ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

ROZŠIŘOVÁNÍ ČÍSELNÝCH OBORŮ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Mgr. Jitka Vlková

Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma-Te

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň, 2022

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Rozšiřování číselných oborů* vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 30. března 2022

....
vlastnoruční podpis

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu práce doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za cenné odborné rady a čas, který mi při psaní této diplomové práce věnoval.

OBSAH

ÚVOD ... 4

1 ČÍSLO ... 5

1.1 ZÁPIS ČÍSEL ... 5

2 HISTORIE MATEMATIKY ... 13

2.1 OBDOBÍ TVORBY ELEMENTÁRNÍCH MATEMATICKÝCH POJMŮ ... 13

2.2 MATEMATIKA KONSTANTNÍCH VELIČIN ... 15

2.2.1 Období antického Řecka ... 15

2.2.2 První krize ... 17

2.2.3 Středověká matematika ... 19

2.3 MATEMATIKA PROMĚNNÝCH VELIČIN ... 22

2.3.1 Newtonovo a Leibnizovo pojetí ... 23

2.3.2 Druhá krize ... 26

2.4 MATEMATIKA ZOBECNĚNÝCH PROSTOROVÝCH A KVANTITATIVNÍCH VZTAHŮ ... 27

2.4.1 Třetí krize ... 30

3 ČÍSELNÉ OBORY ... 31

3.1 TEORIE MNOŽIN ... 32

3.1.1 Základní množinové vztahy ... 33

3.1.2 Základní množinové operace ... 34

3.1.3 Terminologie ... 35

3.2 ROZŠIŘOVÁNÍ ČÍSELNÝCH OBORŮ ... 35

4 PŘIROZENÁ ČÍSLA ... 37

4.1 KONSTRUKCE PŘIROZENÝCH ČÍSEL ... 37

4.1.1 Peanovy axiomy ... 37

4.2 OPERACE NA MNOŽINĚ PŘIROZENÝCH ČÍSEL ... 38

4.3 SPOČETNOST A MOHUTNOST MNOŽINY PŘIROZENÝCH ČÍSEL ... 39

4.4 USPOŘÁDÁNÍ NA MNOŽINĚ PŘIROZENÝCH ČÍSEL ... 40

5 CELÁ ČÍSLA ... 41

5.1 KONSTRUKCE CELÝCH ČÍSEL ... 41

5.2 SPOČETNOST A MOHUTNOST MNOŽINY CELÝCH ČÍSEL ... 47

5.3 USPOŘÁDÁNÍ NA MNOŽINĚ CELÝCH ČÍSEL ... 48

5.4 CELÁ ČÍSLA JAKO ALGEBRAICKÁ STRUKTURA ... 49

6 RACIONÁLNÍ ČÍSLA ... 51
6.1 KONSTRUKCE RACIONÁLNÍCH ČÍSEL ... 51
6.1.1 Vnoření komutativního okruhu do podílového tělesa ... 51
6.1.2 Vlastní konstrukce racionálních čísel ... 52
6.2 SPOČETNOST A MOHUTNOST MNOŽINY RACIONÁLNÍCH ČÍSEL ... 54
6.3 USPOŘÁDÁNÍ NA MNOŽINĚ RACIONÁLNÍCH ČÍSEL ... 55
6.4 RACIONÁLNÍ ČÍSLA JAKO ALGEBRAICKÁ STRUKTURA ... 57
6.5 ŘETĚZOVÉ ZLOMKY ... 57
6.5.1 Základní pojmy ... 58
6.5.2 Hodnota řetězového zlomku ... 59
6.5.3 Sblížené zlomky ... 59
6.5.4 Zápis kladných racionálních čísel ve tvaru řetězového zlomku ... 61
7 REÁLNÁ ČÍSLA ... 64
7.1 KONSTRUKCE REÁLNÝCH ČÍSEL ... 65
7.1.1 Axiomatická výstavba oboru reálných čísel ... 65
7.1.2 Cantorova konstrukce oboru reálných čísel ... 67
7.2 SPOČETNOST A MOHUTNOST MNOŽINY REÁLNÝCH ČÍSEL ... 70
7.3 USPOŘÁDÁNÍ NA MNOŽINĚ REÁLNÝCH ČÍSEL ... 71
7.4 REÁLNÁ ČÍSLA JAKO ALGEBRAICKÁ STRUKTURA ... 71
7.5 DRUHÉ ODMOCNINY A JEJICH ZÁPIS VE TVARU ŘETĚZOVÝCH ZLOMKŮ ... 71
8 KOMPLEXNÍ ČÍSLA ... 80
8.1 KONSTRUKCE KOMPLEXNÍCH ČÍSEL ... 81
8.2 SPOČETNOST A MOHUTNOST MNOŽINY REÁLNÝCH ČÍSEL ... 83
8.3 USPOŘÁDÁNÍ NA MNOŽINĚ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL ... 83
8.4 KOMPLEXNÍ ČÍSLA JAKO ALGEBRAICKÁ STRUKTURA ... 83
9 HYPERKOMPLEXNÍ ČÍSLA ... 85
9.1 KVATERNIONY ... 85
9.2 OKTONIONY ... 86
10 NADREÁLNÁ ČÍSLA ... 88
ZÁVĚR ... 89
RESUMÉ ... 90
RESUME ... 91

SEZNAM LITERATURY 92
SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ 96

Úvod

Číslo a jeho obory jsou základem matematiky. Jak se vyvíjelo lidstvo, vyvíjela se i potřeba číselné obory rozšiřovat. Cílem této práce je poskytnout čtenáři přehled nejen o vývoji číslic, pojmu čísla a matematiky jako vědy, ale především zavést jednotlivé číselné obory a zdůvodnit nutnost jejich rozšiřování o další čísla.

Práci lze z tematického hlediska rozdělit na čtyři celky. První kapitola se věnuje číslu a jeho zápisu a popisuje vývoj zápisu čísla od pravěku až po současnost. Druhá část se zabývá historií matematiky s ohledem na vývoj číselných oborů. Pozornost je věnována také matematickým krizím, které přispěli k tomu, že bylo nutné do matematiky zavést další číselné obory. Ve třetí části je představena teorie množin a vysvětleny pojmy, které budou používány ve čtvrté části práce.

Poslední část práce obsahuje celkem sedm kapitol – sedm číselných oborů. Jednotlivé obory jsou zde zkonstruovány pomocí axiomů, definic a vět v souladu s dnešním pojetím matematiky. Dále jsou představeny některé důležité vlastnosti číselných oborů, definovány základní početní operace a v závěru je specifikováno, jakou algebraickou strukturu spolu s definovanými operacemi jednotlivé číselné obory tvoří.

1 ČÍSLO

Číslo podle Ottova slovníku naučného (1893) vyznačuje pojem kolikosti stejnorodých věcí, jehož jednotlivou částí je jednotka. Potřeba jakékoli jednotky počítat a tento počet následně i zapsat, je stará, jako lidstvo samo. Jak se vyvíjela civilizace, měnil se a zdokonaloval i způsob počítání a zápisu čísel.

První představu o číslech měl již člověk ve starší době kamenné – paleolitu. Jeho potřeba vyjádření množství souvisela s jeho způsobem života. Lovem a sběrem. Spíše než přesný počet, uváděl jen množství, tedy „jeden“, „dva“ anebo „mnoho“. Revoluční změna nastala asi před 10 000 lety, v době, kdy člověk změnil svůj přístup k přírodě z pasivního na aktivní. Zemědělství, chov dobytka, rozvoj řemesel a s tím následně spojené obchodování vyžadovalo nutnost počítání. Zpočátku se počítalo na prstech ruky, popřípadě obou, což vedlo k vyjádření čísel se základem pět nebo deset, později i více. Potvrzení předpokladu, že počítání na prstech byl prvotní způsob určování počtu, můžeme nalézt u současných kmenů žijících mimo civilizaci. Jelikož nemají slova vyjadřující množství větší než dva nebo tři, určují počet pomocí signalizace na prstech. Názvy pro jednotlivá množství byly pak většinou odvozeny právě od slov znamenajících části těla, nebo předměty či jejich skupiny, které byly všem dobře známé. Například pro číslo pět bylo používáno stejné slovo jako pro slovo „ruka“, číslo deset znamená totéž, co slovo „ruce“ nebo dvojka má tentýž význam jako „oči“ či „uši“ (Fine, 1907).

1.1 ZÁPIS ČÍSEL

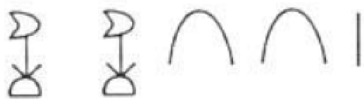
Se stále dynamičtějším rozvojem společnosti vyvstávala potřeba určité počty zaznamenat. Tyto číselné zprávy se uchovávali rozličnými způsoby. Z těch nejčastějších uvádím například uzly na provaze, zářezy do dřevěných holí či kostí, kamínky, lastury. Za jeden z nejstarších záznamů matematické činnosti člověka je pak považována vrubovka nalezená před druhou světovou válkou profesorem Absolonem ve Věstonicích na Moravě (Folta, 2004). Jedná se o 18 cm dlouhou vřetenní kost mladého vlka s 55 vyrytými zářezy. Prvních pět zářezů je uspořádáno do skupin po pěti, následují dva dlouhé zářezy, pak řada pokračuje dvojnásobně dlouhými třiceti zářezy (Struik, 1963). Vrubovky byly používány také v Anglii, a to od 13. století až do roku 1820 pro zapisování výběru daní. Vrubovky nebo jiné počítací tyčinky jsou pro zápis čísel používány některými loveckými kmeny na severu Sibiře a Ameriky dodnes.

V pravěké numeraci se tedy užíval jeden číselný znak pro číslo jedna. Opakováním tohoto znaku se pak zapisovalo číslo větší než jedna. Bylo-li potřeba zapsat číslo větší, sdružovaly se znaky do skupin, obvykle po pěti či deseti, což mělo sloužit především k přehlednosti zápisu čísla. Systém vytváření pětic, kdy pátá čára přeškrtává šikmo čtyři svislé čáry, je používán i v současné době, například v pohostinství nebo při různých hrách.

Základem pro dnešní zápis čísel byl tedy zřejmě počet deseti prstů na rukou. Této myšlenky patrně využívali již staří Egypťané v době asi před 5 000 lety. Pro zápis větších čísel tvořili skupiny znaků po deseti. Při tomto způsobu zápisu nezáleželo na uspořádání znaků. Jednalo se tedy o tak zvanou nepoziční soustavu, avšak desítkovou, která je užívána pro zápis čísel i v současnosti. Znakem pro číslo jedna byla měřící tyč. Symbolem pro desítku byl znak připomínající podkovu. Souvislost podkovy a starého Egypta se však nejeví smysluplnou. Spíše se jednalo o dvě spojené paže, tedy deset prstů. Nejpravděpodobnější vysvětlení významu znaku pro stovku se uvádí jako stočený konec měřičského provazu, který byl dlouhý právě sto stop. Symbolem pro číslo tisíc byl lotosový květ, který byl taktéž symbolem životadárné řeky Nil. Tento symbol byl užíván také pro slovo „mnoho“, protože břehy Nilu byly pokryty mnoha a mnoha lotosy. V té době bylo číslo tisíc nejvyšším číslem. Znaky pro další čísla pocházejí z doby pozdější. Desetitisíc značili jako prst, stotisíc byl pulec (těch je v Nilu více než lotosů). Znakem pro milion byl klečící bůžek, nebo také žasnoucí muž, jak ukazuje následující obrázek. Milion byl v té době vnímán jako synonymum pro nekonečno, tak veliké a magické číslo, že jej může pochopit jen bůh (Hrábek, 2021).

Obrázek 1: Egyptská nepoziční desítková soustava (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová, 2003, str.39)

Čísla byla tedy zapisována prostým nakupením příslušných znaků. Jako příklad uvádím zápis čísla 2021.



O matematické vyspělosti egyptské říše svědčí nejen jejich stavby, které můžeme obdivovat dodnes, ale také dochované papyry, svitky vyrobené ze stébel šáchoru papírodárného (Cyperus papyrus). Dva z nich jsou pak obzvláště cenné. Prvním z nich je Rhindův papyrus (také Londýnský nebo Ahmosův), který byl nalezen v egyptských Thébách v polovině 19. století. V roce 1858 jej zakoupil Alexander Rhind, právník, egyptolog a znalec starožitností. Dnes je uložen v Britském muzeu v Londýně. Jedná se o sbírku 78 úloh s návody a řešením, které opsal písař Ahmose pro svého krále z materiálů pocházejících z období asi 1853 až 1809 před naším letopočtem. Je to nejvýznamnější a nejrozsáhlejší matematické dílo starého Egypta. Druhým cenným papyrem je tzv. Moskevský papyrus (také Goleniščevův). Tento papyrus získal na přelomu 19.a 20. století egyptolog *V.S. Goleniščev* a následně jej věnoval Puškinově muzeu krásných umění v Moskvě. Tento papyrus obsahuje 25 příkladů a patrně se jednalo o učební pomůcku nebo test znalostí (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová, 2003). Nejstarším egyptským matematickým záznamem je však vyčíslení vojenské kořisti pocházející přibližně z roku 3 300 před naším letopočtem. Hieroglyfického písmo (hieros = posvátný, glypho = nápis) se postupně vyvíjelo a zjednodušovalo na písmo hieratického (hieraton = kněžský) a později až na démotické (demotikos = lidový). Pro názornost uvádím vývoj čísla 3.

(a) Hieroglyficky (b) Hieraticky (c) Démoticky

Obrázek 2: Vývoj zápisu čísla 3 (Kolman, 1968)

Stejně jako v Egyptě tak i v jiných částech světa se vyvíjela kultura a s ní spojený zápis čísel. Stará Mezopotámie se rozprostírala mezi řekami Eufrat a Tygris. Mezopotámská matematika dosáhla dokonce vyšší úrovně než matematika egyptská. Již od třetího tisíciletí před naším letopočtem používali Sumerové k zápisu čísla trojhrannou dřevěnou tyčinku, tzv. klín ( ). Tato značka vytlačená do jílu nebo hliněné destičky symbolizovala číslo jedna. Opakování tohoto znaku zapisovali čísla 2 až 9. Pro desítku měli znak, který vytvořili pomocí stejného klínu . Od Sumerů tento způsob zápisu čísel převzali Babyloňané, a proto je dnes nazýván babylonský. Tímto způsobem zapisovali čísla od 1 do 59. Znaky pro desítky umisťovali nalevo, znaky pro jednotky napravo. K zápisu větších čísel používali Babyloňané šedesátkovou soustavu. Šedesát tvořilo jednu jednotku vyššího řádu. Šedesát šedesátek, tedy 3 600, další skupinu atd. Pro šedesátku používali stejný znak jako pro jednotku, jen byl umístěn před desítkami (Kolman, 1968).

Struik ve svých Dějinách matematiky uvádí, že šedesátková soustava i poziční systém se tak stali trvalým majetkem lidské společnosti. Právě od Sumerů pochází dnešní dělení hodiny na 60 minut a minuty na 60 sekund nebo dělení kruhu na 360° a každého jednoho stupně na 60 minut, minuty pak na 60 vteřin.

S pozičním systémem používaným v Mezopotámii se patrně seznámili i Indové a Řekové, když přes tamnější území vedli své karavany (Struik, 1963). Znaky pro římská čísla se podobně jako u některých z výše zmíněných kultur odvíjela od počítání na prstech. Symboly pro čísla 1, 2, 3 a 4 se podobají prstům ruky, tedy *I, II, III, IIII*. Symbol pro číslo pět je odvozen od tvaru dlaně, tedy *V*. Desítka jsou dvě dlaně, což značili jako dvě opačná *V*, jejichž spojením vznikl symbol *X*. Znak *C* pro stovku pochází z latinského centum – sto. Padesátka pak vznikla rozpůlením tohoto znaku vdodrovně, což přípomíná písemeno *L*. Podobně symbol *M* označující tisíc pochází z latinského mille – tisíc. Římská číslice *D* pro pětset pak vznikla svislým grafickým rozpůlením symbolu *M* (Crilly, 2010). Římský způsob zápisu čísel znamenal velký posun v pozičních soustávách. Místo, na kterém se daný znak vyskytoval, mělo svůj význam. Římská čísla se tedy skládají psaním znaků pro nejvyšší hodnoty k nejnižším. Menší římská číslice před větší znamená odečet. Většinou se kombinují nejvýše 3 stejné římské číslice (XXX = 30, III = 3). V dobách starověkého Říma se používal způsob, kdy mohli být kombinovány i čtyři stejné římské číslice. Tento způsob zápisu preferoval i francouzský král *Ludvík XIV.,* tedy *XIIII.* Díky jeho nařízení se také například setkáme na ciferníku dobových hodin se zápisem čtyřky jako *IIII*, jak by ji zapsali Římané. Zápis čtyřky jako *IV* byl používán až ve středověku. (Crilly, 2010).

Staří řekové na rozdíl od římanů označovali číslice začátečními písmeny jejich jména, jak demonstruje následující obrázek.

Π	Δ	H	X	M
5 pente	10 deka	100 hekaton	1 000 chilio	10 000 myrio

Obrázek 3: Řecký zápis čísel (Hrábek, 2021)

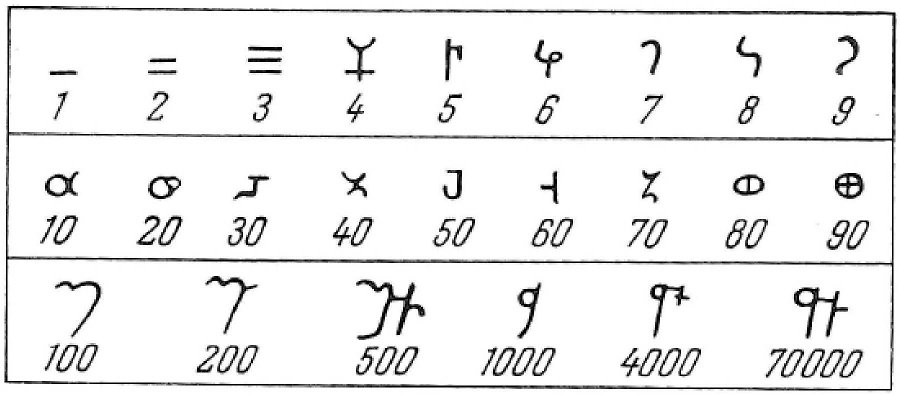
Zjednodušená soustava psaní číslic vznikla až později. První písmena abecedy označovala čísla 1 až 9. K dalším písmenům byla přiřazena vyšší čísla, jak ukazuje následuující obrázek. Pokud byla u písmena nebo nad ním čárka, číslo se násobilo tisícem, značka M značila násobení desetitisícem. Zajímavostí také je, že přibližně v této době řecký matematik Archimédes dokázal, že neexistuje jedno určité nejvyšší číslo (Hrábek, 2021).

α	β	γ	δ	ε	ζ	ξ	η	ϑ	$\bar{\iota}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varkappa$	λ	μ	ν	ξ	o	π	ϱ	ψ	φ
20	30	40	50	60	70	80	90	100	1000

Obrázek 4: Zjednodušený systém zápisu řeckých čísel (Hrábek, 2021)

Bylo tedy evidentní, že užití pozičního systému k zápisu čísel je nejefektivnější způsob. Není proto překvapivé, že se vyvinul ve více kulturách nezávisle na sobě. Kromě Babyloňanů, Řeků a Římanů jej používali i Číňané, Aztékové nebo Indové.

V údolí řeky Indu se v polovině 3. tisíciletí před naším letopočtem nacházel kulturně poměrně vyspělý otrokářský stát. V Indii byly používány různé číselné nepoziční soustavy, které ale zanikly. Nahradila je poziční číselná soustava bráhmí, která byla užívána ve velké části Indie po dobu více než tisíc let (Juškevič, 1978).



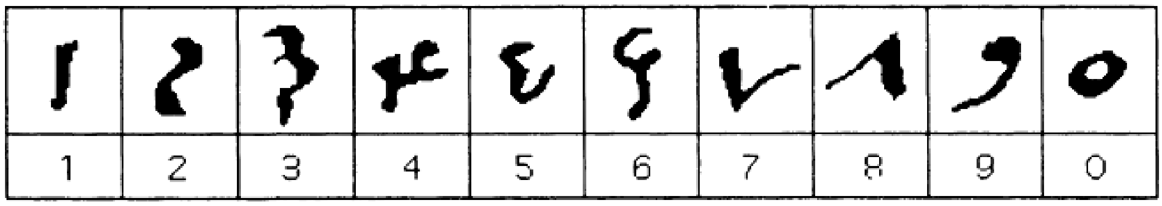
Obrázek 5: Číslice bráhmí (Juškevič, 1978)

V době asi 500 let před naším letopočtem vynalezl neznámý indický filozof geniální způsob zápisu čísel. Ponechal pouze číslice od 1 do 9 a sjednotil jejich zápis. Každá číslice pak značila počet jednotek, desítek, stovek a atd, podle svého umístění. Neméně důležitým objevem Indů pak bylo zavedení nuly. Hindský výraz označující kroužek je sunya, znamenající prázdnota. Postupem času byl kroužek přiřazen k nule, která symbolizovala „nic“. První písemnou zprávu o použití symbolu nuly je možné nalézt v rukopise Bakhšálí, indickém matematickém textě pocházejícím patrně ze třetího století našeho letopočtu (Hrábek, 2021).

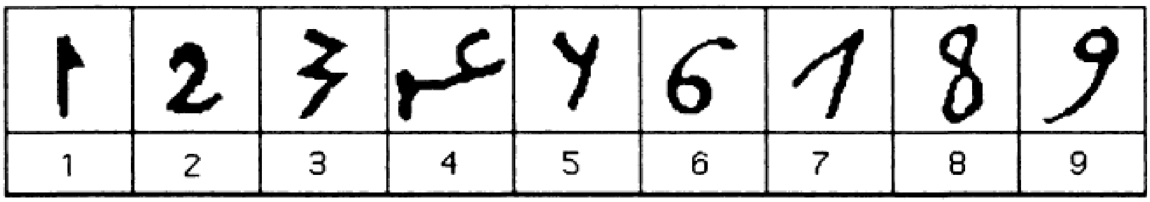
Na matematický odkaz Indů navázaly arabské země, které ve středověku zaznamenaly v oblasti matematiky výrazný rozvoj. Ve starověku se centrum vzdělanosti nacházelo v Řecku a Římě. Po pádu Západořímské říše koncem 5. století našeho letopočtu se centrum učenosti přesunulo právě na východ. V sedmém století zaznamenala arabské říše obrovský rozmach a v osmém už praktickicky ovládla célé území Pyrenejského poloostrova, všechny africké středomořské země, Blízký východ a velké oblasti Malé Asie, Kavkazu a Střední Asie (Bečvář, 2001). Úspěch arabské matematiky tedy spočívá ve využití poznatků a myšlenek národů z dobytých území. Mimo jiné využili poznatků řecké matematiky, od Indů převzali desítkovou poziční soustavu.

Pozn. 1 V odborných textech je možné se setkat s termíny arabská matematika i islámská matematika. Ani jeden z těchto pojmů však není docela přesný. O rozvoj matematického myšlení se na tomto území zasloužily různé národy, mnohé z nich však nemají arabský původ a nevyznávají islám. Všechny ale spojovala arabština a arabské písmo. (Juškevič, 1978).

Prosazování desítkové číselné soustavy probíhalo v arabských zemích velmi pozvolna. Území této říše bylo navíc velice rozsáhlé, proto se v různých částech psalo odlišně. Východoarabské číslice i se znakem pro nulu je možné nalézt v arabských textech už v první polovině 10. století. Současně s nimi se na Pyrenejském poloostrově objevují západoarabské číslice nazývané gubar (též gobar) z arabského prach či písek. Název vychází patrně ze skutečnosti, že se psalo na desky posypané pískem. Východoarabský způsob zápisu čísel se používal v mnoha zemích (Egypt, Turecko, Írán), přestože se jejich tvar v průběhu staletí měnil. Staré západoarabské číslice se dosud užívají v Maroku (Šišma, 2001).



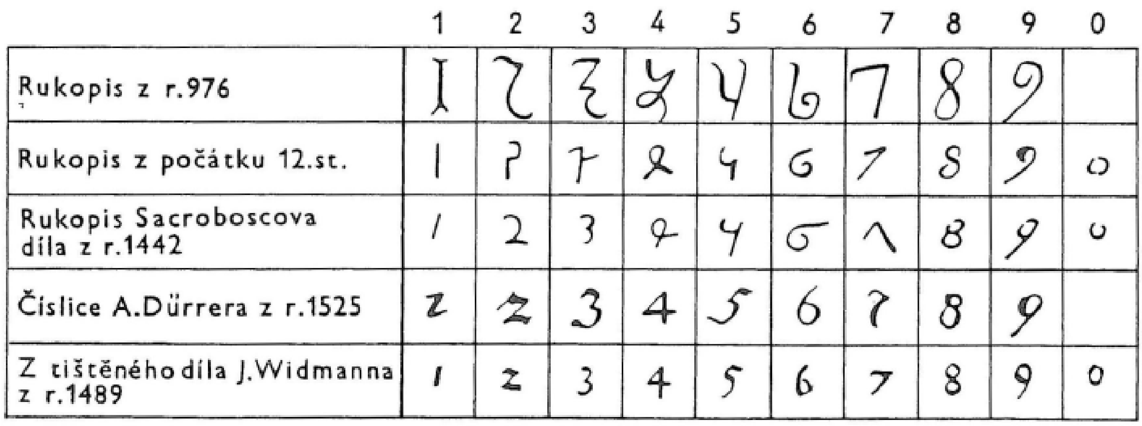
Obrázek 6: Východoarabské číslice z 10. století (Šišma, 2001)



Obrázek 7: Západoarabské číslice ze 14. století (Šišma, 2001)

Indicko-arabské číslice začaly do Evropy pronikat až v 10. století. Do té doby se k zápisu čísel používaly výhradně římské číslice. Nejstarší důkaz použití indicko-arabské poziční soustavy k zápisu čísla je možné nalézt v kodexu *Codex Vigilanus* z roku 976, který patřil španělskému klášteru Albelda. Na přelomu 10. a 11. století se Evropou začaly šířit západoarabské číslice gubar. Od 11. století se začalo objevovat stále více rukopisů s novým způsobem zápisu čísel, přesto však byl tento systém v Evropě přijímán poněkud skepticky. Zájem o něj jevili především obchodníci a pokladníci, kteří si tak zjednodušovali dlouhé výpočty. Roku 1299 bylo ve Florencii dokonce zakázáno používat nová čísla. Rozhodující vliv na přijetí nových číslic tak měli právě spisy, které se Evropou šířily. Z mnohých uvádím latinskou kompilaci *Kniha Algorisma* o aritmetické praxi od *Joanna Sevilského* patrně z roku 1153 (Bečvářová, 2001).

Tyto dva způsoby zápisu čísel spolu v Evropě soupeřily až do 16. století, kdy byla upřednostněna čísla nová. K rozšíření indicko-arabského pozičního desítkového systému přispěl také rozvoj knihtisku a následné vydávání učebnic a početnic (Bečvářová, 2001).



Obrázek 8: Dnešní číslice a jejich vývoj (Juškevič, 1978)

2 HISTORIE MATEMATIKY

Počátkem matematiky bylo počítání. Tvrdit však, že prvotní počítání bylo matematikou, by nebylo zcela rozumné. Začátek matematiky je možné spatřit až v době, kdy číslo bylo nějakým způsobem reprezentováno a jeho záznam uchován.

Poznatky, které si člověk od počátku vývoje lidstva osvojoval v každodenním životě, tvořili různorodou směs. Až když se nahromadilo více poznatků stejného druhu, začaly se formovat jednotlivé vědy. Tak se poznatky o prostorových formách a kvantitativních vztazích skutečného světa seskupily a jsou základem matematické vědy. *„Právě jako všechny ostatní vědy vznikla i matematika z praktických potřeb lidí, jako z měření ploch pozemků a objemů nádob, z počítání času a z mechaniky."* (Balada, 1959)

V následující části se pokusíme nastínit základní rysy vývoje matematiky od prehistorie po současnost. Pro přehlednost je vhodné období, které trvalo několik tisíciletí, rozdělit na kratší úseky. Halas (2021) uvádí periodizaci dějin matematiky podle Kolmogorova, který vývoj matematiky rozčlenil do čtyř období.

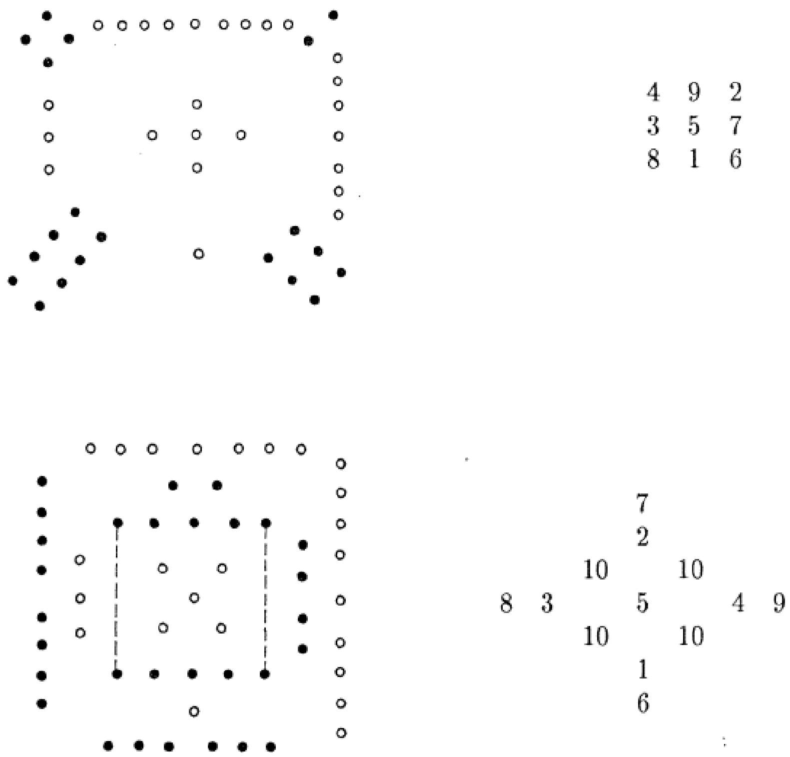
1. tvorba elementárních matematických pojmů
2. matematika konstantních veličin
3. matematika proměnných veličin
4. matematika zobecněných prostorových a kvantitativních vztahů

2.1 Období tvorby elementárních matematických pojmů

První období sahá od počátků civilizace až asi do 6. století před naším letopočtem. Charakteristickým rysem je pro něj empirický způsob získávání nových matematických poznatků (empirický, z řeckého empeiriea – zkušenost, tedy založené na zkušenosti). Člověk například potřeboval určit počet ovcí, které vyhnal na pastvu. Ráno za každou ovci položil kamínek na hromádku, pokud se ovce večer vrátila, kamínek odebral. Aniž by uměl ovce či kameny spočítat, tvořil přiřazení mezi dvěma množinami a určoval, zda jsou tyto množiny navzájem ekvivalentní. Na počátku byl tedy pojem přirozeného čísla charakterizován jako to, co je společného pro všechny ekvivalentní množiny. Současně s utvářením pojmu čísla vznikaly i nejzákladnější geometrické představy (Balada, 1959).

První matematické pojmy se utvářely v oblasti starých říčních kultur, tedy v Egyptě, Mezopotámie, Indii a Číně. Nejstarší dochované texty pocházejí z Egypta a Mezopotámie z přelomu 3. a 2. tisíciletí před naším letopočtem. Nalezené vrubovky patrně sloužily jako počítadla, či rozříznuté podélně přes zářezy jako smluvní dokumenty. O elementárním zvládnutí geometrické problematiky pak svědčí ornamenty nacházející se na předmětech denní potřeby. Další důkazy o úrovni matematických znalostí je možné nalézt ve stavitelství. Egyptské pyramidy pocházející z 3. tisíciletí před naším letopočtem jsou dokladem mnoha praktických matematických znalostí a dovedností (Fuchs, 1993).

První svědectví o početních schopnostech, které přesáhly čistě praktický rámec, je možné objevit v posvátné knize taoismu *I-ting* (Knize proměn) z doby přibližně 2 200 let před naším letopočtem. Schémata v této knize uvedená měla podle čínské tradice na svém hřbetě želva, která vylezla z Velké řeky. Tato schémata jsou pozoruhodná svou vnitřní symetrií (Fuchs, 1993).



Obrázek 9: Schémata z knihy I-ting (Fuchs, 1993)

2.2 Matematika konstantních veličin

Druhé období v dějinách matematiky trvalo od 6. století před naším letopočtem do konce 16. století našeho letopočtu a je možné jej rozdělit na dvě stěžejní etapy:

1. období antického Řecka
2. středověká matematika

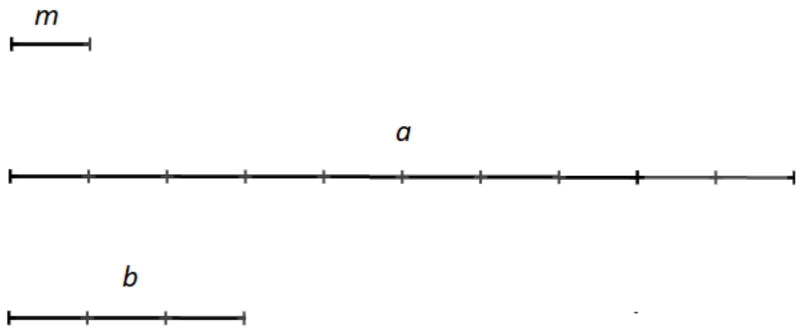
2.2.1 Období antického Řecka

Starověké říční kultury obohatily matematiku o řadu často pozoruhodných poznatků aritmetického, algebraického i geometrického charakteru. Tyto poznatky a s nimi spojená početní pravidla však autoři předkládali bez důkazů (Balada, 1959). O matematice jako o vědě v moderním slova smyslu je tak možné hovořit až s rozvojem řecké vzdělanosti asi v 6. století před naším letopočtem. Řekům již nestačilo získávat matematické poznatky experimentální cestou a stále výrazněji se u nich uplatňovala potřeba logického zdůvodňování. Z empirické nauky, založené na zkušenostech a pozorování, se přesunuli k deduktivně budované vědě. Od izolovaných, nezdůvodňovaných a navzájem nepropojených poznatků pokročili k systematicky budovaným teoriím. Předkládané důkazy se stávali základním požadavkem cíleně rozšiřujícím dosavadní poznatky (Fuchs, 1993).

Prvním významným řeckým matematikem, který prováděl samostatné geometrické úvahy, byl *Thales z Miletu* (cca 624-543 př. n. l.) (Balada, 1959). Jako první například stanovil a dokázal matematickou větu o velikosti úhlů trojúhelníků vytvořených nad průměrem kružnice, dnes nazývanou Thaletova větu.

Vznik matematiky jako vědy je však spojen s učením tzv. pythagorejské školy, kterou založil kolem roku 530 před naším letopočtem řecký filosof *Pythagoras* ze Samu (cca 560-480 př. n. l.). Pythagoras je považován za objevitele tzv. Pythagorovy věty, ta ale byla prokazatelně známa již Číňanům a Egypťanům o staletí dříve. Pythagorejské pojetí matematiky však nebylo geometrické, ale aritmetické. Bez nadsázky je tedy možné tvrdit, že Pythagorejci číslům přisuzovali božskou podstatu a z čísel byl podle nich tvořen celý svět. Za čísla ovšem považovali pouze tzv. souměřitelná čísla, tedy taková, která bylo možné znázornit jako délku úsečky. Tvrdili, že každé dvě úsečky jsou souměřitelné, tedy je možné pro ně najít společnou míru, úsečku, ze které je možné obě úsečky vytvořit. Tedy

$$a = p.m \text{ a } b = q.m, neboli\ \frac{a}{b} = \frac{p.m}{q.m} = \frac{p}{q}. (p = 10, q = 3)$$



Čísla, samozřejmě přirozená, a jejich vzájemné poměry, tedy čísla racionální, byla základem jejich koncepce výkladu světa. (Fuchs, 2021). Tato koncepce se ale doslova zhroutila v okamžiku, kdy Pythagorejci objevili dvojice úseček, které souměřitelné nejsou (například strana a úhlopříčka čtverce nebo strana a úhlopříčka pravidelného pětiúhelníku). Nesouměřitelnost strany a úhlopříčky čtverce patrně jako první dokázal filosof *Hippasus z Metapontu* (5. st. př. n. l.), který byl údajně za prozrazení tohoto objevu svržen z lodi a utopen. K objevu nesouměřitelnosti mohla Pythagorejce přivést i znalost Pythagorovy věty, která byla v té době v Řecku již dobře známá a používaná (Bečvář, 1993). I my ji využijeme k nastínění hypotézy objevu nesouměřitelnosti.

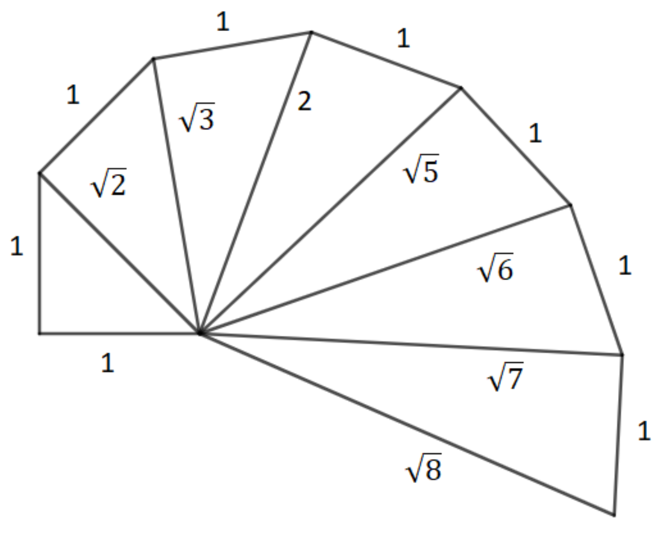
Předpokládejme tedy, že strana a a úhlopříčka u čtverce ABCD jsou souměřitelné úsečky a jako jednotku délky mějme jejich největší společnou míru. Pak jsou čísla $a = |AB| = |BC|$ a $u = |AC|$ přirozená a nesoudělná. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC vyplývá vztah $u^2 = 2a^2$, proto u^2 a tedy i číslo u musí být sudé, tedy $u = 2k$, kde k je přirozené číslo. Pokud mají být čísla a a u nesoudělná, pak a musí být liché. Dosadíme-li však $u = 2k$ do vztahu $u^2 = 2a^2$, po úpravách dostaneme $2k^2 = a^2$, z čehož plyne že a^2 a tedy i a je sudé číslo. To je ale ve sporu s předpokladem nesoudělnosti. Úsečky a a u proto nemají společnou míru (Struik, 1963).

Toto zjištění vedlo ke zhroucení pythagorejské představy o vzájemném vztahu čísel a geometrických veličin. Nastala tzv. první krize matematiky, protože byly podlomeny prakticky celé základy tehdejší matematiky.

Pozn. 2 Řekové měli pro pojem nesouměřitelnosti tři výrazy. Asymetron vyjadřoval neexistenci společné míry, areion pak nemožnost vyjádřit se v celých číslech. Alogon značil, že se číslo nedá vyjádřit logem, tzn. poměrem. Latinský výraz pro poměr je ratio, odtud iracionalita, tedy iracionální číslo (Bečvář, 1993).

2.2.2 První krize

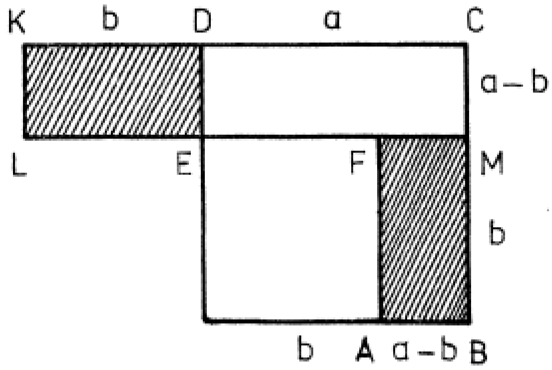
Aby mohly být vyřešeny problémy první krize matematiky, bylo nutné se přesunout od aritmetického chápaní veličin ke geometrickému, kde iracionální čísla nevadí. Iracionality, tedy nesouměřitelné veličiny, začaly být hojně studovány. Údajně již v 5. století před naším letopočtem dokázal *Theodoros z Kyrény* iracionalitu nečtvercových čísel, tedy čísel typu $\sqrt{n}$, kde $n \in N$, pro $N = \langle 1{,}17 \rangle$ (Bečvář, 1993).



Obrázek 10: Konstrukce iracionality podle Theodora

Ani v současné době není možné aritmeticky přesně určit součty obsahující iracionální čísla, například $1 + \sqrt{2}$. Bylo tedy nutné upřednostnit geometrii, protože součty, které obsahují iracionální čísla, je možné teoreticky přesně sestrojit. Zrodila se tzv. řecká geometrická algebra, která řešila algebraické úlohy konstrukcemi geometrických útvarů. Veličinami se staly namísto přirozených a racionálních čísel délky, obsahy a objemy. Důsledně byl však dodržován tzv. zákon homogenity: sčítat a odčítat bylo možné pouze veličiny stejného rozměru. Pomocí geometrie pak bylo možné vyjádřit i takové matematické vztahy, na které v současnosti nahlížíme čistě algebraicky (Bečvář, 1993).

Pro příklad uvádím vyjádření vzorce $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.



Obrázek 11: Konstrukce vzorce pro druhou mocninu rozdílu (Bečvář, 1993)

Proces geometrizace matematiky byl vynikajícím způsobem završen *Eukleidem z Alexandrie* (cca 340-278 př. n.l.), který ve své knize *Základy* (Stoicheia) shrnul téměř všechny tehdejší matematické znalosti. V tomto díle je možné se poprvé setkat s axiomatickou výstavbou matematiky. Každou část, knihu (celkem 13), začíná definicemi základních pojmů. Jsou zde také uvedeny premisy (axiomy), jejichž pravost se nedokazuje, nýbrž pouze předkládá. Celkem v tomto díle najdeme přes 465 matematických tvrzení a bylo sepsáno tak geniálně, že se jako učebnice používá až do současnosti. Podobně významným dílem byla také *Diofantova* (Diofantos z Alexandrie, cca 200-284 n.l.) *Aritmetika*, která pojednávala o lineárních a kvadratických rovnicích. Diofantos navazoval na egyptskou matematiku a své řecké předchůdce. Povšimnul si, že některé kvadratické rovnice mohou mít i dvě řešení, přesto však stále nepoužívá nulu a záporná čísla (Mareš, 2008).

2.2.3 STŘEDOVĚKÁ MATEMATIKA

Rozpad antické civilizace završený rozehnáním aténské Akademie v roce 529 Justiniánem I. způsobil odchod části antických filosofů do Orientu. Antické matematické poznatky tak začaly pronikat k Peršanům, do střední Asie nebo k Indům. Právě od indických učenců vzešlo mnoho matematicky cenných poznatků, jejichž odkazu spolu s řeckou matematikou následovali Arabové. Arabská kultura se tak stala zprostředkovatelem mezi východní a západní Evropou (Folta, 2004).

Zlatý věk pro arabskou vzdělanost nastal v 7. a 8. století našeho letopočtu, poté, co dokončili svou expanzi. Po celém území Arábie vznikala vědecká centra. V hlavním městě Bagdádu byl založen Dům moudrosti, instituce, kolem které se vytvořila tzv. bagdádská matematická škola. Tamní učenci se věnovali především studiu antických autorů a jejich překladu do arabštiny. K nejvýznamnějším matematikům té doby patřil *Abú Abdalah Muhammad ibn Músa al-Chorezmi* (783-847), který používal k zápisu čísel indické číslice a desítkovou poziční soustavu, ve které popisuje algoritmy základních početních operací. Věnuje se také řešení lineárních a kvadratických rovnic (Struik, 1963).

Pozn. 3 Jedno z jeho pravidel pro úpravu rovnice se nazývalo al-džabar. Odtud pochází název nauky o řešení rovnic – algebra (Folta, 2004).

V jedné z aritmetických části se Al-Chorezmi věnuje také zlomkům, konkrétně šedesátinným zlomkům a početním operacím s nimi. Kromě nich používá také tzv. kmenné zlomky, tedy zlomky s čitatelem rovným 1. Desetinné zlomky Al-Chorezmi nepoužíval. Poprvé je zřejmě užil *Al-Uqlídísí*, o zavedení desetinného systému však nešlo. Čísla v desetinném tvaru, tak jak je chápeme v současnosti, představil ve svém *Pojednání o aritmetice* z roku 1172 *Al-Samav´al*. Podobně jako jeho předchůdci však stále užíval k zápisu čísel v desetinném tvaru slova. Číslo 3,14 by tak zapsal jako 3 plus 1 část z deseti plus 4 části ze sta. Jasně však ukazuje, jak desetinná čísla umožňují aproximovat racionální i iracionální čísla. Prvním, kdo použil svislou čáru k oddělení celočíselné části od desetinné, byl matematik *Al-Káší* (Šišma, 2001).

Poznatky arabských matematiků měly nezastupitelný vliv na rozvoj matematické vzdělanosti. Řada v současnosti běžně užívaných termínů (cifra, algebra, algoritmus) pochází právě z tohoto období.

Naproti tomu západní Evropa dalšímu rozvoji matematiky téměř nepřispěla. Křesťanská církev mající neomezenou moc považovala jakoukoliv vzdělanost, tedy i matematickou, za nežádoucí. Centry vzdělanosti se stávaly kláštery, ve kterých se mniši zaměřovali především na teologii. Matematice se věnovali pouze okrajově a jen z nutnosti, která vyplývala z potřeb tehdejší společnosti. Matematické dovednosti tak byly omezeny na aritmetiku, která sloužila především k výpočtům daní nebo dat Velikonoc. Mezi nejvýznamnější matematiky té doby patřil Brit *Alcuin*, který žil na dvoře Karla Velikého (Struik, 1963). Pro zajímavost uvádím jednu úlohu z jeho spisu *Úlohy k ostření rozumu*, která je běžně zadávána i dnešním žákům:

„Převozník měl převézt přes řeku vlka, kozu a hlávku zelí v loďce, která kromě převozníka unesla pouze jeden z těchto zmíněných předmětů. Jak si musel převozník počínat, aby je všechny přepravil, aniž by koza sežrala zelí nebo vlk kozu?“ (Struik, 1963)

První náznaky rozvoje matematiky se začínají objevovat od 10. století. Budují se nová města, zakládají univerzity. Prostřednictvím obchodních styků dochází k seznamování se s arabskými poznatky. Latinské překlady arabských textů, které byly pořízeny zejména ve španělském Toledu ve 12. století, vnesly do západních zemí hlubší matematické poznatky. Studována tak byla díla Al-Chorezmiho, Euklida nebo Ptolemaia (Balada, 1959). Tento proces seznamování trval až do 15. století. Stěžejním dílem tohoto období byla *Kniha o Abaku* (Liber Abaci, 1202) od *Leonarda Pisánského* zvaného též *Fibonacci* (1170-1250). Byl synem kupce a na svých cestách se naučil nejen počítat s abakem (početní tabulka s kuličkami), ale porozuměl i arabské matematice a pochopil výhodu arabských číslic. Právě prostřednictvím jeho díla pronikl do západní Evropy indicko-arabský způsob zápisu čísla a desítková poziční soustava spolu se základními aritmetickými operacemi. Dále se věnoval dělitelnosti, rozkladům čísel na součin prvočísel a v neposlední řadě také zlomkům a operacím s nimi. Zmiňuje také metody, pomocí kterých je možné přibližně určit druhé a třetí odmocniny nečtvercových čísel a vysvětluje, jak s nimi počítat. V jeho dílech je možné setkat se nulou jako s plnohodnotným číslem a také se zápornými čísly, která se objevila při řešení několika úloh. Aby mohly být takové úlohy vyřešeny, musel Fibonacci připustit existenci záporných čísel. Protože se však jednalo o úlohy s financemi, přirozeně bylo záporné číslo interpretováno jako dluh (Bečvář, 2001).

Jméno tohoto matematika je však nejčastěji zmiňováno v souvislosti s tzv. Fibonacciho čísly. Jedná se o rekurentně zadanou posloupnost, jejíž původ se nachází v úloze o králících.

,,Kdosi umístil pár králíků na určitém místě, ze všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se při tom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku.´´ (Bečvář, 2001, s. 277)

Fibonacci tuto úlohu vyřešil a v jednotlivých měsících roku zjistil přírůstky: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, … V této posloupnosti je součet prvního a druhého členu roven 1 a každý její další člen je součtem dvou předchozích členů. Můžeme ji vyjádřit vztahem:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Pro *n*-tý člen Fibonnaciho posloupnosti potom platí:

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$$

Ačkoliv se v tomto předpisu vyskytuje iracionální číslo $\sqrt{5}$, hodnotou výrazu pro $n \in N$ je vždy přirozené číslo. Neméně zajímavé je, že je zde dokonce zakódován „zlatý řez“. Je-li totiž F_n *n*-tým číslem posloupnosti, pak se s rostoucím *n* poměr dvou sousedních členů F_{n+1}/F_n stále více blíží číslu 1,618, což je právě přibližná hodnota zlatého řezu. Jedná se o ideální poměr mezi různými délkami, který vznikne rozdělením úsečky na dvě části takovým způsobem, že poměr větší části k menší je stejný jako poměr celé úsečky k části větší.

Hodnota zlatého řezu je opět iracionální číslo, přesněji vyjádřeno vztahem:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Čísla této posloupnosti mají však i další zajímavé vlastnosti (Bečvář, 2001).

Fibonacciho díla překonala svou dobu a plně pochopena byla až na přelomu středověku a novověku.

Matematické pokroky závisely především na růstu obchodních měst. V 15. a 16. století se tak centry vzdělanosti stala velká italská o středoevropská obchodní města a tamní matematici již velmi dobře ovládali výpočty s přirozenými, racionálními, ale i iracionálními čísly. V knize *Summa Arithmetica* (1494) shrnul *Luca Pacioli* (františkánský mnich působící na univerzitě v Bologni) dosavadní výsledky vývoje matematiky. Tamtéž působil i *Rafael Bombelli* (1530-1572), který ve své knize *L´Algebra* uvádí výpočty odmocnin pomocí řetězových zlomků, počítá se zápornými čísly, a dokonce s odmocninami se záporných čísel. Ty se objevily jako reálná řešení kubických rovnic. Bombelli tak zavedl důslednou teorii ryze imaginárních čísel a zapisoval $i = \sqrt{0-1}$. Byla tak objevena komplexní čísla a středověká matematika poprvé překonala antickou vzdělanost. Zajímavostí tedy je, že komplexní čísla byla zavedena pomocí kubických rovnic, nikoliv v teorii kvadratických rovnic, jak je tomu v současnosti (Struik, 1963).

Početní techniky byly nadále zdokonalovány. Holandský matematik *Ludolph van Ceulen* (1540-1610) spočítal číslo π na 35 desetinných míst užitím vepsaných a opsaných mnohoúhelníků. *Simon Stevin* (1548-1620) zavedl desetinné zlomky, aby sjednotil systém měr na desetinném základě. Umožnil tak všeobecné zavedení indicko-arabského způsobu zápisu čísel. Anglický matematik *John Wallis* (1616-1703) představil ve své knize *Pojednání o algebře* koncept číselné osy, kde se nalevo od nuly nachází záporná čísla a napravo kladná. Záporná čísla byla považována za absurdní ještě v 18. století.

2.3 Matematika proměnných veličin

Matematické objevy konce 16. a počátku 17. století připravily půdu k dalšímu výraznému rozvoji matematiky. Začalo se počítat s desetinnými zlomky a byly objeveny logaritmy. Francouzský matematik *François Viète* (1540-1603) zavedl do algebry užívání písmen ve významu čísel. Od počátku 17. století do konce 19. století pronikalo do matematiky dynamické pojetí – zkoumání proměn. Na rozdíl od předchozího období matematiky, které se zabývalo čísly, veličinami a geometrickými útvary, jsme se přesunuli, a to především díky systematickému používaní strojů a rozvoji přírodních věd, k proměnným veličinám a závislostem mezi nimi, tedy k funkcím. Do matematického myšlení tak pronikly dvě základní myšlenky, které určily jeho směr pro nadcházející staletí – pohyb a změna. Prostředkem, jak popsat pohyb jako dráhu bodu se stala analytická geometrie.

Za jejího tvůrce je považován francouzský matematik a filosof *René Descartes* (1596-1650), který se ve své knize *Geometrie* zabýval rovinou a poukazoval i na možnost její prostorové aplikace. Určil polohu bodu prostřednictvím čísel – souřadnic a vyjádřil tak geometrické vlastnosti aritmetickým způsobem. Analytická geometrie tak propojila dříve striktně oddělovanou aritmetiku a geometrii, definitivně odstranila problém zavedení záporných čísel a umožnila vyšetřovat křivky vyšších řádů. Právě křivek se týkaly dva zásadní problémy. Prvním bylo stanovení tečny ke křivce v daném bodě a druhým pak výpočet obsahu plochy omezené danou křivkou a výpočet objemu tělesa ohraničeného danou plochou. Řešení těchto úloh vedlo k objevu infinitesimálního (diferenciálního a integrálního) počtu, který nezávisle na sobě odhalili anglický fyzik *Isaac Newton* (1642-1757) a německý matematik *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716).

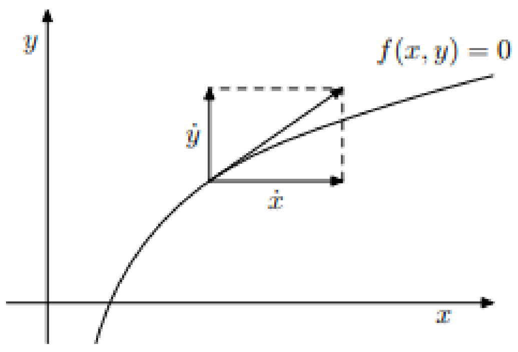
2.3.1 NEWTONOVO A LEIBNIZOVO POJETÍ

Newton vyšel z problému stanovení tečny ke křivce a vyřešil ji tím, že stanovil okamžitou rychlost bodu, který se pohybuje určitým způsobem. Proměnné souřadnice bodu *x, y* nazýval fluenty, které byly funkcí jedné nezávisle proměnné – času *t*. Rychlost, se kterou se fluenty mění nazval fluxe a značil je stejnými písmeny, pouze přidal tečku $\dot{x}$, $\dot{y}$. Byly to v podstatě derivace *x, y* podle *t* (Schwabik, Šarmanová, 1976).

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

Jejich poměrem dostaneme derivaci *y* podle *x*

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}.$$



Obrázek 12: Newtonova metoda fluxí (Schwabik, Šarmanová, 1976)

Newton si tedy stanovil dva základní úkoly:

1. Určit rychlost pohybu hmotného bodu v určitém čase vycházející ze znalosti dráhy pohybu tohoto bodu. Vyjádřeno jeho symbolikou bylo potřeba nalézt vztah mezi fluxemi *ẋ, ẏ,* pokud pro fluenty platí $f(x, y) = 0$. Jedná se v podstatě o výpočet derivace.
2. Určit dráhu hmotného bodu za určitý čas, známe-li jeho rychlost, tedy vyjádřit vztah mezi fluentami *x, y,* respektive nalézt funkci *f* odpovídající rovnici $f(x, y) = 0$ a vypočítat tak integrál (Schwabik, Šarmanová, 1976).

Definoval také nekonečně malou veličinu *o* a momenty fluxí (=infinitesimální veličiny) a značil je *ẋo, ẏo, żo*.

Struik (1963) uvádí řešení libovolné rovnice podle Newtona:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Za *x* dosadíme *x + ẋo* a *y + ẏo* za *y*, dostaneme:

$$x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}o\dot{x}o + x^3o^3 - ax^2 - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}o\dot{x}o + axy + ay\dot{x}o + a\dot{x}o\dot{y}o \\ + ax\dot{y}o - y^3 - 3y^2\dot{y}o - 3y\dot{y}o\dot{y}o - \dot{y}^3o^3 = 0$$

Protože je výraz $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, můžeme tyto veličiny odstranit a zbylý výraz vydělit veličinou *o.* Dostaneme:

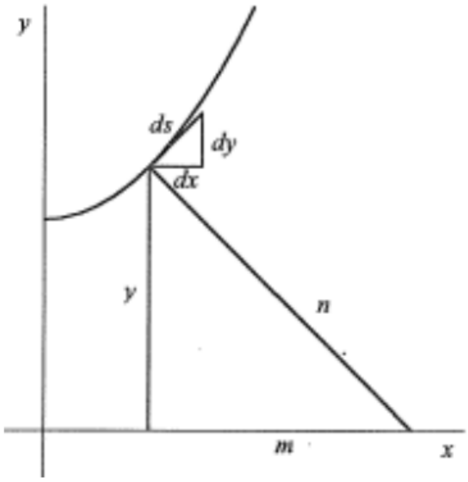
$$3x^2\dot{x} - 2a\dot{x}\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} + 3x\dot{x}\dot{x}o - a\dot{x}\dot{x}o + a\dot{x}\dot{y}o - 3y\dot{y}\dot{y}o + x^3oo - \dot{y}^3oo \\ = 0$$

Nekonečně malá veličina *o* vyjadřuje momenty veličin a její násobky v porovnání s ostatními neznamenají nic, je možné je odstranit:

$$3x^2\dot{x} - 2a\dot{x}\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$$

Je evidentní, že Newtonovo pojetí infinitesimálního počtu určuje fyzika a derivaci tedy vnímá jako okamžitou rychlost s níž se dané veličiny mění (Struik, 1963).

Leibniz určil tečnu ke křivce početně a jeho závěry o diferenciálním počtu vyšly v roce 1684 v matematickém časopise. Přístup Leibnize byl geometrický a vycházel z tzv. charakteristického trojúhelníka.



Obrázek 13: Charakteristický trojúhelník (Schwabik, Šarmanová, 1976)

Velmi malé přírůstky proměnných *x, y* pojmenoval diferenciály a zavedl pro ně označení *dx, dy*. Zmiňoval i pravidla diferenciace, například:

$$d(uv) = udv + vdu,$$

a derivaci podílu

$$d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

včetně podmínky $dy = 0$ pro existenci lokálního extrému a $d^2y = 0$ pro existenci inflexního bodu (Struik, 1963).

Při svých výpočtech tedy vycházel z podobnosti trojúhelníků:

$$\frac{m}{y} = \frac{dy}{dx}, tedy\, mdx = ydy$$

a také předpokládal, že trojúhelník *dx, dy, ds* je infinitesimální, tedy že přírůstky například *dx* jsou nekonečně malé. Tuto představu pak aplikoval na každou část křivky a hodnoty na obou stranách předpisu sečetl. Tyto nekonečně malé součty nazval integrály, pro které platí vztah:

$$\int mdx = \int ydy$$

Leibnizem zavedená symbolika pro diferenciál *d* a integrál ∫ se používá dodnes, stejně jako znaménko „=“ pro rovnost a tečka pro násobení (Struik, 1963). Zavedl také termíny proměnná, konstanta či parametr (Schwabik, Šarmanová, 1976).

Newton i Leibniz došli k infinitesimálnímu počtu nezávisle na sobě. Společnou měli ale jen ústřední myšlenku vzájemné inverze derivování a integrování. Newton se věnoval řešení praktických úloh a k matematické symbolice byl spíše lhostejný. Leibniz se naproti tomu snažil vytvářet obecné metody a postupy, vymýšlel symboly a značení a napomáhal tak věcnému pochopení. Přesto, že mezi sebou vedli tito dva matematici spory, vytvořili aparát moderní matematické analýzy.

Základním matematickým pojmem tohoto období byla tedy funkce, která byla nejprve chápana jako veličina proměnná, jejíž hodnoty byly určovány podle vzorce libovolně zvolenými hodnotami druhé proměnné veličiny. Až později bylo dosaženo obecnějšího pojetí založeného na vzájemném přiřazování prvků dvou množin a byly tak položeny základy teorie množin.

2.3.2 DRUHÁ KRIZE

Integrální a diferenciální počet jsou jedním z nejmocnějších nástrojů matematiky, které umožňují zkoumat fyzikální jevy. Matematická analýza 17. století však díky nim stála na nespolehlivém základě, protože byly brány v úvahu nepřesně definované nekonečně malé veličiny. V roce 1734 *Georgie Berkeley* ostře kritizoval infinitesimální veličiny, které jsou podle potřeb aktuálních operací buď nulové nebo nenulové. Především mu vadila Newtonova teorie fluxí spojená s veličinou *o* a její druhé a vyšší mocniny. K Berkeleymu se přidávali další a polemiku nad infinitesimálním počtem s pokusem jej vyložit bez logických sporů vedli celé 18. století. Jako prvnímu se to podařilo *Jeanu Baptistu Le Rond d´Alembertovi* (1717-1783) pomocí definice derivace jako limity poměru přírůstků konečných veličin.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Jeho definice přispěla k dnešní definici derivace pomocí limity a pomohla k vyřešení druhé krize matematiky. Nedostatkem však bylo pouze intuitivní chápání limity. V 18. století se tak objevila druhá algebraická koncepce matematické analýzy, jejíž podstata tkvěla v nalezení derivací funkcí algebraicky a nikoli pomocí nekonečně malých veličin a limit.

Matematické analýze se v 18. století věnoval řada matematiků *jako Jakob a Johann Bernoulli, Guillaume François de l´Hospital* či *Leonhard Euler*, kteří svými objevy přispěli, třebaže nepřímo, k upřesňování základů integrálního počtu (Schwabik, Šarmanová, 1976).

Druhá krize matematiky byla definitivně vyřešena až v roce 1838 *Karlem Weierstrassem*, který zavedl epsilon-delta definici limity.

2.4 Matematika zobecněných prostorových a kvantitativních vztahů

16. 17. a 18. století vytvořilo veškeré předpoklady k tomu, aby se matematika mohla plně rozvíjet. Běžným se stalo užívání indicko-arabského způsobu zápisu čísel, desítková poziční soustava, počítalo se s desetinnými čísly. Bylo tak možné provádět i složité výpočty, které usnadnil nejen objev logaritmů. Zavedení algebraické symboliky přispělo k rozvoji rovnic a v analytické geometrii došlo ke zobecnění pojmu funkce, což opodstatnilo skutečnost záporných čísel.

V 19. století matematika obsahovala už mnoho poznatků z různých jejích oborů, a tak bylo možné vyřešit většinu problémů známými metodami. To však vedlo k nutnosti větší abstrakce, aby bylo možné proniknout hlouběji do problematiky reálných dějů, vzdálit se od jednotlivostí pro pochopení jejich zákonitostí. Bylo nutné vytvořit nezávislé, logicky správně formulované teorie. Matematika se tak stala vědou o obecných kvantitativních vztazích (nejen o číslech a veličinách), obecných prostorových formách (nejen o geometrických útvarech o dvou či třech rozměrech) a vyznačovala se vysokým stupněm abstrakce a generalizace. Toto období, založené na axiomatické výstavbě matematiky, trvá od poloviny 19. století až do současnosti.

Význam pojmu funkce začal od 19. století nabírat na důležitosti a postupně se odpoutal od infinitesimálního počtu. Funkce se tak stali jednou z nejvýznamnějších oblastí matematiky, a to i díky českému matematikovi *Bernardu Bolzanovi* (1781-1848), který definoval limitu a spojitost funkce nebo derivaci funkce. Formuloval také nutnou a postačující podmínku pro konvergenci posloupnosti. Zabýval se též teorií reálných čísel a vyslovil větu o infimu, tedy že každá ohraničená množina reálných čísel má své infimum

(Balada, 1959). Infimum je zobecněním pojmu nejmenšího prvku – minima. Infimum má každá zdola omezená množina, třebaže nemusí mít minimum. V jeho spise *Paradoxien des Unendlichen (Paradox nekonečna, 1851)* poprvé definuje pojem nekonečné množiny a množství. Jeho myšlenky ovlivnili i Richarda Dedekinda, a především pak George Cantora, kteří jsou považování za tvůrce teorie množin. K vytvoření pojmu množiny je vedli úvahy o iracionálních číslech. Podobně jako v minulosti nastaly problémy se zápornými čísly, objevily se i v začátcích teorie množin značné rozpory. Někteří konzervativní matematici se dokonce domnívali, že teorie množin ani do matematiky nepatří, jiní zas, že byla objevena příliš brzy (Balada, 1959).

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor byl německý matematik, který v roce 1873 dokázal nespočetnost množiny všech reálných čísel, tedy že není možné očíslovat všechna reálná čísla přirozenými čísly. V roce 1882 vyslovil větu o srovnání mohutnosti dvou množin pomocí zobrazení jedné množiny do druhé. Dále dokázal věty o spočetnosti a nespočetnosti celých a racionálních čísel. Pomocí věty o potenční množině (následně nazvané Cantorova věta) a díky zavedení kardinálních čísel pomocí ekvivalence množin vybudoval Cantor teorii množin, ve které bylo možné porovnávat nekonečné množiny s ohledem na jejich mohutnost. Spočetnost a nespočetnost umožnila Cantorovi dokázat, že neexistuje jen „jedno nekonečno“, ale že jich je v podstatě nekonečně mnoho (Fuchs, 1999).

Nekonečno tedy není číslo, proto jsou úvahy o něm přinejmenším náročné. Níže uvádím několik příkladů týkajících se otázky nekonečna, ze kterých je patrné, jak složitých úvah bylo zapotřebí a proč vznikaly spory.

1) Kterých čísel je více? Přirozených nebo sudých přirozených? Zprvu se odpověď zdá jasná. Přirozených, protože ta zahrnují jak sudá, tak lichá čísla. To vyvrací následující důkaz založený na přiřazování.

$$1 \leftrightarrow 2$$

$$2 \leftrightarrow 4$$

$$3 \leftrightarrow 6$$

$$\vdots$$

$$n \leftrightarrow 2n$$

Ze zápisu je evidentní, že každému přirozenému číslu je možné přiřadit přirozené sudé číslo a je jich tedy stejně.

2) Je více přirozených či celých čísel? Odpověď je možné najít stejným způsobem jako u předešlé otázky.

$$1 \leftrightarrow 0$$

$$2 \leftrightarrow 1$$

$$3 \leftrightarrow -1$$

$$4 \leftrightarrow 2$$

$$5 \leftrightarrow -2$$

$$6 \leftrightarrow 3$$

$$7 \leftrightarrow -3$$

$$\vdots$$

$$n \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & pro\ sudé\ n \\ \dfrac{n-1}{2}, & pro\ liché\ n \end{cases}$$

Podobně je možné dokázat, že racionálních čísel je stejně jako přirozených. Problém nastane u množiny reálných čísel, kde není možné vypsat ani všechna čísla z intervalu $\langle 0; 1)$, natož úplně všechna. Nekonečna jsou tedy přinejmenším dvě, ve skutečnosti je jich však nekonečně mnoho a dodnes není zcela zřejmé, zda je mezi nekonečnem udávajícím počet přirozených čísel, kterých je „spočetně mnoho“ (značené symbolem $\aleph_0$, alef nula), a mezi nekonečnem udávajícím počet reálných čísel, kterých je „nespočetně mnoho“ (značené c – mohutnost kontinua) ještě nějaké další nekonečno.

Ačkoliv Cantorovy práce věnující se teorii množin vyvolaly značně podrážděné reakce, postupem času se ukázalo, jak jsou pro matematiku nenahraditelné. Koncem 19. století byla teorie množin všeobecně uznána a stala se základním pilířem pro výstavbu matematiky.

2.4.1 TŘETÍ KRIZE

Již během Cantorova života se začínají objevovat tzv. antinomie (sporná tvrzení) teorie množin, které vyvedly tehdejší matematiky z mylného přesvědčení, že nalezli přesný způsob, jak matematiku vystavět. Jednu z antinomií objevil dokonce sám Cantor. Za nejznámější je možné považovat antinomii objevenou *Bertrandem Russelem* (též Russelův paradox), která se týká množiny všech množin. Antinomií byla nakonec objevena celá řada a spornost teorie množin tak podkopala základy, na kterých byla matematika vystavěna. Bylo tedy nutné najít východisko z této situace. Tím se nakonec stala axiomatická výstavba matematiky, která je založena na systému tvrzení, tzv. axiomů, ze kterých je možné vyvodit jakákoliv tvrzení. Důraz je přitom kladen na *nezávislost* jednotlivých axiomů, jejich *úplnost* a *bezespornost* (Kopecký, 2004). Na počátku 20. století se řešením zdála být Zermelova-Freankelova teorie množin. V roce 1931 však představil Čech *Kurt Gödel* své věty o neúplnosti, ve kterých uvádí, že libovolná teorie obsahující přirozená čísla (což je téměř každá) je buď sporná (je možné dokázat jisté tvrzení i jeho opak), nebo neúplná (existuje tvrzení a jeho opak, které není možné dokázat). Tímto Gödel dokázal, že neexistuje bezesporný a zároveň úplný axiomatický systém, na kterém je možné matematiku vystavět. Tím nastala třetí krize matematiky, která trvá až do současnosti.

3 ČÍSELNÉ OBORY

Číselným oborem podle definice rozumíme množinu čísel určitého druhu, ve které jsou definovány bez omezení operace sčítání a násobení, značíme jej $\mathbb{C}_0$ (Bušek, Calda, 1992).

Věta 3.1. *Pro každý číselný obor $\mathbb{C}_0$ platí:*

$\forall a, b, c \in \mathbb{C}_0$: $(a+b)+c = a+(b+c)$,

$\forall a, b \in \mathbb{C}_0$: $a+b = b+a$,

(*) $\exists 0 \in \mathbb{C}_0\ \forall a \in \mathbb{C}_0$: $a+0 = a$,

$\exists 1 \in \mathbb{C}_0\ \forall a \in \mathbb{C}_0$: $a \cdot 1 = a$,

$\forall a, b \in \mathbb{C}_0$: $a \cdot b = b \cdot a$,

$\forall a, b, c \in \mathbb{C}_0$: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + b \cdot c$

** Platí v případě, že uvažujeme přirozená čísla s nulou. Pro případ bez nuly je tvrzení (3) platné až pro nadobory oboru N.*

(Pavlicová, 2010)

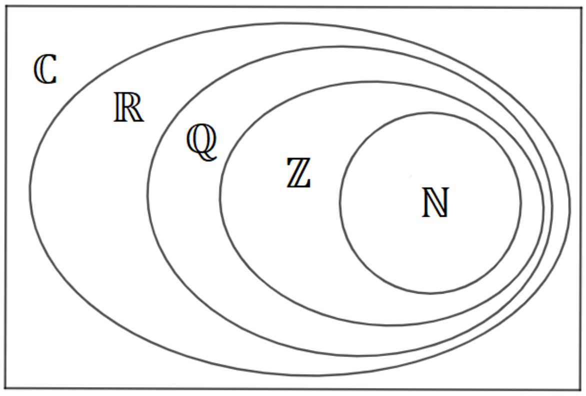
Základní číselné obory obvykle značíme takto:

1) obor přirozených čísel $\mathbb{N}$,
2) obor celých čísel $\mathbb{Z}$,
3) obor racionálních čísel $\mathbb{Q}$,
4) obor reálných čísel $\mathbb{R}$,
5) obor komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Definice 3.1. Nadoborem A oboru B budeme rozumět takový obor, který je definován na nadmnožině množiny, na níž je definován obor B. Obdobně budeme mluvit o podoboru.

Obor přirozených čísel $\mathbb{N}$ a další obory, které pak vznikaly jeho rozšiřováním jsou tedy postupně nadobory. Zjednodušeně zapsáno:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



Obrázek 14: Vztahy mezi číselnými obory

S ohledem na úvodní definice je tedy možné číselné obory chápat jako algebraické struktury. Jelikož nosičem algebraické struktury je množina, na níž lze bez omezení definovat alespoň jednu operaci (relaci), je vhodné uvést alespoň základy teorie množin.

3.1 Teorie množin

Definice 3.1.1. Množina je soubor libovolných navzájem rozlišitelných objektů, které mají stejnou vlastnost, vzhledem ke které jsou chápány jako jeden celek. Množinu pokládáme za určenou, je-li možno o každém objektu jednoznačně rozhodnout, zda do ní patří, či nikoliv. Každý z objektů, který patří do množiny, se nazývá prvek množiny.

Množiny značíme velkými písmeny latinské abecedy (*A, B, C*…) a jejich prvky malými písmeny (*a, b, c*…) a zapisujeme:

$a \in A$ ……. objekt *a* je prvkem (elementem) množiny *A*,

$a \notin A$ …… objekt *a* není prvkem (elementem) množiny *A*.

Množinu, která obsahuje alespoň jeden prvek, nazýváme neprázdná. Množina neobsahující žádný prvek se nazývá prázdná a značíme ji $\emptyset$, případně $\{\,\}$. S ohledem na počet prvků se množiny dělí na konečné obsahující konečný počet prvků (počet prvků je přirozené číslo nebo se jedná o prázdnou množinu) a nekonečné.

Množiny se zadávají:

a) výčtem prvků – vyjmenováním všech prvků dané množiny. Tento způsob je možné použít pouze pro zápis konečné množiny. Např. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$,

b) charakteristickou vlastností – vlastností, kterou mají jen prvky dané množiny. Zapisujeme $\{a; P\}$ a čteme: „Množina všech prvků a, které splňují podmínku P.“

Jednotlivé prvky množiny mohou opět tvořit množiny. Množina, jejíž prvky tvoří množiny, se nazývá systém množin. Vyloučen je případ, kdy by prvkem množiny byla sama množina. Skutečnost, že množina tedy nemůže obsahovat sebe samu je jedním ze základních předpokladů teorie množin a podle Bernarda Russela z toho vyplývá, že nemůže existovat množina všech množin. Pokud by totiž množina všech množin byla množinou, obsahovala by sama sebe, což je v rozporu se základním předpokladem. Tzv. Russelův paradox přiměl matematiky vyloučit z teorie množin *extrémně velké skupiny objektů* a nazvat je třídami.

Pozn. 4 Russelův paradox je též znám jako problém holiče: Holič ze Sevilly holí právě ty ze sevillských mužů, kteří se neholí sami. Kdo holí holiče? Pokud by se holič holil sám, pak by patřil mezi ty, kteří se holí sami, tedy by pak neholil sám sebe. Naopak pokud by se sám neholil, patřil by tedy mezi ty, kteří se sami neholí, a musel by se tedy holit sám. Zamyslíme-li se nad způsobem konstrukce tohoto paradoxu, zjistíme, že je analogický ke konstrukci Russelovy „množiny všech množiny“ (Wikipedia, 2021).

3.1.1 Základní množinové vztahy

Definujeme tyto základní množinové vztahy:

a) Inkluze množin *A* a *B*, značíme $A \subseteq B$ (množina *A* je podmnožinou množiny *B*). *A* je podmnožinou *B* právě tehdy, když každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in U: x \in A \Rightarrow x \in B)$$

b) Rovnost množin *A* a *B*, značíme *A* = *B* (množina *A* se rovná množině *B*). *A* a *B* jsou si rovny právě tehdy, když $A \subseteq B$ zároveň $B \subseteq A$, zjednodušeně řečeno, mají-li všechny prvky stejné.

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in U: x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

c) Ostrá inkluze množin *A* a *B*, značíme $A \subset B$ (množina *A* je vlastní podmnožinou *B*). *A* je vlastní podmnožinou *B* právě, když $A \subseteq B$ a zároveň $A \neq B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

3.1.2 ZÁKLADNÍ MNOŽINOVÉ OPERACE

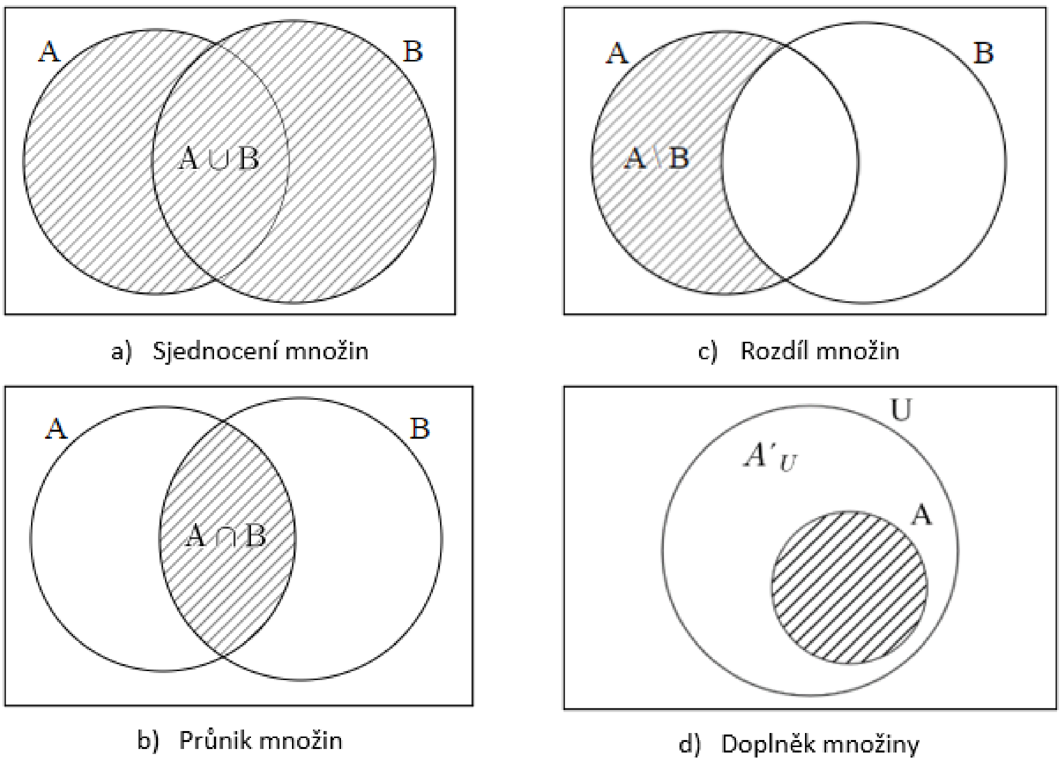
Základními množinovými operacemi jsou:

a) Sjednocení množin *A a B, značíme* $A \cup B$*. Sjednocení množin A* a *B* je množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin *A*, *B*.

b) Průnik množin *A* a *B*, značíme $A \cap B$. Průnik množin *A* a *B* je množina všech prvků, které patří do množiny *A* a zároveň do množiny *B*.

c) Rozdíl množin *A* a *B*, značíme $A \setminus B$. Rozdíl množin *A* a *B* je množina všech prvků, které patří do množiny *A*, a zároveň nepatří do množiny *B*.

d) Doplněk množiny A, značíme A'_U. Doplněk množiny *A* je množina všech prvků z množiny *U*, které nepatří do množiny *A*.



Obrázek 15: Množinové operace

3.1.3 Terminologie

Kartézský součin množin A, B je množina $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$ všech uspořádaných dvojic prvků $a \in A, b \in B$. Množinu všech uspořádaných *n*-tic prvků množiny A značíme $A^n = A \times \mathrm{A} \times \ldots \times \mathrm{A}$.

Zobrazení $f: A \to B$ je podmnožina kartézského součinu $f \subseteq A \times B$ taková, že pro každé $a \in A$ existuje právě jedno takové $b \in B$, které $(a,b) \in f$. Prvek b značíme $f(a)$. f je tedy množina všech dvojic $\left(a, f(a)\right), a \in A$.

Prosté zobrazení $f: A \to B$ přiřazuje různým $a_1, a_2 \in A$ různé hodnoty, tj. pokud platí $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(2)$.

Surjektivní zobrazení $f: A \to B$ (též „na“) je zobrazení, ve kterém pro každé $b \in B$ existuje $a \in A$ takové, že $f(a) = b$.

Bijektivní zobrazení $f: A \to B$ je takové zobrazení, které je prosté a surjektivní, tedy pro každé $b \in B$ existuje jedno takové $a \in A$, že $f(a) = b$.

Konečná množina je taková množina, jejíž prvky lze očíslovat $1, \ldots, n, n \in \mathbb{N}$ a množina *prázdná,* tedy takové množiny, které jsou stejně velké jako množina $\{1, \ldots, n\}$ a $\emptyset$.

Spočetná množina je taková množina, kterou lze očíslovat množinou všech přirozených čísel, tedy množina stejně velká jako $\mathbb{N}$.

3.2 Rozšiřování číselných oborů

Prvním číselným oborem, se kterým se lidstvo setkalo byla přirozená čísla, pro která dnes používáme symbol $\mathbb{N}$ (z anglického *naturals*). Přirozená čísla vyjadřují počet prvků konečných neprázdných množin a pořadí prvků v uspořádaných *n*-ticích. Symbolicky je možné tuto množinu zapsat takto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Obor přirozených čísel je uzavřen vzhledem k operacím sčítání a násobení, tzn. že výsledkem těchto operací je opět přirozené číslo. Uzavřenosti vzhledem k operaci odčítání lze docílit rozšířením tohoto oboru na obor celých čísel $\mathbb{Z}$, který obsahuje přirozená čísla, nulu a celá záporná čísla. Příkladem může být řešení jednoduché lineární rovnice

$$x + 5 = 0,$$

která má řešení právě až v oboru celých čísel. Množinu celých čísel zapíšeme pomocí množinové symboliky

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Problém však nastane u lineárních rovnic, kde je koeficient neznámé *x* různý od 1. Například

$$3x + 4 = 0.$$

Tato rovnice nemá v oboru celých čísel řešení. Abychom tedy docílili uzavřenosti oboru čísel i vzhledem k operaci dělení (číslem různým od nuly), je nutné rozšířit obor celých čísel na obor racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Racionální čísla vyjadřují podíl dvou celých čísel. Množinově zapsáno

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, \mathrm{q} \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}.$$

Obor $\mathbb{Q}$ je pak uzavřený vzhledem k operaci sčítání, odčítání, násobení i dělení. Racionální čísla však nejsou úplná. Jako příklad uvádím množinu racionálních čísel

$$\{3; 3{,}1; 3{,}14; 3{,}141; 3{,}1415; \dots\},$$

která tvoří posloupnost jež konverguje k iracionálnímu číslu π. Sjednocením racionálních a iracionálních čísel vytvoříme obor reálných čísel $\mathbb{R}$, který je uzavřený vzhledem k operacím sčítání, odčítání, násobení a dělení. Reálná čísla je možné definovat pomocí Dedekindových řezů, nekonečných desetinných rozvojů či posloupností. Přesto je možné nalézt rovnici, která nebude mít ani v množině reálných čísel řešení. Například polynomická rovnice

$$x^2 + 1 = 0,$$

jejíž řešení je rovno

$$x_{1,2} = \mp\sqrt{-1}\,.$$

Tento problém řeší komplexní čísla $\mathbb{C}$.

4 PŘIROZENÁ ČÍSLA

4.1 KONSTRUKCE PŘIROZENÝCH ČÍSEL

Přirozená čísla se zrodila z potřeby určit počet či zjistit množství, popřípadě následně porovnat, kdo má víc. Pokud naši předci chtěli například zjistit, jestli je v jejich kmeni více žen či mužů, stačilo vytvořit páry. Když zbyli muži, bylo jich více a opačně. Tento princip bijektivního zobrazení jedné množiny na druhou intuitivně znali lidé ještě dříve, než dokázali přesný počet určit, nebo jej dokonce zapsat. Přirozená čísla pak vznikla přiřazením symbolu k danému počtu.

„Přirozená čísla jsou do Boha, vše ostatní je dílem člověka."

Leopold Kronecker, 1886 (Kubínová, Novotná, 1997, s. 139)

Výrok Leopoolda Kroneckera potvrzuje, že přirozená čísla byla od nepaměti chápána jako něco samozřejmého a srozumitelného, co ani není potřeba definovat. Přesto se mnoho matematiků pokoušelo axiomaticky definovat teorii přirozených čísel. To se podařilo až Guiseppemu Peanovi na konci 19. století.

4.1.1 PEANOVY AXIOMY

G. Peano vytvořil axiomatizaci přirozených čísel, která vyhovuje dnešním požadavkům na přesnost. Jeho axiomy zavádějí přirozená čísla pomocí pojmu následovník. Peanových axiomů je celkem devět, prvních pět určuje množinu přirozených čísel a zbylé čtyři vymezují početní operace. V následujících formulacích budou malá písmena zastupovat přirozená čísla, pro operaci následovník bude použit symbol „´".

Formulace Peanových axiomů:

(1) Množina přirozených čísel je neprázdná.

$$(\exists a \in \mathbb{N})\ a = 1$$

(2) Pokud prvek náleží množině přirozených čísel, pak do této množiny patří i jeho následovník.

$$(\forall a \in \mathbb{N})(\exists b \in \mathbb{N})\ b = a'$$

(3) Číslo 1 není následovník žádného prvku.

$$(\forall a \in \mathbb{N})\ a' \neq 1$$

(4) Operace „následovník“ je bijektivní zobrazení.

$$(\forall a \in \mathbb{N})(\exists b \in \mathbb{N})\ b' = a' \Rightarrow a = b$$

(5) Jestliže máme libovolnou množinu $R \subset \mathbb{N}$ takovou, že $1 \in R$, a navíc pro každé $a \in R$ také $a' \in R$, potom platí $R = \mathbb{N}$. Množinu přirozených čísel tedy tvoří právě prvek 1 a jeho následovníci.

$$\{R \subset \mathbb{N} \wedge \left[1 \in R \wedge \left((\forall a \in R)(\exists b \in R) b = a'\right)\right]\} \Rightarrow R = \mathbb{N}$$

(6) $(\forall a \in \mathbb{N})\ a + 1 = a'$

(7) $(\forall a \in \mathbb{N})(\forall b \in \mathbb{N})\ a + b' = (a + b)'$

(8) $(\forall a \in \mathbb{N})\ a \cdot 1 = a$

(9) $(\forall a \in \mathbb{N})(\forall b \in \mathbb{N})\ \ a \cdot b' = a \cdot b + a$

(Botur, 2011, str. 30)

4.2 Operace na množině přirozených čísel

Na základě Peanových axiomů lze formulovat základní věty o sčítání a násobení na množině přirozených čísel.

Věta 4.2.1 *Věta o sčítání přirozených čísel.*

$\forall a, b, c \in \mathbb{N}$:

I. $a + b = b + a$ *(sčítání je komutativní)*

II. $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(sčítání je asociativní)*

III. $a + 0 = 0 + a = a$ *(nula je neutrální prvek)*

IV. $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ *(krácení vzhledem ke sčítání)*

Přirozená čísla tedy tvoří komutativní pologrupu s krácením vzhledem k operaci sčítání.

Věta 4.2.2 *Věta o násobení přirozených čísel.*

$\forall a, b, c \in \mathbb{N}$:

I. $a \cdot b = b \cdot a$ *(násobení je komutativní)*

II. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ *(jednička je neutrální prvek)*

III. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ *(nula je agresivní prvek)*

IV. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *(násobení je asociativní)*

V. $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$ *(pravidla pro krácení)*

Přirozená čísla tak tvoří komutativní polookruh s krácením mající jednotkový prvek, kterým je číslo 1.

Věta 4.2.3 *Věta o distributivnosti*

Pro každá tři libovolná přirozená čísla a, b, c platí, že:

I. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (věta o distributivnosti zleva)

II. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (věta o distributivnosti zprava).

Přirozená čísla tvoří komutativní pologrupu s jednotkovým prvkem.

4.3 Spočetnost a mohutnost množiny přirozených čísel

Spočetnost množin lze definovat právě pomocí přirozených čísel. Spočetnost bude uváděna i u nadoborů přirozených čísel.

Definice 4.3.1 Množinu M nazveme spočetnou, jestliže existuje bijektivní zobrazení f množiny M na množinu $\mathbb{N}$, tedy

$$f: M \to \mathbb{N}$$

Je-li množina spočetná, je možné ji chápat jako posloupnost $(a_n) = (a_1, a_2, \dots)$ s těmito vlastnostmi:

1) $(\forall n \in \mathbb{N}): a_n \in M$,
2) $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in M, n \neq m): a_n \neq a_m$,
3) $(\forall x \in M) \exists n \in \mathbb{N}: a_n = x$.

Věta 4.3.1 *Množina všech přirozených čísel je spočetná množina.*

Důkaz. Vyplývá přímo z definice. Hledáme zobrazení *f:* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které je bijektivní. To splňuje například $f(n) = n$.

Věta 4.3.2 *Množina všech přirozených čísel je nekonečná množina.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje největší prvek množiny přirozených čísel *m*:

$$\exists m \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}: m \geq n.$$

Peanovy axiomy však uvádí, že pro každý prvek množiny $\mathbb{N}$ existuje jeho následník, který je také prvkem $\mathbb{N}$. Tedy i pro *m* existuje jeho následovník. To je však ve sporu s předpokladem, že *m* je největším prvkem množiny $\mathbb{N}$. Množina přirozených čísel je tedy nekonečnou množinou.

Ačkoliv množinu přirozených čísel známe od nepaměti a mohla by se tak jevit jako prozkoumaná, mnozí matematici ji nadále studují. Například český matematik Petr Vopěnka (1935-2015) ve své knize *Nová infinitivní matematika* uvádí, že množina všech přirozených čísel vlastně neexistuje.

4.4 Uspořádání na množině přirozených čísel

Definice 4.4.1 Dobře uspořádaná množina

Řekněme, že uspořádaná množina $(M, \leq)$ je dobře uspořádanou množinou, jestliže každá její neprázdná podmnožina $R \subseteq M$ má nejmenší prvek, tj. existuje $1_R \in R$ takové, že $1_R \leq a$ pro každé $a \in R$.

Věta 4.4.1 *Množina přirozených čísel* $\mathbb{N}$ *spolu s přirozeným uspořádáním* $\leq, (\mathbb{N}, \leq)$ *je dobře uspořádaná.*

Základní vlastnosti dobře uspořádaných množin:

I. V každé podmnožině dobře uspořádané množiny existuje nejmenší prvek.

II. Každá lineárně uspořádaná konečná množina je dobře uspořádaná.

5 CELÁ ČÍSLA

Z druhé kapitoly vyplývá, že po přirozených číslech by měla s ohledem na historický vývoj následovat nezáporná racionální čísla. To by však znamenalo po zavedení racionálních a následně celých čísel dodatečně rozšířit tyto obory ještě o záporná racionální čísla.

Z tohoto důvodu budou v této práci postupně uváděny nadobory oboru $\mathbb{N}$ tak, jak znázorňuje obrázek 14.

Celá čísla $\mathbb{Z}$ (z německého Zahlen – čísla) jsou tedy množinou čísel, která obsahuje čísla kladná, záporná a nulu. Je možné o nich také hovořit jako o číslech umožňujících vyjádřit změnu, přírůstek či úbytek.

5.1 KONSTRUKCE CELÝCH ČÍSEL

Konstrukce množiny celých čísel vychází ze struktury přirozených čísel a bude provedena tak, jak je uvedeno v publikaci *Algebra a teoretická aritmetika* (Blažek, Calda, Koman, Kussová, 1984).

Strukturu celých čísel $\mathbb{Z}$ značíme $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$, neboť konstrukce struktury je opřena o vlastnosti sčítání, násobení a uspořádání. Struktura $(\mathbb{N}, +)$ je komutativní pologrupou, zatímco struktura celých čísel $(\mathbb{Z}, +)$ by měla být grupou. Ve struktuře $(\mathbb{N}, +)$ také platí, že pokud ke každým dvěma prvkům $a, b \in \mathbb{N}$ existuje $c \in \mathbb{N}$, je takové c právě jedno. Ve struktuře $\mathbb{N}$ lze tedy definovat operaci, která každé uspořádané dvojici (a, b) přiřadí právě jedno c (pokud takový prvek existuje). Tuto operaci nazýváme rozdíl „-“ a zapisujeme $c = a - b$. Ve struktuře $\mathbb{N}$ je odčítání pouze částečnou operací, ve struktuře $\mathbb{Z}$ by však měla být úplná. Tímto způsobem je možné „vylepšit“ vlastnosti struktury $(\mathbb{N}, +)$.

Strukturu $(\mathbb{Z}, +)$ je možné vytvořit metodou, jejíž základy se opírají o myšlenky *Leopolda Kroneckera* (1826-1891). V podstatě se jedná o doplnění množiny $\mathbb{N}$ o všechny takové rozdíly dvou přirozených čísel, které do této množiny nepatří. Tím je možné docílit rozšíření operace sčítání na celou takto vzniklou množinu.

Jednotlivé kroky konstrukce struktury $(\mathbb{Z}, +)$:

1. Sestrojení množiny $\mathbb{Z}$
    a. Definice vhodné relace na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, značené $\sim$.

   b. Ověření, že relace $\sim$ je ekvivalencí v $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

   c. Množina $\mathbb{Z}$ je rozkladem $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ podle ekvivalence $\sim$.

2. Vytvoření struktury $(\mathbb{Z}, +)$ a ověření požadovaných vlastností.

   a. Definice operace sčítání na $\mathbb{Z}$.

   b. Ověření, že $(\mathbb{Z}, +)$ je komutativní grupa.

   c. Nalezení souvislosti mezi $(\mathbb{N}, +)$ a $(\mathbb{Z}, +)$.

   d. Ztotožnění struktury $(\mathbb{N}, +)$ s izomorfní podstrukturou $(\mathbb{Z}_0, +)$ v $(\mathbb{Z}, +)$.

1.a) Definici vhodné relace $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ provedeme tak, že sestrojíme množinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ všech uspořádaných dvojic přirozených čísel a na ní definujeme relaci $\sim$ takto:

Věta 5.1.1

$$(\forall a, b, a', b' \in \mathbb{N})(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$$

Tento výrok také popisuje fakt, že dvojice (a, b) a (a', b') určují stejný rozdíl.

1.b) Relace $\sim$ na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je ekvivalencí právě tehdy, je-li reflexivní, symetrická a tranzitivní. Reflexivnost a symetričnost je zřejmá. Aby tato relace byla tranzitivní, musí platit:

$$(\forall (a, b), (a', b'), (a'', b'') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}):$$
$$\Big((a, b) \sim (a', b') \wedge (a', b') \sim (a'', b'') \Rightarrow \big((a, b) \sim (a'', b'')\big)\Big).$$

Podle věty 5.1.1 platí:

$$a + b' = a' + b \wedge a' + b'' = a'' + b'$$

Pokud přičteme k první rovnosti b'' a k druhé b získáme:

$$a + b' + b'' = a' + b + b'' \wedge a' + b'' + b = a'' + b' + b.$$

Díky komutativnosti sčítání v $\mathbb{N}$ platí:

$$a + b' + b'' = a'' + b' + b.$$

Užitím pravidla pro krácení získáme:

$$a + b'' = a'' + b,$$

neboli:

$$(a,b) \sim (a'',b'').$$

Relace $\sim$ je tranzitivní relací a je tedy ekvivalencí na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

1.c) Množina celých čísel $\mathbb{Z}$ je rozkladem množiny $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ podle ekvivalence $\sim$. Prvky množiny $\mathbb{Z}$ jsou podmnožiny rozkladu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nazývané třídy a značené $T(a,b)$. Platí:

Věta 5.1.2

$$\mathbb{Z} = \{T_{(a,b)}; (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}, T_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; (x,y) \sim (a,b)\}.$$

Třída $T(a,b)$ rozkladu $\mathbb{Z}$ se tedy skládá právě ze všech takových uspořádaných dvojic přirozených čísel, které určují stejný rozdíl jako dvojice (a,b). Dvojice (a,b) je reprezentantem třídy $T_{(a,b)}$.

Z věty 5.1.2 a vlastností relace pak vyplývá:

Věta 5.1.3

$$T_{(a,b)} = T_{(a',b')} \Leftrightarrow (a,b) \sim (a',b')$$

2.a) Na množině $\mathbb{Z}$ definujeme operaci sčítání takto:

Definice 5.1.1

$$\forall T_{(a,b)}, T_{(c,d)\in}\mathbb{Z}: T_{(a,b)} + T_{(c,d)} = T_{(a+c,b+d)}$$

Aby definice 5.1.1 skutečně definovala operaci v množině $\mathbb{Z}$, musí splňovat dvě podmínky:

I. $T_{(a+c,b+d)} \in \mathbb{Z}$

II. $\left(T_{(a,b)} = T_{(a',b')} \wedge T_{(c,d)} = T_{(c',d')}\right) \Rightarrow T_{(a+c,b+d)} = T_{(a'+c',b'+d')}$

I. platí. Každý prvek $T_{(a,b)}$, kde $(a,b) \in \mathbb{N}$, patří do množiny $\mathbb{Z}$, tedy tam patří i $T_{(a+c,b+d)}$.

II. Podle věty 5.1.3 platí

$$(a,b) \sim (a',b') \wedge (c,d) \sim (c',d')$$

užitím věty 5.1.1 získáme

$$a + b' = a' + b \wedge c + d' = c' + d.$$

Sečtením obou rovností dostaneme

$$(a+c) + (b'+d') = (b+d) + (a'+c').$$

Podle věty 5.1.1 platí

$$(a+c, b+d) \sim (a' + c', b' + d').$$

Z věty 5.1.3 pak vyplývá hledaná rovnost

$$T_{(a+c,b+d)} = T_{(a'+c',b'+d')}.$$

Operace sčítání je tedy skutečně operací v množině $\mathbb{Z}$ a tudíž struktura $(\mathbb{Z}, +)$ je algebraická struktura.

2.b) Otázkou je, zda struktura $(\mathbb{Z}, +)$ je komutativní grupa.

Věta 5.1.4 *Struktura* $(\mathbb{Z}, +)$ *je komutativní grupa.*

Důkaz. Jelikož je komutativní a asociativní struktura $(\mathbb{N}, +)$, má tytéž vlastnosti i struktura $(\mathbb{Z}, +)$. Jejím nulovým prvkem je patrně třída $T_{(0,0)}$. Je tedy potřeba ještě dokázat, zda struktura $(\mathbb{Z}, +)$ je strukturou s opačnými prvky.

Nechť tedy $T_{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ a prvek $T_{(\bar{a},\bar{b})} \in \mathbb{Z}$ je prvek k němu opačný. Potom musí platit

$$T_{(a,b)} + T_{(\bar{a},\bar{b})} = T_{(0,0)}.$$

Z věty 5.1.1, 5.1.3 a definice 5.1.1 vyplývá vztah

$$a + \bar{a} = b + \bar{b}$$

Je-li tato rovnost považována za soustavu rovnic, pak jejím řešením je dvojice přirozených čísel $\bar{a} = b, \bar{b} = a$. Opačným prvkem ke třídě $T_{(a,b)}$ je prvkem $T_{(b,a)}$ tedy

$$-T_{(a,b)} = T_{(b,a)}.$$

Užitím vlastností přirozených čísel byla vytvořena struktura $(\mathbb{Z}, +)$, která je komutativní grupou.

2.c) Množina $\mathbb{Z}$ měla tedy vzniknout doplněním množiny $\mathbb{N}$ o vhodné prvky, tedy mělo platit $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Je však zřejmé, že neexistuje přirozené číslo, které by bylo třídou uspořádaných dvojic prvků z $\mathbb{N}$, a tedy ani prvků $\mathbb{Z}$. Přirozená čísla tedy nejsou podmnožinou celých čísel. Je ale možné zkonstruovat podstrukturu $(\mathbb{Z}_0, +)$, která bude se strukturou $(\mathbb{N}, +)$ izomorfní.

Věta 5.1.5 *V* $(\mathbb{Z}, +)$ *existuje podstruktura* $(\mathbb{Z}_0, +)$ *izomorfní s* $(\mathbb{N}, +)$.

Důkaz. Existenci struktury $(\mathbb{Z}_0, +)$ je možné dokázat jejím zkonstruováním. $(\mathbb{Z}_0, +)$ je množinou všech tříd $T_{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, do kterých patří dvojice $(z, 0)$, tedy

$\mathbb{Z}_0 = \{T_{(z,0)}; z \in \mathbb{N}\}$, *+ je zúžením operace sčítání ze* $\mathbb{Z}$ *na* $\mathbb{Z}_0$.

Pokud má platit, že struktury $(\mathbb{N}, +)$ a $(\mathbb{Z}_0, +)$ jsou izomorfní, musí existovat jednoznačné bijektivní zobrazení φ množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\mathbb{Z}_0$, pro které platí:

Věta 5.1.6 $(\forall a, b \in \mathbb{N})\ \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b).$

Zobrazení φ je definováno vztahem

Věta 5.1.7 $(\forall a \in \mathbb{N})\ \varphi(a) = T_{(a,0)}.$

Důkaz. Sporem je možné dokázat, že se jedná o prosté zobrazení. Nechť je tedy dáno

$a, b \in \mathbb{N}, a \neq b$ a také $\varphi(a) = \varphi(b) = T_{(b,0)}$.

Potom podle věty 5.1.3 nutně platí $(a, 0) \sim (b, 0)$ a ze vztahu 5.1.1 potom plyne $a = b$. Toto tvrzení je však v rozporu s předpokladem $a \neq b$. $T_{(a,0)} \neq T_{(b,0)}$ a zobrazení φ je tedy prosté.

Platnost věty 5.1.6 ověříme následovně. Nechť $a, b \in \mathbb{N}$, potom podle věty 5.1.7, definice 5.1.1 a opět věty 5.1.1 platí

$$\varphi(a + b) = T_{(a+b,0)} = T_{(a+b,0+0)} = T_{(a,0)} + T_{(b,0)} = \varphi(a) + \varphi(b).$$

Je tedy zcela dokázáno, že $(\mathbb{Z}_0, +)$ je izomorfní s $(\mathbb{N}, +)$.

2.d) Posledním úkolem je ztotožnit izomorfní struktury $(\mathbb{Z}_0, +)$ a $(\mathbb{N}, +)$. Mějme libovolné přirozené číslo a a třídu $T_{(a,0)} \in \mathbb{Z}$, potom

Věta 5.1.8 $(\forall a \in \mathbb{N}) a = T_{(a,0)},$

a tedy platí že $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Struktura $(\mathbb{N}, +)$ byla tedy vhodně rozšířena. Z věty 5.1.8 však vyplývají důsledky nejen pro množinu $\mathbb{Z}_0$, ale také pro celou množinu $\mathbb{Z}$. Ty to důsledky vyšetříme pomocí následující věty.

Věta 5.1.9 $\left(\forall T_{(a,b)} \in \mathbb{Z}\right)(\exists!\, c \in \mathbb{N}) \mathbb{N} \vee T_{(a,b)} = T_{(0,c)}.$

Důkaz. Pokud je $T_{(a,b)}$ libovolnou třídou množiny $\mathbb{Z}$ a protože $a, b \in \mathbb{N}$, platí pro každá dvě přirozená čísla a, b právě jedna z následujících možností:

I. $a < b$: $\exists!\, c \in \mathbb{N} - \{0\}$: $a + c = b$, potom

$$T_{(a,b)} = T_{(a,a+c)} = T_{(a+0,a+c)} = T_{(a,a)} + T_{(0,c)} = T_{(0,0)} + T_{(0,c)} = T_{(0,c)}$$

II. $a = b$: $T_{(a,b)} = T_{(0,0)}$, věta platí i pro $c = 0$

III. $b < a \exists!\, c \in \mathbb{N} - \{0\}$: $a = b + c$, potom

$$T_{(a,b)} = T_{(b+c,b)} = T_{(b+c,b+0)} = T_{(b,b)} + T_{(c,0)} = T_{(0,0)} + T_{(c,0)} = T_{(c,0)}$$

Jednoznačnost určení tohoto prvku vyplývá z vlastnosti krácení přirozených čísel.

Výše dokázané věty umožňují rozšířit větu 5.1.8 na celou množinu celých čísel. Pokud je tedy $T_{(a,b)}$ libovolnou třídou množiny celých čísel, potom podle věty 5.1.2 existuje

I. $c \in \mathbb{N}$: $T_{(a,b)} = T_{(c,0)} \Rightarrow T_{(a,b)} \in \mathbb{Z}_0$, tuto třídu je pak možné podle věty 5.1.8 považovat za přirozené číslo tedy $T_{(a,b)} = c$

II. $c \in \mathbb{N}$: $T_{(a,b)} = T_{(0,c)} \Rightarrow T_{(a,b)} = -T_{(c,0)}$, což je možné zapsat jako $T_{(a,b)} = -c$

Je tudíž evidentní, že k označení prvků množiny celých čísel postačí značení zavedené pro přirozená čísla. Prvky $\mathbb{Z}_0$ značíme stejně jako příslušné $\mathbb{N}$ a před prvky $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}_0$ použijeme symbol „– “.

Množina $\mathbb{Z}$ je tedy nazývána množinou celých čísel a její prvky pak celá čísla. Podle věty 5.1.2 je možné třídy této struktury rozdělit do tří skupin:

1) třída $T_{(a,b)}$, pro kterou existuje takové c, že $T_{(a,b)} = T_{(c,0)} = c$ jsou kladná celá čísla, jejich množinu značíme $\mathbb{Z}^+$, tedy

$$\mathbb{Z}^+ = \{T_{(c,0)} \in \mathbb{Z}; c \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{c} \neq 0\},$$

2) třída $T_{(a,b)}$, pro kterou existuje takové c, že $T_{(a,b)} = T_{(0,c)} = -c$ jsou záporná celá čísla, jejich množinu značíme $\mathbb{Z}^-$, tedy

$$\mathbb{Z}^- = \{T_{(0,c)} \in \mathbb{Z}; c \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{c} \neq 0\}.$$

3) třída $T_{(a,b)}$, pro kterou platí $T_{(a,b)} = T_{(0,0)} = 0$ je jediné číslo, které není ani kladné, ani záporné.

Z výše zmíněných vět také plyne, že opačným prvkem záporného čísla je číslo kladné, a naopak a také že

$$(\forall a \in \mathbb{Z}) - (-a) = a,$$

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z}) - (a + b) = (-a) + (-b).$$

Z definice pro sčítání na množině celých čísel a z definic množin $\mathbb{Z}^+$a $\mathbb{Z}^-$ vyplývají tyto vlastnosti:

a) $(\forall a, b \in \mathbb{Z}^+) a + b \in \mathbb{Z}^+$,

b) $(\forall a, b \in \mathbb{Z}^-) a + b \in \mathbb{Z}^-$.

Dále je také nutné na množině $\mathbb{Z}$ definovat operaci násobení, prozatím značené symbolem „$\odot$“ a ta takovým způsobem, že struktura $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ bude podstrukturou $(\mathbb{Z}, +, \odot)$.

Definice 5.1.2 *Pro každé dvě libovolná čísla $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ je definováno*

I. $a \odot b = a \cdot b \; pro \; a, b \in \mathbb{N}$

II. $a \odot b = (-a) \cdot (-b) \; pro \; a, b \in \mathbb{Z}^-$

III. $a \odot b = -\big(a \cdot (-b)\big) \; pro \; a \in \mathbb{N} \; a \; b \in \mathbb{Z}^-$

IV. $a \odot b = -\big((-a) \cdot b\big) \; pro \; a \in \mathbb{Z}^- a \; b \in \mathbb{N}$

Jelikož je struktura $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ podstrukturou struktury $(\mathbb{Z}, +, \odot)$ a operace „$\cdot$“ je tedy ztotožnitelná s operací „$\odot$“ přenášejí se vlastnost komutativity, asociativity, distributivity násobení vzhledem ke sčítání i existence neutrálního prvku a pravidla krácení z množiny přirozených čísel na množinu celých čísel.

Pozn. Všechny věty a důkazy v této kapitole jsou převzaty z knihy *Algebra a teoretická aritmetika* (Blažek, Calda, Koman, Kussová, 1984, str. 213-219).

5.2 SPOČETNOST A MOHUTNOST MNOŽINY CELÝCH ČÍSEL

Věta 5.3.1 *Množina všech celých čísel je spočetná množina.*

Důkaz. Celá čísla lze zapsat jako posloupnost

$$0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4 \dots .$$

Množinu celých čísel je možné nazvat spočetnou, právě když existuje jednoznačné bijektivní zobrazení f této množiny na množinu přirozených čísel. Takové zobrazení existuje a lze jej definovat takto:

$$f(0) = 1,$$

$$f(1) = 2,$$

$$f(-1) = 3,$$

$$f(2) = 4,$$

$$f(-2) = 5,$$

$$f(3) = 6,$$

...

Množina celých čísel je také nekonečnou množinou, jelikož jsou celá čísla nadoborem přirozených čísel.

5.3 Uspořádání na množině celých čísel

Relaci uspořádání na množině celých čísel lze definovat takto:

Definice 5.2.1 $(\forall a, b \in \mathbb{Z})\ a < b \Leftrightarrow b + (-a) \in \mathbb{Z}^+$,

kde výraz $a < b$ čteme: „Celé číslo *a* je menší než celé číslo *b*."

Aby byla definice 5.2.1 korektní, musí být relace $<$ na množině celých čísel tranzitivní a trichotomická.

Důkaz.

1) Důkaz tranzitivity relace $<$ na $\mathbb{Z}$.

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{Z})[(a < b) \wedge (b < c)] \Rightarrow (a < c).$$

Již víme, že $b + (-a) = u, kde\ u \in \mathbb{Z}^+$ a také že $c + (-b) = v, , kde\ v \in \mathbb{Z}^+$. Pokud k oběma stranám rovnosti $b + (-a) = u$ přičteme $a \in \mathbb{Z}$, dostaneme $b = u + a$. Do druhé rovnosti pak za b dosadíme a získáme $c + (-u - a) = v$. Opět k oběma stranám přičteme stejný výraz, tentokrát u a dostaneme $c - a = v + u$, kde u i v patří do $\mathbb{Z}^+$. Označíme-li součet $v + u = w$, kde $w \in \mathbb{Z}^+$, lze relaci $<$ zapsat jako $a < c$.

2) Důkaz trichotomie relace $<$ na $\mathbb{Z}$.

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z})(a < b) \vee (a = b) \vee (a > b).$$

Nutně musí platit jedna ze tří možností, tedy

$$b + (-a) \in \mathbb{Z}^+,$$

$$a + (-b) \in \mathbb{Z}^+,$$

$$a + (-b) = 0.$$

Relace $<$ je trichotomická i tranzitivní, avšak množina $(\mathbb{Z}, <)$ není dobře uspořádaná, neboť neobsahuje nejmenší prvek.

5.4 CELÁ ČÍSLA JAKO ALGEBRAICKÁ STRUKTURA

Celá čísla spolu s operacemi sčítání, násobení a relací uspořádání, tedy struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ tvoří uspořádaný obor integrity. Aby mohlo být toto tvrzení pravdivé, musí splňovat následující podmínky:

1) Struktura $(\mathbb{Z}, +)$ je komutativní grupa.

Tvrzení dokázáno ve větě 5.1.4.

2) Operace násobení je asociativní, komutativní a obsahuje neutrální prvek, navíc je distributivní vzhledem ke sčítání.

Toto tvrzení dokazuje definice 5.1.2.

3) Ve struktuře $(\mathbb{Z}, +)$ neexistují dělitele nuly.

Dělitelem nuly je takové číslo, pro které platí

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}: a \neq 0, b \neq 0: a \cdot b = 0.$$

Ve struktuře $(\mathbb{Z}, +)$ potom nutně musí platit

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}: a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$$

4) Struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ je uspořádaná.

Důkaz proveden v definici 5.2.1.

Všechny výše zmíněné vlastnosti ve struktuře $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ platí a celá čísla tedy tvoří uspořádaný obor integrity.

6 RACIONÁLNÍ ČÍSLA

Celá čísla umožňují, jak bylo zmíněno výše, popsat počet prvků včetně záporného počtu. Racionální čísla rozšiřují obor celých čísel o možnost vyjádřit i část prvků z daného celku.

Racionální čísla jsou tedy taková čísla, která vyjadřují poměr (latinsky *ratio*) a lze je zapsat ve tvaru zlomku, tedy $\frac{a}{b}$, kde $a, b \in \mathbb{N}$. Označení oboru racionálních čísel $\mathbb{Q}$ pochází z německého „der Q*uotient*“, což znamená poměr nebo také podíl.

6.1 KONSTRUKCE RACIONÁLNÍCH ČÍSEL

Motivací pro konstrukci celých čísel je skutečnost, že struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ není dostačující pro řešení všech matematických situací. Není například možné vyřešit rovnici $a \cdot b = 1$, pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$, tedy není možné v této struktuře neomezeně dělit. Proto je nutné zkonstruovat takový obor, ve kterém budou zachovány všechny vlastnosti početních operací oboru celých čísel, a navíc v něm bude možné neomezeně dělit, pochopitelně vyjma dělení nulou, jelikož dělení nulou není definováno v žádném oboru. V neposlední řadě pak výsledný obor racionálních čísel musí obsahovat obor celých čísel.

Bude tedy nutné vnořit komutativní okruh do jeho podílového tělesa. Takové podílové těleso, ve kterém je možné dělit, lze nazvat také těleso zlomků. Tuto obecnou teorii lze následně aplikovat na konstrukci oboru racionálních čísel, tedy je možné vnořit obor integrity celých čísel do tělesa racionálních čísel. Tím je možné dokázat, že každé celé číslo lze považovat za racionální.

6.1.1 VNOŘENÍ KOMUTATIVNÍHO OKRUHU DO PODÍLOVÉHO TĚLESA

Definice 6.1.1.1 Nechť $R = (R, +, \cdot), S = (S, +, \cdot)$ jsou okruhy. Okruh R lze vnořit do okruhu S, pokud existuje injektivní homomorfismus f okruhu R do S.

Věta 6.1.1.1 *Pokud je* $(R, +, \cdot)$ *komutativním okruhem, potom jsou následující výroky ekvivalentní.*

I. Ve struktuře $(R, +, \cdot)$ platí omezený zákon o krácení, tedy

$$\forall a, b, c \in R, a \neq 0: a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b \cdot c.$$

II. Okruh R je možné vnořit do tělesa.

Důkaz. Důkaz věty 6.1.1.1 je založený na konstrukci tzv. podílového tělesa P okruhu R. Východiskem pro tuto je kartézský součin $R\ x\ R - \{0\}$ značený M a nazývaný množina všech zlomků okruhu R. Na množině M je dále definovaná binární relace $\sim$ takto:

$$\forall a, b \in R, c, d \in (R - \{0\}) : (a, b) \sim (c, d) \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Taková relace $\sim$ je relací ekvivalence na množině M a tedy existuje rozklad $M|_{\sim}$. Tuto množinu tříd rozkladu značme P a lze na ní definovat binární operace sčítání a násobení následovně. Pokud jsou $(a, b), (c, d)$ prvky dvou tříd systému P, pak platí

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd).$$

Algebraická struktura $(P, +, \cdot)$ je podílovým tělesem okruhu R. Nulou tohoto tělesa je potom třída $\{(0, r); r \in R\}$ a jedničkou třída $\{(r, r); r \in R\}$. Vnoření $v: R \to P$ lze definovat takto:

$$\forall r \in R: v(r) = \{(r.x, x); x \in R\}.$$

Vnoření $v: R \to P$ je vnořením okruhu R do jeho podílového tělesa P a každý prvek $r \in R$ lze ztotožnit s jeho obrazem $v: v(r) \in P$. Toto ztotožnění umožňuje považovat okruh R za podokruh jeho podílového tělesa P.

(Beránek, 2013)

6.1.2 VLASTNÍ KONSTRUKCE RACIONÁLNÍCH ČÍSEL

Konstrukce racionálních čísel bude provedena tak, jak popisuje kapitola 6.1.1.

Definice 6.1.2.1 Těleso racionálních čísel $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je podílovým tělesem okruhu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Výchozím kartézským součinem na množině M však bude $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$, kde první složku považujme za čitatele a druhou za jmenovatele. Relace $\sim$ je definována takto:

$$\forall a, c \in \mathbb{Z} \ \ \forall b, d \in (\mathbb{Z} - \{0\}) : (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot d.$$

Racionální čísla jsou tedy třídami rozkladu množiny M podle ekvivalence $\sim$ a třídy tohoto rozkladu jsou prvky množiny racionálních čísel, tedy

$$\mathbb{Q} = \{T_{(a,b)}; (a, b) \in M\}, T_{(a,b)} = \{(c, d) \in M; (a, b) \sim (c, d)\}.$$

Vnoření okruhu celých čísel do tělesa racionálních čísel, zapsáno $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, lze definovat jako

$$\forall z \in \mathbb{Z}\colon f(z) = \left\{\left(\frac{z.x}{x}, x\right); \mathbb{Z} - \{0\}\right\}.$$

(Beránek, 2013)

Pro uvedené vnoření se však prakticky výlučně užívá $x = 1$, proto je možné předchozí definici zjednodušit takto

$$\forall z \in \mathbb{Z}\colon f(z) = \{(z, 1); \mathbb{Z} - \{0\}\}.$$

Jelikož je uvedené vnoření izomorfní, lze prvky $(z, 1)$ značit z. Dále také platí, že prvky množiny racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je možné rozepsat jako součin

$$T_{(a,b)} = T_{(a,1)} \cdot T_{(1,b)} = T_{(a,1)} \cdot \left(T_{(b,1)}\right)^{-1} = a \cdot b^{-1}.$$

Prvek b^{-1} přepíšeme jako $\frac{1}{b}$ a třídu $T_{(a,b)}$ pak budeme zapisovat jako $\frac{a}{b}$.

(Kubínová, Novotná, 1997)

Operace sčítání a násobení, zapsáno pomocí zlomků, jsou podle odstavce 6.1.1 definovány takto

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Věta 6.1.2.1 *Operace sčítání na množině $\mathbb{Q}$ je komutativní, asociativní, má neutrální prvek, ke každému číslu existuje právě jedno číslo opačné a platí zákony o dělení. Struktura $(\mathbb{Q}, +)$ je pak komutativní grupa.*

Důkaz. Jelikož pro grupu $(\mathbb{Q}, +)$ analogicky platí stejné vlastnosti jako pro grupu $(\mathbb{Z}, +)$ je platnost tvrzení uvedených ve větě 6.1.2 zřejmá. Pro úplnost je vhodné uvést, že neutrálním prvkem je číslo 0, respektive třída $\frac{0}{b}$. Opačným číslem čísla $\frac{a}{b}$ je $-\frac{a}{b}$, jež reprezentuje třída $\frac{-a}{b}$ nebo $\frac{a}{-b}$.

(Beránek, 2013)

Věta 6.1.2.2 *Operace násobení na množině $\mathbb{Q}$ je komutativní, asociativní, má neutrální prvek a je distributivní vzhledem ke sčítání. Struktura $(\mathbb{Q},\cdot)$ je pak monoid.*

Neutrálním prvkem je třída $\frac{a}{a}$, tedy číslo 1.

Důkaz. Pro důkaz věty 6.1.3 je potřeba ověřit nejen uvedené vlastnosti, ale i existenci inverzních prvků a platnost zákonů o dělení na množině všech racionálních čísel. Je však evidentní, že existuje jeden prvek, který platnost všech uvedených zákonů znemožňuje a tím je číslo 0. Pokud však bude tento prvek z množiny $\mathbb{Q}$ odstraněn, pak lze vyslovit tyto věty.

Věta 6.1.2.3

I. Algebraická struktura $(\mathbb{Q} - \{0\},\cdot)$ je komutativní grupa.

II. Algebraická struktura $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ je komutativní těleso.

Důkaz. Důkaz této věty je opět zřejmý. Inverzní prvek racionálního čísla $\frac{a}{b}$ je číslo $\frac{b}{a}$, za podmínky $a, b \neq 0$, a nazývá se převrácené číslo, které je možné také zapsat ve tvaru $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$.

(Beránek, 2013)

Dle uvedené konstrukce lze tedy prvky množiny chápat jako podíly dvou celých čísel, kde číslo ve jmenovateli musí být nenulové.

6.2 Spočetnost a mohutnost množiny racionálních čísel

Věta 6.2.1 *Množina všech racionálních čísel je nekonečná množina.*

Důkaz. Jelikož je nekonečná množina $\mathbb{Z}$ podmnožinou množiny $\mathbb{Q}$, je i množina $\mathbb{Q}$ nekonečná.

Věta 6.2.2 *Množina všech racionálních čísel je spočetná množina.*

Důkaz. Definice 4.4.1 říká, že je-li možné množinu čísel zapsat jako posloupnost, tedy je-li možné prvky této množiny bijektivně přiřadit k přirozeným číslům, potom je tato množina spočetná. Aby nedošlo k vynechání nějakého racionálního čísla, je vhodné je uspořádat do matice následujícím způsobem.

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots \\
\frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\
\frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\
\frac{0}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Zlomky pak seřadíme do posloupnosti po diagonálách. Duplicitní zlomky vynecháme a jelikož platí $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, za každý kladný zlomek je nutné připsat i jeho zápornou variantu. Dostaneme posloupnost

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{4}{1} \cdots .$$

Množina racionálních čísel je tedy množinou spočetnou.

6.3 Uspořádání na množině racionálních čísel

Uspořádání množiny racionálních čísel se významně liší od uspořádání množiny celých či přirozených čísel. Rozdíl se intuitivně nabízí. V uspořádané množině celých čísel $\mathbb{Z}$ platí

$$\forall a \in \mathbb{Z}: a - 1 < a < a + 1,$$

současně však neexistuje žádné číslo b, pro které platí

$$(\forall a \in \mathbb{Z}) \exists b \in \mathbb{Z}: a - 1 < b < a.$$

Říkáme tedy, že číslo a kryje číslo $a - 1$ a číslo a je naopak pokrýváno číslem $a + 1$, neboli

$$a - 1 \prec a \prec a + 1.$$

Naproti tomu v množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$ platí

$$(\forall a, b \in \mathbb{Q}: a < b) \exists c \in \mathbb{Z}: a < c < b,$$

tedy že neexistují dvě racionální čísla, pro které platí

$$(\forall a, b \in \mathbb{Q}): a \prec b.$$

Takové uspořádání, kdy každý prvek množiny kryje nějaký jiný prvek a zároveň je jiným prvkem pokrýván, se nazývá *diskrétní*. Oproti tomu uspořádání, kde se prvky nekryjí, lze označit jako uspořádání *husté*. (Botur, 2011)

Další vlastnost, která je spjata s uspořádáním racionálních čísel je *archimedovskost* vycházející z Archimédových úvah o geometrii. Jeden z Archimédových axiomů tedy říká, že pokud existují dvě libovolné úsečky a a b, kde $a < b$, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a \cdot n > b$. Což znamená, že opakovaným skládáním úsečky libovolné délky lze překonat jakoukoli vzdálenost. Význam tohoto axiomu lze uplatnit i v uspořádaných tělesech.

Pokud je tedy dáno libovolné uspořádané těleso $(\mathbb{T}, T^+)$, pak do něj lze vnořit uspořádané těleso $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+)$. Z toho vyplývá že $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{T}$ a současně $\mathbb{Q}^+ \subseteq T^+$ (Botur, 2011, str. 46). Těleso $\mathbb{T}$ lze označit za archimedovské, pokud lze konečným skládání jeho libovolného intervalu překonat libovolnou hodnotu tohoto tělesa neboli

$$(\forall a \in \mathbb{T})\exists n \in \mathbb{N}: a < n.$$

(Botur, 2011)

Zbývá dokázat, že racionální čísla jsou příkladem archimedovsky uspořádaného tělesa a je tudíž možné vyslovit následující větu.

Věta 6.3.1 *Pokud je $\mathbb{T}$ archimedovsky uspořádané těleso, pak platí:*

$$(\forall a, b \in \mathbb{T}: a < b)\exists c \in \mathbb{Q}: a < c < b.$$

Důkaz. T^+ označuje kladnou část tělesa $\mathbb{T}$ a zároveň jsou dány dva prvky $\forall a, b \in \mathbb{T}$, pro které platí $a < b$. Pro důkaz tvrzení je třeba najít racionální číslo, které je menší než $b - a$. Protože je těleso $\mathbb{T}$ archimedovské, existuje $n \in \mathbb{N}$, pro které platí

$$\frac{1}{b-a} < n.$$

Protože platí $b - a, n \in T^+$, lze tvrdit

$$\frac{1}{n} < b - a.$$

Dále také z vlastností archimedovského uspořádání tělesa $\mathbb{T}$ vyplývá existence čísel $x, y \in \mathbb{N}$, že $n \cdot a < x$ a $-n \cdot a < y$. Z toho plyne vztah $-y < n \cdot a < x$, a protože $n \in T^+$ lze tvrdit že

$$\frac{-y}{n} < a < \frac{x}{n}, kde\ \frac{-y}{n}, \frac{x}{n} \in \mathbb{Q}.$$

Z důvodu konečnosti množiny $\left\{\frac{-y}{n}, \frac{-y+1}{n}, \dots, \frac{x}{n}\right\}$ nutně musí existovat $\frac{p}{n}$, pro které platí

$$\frac{p}{n} \leq a \ \wedge a < \frac{p+1}{n}.$$

Z toho vyplývá

$$\frac{p+1}{n} = \frac{p}{n} + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$$

a $\frac{p+1}{n} \in \mathbb{Q}$ je tudíž hledané racionální číslo.

(Botur, 2011)

6.4 RACIONÁLNÍ ČÍSLA JAKO ALGEBRAICKÁ STRUKTURA

Věta 6.4.1 *Struktura* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ *tvoří archimedovsky hustě uspořádané (komutativní) těleso.*

Důkaz. Věta 6.1.2.3 dokazuje, že algebraická struktura $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ je komutativní grupa a algebraická struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je komutativní těleso. Větou 6.3.1 je dále dokázáno, že struktura $(\mathbb{Q}, <)$ je archimedovsky hustě uspořádané těleso.

Struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ tedy skutečně tvoří archimedovsky hustě uspořádané (komutativní) těleso.

6.5 ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

Algoritmy podobající se řetězovým zlomkům byli používány již starořeckými matematiky, například Euklidův algoritmus nebo Archimedova aproximace čísla $\sqrt{3}$. První písemná zmínka o použití řetězového zlomku tak, jak jej známe dnes, se nachází v knize italského matematika Raffaela Bombelliho z roku 1572. Systematicky se řetězové zlomky začaly studovat díky knize Leonharda Eulera *De Fractionlous Continious* z roku 1737. Řetězové zlomky jsou dodnes předmětem zájmu mnoha matematiků především proto, že je lze užít při různých přibližných výpočtech.

6.5.1 ZÁKLADNÍ POJMY

Definice 6.5.1.1 Řetězový zlomek je složený zlomek ve tvaru

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \dots}}},$$

kde a_k, b_k pro $k = 1,2,\dots,n$ patří do oboru reálných čí komplexních čísel (tyto obory budou podrobněji charakterizovány v následujících kapitolách). Daný výraz je nazýván řetězovým zlomkem a čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou neúplné podíly nebo také prvky řetězového zlomku. (Vít, 1982)

Namísto složitého zápisu řetězových zlomků je v odborné literatuře častěji užíván způsob výčtu *n*-prvků v hranaté závorce $[a_1, a_2, \dots, a_n]$. Tyto prvky jsou indexovány množinou kladných celých čísel ℕ.

Řetězový zlomek je nazýván

I. konečný, pokud má konečný počet prvků.

II. Nekonečný, pokud má nekonečný počet prvků.

Pokud jsou všechny čitatele řetězového zlomku rovny 1 a všechny jmenovatele náleží oboru přirozených čísel a zároveň je počet prvků takového řetězového zlomku konečný, pak je nazýván *pravidelným konečným řetězovým zlomkem.*

Definice 6.5.1.2 Řetězový zlomek je pravidelný právě tehdy, když platí:

$$a_1 \in \mathbb{N}_0, u(1+j) \in \mathbb{N} \wedge b_j = 1, j = 1,2,\dots,n.$$

Tedy

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

(Vít, 1982)

6.5.2 HODNOTA ŘETĚZOVÉHO ZLOMKU

Příklad 6.5.2.1 Určete hodnotu řetězového zlomku.

$$5+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}$$

Řešení:

Dle definice 6.5.1.2 má tento řetězový zlomek čtyři neúplné podíly a_1, a_2, a_3, a_4 (5,2,3,2). Postupně tedy budeme odstraňovat složené zlomky součtem neúplného podílu a zlomku. Ekvivalentními úpravami tedy dostáváme

$$5+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}=5+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{7}{2}}}=5+\frac{1}{2+\frac{2}{7}}=5+\frac{1}{\frac{16}{7}}=5+\frac{7}{16}=\frac{87}{16}.$$

Hodnotu řetězového zlomku je tedy vhodné počítat tzv. „zepředu“, jak ukazují následující výpočty.

$$a_1+\frac{a_1}{1}=\frac{A_1}{B_1},$$

$$a_1+\frac{1}{a_2}=\frac{a_1a_2+1}{a_2}=\frac{A_2}{B_2},$$

$$a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}=\frac{a_1a_2a_3+a_1+a_3}{a_2a_3+1}=\frac{A_3}{B_3},$$

$$a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4}}}=\frac{a_1a_2a_3a_4+a_1a_2+a_1a_4+a_3a_4+1}{a_2a_3a_4+a_2+a_4}=\frac{A_4}{B_4},$$

obecně tedy platí

$$a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\ldots+\frac{1}{a_n}}}=\frac{A_n}{B_n}=\frac{a}{b}.$$

(Vít, 1982)

6.5.3 SBLÍŽENÉ ZLOMKY

Je evidentní, že všechny zlomky $\frac{A_k}{B_k}$, kde $1\leq k\leq n$ mají tvar

$$\frac{A\,[a_1, a_2, \dots, a_n]}{B\,[a_1, a_2, \dots, a_n]},$$

kde *A* a *B* jsou celistvé funkce přirozených argumentů neboli přirozená čísla, a $\frac{A_n}{B_n} = \frac{a}{b}$ je kladné racionální číslo.

Zlomky $\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3}{B_3}, \dots, \frac{A_n}{B_n}$ jsou sblížené zlomky řetězového zlomku $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_n}}}$.

Sblížený zlomek $\frac{A_k}{B_k}$ lze nazvat *k*-tý zlomek nebo také zlomek *k*-tého řádu. Sblížený zlomek $\frac{A_n}{B_n} = \frac{a}{b}$ je *n*-tým neboli posledním sblíženým zlomkem, přičemž se zpravidla jedná o zlomky v základním tvaru, tedy čitatel a jmenovatel tohoto zlomku jsou čísla nesoudělná. (Vít, 1982)

Pro výpočet sblíženého zlomku $\frac{A_k}{B_k}$ řetězového zlomku $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ platí následující rekurentní vzorce.

Věta 6.5.3.1 *Pro každého čitatele A_k a jmenovatele B_k sblíženého řetězového zlomku $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ platí tyto vztahy:*

$$A_1 = a_1, \quad B_1 = 1,$$

$$A_2 = a_1 a_2 + 1, \qquad B_2 = a_2,$$

$$A_k = a_k A_{k-1} + A_{k-2}, \quad k \geq 3,$$

$$B_k = a_k B_{k-1} + B_{k-2}, \quad k \geq 3,$$

pakliže je formálně položeno $A_0 = 1, B_0 = 0$.

Důkaz. Důkaz lze provést matematickou indukcí. Nejprve dokažme tvrzení pro $k = 3$:

$$A_3 = a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1 = a_3 A_2 + A_1, \;\; B_3 = a_3 a_2 + 1 = a_3 B_2 + B_1.$$

Pro $k = 3$ tedy vzorce platí. Dále předpokládejme, že věta platí pro $k > 3$ a dokažme tedy, že platí i pro $k + 1$. Potom tedy platí

$$\frac{A_k}{B_k} = \frac{a_k A_{k-1} + A_{k-2}}{a_k B_{k-1} + B_{k-2}}.$$

Sblížený zlomek A_{k+1}/B_{k+1} vznikne ze sblíženého zlomku A_k/B_k, pokud bude prvek a_k nahrazen prvkem $a_k + 1/a_{k+1}$. Tedy

$$\frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} = \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right)A_{k-1} + A_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right)B_{k-1} + B_{k-2}} = \frac{a_{k+1}(a_k A_{k-1} + A_{k-2}) + A_{k-1}}{a_{k+1}(a_k B_{k-1} + B_{k-2}) + B_{k-1}} = \frac{a_{k+1}A_k + A_{k-1}}{a_{k+1}B_k + B_{k-1}}.$$

Předpoklad tedy platí a věta je tím dokázaná. (Vít, 1982)

6.5.4 Zápis kladných racionálních čísel ve tvaru řetězového zlomku

Pro zápis racionálního čísla ve tvaru řetězového zlomku, tedy $\frac{a}{b} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ pro $a, b \in \mathbb{N}$, je nutná znalost tří základních pojmů *celá část čísla, lomená část čísla* a *neúplný podíl.* Pojem neúplného podílu je vymezen v definici 6.5.1.1, zbylé pojmy jsou definovány následovně.

Definice 6.5.4.1 Ke každému reálnému číslu α existuje právě jedno číslo $k \in \mathbb{Z}$, pro které platí

$$k \leq \alpha < k + 1.$$

Takové celé číslo k je obvykle označováno $[\alpha]$ a nazývá se celá část čísla α.

Definice 6.5.4.2 Lomená část β reálného čísla α je číslo, po jehož přičtení k celé části $[\alpha]$ dostaneme reálné číslo α, neboli

$$\alpha = [\alpha] + \beta, \text{kde } 0 \leq \beta < 1.$$

Číslo β je lomená část čísla α a obvykle se značí $\{\alpha\}$. Tedy platí

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}.$$

Zápis racionálního čísla ve tvaru řetězového zlomku bude proveden podle Víta (1982).

Mějme dáno kladné racionální číslo $x, x \notin \mathbb{N}$ a položme $a_1 = [x], x_1 = \frac{1}{\{x\}}$, potom platí

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1}, \text{kde } x_1 > 1, x_1 \in \mathbb{Q}.$$

Z toho vyplývá

$$x_1 = \frac{1}{x - a_1}.$$

Zopakujeme celý postup pro x_1 a definujeme tak číslo

$$a_2 = [x_1] = \left[\frac{1}{x - a_1}\right]$$

a také číslo

$$x_2 = \frac{1}{\{x_1\}}.$$

Potom platí

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}, \text{kde } x_2 > 1, x_2 \in \mathbb{Q}.$$

Z poslední vztahu vyplývá

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_2}.$$

Obdobně lze definovat čísla $a_3, x_3, a_4, x_4, \dots$. Tento postup skončí, jakmile bude nějaké x_{n-1} celé číslo. Potom bude $a_n = [x_{n-1}]$ posledním prvkem řetězového zlomku racionálního čísla x.

Aplikaci Vítova postupu demonstruje následující příklad.

Příklad 6.5.4.1 Vyjádřete racionální číslo $87/16$ ve tvaru řetězového zlomku.

Řešení:

$$a_1 = [x] = \left[\frac{87}{16}\right] = 5,$$

$$\frac{87}{16} = 5 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = \frac{1}{\frac{87}{16} - 5} = \frac{16}{7},$$

$$a_2 = \left[\frac{16}{7}\right] = 2,$$

$$\frac{16}{7} = 2 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = \frac{1}{\frac{16}{7} - 2} = \frac{7}{2},$$

$$a_3 = \left[\frac{7}{2}\right] = 3,$$

$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{x_3}, \quad x_3 = \frac{1}{\frac{7}{2} - 3} = 2,$$

$$a_4 = [2] = 2.$$

Výpočet je hotový a dostáváme tak

$$\frac{87}{16} = [5,2,3,2] = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}.$$

Racionální číslo $87/16$ jsme získali úpravou řetězového zlomku v příkladu 6.5.2.1. Výsledný řetězový zlomek příkladu 6.5.4.1 se tedy shoduje se zadáním příkladu 6.5.2.1, čímž byla ověřena správnost postupu.

7 REÁLNÁ ČÍSLA

Doposud byla důvodem rozšiřování číselných oborů garance korektního fungování některé početní operace. Těleso racionálních čísel $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je komutativní těleso. Ze strukturálního hlediska je tedy kompletní, a tudíž jej nelze dále rozšiřovat. Dokonce se na první pohled zdá, že k tomu ani není důvod. Motivací rozšíření oboru racionálních čísel by tak mohla být nemožnost zápisu některých důležitých hodnot ve tvaru zlomku, například $\sqrt{2}$, konstanty π nebo Eulerova čísla e. Bylo-li by tomu tak, pak by stačilo obohatit těleso racionálních čísel o různé odmocniny a vytvořit opět těleso, ve kterém by byla všechna čísla algebraická, tedy kořenem nějakého polynomu s racionálními koeficienty. Již v roce 1882 dokázal *Ferdinand von Lindemann*, že Ludolphovo číslo π je transcendentní (není algebraické) a tudíž by v nově vzniklém tělese opět chybělo.

Skutečnou příčinou pro rozvoj racionálních čísel je však nakonec matematická analýza, která pro své teorie vyžaduje platnost různých vět. Nezbytností je také spojitost číselné osy. Pokud by totiž číselná osa obsahovala nějaké mezery, vyvstaly by mnohé problémy třeba s limitami, protože posloupnost prvků by mohla konvergovat směrem do mezery.

Těleso racionálních čísel právě takové mezery v číselné ose obsahuje. Čísla, která takové mezery vyplní se nazývají iracionální a spolu s racionálními čísly vytvoří nový obor reálných čísel $\mathbb{R}$.

Následující věta dokazuje existenci mezer v číselné ose pro obor racionálních čísel.

Věta 7.1 *V tělese $\mathbb{Q}$ neexistuje číslo $x \in \mathbb{Q}$ pro které platí $x^2 = 2$.*

(Botur, 2011)

Důkaz. Sporem lze předpokládat, že existuje racionální číslo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, takové že

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2.$$

Dále předpokládejme, že se jedná o zlomek v základním tvaru a proto platí

$$a^2 = 2 \cdot b^2.$$

Ze vztahu vyplývá, že a^2 je sudé a tedy i a je sudé, což lže zapsat

$$a = 2n, n \in \mathbb{N}.$$

Po dosazení do předchozí rovnosti získáváme

$$4 \cdot n^2 = 2 \cdot b^2,$$

neboli

$$2 \cdot n^2 = b^2.$$

Analogicky je patrné, že i b musí být sudé, což je však ve sporu s předpokladem, že je racionální číslo $\frac{a}{b}$ v základním tvaru.

(Botur, 2011)

7.1 KONSTRUKCE REÁLNÝCH ČÍSEL

Konstrukce oboru reálných čísel lze provést více způsoby. Nejčastěji se uvádí konstrukce podle *Richarda Dedekinda* založená na řezech na množině racionálních čísel a *George Cantora* (1845-1918), která pracuje s limitou posloupnosti.

V této práci bude s ohledem na návaznost následujících kapitol provedena pouze Cantorova konstrukce.

7.1.1 AXIOMATICKÁ VÝSTAVBA OBORU REÁLNÝCH ČÍSEL

Definice 7.1.1.1 Množina $\mathbb{R}$ je nazývána množinou reálných čísel, pokud platí tyto axiomy:

I. Na množině $\mathbb{R}$ je definována operace sčítání $+, +: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Operace přiřazuje každé dvojici $x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prvek $x + y = \mathbb{R}$. Sčítání má tyto vlastnosti:

   a. $\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}: 0 + a = a + 0 = a,$

   (nula je neutrální prvek operace sčítání)

   b. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists (-a) \in \mathbb{R}: a + (-a) = (-a) + a = 0,$

   (existence opačných prvků)

   c. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a + (b + c) = (a + b) + c,$

   (asociativita)

   d. $\forall a, b \in \mathbb{R}: a + b = b + a.$

(komutativita)

II. Na množině $\mathbb{R}$ je definována operace násobení $\cdot$, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Operace přiřazuje každé dvojici $x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prvek $x \cdot y = \mathbb{R}$. Násobení má tyto vlastnosti:

a. $\exists 1 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}: 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$,

(jednička je neutrální prvek vzhledem k násobení)

b. $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \exists a^{-1}: a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$,

(existence inverzních prvků)

c. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,

(asociativita)

d. $\forall a, b \in \mathbb{R}: a \cdot b = b \cdot a$.

(komutativita)

III. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

(násobení je distributivní vzhledem ke sčítání)

IV. Na množině $\mathbb{R}$ je definována relace uspořádání $<$, která splňuje tyto podmínky:

a. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$,

(tranzitivita)

b. $\forall a, b \in \mathbb{R}: a < b \oplus a = b \oplus a > b$.

(trichotomie)

V. Axiom vazby operací a uspořádání: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

a. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$,

b. $(0 < a \wedge 0 < b) \Rightarrow 0 < a \cdot b$.

(Kubínová, Novotná, 1997, str. 154-155)

VI. Axiom úplnosti:

Množina $A \subset \mathbb{R}$ je shora omezená, pokud existuje $K \subset \mathbb{R}$ nazvané horní závora takové, že:

$$\forall x \in A: x \leq K.$$

Množina horních závor množiny A značíme A^*.

Dále platí, že číslo $a \in A \subset \mathbb{R}$ je minimem množiny A, jestliže:

$$\forall x \in A: a \leq x.$$

Množina horních závor A* má minimum pro každou neprázdnou shora omezenou množinu A.

7.1.2 CANTOROVA KONSTRUKCE OBORU REÁLNÝCH ČÍSEL

Jak již bylo zmíněno, konstrukce množiny reálných čísel podle Cantora je založena na pojmu limita posloupnosti. Nejprve je však nutné zavést tzv. fundamentální neboli *Cauchyovskou posloupnost* (po francouzském matematiku Augustinu-Louisi Cauchym 1789-1857). Jedná se o takovou posloupnost, jejíž jednotlivé prvky se k sobě přibližují a tato vzdálenost se zkracuje limitně k nule. Taková posloupnost by pak měla konvergovat k určitému bodu – limitě této funkce.

Jako příklad lze uvést následující posloupnost tělesa racionálních čísel

$$1; 1{,}4; 1{,}41; {,}414; 1{,}4142 \ldots$$

vytvořenou tak, že každý její další člen vznikne přidáním číslice dekadického rozvoje čísla $\sqrt{2}\,(= 1{,}4142135623730\ldots)$. Jednotlivé prvky jsou racionální čísla, ale limitou této posloupnosti je iracionální $\sqrt{2}$.

Pro konstrukci $\mathbb{R}$ je tedy potřeba vzít všechny tyto posloupnosti a roztřídit je podle limit. Každá taková třída je pak reálným číslem. (Botur, 2011)

Definice 7.1.2.1 Posloupnost $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n \in \mathbb{Q}$ je fundamentální posloupnost, pokud platí:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_0)(|a_m - a_n| < \varepsilon).$$

(Kubínová, Novotná, 1997, str. 155)

Definice 7.1.2.2 Nechť $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti racionálních čísel, pak definujeme:

I. $a + b = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

II. $a - b = \{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

III. $a \cdot b = \{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$,

IV. $\frac{a}{b} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}, pro\ b_n \neq 0.$

(Kubínová, Novotná, 1997, str. 155)

Dále definujeme množinu všech fundamentálních posloupností F.

Definice 7.1.2.3

$$F = \{a, a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\ je\ fundamentální\ posloupnost\ racionálních\ čísel\}.$$

Zavedeme relaci $\sim$ na F takto:

$$a \sim b \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0.$$

Dokážeme, že relace $\sim$ je ekvivalence na F:

I. Relace $\sim$ je reflexivní, pokud platí: $\forall a \in F: a \sim a$. Relaci přepíšeme podle definice 7.1.2.3.

$$a \sim a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - a_n) = 0.$$

Tvrzení platí a tato relace je reflexivní.

II. Relace $\sim$ je symetrická, pokud platí: $\forall a, b \in F: a \sim b \Rightarrow b \sim a$. Každou relaci přepíšeme podle definice 7.1.2.3.

$$L: a \sim b \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = 0,$$

$$P: b \sim a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) - \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0.$$

Dostáváme tak $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n)$ a relace je proto symetrická.

III. Relace $\sim$ je tranzitivní, pokud platí: $\forall a, b, c \in F: (a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c$. Předpoklad přepíšeme podle opět podle definice 7.1.2.3.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0 \wedge \lim_{n\to\infty}(b_n - c_n) = 0.$$

Pokud platí předpoklad, potom $\lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = 0$. Tedy:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) -$$

$$- \lim_{n\to\infty}(c_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n - c_n) = 0.$$

Limita $\lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = 0$ a tedy $a \sim c$. Relace $\sim$ je tranzitivní.

Jelikož je relace $\sim$ reflexivní, symetrická i tranzitivní, je relací ekvivalence na F.

Relace ekvivalence $\sim$ na množině $\mathbb{Q}$ rozdělí tuto množinu do navzájem disjunktních tříd. Sjednocení všech disjunktních tříd znovu vytvoří původní množinu.

Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ tedy definujeme jako rozklad množiny F na třídy rozkladu T podle ekvivalence $\sim$. Třídy takového rozkladu nazveme prvky množiny $\mathbb{R}$ a tedy platí:

$$\mathbb{R} = \{T_a; a \in F\}, T_a = \{x \in F; x \sim a\}.$$

Na množině $\mathbb{R}$ jsou definovány početní operace sčítání, odčítání, násobení a dělení takto:

Definice 7.1.2.4 Operace sčítání na množině $\mathbb{R}$.

$$\forall T_a, T_b \in \mathbb{R}: T_a + T_b = T_{a+b}.$$

Definice 7.1.2.5 Operace odčítání na množině $\mathbb{R}$.

$$\forall T_a, T_b \in \mathbb{R}: T_a - T_b = T_{a-b}.$$

Věta 7.1.2.1 $\forall T_a, T_b, T_c \in \mathbb{R}$ *platí:*

1) $(T_a + T_b) + T_c = T_a + (T_b + T_c)$, *(asociativita)*

2) $T_a + T_b = T_b + T_{a,}$ *(komutativita)*

3) $T_a + T_{(0,0,\dots)} = T_a$, *($T_{(0,0,\dots)}$ je neutrální prvek)*

4) $T_a + (T_b - T_a) = T_b$. *(existence inverzních prvků)*

Definice 7.1.2.6 Operace násobení na množině $\mathbb{R}$.

$$\forall T_a, T_b \in \mathbb{R}: T_a \cdot T_b = T_{a \cdot b}.$$

Definice 7.1.2.7 Operace dělení na množině $\mathbb{R}$.

$$\forall T_a, T_b \in \mathbb{R}: \frac{T_a}{T_b} = T_{\frac{a}{b}}; T_b \neq T_{\{0,0,\dots\}}.$$

Věta 7.1.2.2 $\forall T_a, T_b, T_c \in \mathbb{R}$ *platí:*

1) $(T_a \cdot T_b) \cdot T_c = T_a \cdot (T_b \cdot T_c)$, *(asociativita)*
2) $T_a \cdot T_b = T_b \cdot T_{a,}$ *(komutativita)*
3) $T_a \cdot T_{(1,1,\dots)} = T_a$, *($T_{(1,1,\dots)}$ je neutrální prvek)*
4) $T_b \cdot \frac{T_a}{T_b} = T_a; T_b \neq T_{\{0,0,\dots\}}$, *(existence inverzních prvků)*
5) $(T_a + T_b) \cdot T_c = T_a \cdot T_c + T_b \cdot T_c$. *(distributivita $\cdot$ vzhledem k $+$)*

(Kubínová, Novotná, 1997)

7.2 Spočetnost a mohutnost množiny reálných čísel

Věta 7.2.1 *Množina všech reálných čísel je nekonečná množina.*

Důkaz. Jelikož je nekonečná množina $\mathbb{Q}$ podmnožinou množiny $\mathbb{R}$, je i množina $\mathbb{R}$ nekonečná.

Věta 7.2.2 *Množina všech reálných čísel je nespočetná množina.*

K důkazu této věty použijeme metodu zformulovanou *Georgem Cantorem* v roce 1873. Cantorovo překvapivé tvrzení, že reálných čísel je více než přirozených, znamenalo doslova přelom v matematickém myšlení. Neméně důležitá však byla i použitá metoda.

Důkaz. Předpokládejme tedy, že $a_1, a_2, \dots$ je posloupnost obsahující všechna reálná čísla z intervalu $(0,1)$. Dále zapišme každé reálné číslo $r \in (0,1)$ v desítkovém rozvoji, tedy ve tvaru $r = 0, r_1 r_2 \dots$. Dostáváme posloupnost $\{a_n\}$:

$$a_1 = 0, \boxed{a_{11}} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} \dots$$

$$a_2 = 0, a_{21} \boxed{a_{22}} a_{23} a_{24} a_{25} \dots$$

$$a_3 = 0, a_{31}a_{32}\boxed{a_{33}}a_{34}a_{35} \ldots$$

$$a_4 = 0, a_{41}a_{42}a_{43}\boxed{a_{44}}a_{45} \ldots$$

$$\ldots$$

Poté sestrojíme takové reálné číslo $b \in (0,1)$, ve tvaru $0, b_1 b_2 \ldots$, pro které platí, že prvek $b_1 \neq a_{11}$, prvek $b_2 \neq a_{22}$, prvek $b_3 \neq a_{33}$, … Takový prvek se však v naší posloupnosti nenachází a dostáváme tak spor danou posloupností. Pokud tedy obecně položíme pro každé k přirozené číslo $b_k = 1$, pak pokud $a_{kk} \neq 1$, a $b_k = 2$, pokud $a_{kk} = 1$, dostáváme že $b_k \neq a_{kk}$ a číslo $b_k = 0, b_1 b_2 \ldots$ tak nemůže být rovno žádnému číslu a_k, neboť se od něj liší právě v *k*-té číslici jeho desetinného rozvoje.

Role, kterou v tomto důkazu hrají diagonální prvky a_{kk} jsou důvodem, proč tato metoda nese název *Cantorova diagonální metoda*.

Důsledkem těchto Cantorových úvah bylo, že co se týká velikosti, existují různá nekonečna. Svými tvrzeními tak rozboural představy tehdejších matematiků, kteří pracovali jen s nekonečnem potenciálním, tedy takovým, které je chápáno jako konečné s možností přibírat další prvky. Na Cantorovo pojetí aktuálního nekonečna, jakožto nekonečného celku, navázal český matematik Bernard Bolzano.

7.3 Uspořádání na množině reálných čísel

Věta 7.3.1 *Relace $<$ je uspořádáním na množině reálných čísel.*

Důkaz. Z Axiomu 4. v kapitole 7.1.1 vyplývá, že relace $<$ je na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ trichotomická a tranzitivní. Jedná se proto o relaci uspořádání na $\mathbb{R}$.

7.4 Reálná čísla jako algebraická struktura

Věta 7.4.1 *Struktura $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ tvoří uspořádané těleso.*

Důkaz. Vlastnosti tělesa $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ vyplývají z vět 7.2.1.1, 7.2.1.2 a 7.3.1.

7.5 Druhé odmocniny a jejich zápis ve tvaru řetězových zlomků

Řetězové zlomky obecně slouží k aproximaci iracionálních čísel racionálními. V této části bude pozornost zaměřena na řetězové zlomky druhých odmocnin přirozených nečtvercových čísel. Při počítání s takovými iracionálními čísly ve tvaru desetinného čísla či konstanty se dostaneme jen k velmi přibližnému výsledku a řetězové zlomky tak umožňují tento problém vyřešit.

Definice 7.5.1 Iracionální číslo $\alpha, \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{I}$ leze vyjádřit nekonečným řetězovým zlomkem ve tvaru

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}},$$

zapsáno

$$[a_1, a_2, \dots].$$

Při určení řetězového zlomku iracionálního čísla budeme postupovat podle Víta tak, jak uvádí kapitola 6.5.4. Analogicky tedy:

$$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{\alpha_1},$$

kde $a_1 = [\alpha], \alpha_1 > 1, \alpha_1 \in \mathbb{I}$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - a_1},$$

$$a_2 = [\alpha_1]$$

$$\alpha_1 = a_2 + \frac{1}{\alpha_2}, \text{kde } \alpha_2 > 1, \alpha_2 \in \mathbb{I}.$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_2},$$

$$a_3 = [\alpha_2],$$

$$\alpha_2 = a_3 + \frac{1}{\alpha_3}, \text{kde } \alpha_3 > 1, \alpha_3 \in \mathbb{I}.$$

$$\vdots$$

Všechna čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \dots$ jsou iracionální, proto tento postup nemůže být nikdy ukončen. Skutečně tedy dostáváme nekonečný řetězový zlomek $[a_1, a_2, \dots]$, kde $a_1 \in \mathbb{Z}$ a $a_2, a_2, \dots \in \mathbb{N}$.

Uvedený postup předvedeme na několika příkladech.

Příklad 7.5.1 Vyjádřete iracionální číslo $\sqrt{3}$ ve tvaru řetězového zlomku.

Řešení.

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}, a_1 = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_2}, a_2 = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \sqrt{3} + 1$$

$$\sqrt{3} + 1 = 2 + \frac{1}{\alpha_3}, a_3 = 2$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3} + 1 - 2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_4}, a_4 = 1$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \sqrt{3} + 1$$

$$\sqrt{3} + 1 = 2 + \frac{1}{\alpha_5}, a_5 = 2$$

$$\vdots$$

Z výpočtů je patrné, že $a_1 = a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = 1$ a $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 2$. A také že $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \cdots = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ a $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \cdots = \sqrt{3} + 1$.

A tedy $\alpha = \sqrt{3} = [1,1,2,1,2,1,2, \dots] = [1, \overline{1,2}]$.

Příklad 7.5.2 Vyjádřete iracionální číslo $\sqrt{5}$ ve tvaru řetězového zlomku.

Řešení.

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{\alpha_1}, a_1 = 2$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + 2$$

$$\sqrt{5} + 2 = 4 + \frac{1}{\alpha_2}, a_2 = 4$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{5} + 2 - 4} = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + 2$$

Jelikož platí $\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{5} + 2$, budou takové i další neúplné podíly.

$\alpha = \sqrt{5} = [2, \overline{4}]$.

Příklad 7.5.3 Vyjádřete iracionální číslo $\sqrt{7}$ ve tvaru řetězového zlomku.

Řešení.

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{\alpha_1}, a_1 = 2$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} = \frac{\sqrt{7} + 2}{3}$$

$$\frac{\sqrt{7} + 2}{3} = 1 + \frac{1}{\alpha_2}, a_2 = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+2}{3} - 1} = \frac{\sqrt{7} + 1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{7} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_3}, a_3 = 1$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{2} - 1} = \frac{\sqrt{7} + 1}{3}$$

$$\frac{\sqrt{7} + 1}{3} = 1 + \frac{1}{\alpha_4}, a_4 = 1$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{3} - 1} = \sqrt{7} + 2$$

$$\sqrt{7} + 2 = 4 + \frac{1}{\alpha_5}, a_5 = 4$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{\sqrt{7} + 2 - 4} = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} = \frac{\sqrt{7} + 2}{3}$$

Číslo α_5 se rovná číslu α_1, tzn. že perioda je tvořena čtyřmi neúplnými podíly a_2, a_3, a_4, a_5.

$\alpha = \sqrt{7} = [2, \overline{1,1,1,4}]$.

Iracionální číslo $\sqrt{7}$ lze zapsat jako pravidelný řetězový zlomek se čtyřprvkovou periodou.

Všechny dosud vyjádřené druhé odmocniny

$$\sqrt{3} = [1, \overline{1,2}], \sqrt{5} = [2, \overline{4}], \sqrt{7} = [2, \overline{1,1,1,4}]$$

lze zapsat jako nekonečné řetězové zlomky periodické. V prvním příkladě je perioda dvouprvková, ve druhém jednoprvková a ve třetím dokonce čtyřprvková, pokaždé však začíná prvkem a_2. Z daných příkladů je také patrné, že poslední prvek periody je dvojnásobkem prvního prvku a_1.

Lze tedy vyslovit definici:

Definice 7.5.2 Nechť je α iracionální číslo a $[a_1, a_2, \dots]$ je jeho nekonečný řetězový zlomek. Říkáme, že je tento zlomek periodický s periodou $(a_k, \dots, a_l)$, pokud existují $k, l \in \mathbb{N}_0, k \leq l$ taková, že platí

$$(\forall i \in \{0,1, \dots, l-k\})\forall j \in \mathbb{N}: a_{k+i} = a_{k+i+j(l-k+1)}.$$

Takový řetězový zlomek značíme $[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \dots, a_l}]$ a tvrdíme, že je ryze periodický, pokud bude $k = 0$, neboli $[a_1, a_2, \dots, \overline{a_l}]$.

(Kuděj, 2021, str. 4)

Indexem k z předchozí definice rozumíme začátek periody a index l značí její konec. Ani jeden z nich však není přesně určen, proto je nutné uvažovat indexy k, l co možná nejmenší.

Příklad 7.5.4 Vyjádřete iracionální číslo $\sqrt{2}$ ve tvaru řetězového zlomku.

Řešení.

Pokud je $\alpha = \sqrt{2}$, potom $a_1 = 1$ a dále platí

$$\forall i \in \mathbb{N}: \alpha_i = 1 + \sqrt{2}, a_i = 2.$$

A proto $\alpha = [1, \overline{2}]$.

Každé iracionální číslo lze zapsat ve tvaru nekonečného řetězového zlomku. Takový zlomek bude periodický, jedná-li se o algebraické číslo, a neperiodický, bude-li toto číslo transcendentní.

Zdaleka ne všechna iracionální čísla je však možné zapsat ve tvaru periodického řetězového zlomku, naopak je jich méně než neperiodických, přesto mají v teorii řetězových zlomků nezastupitelné místo.

Výraz s druhou odmocninou obecně nazveme kvadratická iracionalita a má tvar

$$\frac{p \pm \sqrt{r}}{q}, p, q \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}, r \neq 1, \sqrt{r} \in \mathbb{I}.$$

Každý takový výraz je kořenem kvadratické rovnice. Je-li $\alpha = \frac{p+\sqrt{r}}{q}$ iracionální kořen libovolné kvadratické rovnice, pak $\alpha' = \frac{p-\sqrt{r}}{q}$ je jejím druhým kořenem. Čísla α, α' se nazývají sdružená a taková rovnice má tvar

$$(x - \alpha)(x + \alpha') = 0.$$

Pro výrazy $\alpha = \sqrt{r}$, kterých bylo uvedeno a spočítáno několik, je $\alpha' = -\sqrt{r}$. Odpovídající rovnice má potom tvar

$$x^2 - r = 0.$$

(Vít, 1982)

Druhou odmocninu tedy chápejme výlučně jako výraz

$$\sqrt{r} \in \mathbb{I}, r \neq z^2, z \in \mathbb{Z}.$$

Řetězové zlomky druhých odmocnin nejsou ryze periodické. Je-li totiž $\alpha = \sqrt{r}$ kladným kořenem kvadratické rovnice $x^2 - r = 0$, pak pro $r \neq 1$ je $\alpha > 1$. Pro sdružený kořen potom platí $\alpha' < -1$. To však odporuje podmínce $-1 < \alpha' < 0$ pro ryze periodický řetězový zlomek. (Vít, 1982)

Pro druhou odmocninu přirozeného čísla tedy platí následující věta.

Věta 7.5.1 *Pro řetězový zlomek čísla $\sqrt{r}, r \in \mathbb{N}, \sqrt{r} > 1, \sqrt{r} \in \mathbb{I}$ platí*

$$\sqrt{r} = [a_1, \overline{a_2, a_3, \dots, a_3, a_2, 2a_1}].$$

Perioda řetězového zlomku čísla $\sqrt{r}$ se tak skládá z části symetrické $[a_2, a_3, \dots, a_3, a_2,]$ a posledního prvku $2a_1$, který je dvojnásobkem prvku prvního.

Důkaz.

Nejprve je nutné dokázat, že číslo $\alpha = a_1 + \sqrt{r}$ má ryze periodický řetězový zlomek. Z nerovnosti $\sqrt{r} > 1$ vyplývá, že $a_1 \in \mathbb{N}$ a tudíž platí

$$a_1 < \sqrt{r} < a_1 + 1, \alpha = a_1 + \sqrt{r} > 1.$$

Pro sdružené číslo $\alpha', \alpha' = a_1 - \sqrt{r}$ potom platí

$$-1 < \alpha' < 0.$$

Nerovnosti pro sdružená čísla α, α' jsou však podmínkou pro to, aby číslo $\alpha = a_1 + \sqrt{r}$ mělo ryze periodický řetězový zlomek, jehož perioda bude patrně začínat prvkem $2a_1$, tedy:

$$\alpha = a_1 + \sqrt{r} = [\overline{2a_1, a_2, a_3, \dots, a_k}].$$

Podle Víta (1982, str, 101,102) také platí, že ryze periodický řetězový zlomek

$$[\overline{a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, 2a_1}]$$

vyjadřuje číslo $-\frac{1}{\alpha'}$, a tudíž $\alpha' = a_1 - \sqrt{r}$. Potom

$$-\frac{1}{\alpha'} = [\overline{a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, 2a_1, a_k, \dots}],$$

a také

$$-\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{-a_1 + \sqrt{r}} = \frac{1}{\alpha - 2a_1} = \frac{1}{[\overline{0, a_2, \dots, a_k, 2a_1, \dots}]}.$$

Výraz na pravé straně lze rozepsat takto:

$$\frac{1}{[\overline{0, a_2, \ldots, a_k, 2a_1, \ldots}]} = \frac{1}{0 + \frac{1}{a_2 + \ddots + \frac{1}{2a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}}}} = a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots + \frac{1}{2a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}}}.$$

Tedy dostáváme $-\frac{1}{\alpha'} = [\overline{a_2, a_3, \ldots,, a_k, 2a_1, a_2, \ldots}]$. Pokud srovnáme oba výrazy pro $-\frac{1}{\alpha'}$, potom dostáváme $a_k = a_2, a_{k-1} = a_3, \ldots, a_2 = a_k$. Dostali jsme takto symetrickou část periody a zbytek periody je tvořen prvkem $2a_1$. Řetězový zlomek čísla $\sqrt{r}$ pak získáme odečtením a_1 z čísla $\alpha = a_1 + \sqrt{r}$, tedy platí

$$\sqrt{r} = [a_1, \overline{a_2, a_3, \ldots, a_3, a_2, 2a_1}]$$

a věta je tak dokázaná.

(Vít, 1982)

Vlastnost vyplývající z definice druhé odmocniny je možno ověřit v následující tabulce, která uvádí druhé odmocniny čísla $\sqrt{r}$ pro $r \leq 50$.

$\sqrt{r}$	*Řetězový zlomek čísla* $\sqrt{r}$	$\sqrt{r}$	*Řetězový zlomek čísla* $\sqrt{r}$
$\sqrt{2}$	$[1, \overline{2}]$	$\sqrt{28}$	$[5, \overline{3,2,3,10}]$
$\sqrt{3}$	$[1, \overline{1,2}]$	$\sqrt{29}$	$[5, \overline{2,1,1,2,10}]$
$\sqrt{5}$	$[2, \overline{4}]$	$\sqrt{30}$	$[5, \overline{2,10}]$
$\sqrt{6}$	$[2, \overline{2,4}]$	$\sqrt{31}$	$[5, \overline{1,1,3,5,3,1,1,10}]$
$\sqrt{7}$	$[2, \overline{1,1,1,4}]$	$\sqrt{32}$	$[5, \overline{1,1,1,10}]$
$\sqrt{8}$	$[2, \overline{1,4}]$	$\sqrt{33}$	$[5, \overline{1,2,1,10}]$
$\sqrt{10}$	$[3, \overline{6}]$	$\sqrt{34}$	$[5, \overline{1,4,1,10}]$
$\sqrt{11}$	$[3, \overline{3,6}]$	$\sqrt{35}$	$[5, \overline{1,10}]$
$\sqrt{12}$	$[3, \overline{2,6}]$	$\sqrt{37}$	$[6, \overline{12}]$
$\sqrt{13}$	$[3, \overline{1,1,1,1,6}]$	$\sqrt{38}$	$[6, \overline{6,12}]$
$\sqrt{14}$	$[3, \overline{1,2,1,6}]$	$\sqrt{39}$	$[6, \overline{4,12}]$
$\sqrt{15}$	$[3, \overline{1,6}]$	$\sqrt{40}$	$[6, \overline{3,12}]$
$\sqrt{17}$	$[4, \overline{8}]$	$\sqrt{41}$	$[6, \overline{2,2,12}]$
$\sqrt{18}$	$[4, \overline{4,8}]$	$\sqrt{42}$	$[6, \overline{2,12}]$
$\sqrt{19}$	$[4, \overline{2,1,3,1,2,8}]$	$\sqrt{43}$	$[6, \overline{1,1,3,1,5,1,3,1,1,12}]$
$\sqrt{20}$	$[4, \overline{2,8}]$	$\sqrt{44}$	$[6, \overline{1,1,1,2,1,1,1,12}]$
$\sqrt{21}$	$[4, \overline{1,1,2,1,1,8}]$	$\sqrt{45}$	$[6, \overline{1,2,2,2,1,12}]$
$\sqrt{22}$	$[4, \overline{1,2,4,2,1,8}]$	$\sqrt{46}$	$[6,1,3,1,1,2,6,2,1,1,3,1,1, \overline{12}]$
$\sqrt{23}$	$[4, \overline{1,3,1,8}]$	$\sqrt{47}$	$[6, \overline{1,5,1,12}]$
$\sqrt{24}$	$[4, \overline{1,8}]$	$\sqrt{48}$	$[6, \overline{1,12}]$
$\sqrt{26}$	$[5, \overline{10}]$	$\sqrt{50}$	$[7, \overline{14}]$
$\sqrt{27}$	$[5, \overline{5,10}]$		

Tabulka 1: Druhé odmocniny

(Vít, 1982, str.79-80)

8 KOMPLEXNÍ ČÍSLA

V předešlých kapitolách byly zavedeny základní číselné obory a nutnost jejich zavedení byla evidentní. Přirozená čísla vyjadřují množství a vznikla abstrakcí informace o počtu od konkrétních předmětů. Racionální čísla byla zavedena z důvodu měření délek či ploch a užíváme jich, i pokud je potřeba rozdělit celek na díly. Z praktického hlediska jsou tyto číselné obory dostatečné, neboť lze s dostatečnou přesností počítat s přibližnými hodnotami reálných čísel, například s číslem π určeným na několik desetinných míst.

Reálná čísla se však zdají být už natolik abstraktní, že mohou sloužit pouze k rozvoji různých matematických teorií a nejsou tedy přímo aplikovatelná. Pravdou však je, že reálná čísla umožnila najít matematický model „spojité“ přímky, což vedlo k rozvoji teorie limitního a diferenciálního počtu.

Motivace zavedení množiny celých čísel, respektive čísel záporných, se zdá být také jasná, neboť jimi lze vyjádřit úbytek či dluh. Hlubším pohledem však zjistíme, že záporná čísla nic nereprezentují, neboť neexistuje skupina předmětů se zápornou velikostí a vlastně ani dluh nemá reálnou podobu. Pokud akceptujeme myšlenku, že ačkoliv záporná čísla existují, nejsou pro praktický život zcela využitelná, je možné přemýšlet o číslech komplexních.

Vznik komplexních čísel bývá motivován jako nutnost odmocňovat záporná čísla. Prvotní impuls k takovému uvažování vzešel z Cardanových vzorců (*Gerolamo Cardano*, italský matematik, 1501-1576), které umožňovaly najít kořeny kubické rovnice ve tvaru

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Původní tvar Cardanových vzorců byl

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \text{kde } p = b - \frac{a^2}{3} \text{ a } q = c + \frac{2a^3 + 9ab}{27}.$$

(Botur, 2011, str. 80)

Brzy se však přišlo na to, že ačkoliv jsou tyto vzorce korektní, tak v případě, kdy má rovnice tři reálná řešení, je nutné nalézt druhou odmocninu záporného čísla. Zprvu se zdálo, že chyba bude v odvozených vzorcích, bylo ale nutné uvažovat jiným směrem. Sám

Cardano, aniž by si to uvědomoval, ve svých důkazech počítal s tím, že odmocnit lze každé číslo. Ke komplexním číslům však vedla ještě dlouhá cesta. *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) zakončil úvahy o komplexních číslech větou, které se dodnes říká „*Základní* věta algebry“ a časem se ukázalo, že komplexní čísla neslouží jen k řešení matematických úloh, ale že jsou nenahraditelná i v mnohých fyzikálních teoriích. (Botur, 2011)

8.1 Konstrukce komplexních čísel

Věta 8.1.1 *Těleso reálných čísel lze vnořit do tělesa, ve kterém má rovnice* $x^2 + 1 = 0$ *řešení.*

Důkaz. Provedeme konstrukcí. Označme $\mathbb{C}$ kartézský součin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tedy

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b); a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

Na množině $\mathbb{C}$ pak definujeme operace sčítání a násobení takto:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Ukážeme, že $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je těleso. Uspořádaná dvojice $(0,0)$ je neutrálním prvkem vzhledem k operaci sčítání, $(1,0)$ je pak neutrálním prvkem k operaci násobení. Opačným prvkem k prvku (a, b) je uspořádaná dvojice $(-a, -b)$ a prvkem převráceným k prvku (a, b), kde $a^2 + b^2 \neq 0$, je dvojice $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. Potom platí:

$$(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0), \text{tedy } (0,1)^2 + (1,0) = (0,0).$$

Pak nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je zobrazením definovaným pro každé reálné číslo $r \in \mathbb{R}$ předpisem $f(r) = (r, 0)$. Vnoření f je pak vnořením tělesa $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ do tělesa $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

(Botur, 2011)

Definice 8.1.1 Těleso $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nazýváme tělesem komplexních čísel.

Z této definice vyplývá, že rovnice $A + X = B$ má v oboru komplexních čísel vždy zřejmé řešení $X = B - A$, a rovněž rovnice $A \cdot X = B$ má v tomto oboru za podmínky $A \neq (0,0)$ jednoznačné řešení $X = \frac{B}{A}$. V oboru komplexních čísel je tedy možné neomezeně odčítat a dělit, samozřejmě kromě dělení nulou. Tedy platí:

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d),$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right), (c,d) \neq 0.$$

Z důkazu věty 8.1.1 tedy plyne, že každé reálné číslo r lze ztotožnit s komplexním číslem $(r,0)$, a zápis $(0,1)^2 + (1,0) = (0,0)$ značí, že rovnice $x^2 + 1 = 0$ má na množině všech komplexních čísel řešení. Tím řešením je komplexní číslo $(0,1)$, které ale nemůže být reálné, a proto pro něj zavádíme označení i a nazýváme jej komplexní jednotkou.

Z pravidla pro sčítání a násobení komplexních čísel uvedeného ve větě 8.1.1 plyne, že každé komplexní číslo (a,b) lze zapsat ve tvaru:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1),$$

tedy

$$(a,b) = a + bi.$$

(Botur, 2011)

Definice 8.1.2 $\alpha = a + bi$ je algebraický tvar komplexního čísla $\alpha = (a,b)$. Číslo a je reálná část komplexního čísla α, číslo b nazýváme imaginární část komplexního čísla α**.**

Je-li $a = 0$, potom je číslo α ryze imaginární.

Jelikož platí $i^2 = -1$, potom pro mocniny i platí tyto vztahy:

$$i^n = i, \text{pro } n = 1,$$

$$i^n = -1, \text{pro } n = 2,$$

$$i^n = -i, \text{pro } n = 3,$$

$$i^n = 1, \text{pro } n = 4.$$

Základní početní operace pak zapíšeme v algebraickém tvaru takto:

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i,$$

$$(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i,$$

$$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i,$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

(Beránek, 2013)

8.2 Spočetnost a mohutnost množiny reálných čísel

Věta 8.2.1 *Množina všech komplexních čísel je nekonečná množina.*

Důkaz. Jelikož je nekonečná množina $\mathbb{R}$ a komplexní čísla tvoří uspořádaná dvojice reálných čísel, je i množina komplexních čísel nekonečná.

Věta 8.2.2 *Množina všech komplexních čísel je nespočetná množina.*

Důkaz. Jelikož je nespočetná množina $\mathbb{R}$ a komplexní čísla tvoří uspořádané dvojice reálných čísel, je i množina komplexních čísel nespočetná.

8.3 Uspořádání na množině komplexních čísel

Věta 8.3.1 *Množinu všech komplexních čísel nelze uspořádat.*

Důkaz. Provedeme sporem. Pokud existuje uspořádání $<$ na množině komplexních čísel, pak by muselo platit, že je-li $a \neq 0$, pak $a^2 > 0$.

Víme však, že pro $i \neq 0$ platí $i^2 = -1 > 0$. Pokud vynásobíme obě strany nerovnosti -1, dostaneme $-1 < 0$. Dále také víme, že číslo $(i^2)^2 = 1 > 0$.

Vidíme, že $(1 > 0) \wedge (1 < 0)$, což je ve sporu a množinu komplexních čísel tedy nelze uspořádat.

8.4 Komplexní čísla jako algebraická struktura

Věta 8.4.1 *Množina všech komplexních čísel spolu s operacemi $+$ a $\cdot$ tvoří těleso.*

Důkaz. Operace sčítání je komutativní s nulovým prvkem $0 + 0i$. Opačným prvkem k číslu $a + bi$ je číslo $(-a) + (-b)i$, a proto je struktura $(\mathbb{C}, +)$ komutativní grupa.

Komutativita násobení je evidentní. Asociativitu i distributivnost lze snadno ověřit výpočtem. Jednotkovým prvkem je prvek $1 + 0i$.

Zbývá tedy dokázat, existenci inverzního prvku ke každému nenulovému prvku. Tedy, že

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i.$$

Jelikož $a + bi \neq 0$, platí $a \neq 0$, $b \neq 0$ a $a^2 + b^2 \neq 0$. Potom

$$a - bi \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i\right) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} - \frac{ab - ab}{a^2 + b^2} i = 1 + 0i.$$

(Botur, 2011)

Struktura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tvoří těleso.

Jako se reálná čísla znázorňují na přímku, lze komplexní čísla znázornit na rovinu. Komplexní číslo $a + bi$ tedy zobrazíme na bod o souřadnicích $[a, b]$, Rovina, jež představuje komplexní čísla, se nazývá *Gaussova rovina*. Takový způsob zobrazení komplexního čísla vede k zápisu pomocí polárních souřadnic a nazýváme jej goniometrický tvar komplexního čísla.

Na závěr ještě uvedeme slavnou Gaussovu větu neboli *„Základní větu algebry"*.

Věta 8.4.2 *Nechť* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *je polynom s koeficienty* $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ *stupně* $n \geq 1$*, pak existuje* $a \in \mathbb{C}$ *takové, že* $P(a) = 0$.

Neboli tvrdíme, že každý komplexní polynom P stupně $n \in \mathbb{N}$ má právě n komplexních kořenů, počítáno včetně násobnosti.

(Botur, 2011)

Ačkoli je tato základní věta algebry ryze algebraickým tvrzením, její důkazy se opírají o metody matematické analýzy a my je ponecháváme ke studiu čtenáři.

9 HYPERKOMPLEXNÍ ČÍSLA

Postupnou konstrukcí jednotlivých číselných oborů, tedy od polokruhu přirozených čísel po těleso komplexních čísel, jsme dosáhli sktruktury, která se zdá být z algebraického pohledu nejbohatší. Ačkoli v ní neexistuje uspořádání, lze na ní provádět bez omezení všechny početní operace, dokonce i umocňování a odmocňování libovolného řádu. Z praktického hlediska není tento obor potřeba dále rozšiřovat.

Přesto však v teoretické matematice existují nejméně dvě další rozšíření oboru komplexních čísel, která jsou založena na zopakování principu zdvojení, jenž byl uplatněn při konstrukci komplexních čísel. Otázkou však je, do jaké míry jsou všechny hyperkomplexní struktury efektivní a aplikovatelné. Prozatím nacházejí uplatnění především v částicové fyzice, a však i zde je sporné, zda jsou skutečně nutné či nenahraditelné. Vlastnosti hyperkomplexních struktur a jejich využití jsou však současnosti hojně studovány, a tak lze očekávat hlubší porozumění jejich aplikovatelnosti.

9.1 KVATERNIONY

Jak již bylo zmíněno, komplexní čísla vznikla zdvojením reálných čísel, tedy $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Zopakováním tohoto postupu lze získat čísla ve tvaru $A + Bj$, kde $A, B \in \mathbb{C}$ a j je novou imaginární jednotkou a platí $j^2 = -1$. Je-li $A = a + bi$ a $B = c + di$, potom

$$A + Bk = (a + bi) + (c + di)j = a + bi + cj + dij, \text{kde } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Jako první tuto myšlenku vyslovil irský matematik *William Hamilton* v roce 1843 a tvrdil, že součin imaginárních jednotek $i \cdot j$ je roven nové imaginární jednotce k.

Čísla mající tvar

$$a + bi + cj + dk,$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a i, j, k jsou imaginární jednotky nazýváme (Hamiltonovy) kvaterniony a jejich množinu označujeme symbolem $\mathbb{H}$.

Sčítání kvaternionů probíhá po složkách analogicky jako u komplexních čísel, pro součin je potřeba znát součiny imaginárních jednotek, které jsou definovány takto:

$\cdot$	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Tabulka 2: Součiny kvaternionů

(Botur, 2011)

Věta 9.1.1 *Algebraická struktura* $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ *tvoří nekomutativní těleso.*

9.2 Oktoniony

Pokud zopakujeme postup uvedený v předchozí kapitole, získáme prvky ve tvaru

$$a + bi + cj + dk + el + fm + gn + ho,$$

kde $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$ a i, j, k, l, m, n, o jsou imaginární jednotky, jejichž druhá mocnina je rovna -1. Taková čísla nazveme oktoniony a jejich množinu značíme $\mathbb{O}$. Analogicky jako u kvaternionů probíhá sčítání po složkách a násobení definuje následující tabulka.

$\cdot$	i	j	k	l	m	n	o
i	-1	k	$-j$	m	$-l$	$-o$	n
j	$-k$	-1	i	n	o	l	$-m$
k	j	$-i$	-1	o	$-n$	m	$-l$
l	$-m$	$-n$	$-o$	-1	i	j	k
m	l	$-o$	n	$-i$	-1	$-k$	j
n	o	$-l$	$-m$	$-j$	k	-1	$-i$
o	$-n$	m	l	$-k$	$-j$	i	-1

Tabulka 3: Součiny oktonionů

(Botur, 2011)

Násobení u této struktury již není asociativní ani komutativní, nýbrž alternativní, tedy

$$(x \cdot y) \cdot y = x \cdot (y \cdot y),$$

dále lze také zavést operaci umocňování a nenulový prvek.

Oktoniony jsou stejně jako všechny zkoumané číselné struktury v určitém smyslu slova univerzální, neboť jsou izomorfní s některou ze struktur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$. (Botur, 2011)

Právě k této struktuře teoretičtí fyzikové obracejí svou pozornost stále častěji, protože právě v ní hledají univerzální částicovou teorii.

10 NADREÁLNÁ ČÍSLA

Nadreálná čísla jsou dalším známým číselným oborem, který byl objeven díky rozvoji teorii her. Tato čísla jsou zúplněním reálných, ordinálních a hyperreálných čísel a byla objevena britským matematikem *Johnem Conwayem* (1937-2020). Název *„Surreal numbers"* pochází z roku 1974 od informatika *Donalda Ervina Knutha.*

Nadreálná čísla jsou definována jako uspořádaná dvojice množin nadreálných čísel a definovaní jejich vlastností se opírá o matematickou indukci.

Nadreálná čísla jsou tedy takovou hrou (x^L, x^P), kde platí

$$(\forall l \in x^L)(\forall p \in x^P)(p \nleq l).$$

Všechny prvky levé i pravé množiny jsou již dříve definovanými nadreálnými čísly, což lze chápat tak, že nadreálné číslo určujeme nějakými čísly, která jsou menší a větší, avšak nelze je vybírat libovolně.

Mějme tedy prázdnou množinu $\emptyset$, ze které vytvořme uspořádanou dvojici $(\emptyset|\emptyset)$ a označme ji jako nulu, 0. Nula je hrou, protože se jedná o dvojice množin her, byť jsou prázdné. V další fázi lze vytvořit tři nová čísla a to $(0|\emptyset)$, $(\emptyset|0)$ a $(0|0)$. V prvních dvou případech se jistě jedná o čísla, a však poslední číslem být nemůže, protože by muselo platit $0 \nleq 0$, což neplatí. Protože však platí $0 \nleq (0|\emptyset)$, nazveme toto číslo 1. Obdobně z důvodu platnosti $(\emptyset|0) \nleq 0$, označíme toto číslo jako -1.

Inverzní prvek vzhledem ke sčítání, tedy číslo opačné pro $x = (x^L|x^P)$ definujeme jako $-x = (-x^L|-x^P)$.

Sčítání definujeme

$$x + y = (x^L + y, x + y^L|x^P + y, x + y^P),$$

a násobení definujme takto:

$$x \cdot y = \left(\begin{matrix} x^L \cdot y + x \cdot y^L - x^L \cdot y^L, \\ x^P \cdot y + x \cdot y^P - x^P \cdot y^P \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x^L \cdot y + x \cdot y^P - x^L \cdot y^P \\ , x^P \cdot y + x \cdot y^L - x^P \cdot y^L \end{matrix} \right).$$

Struktura nadreálných čísel tvoří těleso a je z algebraického hlediska uzavřená.

ZÁVĚR

Cílem této práce bylo objasnit motivaci a nastínit způsoby rozšiřování číselných oborů, podat ucelený přehled jak o vývoji čísla, tak o vývoji matematiky jako vědy se zaměřením na vývoj číselných oborů, a to od prvotních početních úvah až po současnost. Dalším cílem bylo tyto číselné obory zkonstruovat, definovat základní početní operace, spočetnost a mohutnost daných číselných oborů a také vlastnosti jejich uspořádání.

V první části práce byl zaveden pojem čísla a popsán vývoj jeho zápisu od pravěkých civilizací až po současný způsob.

Druhá kapitola představila vývoj matematiky jako vědní disciplíny v podstatných historických etapách a zeměpisných oblastech s odkazem na tamní významné matematiky a jejich díla. Byly popsány tři krize matematiky, z nichž především ta první vedla k rozšíření stávajícího číselného oboru.

Ve třetí kapitole byly uvedeny základy teorie množin a vymezeny základní pojmy s ohledem na fakt, že číselné obory lze chápat jako množiny, tedy algebraické struktury.

Poslední část zavádí jednotlivé číselné obory. Ty jsou za sebou uvedeny tak, že každý další obor je nadoborem předchozího. Z historického hlediska je však možné vývoj jednotlivých číselných oborů popsat řadou: $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+ \to \mathbb{Z}^-, \mathbb{Q}^-, \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$. U každého číselného oboru byla uvedena motivace k zavedení daného oboru, popsán princip jeho výstavby. Dále byly zkoumány vlastnosti spočetnosti, mohutnosti, uspořádání a také binárních operací na daných strukturách definovaných. Většina vět byla dokázána. Důkazy některých vět byly pro rozsah práce či analogii mezi obory vynechány. Snahou bylo také propojit jednotlivé kapitoly pomocí odkazů na věty a definice z předchozích kapitol.

Obory přirozených, celých, racionálních, reálných ale i komplexních čísel jsou obory, kterých matematika běžně užívá k řešení nejrůznějších početních problémů. Pro úplnost práce byly uvedeny i obory hyperkomplexních a nadreálných čísel, kterých zatím tak často užíváno není. Domnívám se však, že s rozvojem digitálních technologií a stále se rozšiřujícími početními schopnosti a dovednostmi, jejich čas teprve přijde a možná i nějakých dalších.

RESUMÉ

Diplomová práce se zabývá rozšiřováním číselných oborů s ohledem na historický kontext a teorii množin. Text je členěn do deseti kapitol.

První kapitola definuje pojem čísla a popisuje vývoj jeho zápisu od nejstarších kultur po současnost. Ve druhé kapitole je pospán vývoj matematiky se zaměřením na číselné obory s odkazy na významné matematiky a jejich díla. Jsou zde popsány jednotlivé krize matematiky. Třetí kapitola představuje teorii množin a zavádí pojmy používané v dalších kapitolách.

Dalších sedm kapitol uvádí jednotlivé číselné obory. U Každého oboru je popsána motivace zavedení daného oboru, princip jeho konstrukce, některé důležité vlastnosti a také definovány základní početní operace.

RESUME

The diploma thesis deals with the expansion of numerical domains with regard to the historical context and set theory. The text is divided into ten chapters.

The first chapter defines the concept of number and describes the development of its notation from the oldest cultures to the present. The second chapter describes the development of mathematics with a focus on numerical disciplines with references to important mathematicians and their works. The individual crises of mathematics are described here. The third chapter introduces set theory and introduces the terms used in the following chapters.

The next seven chapters list the individual numerical domains. Each part describes the motivation for the introduction of the domain, the principle of its construction, some important properties and also defined the basic arithmetic operations.

SEZNAM LITERATURY

(1) BALADA, František. Z dějin elementární matematiky: František Balada. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1959. Pomocné knihy pro učitele.

(2) BEČVÁŘ, Jindřich. Hrdinský věk řecké matematiky (Czech) [The Heroic Age of Greek mathematics]. In: Bečvář, J. (editor); Fuchs, E. (editor): Historie matematiky. I. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 19.8.-22.8.1993, Sborník. (Czech). Brno: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993. pp. 20-107 [cit. 2021-10-29]. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400590

(3) BEČVÁŘ, Jindřich. Leonardo Pisánský-Fibonacci (Czech) [Leonardo of Pisa-Fibonacci]. In: Bečvář, Jindřich (editor): Matematika ve středověké Evropě. (Czech). Praha: Prometheus, 2001. 80-7196-232-5, pp. 264-339. [cit. 2021-10-29]. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401789

(4) BEČVÁŘ, Jindřich, BEČVÁŘOVÁ, Martina a VYMAZALOVÁ, Hana. Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie. Praha: Prometheus, 2003. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-255-4

(5) BEČVÁŘOVÁ, Martina. Středověké početní algoritmy. (Czech) [Medieval computational algorithms]. In: Bečvář, Jindřich (editor): Matematika ve středověké Evropě. (Czech). Praha: Prometheus, 2001. 80-7196-232-5, pp. 230-263. [cit. 2021-10-29]. Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/401788

(6) BERÁNEK, Jaroslav. Číselné obory [online]. 2013. Brno [cit. 2022-02-05]. Dostupné z: https://www.coursehero.com/file/78377269/beranek-czdoc/

(7) BLAŽEK, Jaroslav, CALDA, Emil a KUSSOVÁ, Blanka. Algebra a teoretická aritmetika. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1984.

(8) BOTUR, Michal. Úvod do aritmetiky [online]. 2011.[cit. 2022-02-05]. Dostupné z: https://kag.upol.cz/ucitprir/texty/Aritmetika_botur.pdf

(9) BUŠEK, Ivan a CALDA, Emil. Matematika pro gymnázia: základní poznatky. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1999. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-146-9.

(10) CRILLY, A. J. Matematika: 50 myšlenek, které musíte znát. Praha: Slovart, 2010. ISBN 978-80-7391-409-7.

(11) Fibonacciho posloupnost-zavedení. Encyklopedie fyziky [online]. [cit. 2021-11-19]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1493-fibonacciho-posloupnost-zavedeni

(12) FINE, Henry B. The number-system of algebra treated theoretically and historically. Second Edition. Boston, U.S.A: D.C.Heath & CO., Publishers, 1907.

(13) FUCHS, Eduard. Teorie množin pro učitele. Vyd. 1. Brno: Masarykova univerzita, 1999, 200 s. ISBN 80-210-2201-9.

(14) FUCHS, Eduard. Přehled vývoje matematiky (Czech) [A survey of developments in mathematics]. In: Bečvář, J. (editor); Fuchs, E. (editor): Historie matematiky. I. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 19.8.-22.8.1993, Sborník. (Czech). Brno: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993. pp. 4-19 [cit. 2021-10-29]. Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/400583/DejinyMat_01-1994-1_2.pdf

(15) HRÁBEK, Martin. Historie a vývoj čísel. Geneze.info [online]. [cit. 2021-10-29]. Dostupné z: http://www.geneze.info/pojmy/subdir/historie_cisel.htm

(16) STRUIK, Dirk Jan. Dějiny matematiky. Praha: Orbis, 1963. Malá moderní encyklopedie (Orbis).

(17) JUŠKEVIČ, Adolf Pavlovič. Dějiny matematiky ve středověku. Vyd. 1. Praha: Academia, 1978. 446 s.

(18) KOLMAN, Arnošt. Dějiny matematiky ve starověku. 1. vyd. Praha: Academia, 1968. 221 s.

(19) KOPECKÝ, Milan. Základy teorie množin. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého,

2004, 114 s. ISBN 80-244-0754-X.

(20) KUBÍNOVÁ, Marie a NOVOTNÁ, Jarmila. Posloupnosti a řady: matematická analýza, teoretická aritmetika. Praha: Karolinum, 1997. ISBN 80-7184-564-7.

(21) KUDĚJ, Martin. Řetězové zlomky s předepsanou periodou. (Czech) [Continued fractions with prescribed period]. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, vol. 66 (2021), issue 1, pp. 11-32[cit. 2022-03-06]. Dostupné z: https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/148691

(22) MAREŠ, Milan. Příběhy matematiky: stručná historie královny věd. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2008. ISBN 978-80-87053-16-4.

(23) Matematická sekce, MFF, UK [Internet]. Praha. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta; c2021. Historie matematiky, základní přehled. [cited 2021 Nov 3]. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Historie_MFF/Prezentace_uvod.pdf

(24) PAVLICOVÁ, Vladimíra. Webová aplikace pro výuku základních poznatků z matematiky na střední škole [online]. 2010 [cit. 2018-06-27]. Dostupné z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/86737. Vedoucí práce Jarmila Robová.

(25) Russellův paradox. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2021-12-30]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Russell%C5%AFv paradox

(26) Seriál Nekonečno, Nekonečné množiny [online]. s. 20 [cit. 2022-03-05]. Dostupné z: https://prase.cz/archive/21/10.pdf

(27) SCHWABIK, Štefan a ŠARMANOVÁ, Petra. Malý průvodce historií integrálu. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1996, 95 s. ISBN 80-7196-038-1.

(28) ŠIŠMA, Pavel. Arabská matematika. (Czech) [Arabian mathematics]. In: Bečvář, Jindřich (editor): Matematika ve středověké Evropě. (Czech). Praha: Prometheus, 2001. 80-7196-232-5, pp. 150-183. [cit. 2021-10-29]. Dostupné z:

http://dml.cz/dmlcz/401786

(29) VÍT, Pavel. Škola mladých matematiků. Řetězové zlomky. Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1982. 160 s. ISBN 23-096-82

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ

Obrázek 1: Egyptská nepoziční desítková soustava (Bečvář, Bečvářová, Vymazalová, 2003, str.39) ... 6
Obrázek 2: Vývoj zápisu čísla 3 (Kolman, 1968) ... 7
Obrázek 3: Řecký zápis čísel (Hrábek, 2021) ... 9
Obrázek 4: Zjednodušený systém zápisu řeckých čísel (Hrábek, 2021) ... 9
Obrázek 5: Číslice bráhmí (Juškevič, 1978) ... 10
Obrázek 6: Východoarabské číslice z 10. století (Šišma, 2001) ... 11
Obrázek 7: Západoarabské číslice ze 14. století (Šišma, 2001) ... 11
Obrázek 8: Dnešní číslice a jejich vývoj (Juškevič, 1978) ... 12
Obrázek 9: Schémata z knihy I-ting (Fuchs, 1993) ... 14
Obrázek 10: Konstrukce iracionality podle Theodora ... 17
Obrázek 11: Konstrukce vzorce pro druhou mocninu rozdílu (Bečvář, 1993) ... 18
Obrázek 12: Newtonova metoda fluxí (Schwabik, Šarmanová, 1976) ... 23
Obrázek 13: Charakteristický trojúhelník (Schwabik, Šarmanová, 1976) ... 25
Obrázek 14: Vztahy mezi číselnými obory ... 32
Obrázek 15: Množinové operace ... 34

Tabulka 1: Druhé odmocniny ... 79
Tabulka 2: Součiny kvaternionů ... 86
Tabulka 3: Součiny oktonionů ... 86