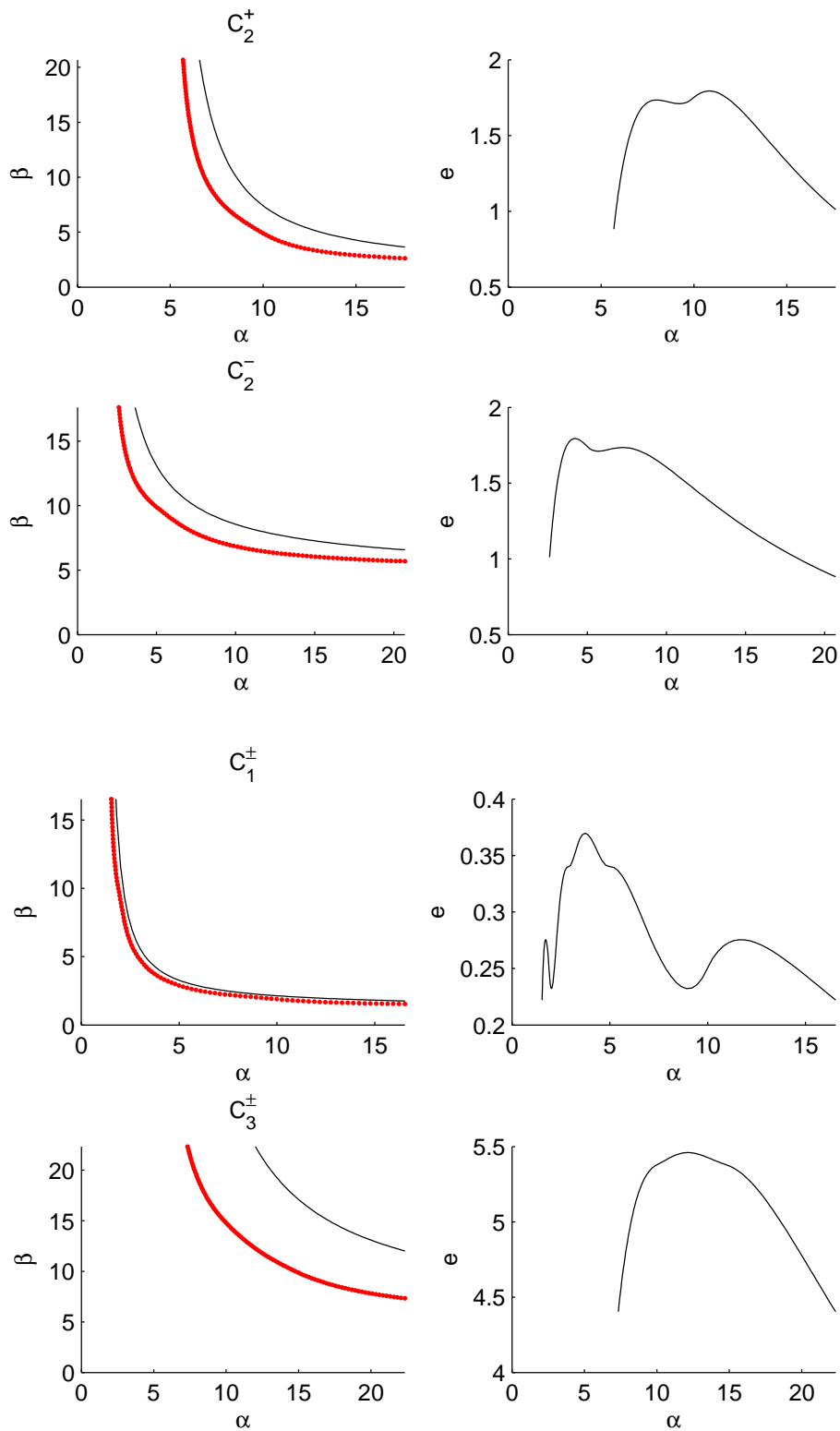
- [1] BINDING, Paul A.; RYNNE, Bryan P.: Half-eigenvalues of periodic Sturm-Liouville problems. *J. Differential Equations*, 206, 2004: s. 280–305, ISSN 0022-0396.
- [2] DRÁBEK, Pavel; KUFNER, Alois: *Úvod do funkcionální analýzy*. Plzeň: ZČU, 1994, ISBN 80-7082-124-8.
- [3] Fučík, Svatopluk: *Solvability of nonlinear equations and boundary value problems*. Dordrecht - Boston - London: D. Reidel Publishing Company. X, 1980, ISBN 90-277-1077-5.
- [4] GENOUD, Francois; RYNNE, Bryan P.: Half eigenvalues and the Fučík spectrum of multi-point, boundary value problems. *J. Differential Equations*, 252, 2012: s. 5076–5095, ISSN 0022-0396/5.
- [5] KRYVOSHEJA, Sergiy; PERESTJUK, Mykola; BURYM, Volodymyr: *Dyferencialni ta integralni rivnjannja*. Kyiv: Lybid, 2004, ISBN 966-06-0348-7.
- [6] MÍKA, Stanislav; PŘIKRYL, Petr; BRANDNER, Marek: *Speciální numerické metody - Numerické metody řešení okrajových úloh pro diferenciální rovnice*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2006, ISBN 80-86843-13-0.
- [7] RYNNE, Bryan P.: The Fucik Spectrum of General Sturm-Liouville Problems. *J. Differential Equations*, 161, 2000: s. 87–109, ISSN 0022-0396/00.
- [8] TESKOVÁ, Libuše: *Lineární algebra*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2010, ISBN 978-80-7043-966-1.

Příloha A

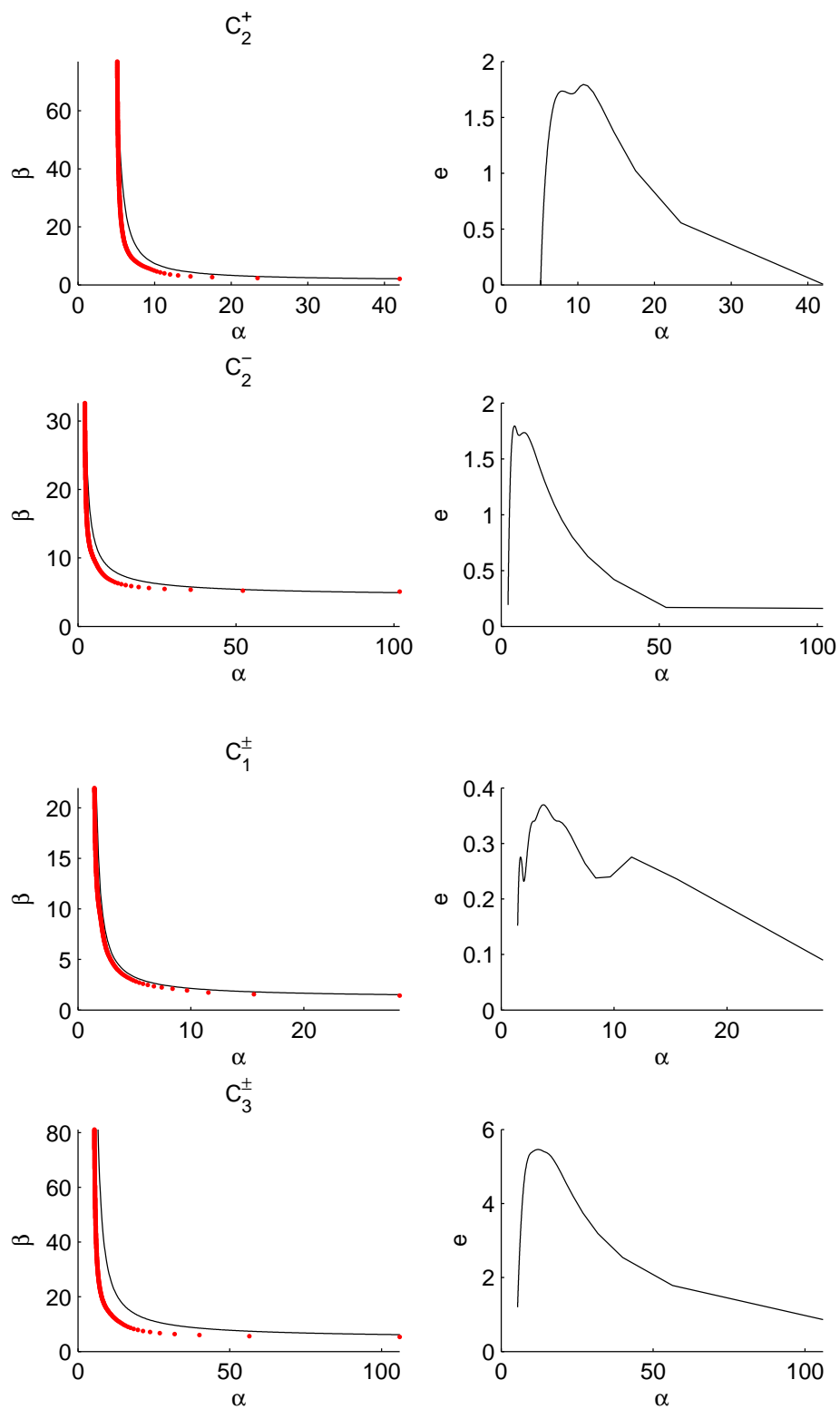
Fučíkovo spektrum diferenčního operátoru A



Obrázek A.1: Rozdíl mezi Fučíkovo křivky operátoru \mathbf{A} a L^D po přímkách $\beta = konst \geq 0$.



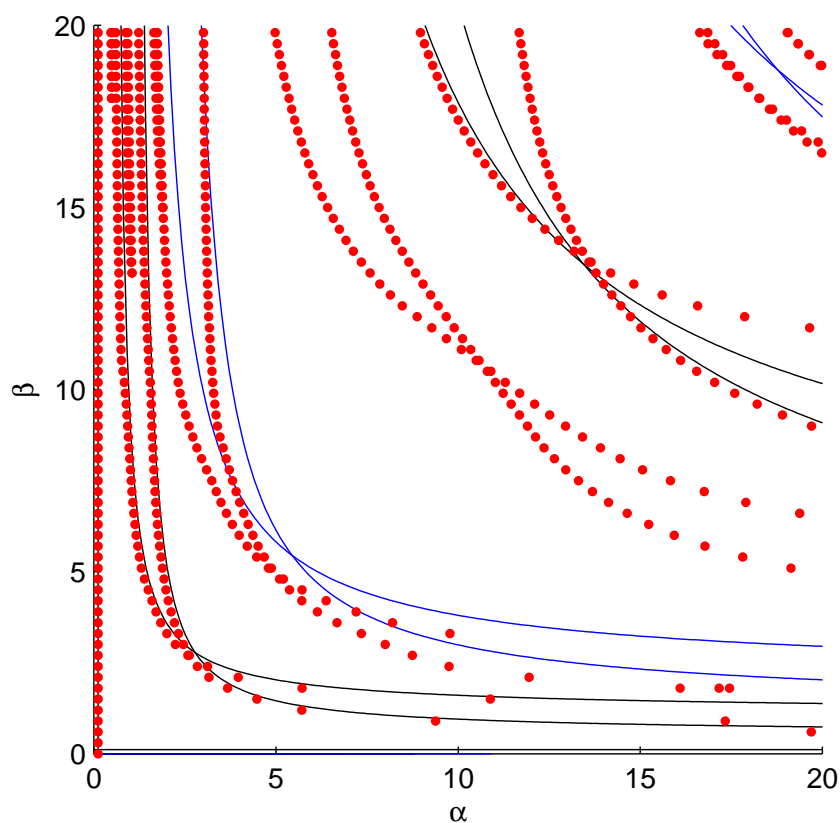
Obrázek A.2: Rozdíl mezi Fučíkovo křivky operátoru \mathbf{A} a L^D po přímkách $\beta = \alpha + h$.



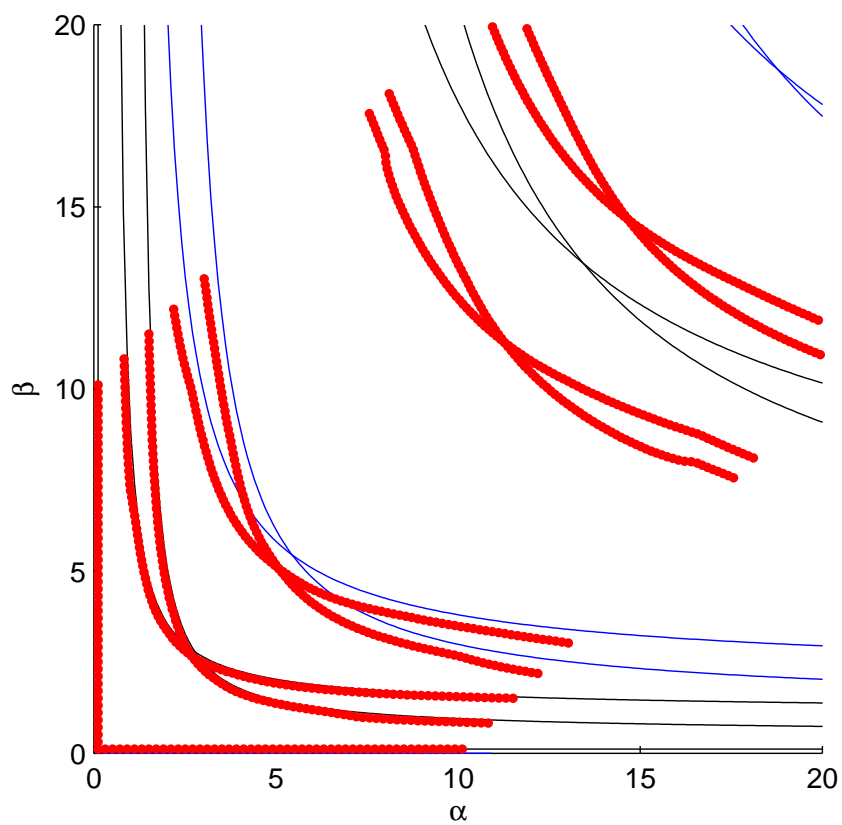
Obrázek A.3: Rozdíl mezi Fučíkovo křivky operátoru \mathbf{A} a L^D po přímkách $\beta = k\alpha$, $k > 0$.

Příloha B

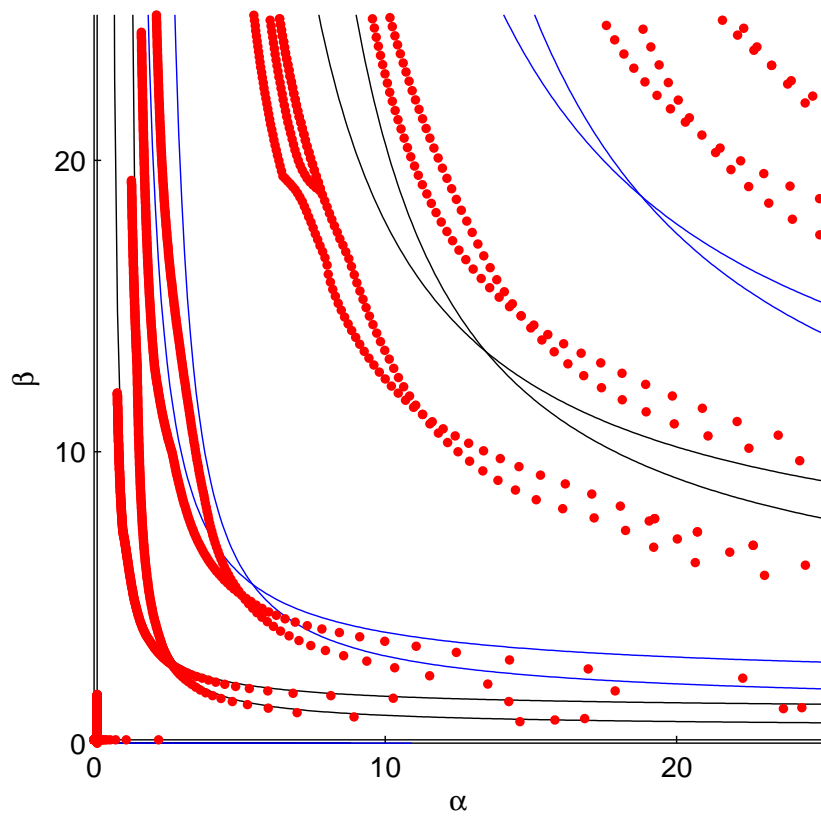
Fučíkovo spektrum diferenčního operátoru \hat{A}



Obrázek B.1: Fučíkovo vlastní čísla (α, β) nesamoadjungované úlohy hledané po přímkách $\beta = konst \geq 0$.



Obrázek B.2: Fučíkovo vlastní čísla (α, β) nesamoadjungované úlohy hledané po přímkách $\beta = \alpha + h$.



Obrázek B.3: Fučíkovo vlastní čísla (α, β) nesamoadjungované úlohy hledané po přímkách $\beta = k\alpha$, $k > 0$.