ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MATEMATIKY

Bakalářská práce

Řešitelnost problémů se skákajícími nelinearitami

Plzeň, 2013 Martin Kuchynka

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

V Plzni dne ....   Podpis autora ....

Poděkování

Velmi děkuji vedoucímu této práce Ing. Petru Nečesalovi, Ph.D. za příkladné vedení a za dva roky odborné výchovy. Výrazně mě ovlivnil při mých matematických studiích.

Název práce: Řešitelnost problémů se skákajícími nelinearitami

Autor: Martin Kuchynka

Katedra: Katedra matematiky

Vedoucí práce: Ing. Petr Nečesal, Ph.D.

Abstrakt: Hlavním tématem práce je studium existence řešení okrajových problémů se skákajícími nelinearitami. V první kapitole je čtenář obeznámen s řadou základních pojmů z funkcionální analýzy. Druhá kapitola je věnována krátkému úvodu do problematiky skákajících nelinearit a pojmu Fučíkova spektra. Ve třetí kapitole je studováno Fučíkovo spektrum dvou konkrétních diferenciálních operátorů. Čtvrtá kapitola navazuje v rámci studia řešitelnosti uvažovaných problémů na znalosti o struktuře Fučíkova spektra uvažovaných operátorů získané v předchozí kapitole. Tuto kapitolu lze rozdělit do dvou částí. V první části studujeme řešitelnost Dirichletova problému a nelokálního problému s integrální podmínkou. Ve druhé části kapitoly uvažujeme velmi obecně formulovaný problém. Zde získané hlavní výsledky jsou soustředěny do tří existenčních vět. V poslední kapitole zasazujeme problémy se skákající nelinearitou do kontextu operátorových rovnic v abstraktních Banachových prostorech. S využitím teorie Mawhinova koincidenčního stupně získáme existenční výsledky pro tyto problémy na regionech typu (I) a v rezonanci.

Klíčová slova: řešitelnost, skákající nelinearita, existenční věty, Fučíkovo spektrum, rezonance, diferenciální operátor, nelokální podmínky, topologický stupeň zobrazení, regiony

Title: Solvability of problems with jumping nonlinearities

Author: Matin Kuchynka

Department: Department of mathematics

Supervisor: Ing. Petr Nečesal, Ph.D.

Abstract: This thesis deals with solvability of problems with jumping nonlinearities. In the first chapter we remind some basic functional analysis theory. The second chapter of the thesis introduces a term of jumping nonlinearity and Fučík spectrum. In the third chapter we focus on the structure of Fučík spectrum of two differential operators. The fourth chapter can be divided into two parts. In the first part we prove some existence results for Dirichlet BVP and nonlocal BVP with integral condition. In the second part we consider a general problem with jumping nonlinearities. Main results obtained in this chapter are concentrated in three general existence theorems. In the last chapter we place problems with jumping nonlinearities in context of operator equations in abstract Banach spaces. Here, we prove some existence results for such problems on type (I) regions and at resonance using Mawhin's coincidence degree theory.

Keywords: solvability, existence theorem, jumping nonlinearity, Fučík spectrum, resonance, regions, differential operator, nonlocal conditions, topological degree

Obsah

Úvodem **1**

1 Základní pojmy **2**
1.1 Banachovy prostory 2
1.2 Lebesgueovy prostory a prostory lebesgueovsky integrovatelných funkcí 2
1.3 Sobolevovy prostory 3
1.4 Lineární funkcionál, dualita 4
1.5 Hilbertovy prostory 5
1.6 Operátory na lineárních prostorech 6
1.7 Spojité a kompaktní vnoření prostorů 6
1.8 Lerayův-Schauderův topologický stupeň zobrazení 7
1.9 Další pilíře funkcionální analýzy 8

2 Skákající nelinearita a Fučíkovo spektrum **9**
2.1 Skákající nelinearita 9
2.2 Fučíkovo spektrum 10

3 Fučíkovo spektrum dvou diferenciálních operátorů **12**
3.1 Dirichletův problém 12
3.2 Nelokální problém s integrální podmínkou 13

4 Řešitelnost problémů se skákajícími nelinearitami **18**
4.1 Dirichletův problém 18
4.2 Nelokální problém s integrální podmínkou 24
4.3 O jednom zobecnění 28
4.4 O druhém zobecnění 32

5 Skákající nelinearity v abstraktních Banachových prostorech **37**
5.1 Operátorové rovnice mimo rezonanci 39
5.2 Operátorové rovnice v rezonanci 41

Závěrem **45**

Seznam obrázků **46**

Literatura **47**
*

Úvodem

Výzkum okrajových problémů se skákajícími nelinearitami je jednou z možností, jak vykročit ze světa lineárních problémů do světa těch nelineárních. Zároveň tento krok je v jistém smyslu dostatečně malý, aby bylo možné jeho studium současnými metodami nelineární analýzy. Studium těchto problémů má své počátky v 70. letech 20. století a mezi významná jména spjatá s počátky výzkumu v této oblasti patří A. Ambrosetti a G. Prodi ([12]), E. N. Dancer ([13]) nebo S. Fučík ([1]). Později na jejich práci navázali další světoví matematici a skákající nelinearity tak přešly do popředí zájmů řady významných vědců. V 80. letech 20. století pak nalezly skákající nelinearity aplikaci především v modelech visutých mostů, neboť mohou dobře vystihnout vliv lan, kterými je zavěšena mostovka na nosných lanech. Viz např. [14], [15].

My se v této práci zabýváme existencí řešení problémů se skákajícími nelinearitami. Práci lze obsahem rozdělit na dvě hlavní části. V první části studujeme problémy tvaru

$$-Lu + \alpha u^+ - \beta u^- + \psi(u) = f, \tag{1}$$

kde L je lineární operátor, $u^\pm = \max\{\pm u, 0\}$, hodnoty α, β jsou reálné a ψ má *sublineární růst*. Řešitelnost takových problémů zásadním způsobem závisí na hodnotách α, β. Zvláštní význam má v této souvislosti množina všech reálných dvojic (α, β), pro něž má problém

$$-Lu + \alpha u^+ - \beta u^- = o \tag{2}$$

netriviální řešení a je třeba jí z tohoto důvodu též věnovat pozornost. V práci proto studujeme též tyto množiny pro dva konkrétní operátory L a na poznatky o těchto množinách získané pak navazujeme a formulujeme věty o existenci řešení (1). Později zobecňujeme tyto výsledky pro rovnici (1) za dosti obecných předpokladů o operátoru L. Tyto výsledky následně aplikujeme na problémy s konkrétními diferenciálními operátory.

Ve druhé části textu studujeme obecněji formulované problémy na abstraktních Banachových prostorech. Tyto problémy uvažujeme ve tvaru

$$-Lu + \alpha T u^+ - \beta T u^- + Su = f, \tag{3}$$

případně

$$-Lu + \alpha T u^+ - \beta T u^- = f. \tag{4}$$

Analogicky v otázce řešitelnosti těchto problémů hraje zásadní roli množina všech dvojic (α, β), pro které má rovnice

$$-Lu + \alpha T u^+ - \beta T u^- = o \tag{5}$$

netriviální řešení. Hlavním získaným výsledkem v této práci jsou věty o existenci řešení problému (4) v rezonanci, tj. pro (α, β) takové, že (5) má netriviální řešení.

Při studiu těchto problémů jsme užili především metod nelineární funkcionální analýzy. Speciálně důkazy zmíněných existenčních vět stojí na homotopické invarianci Leray-Schauderova topologického stupně zobrazení, popř. Mawhinova koincidenčního stupně.

„Matematika je hra hraná s nesmyslnými znaky na papíře podle daných jednoduchých pravidel.“

David Hilbert

„Všechno dobré je buďto nelegální, nemorální nebo ekvivalentní axiomu výběru.“

Josh Laison

1 Základní pojmy

V této kapitole se seznámíme s aparátem nezbytným pro pochopení obsahu následujících kapitol. Při zkoumání řešitelnosti okrajových úloh v této práci budeme užívat především aparátu funkcionální analýzy. Z toho důvodu je třeba čtenáře seznámit s několika fundamentálními pojmy a tvrzeními, které jsou této oblasti vlastní. Všechna zde uvedená tvrzení jsou uvedena bez důkazu, neboť se jedná o standardní aparát, který lze bez problémů dohledat v literatuře. Zájemce pak odkazujeme zejména na knihy [3], [4], [5], [6], ve kterých lze najít všechny zde uvedené pojmy i věty s jejich důkazy.

1.1 Banachovy prostory

Definice 1.1 (Banachův prostor) Normovaný lineární prostor $(X, \|\cdot\|)$ nazveme *Banachovým prostorem*, jestliže je úplný vzhledem k metrice ρ indukované normou $\|\cdot\|$:

$$\rho(u, v) = \|u - v\|, \quad u, v \in X.$$

Poznámka Stefan Banach (30. března 1892 v Krakově, Polsko – 31. srpna 1945 ve Lvově, Ukrajina) byl polský matematik. Prakticky založil moderní funkcionální analýzu. Ve své disertační práci z roku 1920 definoval právě třídu prostorů, kterou dnes známe jako *Banachovy prostory.* Mimo funkcionální analýzu se též zabýval teorií množin či teorií míry (viz Banach-Tarského paradox).

1.2 Lebesgueovy prostory a prostory lebesgueovsky integrovatelných funkcí

Definice 1.2 (Prostor lebesgueovsky integrovatelných funkcí) Nechť (X, σ, μ) je prostor s mírou. Prostor lebesgueovsky integrovatelných funkcí $\mathcal{L}(X)$ je definován jako

$$\mathcal{L}(X) \equiv \left\{ u : X \to \mathbb{R} \ \mu\text{-měřitelná} \ \Big| \ \int_X u \, \mathrm{d}\mu < \infty \right\}.$$

Dočasně definujme prostory $\mathcal{L}^p(X) \equiv \{u \in \mathcal{L}(X) \mid \int_X |u|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty\}$ pro $1 \leq p < \infty$ a uvažujme na nich ekvivalenci $u \sim v \iff u = v$ skoro všude v X.

Definice 1.3 (Lebesgueovy prostory) Uvažujme třídy ekvivalence $[u] = \{v \in \mathcal{L}^p(X) \mid v \sim u\}$. Lebesgueovy prostory $L^p(X)$ definujeme jako

$$L^p(X) \equiv \{[u] \mid u \in \mathcal{L}^p(X)\}.$$

Poznámka Tento formalismus se v matematické literatuře nepoužívá. Dává se přednost méně přesnému vyjádřování, kdy nerozlišujeme mezi $L^p(X)$ a $\mathcal{L}^p(X)$. Užíváme pouze prostor označený $L^p(X)$, s jehož prvky budeme pracovat jako s funkcemi z $\mathcal{L}^p(X)$.

Poznámka Definujeme-li na Lebesgueově prostoru $L^p(X)$ normu definovanou předpisem

$$\|u\|_{L^p(X)} \equiv \left(\int_X |u|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad u \in L^p(X),$$

potom je $L^p(X)$ Banachův.

Poznámka Henri Léon Lebesgue (28. června 1875, Beauvais – 26. července 1941, Paříž) byl francouzský matematik. Dnes je nejvíce známý pro svůj přínos moderní teorii míry a integrálu. Důležitých výsledků však dosáhl též v topologii, teorii potenciálu, variačním počtu či teorii množin.

Věta 1.1 (Hölderova nerovnost) *Nechť* $p, q \in (1, \infty)$, $pq = p + q$ *a budiž* $u, v \in \mathcal{L}(X)$. *Potom*

$$\|uv\|_{L^1(X)} \leq \|u\|_{L^p(X)} \|v\|_{L^q(X)}.$$

Poznámka Otto Ludwig Hölder (22. prosince 1859, Stuttgart – 29. srpna 1937, Leipzig) byl německý matematik. Při jeho práci zabývající se konvergencí Fourierových řad objevil nerovnost, která je nyní pojmenována po něm. Hölder se však nezajímal pouze o teorii funkcí. Největší část života se zabýval teorií grup, ke které také velkou měrou přispěl.

Definice 1.4 (Lokálně integrovatelné funkce) Nechť $1 \leq p < \infty$ a Ω je oblast v $\mathbb{R}^N$. Symbolem $L^p_{loc}(\Omega)$ označujeme množinu všech měřitelných funkcí u definovaných na Ω takových, že

$$\int_{\mathcal{K}} |u|^p \mathrm{d}\mu < \infty.$$

pro každou kompaktní podmnožinu $\mathcal{K} \subset \Omega$.

Poznámka Lebesgueovu míru množiny Ω budeme někdy značit meas(Ω).

1.3 Sobolevovy prostory

Zaveďme nejprve tzv. *multiindex*. Multiindexem rozumíme vektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ o nezáporných složkách a $|\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j$ je *délkou multiindexu* α. Užívá se jej pro stručný zápis derivací funkce u:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Definice 1.5 (Slabá derivace) Budiž Ω oblast v $\mathbb{R}^N$ a $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Funkci $\omega \in L^1_{loc}(\Omega)$, pro níž platí vztah

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}\mu = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \omega \varphi \, \mathrm{d}\mu \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

nazýváme *zobecněnou derivací* funkce u vzhledem k multiindexu α.

Poznámka Prostor $C_0^\infty(\Omega)$ je prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem.

Definice 1.6 (Sobolevovy prostory) Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^N$, $k \in \mathbb{N}$ a $1 \leq p < \infty$. *Sobolevovým prostorem* nazýváme lineární normovaný prostor $W^{k,p}(\Omega)$ všech funkcí $u \in L^p(\Omega)$, jejichž zobecněné derivace $D^\alpha u$ pro všechna α takové, že $|\alpha| \leq k$, patří opět do $L^p(\Omega)$.

Poznámka I zde bychom správně měli chápat tyto prostory jako prostory tříd ekvivalence.

POZNÁMKA Sergej Lvovič Sobolev (6. října 1908, Petrohrad, Carské Rusko - 3. ledna 1989, Moskva, SSSR) byl významný ruský matematik. Při práci v teorii parciálních diferenciálních rovnic jako první definoval pojem *zobecněné funkce*. Svou prací přispěl k řešení některých problémů matematické fyziky. Později se začal zabývat též numerickými metodami, zejména interpolací.

POZNÁMKA Definujeme-li na prostorech $W^{k,p}(\Omega)$ normu předpisem

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \equiv \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{1.1}$$

pak je $(W^{k,p}(\Omega), \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ Banachův. Dále si všimněme, že zřejmě $W^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Mezi prostory $W^{k,p}(\Omega)$ a $L^p(\Omega)$ panují za jistých předpokladů podstatně silnější vztahy. K těm se dostaneme, až budeme hovořit o tzv. *vnoření prostorů*.

VĚTA 1.2 (Poincarého nerovnost) *Nechť Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^N$, $1 \le p < \infty$. Potom existuje konstanta $C(\Omega, p, N)$ tak, že*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C(\Omega, p, N)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

POZNÁMKA Jules Henri Poincaré (29. dubna 1854, Nancy – 17. července 1912, Paříž) byl vynikající francouzský matematik. Poincaré je někdy též nazýván posledním univerzalistou, neboť exceloval ve všech matematických disciplínách. Nejvíce známá je nejspíše Poincarého domněnka, která do nedávna patřila mezi tzv. Problémy tisíciletí. Teprve v roce 2002 ji dokázal ruský matematický podivín Grigorij Perelman.

1.4 Lineární funkcionál, dualita

DEFINICE 1.7 (Lineární funkcionál) Nechť X je lineární prostor. Zobrazení $F: X \to \mathbb{R}$ nazýváme *lineárním funkcionálem*, jestliže jsou splněny tyto podmínky:

i) $F(u+v) = F(u) + F(v) \quad \forall u, v \in X$;

ii) $F(\lambda u) = \lambda F(u) \quad \forall u \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

DEFINICE 1.8 (Spojitý lineární funkcionál) Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je lineární normovaný prostor. Lineární funkcionál F je spojitý na X, jestliže pro každou posloupnost $(u_n) \subset X:\ u_n \to u$ v X platí $F(u_n) \to F(u)$ v $\mathbb{R}$.

DEFINICE 1.9 (Omezený lineární funkcionál) Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je lineární normovaný prostor. Lineární funkcionál F definovaný na X je omezený, jestliže existuje $K > 0$ tak, že $|F(u)| \le K\|u\|_X$ pro všechna $u \in X$.

POZNÁMKA Pro lineární funkcionály platí, že spojitost a omezenost jsou ekvivalentní vlastnosti.

DEFINICE 1.10 (Duální prostor) Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je lineární normovaný prostor. Lineární normovaný prostor všech spojitých lineárních funkcionálů F na X nazveme *duálním prostorem* a označíme $(X^*, \|\cdot\|_*)$. Norma funkcionálu $F \in X^*$ je definovaná jako

$$\|F\|_* \equiv \sup_{u\in X:\ \|u\|\le 1} |F(u)|.$$

POZNÁMKA Někdy budeme značit hodnotu funkcionálu $f \in X^*$ v prvku $u \in X$ jako $\langle f, u\rangle$.

DEFINICE 1.11 (Druhý duál) Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ je lineární normovaný a $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ je jeho duální prostor. Potom prostor duální k X^* označme X^{**} a nazvěme *druhým duálem* prostoru X.

Lze ukázat, že *vždy* existuje isomorfismus $J : X \to Y \subset X^{**}$ určený vztahem

$$(Ju)(F) = F(u) \quad \forall u \in X \; \forall F \in X^*.$$

Tento isomorfismus se nazývá *kanonické zobrazení.*

DEFINICE 1.12 (Reflexivita prostorů) Řekneme, že normovaný lineární prostor $(X, \|\cdot\|_X)$ je *reflexivní*, jestliže kanonické zobrazení J z definice 1.11 je bijekce.

POZNÁMKA Neboli reflexivita prostoru X je určena tím, zda kanonické zobrazení J zobrazuje prostor X na celý prostor X^{**}. Za splnění této podmínky platí tedy $X = X^{**}$ až na isomorfismus.

DEFINICE 1.13 (Slabá konvergence) Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je lineární normovaný prostor. Řekneme, že posloupnost $(u_n) \subset X$ *slabě konverguje* k prvku $u \in X$, jestliže pro každý spojitý lineární funkcionál $F \in X^*$ platí $F(u_n) \to F(u)$.

POZNÁMKA Slabou konvergenci posloupnosti (u_n) k prvku u v X značíme takto: $u_n \rightharpoonup u$, resp. $u_n \xrightarrow{w} u$ a čtenář se snadno přesvědčí, že pokud (u_n) konverguje silně, tj. $\|u_n - u\|_X \to 0$, potom $u_n \rightharpoonup u$.

1.5 Hilbertovy prostory

DEFINICE 1.14 (Hilbertův prostor) Unitární prostor nazveme *Hilbertovým prostorem*, jestliže je úplný vzhledem k normě indukované skalárním součinem:

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}.$$

POZNÁMKA David Hilbert (23. ledna 1862 Wehlau (dnes Znamensk), Východní Prusko – 14. února 1943 Göttingen, Německo) byl německý matematik. Patřil mezi největší matematiky 20. století. Jeho práce měla obrovský rozsah a dopad na moderní matematiku a fyziku. Podílel se na založení funkcionální analýzy a jeho práce vedla mimo jiné též ke konceptu nekonečněrozměrných euklidovských prostorů.

POZNÁMKA Prostor $L^2(\Omega)$ je Hilbertův se skalárním součinem

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv \; \mathrm{d}\mu. \tag{1.2}$$

Prostor $W^{k,2}(\Omega)$ je Hilbertův se skalárním součinem

$$(u,v)_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \; \mathrm{d}\mu. \tag{1.3}$$

VĚTA 1.3 (Rieszova věta o reprezentaci) *Pro každý spojitý lineární funkcionál $f : H \to \mathbb{R}$ na Hilbertově prostoru H existuje právě jeden prvek $v \in H$ tak, že pro všechny prvky $u \in H$ je*

$$\langle f, u\rangle = (u, v).$$

Navíc platí $\|f\|_* = \|v\|$.

POZNÁMKA Čili vidíme, že každý spojitý lineární funkcionál v libovolném prvku $u \in H$ lze vyjádřit prostřednictvím skalárního součinu u s nějakým prvkem z H. Navíc toto vzájemně jednoznačné přiřazení mezi funkcionály z H^* a prvky prostoru H má za důsledek, že lze H a jeho duál H^* ztotožnit ve smyslu isomorfismu.

POZNÁMKA Frigyes Riesz (22. ledna 1880, Győr, Rakousko-Uhersko – 28. února 1956, Budapešť) byl maďarským matematikem. Přispěl fundamentálními výsledky k funkcionální analýze. Jeho jméno je však spjato se spoustou dalších matematickým disciplín - teorií funkcí reálné proměnné, teorií potenciálu či ergodické teorii.

VĚTA 1.4 (Eberlein-Šmuljanova charakteristika reflexivních prostorů) *Banachův prostor X je reflexivní tehdy a jen tehdy, když lze z každé omezené posloupnosti prvků X vybrat slabě konvergentní podposloupnost.*

1.6 Operátory na lineárních prostorech

Definice 1.15 (Operátor, lineární, spojitý, omezený) Operátorem rozumíme zobrazení $T : X \to Y$. Pokud prostory X, Y jsou lineární, lze na nich definovat *lineární operátor*. Ten splňuje obdobně jako lineární funkcionál vlastnost

$$T(\lambda u + \mu v) = \lambda Tu + \mu Tv \quad \forall u, v \in X,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Dále říkáme, že operátor $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ je *spojitý*, jestliže pro každou posloupnost $(u_n) \subset X$ platí

$$u_n \to u \text{ v } X \implies Tu_n \to Tu \text{ v } Y.$$

Nakonec operátor $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ je *omezený*, jestliže existuje kladná konstanta K tak, že pro všechna $u \in X$ platí

$$\|Tu\|_Y \leq K\|u\|_X.$$

Poznámka Pro lineární operátory platí, že spojitost a omezenost jsou ekvivalentní vlastnosti.

Definice 1.16 (Uzavřený operátor) Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $D(T)$ je lineární podprostor X. Operátor $T : D(T) \subset X \to Y$ nazveme *uzavřeným*, jestliže jeho graf $\{(x, Tx) \in X \times Y \mid x \in D(T)\}$ je uzavřený podprostor prostoru $X \times Y$.

Definice 1.17 (Kompaktní operátor I) Operátor T je kompaktní, jestliže pro každou posloupnost $(u_n) \subset X$ platí

$$u_n \rightharpoonup u \text{ v } X \implies Tu_n \to Tu \text{ v } Y.$$

Poznámka Takto lze definovat kompaktní operátor pouze na metrických prostorech. Hovoříme pak o tzv. *sekvenciální kompaktnosti*. Kompaktní operátory lze však definovat i na prostorech bez metriky. Zde je však nutné k pojetí kompaktnosti operátoru přistupovat odlišně. Viz definici 1.18.

Definice 1.18 (Kompaktní operátor II) Operátor T je kompaktní, jestliže každou omezenou množinu $M \subset X$ zobrazí na relativně kompaktní v Y (tj. $\overline{T(M)}$ v Y je kompaktní).

Definice 1.19 (Totálně spojitý operátor) Totálně spojitým operátorem rozumíme operátor spojitý a kompaktní.

Definice 1.20 (Vlastní číslo a vlastní prvek operátoru, spektrum operátoru) Číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ nazveme *vlastním číslem* lineárního operátoru $T : X \to X$, jestliže existuje nenulový prvek $u \in X$ tak, že

$$Tu - \lambda u = o.$$

Takový prvek u pak nazýváme *vlastním prvkem* operátoru T. Množinu všech hodnot $\lambda \in \mathbb{R}$, pro které neexistuje spojitý inverzní operátor $(T - \lambda I)^{-1}$ definovaný na husté podmnožině X, nazýváme *spektrem* operátoru T a značíme obvykle $\sigma(T)$. Množinu $\rho(T) = \mathbb{R} \backslash \sigma(T)$ pak nazýváme *resolventní množinou* operátoru T.

1.7 Spojité a kompaktní vnoření prostorů

Definice 1.21 (Spojité vnoření) Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou lineární normované prostory. Říkáme, že prostor X je *spojitě vnořen* do prostoru Y, jestliže platí

i) $X \subset Y$,

ii) existuje konstanta $K > 0$ tak, že pro všechna $u \in X$: $\|u\|_Y \leq K\|u\|_X$.

Skutečnost, že prostor X je spojitě vnořen do Y, značíme jako $X \hookrightarrow Y$.

Definice 1.22 (Kompaktní vnoření) Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou lineární normované prostory. Říkáme, že prostor X je *kompaktně vnořen* do prostoru Y, jestliže platí

i) $X \hookrightarrow Y$,

ii) $\forall (u_n) \subset X: \ u_n \rightharpoonup u$ v $X \implies u_n \to u$ v Y.

Skutečnost, že prostor X je kompaktně vnořen do Y, značíme jako $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$.

Poznámka V této souvislosti zmiňme zásadní tvrzení o vnoření Sobolevových prostorů - tzv. *Sobolevovy věty o vnoření* (viz [2] nebo [5]).

1.8 Lerayův-Schauderův topologický stupeň zobrazení

Stupeň zobrazení je pojem, který spadá pod topologické metody studia (nejen diferenciálních) rovnic. Uvažujme rovnici

$$F(x) = 0, \tag{1.4}$$

kde $F: \Omega \subset X \to X$, X je Banachův prostor konečné dimenze a Ω je otevřená omezená množina v X. Za určitých předpokladů lze pro takové zobrazení F a množinu Ω definovat celé číslo, které nazveme *Brouwerův stupeň* (viz [4], str. 96). Význam tohoto čísla v souvislosti s rovnicí (1.4) tkví v tom, že pokud je nenulové, pak má rovnice (1.4) alespoň jedno řešení v Ω. Pro více o Brouwerově stupni a jeho vlastnostech viz [4], [5].

Pojem Lerayova-Schauderova stupně je snahou o zobecnění pojmu Brouwerova stupně pro zobrazení mezi Banachovými prostory nekonečné dimenze. Toto zobecnění však není z principu možné provést pro všechna spojitá zobrazení z X do X, jako tomu bylo u stupně Brouwerova. Lerayův-Schauderův stupeň je možné definovat pouze pro zobrazení speciálního typu - tzv. *kompaktní perturbace identity.* Takto nazýváme zobrazení ve tvaru

$$I - K,$$

kde K je kompaktní. O Lerayově-Schauderově stupni takových zobrazení a jeho základních vlastnostech hovoří následující fundamentální věta.

Věta 1.5 (Lerayův-Schauderův topologický stupeň zobrazení) *Nechť X je Banachův prostor, $R > 0$ a $B(R) = \{u \in X \mid \|u\| < R\}$. Buď K totálně spojitý operátor definovaný na $\overline{B(R)}$ s hodnotami v X a takový, že $Ku \neq u$ pro každé $u \in \partial B(R)$ a I je identický operátor. Pak existuje celé číslo* $\deg[I - K, B(R), o]$ *tak, že platí:*

i) $\deg[I, B(R), o] = 1$;

ii) Je-li $\deg[I - K, B(R), o] \neq 0$, *pak existuje $u_0 \in B(R)$ takové, že $Ku_0 = u_0$.*

iii) (Homotopická invariance). Nechť G je totálně spojité zobrazení množiny $\overline{B(R)}$ s hodnotami v X takové, že pro všechna $t \in [0,1]$ a pro všechna $u \in \partial B(R)$ je $u - Ku - tGu \neq o$. Pak

$$\deg[I - K - G, B(R), o] = \deg[I - K, B(R), o].$$

iv) Je-li K navíc lichý, tzn. platí-li $Ku = -K(-u)$ pro všechna $u \in \overline{B(R)}$, pak $\deg[I - K, B(R), o]$ *je liché (a tedy nenulové) číslo.*

Poznámka Na Banachových prostorech konečné dimenze Brouwerův a Lerayův-Schauderův stupeň zobrazení $F = I - K$ jsou totožné.

Poznámka Jean Leray (7. listopadu 1906, Chantenay-sur-Loire – 10. listopadu 1998, La Baule) byl francouzský matematik. Hlavními oblastmi Lerayových zájmů byla algebraická topologie a parciální diferenciální rovnice.

Poznámka Juliusz Paweł Schauder (21. září 1899, Lemberg, Rakousko-Uhersko – září 1943, Lemberg) byl polský matematik židovského původu. Byl členem velké skupiny polských matematiků Lvovské školy. Největší část jeho práce se týkala funkcionální analýzy. Kromě té se věnoval též teorii parciálních diferenciálních rovnic a matematické fyzice.

1.9 Další pilíře funkcionální analýzy

Zde je nutné zmínit větu O omezené inverzi (Bounded inverse theorem), která je ekvivalentní s dalšími dvěma velmi významnými větami funkcionální analýzy - větou O otevřeném zobrazení (Open mapping theorem) a větou O uzavřeném grafu (Closed graph theorem). Její znění je následující.

VĚTA 1.6 (O omezené inverzi) *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Buď $T : X \to Y$ omezený lineární operátor. Je-li T bijekce, potom existuje omezený inverzní operátor T^{-1}.*

Dalším velmi fundamentálním principem ve funkcionální analýze je tzv. *Banachův princip kontrakce.*

DEFINICE 1.23 (Kontrakce) Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Říkáme, že operátor $T : X \to X$ je kontrakce, jestliže existuje $\alpha \in [0, 1)$ tak, že pro všechna $u_1, u_2 \in X$ platí

$$\rho(Tu_1, Tu_2) \leq \alpha\rho(u_1, u_2).$$

DEFINICE 1.24 (Pevný bod) Nechť $T : X \to X$. Bod $u \in X$ nazveme *pevným bodem* operátoru T, jestliže platí

$$Tu = u.$$

VĚTA 1.7 (Banachův princip kontrakce) *Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a $T : X \to X$ je kontrakce. Potom existuje právě jeden pevný bod $u \in X$ operátoru T.*

POZNÁMKA U tohoto tvrzení je možné se setkat s řadou jiných názvů, např. *Banachova věta o pevném bodě* nebo *Banachova věta o kontrakci.*

„Matematik je slepý člověk v temné místnosti hledající černou kočku, která tam není.“

Charles Darwin

„Matematika je jediný způsob, jak se zbláznit.“

Albert Einstein

2

Skákající nelinearita a Fučíkovo spektrum

Problematika této práce se opírá o dva pojmy, jejichž historie se datuje desítky let zpět. My se v této kapitole přiblížíme k dobám jejich vzniku a dozvíme se o okolnostech, které jej provázely.

POZNÁMKA Zaveďme úmluvu, že ve zbytku textu budeme normu na příslušném prostoru zkráceně zapisovat např. $\|\cdot\|_{L^p}$ místo $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ apod., bude-li zřejmé, jakou množinu Ω máme na mysli.

2.1 Skákající nelinearita

Ve 20. století se po rozvoji funkcionální analýzy dostal do popředí výzkum problémů metodami lineární a nelineární analýzy. Jedním z kroků mimo oblast lineárních úloh je typ problémů, který je studován v této práci. Studium problémů tohoto typu bylo započato již v 70. letech 20. století. Později, v 80. letech 20. století, byly takové problémy zkoumány též v souvislosti s visutými mosty, jejichž složité chování je v diskutovaném typu problémů dobře vystiženo.

V roce 1974 publikoval Svatopluk Fučík (1944 - 1979) článek Boundary value problems with jumping nonlinearities [1], ve kterém uvažoval následující Dirichletův problém

$$u''(\tau) + \psi(u(\tau)) = p(\tau) \quad \text{na } (0,\pi), \tag{2.1}$$
$$u(0) = u(\pi) = 0,$$

kde ψ je spojitá reálná funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Právě zde zavedl Fučík pojem tzv. *skákající nelinearity.* Platí-li

$$\lim_{\xi\to+\infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi} \neq \lim_{\xi\to-\infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi},$$

řekneme, že ψ je skákající nelinearita. Název tohoto pojmu je motivován právě chováním funkce ψ v $\pm\infty$. Je-li ψ skákající nelinearitou, pak může *přeskočit* některé vlastní číslo λ_n lineárního problému $u''(\tau) + \lambda u(\tau) = 0$ na $(0,\pi)$ a $u(0) = u(\pi) = 0$, tj.

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi} < \lambda_n < \lim_{\xi\to\mp\infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi}$$

pro nějaké n přirozené. Avšak i v případě, kdy platí

$$\lambda_n < \lim_{\xi\to\pm\infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi} \neq \lim_{\xi\to\mp\infty} \frac{\psi(\xi)}{\xi} < \lambda_{n+1},$$

tj. i když ψ nepřeskočí některé z vlastních čísel, se ψ stále nazývá skákající.

Existence řešení problému (2.1) byla matematiky studována samozřejmě již dříve. Byla tak získaná celá řada výsledků za různých předpokladů na nelinearitu ψ, popř. pravou stranu p. Uveďme hlavní výsledky, které byly známé již před vznikem článku [1].

i) Nechť $\lim_{\xi\to+\infty}\xi^{-1}\psi(\xi)=\lim_{\xi\to-\infty}\xi^{-1}\psi(\xi)\neq\lambda_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Potom existuje řešení problému (2.1) pro každou pravou stranu p.

ii) Nechť $\lim_{\xi\to+\infty}\xi^{-1}\psi(\xi)=\lim_{\xi\to-\infty}\xi^{-1}\psi(\xi)=\lambda_n$ pro nějaké $n\in\mathbb{N}$. Potom jsou podány nutné a postačující podmínky pro p tak, že (2.1) má řešení.

iii) Nechť $\lambda_n<\lim_{\xi\to+\infty}\xi^{-1}\psi(\xi)<\lambda_{n+1}$ a $\lambda_n<\lim_{\xi\to-\infty}\xi^{-1}\psi(\xi)<\lambda_{n+1}$ pro nějaké $n\in\mathbb{N}$. Potom existuje řešení problému (2.1) pro každou pravou stranu p.

iv) Za několika dalších předpokladů byla též prostudována řešitelnost (2.1) pro ψ skákající přes nejmenší vlastní číslo příslušné lineární úlohy.

V článku [1] byla pak ukázána existence řešení (2.1) pro každou pravou stranu p v podstatně obecnějším případě. Fučík uvažoval problém (2.1) s nelinearitou ψ ve tvaru

$$\psi(u(\tau))=\mu u^+(\tau)-\nu u^-(\tau)+g(u(\tau)),\tag{2.2}$$

kde $u^+=\max\{u,0\}$, $u^-=\max\{-u,0\}$ a existuje $c_1,c_2\geq 0$ takové, že $|g(\xi)|\leq c_1+c_2|\xi|^\gamma$ pro nějaké $\gamma\in[0,1)$. Čtenář snadno ověří, že platí-li $\mu\neq\nu$, potom ψ tohoto tvaru je skutečně skákající nelinearitou. Při studiu řešitelnosti problému (2.1) s ψ tvaru (2.2) sehrála zásadní roli jistá množina bodů (μ,ν), kterou dnes nazýváme Fučíkovým spektrem.

2.2 Fučíkovo spektrum

V článku [1] Fučík uvažuje (2.1) pro ψ tvaru (2.2) a $p\in L^1(0,\pi)$:

$$u''(\tau)+\mu u^+(\tau)-\nu u^-(\tau)+g(u(\tau))=p(\tau),\tag{2.3}$$

$$u(0)=u(\pi)=0,$$

a definuje slabé řešení toho problému jako funkci $u\in W_0^{1,2}(0,\pi)$ takovou, že integrální identita

$$-\int_0^\pi[u'v'+\mu u^+v-\nu u^-v+g(u)v]=\int_0^\pi pv\tag{2.4}$$

platí pro každé $v\in W_0^{1,2}(0,\pi)$. Zde je definován operátor $T_{\mu,\nu}:W_0^{1,2}(0,\pi)\to W_0^{1,2}(0,\pi)$ tak, že

$$\langle T_{\mu,\nu}u,v\rangle=\mu\int_0^\pi u^+v-\nu\int_0^\pi u^-v$$

pro všechna $v\in W_0^{1,2}(0,\pi)$. Fučík pak zkoumá existenci slabého řešení (2.3) užitím Lerayova-Schauderova stupně zobrazení (viz větu 1.5). V rámci tohoto přístupu je formulováno lemma o množině $(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2$ takových, že existuje $u\in\partial B(R)\subset W_0^{1,2}(0,\pi):\ u-T_{\mu,\nu}u=o$ pro nějaké R kladné.

Lemma 2.1 (Fučík, [1], Lemma 2.8) *Okrajová úloha*

$$u''(\tau)+\mu u^+(\tau)-\nu u^-(\tau)=0,\tag{2.5}$$

$$u(0)=u(\pi)=0.$$

má netriviální slabé řešení tehdy a jen tehdy, když jedna z následujících podmínek je splněna:

i) $\nu = 1$, μ *je libovolné;*

ii) $\mu = 1$, ν *je libovolné;*

iii) $\mu > 1$, $\nu > 1$, $\omega_1(\mu,\nu) = \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{\nu}}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} \in \mathbb{N}$*;*

iv) $\mu > 1$, $\nu > 1$, $\omega_2(\mu,\nu) = \frac{\sqrt{\nu}(\sqrt{\mu}-1)}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} \in \mathbb{N}$*;*

v) $\mu > 1$, $\nu > 1$, $\omega_3(\mu,\nu) = \frac{\sqrt{\mu}(\sqrt{\nu}-1)}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} \in \mathbb{N}$.

Důkaz lze nalézt v [1]. ■

Množinu všech bodů $(\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2$ splňující některou z podmínek v předchozím lemmatu označme A_{-1}. Zřejmě v těchto bodech Lerayův-Schauderův stupeň

$$\deg[u - T_{\mu,\nu}u, B(1), o] \tag{2.6}$$

není definován. Tuto množinu je tedy třeba ve Fučíkově topologickém přístupu vyloučit. Je-li však (μ,ν) z množiny $A_0 \equiv \mathbb{R}^2 \backslash A_{-1}$, pak je již stupeň (2.6) definován. Množinu A_0 dále rozdělujeme na dva typy regionů podle toho, zda (2.6) je nulový či nenulový. Speciálně značíme $A_1 \equiv \{(\mu,\nu) \in \mathbb{R}^2 \mid \deg[u - T_{\mu,\nu}u, B(1), o] \neq 0\}$. Na A_1 Fučík ukázal, že (2.3) má řešení pro libovolné $p \in L^1(0,\pi)$. Otázku řešitelnosti (2.3) pro $(\mu,\nu) \in A_0 \backslash A_1$ zodpověděl teprve E. N. Dancer. Ten ukázal, že pro $(\mu,\nu) \in A_0 \backslash A_1$ existuje $p \in L^1(0,\pi)$ tak, že (2.3) nemá slabé řešení. Dále ukázal, že pro $(\mu,\nu) \in A_{-1}$ též existuje $p \in L^1(0,\pi)$ tak, že (2.3) nemá slabé řešení.

Množina A_{-1} zde spjatá s úlohou (2.5) se později dočkala svého zobecnění pro lineární operátor $L : D(L) \subset X \to Y$, kde X, Y jsou lineární prostory:

$$\Sigma(L) \equiv \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid Lu = \alpha u^+ - \beta u^- \text{ má netriviální řešení.}\}.$$

Množina $\Sigma(L)$ je dnes známá pod názvem *Fučíkovo spektrum*. Motivace pro její název je zřejmá. Prvky této množiny lze totiž chápat jako zobecnění pojmu vlastního čísla, neboť pro $\alpha = \beta = \lambda$ problém $Lu = \alpha u^+ - \beta u^-$ přechází v problém $Lu = \lambda u$ a množina všech vlastních čísel λ operátoru L tvoří jeho *bodové spektrum*.

Poznámka Svatopluk Fučík (21. října 1944 v Praze - 18. května 1979 v Praze) byl významný český matematik. Fučík studoval matematiku na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze. Zde též později vědecky působil. Mezi oblasti jeho odborných zájmů patřila především nelineární funkcionální analýza.

„Člověk, jehož mysl sešla na scestí, měl by studovat matematiku.“

Francis Bacon

3
Fučíkovo spektrum dvou diferenciálních operátorů

V této kapitole prostudujeme strukturu Fučíkova spektra dvou lineárních diferenciálních operátorů a poukážeme na jistou souvislost mezi Fučíkovými spektry těchto operátorů.

Kapitola je rozdělena do dvou částí. V první části bude předmětem studia Fučíkovo spektrum lineárního diferenciálního operátoru, který označíme L_δ^{D} a jehož definiční obor je určen homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami. V předpisu tohoto operátoru vystupuje reálný parametr δ. V případě, kdy $\delta = 0$, je L_δ^{D} operátorem vystupujícím ve Fučíkem zkoumaném problému (2.1).

V části druhé bude studováno Fučíkovo spektrum lineárního diferenciálního operátoru, který má definiční obor určen nelokální integrální podmínkou. Ten označme L_δ^{I}. Tento operátor je zobecněním operátoru, pro který byl v [8] nalezen analytický popis Fučíkova spektra a jeho vazba na Fučíkovo spektrum L_δ^{D}. Cílem v této části bude mimo jiné rozšířit popis Fučíkova spektra pro onen obecněji definovaný operátor L_δ^{I}.

3.1 Dirichletův problém

Nechť $\delta \in \mathbb{R}$. Definujme lineární diferenciální operátor L_δ^{D}:

$$L_\delta^{\mathrm{D}} :\ D(L_\delta^{\mathrm{D}}) \subset C^2[0,\pi] \to C[0,\pi], \qquad L_\delta^{\mathrm{D}} :\ u \mapsto -u'' - \delta u',$$

kde $D(L_\delta^{\mathrm{D}}) = \{u \in C^2[0,\pi] \mid u(0) = u(\pi) = 0\}$. Uvažujme nyní problém

$$-L_\delta^{\mathrm{D}} u + \alpha u^+ - \beta u^- + \psi(u) = p. \tag{3.1}$$

Tento problém lze formulovat následovně. Nechť $w(\tau) = f(\tau)u(\tau)$, kde $f(\tau) = \exp(\delta\tau/2)$. Potom (3.1) je ekvivalentní s rovnicí

$$-L_0^{\mathrm{D}} w + (\alpha - \delta/2)w^+ - (\beta - \delta/2)w^- + f\psi(w/f) = fp. \tag{3.2}$$

Pozorování Vlastní čísla a vlastní prvky operátor L_δ^{D} tvoří spočetný systém a jsou tohoto tvaru:

$$\lambda_n = n^2 + (\delta/2)^2, \quad v_n(\tau) = \exp(-\delta\tau/2)\sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Než přejdeme k lemmatu o Fučíkově spektru operátoru L_δ^{D}, definujme zobrazení ω předpisem

$$\omega : (\lambda, \delta) \mapsto \sqrt{\lambda - (\delta/2)^2}. \tag{3.3}$$

LEMMA 3.1 *Dvojice* (α, β) *je bodem Fučíkova spektra* $\Sigma(L_\delta^{\mathrm{D}})$ *tehdy a jen tehdy, je-li splněna některá z následujících podmínek:*

i) $\omega(\alpha, \delta) = 1$*;*

ii) $\omega(\beta, \delta) = 1$*;*

iii) $\omega(\alpha, \delta) > 1$, $\omega(\beta, \delta) > 1$, $\frac{\omega(\alpha,\delta)\omega(\beta,\delta)}{\omega(\alpha,\delta)+\omega(\beta,\delta)} \in \mathbb{N}$*;*

iv) $\omega(\alpha, \delta) > 1$, $\omega(\beta, \delta) > 1$, $\frac{\omega(\beta,\delta)(\omega(\alpha,\delta)-1)}{\omega(\alpha,\delta)+\omega(\beta,\delta)} \in \mathbb{N}$*;*

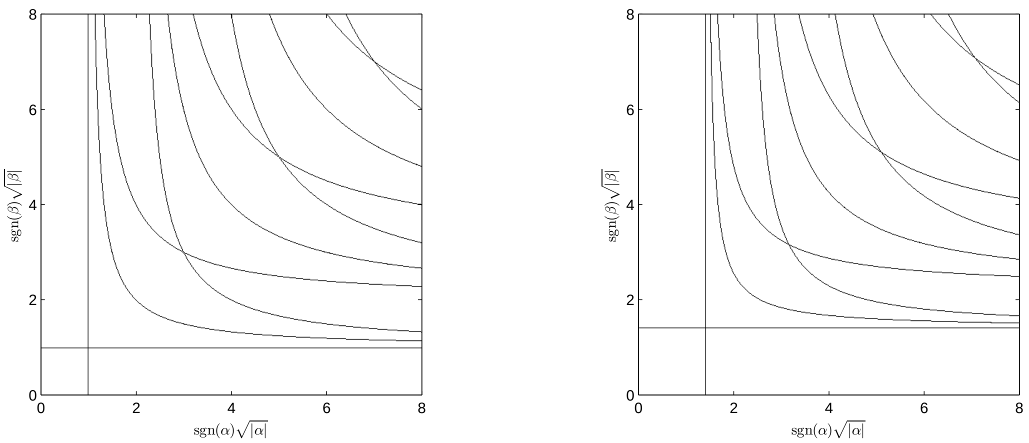
v) $\omega(\alpha, \delta) > 1$, $\omega(\beta, \delta) > 1$, $\frac{\omega(\alpha,\delta)(\omega(\beta,\delta)-1)}{\omega(\alpha,\delta)+\omega(\beta,\delta)} \in \mathbb{N}$.

DŮKAZ. Tvrzení je jednoduchým důsledek ekvivalence problémů (3.1) a (3.2) a lemmatu 2.1. ■

Struktura Fučíkova spektra L_δ^{D} tedy pro $\delta \neq 0$ zůstává stejná jako v případě $\delta = 0$ (viz lemma 2.1). Dochází pouze k posunutí

$$\Sigma(L_0^{\mathrm{D}}) \ni (\alpha, \beta) \mapsto \left(\alpha + (\delta/2)^2, \beta + (\delta/2)^2\right) \in \Sigma(L_\delta^{\mathrm{D}}).$$

Toto posunutí a samotná struktura Fučíkova spektra $\Sigma(L_\delta^{\mathrm{D}})$ jsou znázorněny na následující dvojici obrázků.



(a) $\Sigma(L_0^{\mathrm{D}})$ (b) $\Sigma(L_2^{\mathrm{D}})$

Obrázek 3.1: Fučíkovo spektrum operátorů L_δ^{D} pro $\delta = 0$ a $\delta = 2$.

3.2 Nelokální problém s integrální podmínkou

Nelokální okrajové úlohy jsou až na několik ojedinělých článků systematicky studovány teprve v poslední době. Je to aktuální a v současnosti velice rychle se rozvíjející oblast teorie diferenciálních rovnic. Problémy tohoto typu vyvstávají v okamžiku, kdy jsou hodnoty řešení na hranici uvažované oblasti vázány k hodnotám řešení na vnitřku oblasti. Takové problémy se objevují ve fyzice, chemii či biologii.

Nechť $\delta \in \mathbb{R}$. Definujme lineární diferenciální operátor L_δ^{I}

$$L_\delta^{\mathrm{I}}: D(L_\delta^{\mathrm{I}}) \subset C^2[0, \pi] \to C[0, \pi], \qquad L_\delta^{\mathrm{I}}: u \mapsto -u'' - \delta u',$$

kde $D(L_\delta^{\mathrm{I}}) = \{u \in C^2[0, \pi] \mid u(0) = 0, \int_0^\pi u(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 0\}$. Cílem bude prozkoumat především vliv parametru δ na existenci vlastních čísel a na strukturu Fučíkova spektra.

POZOROVÁNÍ Je-li $\delta = 0$, potom pro libovolné vlastní číslo λ operátoru L_δ^{I} platí $\lambda > 0$. Tyto pak s vlastními funkcemi nabývají tvaru

$$\lambda_k = 4k^2, \quad v_k(\tau) = \sin(2k\tau), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Je-li $\delta < 0$, potom pro libovolné vlastní číslo λ operátoru L_δ^{I} platí $\lambda > 0$. Tato vlastní čísla jsou pak řešení rovnice

$$\omega(\lambda,\delta)\exp(\delta\pi/2) - \frac{\delta}{2}\sin(\pi\omega(\lambda,\delta)) - \omega(\lambda,\delta)\cos(\pi\omega(\lambda,\delta)) = 0,$$

kde ω je zobrazení (3.3). Je-li $\delta > 0$, potom neexistuje žádné vlastní číslo operátoru L_δ^{I}.

Fučíkovo spektrum

Operátor L_0^{I} byl již dříve předmětem zkoumání v [8]. Hlavním výsledkem, který byl získán, je úplný popis jeho Fučíkova spektra. Ukazuje se, že struktura Fučíkova spektra takto definovaného operátoru se výrazně liší od struktury Fučíkova spektra L_0^{D} a dalších dobře známých případů.

Než přejdeme k analytickému popisu Fučíkova spektra L_0^{I}, definujme jeho jisté podmnožiny následujícím způsobem:

$$F_n^+ \equiv \{(\alpha,\beta) \in \Sigma(L_0^{\mathrm{I}}) \mid u'(0) > 0, u \text{ má právě } n \text{ nulových bodů na } (0,\pi)\},$$

$$F_n^- \equiv \{(\alpha,\beta) \in \Sigma(L_0^{\mathrm{I}}) \mid u'(0) < 0, u \text{ má právě } n \text{ nulových bodů na } (0,\pi)\},$$

kde u je řešení rovnice $L_\delta^{\mathrm{I}} u = \alpha u^+ - \beta u^-$. To se někdy nazývá též *Fučíkova vlastní funkce* příslušná bodu $(\alpha,\beta) \in \Sigma(L_0^{\mathrm{I}})$. Množiny $F_n^\pm$ budeme nazývat *větvemi* Fučíkova spektra.

LEMMA 3.2 (Sergejeva, [8]) *Uvažujme α,β kladné. Fučíkovo spektrum $\Sigma(L_0^{\mathrm{I}})$ je pak určeno sjednocením spočetného systému větví $F_n^\pm$ následujícího tvaru:*

$$F_{2n-1}^+ = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{2n\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} - \frac{(2n-1)\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} - \frac{\sqrt{\alpha}\cos(\sqrt{\beta}\pi - \frac{\sqrt{\beta}\pi n}{\sqrt{\alpha}} - \pi n)}{\sqrt{\beta}} = 0,\right.$$
$$\left. n\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + (n-1)\frac{\pi}{\sqrt{\beta}} \le \pi,\ n\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + n\frac{\pi}{\sqrt{\beta}} > \pi \right\},$$

$$F_{2n}^+ = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{(2n+1)\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} - \frac{2n\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} - \frac{\sqrt{\beta}\cos(\sqrt{\alpha}\pi - \frac{\sqrt{\alpha}\pi n}{\sqrt{\beta}} - \pi n)}{\sqrt{\alpha}} = 0,\right.$$
$$\left. n\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + n\frac{\pi}{\sqrt{\beta}} \le \pi,\ (n+1)\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + n\frac{\pi}{\sqrt{\beta}} > \pi \right\},$$

$$F_n^- = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : (\beta,\alpha) \in F_n^+\},$$

kde $n = 1, 2, \ldots$

DŮKAZ LZE NALÉZT V [8]. ■

Shrňme několik poznatků o některých vlastnostech Fučíkových větví L_0^{I}:

POZOROVÁNÍ (REMARK 1, [8]; THEOREM 4.2, [9])

i) Každá větev má konečnou délku oblouku.

ii) Sjednocení větví F_n^+, resp. F_n^-, tvoří spojité křivky.

iii) Body napojení větví F_{2n}^+, F_{2n+1}^+ jsou

$$\Big((\sqrt{n(n+1)}+n)\pi, (\sqrt{n(n+1)}+n+1)\pi\Big), \qquad n = 1, 2, ...$$

Body napojení větví F_{2n}^-, F_{2n+1}^- jsou pak zřejmé z definice F_n^-.

Pozorování Je patrná vazba $\Sigma(L_0^{\mathrm{I}})$ na $\Sigma(L_0^{\mathrm{D}})$. Oblasti, na kterých jsou větve $F_k^{\pm}$ Fučíkova spektra $\Sigma(L_0^{\mathrm{I}})$ definovány, jsou určeny Fučíkovými větvemi operátoru L_0^{D}. Konkrétně oblast

$$\left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; n\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + (n-1)\frac{\pi}{\sqrt{\beta}} < \pi,\ n\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} + n\frac{\pi}{\sqrt{\beta}} > \pi\right\}$$

je oblastí tvořenou všemi body $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, které se nacházejí mezi větvemi F_{2n-2}^+, F_{2n-1}^+ Fučíkova spektra $\Sigma(L_0^{\mathrm{D}})$. Těmito větvemi jsou pak určeny krajní body křivky, která je reprezentována větví F_{2n-1}^+ Fučíkova spektra $\Sigma(L_0^{\mathrm{I}})$ v $\alpha\beta$-rovině .

Již víme, že $\delta \leq 0$ je nutnou podmínkou existence netriviálního řešení problému $L_\delta^{\mathrm{I}} u = \lambda u$. Přirozeně vyvstává otázka, jak tomu bude v případě rovnice $L_\delta^{\mathrm{I}} u = \alpha u^+ - \beta u^-$. Dále lemma 3.2 nic neříká o Fučíkových větvích mimo oblast, kde α, β jsou kladné, jejich popis tedy rozšíříme i mimo tuto oblast. Teprve potom bude popis $\Sigma(L_\delta^{\mathrm{I}})$ kompletní.
Nyní označme

$$\omega(x) \equiv \sqrt{x - (\delta/2)^2},\ \tau_{2k-1} \equiv k\frac{\pi}{\omega(\alpha)} + (k-1)\frac{\pi}{\omega(\beta)},\ \tau_{2k} \equiv k\frac{\pi}{\omega(\alpha)} + k\frac{\pi}{\omega(\beta)},$$

pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a definujme následující množiny

$$\Omega_k^+ \equiv \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \tau_k \leq \pi < \tau_{k+1}\},\ \Omega_{-1}^+ \equiv \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi > \tau_1,\ \beta \leq 0\},$$

$$\Omega_l^- \equiv \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid (\beta,\alpha) \in \Omega_l^+\},\ l \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Lemma 3.3 *Nechť $M = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha,\beta > 0\}$. Množina $\Sigma(L_\delta^{\mathrm{I}}) \cap M$ je určena sjednocením větví $F_{2n}^{\pm}, F_{2n-1}^{\pm}$ přes $n \in \mathbb{N}$, kde*

$$F_{2n}^+ = \left\{(\alpha,\beta) \in \Omega_{2n}^+ \;\middle|\; -\frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2k-1}} + e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2k}}\right) + \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2k}} + e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2k+1}}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2n}} - e^{-\frac{\delta}{2}\pi}\left(\cos\left(\omega(\alpha)(\pi - \tau_{2n})\right) + \frac{\delta}{2\omega(\alpha)}\sin\left(\omega(\alpha)(\pi-\tau_{2n})\right)\right)}{\alpha} = 0\right\},$$

$$F_{2n-1}^+ = \left\{(\alpha,\beta) \in \Omega_{2n-1}^+ \;\middle|\; \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2k}} + e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2k+1}}\right) - \frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{n-1}\left(e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2k-1}} + e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2k}}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2n-1}} - e^{-\frac{\delta}{2}\pi}\left(\cos\left(\omega(\beta)(\pi - \tau_{2n-1})\right) + \frac{\delta}{2\omega(\beta)}\sin\left(\omega(\beta)(\pi-\tau_{2n-1})\right)\right)}{\beta} = 0\right\},$$

$$F_n^- = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid (\beta,\alpha) \in F_n^+\}.$$

DŮKAZ BUDE PROVEDEN POUZE PRO VĚTVE F^+_{2n-1}. Pokud uvážíme problém $L^{\mathrm{I}}_\delta u = \alpha u^+ - \beta u^-$ a předpokládáme, že $(\alpha, \beta) \in F^+_{2n-1}$, pak řešení problému má $2n-1$ nulových bodů na $(0, \pi)$. Označme postupně tyto nulové body: $\tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_{2n-1}$. Uvažováním rovnice $L^{\mathrm{I}}_\delta u = \alpha u^+ - \beta u^-$ na intervalech $(0, \tau_1),\ (\tau_1, \tau_2), ..., (\tau_{2n-1}, \pi)$ se úloha redukuje na lineární. Konkrétně na intervalech $(0, \tau_1)$ a $(\tau_{2k}, \tau_{2k+1}),\ k = 1, 2, ..., n-1$, řešíme rovnici

$$-u'' - \delta u' = \alpha u. \tag{3.4}$$

Obdobně na intervalech $(\tau_{2k-1}, \tau_{2k}),\ k = 1, 2, ..., n-1$, a (τ_{2n-1}, π) řešíme

$$-u'' - \delta u' = \beta u. \tag{3.5}$$

Na intervalu $(0, \tau_1)$ řeší rovnici (3.4) s podmínkou $u(0) = 0$ funkce $u_p(x) = Ae^{-\frac{\delta}{2}x} \sin\big(\omega(\alpha)x\big)$, $A > 0$. Jelikož $u_p(\tau_1) = 0$, pak jistě platí vztah $\tau_1 = \frac{\pi}{\omega(\alpha)}$.

Na (τ_1, τ_2) řeší (3.5) s podmínkou $u(\tau_1) = 0$ funkce $u_z(x) = Be^{-\frac{\delta}{2}x} \sin\big(\omega(\beta)(x - \tau_1)\big),\ B < 0$. Obdobně zjistíme, že z platnosti $u_z(\tau_2) = 0$ plyne vztah $\tau_2 = \frac{\pi}{\omega(\alpha)} + \frac{\pi}{\omega(\beta)}$. Tímto způsobem pro všechny nulové body u postupně dostáváme vztahy:

$$\tau_1 = \frac{\pi}{\omega(\alpha)},\ \tau_2 = \frac{\pi}{\omega(\alpha)} + \frac{\pi}{\omega(\beta)},$$
$$\vdots$$
$$\tau_{2k-1} = k\frac{\pi}{\omega(\alpha)} + (k-1)\frac{\pi}{\omega(\beta)},\ \tau_{2k} = k\frac{\pi}{\omega(\alpha)} + k\frac{\pi}{\omega(\beta)},$$
$$\vdots$$
$$\tau_{2n-1} = n\frac{\pi}{\omega(\alpha)} + (n-1)\frac{\pi}{\omega(\beta)}.$$

Pro řešení u rovnice $L^{\mathrm{I}}_\delta u = \alpha u^+ - \beta u^-$ platí

$$\int_0^{\tau_1} u(s)\ \mathrm{d}s + \int_{\tau_1}^{\tau_2} u(s)\ \mathrm{d}s + ... + \int_{\tau_{2n-1}}^{\pi} u(s)\ \mathrm{d}s = 0. \tag{3.6}$$

Označíme-li $\tau_0 \equiv 0$, lze se snadno přesvědčit, že pro $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $l \in \{1, ..., n-1\}$ platí:

$$\int_{\tau_{2k}}^{\tau_{2k+1}} u_p(s)\ \mathrm{d}s = A\omega(\alpha)\frac{e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2k}} + e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2k+1}}}{\alpha},$$

$$\int_{\tau_{2l-1}}^{\tau_{2l}} u_z(s)\ \mathrm{d}s = B\omega(\beta)\frac{e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2l-1}} + e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2l}}}{\beta},$$

$$\int_{\tau_{2n-1}}^{\pi} u_z(s)\ \mathrm{d}s = B\omega(\beta)\frac{e^{-\frac{\delta}{2}\tau_{2n-1}} - e^{-\frac{\delta}{2}\pi}\Big(\cos\big(\omega(\beta)(\pi - \tau_{2n-1})\big) + \frac{\delta}{2\omega(\beta)}\sin\big(\omega(\beta)(\pi - \tau_{2n-1})\big)\Big)}{\beta}.$$

Vrátíme-li se tedy ke vztahu (3.6), lze jej využitím nového značení vyjádřit takto:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\tau_{2k}}^{\tau_{2k+1}} u_p(s)\ \mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\tau_{2l-1}}^{\tau_{2l}} u_z(s)\ \mathrm{d}s + \int_{\tau_{2n-1}}^{\pi} u_z(s)\ \mathrm{d}s = 0. \tag{3.7}$$

Z požadavku na hladkost řešení však dostáváme vztah mezi konstantami A, B: $A = -B\frac{\omega(\beta)}{\omega(\alpha)}$. Odtud a ze vztahu (3.7) už po úpravě dostáváme tvar F^+_{2n-1}. Tvar zbývajících větví se ukáže naprosto obdobně. ■

Ukázali jsme tvar větví Fučíkova spektra $\Sigma(L^{\mathrm{I}}_\delta)$ na oblasti M. Zbývá již pouze určit popis větví Fučíkova spektra L^{I}_δ vně této oblasti.

LEMMA 3.4 *Nechť M^c je doplněk množiny M k $\mathbb{R}^2$. Potom množina $\Sigma(L_\delta^{\mathrm{I}}) \cap M^c$ je určena sjednocením množin*

$$F_{-1}^{+} \equiv \left\{ (\alpha,\beta) \in \Omega_{-1}^{+} \;\middle|\; \frac{1}{\alpha}\left(1 + e^{-\frac{\delta}{2}\tau_1}\right) + \frac{e^{-\frac{\delta}{2}\pi}\cosh\big(\omega(-\beta)(\pi-\tau_1)\big)}{\beta} \right.$$

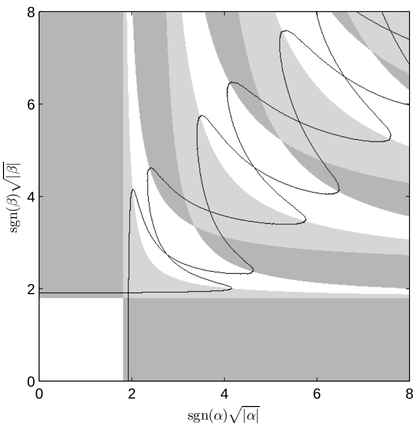
$$\left. + \frac{\frac{\delta}{2\omega(-\beta)} e^{-\frac{\delta}{2}\pi}\sinh\big(\omega(-\beta)(\pi-\tau_0)\big) - e^{-\frac{\delta}{2}\tau_1}}{\beta} = 0 \right\},$$

$$F_0^{+} \equiv \left\{ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{\alpha} + \frac{e^{-\frac{\delta}{2}\tau_1}}{\alpha} - \frac{(\pi-\tau_1)^2}{2} = 0 \right\},$$

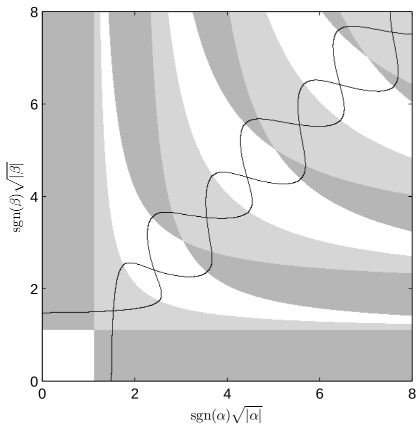
$$F_k^{-} \equiv \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid (\beta,\alpha) \in F_k^{+}\}, \quad k = -1, 0.$$

DŮKAZ JE ZCELA OBDOBNÝ. ■

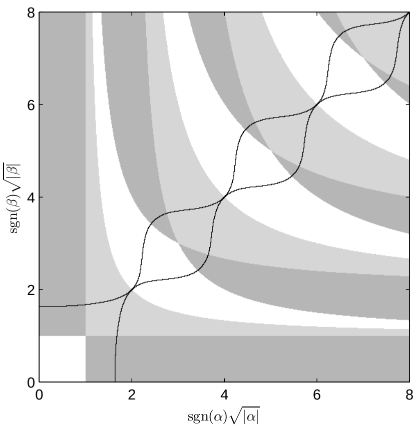
Tímto je popis $\Sigma(L_\delta^{\mathrm{I}})$ úplný. Na následujících obrázcích je znázorněno Fučíkovo spektrum L_δ^{I} pro čtyři různé hodnoty parametru δ.



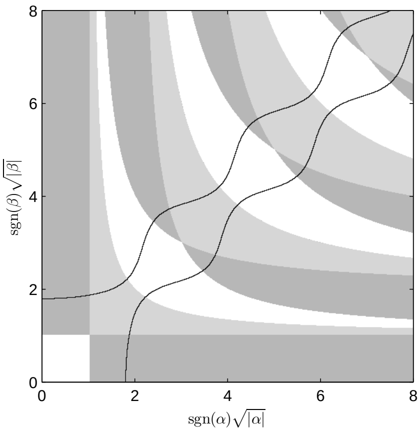
(a) $\Sigma(L_\delta^{\mathrm{I}})$ pro $\delta = -3$



(b) $\Sigma(L_\delta^{\mathrm{I}})$ pro $\delta = -1$



(c) $\Sigma(L_\delta^{\mathrm{I}})$ pro $\delta = 0$



(d) $\Sigma(L_\delta^{\mathrm{I}})$ pro $\delta = 0.5$

POZNÁMKA Větev F_{-1}^{+} nemá již konečnou délku oblouku. Lze se snadno přesvědčit, že větev je neomezená v Ω_{-1}^{+} a má asymptotu v bodě $\alpha : \tau_1(\alpha) = \pi$.

„V matematice jsou dva druhy výsledků: ty zřejmé a ty nepravdivé.“

Ron Getoor

„Matematici vidí dál než lidé.“

Aleš Matas

4 Řešitelnost problémů se skákajícími nelinearitami

V předchozí kapitole jsme studovali strukturu Fučíkova spektra u dvoubodového problému a u nelokálního okrajového problému s integrální podmínkou. V této kapitole navážeme na v předchozí kapitole získané poznatky, definujeme tzv. *regiony typu (I)* a *(II)* a budeme na nich studovat řešitelnost nehomogenních problémů se skákající nelinearitou.

V první části kapitoly formulujeme Dirichletův problém s reálným parametrem δ a definujeme jeho slabé řešení. Dále je ukázána řada pomocných tvrzení, která využijeme v důkazu hlavní existenční věty.

Ve druhé části kapitoly je formulován nehomogenní nelokální problém s integrální podmínkou. Zde budeme postupovat velmi odlišně. Nakonec však dojdeme k platnosti obdobného tvrzení o existenci řešení daného problému, jako tomu bylo v předchozí části kapitoly.

V závěru kapitoly zformulujeme velmi obecnou existenční větu zahrnující též předchozí získané výsledky. Obecnost tohoto tvrzení bude spočívat především v obecnosti uvažovaného (né nutně diferenciálního) operátoru. Bude tedy odpovídat na otázku existence řešení široké třídy problémů. Tuto existenční větu lze tedy považovat za hlavní výsledek celé práce.

Klíčovým nástrojem použitým k dokázání hlavních výsledků je Leray\u016fv-Schauderův topologický stupeň zobrazení.

4.1 Dirichletův problém

Uvažujme problém

$$\begin{gathered} u''(\tau)+\delta u'(\tau)+\alpha u^+(\tau)-\beta u^-(\tau)+\psi(u(\tau))=p(\tau) \quad \text{na } (0,\pi), \\ u(0)=u(\pi)=0, \end{gathered} \tag{4.1}$$

kde $\alpha,\beta,\delta\in\mathbb{R}$, $p\in L^1(0,\pi)$ je libovolné a ψ je spojitá funkce splňující růstovou podmínku

$$|\psi(\xi)|\le c_1+c_2|\xi|^\gamma \tag{4.2}$$

pro nějaké $c_1,\ c_2$ kladné a $\gamma\in[0,1)$.

Slabé řešení

Uvažujme Sobolevův prostor $W_0^{1,2}(0,\pi) \equiv \{u \in W^{1,2}(0,\pi) \mid u(0) = u(\pi) = 0\}$ s normou definovanou vztahem $\|u\|_{W_0^{1,2}} \equiv \|u'\|_{L^2}$ $\forall u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ a skalárním součinem $(u,v) \equiv (u',v')_{L^2}$ $\forall u,v \in W_0^{1,2}(0,\pi)$.

Řekneme, že $u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ je *slabým řešením* problému (4.1), jestliže pro každé $v \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ je splněna integrální rovnost

$$-\int_0^\pi [u'v' - \delta u'v - \alpha u^+ v + \beta u^- v - \psi(u)v] = \int_0^\pi pv. \tag{4.3}$$

Nechť $u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ a $p \in L^1(0,\pi)$ jsou pevně dané prvky. Pak se lze přesvědčit, že pro $\alpha,\beta,\delta \in \mathbb{R}$ libovolné pevné jsou

$$j_u : \ v \mapsto -\int_0^\pi u'v'; \qquad t_u : \ v \mapsto \int_0^\pi [\delta u'v + \alpha u^+ v - \beta u^- v];$$

$$s_u : \ v \mapsto \int_0^\pi \psi(u)v; \qquad \xi_p : \ v \mapsto -\int_0^\pi pv;$$

spojitými lineárními funkcionály na $W_0^{1,2}(0,\pi)$ a dle Rieszovy věty o reprezentaci (viz větu 1.3) existují a jsou jednoznačně určené prvky $Ju,\ T_{\alpha,\beta}u,\ Su,\ z \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ tak, že

$$(Ju,v) = j_u(v),\ (T_{\alpha,\beta}u,v) = t_u(v),\ (Su,v) = s_u(v),\ (z,v) = \xi_p(v).$$

Pozorování Všimněme si, že $(u,v) = -(Ju,v)$ $\forall u,v \in W_0^{1,2}(0,\pi)$. Tedy operátor $-J$ je identita na $W_0^{1,2}(0,\pi)$. Dostáváme tak operátorovou formulaci problému (4.3):

$$u - T_{\alpha,\beta}u - Su = z. \tag{4.4}$$

Regularita slabého řešení

Definovali jsme slabé řešení problému (4.1) a zajímá nás, zda za předpokladu dostatečné hladkosti p lze očekávat též hladkost tohoto řešení. Odpovědí je následující lemma.

Lemma 4.1 *Nechť $p \in C[0,\pi]$. Potom pro každé slabé řešení $u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ problému (4.1) platí, že $u \in C^2[0,\pi] \cap W_0^{1,2}(0,\pi)$.*

Důkaz. Stačí využít ekvivalence problému (3.1) s problémem (3.2). Uvažujme w, f definované stejně jako u problému (3.2). Definujeme-li funkci

$$g(\tau, w(\tau)) \equiv (\alpha - \delta/2)w^+(\tau) - (\beta - \delta/2)w^-(\tau) + f(\tau)\psi(w(\tau)/f(\tau)) - f(\tau)p(\tau),$$

má vztah (4.3) tvar

$$\int_0^\pi w'(\tau)v'(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau = \int_0^\pi g(\tau,w(\tau))v(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \quad \forall v \in W_0^{1,2}(0,\pi). \tag{4.5}$$

Pro $p \in C[0,\pi]$ je funkce g spojitá a standardním argumentem regularity slabého řešení Dirichletova problému

$$-w''(\tau) = g(\tau, w(\tau)),$$
$$w(0) = w(\pi) = 0,$$

dostáváme, že pro w splňující vztah (4.5) platí $w \in C^2[0,\pi]$. Odsud též $u = w/f \in C^2[0,\pi]$. ∎

Důsledek 4.1 Fučíkovo spektrum $\Sigma(L_\delta^{\mathrm{D}})$ a množina všech reálných dvojic (α,β) takových, že $u - T_{\alpha,\beta}u = o$ pro nějaké $u \neq o$, jsou totožné.

Přípravná část

V této části budou formulována na typu regionu nezávislá pomocná tvrzení, která později využijeme v důkazu existenčních výsledků na již konkrétním typu regionů.

LEMMA 4.2 *Operátory $T_{\alpha,\beta}$, S jsou totálně spojité.*

DŮKAZ. Nejprve ukažme totální spojitost $T_{\alpha,\beta}$. Uvažujme omezenou posloupnost $(u_n) \subset W_0^{1,2}(0,\pi)$. Prostor $W_0^{1,2}(0,\pi)$ je reflexivní Hilbertův, tedy lze z (u_n) vybrat slabě konvergentní podposloupnost $u_{n_k} \rightharpoonup u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ (viz větu 1.4). Bez újmy na obecnosti tuto posloupnost přeznačme opět na (u_n). S využitím Hölderovy nerovnosti (viz větu 1.1) a Poincarého nerovnosti (viz větu 1.2) lze provést následující odhady:

$$\begin{aligned}
|\langle T_{\alpha,\beta}u_n - T_{\alpha,\beta}u, v\rangle| &= \left|\alpha \int_0^\pi (u_n^+ - u^+)v - \beta \int_0^\pi (u_n^- - u^-)v + \delta \int_0^\pi (u_n' - u')v\right| \\
&\le |\alpha| \int_0^\pi |u_n^+ - u^+||v| + |\beta| \int_0^\pi |u_n^- - u^-||v| + \delta \int_0^\pi |u_n - u||v'| \\
&\le (|\alpha| + |\beta|) \int_0^\pi |u_n - u||v| + \delta \int_0^\pi |u_n - u||v'| \\
&\le (|\alpha| + |\beta|)\|u_n - u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \delta\|u_n - u\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \\
&\le (C(|\alpha| + |\beta|) + \delta)\, \|u_n - u\|_{L^2}\|v\|_{W_0^{1,2}}
\end{aligned}$$

pro nějaké C kladné. Z výsledné nerovnosti máme, že

$$\|T_{\alpha,\beta}u_n - T_{\alpha,\beta}u\|_{W_0^{1,2}} \le (C(|\alpha| + |\beta|) + \delta)\, \|u_n - u\|_{L^2}.$$

Prostor $W_0^{1,2}(0,\pi)$ je kompaktně vnořen do $L^2(0,\pi)$, tedy zřejmě $u_n \to u$ v $L^2(0,\pi)$. Odsud již získáváme, že $T_{\alpha,\beta}$ je totálně spojitý.

Zbývá ukázat, že operátor S je též totálně spojitý. Operátor S je též zobrazení z $W_0^{1,2}(0,\pi)$ do $W_0^{1,2}(0,\pi)$, platí tudíž i pro něj tytéž na vlastnostech prostoru $W_0^{1,2}(0,\pi)$ založené úvahy a máme tak k dispozici slabě konvergentní posloupnost $(u_n) \subset W_0^{1,2}(0,\pi)$ s limitním prvkem u. Stačí již pouze provést pro S příslušné odhady:

$$\begin{aligned}
|\langle Su_n - Su, v\rangle| &= |\int_0^\pi (\psi(u_n) - \psi(u))v| \\
&\le \|\psi(u_n) - \psi(u)\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&\le K\|\psi(u_n) - \psi(u)\|_{L^2}\|v\|_{W_0^{1,2}}
\end{aligned}$$

Konečně tedy získáváme $\|Su_n - Su\|_{W_0^{1,2}} \le K\|\psi(u_n) - \psi(u)\|_{L^2}$. Z vnoření $W_0^{1,2}(0,\pi) \hookrightarrow\hookrightarrow C[0,\pi]$ pak $u_n \to u$ stejnoměrně na $[0,\pi]$. ψ je spojitá, a proto též $\psi(u_n) \to \psi(u)$ v $C[0,\pi]$. Zbývá si uvědomit, že tento fakt implikuje $\|\psi(u_n) - \psi(u)\|_{L^2} \to 0$. Tedy S je totálně spojitý. ■

Další lemma hovoří o důsledku sublineárního růstu funkce ψ pro operátor S.

LEMMA 4.3 (Fučík, [1], lemma 2.6) *Nechť $\gamma \in [0,1)$. Potom existují konstanty c_1, $c_2 \ge 0$ takové, že*

$$\|Su\|_{W_0^{1,2}} \le c_1 + c_2\|u\|_{W_0^{1,2}}^\gamma.$$

DŮKAZ. Mějme $\gamma \in [0,1)$ libovolné pevné. Z růstového omezení ψ, Hölderovy nerovnosti a ze spojitého vnoření $W_0^{1,2}(0,\pi) \hookrightarrow L^2(0,\pi)$ dostáváme následující odhady:

$$\begin{aligned} |\langle Su, v\rangle| &\le \int_0^\pi |\psi(u)||v| \le \int_0^\pi (\hat{c}_1 + \hat{c}_2|u|^\gamma)|v| \\ &\le \hat{c}_1 c_2 \|v\|_{W_0^{1,2}} + \hat{c}_2 c_3 \|u\|_{L^{2\gamma}}^\gamma \|v\|_{L^2} \\ &\le \left(\hat{c}_1 + \hat{c}_2 c_3 c_4 \|u\|_{L^2}^\gamma\right) \|v\|_{W_0^{1,2}} \\ &\le \left(\hat{c}_1 + \hat{c}_2 c_3 c_4 \|u\|_{W_0^{1,2}}^\gamma\right) \|v\|_{W_0^{1,2}} \end{aligned}$$

pro nějaké $\hat{c}_1, \hat{c}_2, c_3, c_4$ kladné. Odsud již pro nějaké $c_1,\ c_2$ kladné platí $\|Su\|_{W_0^{1,2}} \le c_1 + c_2\|u\|_{W_0^{1,2}}^\gamma$. ■

LEMMA 4.4 *Nechť* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma(L_\delta^{\mathrm{D}})$. *Potom existuje konstanta* $C = C(\alpha,\beta)$ *kladná tak, že pro každé* $u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ *platí*

$$\|u - T_{\alpha,\beta}u\|_{W_0^{1,2}} \ge C(\alpha,\beta)\|u\|_{W_0^{1,2}}.$$

DŮKAZ. Tvrzení dokážeme sporem. Mějme $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma(L_\delta^{\mathrm{D}})$ libovolné pevné a předpokládejme, že pro tuto dvojici tvrzení neplatí. Pak existuje posloupnost prvků (u_n) v prostoru $W_0^{1,2}(0,\pi)$ tak, že $\|u_n\|_{W_0^{1,2}} = 1$ a

$$\|u_n - T_{\alpha,\beta}u_n\|_{W_0^{1,2}} \to 0. \tag{4.6}$$

Dle lemmatu 4.2 je $T_{\alpha,\beta}$ totálně spojitý, a tedy existuje podposloupnost u_{n_k} posloupnosti u_n a prvek $u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ takový, že

$$\|u - T_{\alpha,\beta}u_{n_k}\|_{W_0^{1,2}} \to 0.$$

Tedy z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\|u_{n_k} - u\|_{W_0^{1,2}} \le \|u_{n_k} - T_{\alpha,\beta}u_{n_k}\|_{W_0^{1,2}} + \|u - T_{\alpha,\beta}u_{n_k}\|_{W_0^{1,2}} \to 0.$$

Navíc $T_{\alpha,\beta}$ je spojitý, tudíž platí $u - T_{\alpha,\beta}u = o$. Z předpokladu $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \setminus \Sigma(L_\delta^{\mathrm{D}})$ plyne $u = o$. Avšak z předpokladu $\|u_n\|_{W_0^{1,2}} = 1$ platí $\|u\|_{W_0^{1,2}} = 1$. To je spor. Odsud dostáváme platnost původního tvrzení. ■

Regiony typu (I)

Regiony typu (I) pro operátor L definujeme jako největší souvislé podmnožiny (komponenty) $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma(L)$ obsahující alespoň jeden bod (λ,λ) pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. V případě operátoru L_δ^{D} jsou regiony typu (I) znázorněny šedou barvou na následujícím obrázku.

Sjednocení všech regionů typu (I) budeme značit $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. Význam těchto oblastí z pohledu existence slabého řešení problému (4.1) se ukáže v následujících odstavcích.

LEMMA 4.5 *Nechť dvojice* (α,β) *náleží do regionu typu (I). Potom Lerayův-Schauderův stupeň*

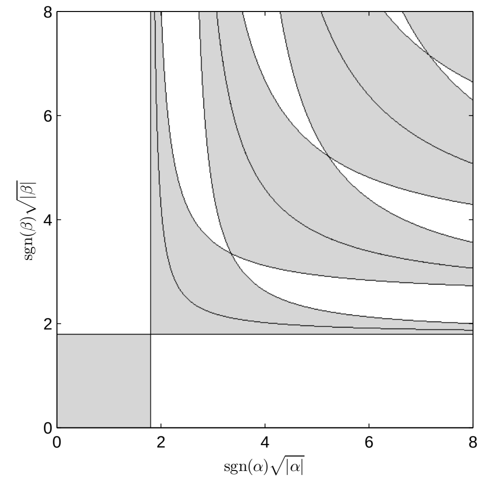
$$\deg[I - T_{\alpha,\beta}, B(1), o]$$

je liché (tedy nenulové) číslo.

DŮKAZ. Mějme $(\alpha,\beta) \in \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ libovolné pevné. Z lemmatu 4.2 již víme, že je operátor $T_{\alpha,\beta}$ totálně spojitý a pro $(\alpha,\beta) \in \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ platí, že $u - T_{\alpha,\beta}u = o$ nemá na sféře $\partial B(1)$ řešení. Lze tedy pro $I - T_{\alpha,\beta}$ Lerayův-Schauderův stupeň definovat.

Všimněme si, že operátor $I - T_{\lambda,\lambda}$ je lichý. Uvažujme tedy libovolnou spojitou křivku $\varphi(t) \equiv (\alpha(t),\beta(t))$ takovou, že $\forall t \in [0,1] : \varphi(t) \subset \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ a platí $\varphi(0) = (\lambda,\lambda)$, $\varphi(1) = (\alpha,\beta)$ pro libovolné λ přípustné. Definujme nyní zobrazení

$$\mathcal{H}(u,t) \equiv u - T_{\varphi(t)}u$$



Obrázek 4.1: Regiony typu (I) u operátoru L_δ^{D}

a dokažme, že se jedná o přípustnou homotopii zobrazení $I - T_{\alpha,\beta}$ a $I - T_{\lambda,\lambda}$. Z vlastností uvažované křivky φ zřejmě

$$\mathcal{H}(u,0) = u - T_{\lambda,\lambda}u, \quad \mathcal{H}(u,1) = u - T_{\alpha,\beta}u.$$

Platnost $\mathcal{H}(u,t) \neq o$ pro každé $t \in [0,1]$ a $u \in \partial B(1)$ již snadno dostaneme z vlastnosti $\varphi(t) \subset \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ pro každé $t \in [0,1]$. $\mathcal{H}(u,t)$ je tedy přípustná homotopie. Z věty 1.5 o Lerayově-Schauderově stupni již okamžitě dostáváme, že $\deg[I - T_{\alpha,\beta}, B(1), o]$ je liché číslo. ■

VĚTA 4.1 *Nechť ψ je spojitá funkce splňující růstovou podmínku* (4.2) *a* $(\alpha,\beta) \in \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. *Potom*

$$u'' + \delta u' + \alpha u^+ - \beta u^- + \psi(u) = p,$$

$$u(0) = u(\pi) = 0,$$

má slabé řešení pro libovolné $p \in L^1(0,\pi)$.

DŮKAZ. Uvažujme $T_{\alpha,\beta}, S$ a z tak, že $u - T_{\alpha,\beta}u - Su = z$ je ekvivalentní s (4.3). Dále uvažujme zobrazení $\mathcal{H}(u,t) = u - T_{\alpha,\beta}u - t(Su+z)$. Z lemmat 4.4 a 4.3 plyne platnost odhadů

$$\begin{aligned}\|u - T_{\alpha,\beta}u - t(Su+z)\|_{W_0^{1,2}} &\geq \|u - T_{\alpha,\beta}u\|_{W_0^{1,2}} - \|Su\|_{W_0^{1,2}} - \|z\|_{W_0^{1,2}} \\ &\geq C(\alpha,\beta)\|u\|_{W_0^{1,2}} - c_1 - c_2\|u\|_{W_0^{1,2}}^{\gamma} - \|z\|_{W_0^{1,2}}\end{aligned}$$

pro každé $t \in [0,1]$ a $u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$. Pro dostatečně velké $R > 0$ tedy jistě platí

$$\mathcal{H}(u,t) \neq o \quad \forall t \in [0,1]\ \forall u \in \partial B(R).$$

$\mathcal{H}$ je tedy přípustná homotopie zobrazení $u - T_{\alpha,\beta}u$ a $u - T_{\alpha,\beta}u - Su - z$. Navíc si všimněme, že $T_{\alpha,\beta}(au) = |a|T_{\alpha,\beta}u$ pro libovolné a reálné. Odsud a z lemmatu 4.5 dostáváme

$$0 \neq \deg[I - T_{\alpha,\beta}, B(1), o] = \deg[I - T_{\alpha,\beta}, B(R), o].$$

Z homotopické invariance Lerayova-Schauderova stupně pak

$$\deg[I - T_{\alpha,\beta} - S, B(R), z] = \deg[u - T_{\alpha,\beta}u, B(R), o] \neq 0.$$

Podle věty 1.5 existuje $u \in B(R)$ tak, že $u - T_{\alpha,\beta}u - Su - z = o$, což je dle předpokladu problém ekvivalentní s (4.3). Tedy u je slabé řešení uvažovaného Dirichletova problému. Tím jsme dokázali tvrzení věty 4.1. ■

Regiony typu (II)

Regiony typu (II) pro operátor L definujeme jako komponenty množiny

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(L) \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \{\Sigma(L) \cup \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(L)\}.$$

Na obrázku 4.1 jsou znázorněny regiony typu (II) operátoru L_δ^{D} bílou barvou.

Pozorování Na každé souvislé podmnožině regionů $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ platí pro Lerayův-Schauderův stupeň

$$\deg[I - T_{\alpha,\beta}, B(R), o] = konst.$$

Existence řešení problému (4.1) na regionech typu (II) byla studována v článku [10]. Je zde ukázáno, že je-li $p \in L^1(0,\pi)$ jistého speciálního tvaru, je zaručena existence alespoň jednoho řešení problému (4.1). Pro více informací odkazujeme na článek [10].

4.2 Nelokální problém s integrální podmínkou

V této části textu se budeme zabývat řešitelností následujícího nelokálního okrajového problému:

$$\begin{aligned} u''(\tau) + \delta u'(\tau) + \alpha u^+(\tau) - \beta u^-(\tau) + \psi(u(\tau)) = f(\tau) \quad \text{na } (0,\pi), \\ u(0) = 0, \quad \int_0^\pi u(\tau)\ \mathrm{d}\tau = 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

kde $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(0,\pi)$ je libovolné a ψ je lipschitzovsky spojitá funkce splňující růstovou podmínku

$$|\psi(\xi)| \le c_1 + c_2|\xi|^\gamma \tag{4.8}$$

pro nějaké c_1, c_2 kladné, $\gamma \in [0,1)$ (tzv. *sublineární růst*).

Operátorová formulace

Definujme nejprve prostor X:

$$X \equiv \left\{ u \in W^{2,1}(0,\pi) \;\middle|\; u(0) = 0,\ \int_0^\pi u(\tau)\ \mathrm{d}\tau = 0 \right\}$$

a na X uvažujme standardní normu prostoru $W^{2,1}(0,\pi)$ definovanou předpisem (1.1). Dále uvažujme $\alpha, \beta, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$ pevné a definujme tyto operátory:

$$\begin{aligned} &A_\epsilon :\ X \subset W^{2,1}(0,\pi) \to L^1(0,\pi), && A_\epsilon :\ u \mapsto -u'' - \delta u' + \epsilon u; \\ &T_{\alpha,\beta} :\ X \subset W^{2,1}(0,\pi) \to L^1(0,\pi), && T_{\alpha,\beta} :\ u \mapsto \alpha u^+ - \beta u^-; \\ &S :\ X \subset W^{2,1}(0,\pi) \to L^1(0,\pi), && S :\ u \mapsto \psi(u); \end{aligned}$$

Řešením problému (4.7) rozumíme $u \in X$ splňující rovnici

$$A_0 u - T_{\alpha,\beta} u - Su + f = o. \tag{4.9}$$

Přípravná část

V této části opět zformulujeme několik pomocných tvrzení. Začněme dvěma jednoduchými lemmaty, s jejichž pomocí bude možné říci o prostoru X více.

LEMMA 4.6 *Jádro spojitého lineárního funkcionálu g na normovaném lineárním prostoru X je uzavřený lineární podprostor X.*

DŮKAZ. Linearita prostoru $\operatorname{Ker} g$ je zřejmá. Dále uvažujme libovolnou posloupnost prvků $(u_n) \subset \operatorname{Ker} g$ tak, že existuje $u \in X : u_n \to u$ v X. Jistě pak $g(u_n) \to g(u)$. Jelikož g je spojitý a pro každé n platí $g(u_n) = 0$, nutně též $g(u) = 0$. Čili $u \in \operatorname{Ker} g$, a prostor $\operatorname{Ker} g$ je tedy uzavřený. ■

LEMMA 4.7 *Každý uzavřený lineární podprostor Banachova prostoru je Banachův prostor.*

DŮKAZ. Nechť X je Banachův prostor. Uvažujme libovolný uzavřený podprostor M prostoru X a libovolnou cauchyovskou posloupnost $(u_n) \subset M$. X je úplný, tedy existuje $u \in X :\ u_n \to u$. Z uzavřenosti M již okamžitě plyne, že $u \in M$. Prostor M je tedy úplný. ■

Prostor X lze zřejmě definovat jako $X \equiv \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} h$, kde $g, h : W^{2,1}(0,\pi) \to \mathbb{R}$ jsou spojité lineární funkcionály definované vztahy

$$g : u \mapsto u(0), \quad h : u \mapsto \int_0^\pi u(\tau)\ \mathrm{d}\tau$$

pro každé $u \in W^{2,1}(0,\pi)$. Z lemmatu 4.6 dostáváme, že X je uzavřený podprostor prostoru $W^{2,1}(0,\pi)$ a díky lemmatu 4.7 pak víme, že je X s normou $\|\cdot\|_{W^{2,1}}$ Banachův prostor.

Nechť $\epsilon \in \mathbb{R}$ je libovolné pevné. Potom operátor A_ϵ je spojitý lineární. Pokud ϵ je prvkem resolventní množiny operátoru $-A_0$, potom $\dim \operatorname{Ker} A_\epsilon = 0$ a A_ϵ je surjektivní. Tudíž A_ϵ je bijekce. Navíc $X, L^1(0,\pi)$ jsou Banachovy prostory a dle věty o omezené inverzi je tedy $A_\epsilon^{-1} : L^1(0,\pi) \to X$ spojitý lineární operátor definovaný na celém prostoru $L^1(0,\pi)$. Rovnice (4.9) je tedy ekvivalentní s rovnicí

$$u - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon} u - A_\epsilon^{-1} \circ Su + A_\epsilon^{-1} f = o. \tag{4.10}$$

Nyní je třeba studovat některé vlastnosti operátorů vystupujících v této rovnici. Začněme pomocným tvrzením o spojitosti operátoru superpozice na Sobolevových prostorech, které bylo dokázáno v článku [11].

LEMMA 4.8 (Theorem 1, [11]) *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je omezená oblast a* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je lipschitzovsky spojitá funkce. Potom zobrazení*

$$G_f : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega),\ 1 \le p < \infty \qquad\qquad G_f : u \mapsto f \circ u$$

je spojité.

Tohoto výsledku využijeme k důkazu následujícího lemmatu.

LEMMA 4.9 *Operátory* $T_{\alpha,\beta}, S$ *jsou spojité a kompaktní.*

DŮKAZ. Funkce $u \mapsto u^\pm$ je po částech lineární, tudíž $u \mapsto \alpha u^+ - \beta u^-$ pro libovolné α, β reálné je lipschitzovsky spojitá funkce. Odsud a z lemmatu 4.8 dostáváme spojitost operátoru

$$\hat{T}_{\alpha,\beta} :\ X \subset W^{1,1}(0,\pi) \to W^{1,1}(0,\pi), \qquad\qquad \hat{T}_{\alpha,\beta} u \equiv T_{\alpha,\beta} u \ \forall u \in X.$$

Z vnoření $W^{1,1}(0,\pi) \hookrightarrow\hookrightarrow L^1(0,\pi)$ je pak kompaktní $T_{\alpha,\beta} = I \circ \hat{T}_{\alpha,\beta}$, kde $I :\ W^{1,1}(0,\pi) \to L^1(0,\pi)$ je kompaktní identita. Funkce ψ je lipschitzovsky spojitá a tudíž ihned dostáváme spojitost operátoru

$$\hat{S} : X \subset W^{1,1}(0,\pi) \to W^{1,1}(0,\pi), \qquad\qquad \hat{S} u \equiv Su \ \forall u \in X.$$

Odsud již stejným způsobem zjistíme, že $S : X \to L^1(0,\pi)$ je kompaktní.

■

Odsud dostáváme, že $A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon},\ A_\epsilon^{-1} \circ S$ jsou jakožto superpozice spojitého a kompaktního operátoru kompaktní.

LEMMA 4.10 *Pro operátor* S *existují kladné konstanty* c_1, c_2 *tak, že platí nerovnost*

$$\|Su\|_{L^1} \le c_1 + c_2 \|u\|_{W^{2,1}}^\gamma \ \forall u \in X.$$

DŮKAZ. Nechť $u \in X$ je libovolné. Tvrzení ihned plyne z následující odhadů:

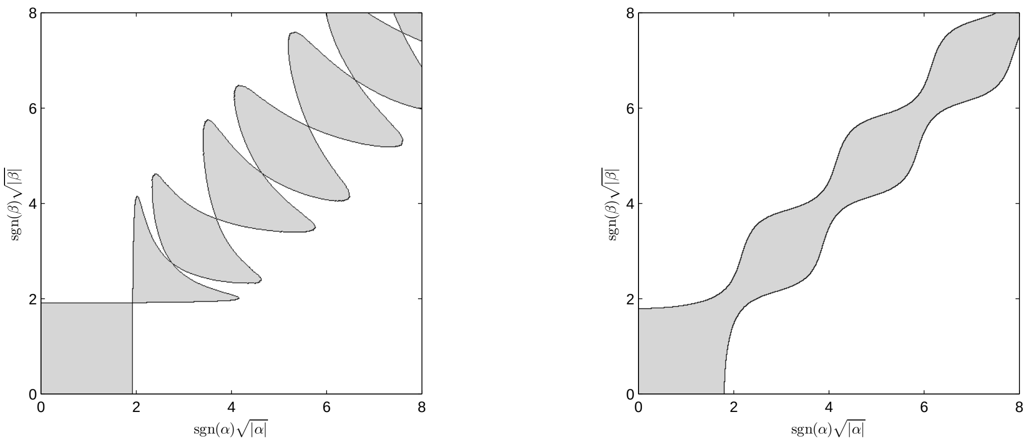
$$\begin{aligned} \|Su\|_{L^1} &= \int_0^\pi |\psi(u)| \le \int_0^\pi (\hat{c}_1 + c_2 \hat{|} u|^\gamma) \\ &\le \hat{c}_1 \pi + \hat{c}_2 \|u\|_{L^\gamma}^\gamma \\ &\le \hat{c}_1 \pi + \hat{c}_2 c_3 \|u\|_{L^1}^\gamma \\ &\le \hat{c}_1 \pi + \hat{c}_2 c_3 c_4 \|u\|_{W^{2,1}}^\gamma . \end{aligned}$$

pro nějaké $\hat{c}_1, \hat{c}_2, c_3, c_4$ kladné. Tedy existují kladné konstanty c_1, c_2 tak, že pro každé $u \in X$ platí $\|Su\|_{L^1} \le c_1 + c_2 \|u\|_{W^{2,1}}^\gamma$. ■

POZNÁMKA Prostor X je podprostorem $C^1[0,\pi]$. Odtud množina všech reálných dvojic (α, β), pro které má rovnice $u - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon} u = o$ netriviální řešení, je totožná s množinou $\Sigma(L_\delta^{\mathrm{I}})$ z předchozí kapitoly.

Regiony typu (I)

V této části se budeme věnovat existenci řešení problému (4.7) pro reálná dvojice (α, β) z regionů typu (I) operátoru L_δ^{I}. Možnou strukturu množiny $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(L_\delta^{\mathrm{I}})$ si lze prohlédnout na následujících obrázcích (znázorněno šedou barvou).



(a) $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(L_{-3}^{\mathrm{I}})$ pro $T = \pi$

(b) $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(L_{-1}^{\mathrm{I}})$ pro $T = \pi$

Obrázek 4.2: Regiony typu (I) u operátoru L_δ^{I} pro $\delta = -3$ a $\delta = 0.5$

Zbývá formulovat poslední pomocné tvrzení a poté již přistoupíme k hlavnímu výsledku této části kapitoly.

LEMMA 4.11 *Nechť dvojice (α, β) náleží do regionu typu (I) operátoru L_δ^{I}. Potom Lerayův-Schauderův stupeň*

$$\deg[I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon}, B(1), o]$$

je liché (tedy nenulové) číslo.

DŮKAZ. Zřejmě lze obdobným způsobem jako v důkazu lemmatu 4.5 provést homotopické spojení zobrazení

$$I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon} \text{ a } I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{a+\epsilon,a+\epsilon},$$

kde a je reálné takové, že $(a, a) \in \mathfrak{R}_I(L_\delta^{\mathrm{I}})$. Dále A_ϵ^{-1} je lineární a $T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon}$ pozitivně homogenní, tudíž $A_\epsilon^{-1} \circ T_{a+\epsilon,a+\epsilon}$ je liché zobrazení. Odsud máme dokazované tvrzení. ■

Dostáváme se konečně k formulaci existenční věty na regionech typu (I) pro nelokální okrajový problém (4.7) s integrální podmínkou.

VĚTA 4.2 *Nechť ψ je lipschitzovsky spojitá funkce splňující podmínku* (4.8) *a* $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. *Potom problém*

$$u'' + \delta u' + \alpha u^+ - \beta u^- + \psi(u) = p,$$

$$u(0) = 0, \qquad \int_0^\pi u(\tau) \, \mathrm{d}\tau = 0,$$

má alespoň jedno řešení $u \in W^{2,1}(0, \pi)$ pro libovolné $p \in L^1(0, \pi)$.

DŮKAZ. Nechť $T_{\alpha,\beta}, S, A_\epsilon^{-1}, f$ jsou takové, že $u - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon} u - A_\epsilon^{-1} \circ Su + A_\epsilon^{-1} f = o$ je ekvivalentní s (4.7). Definujme zobrazení $\mathcal{H}: X \times [0, 1] \to X$ následujícím předpisem:

$$\mathcal{H}(u, \tau) \equiv u - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon} u - \tau(A_\epsilon^{-1} \circ Su - A_\epsilon^{-1} f).$$

Ukážeme, že se jedná o přípustnou homotopii zobrazení

$$I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon} \quad a \quad I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon} - A_\epsilon^{-1} \circ S + A_\epsilon^{-1} f,$$

tj. že existuje R kladné tak, že $\mathcal{H}(u,\tau) \neq o$ $\forall \tau \in [0,1]$ $\forall u \in \partial B(R) \subset X$. To ukážeme sporem. Předpokládejme, že existuje posloupnost $(u_n) \subset X$ a $(\tau_n) \subset [0,1]$ takové, že $\|u_n\|_X \to \infty$ a $\mathcal{H}(u_n, \tau_n) = o$. Tedy

$$u_n - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon} u_n - \tau_n (A_\epsilon^{-1} \circ S u_n - A_\epsilon^{-1} f) = o. \tag{4.11}$$

Označíme-li $\omega_n \equiv \|u_n\|^{-1} u_n$, potom též platí

$$\omega_n - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon}\, \omega_n - \tau_n A_\epsilon^{-1} \frac{S u_n - f}{\|u_n\|} = o. \tag{4.12}$$

Ovšem z lemmatu 4.10 víme, že pro f pevné platí $\|u_n\|^{-1}(S u_n - f) \to o$. Navíc $(\omega_n) \subset X$ je omezená množina, tedy $(A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon}\, \omega_n)$ je relativně kompaktní v X a lze z ní vybrat konvergentní podposloupnost, kterou bez újmy na obecnosti opět označíme $(A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon}\, \omega_n)$. Tato posloupnost konverguje k prvku $\omega \in X$. Z rovnice (4.12) pak přechodem $n \to \infty$ dostáváme, že $\omega_n \to \omega$ v X a ze spojitosti operátoru $A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon}$ zase

$$A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon}\, \omega_n \to A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon}\, \omega.$$

Tedy $\omega - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon}\, \omega = o$. Avšak $(\alpha,\beta) \notin \Sigma(L_\delta^{\mathrm{I}})$, tudíž musí platit $\omega = o$. To je ovšem spor s $\|\omega\| = 1$. Homotopie $\mathcal{H}$ je tedy přípustná a z homotopické invariance Lerayova-Schauderova stupně platí

$$\deg[I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon} - A_\epsilon^{-1} \circ S, B(R), -A_\epsilon^{-1} f] = \deg[I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon}, B(R), o] =$$

$$= \deg[I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha+\epsilon,\beta+\epsilon}, B(1), o] \neq 0.$$

Tedy existuje alespoň jedno řešení problému (4.7). Tím je důkaz hotov. ∎

Poznámka Přístup zde užitý pro studium nelokálního problému s integrální podmínkou je v porovnání s přístupem užitým pro studium Dirichletova problému poněkud méně závislý na konkrétním tvaru diferenciálního operátoru a na okrajových či nelokálních podmínkách. Kdybychom extrahovali esenci tohoto přístupu, bylo by jistě možné se oprostit od konkrétního tvaru diferenciálního operátoru vystupujícího v uvažovaném problému se skákajícími nelinearitami a dokázat pro něj přitom obdobné existenční výsledky.

4.3 O jednom zobecnění

V předchozích částech kapitoly jsme dokázali dvě existenční věty. Postupů, kterých bylo využito, lze však užít v podstatně obecnějším případě. Dokážeme následující tvrzení.

VĚTA 4.3 *Uvažujme $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ omezenou oblast s lipschitzovskou hranicí a $1 \le p \le N$. Nechť $A : D(A) \subset W^{k,p}(\Omega) \to L^1(\Omega)$ je lineární operátor, $D(A)$ je lineární podprostor $W^{k,p}(\Omega)$ a existuje $\epsilon \in \rho(A)$ tak, že $(A - \epsilon I)^{-1}$ je omezený na $L^1(\Omega)$. Je-li ψ lipschitzovsky spojitá funkce se sublineárním růstem a $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(A)$, potom rovnice*

$$-Au + \alpha u^+ - \beta u^- + \psi(u) = f \tag{4.13}$$

má řešení pro každé $f \in L^1(\Omega)$.

Operátorová formulace

Na prostoru $D(A)$ uvažujme standardní normu prostoru $W^{k,p}(\Omega)$. Definujme následující operátory:

$$T_{\alpha,\beta} : W^{k,p}(\Omega) \to L^1(\Omega), \qquad T_{\alpha,\beta} :\ u \mapsto \alpha u^+ - \beta u^-;$$

$$S : W^{k,p}(\Omega) \to L^1(\Omega), \qquad S :\ u \mapsto \psi(u);$$

pro α, β reálné. Řešením problému (4.13) rozumíme $u \in D(A)$ splňující rovnici

$$Au - T_{\alpha,\beta} u - Su + f = o. \tag{4.14}$$

Přípravná část

V této části budeme postupovat obdobně, jako jsme postupovali v případě nelokálního problému s integrální podmínkou.

Jedním z předpokladů věty 4.3 je existence $\epsilon \in \rho(A)$ takového, že $A - \epsilon I$ má omezenou inverzi definovanou na celém prostoru $L^1(\Omega)$. Označme $A_\epsilon \equiv A - \epsilon I$. Aplikací A_ϵ^{-1} na rovnici (4.14) získáváme její ekvivalentní tvar:

$$u - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} u - A_\epsilon^{-1} \circ Su + A_\epsilon^{-1} f = o. \tag{4.15}$$

Nyní je třeba ukázat některé vlastnosti operátorů vystupujících v této rovnici.

POZNÁMKA Předpoklad, že $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí (tj. s hranicí, která je lokálně popsatelná lipschitzovskou funkcí), jsme přirozeně zvolili z potřeby kompaktního vnoření $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^1(\Omega)$ (viz [2]). To je klíčové v důkazu následujícího tvrzení.

LEMMA 4.12 *Operátory $T_{\alpha,\beta}, S$ jsou spojité a kompaktní.*

DŮKAZ. Spojitost operátorů dostaneme využitím lemmatu 4.8 o spojitosti operátoru superpozice z $W^{1,p}(\Omega)$ do $W^{1,p}(\Omega)$. Označme $S', T' : D(A) \subset W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$ spojité operátory takové, že $S'u \equiv Su\ \forall u \in D(A)$, $T'u \equiv T_{\alpha,\beta} u\ \forall u \in D(A)$. Tvrzení je pak patrné z následujícího schématu:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{S',T'} W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^1(\Omega).$$

■

POZNÁMKA Lze se přesvědčit, že dokonce platí $u_n \to u$ ve $W^{1,p}(\Omega)$ právě tehdy, když $u_n^\pm \to u^\pm$ ve $W^{1,p}(\Omega)$. Implikaci zleva doprava máme z předchozího lemmatu. Druhá implikace je triviální.

Ze spojitosti A_ϵ^{-1} je zřejmá kompaktnost operátorů $A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}, A_\epsilon^{-1} \circ S$ z $W^{k,p}(\Omega)$ do $D(A) \subset W^{k,p}(\Omega)$. Dále budeme potřebovat nerovnost, o které hovoří následující lemma.

LEMMA 4.13 *Pro operátor S existují kladné konstanty c_1, c_2 tak, že platí nerovnost*

$$\|Su\|_{L^1} \le c_1 + c_2\|u\|^{\gamma}_{W^{k,p}} \ \forall u \in W^{k,p}(\Omega).$$

DŮKAZ. Stačí provést obdobné odhady jako v důkazu lemmatu 4.10. Pro každé $u \in W^{k,p}(\Omega)$ platí

$$\begin{aligned}\|Su\|_{L^1} = \int_\Omega |\psi(u)| &\le \int_\Omega (\hat{c}_1 + \hat{c}_2|u|^\gamma)\\ &\le \hat{c}_1 \operatorname{meas}(\Omega) + \hat{c}_2\|u\|^\gamma_{L^1}\\ &\le \hat{c}_1 \operatorname{meas}(\Omega) + \hat{c}_2 c_3\|u\|^\gamma_{L^p}\\ &\le \hat{c}_1 \operatorname{meas}(\Omega) + \hat{c}_2 c_3 c_4\|u\|^\gamma_{W^{k,p}}\end{aligned}$$

pro nějaké $\hat{c_1}, \hat{c_2}, c_3, c_4$ kladné. Tedy existují c_1, c_2 kladné tak, že $\|Su\|_{L^1} \le c_1 + c_2\|u\|^\gamma_{W^{k,p}}$. ■

Kompaktnost operátoru $A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}$ nám umožňuje definovat Lerayův-Schauderův stupeň perturbace identity

$$I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}.$$

Obdobně, jako tomu bylo v předchozích částech kapitoly, se lze snadno přesvědčit o platnosti následujícího lemmatu.

LEMMA 4.14 *Nechť dvojice (α, β) náleží do regionu typu (I) operátoru A. Potom Lerayův-Schauderův stupeň*

$$\deg[I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}, B(1), o]$$

je liché (tedy nenulové) číslo.

DŮKAZ JE OBDOBNÝ DŮKAZU LEMMATU 4.5. ■

Důkaz hlavního teorému

Již lze přejít k samotnému důkazu existenční věty 4.3 formulované na začátku této podkapitoly.

DŮKAZ VĚTY 4.3. Existenci řešení rovnice (4.15) ukážeme opět s využitím homotopické invariance Lerayova-Schauderova stupně. Definujme tedy zobrazení $\mathcal{H}:\ W^{k,p}(\Omega) \times [0,1] \to W^{k,p}(\Omega)$ jako

$$\mathcal{H}(u,\tau) \equiv u - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} u - \tau(A_\epsilon^{-1} \circ Su - A_\epsilon^{-1} f).$$

a ukažme, že se jedná o přípustnou homotopii zobrazení

$$I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} \quad a \quad I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} - A_\epsilon^{-1} \circ S + A_\epsilon^{-1} f,$$

tj. že existuje R kladné tak, že $\mathcal{H}(u,\tau) \neq o\ \forall \tau \in [0,1]\ \forall u \in \partial B(R) \subset W^{k,p}(\Omega)$. Tuto skutečnost ukážeme sporem. Předpokládejme existenci posloupností $(u_n) \subset W^{k,p}(\Omega)$, $(\tau_n) \subset [0,1]$ takových, že $\|u_n\|_{W^{k,p}} \to \infty$ a zároveň $\mathcal{H}(u_n, \tau_n) = o$. Neboli pro všechna n platí

$$u_n - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} u_n - \tau_n(A_\epsilon^{-1} \circ Su_n - A_\epsilon^{-1} f) = o. \tag{4.16}$$

Označme $\omega_n \equiv \|u_n\|^{-1}_{W^{k,p}} u_n$. Ze vztahu (4.16) dostaneme platnost

$$\omega_n - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}\ \omega_n - \tau_n A_\epsilon^{-1} \frac{Su_n}{\|u_n\|} + \tau_n A_\epsilon^{-1} \frac{f}{\|u_n\|} = o. \tag{4.17}$$

Ovšem na základě lemmatu 4.13 máme pro f pevné

$$\frac{Su_n - f}{\|u_n\|} \to o.$$

Navíc $\|\omega_n\| = 1$, tedy $(\omega_n) \subset W^{k,p}(\Omega)$ je omezená množina. Odsud díky lemmatu (4.12) víme, že $(A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}\, \omega_n)$ je relativně kompaktní v $W^{k,p}(\Omega)$. Lze z ní tedy vybrat konvergentní podposloupnost, kterou bez újmy na obecnosti opět označíme $(A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}\, \omega_n)$. Tato posloupnost konverguje k nějakému prvku $\omega \in W^{k,p}(\Omega)$. Z rovnice (4.17) pak přechodem $n \to \infty$ dostáváme, že $\omega_n \to \omega$ v $W^{k,p}(\Omega)$ a ze spojitosti operátoru $A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}$ zase

$$\omega - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}\, \omega = o.$$

Nejprve si všimněme, že odsud $\omega \in W^{k,p}(\Omega)$. Dále je získaná rovnost ekvivalentní s rovností $A\omega - T_{\alpha,\beta}\, \omega = o$. Předpokládali jsme $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(A)$, tudíž ω je triviální. To je ovšem spor s $\|\omega\| = 1$. Homotopie $\mathcal{H}$ je tedy přípustná. Z lemmatu 4.14 a z homotopické invariance Lerayova-Schauderova stupně pak konečně dostáváme

$$\deg[I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} - A_\epsilon^{-1} \circ S, B(R), -A_\epsilon^{-1} f] = \deg[I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}, B(R), o] =$$

$$= \deg[I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}, B(1), o] \neq 0.$$

Tedy existuje alespoň jedno řešení problému (4.13). ∎

Poznámka Poznamenejme, že ve větě 4.3 můžeme místo spojité funkce $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sublineárním růstem (4.8) bez újmy uvažovat Carathéodoryovu funkci $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující obecnější podmínku

$$|\psi(x, s)| \leq a(x) + C|s|^\gamma \text{ pro s. v. } x \in \Omega\ \forall s \in \mathbb{R}$$

pro nějaké $a \in L^1(\Omega)$, C kladné a $\gamma \in [0, 1)$.

Poznámka Všimněme si především toho, že pro platnost věty 4.3 není vyžadováno, aby A byl diferenciální operátor, ani zde explicitně nevystupují žádné počáteční, okrajové či nelokální podmínky.

Jednoznačnost řešení

Pozorování Uvažujme problém (4.15). Nechť je splněna následující podmínka:

$$\|A_\epsilon^{-1}\| \operatorname{meas}(\Omega)^{1-\frac{1}{p}} < \frac{1}{|\alpha - \epsilon| + |\beta - \epsilon| + K}, \tag{4.18}$$

kde K je Lipschitzova konstanta funkce ψ. Potom existuje-li řešení (4.15), je jednoznačné.

Důkaz. Definujme operátor $G : W^{k,p}(\Omega) \to D(A) \subset W^{k,p}(\Omega)$, $Gu \equiv A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} u - A_\epsilon^{-1} \circ Su + A_\epsilon^{-1} f$. Vidíme, že každé řešení rovnice (4.15) je pevným bodem operátoru G. Je-li naopak $u \in W^{k,p}(\Omega)$ pevným bodem G, je zřejmě $u \in D(A)$, a tedy je řešením rovnice (4.15). Ukažme tedy, že za předpokladu platnosti nerovnosti (4.18) je G kontrakce. Máme

$$\begin{aligned}
\|Gu - Gv\|_{W^{k,p}} &= \|A_\epsilon^{-1} \circ (T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} u - T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} v + Su - Sv)\|_{W^{k,p}} \\
&\leq \|A_\epsilon^{-1}\| (\|T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} u - T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} v\|_{L^1} + \|Su - Sv\|_{L^1}) \\
&\leq \|A_\epsilon^{-1}\| \left((|\alpha - \epsilon| + |\beta - \epsilon|)\|u - v\|_{L^1} + K\|u - v\|_{L^1}\right) \\
&\leq \|A_\epsilon^{-1}\| \left(|\alpha - \epsilon| + |\beta - \epsilon| + K\right) \operatorname{meas}(\Omega)^{1-\frac{1}{p}} \|u - v\|_{W^{k,p}}.
\end{aligned}$$

Tedy je-li splněna podmínka (4.18), je G kontrakce a je tak zaručena existence a jedinečnost řešení problému (4.15). ∎

Poznámka Všimněme si, že nerovnost (4.18) pro $K = 0$ popisuje pro pevné ϵ množinu $M_\epsilon(A)$ dvojic (α, β), pro které má problém $-Au + \alpha u^+ - \beta u^- = o$ jediné řešení. Vzhledem k tomu, že tato rovnice má vždy triviální řešení, musí být $\Sigma(A) \cap M_\epsilon(A) = \varnothing \ \forall \epsilon \in \rho(A)$. Tudíž komponenty množiny

$$M(A) \equiv \bigcup_{\epsilon \in \rho(A)} M_\epsilon(A)$$

tvoří tzv. *zakázané oblasti* Fučíkova spektra $\Sigma(A)$. Navíc pro každé $(\alpha, \beta) \in M(A)$ má zřejmě rovnice

$$-Au + \alpha u^+ - \beta u^- = f$$

právě jedno řešení pro každé $f \in L^1(\Omega)$.

4.4 O druhém zobecnění

Začněme malou motivací. Předpokládejme funkci $f : (0,\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,t)$ je 2π-periodická v t a spojitou funkci $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ψ má sublineární růst. Dále nechť α, β jsou reálné. Uvažujeme následující problém pro rovnici nosníku se skákající nelinearitou:

$$\begin{aligned} &u_{tt} + u_{xxxx} + \alpha u^+ - \beta u^- + \psi(u) = f(x,t), && (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}, \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0, && t \in \mathbb{R}, \\ &u(x,t) = u(x,t+2\pi), && (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Hledáme tedy 2π-periodické řešení rovnice nosníku splňující Navierovy okrajové podmínky.

Operátor nosníku $L = -(\partial_t^2 + \partial_x^4)$ s uvažovanými periodickými a okrajovými podmínkami má vlastní čísla λ_{mn} a vlastní funkce $\varphi_{mn}, \omega_{mn}$ dány vztahem

$$\begin{aligned} \lambda_{mn} &= n^2 - m^4, && m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \varphi_{mn} &= \sin mx \sin nt, && m, n \in \mathbb{N}, \\ \omega_{mn} &= \sin mx \cos nt, && m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Nechť $\Omega = (0,\pi) \times (0,2\pi)$. Nyní systém $\{\varphi_{mn}, \omega_{mn}\}$ tvoří ortogonální systém prostoru $H = L(\Omega)$. Na H uvažujeme standardní skalární součin i normu prostoru $L^2(\Omega)$. Přejděme k abstraktní realizaci operátoru nosníku. Nechť $L : D(L) \subset H \to H$, kde

$$D(L) \equiv \left\{ u \in H : \sum_{m,n} |\lambda_{mn}|^2 |(u, \varphi_{mn} + \omega_{mn})_H|^2 < \infty \right\},$$

$$Lu \equiv \sum_{m,n} \lambda_{mn} (u, \varphi_{mn} + \omega_{mn})_H (\varphi_{mn} + \omega_{mn}).$$

Takto definovaný operátor má známou řadou vlastností. L je uzavřený, samoadjungovaný a má hustý definiční obor v H. Dále pro libovolné $\epsilon \in \rho(L)$ je $L - \epsilon I$ invertibilní. Pro inverzi $(L - \epsilon I)^{-1}$ platí, že je definovaná na celém H, lineární a kompaktní.

Ovšem pokud definujeme řešení problému (4.19) jako $u \in D(L)$ splňující rovnici

$$-Lu + \alpha u^+ - \beta u^- + \psi(u) = f, \tag{4.20}$$

kde f je libovolný prvek H, pak zřejmě nelze podobně jako u mnoha jiných problémů aplikovat větu 4.3. Problémem může být např. kompaktnost operátorů $u \to \alpha u^+ - \beta u^-$, $u \to \psi \circ u$. K důkazu kompaktnosti nelineárních operátorů v předchozí sekci jsme použili jejich spojitost na Sobolevových prostorech $W^{1,p}(\Omega)$ a následně kompaktní vnoření $W^{1,p}(\Omega)$ do $L^1(\Omega)$ (pro nějaké p, N, Ω). Toto kompaktní vnoření však mnohdy nemáme k dispozici. Požadujeme-li však od operátoru L silnější vlastnost, postačí nám pouze spojitost příslušných operátorů superpozice z $L^p(\Omega)$ do $L^q(\Omega)$ pro nějaké p, q.

Hlavní teorém

Problémy typu (4.20) byly motivací k formulování následující věty. Čtenář snadno nahlédne, že tato věta je z hlediska předpokladů zcela jiné povahy než věta 4.3.

VĚTA 4.4 *Uvažujme $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ omezenou oblast a $1 \le q \le p < \infty$. Nechť $A : D(A) \subset L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ je lineární operátor, $D(A)$ je lineární podprostor $L^p(\Omega)$ a existuje $\epsilon \in \mathbb{R}$ tak, že $(A - \epsilon I)^{-1}$ je kompaktní na $L^q(\Omega)$. Je-li $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce se sublineárním růstem a $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}_\mathrm{I}(A)$, potom*

$$-Au + \alpha u^+ - \beta u^- + \psi(u) = f \tag{4.21}$$

má řešení pro každé $f \in L^q(\Omega)$.

Tato věta se později dočká dalšího zeslabení požadavků za předpokladu, že v uvažovaném problému bude ψ triviální.

Operátorová formulace

Na prostoru $D(A)$ uvažujeme standardní normu prostoru $L^p(\Omega)$. Nyní definujme operátory $T_{\alpha,\beta}, S$:

$$T_{\alpha,\beta}: \ L^p(\Omega) \to L^q(\Omega), \qquad T_{\alpha,\beta}: \ u \mapsto \alpha u^+ - \beta u^-;$$
$$S: \ L^p(\Omega) \to L^q(\Omega), \qquad S: \ u \mapsto \psi \circ u;$$

pro α, β reálné. Nechť $f \in L^q(\Omega)$ je libovolné. Řešením problému (4.21) rozumíme $u \in D(A)$ splňující rovnici

$$Au - T_{\alpha,\beta} u - Su + f = o. \tag{4.22}$$

Přípravná část

Existuje $\epsilon \in \mathbb{R}$ takové, že $A_\epsilon^{-1} \equiv (A - \epsilon)^{-1} : L^q(\Omega) \to D(A) \subset L^p(\Omega)$ je lineární kompaktní (a tedy i spojitý) operátor. Aplikací na rovnici (4.22) dostaneme ekvivalentní rovnici

$$u - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} u - A_\epsilon^{-1} \circ Su + A_\epsilon^{-1} f = o. \tag{4.23}$$

O vlastnostech operátorů vystupujících v (4.23) nyní zformulujeme několik pomocných tvrzení.

LEMMA 4.15 *Operátory $T_{\alpha,\beta}, S$ jsou spojité.*

DŮKAZ. Máme-li $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ libovolnou posloupnost a prvek $u \in L^p(\Omega)$, pak pro $T_{\alpha,\beta}$ platí

$$\begin{aligned}
\|T_{\alpha,\beta} u_n - T_{\alpha,\beta} u\|^q_{L^q(\Omega)} &= \int_\Omega |\alpha(u_n^+ - u^+) - \beta(u_n^- - u^-)|^q \\
&\le |\alpha|^q \int_\Omega |u_n^+ - u^+|^q + |\beta|^q \int_\Omega |u_n^- - u^-|^q \\
&\le (|\alpha|^q + |\beta|^q) \int_\Omega |u_n - u|^q \\
&\le (|\alpha|^q + |\beta|^q) K \|u_n - u\|^q_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}$$

pro nějaké K kladné. Tudíž $T_{\alpha,\beta}$ je spojitý. Pro operátor S platí věta o spojitosti operátoru superpozice na Lebesgueových prostorech (viz [6], Věta 1.6.1). V našem případě věta zaručuje za předpokladu sublineárního růstu funkce ψ s exponentem $\gamma \in [0, 1)$ spojitost operátoru $S : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ pro $\gamma q \le p$. To je ovšem postačující, neboť předpokládáme $q \le p$. Tudíž S je spojitý. ■

Odsud dostáváme na základě kompaktnosti A_ϵ^{-1}, že operátory $A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha,\beta}, A_\epsilon^{-1} \circ S : L^p(\Omega) \to D(A) \subset L^p(\Omega)$ jsou kompaktní. Lze tedy definovat Leraẙuv-Schauderův stupeň pro kompaktní identitu

$$I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}.$$

Jistě nepřekvapí ani platnost lemmatu o nenulovosti stupně tohoto zobrazení.

LEMMA 4.16 *Nechť dvojice (α, β) náleží do regionu typu (I) operátoru A. Potom Leraẙuv-Schauderův stupeň*

$$\deg[I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}, B(1), o]$$

je liché (tedy nenulové) číslo.

DŮKAZ JE OBDOBNÝ DŮKAZU LEMMATU 4.5. ■

Zbývá ukázat následující jednoduché lemma o normě operátoru S.

LEMMA 4.17 *Pro operátor S existují kladné konstanty c_1, c_2 tak, že platí nerovnost*

$$\|Su\|^q_{L^q(\Omega)} \le c_1 + c_2 \|u\|^{\gamma q}_{L^p(\Omega)} \ \forall u \in L^p(\Omega).$$

DŮKAZ. Provedeme obdobné odhady jako v důkazu lemmatu 4.13. Pro každé $u \in L^p(\Omega)$ platí

$$\begin{aligned} \|Su\|_{L^q}^q = \int_\Omega |\psi(u)|^q &\le \int_\Omega |\hat{c}_1 + \hat{c}_2|u|^\gamma|^q \\ &\le \hat{c}_1^q \operatorname{meas}(\Omega) + \hat{c}_2^q \|u\|_{L^{\gamma q}}^{\gamma q} \\ &\le \hat{c}_1^q \operatorname{meas}(\Omega) + \hat{c}_2^q c_3 \|u\|_{L^q}^{\gamma q} \\ &\le \hat{c}_1^q \operatorname{meas}(\Omega) + \hat{c}_2^q c_3 c_4 \|u\|_{L^p}^{\gamma q} \end{aligned}$$

pro nějaké $\hat{c_1}, \hat{c_2}, c_3, c_4$ kladné. Tedy existují c_1, c_2 kladné tak, že $\|Su\|_{L^q}^q \le c_1 + c_2 \|u\|_{L^p}^{\gamma q}$. ∎

Důkaz hlavního teorém

Dostáváme se k důkazu samotné věty 4.4.

DŮKAZ VĚTY 4.4. Důkaz je opět modifikací důkazu věty 4.3. Uvažujeme rovnici (4.23) a definujeme zobrazení $\mathcal{H}:\ L^p(\Omega) \times [0,1] \to L^p(\Omega)$ následujícím předpisem:

$$\mathcal{H}(u,\tau) \equiv u - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} u - \tau(A_\epsilon^{-1} \circ Su - A_\epsilon^{-1} f).$$

Chceme tedy ukázat, zda $\mathcal{H}$ je přípustná homotopie zobrazení

$$I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} \quad a \quad I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} - A_\epsilon^{-1} \circ S + A_\epsilon^{-1} f.$$

Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že $\mathcal{H}$ není homotopie uvažovaných zobrazení, čili existuje posloupnost $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, $\|u_n\|_{L^p} \to \infty$ a posloupnost $(\tau_n) \subset [0,1]$ takové, že pro všechna n platí

$$u_n - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} u_n - \tau_n(A_\epsilon^{-1} \circ Su_n - A_\epsilon^{-1} f) = o. \tag{4.24}$$

Označme $\omega_n \equiv \|u_n\|_{L^p}^{-1} u_n$. Zřejmě platí

$$\omega_n - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}\ \omega_n - \tau_n A_\epsilon^{-1} \frac{Su_n}{\|u_n\|_{L^p}} + \tau_n A_\epsilon^{-1} \frac{f}{\|u_n\|_{L^p}} = o.$$

Množina (ω_n) je omezená v $L^p(\Omega)$. Tudíž ji kompaktní operátor $A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}$ zobrazí na relativně kompaktní v $L^p(\Omega)$. Z té vyberme (stejně značenou) posloupnost, která konverguje k nějakému prvku $\omega \in L^p(\Omega)$. Z rovnice (4.24) s využitím lemmatu (4.17) dostáváme přechodem $n \to \infty$, že $\omega_n \to \omega$ v $L^p(\Omega)$. Spojitost $A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}$ na $L^p(\Omega)$ pak implikuje, že

$$A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}\ \omega_n \to A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}\ \omega.$$

Odsud dostáváme rovnost

$$\omega - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}\ \omega = o.$$

Nejprve si všimněme, že to znamená, že $\omega \in D(A)$. Dále jsme předpokládali, že $(\alpha,\beta) \in \Re_{\mathrm{I}}(A)$, tudíž musí být ω triviální. To je samozřejmě spor s $\|\omega\|_{L^p} = 1$. Odtud $\mathcal{H}(u,\tau) \neq o\ \forall \tau \in [0,1]\ \forall u \in \partial B(R)$ pro nějaké R kladné. Jinými slovy, $\mathcal{H}$ je přípustnou homotopií uvažovaných zobrazení. Z vlastností Lerayova-Schauderova stupně pak dostaneme

$$\deg[I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon} - A_\epsilon^{-1} \circ S, B(R), -A_\epsilon^{-1} f] =$$

$$= \deg[I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}, B(R), o] = \deg[I - A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}, B(1), o] \neq 0.$$

Existuje alespoň jedno řešení rovnice (4.23), což jsme chtěli dokázat. ∎

POZNÁMKA Poznamenejme, že ve větě 4.4 můžeme místo spojité funkce $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sublineárním růstem (4.8) bez újmy uvažovat Carathéodoryovu funkci $\psi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující obecnější podmínku

$$|\psi(x,s)| \le a(x) + C|s|^\gamma \text{ pro s. v. } x \in \Omega\ \forall s \in \mathbb{R}$$

pro nějaké $a \in L^q(\Omega)$, C kladné a $\gamma \in [0,1)$.

Zpětně si všimněme, že předpoklad omezenosti oblasti Ω byl důležitý z hlediska spojitosti operátoru superpozice S (viz větu 1.6.1 v [6]). Jinde však tento předpoklad již klíčový není. Nabízí se tedy následující modifikace věty 4.4.

VĚTA 4.5 *Uvažujme $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ libovolnou oblast a $1 \leq q \leq p < \infty$. Nechť $A : D(A) \subset L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ je lineární operátor, $D(A)$ je lineární podprostor $L^p(\Omega)$ a existuje $\epsilon \in \mathbb{R}$ tak, že $(A - \epsilon I)^{-1}$ je kompaktní na $L^q(\Omega)$. Je-li $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce se sublineárním růstem a $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}_\mathrm{I}(A)$, potom*

$$-Au + \alpha u^+ - \beta u^- = f$$

má řešení pro každé $f \in L^q(\Omega)$.

Jednoznačnost řešení

POZOROVÁNÍ Uvažujme problém (4.23). Nechť je splněna následující podmínka:

$$\|A_\epsilon^{-1}\| \operatorname{meas}(\Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} < \frac{1}{|\alpha - \epsilon| + |\beta - \epsilon| + K}, \tag{4.25}$$

kde K je Lipschitzova konstanta funkce ψ. Potom existuje-li řešení (4.23), je jednoznačné.

DŮKAZ. Definujme operátor $G : L^p(\Omega) \to D(A) \subset L^p(\Omega)$, $Gu \equiv A_\epsilon^{-1} \circ T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}u - A_\epsilon^{-1} \circ Su + A_\epsilon^{-1} f$. Vidíme, že každé řešení rovnice (4.23) je pevným bodem operátoru G. Je-li naopak $u \in L^p(\Omega)$ pevným bodem G, je zřejmě $u \in D(A)$, a tedy je řešením rovnice (4.23). Ukažme tedy, že za předpokladu platnosti nerovnosti (4.25) je G kontrakce. Máme

$$\begin{aligned}
\|Gu - Gv\|_{L^p} &= \|A_\epsilon^{-1} \circ (T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}u - T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}v + Su - Sv)\|_{L^p} \\
&\leq \|A_\epsilon^{-1}\|(\|T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}u - T_{\alpha-\epsilon,\beta-\epsilon}v\|_{L^q} + \|Su - Sv\|_{L^q}) \\
&\leq \|A_\epsilon^{-1}\| \left((|\alpha - \epsilon| + |\beta - \epsilon|)\|u - v\|_{L^q} + K\|u - v\|_{L^q}\right) \\
&\leq \|A_\epsilon^{-1}\| \left(|\alpha - \epsilon| + |\beta - \epsilon| + K\right) \operatorname{meas}(\Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|u - v\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Tedy je-li splněna podmínka (4.25), je G kontrakce a je tak zaručena existence a jedinečnost řešení problému (4.23). ∎

Aplikace

Vrátíme se k motivaci ze začátku této části kapitoly a k problému (4.19). Můžeme nyní formulovat

VĚTA 4.6 *Nechť $f : (0, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, t)$ je 2π-periodická v t a patří do $L^2((0, \pi) \times (0, 2\pi))$. Buď $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce se sublineárním růstem. Je-li $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}_\mathrm{I}(L)$, potom problém*

$$\begin{aligned}
&u_{tt} + u_{xxxx} + \alpha u^+ - \beta u^- + \psi(u) = f(x, t), && (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}, \\
&u(0, t) = u(\pi, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t) = 0, && t \in \mathbb{R}, \\
&u(x, t) = u(x, t + 2\pi), && (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{4.26}$$

má alespoň jedno řešení.

Definujeme-li řešení problému (4.26) jako řešení rovnice (4.20), pak se snadno přesvědčíme o splnění všech předpokladů věty 4.4.

Pohybujeme se na omezené oblasti $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Z motivační části této podkapitoly již víme, že operátor $L : D(L) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ je lineární a uzavřený. Dále pro libovolné $\epsilon \in \rho(L) \neq \varnothing$ má $L - \epsilon I$ kompaktní inverzi definovanou na celém prostoru $L^2(\Omega)$. Nakonec funkce ψ a hodnoty α, β jsou zvoleny jako ve větě 4.4. Jsou tedy splněny všechny její předpoklady a existuje řešení problému (4.26) ve smyslu prvku $u \in D(L)$ řešícího rovnici (4.20).

Na závěr ukážeme ještě jednu aplikaci. Tentokrát aplikujeme větu 4.5 na Schrödingerův operátor na neomezené oblasti.

VĚTA 4.7 *Uvažujme Schrödingerův operátor* $L \equiv -\Delta + V$ *v* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *s lokálně integrovatelným potenciálem* V. *Nechť* $V(x) \to \infty$ *pro* $|x| \to \infty$ *a* $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(-L)$. *Potom problém*

$$-\Delta\Psi + V\Psi + \alpha\Psi^+ - \beta\Psi^- = f$$

má alespoň jedno řešení pro každé $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Je dobře známo, že L s potenciálem V splňujícím $V(x) \to \infty$ pro $|x| \to \infty$ je samoadjungovaný a má kompaktní inverzi na $L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ (viz [17]). Vzhledem k tomu, že je L samoadjungovaný, je též uzavřený. Jsou tak splněny všechny předpoklady věty 4.5 a dostáváme odtud platnost věty 4.7.

„Říká se, že každý problém má své řešení - nevěřte tomu.“

Martin Kuchynka

5 Skákající nelinearity v abstraktních Banachových prostorech

V této kapitole zasadíme výsledky předchozí kapitoly do obecnějšího kontextu operátorových rovnic v abstraktních Banachových prostorech. Celou kapitolu lze rozdělit na dvě části. V první části rozšiřujeme existenční výsledky předchozí kapitoly pro abstraktní operátorové rovnice a dokazujeme tak jejich řešitelnost na regionech typu (I). Ve druhé části kapitoly se pak soustředíme na tyto rovnice v rezonanci, kde dosáhneme postačujících podmínek existence jejich řešení. V obou případech uvažujeme tyto rovnice s tzv. *Fredholmovými operátory o indexu nula.*

Než přejdeme k samotné řešitelnosti rovnic na abstraktních prostorech, věnujme následujících několik odstavců teoretickému aparátu, kterého bylo k jejímu studiu užito.

Fredholmovy operátory

Nejprve uvedeme definici Fredholmova operátoru s indexem k a následně uvedeme některé jeho významné vlastnosti.

Definice 5.1 Nechť X, Z jsou reálné normované prostory. Operátor $L : D(L) \subset X \to Z$ nazveme Fredholmovým operátorem s indexem k, jestliže jsou splněny podmínky

i) $\operatorname{Im} L$ je uzavřený podprostor Z.

ii) $\operatorname{ind} L$[1] $\equiv \dim \operatorname{Ker} L - \dim \operatorname{Coker} L$[2] $= k$ je konečné číslo.

Pro Fredholmovy operátory s indexem nula platí, že existují spojité projekce P, Q takové, že řetěz

$$X \xrightarrow{P} D(L) \xrightarrow{L} Z \xrightarrow{Q} Z \tag{5.1}$$

je přesný, neboli $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L$ a $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L$. Navíc platí následující rozklady prostorů X, Z:

$$X = \operatorname{Ker} L \oplus \operatorname{Ker} P, \quad Z = \operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Im} Q.$$

Potom je $L_p \equiv L|_{D(L)\cap \operatorname{Ker} P}$ bijekce a existuje spojitá inverze

$$K_p \equiv L_p^{-1} : \operatorname{Im} L \to D(L) \cap \operatorname{Ker} P. \tag{5.2}$$

[1] Ekvivalentně lze index $\operatorname{ind} L$ definovat jako $\operatorname{ind} L \equiv \dim \operatorname{Ker} L - \operatorname{codim} \operatorname{Im} L$, kde $\operatorname{codim} \operatorname{Im} L = \dim (\operatorname{Im} L)^{\perp}$.
[2] Kojádro L je definováno jako $\operatorname{Coker} L \equiv Z/\operatorname{Im} L$, tj. faktorprostor Z s relací $x \sim y \iff x - y \in \operatorname{Im} L$.

Mawhinův koincidenční stupeň

V 70. letech 20. století matematici Gaines a Mawhin představili teorii koincidenčního stupně (coincidence degree theory). (Čtenáři doporučujeme [18], kde je podán ucelený výklad o koincidenčním stupni a jeho základních vlastnostech.) Ta slouží především jako mocná technika dokazování existence řešení nelineárních rovnic na Banachových prostorech. Konkrétně je určena pro studium rovnic typu

$$Lx = Nx,$$

kde $L : D(L) \subset X \to Z$ je lineární operátor a $N : X \to Z$ je nelineární operátor.

Pro studium takové rovnice lze často samozřejmě použít Lerayova-Schauderova stupně. Ostatně tak jsme učinili v předchozí kapitole. Tam jsme postupovali tak, že jsme problém tvaru $Lx = Nx$ převedli na problém

$$x = (L - \epsilon I)^{-1} \circ (N - \epsilon I)x.$$

Nicméně může nastat situace, kdy nelze nikterak přímo Lerayův-Schauderův stupeň použít. Mluvíme především o situaci, kdy neexistuje inverze L^{-1}, resp. v našem případě $(L - \epsilon I)^{-1}$. Další kritickou situací může být ta, kdy sice existuje příslušná inverze, ale $L^{-1} \circ N$ není kompaktní operátor. Jak ukážeme dále, východiskem může být koincidenční stupeň.

Předpokládejme, že operátor L je Fredholmův s indexem nula a operátor $N : \overline{\Omega} \subset X \to Z$ je spojitý, Ω je otevřená omezená podmnožina X. Gaines a Mawhin nejprve konstruují zobrazení M tak, že řešit rovnici $Lx = Nx$ je ekvivalentní s hledáním pevného bodu M. Zobrazení $M : \overline{\Omega} \to D(L) \subset X$ je konstruováno jako $M \equiv P + (\Lambda\Pi + K_{PQ})N$, kde

- P, Q jsou jako v (5.1);
- $K_{PQ} \equiv K_p(I - Q) : Z \to D(L) \cap \operatorname{Ker} P$, kde K_p je jako v (5.2) a $I : Z \to Z$ je identita;
- $\Pi : Z \to \operatorname{Coker} L$ je tzv. *kanonická surjekce*, $\Pi : z \mapsto z + \operatorname{Im} L$ a $\operatorname{Ker} \Pi = \operatorname{Ker} Q$;
- $\Lambda : \operatorname{Coker} L \to \operatorname{Ker} L$ je libovolný isomorfismus (bez újmy uvažujme Λ lineární);

Spojitý operátor N, pro nějž platí, že $\Pi N(\Omega)$ je omezená a $K_{PQ}N : \overline{\Omega} \to Z$ je kompaktní, nazveme *L-kompaktním.* Autoři dokazují, že je-li L Fredholmův operátor s indexem nula a N je L-kompaktní, potom je operátor M kompaktní. Je-li navíc $o \notin (L - N)(D(L) \cap \partial\Omega)$, je Lerayův-Schauderův stupeň perturbace identity $I - M$ vzhledem k Ω a prvku $o \in Z$ dobře definován. Navíc hodnota stupně záleží pouze na L, N a Ω! Koincidenční stupeň dvojice operátorů (L, N) vzhledem k množině $\Omega \subset X$ je konečně definovaný jako

$$\deg[(L, N), \Omega] \equiv \deg[I - M, \Omega, o]. \tag{5.3}$$

Dále autoři dokazují, že takto definovaný stupeň má všechny základní vlastnosti Lerayova-Schauderova stupně a platí též zobecněná Borsukova věta. Pro detaily viz [18], [19].

Povšimněme si, jak koincidenční stupeň (L, N) souvisí s Lerayovým-Schauderovým stupněm pro $I - M$ ve dvou zvláštních případech. Uvažujme nejprve speciální případ, kdy $Z = X$ a $L = I$. Zřejmě pak $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} L = \{o\}$ a $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im} L = Z$, tudíž $\operatorname{Coker} L = \{o\}$. Odsud dostáváme, že P, Q, Π a Λ jsou nulové zobrazení a tudíž $M = N$. To je případ, kdy

$$\deg[(L, N), \Omega] = \deg[(I, N), \Omega] = \deg[I - N, \Omega, o].$$

Koincidenční stupeň dvojice (L, N) se tedy v tomto speciálním případě redukuje na běžný Lerayův-Schauderův stupeň.

Nyní uvažme jiný případ. Nechť $L_\epsilon \equiv L - \epsilon I$ je pro nějaké ϵ bijekce z $D(L)$ do Z a označme obdobně $N_\epsilon \equiv N - \epsilon I$. Pak $\operatorname{Ker}(L_\epsilon) = \{o\}$ a $\operatorname{Im} L_\epsilon = Z$. Opět dostáváme, že P, Q, Π, Λ jsou nulové. Tentokrát $M = L_\epsilon^{-1} N_\epsilon$, což je případ, jaký nastával při našem studium problémů v předchozí kapitole. Tento případ však nastává pouze za příslušných předpokladů. Speciálně L_ϵ^{-1} je definovaný na celém prostoru Z a je zde kompaktní. Právě tyto předpoklady v následujících řádcích zeslabíme.

5.1 Operátorové rovnice mimo rezonanci

Uvažujme reálné Banachovy prostory X, Y, Z. Dále $K \subset Y$ je uzavřený konvexní kužel, tj. uzavřená konvexní podmnožina prostoru Y splňující následující podmínky:

i) $\forall u_1, u_2 \in K \; \forall \alpha, \beta \geq 0 : \alpha u_1 + \beta u_2 \in K$;

ii) $K \cap (-K) = \{o\}$;

Nechť K navíc indukuje na Y částečné uspořádání $\preceq$ (reflexivní, antisymetrická a tranzitivní relace, $u \preceq v$ právě tehdy, když $(v - u) \in K$) takové, že částečně uspořádaný prostor $(Y, \preceq)$ je tzv. *mřížka* či též *svaz* (lattice). Tj. pro každé dva prvky $u, v \in Y$ existuje supremum a infimum. Pak lze definovat kladnou a zápornou část libovolného prvku $u \in Y$ jako $u^{\pm} \equiv (\pm u) \vee o \in K$. Pro tyto platí $u = u^+ - u^-$. Dalším předpokladem je spojitost zobrazení $u \mapsto u^{\pm}$. Budeme se zabývat existencí řešení rovnice typu

$$-Lu + \alpha T u^+ - \beta T u^- + Su = f. \tag{5.4}$$

V nadcházejícím textu uvažujme, že jsou splněny tyto předpoklady:

(A1) X je spojitě vnořen do Y;

(A2) $L : D(L) \subset X \to Z$ je Fredholmův operátor s indexem nula;

(A3) $K_p : \operatorname{Im} L \to D(L) \cap \operatorname{Ker} P$ (definovaný jako v (5.2)) je kompaktní.

(A4) $T : Y \to Z$ je spojitý pozitivně homogenní operátor a zobrazení $u \mapsto Tu^{\pm}$ je spojité;

(A5) $G : X \to Z$ je spojitý operátor a $\|Gu\|_Z \leq c_1 + c_2 \|u\|_X^{\gamma}$ pro nějaké $c_1, c_2 \geq 0$ a $\gamma \in [0, 1)$;

Samozřejmě je možné též v zájmu studia rovnic typu (5.4) vhodně rozšířit definici Fučíkova spektra a regionů typu (I) a (II) pro dvojici operátorů (L, T) tak, aby zastávaly tyto množiny obdobnou roli jako v případě, kdy T byla identita. Nechť tedy

$$\Sigma(L, T) \equiv \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{ existuje } u \in \partial B_X(1) \text{ tak, že } Lu = \alpha T u^+ - \beta T u^-\}$$

je Fučíkovo spektrum dvojice zobrazení (L, T). Regiony typu (I) budeme opět rozumět komponenty množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma(L, T)$. obsahující alespoň jeden bod (λ, λ) pro nějaké λ reálné. Sjednocení těchto komponent pak označíme $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(L, T)$. Obdobně regiony typu (II) komponenty budou komponenty množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \{\Sigma(L, T) \cup \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(L, T)\}$, kterou označíme $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}(L, T)$.

Tudíž je-li T identita, tyto nově zavedené pojmy splývají s již dříve zavedeným Fučíkovým spektrem operátoru L a jeho regiony typu (I) a (II). O tom, že takto zavedené pojmy hrají v řešitelnosti rovnice (5.4) obdobnou roli jako doposud, svědčí mimo jiné následující věta.

Hlavní teorém

VĚTA 5.1 *Nechť předpoklady (A1) až (A5) jsou splněny. Je-li $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(L, T)$, potom rovnice*

$$-Lu + \alpha T u^+ - \beta T u^- + Su = f \tag{5.5}$$

má alespoň jedno řešení pro každé $f \in Z$.

DŮKAZ. Budeme postupovat užitím Mawhinova koincidenčního stupně. Uvažujme tedy zobrazení P, Q, Λ, Π a K_{PQ} jako v části textu o koincidenčním stupni a definujme zobrazení $M : X \to X$,

$$Mu \equiv Pu + (\Lambda \Pi + K_{PQ})(\alpha T u^+ - \beta T u^- + Su - f).$$

Potom rovnice (5.5) má řešení právě tehdy, když existuje pevný bod operátoru M. Označme $Nu \equiv \alpha T u^+ - \beta T u^- + Su - f$ a ověřme, že jsou splněny předpoklady pro kompaktnost M. Π, T a S jsou omezená zobrazení a tudíž pro pevné f je ΠN též omezený. Dále z kompaktnosti K_p a spojitosti I, Q, N pro pevné f dostáváme kompaktnost $K_{PQ}N$. Odsud již dostáváme kompaktnost M. Stačí tedy ukázat, že $\deg[I - M, B(R), o] \neq 0$ pro nějaké R kladné. Uvažujme zobrazení $\mathcal{H} : X \times [0,1] \to X$ definované předpisem

$$\mathcal{H}(u,\tau) \equiv u - Pu - (\Lambda\Pi + K_{PQ})N_\tau u,$$

kde $N_\tau u \equiv \alpha T u^+ - \beta T u^- + \tau(Su - f)$. Ukažme, že se jedná o přípustnou homotopii zobrazení $\mathcal{H}(u,0), \mathcal{H}(u,1)$. Budeme postupovat sporem. Předpokládejme existenci $(u_n) \subset X$, $\|u_n\| \to \infty$ a $(\tau_n) \subset [0,1]$ tak, že $\mathcal{H}(u_n, \tau_n) = o\ \forall n$. Označme $\omega_n \equiv u_n/\|u_n\|$. Potom máme z linearity $\Lambda\Pi + K_{PQ}$ platnost

$$\omega_n - P\omega_n - (\Lambda\Pi + K_{PQ})[\alpha T\omega_n^+ - \beta T\omega_n^- + \tau_n\|u_n\|^{-1}(Su_n - f)] = o.$$

V první řadě $\|u_n\|^{-1}(Su_n - f) \to o$. Dále omezenou množinu (ω_n) zobrazí $P + (\Lambda\Pi + K_{PQ})N_0$ na relativně kompaktní. Vybereme z ní konvergentní posloupnost. Řekněme, že jejím limitním prvkem je $\omega \in X$. Snadno se tak přesvědčíme, že $\omega_n \to \omega$. Navíc zobrazení P a $(\Lambda\Pi + K_{PQ})N_0$ jsou spojité, tudíž limitním přechodem $n \to \infty$ obdržíme vztah

$$\omega - P\omega - (\Lambda\Pi + K_{PQ})N_0\omega = o.$$

Dle konstrukce zobrazení M je tato rovnost ekvivalentní s $L\omega = \alpha T\omega^+ - \beta T\omega^-$. Vzhledem k tomu, že $\|\omega\| = 1$, tj. $\omega \neq o$, zřejmě jsme došli ke sporu s předpokladem $(\alpha,\beta) \in \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(L,T)$. $\mathcal{H}$ je přípustná homotopie a tudíž pro nějaké R platí

$$\deg[(L, N_1), B(R)] = \deg[(L, N_0), B(R)].$$

Zbývá ukázat, že $\deg[(L, N_0), B(r)] \neq 0$ pro nějaké r. Uvažujme proto hladkou křivku $\varphi(t) \equiv (\alpha(t), \beta(t)) \subset \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}(L,T)\ \forall t \in [0,1]$ a takovou, že $\varphi(0) = (\alpha,\beta), \varphi(1) = (\lambda,\lambda)$. Opět lze obdobným sporem ukázat, že

$$\mathcal{H}_2(u,t) \equiv u - Pu - (\Lambda\Pi + K_{PQ})(\alpha(t)Tu^+ - \beta(t)Tu^-) \neq o\ \forall u \in \partial B(r)\ \forall t \in [0,1]$$

pro dostatečně velké r kladné. Navíc se lze snadno přesvědčit, že $\mathcal{H}_2(u,1)$ je liché zobrazení. Vezměme tedy větší z poloměrů r, R (předpokládejme bez újmy na obecnosti, že to je poloměr R) a konečně tak dostáváme

$$\deg[(L, N_1), B(R)] = \deg[(L, N_0), B(R)] =$$

$$= \deg[I - P - \lambda(\Lambda\Pi + K_{PQ})(Tu^+ - Tu^-), B(R), o] \neq 0.$$

Tedy z existenční vlastnosti Mawhinova koincidenčního stupně (viz [18], Theorem 4.1) existuje v kouli $B(R)$ alespoň jedno řešení rovnice (5.5). ■

Poznámka Předpoklad kompaktnosti K_p a spojitosti T, S lze též bez újmy zaměnit za předpoklad spojitosti K_p a kompaktnosti T, S.

5.2 Operátorové rovnice v rezonanci

V této části budeme studovat operátorové rovnice typu (5.4) v rezonanci. Konkrétně budeme studovat existenci řešení takové rovnice pro případ, kdy dvojice (α, β) náležící Fučíkovu spektru $\Sigma(L, T)$. Poznamenejme, že otázka řešitelnosti problémů se skákajícími nelinearitami s $(\alpha, \beta) \in \Sigma$ nikdy nebyla uspokojivě zodpovězena. Existují jen několik ojedinělých výsledků, které alespoň na některých podmnožinách příslušného Fučíkova spektra (ať už konkrétního operátoru nebo obecněji formulovaného operátoru na konkrétních prostorech) formulují podmínky pro pravou stranu f, za jakých lze existenci řešení zaručit. Významnými podmínkami tohoto typu jsou Landesmanovy-Lazerovy podmínky, které byly poprvé představeny v roce 1969 v práci [21] Lazera a Leache. O rok později byly Landesmanem a Lazerem tyto podmínky zobecněny pro eliptické PDR v [22].

Z prací o rovnicích typu (5.4) v rezonanci vzhledem k $(\alpha, \beta) \in \Sigma$ vzpomeňme článek [20], kde byly zformulovány existenční věty pro rovnice na prostoru $L^2(\Omega)$ pro L samoadjungovaný operátor s kompaktní inverzí a $T = I$.

Přípravná část

V celé této části textu uvažujeme zobrazení P, Q, Λ, Π a K_{PQ} definovaná stejně jako v části o Mawhinově koincidenčním stupni. Navíc předpokládejme, že $X = Z = H$ je Hilbertův prostor funkcí se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Prostor Y s částečným uspořádáním $\preceq$ uvažujeme jako v přechozí části kapitoly a navíc předpokládáme, že je $(Y, \|\cdot\|, \preceq)$ tzv. *Banachova mřížka* (Banach lattice), tj. prostor s dvojí strukturou - normou a částečným uspořádáním - přičemž mezi těmito platí následující vztah:

$$|u| \preceq |v| \text{ implikuje } \|u\| \leq \|v\|$$

pro každé $u, v \in Y$. Zde absolutní hodnota prvku prostoru Y je definována jako $|u| \equiv u^+ + u^-$. Dále označme $\mathcal{M} \equiv \{u \in H \mid Lu = \alpha T u^+ - \beta T u^-\}$, množinu prvků, ke kterým se budou vázat naše postačující podmínky existence řešení. Nakonec původní předpoklady (A1) až (A5) předchozí části kapitoly nahraďme následujícími předpoklady:

(R1) $H \hookrightarrow Y$ a $L : D(L) \subset H \to H, T : Y \to H$ jsou lineární samoadjungované operátory;

(R2) $\chi : K \to H, \chi(u)$ je charakteristická funkce $\{u \succ o\}$ a $\chi(u)v \in H$ $\forall u \in K$ $\forall v \in H$;

(R3) T a $u \mapsto u^{\pm}$ jsou spojité a $K_{PQ}T$ je kompaktní;

(R4) Pro dané $(\alpha, \beta) \in \Sigma(L, T)$ existují hodnoty δ_+, δ_- takové, že $(\alpha + t\delta_+, \beta + t\delta_-) \in \Re_{\mathrm{I}}(L, T)$ $\forall t \in (0, 1]$;

(R5) $L_u \equiv L - T(\alpha\chi(u^+) + \beta\chi(u^-))I : \mathcal{M}^\perp \to H$ má omezenou inverzi $L_u^{-1} : \operatorname{Im} L_u \to \mathcal{M}^\perp$ $\forall u \in \mathcal{M}$.

Hlavní teorémy

Než přistoupíme k formulaci hlavních vět, uvažujme následující doplňující předpoklady:

(R6) χ je spojité zobrazení a $\|(\chi(u^{\pm}) - \chi(v^{\pm}))(u - v)\| \leq C\|\chi(u^{\pm}) - \chi(v^{\pm})\|\|u - v\|$ $\forall u, v \in H$ pro nějaké C kladné;

*(R6) (G, σ, μ) je prostor s mírou, $D(L) \hookrightarrow L^q(G) \hookrightarrow L^p(G) \hookrightarrow H$ pro nějaké $q > p$ a $\|o_H\|_{L^q} = 0$.

VĚTA 5.2 *Nechť předpoklady (R1) až (R6) jsou splněny. Potom rovnice*

$$-Lu + \alpha T u^+ - \beta T u^- = f \tag{5.6}$$

má alespoň jedno řešení, kdykoliv platí $\langle \delta_+ T\omega^+ - \delta_- T\omega^-, \omega \rangle > 0$ *a* $\langle f, \omega \rangle < 0$ *pro každé* $\omega \in \partial B(1) \cap \mathcal{M}$ *nebo* $\langle \delta_+ T\omega^+ - \delta_- T\omega^-, \omega \rangle < 0$ *a* $\langle f, \omega \rangle > 0$ *pro každé* $\omega \in \partial B(1) \cap \mathcal{M}$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\langle \delta_+ T\omega^+ - \delta_- T\omega^-, \omega\rangle > 0$ a $\langle f, \omega\rangle < 0$ $\forall \omega \in \partial B(1) \cap \mathcal{M}$. Bude opět využito Mawhinova stupně. Nejprve rovnici (5.6) převedeme na problém o pevném bodě. K tomu definujme zobrazení $M : H \to H$ ve tvaru

$$Mu \equiv Pu + (\Lambda\Pi + K_{PQ})(\alpha T u^+ - \beta T u^- - f).$$

Toto zobrazení je kompaktní na základě stejných argumentů jako v důkazu věty 5.1. Uvažujeme-li $Nu \equiv \alpha T u^+ - \beta T u^- - f$, stačí ukázat, že $\deg[(L, N), B(R)] \equiv \deg[I - M, B(R), o] \neq 0$ pro nějaké R kladné. Označme $N_\tau u \equiv (\alpha + \tau\delta_+) T\chi(u^+)u + (\beta + \tau\delta_-) T\chi(u^-)u - (1-\tau) f$. Lze tak definovat homotopii $\mathcal{H} : H \times [0, 1] \to H$ předpisem

$$\mathcal{H}(u, \tau) \equiv u - Pu - (\Lambda\Pi + K_{PQ}) N_\tau u.$$

Ukažme, že se jedná o přípustnou homotopii zobrazení $\mathcal{H}(u, 0)$, $\mathcal{H}(u, 1)$. Budeme postupovat sporem. Předpokládejme existenci $(u_n) \subset H$, $\|u_n\| \to \infty$ a $(\tau_n) \subset [0, 1]$ tak, že $\mathcal{H}(u_n, \tau_n) = o$ $\forall n$. Označme $\omega_n \equiv u_n / \|u_n\|$. Potom máme z linearity $\Lambda\Pi + K_{PQ}$ platnost

$$L\omega_n = (\alpha + \tau_n\delta_+) T\chi(\omega_n^+)\omega_n + (\beta + \tau_n\delta_-) T\chi(\omega_n^-)\omega_n - (1-\tau_n)\frac{f}{\|u_n\|}. \tag{5.7}$$

Z vlastností zobrazení P, Λ, Π, K_{PQ} a T (viz důkaz věty 5.1) získáme existenci limitního prvku $\omega \in H$, k němuž konverguje nějaká podposloupnost posloupnosti $(P + (\Lambda\Pi + K_{PQ}) N_0 \omega_n)$ a limitním přechodem $n \to \infty$ dostaneme vztah

$$L\omega = (\alpha + \tau\delta_+) T\chi(\omega^+)\omega + (\beta + \tau\delta_-) T\chi(\omega^-)\omega.$$

Tato rovnost může být splněna pouze pro $\tau = 0$, a to prvkem $\omega \in \partial B(1) \cap \mathcal{M}$. Vraťme se ke vztahu (5.7) a zkonstruujme k $(\omega_n) \subset H$ posloupnost $\varphi_n \equiv R\omega_n$, kde $R : H \to \mathcal{M}$ je ortogonální projekce na $\mathcal{M}$. Pak platí $\|\omega_n - \varphi_n\| = \operatorname{dist}(\omega_n, \mathcal{M})$. Tudíž ω_n i φ_n konvergují k ω. Navíc $\omega_n - \varphi_n \perp \mathcal{M}$. Tj. $\omega_n - \varphi_n \in \mathcal{M}^\perp$. Rovnost (5.7) je ekvivalentní s rovností

$$L\omega_n = (\alpha T\chi(\varphi_n^+) + \beta T\chi(\varphi_n^-))\omega_n + (\alpha + \tau_n\delta_+)(T\chi(\omega_n^+) - T\chi(\varphi_n^+))\omega_n +$$

$$+(\beta + \tau_n\delta_-)(T\chi(\omega_n^-) - T\chi(\varphi_n^-))\omega_n + \tau_n(\delta_+ T\chi(\varphi_n^+) + \delta_- T\chi(\varphi_n^-))\omega_n - (1-\tau_n)\frac{f}{\|u_n\|}. \tag{5.8}$$

Tato rovnice má řešení právě tehdy, když platí

$$\langle (L - \alpha T\chi(\varphi_n^+) - \beta T\chi(\varphi_n^-))\omega_n, \varphi_n\rangle = (\alpha + \tau_n\delta_+)\langle (T\chi(\omega_n^+) - T\chi(\varphi_n^+))\omega_n, \varphi_n\rangle +$$

$$+(\beta + \tau_n\delta_-)\langle (T\chi(\omega_n^-) - T\chi(\varphi_n^-))\omega_n, \varphi_n\rangle + \tau_n\langle \delta_+ T\chi(\varphi_n^+) + \delta_- T\chi(\varphi_n^-)\omega_n, \varphi_n\rangle - (1-\tau_n)\frac{\langle f, \varphi_n\rangle}{\|u_n\|}.$$

Ovšem $(\varphi_n) \subset \mathcal{M}$, tudíž levá strana rovnosti je rovna nule. Odsud získáváme platnost

$$(\alpha + \tau_n\delta_+)\langle (T\chi(\omega_n^+) - T\chi(\varphi_n^+))\omega_n, \varphi_n\rangle + (\beta + \tau_n\delta_-)\langle (T\chi(\omega_n^-) - T\chi(\varphi_n^-))\omega_n, \varphi_n\rangle +$$

$$+\tau_n\langle \delta_+ T\chi(\varphi_n^+) + \delta_- T\chi(\varphi_n^-)\omega_n, \varphi_n\rangle + (\tau_n - 1)\frac{\langle f, \varphi_n\rangle}{\|u_n\|} = o. \tag{5.9}$$

Všimněme si, že též platí $(L - \alpha T\chi(\varphi_n^+) - \beta T\chi(\varphi_n^-))(\omega_n - \varphi_n) = (L - \alpha T\chi(\varphi_n^+) - \beta T\chi(\varphi_n^-))\omega_n$. S využitím tohoto faktu a předpokladu (R5) lze ze vztahu (5.8) získat pro každé n odhad

$$\begin{aligned}
\|\omega_n - \varphi_n\| \leq \|L_u^{-1}\| \|(\alpha + \tau_n\delta_+)(T\chi(\omega_n^+) - T\chi(\varphi_n^+))\omega_n + (\beta + \tau_n\delta_-)(T\chi(\omega_n^-) - T\chi(\varphi_n^-))\omega_n + \\
+ \tau_n(\delta_+ T\chi(\varphi_n^+) + \delta_- T\chi(\varphi_n^-))\omega_n - (1-\tau_n) f / \|u_n\| \| \\
\leq C_n(\|(T\chi(\omega_n^+) - T\chi(\varphi_n^+))\omega_n\| + \|(T\chi(\omega_n^-) - T\chi(\varphi_n^-))\omega_n\| + \tau_n(|\delta_-| + |\delta_+|) + \\
+ (1-\tau_n)\|f\| / \|u_n\|).
\end{aligned}$$

Pro nějaké kladné konstanty C_n. Označme $C \equiv \sup_{n\in\mathbb{N}} C_n < \infty$. Snadno se lze přesvědčit, že platí

$$|(\chi(\omega_n^+) - \chi(\varphi_n^+))\omega_n| \preceq |(\chi(\omega_n^+) - \chi(\varphi_n^+))(\omega_n - \varphi_n)|.$$

Jelikož T je omezený, Y je Banachova mřížka a platí (R6), lze učinit následující odhad

$$\|T(\chi(\omega_n^+) - \chi(\varphi_n^+))\omega_n\| \leq \|T\|\|\chi(\omega_n^+) - \chi(\varphi_n^+)\|\|\omega_n - \varphi_n\| \equiv K_n\|\omega_n - \varphi_n\|,$$

pro nějakou reálnou posloupnost $K_n \to 0$. Obdobnou úvahu lze provést též pro výraz se členy ω_n^-, φ_n^-. Tudíž je-li n dostatečně velké, platí na základě předchozího odhadu normy $\|\omega_n - \varphi_n\|$ nerovnost

$$\|\omega_n - \varphi_n\| \leq \hat{C}(\tau_n(|\delta_-| + |\delta_+|) + (1-\tau_n)\|f\|/\|u_n\|) \tag{5.10}$$

pro nějaké $\hat{C} > C$. Odsud je zřejmé, že pro dostatečně velké n lze členy

$$\langle (T\chi(\omega_n^+) - T\chi(\varphi_n^+))\omega_n, \varphi_n\rangle, \quad \langle (T\chi(\omega_n^-) - T\chi(\varphi_n^-))\omega_n, \varphi_n\rangle$$

v rovnosti (5.9) zanedbat. Tudíž pro taková n jsou členy $\langle \delta_+ T\chi(\varphi_n^+) + \delta_- T\chi(\varphi_n^-)\omega_n, \varphi_n\rangle, \langle f, \varphi_n\rangle$ stejného znaménka. To je ovšem spor s předpokladem. Musí tedy platit $\mathcal{H}(u,\tau) \neq 0$ $\forall u \in \partial B(R)$ $\forall \tau \in [0,1]$ pro dostatečně velké R. Odsud

$$\deg[(L, N_0), B(R)] = \deg[(L, N_1), B(R)].$$

Stejným argumentem jako v důkazu věty 5.1 získáváme, že stupeň dvojice (L, N_1) vzhledem ke kouli $B(R)$ je nenulový. Rovnice $Lu = Nu$ má alespoň jedno řešení. Tím je důkaz hotov. ■

Poznámka Zmiňme, že předpoklad (R6) je triviálně splněn, pokud Hilbertův prostor H je navíc *Banachova algebra* vzhledem k součinu $(fg)(x) \equiv f(x)g(x)$. Banachovou algebrou nazveme algebru $\mathcal{A}$ takovou, že $\mathcal{A}$ s normou $\|\cdot\|$ je Banachův prostor a platí $\|uv\| \leq \|u\|\|v\|$ $\forall u, v \in \mathcal{A}$. Pokud navíc norma $\|\cdot\|$ je indukovaná skalárním součinem (tj. $\mathcal{A}$ je Hilbertův prostor), říkáme, že $\mathcal{A}$ je tzv. *Hilbertova algebra*. Je tudíž pro splnění podmínky (R6) postačující, je-li prostor H Hilbertovou algebrou.

Věta 5.3 *Nechť předpoklady (R1) až (R5) a předpoklad* **(R6) jsou splněny. Potom rovnice*

$$-Lu + \alpha Tu^+ - \beta Tu^- = f \tag{5.11}$$

má alespoň jedno řešení, kdykoliv platí $\langle \delta_+ T\omega^+ - \delta_- T\omega^-, \omega\rangle > 0$ *a* $\langle f, \omega\rangle < 0$ *pro každé* $\omega \in \partial B(1) \cap \mathcal{M}$ *nebo* $\langle \delta_+ T\omega^+ - \delta_- T\omega^-, \omega\rangle < 0$ *a* $\langle f, \omega\rangle > 0$ *pro každé* $\omega \in \partial B(1) \cap \mathcal{M}$.

Důkaz. Značná část důkazu je totožná s důkazem věty 5.2. Jediný rozdíl je ve způsobu důkazu toho, že lze členy

$$\langle (T\chi(\omega_n^+) - T\chi(\varphi_n^+))\omega_n, \varphi_n\rangle, \quad \langle (T\chi(\omega_n^-) - T\chi(\varphi_n^-))\omega_n, \varphi_n\rangle$$

v rovnici (5.9) pro dostatečně velké n zanedbat. To dokážeme následovně. S využitím předpokladu $D(L) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(G)$ dostaneme ze vztahu (5.8) pro každé n nerovnost

$$\begin{aligned}\|\omega_n - \varphi_n\|_{L^p} \leq C(&\|(T\chi(\omega_n^+) - T\chi(\varphi_n^+))\omega_n\| + \|(T\chi(\omega_n^-) - T\chi(\varphi_n^-))\omega_n\| \\ &+ \tau_n(|\delta_-| + |\delta_+|) + (1-\tau_n)\|f\|/\|u_n\|).\end{aligned}$$

pro nějaké C kladné. Dále díky $L^q(G) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(G)$ a $L^p(G) \hookrightarrow\hookrightarrow H$ existuje K kladné tak, že

$$\begin{aligned}\|(\chi(\omega_n^+) - \chi(\varphi_n^+))(\omega_n - \varphi_n)\| &\leq K\|(\chi(\omega_n^+) - \chi(\varphi_n^+))(\omega_n - \varphi_n)\|_{L^p} \\ &\leq K\mu\{\omega_n\varphi_n \prec 0\}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|\omega_n - \varphi_n\|_{L^q} \\ &\equiv K_n\|\omega_n - \varphi_n\|_{L^q},\end{aligned}$$

kde $K_n \to 0$. Tytéž odhady lze učinit i pro ω_n^-, φ_n^-. Dostáváme tak pro dostatečně velká n zpětným využitím $L^p(G) \hookrightarrow\hookrightarrow H$ platnost nerovnosti typu (5.10), což jsme chtěli dokázat. ■

POZNÁMKA Předpoklad *(R6) je splněn, pokud uvažujeme např. $D(L) = W_0^{1,2}(\Omega)$ a $H = L^2(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí.

Všimněme si, že jsou-li $\alpha = \beta = \lambda$ tak, že $(\lambda, \lambda) \in \Sigma(L, T)$, obsahuje množina $\mathcal{M}$ s každým svým prvkem ω též jeho kladné i záporné násobky. Speciálně $\operatorname{Span}\{\omega\} \subset \mathcal{M}$. Tudíž nelze splnit žádnou z podmínek

$$\langle f, \omega \rangle > 0 \;\forall \omega \in \partial B(1) \cap \mathcal{M}, \;\; \langle f, \omega \rangle < 0 \;\forall \omega \in \partial B(1) \cap \mathcal{M}.$$

Tudíž věty 5.2, 5.3 nebude možné v takovém případě použít. Dokonce podmínka $f \perp \mathcal{M}$ je nutnou podmínkou existence řešení rovnice (5.6).

POZOROVÁNÍ Nechť T je identita a pro $(\alpha, \beta) \in \Sigma(L, T)$ existuje δ reálné tak, že s $\delta_+ = \delta_- = \delta$ je splněna podmínka $(R4)$. Pak

$$\langle \delta_+ T\omega^+ - \delta_- T\omega^-, \omega \rangle = \delta \|\omega\|^2$$

má pro každé $\omega \in \partial B(1) \cap \mathcal{M}$ stejné znaménko jako δ. Tudíž v takovém případě existuje řešení rovnice (5.6) pro každé f splňující $\operatorname{sign}\langle f, \omega \rangle = -\operatorname{sign} \delta$ pro každé $\omega \in \partial B(1) \cap \mathcal{M}$. Pokud navíc pro danou dvojici (α, β) je splněna podmínka (R4) též s $\delta_+ = \delta_- = -\delta$, pak má rovnice (5.6) řešení, kdykoliv $\langle f, \omega \rangle \neq 0$ pro každé $\omega \in \partial B(1) \cap \mathcal{M}$.

Nabízí se srovnání vět 5.2, 5.3 v takovýchto bodech (α, β) s klasickou Fredholmovou alternativou.

Fredholmova alternativa

VĚTA 5.4 (Fredholmova alternativa) *Nechť H je Hilbertův prostor, A je kompaktní samoadjungovaný lineární operátor z H do H a $\lambda \neq 0$. Potom pro rovnici*

$$-Au + \lambda u = f \tag{5.12}$$

nastává jeden z následujících případů:

i) λ není vlastním číslem A a (5.12) *má právě jedno řešení pro každé $f \in H$.*

ii) λ je vlastním číslem A a (5.12) *má řešení právě tehdy, když $f \perp \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.*

Nyní předpokládejme, že předpoklady Fredholmovy alternativy jsou pro rovnici (5.12) splněny a $\lambda \neq 0$ je vlastní číslo operátoru A. Rovnice (5.12) má v tomto případě řešení právě tehdy, když platí $\langle f, \omega \rangle = 0$ pro každé $\omega \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.

Všimněme si též, že jelikož každý nenulový bod spektra operátoru A je jeho vlastním číslem a A má nejvýše spočetně mnoho těchto bodů, lze učinit následující pozorování.

POZOROVÁNÍ Pro libovolné vlastní číslo λ operátoru A platí, že existuje δ reálné tak, že $\lambda \pm \tau\delta \in \rho(A) \;\forall \tau \in (0, 1]$.

Obraťme pozornost k analogické situaci u operátorových rovnic se skákajícími nelinearitami v rezonanci. Budeme předpokládat, že pro rovnici

$$-Lu + \alpha u^+ - \beta u^- = f \tag{5.13}$$

jsou splněny předpoklady některé z vět 5.2, 5.3. Dále předpokládejme, že pro dané $(\alpha, \beta) \in \Sigma(L, I)$ platí analogie toho, co jsme pozorovali u vlastních čísel operátoru A, tj. že existuje δ reálné tak, že $(\alpha \pm \tau\delta, \beta \pm \tau\delta) \in \Re_{\mathrm{I}}(L, I) \;\forall \tau \in (0, 1]$. Potom má rovnice (5.13) řešení, kdykoliv pro $f \in H$ platí $\langle f, \omega \rangle \neq 0$ pro každé $\omega \in \partial B(1) \cap \mathcal{M}$.

POZNÁMKA Odpovědi na otázku řešitelnosti u rovnice (5.12) v případě *i)* Fredholmovy alternativy a u (5.13) na regionech typu (I) jsou velmi podobné (existuje řešení zmíněných rovnic pro každou pravou stranu f). Naproti tomu jsme se nyní přesvědčili, že pro existenci řešení rovnice (5.13) v rezonanci vzhledem k Fučíkově spektru nastává zcela odlišná situace, než na jakou jsme zvyklí v analogickém případě u lineárních rovnic typu (5.12). Existenční výsledky, které jsme pro rovnice se skákajícími nelinearitami v této kapitole získali, jsou dalším krokem k nelineární Fredholmově alternativě pro rovnice typu (5.13). K její plnohodnotné formulaci však stále chybí úplná charakterizace množiny všech f, pro které má (5.13) v rezonanci řešení.

Závěrem

Cílem práce bylo prozkoumat především řešitelnost okrajových problémů se skákajícími nelinearitami a nelokálními okrajovými podmínkami. Motivací k vytyčení tohoto cíle byl článek [8], kde bylo poukázáno na neobvyklou strukturu Fučíkova spektra vztahujícího se k nelokálnímu problému s integrální podmínkou. V práci jsme uvažovali dva konkrétní diferenciální operátory L_δ^{D}, L_δ^{I}. Jelikož Fučíkovo spektrum hraje zásadní roli v řešitelnosti problémů se skákajícími nelinearitami, byla nejprve důkladněji prostudována jeho struktura u uvažovaných operátorů. Poté jsme navázali na zde získané znalosti o Fučíkově spektru těchto operátorů a dokázali na regionech typu (I) existenci řešení rovnic

$$-L_\delta^{\mathrm{D}} u + \alpha u^+ - \beta u^- + \psi(u) = f, \tag{5.14}$$

$$-L_\delta^{\mathrm{I}} u + \alpha u^+ - \beta u^- + \psi(u) = f \tag{5.15}$$

pro každou pravou stranu f.

Později jsme zformulovali a dokázali obecnější existenční věty (věty 4.3, 4.4 a 4.5) o řešitelnosti problému

$$-Au + \alpha u^+ - \beta u^- + \psi(u) = f. \tag{5.16}$$

Tyto věty zaručují za navzájem odlišných předpokladů existenci řešení problému na regionech typu (I). Věta 4.3 svými předpoklady pokrývá i oba problémy (5.14), (5.15). Nicméně lze nalézt řadu běžných problémů, na které tuto větu nelze aplikovat. Jedním takovým problémem jsme se nechali motivovat k formulování věty 4.4. Věta 4.5 pak dále rozšiřuje platnost věty 4.4 pro problémy (5.16) na neomezených oblastech za dodatečného předpokladu $\psi \equiv 0$. Následně jsme uvedli ukázku aplikace získaných existenčních výsledků na rovnici nosníku a na rovnici se Schrödingerovým operátorem.

V závěru práce jsme problémy se skákajícími nelinearitami zasadili do kontextu operátorových rovnic na abstraktních Banachových prostorech. Zde byla nejprve byla zkoumána existence řešení rovnice

$$-Lu + \alpha T u^+ - \beta T u^- + Su = f \tag{5.17}$$

na regionech typu (I). Potvrdili jsme očekávané, tj. existenci řešení pro libovolnou pravou stranu f (viz větu 5.1). Poté jsme obrátili pozornost k rovnici

$$-Lu + \alpha T u^+ - \beta T u^- = f \tag{5.18}$$

na Hilbertových prostorech funkcí v rezonanci, tj. s $(\alpha, \beta) \in \Sigma(L, T)$. Zde se nám podařilo získat postačující podmínky existence řešení. Na jejich základě byly formulovány existenční věty 5.2, 5.3. Zmíněné postačující podmínky považujeme za hlavní výsledek této práce.

Námětem pro další práci může být rozšíření získaných existenčních výsledků o (5.18) v rezonanci pro nesamoadjungované operátory L, T a na abstraktní Hilbertovy prostory. Na zodpovězení též stále čeká otázka charakterizace množiny všech f, pro které mají rovnice (5.17), (5.18) řešení.

Seznam obrázků

3.1 Fučíkovo spektrum operátorů L_δ^{D} pro $\delta = 0$ a $\delta = 2$. 13

4.1 Regiony typu (I) u operátoru L_δ^{D} 22
4.2 Regiony typu (I) u operátoru L_δ^{I} pro $\delta = -3$ a $\delta = 0.5$ 26

Literatura

[1] Fučík S. Boundary value problems with jumping nonlinearities, Časopis pro pěstování matematiky, vol. 101 (1976), issue 1, s. 69-87.

[2] Girg P., Benedikt J. Prostory funkcí a řešitelnost základních typů parciálních diferenciálních rovnic, © Jiří Benedikt a Petr Girg (2011), ISBN, `http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/prostory_funkci_a_resitelnost_zakladnich_typu_pdr.pdf` [citováno 2013-4-10]

[3] Drábek P. Úvod do funkcionální analýzy, skripta ZČU, Plzeň (1993), ISBN 80-7082-124-8.

[4] Drábek P., Kufner A. Funkcionální analýza, skripta ZČU, Plzeň (1994), ISBN 80-7082-145-0.

[5] Drábek P., Milota J. Lectures on nonlinear analysis, Vydavatelský servis, Plzeň (2004), ISBN 80-86843-00-9.

[6] Dolejší V., Najzar K. Nelineární funkcionální analýza, MatfyzPress, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2010, ISBN 978-80-7378-137-8, `http://www.mff.cuni.cz/fakulta/mfp/download/books/dolejsi-najzar_-_nfa.pdf` [citováno 2013-4-10]

[7] Mawhin J. Leray-Schauder degree: A half century of extensions and applications, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder Center, Volume 14 (1999), s. 195–228.

[8] Sergejeva N. Fucik Spectrum for the Second Order BVP with Nonlocal Boundary Condition, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vol. 12 (2007), No. 3, s. 419–429.

[9] Sergejeva N. On the unusual Fučík spectrum, Discrete and continuous dynamical systems supplement 2007 (2007), s. 920–926.

[10] Tomiczek P., Jirásek P. Nonlinear Differential Equation and Fucik Spectrum, Advances in Mathematics Research, Volume 15 (2012), s. 225-250

[11] Marcus M., Mizel V. J. Every superposition operator mapping one Sobolev space into another is continuous, Journal of functional analysis 33 (1979), s. 217–229.

[12] Ambrosetti A., Prodi G. On the inversion of some differential mappings with singularities between banach spaces, Ann. Mat. Pura Appl. 93 (1973), s. 231–247.

[13] Dancer E. N. On the Dirichlet problem for weakly nonlinear elliptic partial differential equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 76 (1977), s. 283–300.

[14] Lazer A. C., McKenna P. J. Large-Amplitude Periodic Oscillations in Suspension Bridges: Some New Connections with Nonlinear Analysis, SIAM Review, Vol. 32 (1990), No. 4., s. 537-578.

[15] Drábek P. Jumping nonlinearities and mathematical models of suspension bridge, Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, Vol. 2 (1977), No. 1, s. 9-18.

[16] Holubová G., Nečesal P. Nonlinear four-point problem: Non-resonance with respect to the Fučík spectrum, Nonlinear Analysis 71 (2009), s. 4559–4567.

[17] Mohamed A., Raikov G. D. On the spectral theory of the Schrödinger operator with electromagnetic potential, Adv. Part. Diff. Equat. 5 (1994), Pseudo-Differential Calculus and Mathematical Physics, Akademie-Verlag, s. 298 - 390.

[18] Sırma A., Sevgin S. A Note on Coincidence Degree Theory, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, Volume 2012 (2012), Article ID 370946.

[19] Gaines R. E., Mawhin J. L. Coincidence Degree, and Nonlinear Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics, vol. 568 (1977), Springer, ISBN 3540080678.

[20] Ben-Naoum, A.K., Fabry, C., Smets, D. Resonance with respect to the Fučík spectrum, Electron. J. Diff. Eqns., Vol. 2000 (2000), No. 37, s. 1-21.

[21] Lazer A. C., Leach D. E. Bounded perturbations of forced harmonic oscillators at resonance, Ann. Mat. Pura Appl. 82 (1969), s. 49–68.

[22] Landesman E., Lazer A. C. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance, J. Math. Mech. 19 (1970), s. 609–623.