



Relatório Técnico

**Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e
Pesquisas Computacionais**

Árvore Heurística: um jogo inteligente lógico-matemático metacognitivo

C. V. M. Marques
C. L. R. da Motta
E. M. P. Simas

NCE - 06/21

Universidade Federal do Rio de Janeiro

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO TERCIO PACITTI DE APLICAÇÕES E PESQUISAS COMPUTACIONAIS

Relatório Técnico, 06/2021

“Árvore Heurística”: um jogo inteligente lógico-matemático metacognitivo

Carla Verônica Machado Marques
Claudia Lage Rebello da Motta
Emanuelle Marques Pereira Simas

Rio de Janeiro
2021

RESUMO

O presente trabalho objetivou a construção de um instrumento para mensuração das habilidades relativas à construção do número. A metodologia aplicada foi o Rational Unified Process (RUP), utilizada no desenvolvimento de sistemas de ensino (Marques et al, 2015). Abreviou-se os processos do RUP para que as etapas consistissem em 1) Fundamentação teórica: Respectiva ao levantamento bibliográfico suporte para a decisão do escopo de observação do instrumento, 2) Projeto Interacional: Diz respeito ao planejamento e projeção das características físicas do jogo e 3) consolidação teórica: Consiste na construção dos crivos de mensuração da jogada. O curso da ação teve como resultado o Jogo Árvore Heurística (JOAH) apto à mensuração da habilidade pré-numérica de classificação. A observação da habilidade de classificação através do instrumento prevê os procedimentos de coleta da conduta espontânea no jogo e a conduta de imitação na presença do modelo; ambas as tarefas pareadas, posteriormente, com o crivo psicogenético de desenvolvimento da habilidade para o traçado das zonas de desenvolvimento real e proximal do jogador. Quanto as limitações da laboração, enfatiza-se que, embora previsto no método, a experimentação do instrumento com público-alvo não pôde ser efetuada. Sendo está etapa importantíssima para alterações pontuais do affordance do jogo e crivos de mensuração, aponta-se a etapa de experimentação em trabalhos futuros. A leitura dos conteúdos relacionados à gênese e evolução do número na criança neste trabalho, descortinou uma fração mínima do extenso processo da aprendizagem matemática. Em vista dessa amplitude, a escolha de uma habilidade pré-numérica para o desenvolvimento do instrumento se justifica na importância da consolidação dos princípios matemáticos básicos para o êxito na compreensão aritmética posterior (Rizzo, 1997; Souza, 2015).

Palavras-chave: Habilidades matemáticas; aptidão não-verbal; jogos de intervenção; linguagem.

ABSTRACT

The present work aimed at the construction of an instrument to measure the skills related to the construction of the number. The applied methodology was the Rational Unified Process (RUP), used in the development of teaching systems (Marques et al, 2015). The RUP processes were abbreviated so that the steps consisted of 1) Theoretical basis: Respective bibliographic survey supporting the decision of the scope of observation of the instrument, 2) Interactional Design: It concerns the planning and projection of the physical characteristics of the game and 3) theoretical consolidation: It consists in the construction of the sieves for measuring the play. The course of the action resulted in the Game Tree Heuristic (JOAH) able to measure the pre-numerical ability of classification. The observation of the classification skill through the instrument provides for the procedures for collecting spontaneous conduct in the game and the imitation conduct in the presence of the model; both tasks subsequently paired with the psychogenetic sieve of skill development for the tracing of the real and proximal development zones of the player. As for the limitations of the work, it is emphasized that, although provided for in the method, the experimentation of the instrument with a target audience could not be carried out. As this is an extremely important stage for specific changes in the game's affordance and measurement sieves, it is worth pointing out the experimentation stage in future works. The reading of the contents related to the genesis and evolution of the number in the child in this work, revealed a minimal fraction of the extensive mathematical learning process. In view of this breadth, the choice of a pre-numerical skill for the development of the instrument is justified in the importance of the consolidation of the basic mathematical principles for the success in the later arithmetic understanding (Rizzo, 1997; Souza, 2015).

Keywords: Mathematical Skills; non-verbal aptitude; intervention games; language.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Estímulo de padrão canônico	18
Figura 2: Estímulo de padrão não canônico	18
Figura 3: Diagrama de conjunto e elementos;	33
Figura 4: Diagrama de subconjunto;	34
Figura 5: Exemplo de grafo $G(4,5)$	37
Figura 6: Grafo regular de Grau 3	37
Figura 7: Exemplos de Grafos completos;	37
Figura 8: Exemplo de grafo árvore.....	38
Figura 9: Grafo isomórfico ao grafo 5	38
Figura 10: Exemplo de grafo árvore para expressar caminhos nos blocos lógicos	39
Figura 11: RUP - O modelo dos processos de produção do instrumento □	41
Figura 12: Diagrama de Adaptação da Metodologia RUP	43
Figura 13: Modelo Dimensional do Jogo Árvore Heurística	45
Figura 14: Assinalamento de um mesmo comportamento a partir das perspectivas lógicas egocêntrica, intermediária e socializada;	46
Figura 15: C output-output do protótipo.....	50
Figura 16: C output-input do protótipo.....	50
Figura 17: Caso de uso - Ramificação com critério único	50
Figura 18: Esquema de Uso da peça CD	51
Figura 19: Esquema de observação dos crivos micro e macroestruturais	52
Figura 20: Exemplo de uso JOAH (arte final).....	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Tipo, descrição e função das peças do Jogo Árvore de Coordenações.....	48
Tabela 2: Crivo de análise das criações espontâneas;.....	53
Tabela 3: Crivo de análise da imitação na presença de modelo;	56
Tabela 4: Demonstração de regra generativa do Cânone 1A.....	60
Tabela 5: Demonstração de regra generativa do Cânone 2A.....	61
Tabela 6: Demonstração de regra generativa do Cânone 2A.....	62
Tabela 7: Demonstração de regra generativa do Cânone 4A.....	63

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal
ZDR	Zona de Desenvolvimento Real
JOAH	Jogo Árvore Heurística
ORC	Objeto Real de Conhecimento
RUP	Rational Unified process

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
2 OBJETIVO	11
3 JUSTIFICATIVA	12
4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
4.1 MODELOS DE DESENVOLVIMENTO COGNITIVO	13
4.1.1 A estrutura cognitiva na perspectiva construtivista	13
4.1.1.1 Busca pela Homeostase e a evolução da estrutura cognitiva.....	14
4.1.1.2 Tendências Adaptativas e Organizadoras	15
4.1.1.3 Abstrações Empíricas e Abstrações Reflexivas	16
4.2 APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: SÍNTESE DO ESTADO DA ARTE	17
4.3 PSICOGÊNESE DA CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO	21
4.3.1 A esterilidade do ensino do conceito	22
4.3.2 A estrutura mental do conceito de número	24
4.3.2.1.1 Princípio Classificatório	26
4.3.2.1.2 Relações simétricas: Classificação Aditiva e Multiplicativa.....	28
4.4 ESPAÇOS DE INTERVENÇÃO.....	29
4.4.1 Zonas de Desenvolvimento Real e Proximal	29
4.4.2 Metacognição	30
4.4.3 Elaboração Dirigida	31
4.5 A INTELIGÊNCIA DO BRINQUEDO.....	31
4.5.1 Affordance do objeto	32
4.6 PRINCÍPIOS MATEMÁTICOS	32
4.6.1 Teoria dos Conjuntos	32
4.6.1.1 Conjunto Universo.....	34
4.6.1.2 Conjunto Unitário e Vazio	34
4.6.1.3 Igualdade entre conjuntos	34
4.6.1.4 Subconjunto	34
4.6.1.5 Reunião de Conjuntos.....	36
4.6.1.6 Intersecção de Conjuntos.....	36
4.6.1.6.1 Conjuntos Disjuntos	36
4.6.1.7 Diferença entre conjuntos	36
4.6.2 Teoria dos Grafos	37

4.6.3 Isomorfismo	38
4.7 TRABALHOS CORRELATOS	39
4.7.1 Pensar é Divertido – Interação com blocos lógicos	39
4.7.2 A lógica da descoberta nos jogos digitais	40
4.7.3 Sistemas Inteligentes Educacionais	40
5 METODOLOGIA	42
5.1 JOGO ÁRVORE HEURÍSTICA (JOAH)	44
5.2 JOAH: MODELAGEM DIMENSIONAL	44
5.3 JOAH: Projeto Interacional	46
5.3.1 Regras Generativas	47
5.3.2 Metáfora Visual	47
5.3.3 Storyboarding e Prototipação	48
5.4 JOAH: DESENVOLVIMENTO CONCEITUAL	51
5.4.1 Crivo Empírico	51
5.4.1.1 Crivos Macroestruturais	52
5.4.1.1.1 Crivo Macroestrutural: Natureza	53
5.4.1.1.2 Crivo Macroestrutural: Imitação na Presença de modelo	54
5.4.1.2 Esquema de Análise Estrutural	57
5.4.2 Cânones	59
5.4.3 Plano Intervencional: Procedimento de Aplicação do Instrumento	63
5.5 RESULTADOS E DISCUSSÕES	65
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	69
7 TRABALHOS FUTUROS	70
REFERÊNCIAS	71
GLOSSÁRIO	76
APÊNDICE A - TABELA DE CORRELAÇÃO DE CONDUTAS	77
APÊNDICE B - PSICOGÊNESE DAS NOÇÕES NUMÉRICAS	78
APÊNDICE C - PEÇAS FINAIS DO JOAH	82

1 INTRODUÇÃO

O conhecimento matemático atravessa todos os espaços da civilização (Butterworth, 2005). Embora reproduzido e transmitido como um fato epistemológico, a matemática, como qualquer conhecimento, tem sua origem na carência de instrumentos e sua materialização na construção da razão humana (Moura et al., 2016).

Sendo um nicho de conhecimento tão plural e suas noções tão fundamentais às resoluções de problemas cotidianos (NUNES & BRYANT, 1977), frentes científicas educacionais, neurocientíficas, da psicologia, epistemologia, entre outras, se debruçam sobre o fazer matemático e a história da matemática a fim de compreender sua relação com a cultura, necessidade e potencial tecnológico de cada povo (Rosseto, 2013), as implicações do ensino formal de uma ciência que evoluiu curso à humanidade (Moura et al., 2016), o comportamento cerebral e as hipóteses de especializações, ou pré-disposições, corticais para a construção e aprendizagem matemática (Souza, 2015), habilidades matemáticas necessárias à compreensão da ciência tal qual conhecemos hoje e os distúrbios de aprendizagem que interferem diretamente na aquisição deste saber (Mousinho et al., 2020)

No âmbito das pesquisas neurocientíficas, há o consenso de que os seres humanos e os animais carregam, geneticamente, uma competência matemática nomeada Senso numérico. Sendo uma competência inata, com ativação cerebral seleta frente a estímulos equivalentes às grandezas matemáticas, teoriza-se que esta seria suporte essencial para o aprendizado em bases simbólicas. Gersten e Chard (1999), por exemplo, equivalem o senso numérico e a consciência fonológica ao afirmar que a noção numérica está para aprendizagem matemática, bem como a consciência sobre os fonemas está para a alfabetização.

Valendo-se deste postulado, pesquisas sobre o processo de aprendizagem investigam a manifestação desta competência na escolarização formal, porém, ressalta Fulginiti (2020), que do mesmo modo que o senso numérico é definido diversamente, as habilidades correlacionadas a esta competência também o são. Este quadro dificulta a convergência e comparação dos achados e, conseqüentemente, se configura como um obstáculo na aplicação prática da ciência no que tange não apenas às dificuldades de aprendizagem matemática, especificamente, mas, também, a compreensão desta ciência como um instrumento do pensamento.

Berch (2005), amplia o senso numérico como múltiplas habilidades que se aprofundam à medida que o indivíduo é exposto às atividades matemáticas, dentre elas: Percepção de que uma pequena coleção se modificou após adicionar ou remover conteúdo, Habilidades elementares sobre número e aritmética, Capacidade inata para aproximar números, Comparação de

magnitudes, decomposição de números, desenvolvimento de estratégias para resolver problemas complexos, uso das relações entre as operações aritméticas para compreender a base de construção numérica, uso de números para comunicar ou interpretar informações, e a compreensão do valor social do número.

Este olhar tangencia ao de Piaget (1981) e Gelman & Gallistel (1978) que determinam a “aquisição matemática” como um processo contínuo de descoberta e sistematização dos princípios matemáticos. Logo, nesta perspectiva, se antes as habilidades correlatas ao senso numérico eram responsáveis pela aprendizagem matemática, agora correspondem à consequência de terem sido descobertos naturezas, antes intangíveis, de relacionamentos diversos entre objetos.

Sendo a aprendizagem matemática um saber implicado multidimensionalmente, ou seja, relativo às capacidades cognitivas, exposição cultural, linguagem e escolarização (Dias, 2020), a problemática da intervenção das dificuldades de aprendizagem matemática reside no desenvolvimento de estratégias que abarquem, simultaneamente, a face social do número, como um construto de manifestação gráfica convencionada, e à cognição e linguagem uma vez que sua instrumentalização está relacionada à flexibilidade cognitiva, memória, criatividade, metacognição (Souza, 2015), compreensão e a expressão linguística, abstração simbólica e conceptualização (Jussara & Lorensatti, 2009).

2 OBJETIVO

Sendo os anos iniciais imprescindíveis para a ampliação do conhecimento matemático em séries posteriores (Rizzo, 1996; Souza, 2015), o presente trabalho objetiva o desenvolvimento de um instrumento lúdico, de natureza gamificada, para mensuração e intervenção nas habilidades relacionadas à construção do número. Para tanto, adaptou-se a metodologia RUP às seguintes etapas: 1) Modelagem dimensional, 2) Projeto Interacional e 3) Consolidação Conceitual, sendo tais etapas relativas à fundamentação teórica, concepção criativa, experimentação e confecção do objeto.

3 JUSTIFICATIVA

Sendo as dificuldades da aprendizagem matemática uma problemática na educação brasileira e de natureza multidimensional, ou seja, não unicamente relativa às capacidades do sujeito, esta pesquisa se justifica na necessidade de desenvolver materiais lúdicos e com design metacognitivo que possam ser utilizados tanto no âmbito da fonoaudiologia educacional, em propostas para o desenvolvimento do senso numérico e construção do número, quanto no âmbito da fonoaudiologia clínica.

Este documento se organiza em sete capítulos e descrevem o percurso de desenvolvimento do trabalho. A saber: Os primeiros quatro capítulos referem-se à introdução do trabalho. O quarto capítulo reserva-se ao referencial teórico da laboração. Neste são aprofundados os dados sobre as pesquisas relacionadas à construção do número e a disposição de tópicos necessários para a compreensão do jogo que será retratado no capítulo seguinte. No capítulo quinto é apresentado e descrito o processo metodológico de conceptualização do instrumento. Por fim, os capítulos seguintes trazem os resultados e a pontuação do autor quanto ao que foi produzido.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A matemática se desdobra em todos os âmbitos da vida. O desenvolvimento gradual deste conhecimento, intrinsecamente ligado a princípios lógicos (Piaget & Inhelder, 1975; Piaget & Szeminska, 1981), e a manifestação elementar do princípio matemático em pré-escolares anteriormente ao aprendizado das convenções simbólicas (Dehaene, 1977; Evans & Gold, 2020; Souza, 2015) justificam o interesse de se perscrutar as competências ou habilidades precursoras da evolução, em complexidade, deste conhecimento nos escolares.

Como supracitado, o presente trabalho tem como objetivo explicitar o processo teórico-prático de construção de um jogo lúdico mensuração e intervenção das competências relacionadas ao desenvolvimento dos esquemas lógico-matemáticos relacionadas à construção do número pela criança, sendo, nesta laboração, enfatizado o instrumento de observação dos esquemas de classificação.

4.1 MODELOS DE DESENVOLVIMENTO COGNITIVO

Os modelos de desenvolvimento da cognição buscam elucidar os meios pelos quais o indivíduo aprende. As vertentes então, diversamente nomeadas (associacionismo, construtivismo, sociointeracionismo, entre outros.), não se consagram como um erro ou acerto teórico, mas sim angulações do olhar para uma mesma entidade: A cognição.

À medida que os princípios filosóficos tomados são diferentes, a compreensão sobre o que é ‘cognição’ também se modifica. Neste aspecto, Richardson (2003, p. 9) □aponta que enquanto alguns teóricos referenciam a cognição como uma atividade de pensamento e raciocínio, outros o referenciam como uma competência para lidar, abstrato e sistematicamente, com informações, fazendo da cognição não mais uma atividade mas um modo de operação.

Ao longo deste tópico serão apresentados os conceitos referentes ao modelo de desenvolvimento da cognição utilizado para a modelagem do jogo proposto.

4.1.1 A estrutura cognitiva na perspectiva construtivista

A epistemologia genética, uma ciência desenvolvida por Piaget ao longo da década de 20, centra o indivíduo como o principal agente da construção de seu modelo mental de mundo e, consequentemente, de seu conhecimento.

Em face deste axioma, o autor postula que o desenvolvimento intelectual, subordinado à maturação biológica, corresponde à edificação de estruturas cognitivas (Piaget, 1975, 1994). Tais estruturas são formadas gradualmente e caminham em direção a estados de equilíbrio que

admitem a evolução da cognição ao patamar superior, de maior mobilidade cognitiva. Cada patamar é diferenciado segundo as condutas do sujeito frente ao objeto material, linguístico ou afetivo e tem sua gênese na ação. Inicialmente observa-se condutas pré-lógicas (egocêntricas) (Fonzar, 1986; Bärbel Inhelder & Piaget, 1976; Piaget, 1994), ou seja, imediatas, assistemáticas e destituídas de caráter simbólico. Posteriormente tais estruturas são conduzidas à socialização e à logicidade, apresentando-se atemporais, sistemáticas e simbólico-representativa (Bärbel Inhelder & Piaget, 1976; Piaget, 1978, 1994; Piaget & Inhelder, 1975).

Tais estágios de “organização da atividade mental” são nomeados e descritos a seguir: 1. **Estágio Sensório-motor (0 a 2 anos):** Espera-se a conquista do corpo e do entorno através da descoberta dos movimentos. Tal conquista viabiliza a organização das primeiras percepções e construção dos esquemas de ações que prenunciam a noção fundamental da causalidade. 2. **Estágio Pré-operatório (2 – 7 anos):** Se consolida como um período de volições primordialmente intuitivas – pré-lógicas – e despontamento da função simbólica que, ainda residual do período sensório-motor, se reserva à menção de acontecimentos ou objetos através da repetição da ação antes ritualizada. Este período se diferencia do seguinte pela ausência de função simbólico-representativa e lógica observado no predomínio da exploração motora por tentativa e erro, negligência das transformações físicas e ausência de planejamento. 3. **Operatório concreto (7-12 anos):** é marcado pelo avanço substancial da função simbólico-representativa e da lógica que, embora ainda assistida pela manipulação concreta do objeto, abarca a edificação dos esquemas lógicos elementares. Este estágio se diferencia do seguinte pela explicação dos fenômenos com base na observação empírica e ausência de deduções lógicas. No último estágio e 4. **Formal (>12 anos):** espera-se a consolidação da lógica formal e sistematização da lógica proposicional (INRC – Identidade, Inversão, Reciprocidade e correlatividade) e independência dos conteúdos materiais. Em suma, cada estágio é caracterizado pela aparição de uma estrutura inédita, cuja construção advém da diferenciação dos estágios antecedentes. (Bärbel Inhelder & Piaget, 1976, p. 15; C. Marques et al., 2010; Piaget, 1994))

Neste ponto emerge a seguinte problemática: Se a consolidação de cada estágio representa o equilíbrio, a estabilização, da estrutura cognitiva vigente, o que impulsiona o indivíduo a diferenciar as estruturas vigentes rumo ao estágio superior?

4.1.1.1 Busca pela Homeostase e a evolução da estrutura cognitiva

Os diferentes estágios do pensamento são denominados por Piaget como funções variáveis e definidos como “formas ou estados sucessivos de equilíbrio” (Piaget, 1994, p. 14).

Complementar a esta, o autor introduz que há um motor funcional, presente em todas as idades e níveis, que assegura a passagem para o estado cognitivo posterior. Tal função se configura na **necessidade** que é a força motriz para o desencadeamento do impulso da pergunta ou resolução de um problema. Observa-se no trecho abaixo:

A criança como o adulto, só executa alguma ação exterior ou mesmo inteiramente interior quando impulsionada por um motivo e este se traduz sempre sob a forma de uma necessidade (uma necessidade elementar ou interesse, uma pergunta, etc.). [...] uma necessidade é sempre a manifestação de um desequilíbrio. (PIAGET, 1999, p. 16)

Sendo assim, o encontro com o exterior eventualmente suscita a necessidade no indivíduo. O sujeito cognoscente é, então, provocado a **ajustar sua conduta, sua ação**, para suprir a necessidade e alcançar o estado homeostático, sendo o sentimento de sucesso e satisfação o apontamento do reequilíbrio (Piaget, 1994, pp. 16–17):

[...] a ação se finda desde que haja satisfação das necessidades, isto é, logo que o equilíbrio – entre o fato novo, que desencadeou a necessidade, e a nossa organização mental, tal como se apresentava anteriormente – é restabelecido” (PIAGET, 1999, p. 16)

4.1.1.2 Tendências Adaptativas e Organizadoras

Se posicionando contrário ao inatismo platônico, onde, na visão do racionalismo clássico, o saber é externalizado a partir do discurso, a psicogenética designa à auto-regulação e não à hereditariedade a explicação biológica das estruturas mentais (Mantoan, 1994). Desta forma, hipotetiza-se que há uma inclinação natural do indivíduo à estabilização de si, sendo a busca por esta “harmonia interna” o ponto de partida da cognição. Coube, então, aos estudos microgenéticos a investigação dos “mecanismos funcionais subjacentes aos procedimentos da criança em vias de resolver problemas específicos” (Barbel Inhelder & Cellérier, 2002, p. 11) a fim de testemunhar, na natureza das ações, as auto-regulações presentes no aprendizado.

Principiando que toda ação é resultado de uma necessidade de reequilíbrio, seja ela intelectual, afetiva ou fisiológica, no contexto das situações problemas, a homeostase é alcançada a partir do processo de adaptação que envolve o ciclo de assimilação e acomodação. Por definição, a assimilação é a atividade propriamente dita; o interesse e a exploração do funcionamento e serventia do objeto presente, buscando incorporar o objeto do meio externo ao meio interno. E a acomodação é o processo complementar de o ajustamento do seu ambiente interno aos acontecimentos e percepções externas (Piaget, 1978)□. Logo, enquanto a assimilação caminha para a adaptação do externo ao interno, a acomodação equivale à adaptação no fluxo inverso.

A medida que a inteligência compreende a capacidade de adaptação do indivíduo às situações de conflito, a equilibração entre os processos de assimilação e a acomodação equivale ao status ótimo da aprendizagem. Por exemplo, em desequilíbrio, se a assimilação se sobrepõe à acomodação, o sujeito atenderá apenas à satisfação individual de sua ação e não apresentará ajustes de adaptação às propostas do ambiente. Em mesma face, se a acomodação prevalece, observar-se-á, unicamente, a internalização dos dados do ambiente e, conseqüente, indiferenciação do meio interno e externo em relação ao sujeito. Através do ciclo permanente de adaptação, o indivíduo torna-se apto a construir e gerenciar o conhecimento na mesma medida que explora novos nichos. E é nesta realidade - de gerenciamento das informações - que o indivíduo se organiza através dos esquemas de ação. (Ferreira, 2003; Piaget, 1978, p. 115).

Os esquemas de ação são organizadores de condutas. Não observados, mas inferidos. Em outras palavras, são estruturas abstratas de organização do conhecimento motor e intelectual e, segundo Piaget são “esboços das ações suscetíveis de serem repetidas ativamente”, protocolos heurísticos de ação ou pensamento. Tendo sua gênese no estágio sensório-motor, são, inicialmente, instrumentos da organização da ação, porém, com a progressão dos estágios psicogenéticos, tornam-se ferramenta do pensamento ao viabilizar a adaptação, abstração e generalização progressiva de conceitos (Ferreira, 2003; Barbel Inhelder & Cellérier, 2002).

A entrada no mundo simbólico permitem que os esquemas de ação, antes motores, sejam encarnados em signos linguísticos. Esta evolução consagra os esboços de ação como 1) um instrumento valioso para a organização do conhecimento como uma rede de relações suscetíveis entre as experiências e a interpretação destas (Fisher, 2017; Piaget, 1978) 2) testemunha das autorregulações cognitivas cruciais para o aprendizado.

4.1.1.3 Abstrações Empíricas e Abstrações Reflexivas

Com relação aos conteúdos do aprendizado, são diferenciados três categorias de conhecimento: O Físico, o Social e o lógico-Matemático (Kamii, 1983). E, condizente com a natureza do conhecimento, são esperados mecanismos de internalização nomeados abstração empírica e abstração reflexionante.

À abstração empírica reserva-se a compreensão das classes de conhecimento que podem ser apreendidas através da observação. O conhecimento dos fenômenos de tempo ou causalidade, categorizados físicos, e o conhecimento social relativo às convenções linguísticas e simbólicas exemplificam, amplamente, as categorias internalizadas através da abstração empírica. Noutro extremo concentram-se os conhecimentos que necessitam de internalização reflexionante em virtude de não serem acessíveis empiricamente. A saber, os conhecimentos lógicos-matemáticos

atrelados aos princípios conservativos, espaciais, de equivalência, operações, estruturas, entre outros.

É significativo ressaltar que conhecimentos advindos da abstração empírica podem necessitar de abstração reflexionante **no momento em que se demandam esforços cognitivos para ascender, por exemplo, o entendimento sobre os mecanismos de preservação do fenômeno (reflexionamento)**. A partir deste entendimento, à abstração reflexionante se torna o ato (reflexão) de gerenciamento de dados, sejam eles internos ou externos, para fins de constituir a razão – justificativa – da conservação – repetição – de um acontecimento esperado

Um exemplo dado por Piaget sobre a raiz das abstrações reflexivas ainda no estágio sensório-motor é quando “o bebê [...], **para resolver um problema novo, vale-se de certas coordenações de estruturas já construídas, para reorganizá-las em função de novos dados**”. **Por exemplo**, quando a criança joga algo para cima e este objeto toma um comportamento. A verificação da permanência do fenômeno será, então, observada na aplicação exaustiva do esquema de ação “jogar pra cima” ao mesmo objeto e a outros até que haja satisfação através da reafirmação empírica. Neste momento, a criança descobre “a gravidade”, porém, por falta de recursos lógicos, função simbólica e esquemas conceituais, que seriam ferramentas de conceptualização do fenômeno, a criança internalizará o fenômeno nomeado, eventualmente, como “queda” como um acontecimento esperado sempre que houver relação entre um objeto e o esquema de ação gerado (Piaget, 1995, p. 6).

4.2 APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: SÍNTESE DO ESTADO DA ARTE

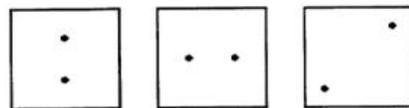
Diferente das vastas pesquisas relacionadas às habilidades preditoras da alfabetização, pesquisas sobre os preditores da aprendizagem matemática ainda são escassas (Evan & Gold, 2020). Não raro, as pesquisas de Starkey e Cooper (1980), sobre a habilidade de bebês perceberem pequenas mudanças na quantidade de elementos em uma coleção, e Strauss and Curtis (1981), onde propôs-se a modificação do instrumento de experimentação anterior para estímulos figurais, ainda são retomadas para fundamentar a teoria de que a competência matemática é inata nos seres humanos e animais, sendo a competência humana dissociada da animal na instituição da instrumentalização simbólica.

Estes estudos encorpam o consenso de que o senso numérico é uma competência inata ao ser humano (Dehaene, 1977; Oliveira et al., 2015b; Souza, 2015). Dehaene (2011) complementa que tal competência não se restringe à magnitude física, mas amplia-se às noções temporais e espaciais.

O senso numérico, é conceituado como a competência inata para estimar e comparar, instantânea e visualmente, **pequenas quantidades absolutas, ou seja, é uma capacidade pré-numérica**. Segundo cientistas, a manutenção desta habilidade se justifica devido sua serventia à sobrevivência. Infere-se que a contribuição deste senso na tomada de decisão relacionada à procura por comida, ataques ou fugas possibilitou que esta carga genética fosse transmitida aos descendentes (Devlin, 2001; Souza, 2015; Strauss & Curtis, 1981).

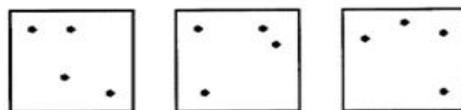
Contudo, embora sofisticado, reitera-se que a numerosidade não está atrelada à contagem. Com relação à competência inata para enumerar pequenas quantidades visualmente, designa-se o conceito subitizing. Segundo Wender e Rothkegel (2000), o subitizing envolve dois processos: separação e enumeração – ou, respectivamente perceptual e conceptual para Clements (1999), - e dependem, diretamente, da canonicidade do estímulo. Neste processo, se o estímulo está ordenado canonicamente (Figura 1) e em pouca quantidade, a enumeração é feita instantaneamente. Em contrapartida, se o estímulo está em ordenamento não canônico (Figura 2), mesmo que em pequena quantidade, estratégias mentais de sub-setorização e reordenação do estímulo à padrões canônicos são produzidas para que o conjunto seja enumerado.

Figura 1: Estímulo de padrão canônico



Fonte: Íntegra Wender e Rothkegel (2000)

Figura 2: Estímulo de padrão não canônico



Fonte: Íntegra Wender e Rothkegel (2000)

Em resumo, ambas as competências envolvem processos de discriminação unicamente visuoespaciais. Logo, são ferramentas eficazes enquanto as coleções não excedem os limites da perceptualidade, ou seja, quando as coleções são numerosas e densas, observa-se, se habilitado, o uso da enumeração formal, do contrário extenciona-se a designação das coleções a quantidades absolutas (Burr et al, 2018)

A este respeito, tais competências não respondem sobre como os seres humanos transcenderam das habilidades qualitativas ao desenvolvimento de ferramentas quantitativas simbólicas. Porém, **ao serem consolidados como marcos matemáticos inatos, são também balizados necessários à aprendizagem matemática formal** (Souza, 2015, p.16).

Buscando aprofundar a relação entre a natureza do fazer matemático e o sujeito, inclinam-se à observação do comportamento cortical no processamento de informações matemáticas. Borghesani e colaboradores (2019) estudaram a ativação cerebral correspondente ao processamento de magnitudes simbólicas (+, >) e magnitudes espaciais (traços e pontos espaçados). Observou-se que em ambos os estímulos a região parietal direita e a região occipital (dada a natureza visual do estímulo) eram ativadas bilateralmente, porém os registros de ativação eram díspares. Concluiu-se que a região parietal respectiva ao lócus cerebral do processamento matemático, porém a representação topológica informou que o processamento simbólico e de magnitudes ocorrem de maneiras diferenciadas. Em outro estudo sobre a ativação cerebral no processamento de símbolos numéricos (2, 8,9) e de signos numérico ordinais, assinalou-se que enquanto o símbolo numérico recrutava o lobo parietal esquerdo, o processamento de signos numéricos recrutava a porção cortical frontal, na área de Broca, correspondente ao processamento do vocabulário.

Em frentes que enfocam o aprendizado matemático como um fato cognitivo, ao buscar descobrir as habilidades cognitivas importantes para o desempenho numérico aponta-se em Little et al (2020) a atenção prevalente ao controle inibitório quando sobre o desempenho e menor latência de resposta, em Olsson et al (2020) destaca-se a equiparação de importância dos domínios específicos (conhecimento de sequência, comparação de dígitos) e habilidades cognitivas (raciocínio lógico, consciência fonológica, memória de trabalho e nomeação automatizada rápida) na pré-escola e prevalência da importância das habilidades cognitivas nos anos seguintes e em Zhang et al (2018) aponta-se as habilidades de linguagem, espaciais e de contagem como precursores cognitivos iniciais da aprendizagem matemática. Tais pontuações observam a pluralidade do conceito de senso numérico entre os pesquisadores e, ainda, disparidade entre os constituintes balizados importantes para o desempenho matemático.

Com efeito, os experimentos retratados e seus achados iluminam o conhecimento sobre o percurso da aprendizagem matemática. Porém estes ainda não selam as lacunas relacionadas, por exemplo, à real influência do desenvolvimento da linguagem na conceptualização aritmética, possíveis períodos críticos para a aprendizagem matemática e marcadores efetivos da passagem do estado pré-numérico ao numérico (Butterworth,2005). Complementar a estas lacunas, Fulginiti (2020) adiciona que a pluralidade das definições cedidas ao conceito de senso numérico, correlatas às perspectivas teóricas, dificultam a mensuração do alcance numérico no âmbito do aprendizado e a unificação dos processos metodológicos e das habilidades a serem investigadas:

Esta divergência conceitual acarreta em diferentes formas de avaliar e intervir em senso numérico, gerando dados que não são diretamente comparáveis e, desta forma, afetando o progresso da pesquisa em direção ao refinamento e operacionalização deste constructo. (FULGINITI, 2020)

Sendo fato biológico ou cognitivo, a matemática corresponde a um desafio na escolarização formal de muitos indivíduos (Oliveira et al, 2015). Não trivial, além do senso numérico – inato a priori – ao longo da escolarização formal será requerido do sujeito a adequação de suas percepções qualitativas contínuas ao sistema simbólico discreto instaurada por sua língua, bem como a apreensão das regras instrumentalizadas na formalização de conceitos aritméticos.

Segundo Raven (1973), os conceitos propostos na educação formal tem como *background* a **complexidade de estruturas lógico-matemáticas universais (ver seção 30)**. Devendo, pois, o sujeito alunado, para compreender o conteúdo proposto, estar munido de estruturas compatíveis à organização lógica do conhecimento para, de fato, compreendê-lo e poder elaborar sobre ele. Compreendendo que a evolução do senso numérico inato às habilidades diversamente descritas acima, são regidas pela aquisição das estruturas universais lógico-matemáticas, a seção a seguir reserva-se a explicitar, na perspectiva piagetiana, componentes basais à aquisição dos conhecimentos complexos exigidos na educação formal que constituem a construção do número e suportam o fazer aritmético posterior.

Segundo Raven (1973), os conceitos propostos na educação formal têm como *background* a **complexidade de estruturas lógico-matemáticas universais (ver seção 30)**. Devendo, pois, o sujeito alunado, para compreender o conteúdo proposto, estar munido de estruturas compatíveis à organização lógica do conhecimento para, de fato, compreendê-lo e poder elaborar sobre ele. Compreendendo que a evolução do senso numérico inato às habilidades diversamente descritas acima, são regidas pela aquisição das estruturas universais lógico-matemáticas, a seção a seguir reserva-se a explicitar, na perspectiva

piagetiana, componentes basais à aquisição dos conhecimentos complexos exigidos na educação formal que constituem a construção do número e suportam o fazer aritmético posterior.

4.3 PSICOGÊNESE DA CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO

Em sua obra sobre a construção do número Kamii (1983) discorre sobre a aquisição e o uso do conceito de número pelas crianças. Perspectivado pela autora como um objeto que deva ser descoberto, explorado e questionado pela criança, o número passa a ser distinguido como composto de uma face social, pois se ilustra através de um sistema simbólico e arbitrário – uma vez que é convencionado socialmente, e uma face lógico-matemática, pois compreende um espaço – a priori intangível – de relações.

A dicotomia supracitada suscita uma mudança no paradigma do ensino e aprendizagem do número. Ao explicitar, na perspectiva do desenvolvimento da autonomia da criança, como o número se insere na escolarização formal. Kamii e Declarck (1992) recordam que, segundo Piaget, o produto gráfico não apresenta semelhança com o objeto representado, sendo apenas a fração de um sistema de comunicação entre indivíduos. Logo, os signos “dez” e “10”, representativos gráficos da quantidade, necessitam de transmissão social para que sejam aprendidos. Recorre-se, nesta afirmação, à face social do número. Por outro lado, enquanto os signos geram um produto empírico, a instrumentalização das quantidades não é um fato físico ou social, mas um conjunto de **operações mentais de relacionamento entre os objetos**. (Kamii, 1983; Kamii & Declarck, 1992; Piaget, 1978, 1995; Piaget & Inhelder, 1975)

A dicotomia supracitada suscita uma mudança no paradigma do ensino e aprendizagem do número. Ao explicitar, na perspectiva do desenvolvimento da autonomia da criança, como o número se insere na escolarização formal. Kamii e Clark (1992) recordam que, segundo Piaget, o produto gráfico não apresenta semelhança com o objeto representado, sendo apenas a fração de um sistema de comunicação entre indivíduos. Logo, os signos “dez” e “10”, representativos gráficos da quantidade, necessitam de transmissão social para que sejam aprendidos. Recorre-se, nesta afirmação, à face social do número. Por outro lado, enquanto os signos geram um produto empírico, a instrumentalização das quantidades não é um fato físico ou social, mas um conjunto de **operações mentais de relacionamento entre os objetos** (Kamii, 1983; Kamii & Declarck, 1992; Piaget, 1978, 1995; Piaget & Inhelder, 1975).

A importância da estrutura lógico-matemática na construção do conceito de número reside no esvaziamento do êxito da aprendizagem matemática nos anos iniciais se ancorado na

declamação da ordem dos números e dos resultados de tabuada ou armação de continhas memorizadas. Tal concepção é desdobrada a seguir.

4.3.1 A esterilidade do ensino do conceito

Segundo (Lovell, 1988, pp. 12–13)□, o desenvolvimento da matemática e do princípio científico na criança **equivale à** construção de conceitos que, por sua vez, depende de operações mentais de manipulação, reconhecimento e extração das regularidades do objeto real de conhecimento (Marques 2017) nomeadas, respectivamente, percepção, abstração e generalização.

Segundo o autor, o conceito corresponde ao ato de julgamento que acarreta na generalização dos dados anteriormente relacionados. Deste modo, “os conceitos parecem surgir das percepções, do conhecimento real dos objetos e situações” (LOVELL, 1988) . O estado de percepção diz respeito ao recebimento dos estímulos pelos canais sensoriais do indivíduo e posterior seleção dos sinais relevantes para a conservação da informação na memória, seleção esta diretamente afetada pelo modo de pensar, agir, emoções e desejos no momento. A abstração corresponde à determinação de relações primárias entre os objetos, e recorre, sumariamente, ao desmembrar das informações sensoriais em propriedades compartilhadas e não compartilhadas. Neste estado, antecipando a generalização, há a discriminação de características **tangíveis perceptualmente**. O estado generalização, compreendendo o alcance do conceito , é a união das propriedades compartilhadas em um mapa de invariância abstraída das relações entre os objetos, mapa este que nomeamos classe. Deste modo, as classes, no sentido do conceito, não são um conjunto de palavras isoladas nomeadoras de um objeto-alvo, e sim um esquema, uma rede, de atributos que o objeto-alvo deve partilhar para pertencer, invariavelmente, a tal classe.

Este estado, pois, supõe que o conceito não finda em sua primeira constatação, e sim se torna cada vez mais especializado à medida que outros objetos reais são contrastados com os dados já relacionados. Explicita-se no trecho a seguir:

Quando a criança forma um conceito ela tem de ser capaz de discriminar ou diferenciar entre as propriedades dos objetos ou acontecimentos à frente, e generalizar suas constatações no que tange a qualquer característica comum que possa encontrar (LOVELL, 1988, p. 12).

Deste modo, a exposição à diversidade de objetos e à situações, onde tais possam ser comparados, levam à otimização das estratégias de generalização, bem como o aumento da complexidade dos conceitos e à formação de estruturas categóricas de enorme valia à organização do léxico e ao pensamento.

Um paralelo é proposto por Vigotsky que, embora também vislumbre a formação do conceito como “algo mais do que a soma de certas ligações associativas formadas pela memória” (Vigotsky, 2000), diferente de Lovell (1988), propõe a generalização como um ato anterior à real aquisição do conceito.

À medida que a criança se desenvolve, os conceitos antes primitivos evoluem, através, principalmente, da expansão do vocabulário, ao encontro do “verdadeiro conceito” (Vigotsky, 2000). Tendo o conceito complexidade proporcional ao desenvolvimento linguístico e cognoscitivo do sujeito, pressupõe-se, na evolução deste, o desenvolvimento de funções intelectuais relacionadas à atenção voluntária, memória lógica, abstração e competência para comparar e diferenciar, harmônicas, assim, à zona de desenvolvimento real do sujeito. (Lovell, 1988, p. 12; Vigotsky, 2000, p. 83)

Convergindo os pressupostos, os autores ajustam-se quanto à esterilidade do ensino do conceito, lê-se, face lógica do objeto de conhecimento na perspectiva piagetiana, uma vez que a conceptualização é, segundo Vigotsky (2000, p.83), um complexo e genuíno ato de pensamento que ganha profundidade à medida que novas palavras são aprendidas e, de fato, colocadas em uso e, ainda, Segundo Piaget e Kamii, enfatizando as estruturas lógicas responsáveis pela manipulação do conteúdo, subordinado à competência de pensar crítica e autonomamente.

Em suma, o conceito é um instrumento do pensamento uma vez que, reduzindo o léxico mental de signos a unidades categóricas transitivas, não mais representativas dos significados mas, sim, dos espaços evocados pelas ideias (Fauconnier,1994, assegura o manejo e a compreensão de tópicos cada vez mais abstratos descobertos na gradual diferenciação do mundo sensível – das percepções – e do mundo inteligível das ideias.

Tal faceta é própria da linguagem humana e, de acordo com os autores supracitados, tem sua mecânica exposta e experimentada na interação social (Vigotsky,2007), e é construída individualmente a partir de necessidades internas que encaminham o indivíduo no desenvolvimento de estruturas mentais que suportam a instrumentalização matemática (Lovell, 1988; Piaget, 1994; Piaget & Inhelder, 1975)

Logo, a reprodução mecânica de modelos e algoritmos (Tracanella & Bonanno, 2016) não assegura que o indivíduo esteja, de fato, inputando a lógica esperada sobre objeto. Tal dicotomia entre o desempenho e a competência é também ressaltada por Piaget quando no âmbito da aprendizagem os métodos de ensino são voltados para a repetição e a memorização.

4.3.2 A estrutura mental do conceito de número

O paradigma da esterilidade do ensino do conceito é retomado por Piaget na afirmação de que “**não basta** de modo algum à criança pequena saber contar verbalmente [...] para achar-se na posse do número” (Piaget e Szeminska, 1981, p.15).

Tendo como alicerce filosófico o princípio kantiano dos esquemas como organizadores e conceituadores da experiência (Richardson, 2003), ao afirmar que não basta enumerar automaticamente uma sequência numérica, Piaget está, com efeito, explicitando que a reprodução automática de uma experiência, ou comportamento, não necessariamente reside a estrutura conceitual de compreensão do objeto de conhecimento proferido.

Segundo a psicogenética, a estrutura conceitual representativa do conhecimento se materializa em estruturas lógico-matemáticas de relacionamento e combinações entre os objetos. Não sendo inatas ao seres humanos, é colocado que tais estruturas estão em iminência de construção à medida que o sujeito interage com o meio; meio este, dotado de uma inteligência intrinsecamente lógica e implícita na organização social e física (Nogueira, 2007).

As estruturas mentais funcionam, então, seriando, ordenando, classificando, estabelecendo implicações e permitindo a inserção dos objetos e dos acontecimentos no tempo e espaço (Nogueira, 2007, p. 30)

Nogueira (2007, p.30-32) aponta que os postulados Piagetianos sobre as estruturas lógicas refletiram em propostas de alteração dos métodos do ensino do número. Nestes eram incluídos, como atividades pré-numéricas, o treino dos princípios postulados por Piaget como substrato à aquisição do conhecimento matemático, de modo a adiantar o desenvolvimento lógico.

A respeito das estruturas lógico-matemáticas na aprendizagem escolar, enfatizando a construção do número, (Kamii, 1983) ressalta que o ensino das relações de logicidade como um conhecimento social é resultado de um equívoco teórico. Uma vez que tais estruturas de pensamento resultam da internalização, através de constatações autorais, das regularidades do meio, e ainda correspondem à complexidade das estruturas prévias (Piaget & Inhelder, 1975, p. 111) o “ensino das relações lógicas” inviabiliza que se “[construa] a infraestrutura lógico-matemática de número”. Alternativamente, a autora coloca que a construção do número deve envolver o encorajamento do pensar sobre o número e quantificação de objeto em situações contextualizadas e significativas ao sujeito cognoscente (Kamii, 1983).

A respeito das estruturas lógico-matemáticas na aprendizagem escolar, enfatizando a construção do número, Kamii (1983, p. 8) ressalta que o ensino das relações de logicidade como

um conhecimento social é resultado de um equívoco teórico. Uma vez que tais estruturas de pensamento resultam da internalização, através de constatações autorais, das regularidades do meio, e ainda correspondem à complexidade das estruturas prévias (Piaget, 1975, p.111), o “ensino das relações lógicas” inviabiliza que se “[construa] a infraestrutura lógico-matemática de número”. Alternativamente, a autora coloca que a construção do número deve envolver o encorajamento do pensar sobre o número e quantificação de objeto em situações contextualizadas e significativas ao sujeito cognoscente (Kamii, 1983 p.70).

A pesquisa de Piaget e Szeminska sobre a gênese epistemológica do número, principia que sua construção é “correlativa ao desenvolvimento da própria lógica” (1981, p. 12) □. Em paralelo com a teoria da epistemologia genética, o período pré-numérico, marcado pela ausência da estrutura do número elementar, é também pré-lógico, marcado pela ausência de relacionamento lógico entre os objetos. Portanto, o despontar das relações lógicas, construídas ao longo do desenvolvimento cognitivo, facultam, também, a construção do número elementar.

Tomando o período pré-numérico como marco zero, os autores consolidam as etapas da aquisição do número elementar a partir da natureza das relações lógicas construídas ao longo do desenvolvimento cognitivo do indivíduo e sua correspondência às relações requeridas pelas operações numéricas. Dentre as estruturas lógico-matemáticas principais à construção do conceito de número apontaram-se o a) princípio lógico de invariância do conjunto (conservação de quantidades contínuas e discretas), b) comparação entre quantidades, dimensões e proporções (correspondência termo a termo) e c) a cardinidade e a ordinalidade (Nogueira, 2007, p. 170-184). Porém, dentre esses, o princípio constituinte do conjunto dos números inteiros “indissociavelmente cardinais e ordinais (Piaget e Szeminska 1971, p.13; Duro & Cenci, 2013) é a síntese entre os sistemas de grupamentos inclusivos e de ordem, correlatos às estruturas de classificação e seriação, quando excluído as qualidades dos objetos relacionados. Toma-se, ainda, a constatação do número na criança quando este torna-se um instrumento consistente e confiável de verificação de quantidades **independente do valor posicional e mesmo na ausência do objeto concreto** (Kamii, 1983, p.9)

Tomando o período pré-numérico como marco zero, os autores consolidam as etapas da aquisição do número elementar a partir da natureza das relações lógicas construídas ao longo do desenvolvimento cognitivo do indivíduo e sua correspondência às relações requeridas pelas operações numéricas. Dentre as estruturas lógico-matemáticas principais à construção do conceito de número apontaram-se o a) princípio lógico de invariância do conjunto (conservação de quantidades contínuas e discretas), b) comparação entre quantidades, dimensões e proporções (correspondência termo a termo) e c) a cardinidade e a ordinalidade (Nogueira, 2007, p. 170-

184). Porém, dentre esses, o princípio constituinte do conjunto dos números inteiros “indissociavelmente cardinais e ordinais (Duro & Cenci, 2013; Piaget & Szeminska, 1981, p. 13) é a síntese entre os sistemas de grupamentos inclusivos e de ordem, correlatos às estruturas de classificação e seriação, quando excluído as qualidades dos objetos relacionados. Toma-se, ainda, a constatação do número na criança quando este torna-se um instrumento consistente e confiável de verificação de quantidades **independente do valor posicional e mesmo na ausência do objeto concreto** (Kamii, 1983).

4.3.2.1.1 Princípio Classificatório

Em sentido denotativo, a palavra classe é reservada às séries ou conjuntos com características semelhantes (Ferreira, 2004, p.238). Na perspectiva Cantoriana (Murakami, 1977), aos conjuntos são reservados axiomas lógicos fundamentais para a manipulação algébrica de conjuntos infinitos.

Tangenciado às duas definições, a teoria Piagetiana institui a classificação como uma operação cognitiva, essencialmente lógica, de relacionamento entre entes. Em a gênese das lógicas elementares (Piaget & Inhelder, 1975, p.19), tomada como uma totalidade decomponível, a classe é definida como fruto da articulação da parte, denominada compreensão, e do todo, denominada extensão. Logo, a compreensão é toda qualidade evidenciável em um elemento independente seu pertencimento a um grupamento – embora a qualificação presuma, de persi, um estado de pertencimento, e a extensão as relações entre as qualidades em compreensão quando estendidas aos entes de uma classe, onde são instituídas as relações qualitativas de dependência, pertencimento e inclusão. A este respeito, Piaget também postula os corolários da instituição lógica das classes nos seguintes axiomas:

Sendo a classe **A** composta de elementos **A_n**:

1. Todo objeto, mesmo que único, é classificável;
2. Toda instância de classe presume uma classe complementar. Onde um grupamento **A** formada por elementos **A_n** opõe-se diretamente a sua complementar **A'** formada de elementos **não-A_n**;
3. A pontuação anterior tem como corolário que a soma dos conjuntos complementares resulta em um conjunto superior B, onde **B = A + A'**;
4. Toda classe A compreende **todos** os entes **A_n**;
5. Uma classe **A** compreende unicamente os entes de caráter **A_n**;
6. Classes de nível idêntico são disjuntos uma vez que $A \times A' = 0$ e $A_n \times A'_n = 0$;

7. Toda classe A está incluída em uma classe superior que compreenda **todos** os seus elementos. Logo, se toda classe presume seu complementar e está incluída em uma classe superior B, então, $A = B - A'$. Expressão que consolida o princípio de inclusão hierárquica onde **todo A são alguns B**;
8. Simplicidade em extensão: Redução dos encaixamentos ao mínimo dos entes em compreensão;
9. Simplicidade em compreensão: Uso de mesmo critério para diferenciar conjuntos de mesmo nível (tamanho, por exemplo);
10. Simetria nas subdivisões: Se $B = A_1 + A'_1$ então $B_2 = A_2 + A'_2$ é conjunto complementar e simétrico à B;

Evidenciando a hipótese de que “nenhum desenvolvimento é possível senão a partir de estruturas prévias” (1975, p. 111) os autores sustentam que as operações de classificação e seriação resultam da evolução, em complexidade, dos esquemas de ação sensório-motores, essencialmente perceptuais e percussores da evolução dos esquemas lógicos (1975, p. 26)

Evidenciando a hipótese de que “nenhum desenvolvimento é possível senão a partir de estruturas prévias” (1975, p. 111), os autores sustentam que as operações de classificação e seriação resultam da evolução, em complexidade, dos esquemas de ação sensório-motores, essencialmente perceptuais e percussores da evolução dos esquemas lógicos. (1981, p26)

Sendo a compreensão e a extensão propriedades fundamentais da classificação para Piaget, o autor implica que apenas quando “o sujeito é capaz de 1) definir a classe em compreensão pelo gênero e diferença específica; e 2) Manipular a extensão, segundo as relações de inclusão ou de dependência inclusiva, supondo um ajustamento dos quantificadores intensivos ‘todos’, ‘alguns’, ‘um’ e ‘nenhum’” é possível falar que este está classificando.

Compreensão fundamentada nas semelhanças é assegurada a partir das assimilações sensório-motoras pela percepção das qualidades comuns e pela abstração elementar ligada às finalidades práticas, a extensão dos conceitos, por seu turno, só é acessível ao indivíduo por intermédio de um simbolismo preciso, e mesmo assim, na condição de subordinar os signos verbais a um sistema de quantificações bem reguladas. (Piaget & Inhelder, 1983, p.343)

Buscando traçar os marcos do percurso ontogenético oriundo das operações de classificação, Piaget construiu instrumentos que eliciam relações simétricas aditivas e multiplicativas. Os próximos tópicos destinam-se a descrever os marcos apontados por Piaget e seu correlato quanto ao deslocamento do esquematismo muito distanciado da diferenciação e da coordenação à extensão e compreensão operante. (Piaget, 1975 p.29)

4.3.2.1.2 Relações simétricas: Classificação Aditiva e Multiplicativa

Como supracitado, Piaget define a classificação como a articulação entre a extensão e a compreensão. Enquanto a compreensão está diretamente relacionada às assimilações sensorio-motoras através da percepção qualidades e finalidades práticas, a extensão é alcançada pelo sujeito “por intermédio de um simbolismo preciso, e mesmo assim, na condição de subordinar os signos verbais a um sistema de quantificação bem reguladas” (Piaget & Inhelder, 1975, p. 343).

Como supracitado, Piaget define a classificação como a articulação entre a extensão e a compreensão. Enquanto a compreensão está diretamente relacionada às assimilações sensorio-motoras através da percepção qualidades e finalidades práticas, a extensão é alcançada pelo sujeito “por intermédio de um simbolismo preciso, e mesmo assim, na condição de subordinar os signos verbais a um sistema de quantificação bem reguladas”. (Piaget, 1975, p.343)

O princípio classificatório para Piaget se encorpa nos esquemas de ação como estrutura lógico-matemática característica de relações simétricas (relações de semelhanças). Correspondente ao curso psicogenético, as estruturas de classificação, antes ausentes, são gradativamente construídas à medida que à medida que o sujeito, intervindo sobre os objetos, descobre os potenciais apriorísticos do relacionamento entre os entes.

Com despontar ainda no estágio sensório-motor Piaget percebeu, através de seu método clínico, que, inicialmente, o relacionamento entre objetos, quando não ausente, passa por um extenso período de subordinação aos critérios perceptuais; desenvolvendo-se gradualmente à classificação operante, onde as qualidades em compreensão e extensão **são intrínsecas ao objeto, ou seja, não determinadas pela configuração visual e sim pelo critério assentado sobre eles**. São então discernidos três etapas de desenvolvimento da estrutura operatória de classificação: Coleções Figurais, Coleções Não-figurais e classes aditivas, multiplicativas e inclusão hierárquica. Os tópicos a seguir, descrevem as condutas respectivas a cada estado:

- 1. Coleções Figurais:** Observado entre as crianças de 2 anos a 5 anos, os esquemas de separação dos elementos não são dispostos com relação à diferenças e semelhanças, e sim em coleções figurais de critérios arbitrário não exaustivos que exploram as potencialidades espaciais. São observados alinhamentos e arranjos figurais onde o relacionamento instável entre as qualidades do objeto são percebidas na dissipação da significação quando a conformação espacial é alterada. São marcados, também, ausência de designação de qualidade extensiva aos componentes da coleção mesmo que reunidos e designações compreensivas sucessivas e não exaustivas devido ausência de capacidade

para construção de totalidades inclusivas e simultâneas **independente de toda e qualquer figura espacial.**

Em síntese, as relações figurais são constitutivas, não-simbólicas, espacialmente dependentes e tem a parte e o todo em desarticulação (p.33-34)

2. Coleções não-figurais: Observado entre as crianças de 5 anos e meio a 7 anos, os esquemas de separação de semelhantes ainda não constituem classes propriamente ditas pois não são percebidas inclusões hierárquicas, porém, já não comportam uma figura definida. Os esquemas já facultam a separação qualitativa em semelhanças e disparidades e, eventualmente, subclasses simétricas, porém tais construções ainda não representam classes.

Evolui-se do estado anterior, a intenção de classificar todos os objetos do grupamento mesmo que sejam diversas pequenas coleções justapostas e complementaridade parcial e a manutenção de objetos semelhantes em grupamento único (axioma 2 e 5).

Ressalta-se que embora as classes e subclasses, estas últimas determinantes da inclusão hierárquica, sejam designadas os sujeitos desta fase não alcançam os corolários das classificações onde: Se a Classe $B = A + A'$, A' são alguns B enquanto B são todos A' , que caracteriza a inclusão hierárquica.

3. Classes e Inclusão Hierárquica: A última etapa corresponde à classificação operante.

Isto é, já são estabelecidas relações hierárquicas de diferentes níveis e os critérios estabelecidos com maior flexibilidade. Esta etapa se caracteriza pela presença da inclusão hierárquica, classes multiplicativas e aditivas subclassificadas a múltiplos subníveis. São constitutivas da compreensão de uma classe quando estendida a todos os seus membros, sendo, portanto, “a compreensão e a extensão [...] ao mesmo tempo diferenciadas e exatamente correspondentes (Piaget e Inhelder, 1975, p. 105).

Embora esta etapa corresponda a de maior complexidade, tais processos ainda não são abstratos ao nível da lógica das proposições formais. Mas, segundo Piaget e Szeminska, suficiente para suportar a estrutura conceitual do número.

4.4 ESPAÇOS DE INTERVENÇÃO

4.4.1 Zonas de Desenvolvimento Real e Proximal

As zonas de desenvolvimento propostas por Vigotsky correspondem ao conceito relacionados aos estados do aprendizado escolar. São dissociados dois níveis: Desenvolvimento

real (ZDR) e Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). O primeiro corresponde aos conhecimentos já consolidados pelo indivíduo, bem como as funções mentais necessárias àquele aprendizado, o segundo diz respeito ao conhecimento ainda não consolidado mas são expressas a partir da mediação.

Tal conceito é importante pois implica um critério nas estratégias de intervenção, sendo expostas pelo autor, que a intervenção em zona de desenvolvimento próxima é benéfica para o deslocamento das funções em iminência, para a zona de desenvolvimento real.

4.4.2 Metacognição

Proposta inicialmente por Flavell nos anos 70 (1979), a metacognição é o conceito respectivo ao “conhecimento e cognição sobre o fenômeno cognitivo” (1979, p. 906) onde, um indivíduo a pensar ‘metacognitivamente’ é aquele que conhece seus processos de aprendizagem, a monitora e o adapta à necessidade vigente.

Com os avanços dos estudos sobre a competência, Shimamura & Matcalfe(1996) implicam que a metacognição pode ser explicitada a partir de um modelo metacognitivo composto de dois níveis inter-relacionados: objeto nível e metanível. Em suma, estes níveis informam sobre o grau de generalização alcançada pelo indivíduo sobre o conteúdo. Enquanto a abstração objeto nível compreende o monitoramento e o controle sobre o próprio conhecimento, o nível meta de abstração corresponde, não somente ao monitoramento e gestão dos processos de aprendizado mas, à transformação do objeto de conhecimento em estrutura generalizada, ou seja, a formação do conceito.

Quanto à transformação do conhecimento, Marques (2017) define que a metacognição compreende “o exercício da consciência das regras de um conhecimento”. Logo, ao “metacognir” sobre um objeto de conhecimento, rumo à generalização, é facultado ao indivíduo o reconhecimento dos padrões inerentes àquela estrutura do saber. Ainda segundo a autora, as regras do conhecimento são abstraídas através, unicamente, da metacognição de nível meta, e seu produto corresponde à **regra generativa**, representativa, simultaneamente, do conhecimento em seu estado mais elevado e o mesmo conhecimento aplicado a nível concreto e a outras áreas de conhecimento:

“A essência do desenvolvimento cognitivo do ser humano está na habilidade de transmoglificar, isto é, o processo se valer de uma regra generativa universal para transitar livremente entre conhecimentos. A nova mentalidade prevê a descoberta do conceito de pessoa dentro do ser humano e a libertação do mesmo em direção à autonomia, criatividade e inovação. O poder para alcançar os patamares

superiores vem da tomada de consciência de seu próprio potencial.” (Marques, 2017, pp. 17–18)

4.4.3 Elaboração Dirigida

A elaboração dirigida é proposta por Seminário como um modelo de intervenção centrado na dialética entre o sujeito o mediador. Neste modelo, o mediador necessita conhecer a regra generativa da situação-problema a ser resolvida pelo sujeito, e guiá-lo a metacognir - sobre a relação entre os objetos e suas ações – em direção ao encontro da regra generativa esperada. (Seminário, 1987)

4.5 A INTELIGÊNCIA DO BRINQUEDO

O jogo da imaginação constitui, com efeito, uma transposição simbólica que sujeita as coisas à atividade do indivíduo, sem regras nem limitações. (PIAGET, 1978)

Tendo origem na cultura alemã e herdada pela Europa, segundo Benjamin (2002), o brinquedo tem seu primórdio no fazer artesão que encarnava nas peças a singularidade da manufatura. Nuremberg foi marcada pelos soldadinhos de chumbo, bonecas de porcelana e trenzinhos. Como todo fato histórico, o brinquedo também é implicado pelos contornos políticos e econômicos da civilização. Como tal, teve no século XVIII, época da revolução industrial na Inglaterra, de ser adaptado aos moldes de produção em larga escala que encareceu os exemplares e os tornou menos singulares.

A breve recapitulação histórica demonstra o quanto que o percurso de uma civilização influência, também, nos objetos reservados à criança. Mas além de um objeto no curso da civilização, este artefato, presente ao longo do desenvolvimento do indivíduo encarnado em deferentes fantasias, representa um espaço fértil para a transição entre a realidade e o descobrimento e experimentação do mundo simbólico.

Segundo Brasil (1988, p.79), a brincadeira é um espaço onde é facultado ao indivíduo constituir sua cadeia de significações. À medida que, ao jogante, são abertas as possibilidades, incertezas e atemporalidades, a restrição da realização de seu desejo (Brasil, 1988, p.79) ou satisfação de sua necessidade, (Vigotsky, 2007, p.61-62) que o colocou inicialmente em ação, fica a cargo do status quo de sua linguagem.

Logo, a brincadeira como uma atividade de exercício da linguagem e do pensamento através da ação, toma o caráter simbólico do objeto real de conhecimento – expresso no

brinquedo – como mediador na expressão de regras que estabelecidas pela natureza do próprio brinquedo, mesmo que implicitamente (Vigotsky, 2007, p. 63).

Ainda segundo Vigotsky (2007, p.69), o brinquedo, contendo “todas as tendências de desenvolvimento sob forma condensada” é capaz de ampliar – criar foi o verbo utilizado pelo autor – a zona de desenvolvimento proximal do indivíduo, em outras palavras, segundo Marques (2017), o brinquedo age como uma prótese cognitiva ao emprestar estruturas e regras a uma cognição que ainda não as pode criar sozinha. Esse empréstimo corresponde à ampliação da ZDP que, através da mediação, pode se consolidar como ZDR e, conseqüentemente, mudança das necessidades e consciência anteriores.

4.5.1 Affordance do objeto

O conceito affordance significa, em tradução livre, acessibilidade e a compreensão sobre como experimentar e interagir com um objeto. Para Kirsh (2004), em sua obra sobre o design metacognitivo, o affordance do objeto precisa ser delineado de acordo com as necessidades do usuário e atendimento à finalidade do produto.

Tendo o conceito representado nas plataformas de aprendizado à distância, o autor descreve que a escolha das cores, tamanhos e efeito das letras, estratégias de subdivisão do conteúdo nas páginas, fotografias, entre outros, influenciam **diretamente** na trajetória do indivíduo ao longo do uso e nos processos mentais demandados ao longo da interação.

Desta forma, o autor propõe que a inteligência de um artefato voltado para a aprendizagem necessita reclamar, em seu affordance, as demandas cognitivas respectivas à tarefa mental de aprender como, por exemplo, atenção seletiva, memória, planejamento e monitoramento e, ainda, provocar no indivíduo a formação de estruturas de pensamento necessárias para o uso pleno do engenho através dos modelos de navegabilidade ofertados.

4.6 PRINCÍPIOS MATEMÁTICOS

4.6.1 Teoria das Conjuntos

Proposta por Cantor, a teoria dos conjuntos se configura como um dos fundamentos da matemática Elementar. Nela é reconhecida a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos, bem como a hierarquia existente entre eles.

Em totalidade, os conjuntos são considerados conceitos intuitivos, ou seja, ideias intuitivas que não podem ser demonstradas. Porém, a determinação de axiomas, ou postulados, que façam desta ideia intuitiva um objeto de instrumentalização lógica, permitiu a consolidação desta teoria

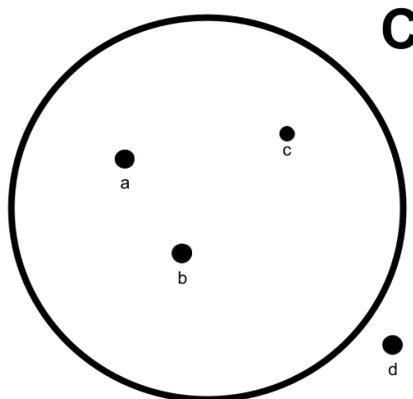
que, aplicada interdisciplinarmente, elucidar comportamentos que, embora não diretamente observáveis devido sua natureza ou infinitude, pode ter sua estrutura explicitada.

Dentre os axiomas supracitados estão:

1. **Conjunto:** Correspondem a grupamentos, coleções, classes e sistemas; Tem-se por exemplo, classes de palavras, grupamento de habilidades, coleções de botões, entre outros.
2. **Elemento:** É a descrição ofertada a todo componente de um conjunto. Logo, no conjunto de palavras, por exemplo, espera-se que os componentes que o compõe sejam palavras, enquanto que em conjuntos formados de conjuntos, espera-se que os elementos componentes sejam de mesma natureza.
3. **Pertinência:** Compreende a proposição de estados de pertencimento (\in) e ou não pertencimento (\notin) a um conjunto.

Explicitado através do diagrama de conjuntos:

Figura 3: Diagrama de conjunto e elementos;



Fonte: Murakami (1977) adaptado pelo autor

Dado um conjunto C (figura 3), segundo os postulados da teoria de conjuntos supracitados, deduz-se que os elementos a, b e c pertencem ao conjunto C, enquanto que o elemento d não pertence ao conjunto C. Logo, $a \in C$, $b \in C$, $c \in C$ e $d \notin C$

A partir deste postulado, então, são erguidos os conceitos de conjunto universo, conjunto unitário e vazio, conjuntos iguais, inclusão hierárquica e operações entre conjuntos. Sendo de importância para o presente trabalho, tais corolários são definidos a seguir.

4.6.1.1 Conjunto Universo

O conjunto universo U é admitido como aquele ao qual **todos os elementos, envolvidos na operação**, pertencem. Deste modo, U é o maior conjunto infinito a ser considerado dentre os conjuntos trabalhados..

A importância desta determinação é **a delimitação do escopo do problema** para que se atenda ao ao cerne. Por exemplo, em aplicação concreta, imaginemos que em um pote composto de conchas, pedras e areia seja pedido que apenas um dos elementos seja retirado. Tal pedido emerge o conjunto universo pote (p), onde todos os elementos (e) pertencentes a ele atendem ao pedido. Porém, se for delimitado que do grupo de conchas (c), seja recuperada apenas a conchas mais claras (cc), a nova perspectiva de observação terá como conjunto U o grupamento de conchas, embora este conjunto ainda pertença ao conjunto p .

4.6.1.2 Conjunto Unitário e Vazio

Define-se como conjunto unitário aquele que possui apenas um único elemento e conjunto vazio aquele que não possui elemento algum.

4.6.1.3 Igualdade entre conjuntos

Dois conjuntos B e D são considerados iguais quando todo elemento de D pertence, **reciprocamente**, a B , independentemente sua ordem; podendo ser expresso da seguinte forma:



4.6.1.4 Subconjunto

Dentre dois conjuntos A e B , determina-se que Q pertence a W se, e somente se, todo elemento de A pertence também, e não reciprocamente, a B . A estes casos a notação $Q \subset W$ (figura 4)

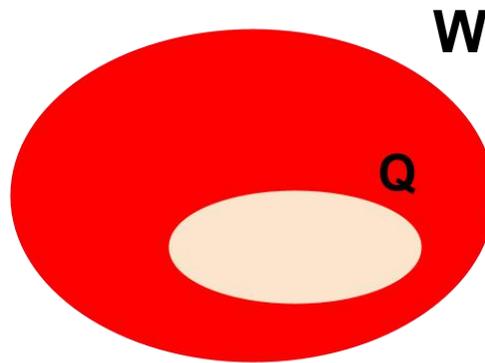


Figura 4: Diagrama de subconjunto;

Onde a definição do conjunto é:



Tal definição descreve que Q **está contido** em W, implicando, logicamente, que W **contém** Q. Dado o princípio da teoria dos conjuntos, ambos os conjuntos W e Q representam grupamentos infinitos onde W corresponde a um infinito maior que Q. Institui-se, então, a negação do conjunto anterior a partir da definição a seguir:



Logo, retomando o conceito de igualdade entre conjuntos, ~~se~~ se, e somente se:



Em suma, as propriedades são:

Sendo A, B e C conjuntos arbitrários:

1. ~~para todo~~ para todo conjunto A
2. ~~propriedade reflexiva~~ : propriedade reflexiva onde o conjunto sempre contém a si mesmo;
3. ~~propriedade antissimétrica~~ : propriedade antissimétrica que define igualdade;
4. ~~propriedade transitiva~~ : propriedade transitiva onde se ~~se~~ e ~~e~~ ,
consequentemente, ~~.~~.

4.6.1.5 Reunião de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, a união entre ambos se encontra no conjunto composto de elementos pertencentes a pelo menos um dos conjuntos.



4.6.1.6 Intersecção de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, a intersecção entre os dois conjuntos é formado por elementos que pertencem a A e a B.



4.6.1.6.1 Conjuntos Disjuntos

Dados dois conjuntos onde não há elementos que pertencem a A e a B simultaneamente, é dado o nome conjunto disjunto.



4.6.1.7 Diferença entre conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B o conjunto de elementos pertencentes ao conjunto A que não pertence a B,



Sendo B um subconjunto de A, o conjunto resultante de $A-B$ é o conjunto complementar de B em A.

Em resumo, A teoria dos conjuntos é regida por princípios lógicos relacionados à organização de dados. A saber, as regras que regem a organização hierárquica da evolução das espécies na teoria Darwinista (1859), a discriminação dos espaços mentais da teoria de Fauconnier (1994), a determinação dos aminoácidos, lipídeos, proteínas e carboidratos como subdomínios do grupamento biomolecular na bioquímica (Nelson & Cox, 2018, p. 15)□, são exemplos de organização dos conhecimentos explicitados a partir da compreensão de conjuntos infinitos propostos na teoria de conjuntos.

Uma vez que o princípio classificatório também está arraigado à construção de conceitos, organização do léxico mental e na compreensão do jogo de linguagem receptivo e expressivo, a teoria dos conjuntos é, nesta laboração, utilizada como um objeto concreto de explicitação das regras generativas (seção 60) que devem ser encontradas pelo jogador durante exploração das peças.

4.6.2 Teoria dos Grafos

A teoria dos grafos diz respeito ao objeto de estudo da matemática que expressa relações não lineares. A teoria teve início no século 18, consolidação no século 19 e atualmente tem aplicação interdisciplinar nas áreas da engenharia, sociologia, ciências sociais e, principalmente, aos estudos da linguística computacional uma vez que permite explicitar as estruturas gramaticais.

Estruturalmente, os grafos são compostos de conjuntos de objetos e suas relações, sendo a organização destes entes através de vértices e arestas ou arcos (figura 5) que configuram pares ordenados tipo

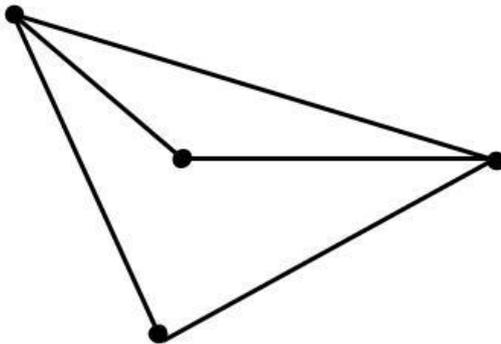


Figura 5: Exemplo de grafo G(4,5)

Fonte: Arquivos do autor

Dentre as propriedades do grafo aponta-se o número de vértices (ordem), ligação entre os vértices (adjacências), número de arestas que saem de um mesmo vértice (grau). Exemplifica-se alguns abaixo:

- 1. Grafo Regular:** É o grafo onde todos os vértices têm mesmo grau;

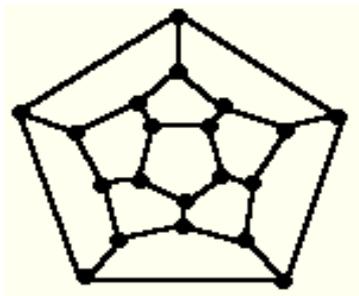
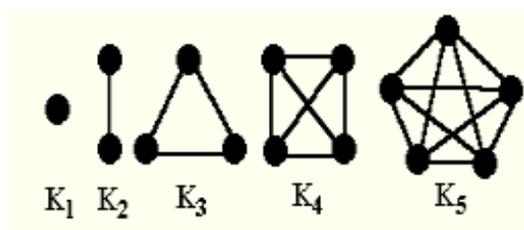


Figura 6: Grafo regular de Grau 3

Fonte: encurtador.com.br/eiH79

2. Grafo completo: É o grafo onde há uma ligação em cada par de vértices;

Figura 7: Exemplos de Grafos completos;



Fonte: encurtador.com.br/eiH79

3. Grafo Árvore: É um grafo orientado formado por uma raiz e ramos;

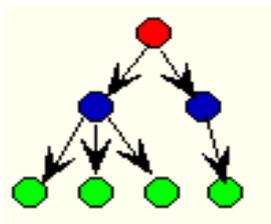


Figura 8: Exemplo de grafo árvore

Fonte: encurtador.com.br/eiH79

4.6.3 Isomorfismo

O homomorfismo bijetivo, princípio da álgebra conceitua que dois conjuntos são isomórficos (Anton & Rorres, 2012; Araújo, 2014, Murakami, 1977) desde que haja correspondência bijetiva entre eles. Por exemplo os conjuntos abaixo, que são considerados isomórficos, apresentam para cada item no conjunto A, um correspondente no conjunto A'.

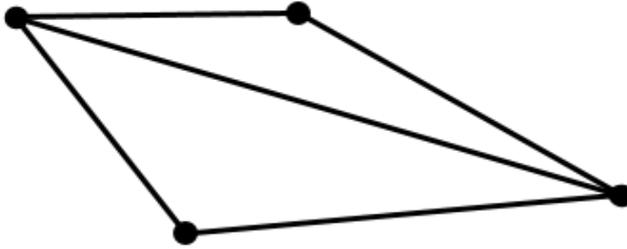


Figura 9: Grafo isomórfico ao grafo 5

Fonte: Arquivos do Autor

Em outras palavras, ser uma estrutura isomórfica implica, obrigatoriamente, numa relação linear (injetora e sobrejetora – bijetora) com outra estrutura. Desta forma, a estrutura invariante, extraída de totalidades de conteúdos, corresponde a uma arquitetura com potencial para residir uma relação de homomorfismo bijetivo – equivalência – com outra invariante. Por definição, tal conceito exerce sobre as relações de propriedades e estruturas e não sobre dimensões qualitativas. (Anton, 2012; Araújo, 2014)

4.7 TRABALHOS CORRELATOS

Esta seção compreende breves relatos de trabalhos que tangenciam as propostas encontradas neste trabalho.

4.7.1 Pensar é Divertido – Interação com blocos lógicos

Kothe (1997) suscita em sua obra que a transmissão matemática nos primeiros anos devem conservar “o espírito de inquirição e a vontade natural de compreensão das crianças”. Propõe, então, que o ambiente da criança - em pleno estado de aprendizado – oportunize e provoque o pensamento de experimentação matemática através de desafios.

O autor então observa possibilidades diversas para o uso de blocos lógicos de Dienes em ambiente de interação e ensino. Correlato ao presente trabalho, o autor observa o uso de grafos de árvore para estimulação da antecipação e do planejamento através de rede de caminhos (fig 10):

Figura 10: Exemplo de grafo árvore para expressar caminhos nos blocos lógicos;

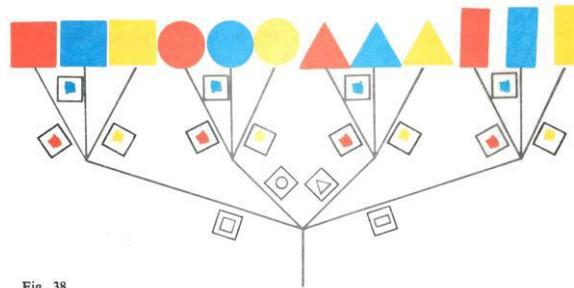


Fig. 38

Fonte: Kothe, (1997, p.40)

4.7.2 A lógica da descoberta nos jogos digitais

Perspectivando o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dentro das estruturas dos jogos digitais, Tonéis (2010) apresenta em sua dissertação que “os puzzles presentes nos jogos digitais se constituem em estruturas cognitivas de alto valor para a promoção e produção do conhecimento, tanto prático quanto científico.

Utilizando como modelo o game *Myst*, o autor demonstra como as estruturas lógico-matemáticas organizadas no puzzles geram espaços que viabilizam o desenvolvimento das estruturas lógicas de conhecimento, contribuindo, posteriormente com dados relativos ao uso de jogos digitais – com propostas de puzzles matemáticos – e posterior incremento de das habilidades deste em resolver problemas.

4.7.3 Sistemas Inteligentes Educacionais

Os sistemas inteligentes educacionais “são ambientes de computador onde a educação é baseada e promovida de princípios científicos [...]”. Estes sistemas são desenvolvidos para monitorar e coletar todas as informações recebidas do estudante e, a partir delas, sugerir situações-problemas propícias ao aprendizado. Suportado por princípios de modelagem de sistemas de engenharia o método de construção nomeado RUP (figura 11) constitui-se das etapas de **Modelagem Dimensional**, **processo criativo**, **projeto interacional** e **desenvolvimento conceitual**, processos estes explicitados no trecho a seguir:

O tema a ser aprendido é baseado em um sólido referencial teórico para que resulte em um modelo dimensional relevante. Com o espaço dimensional definido, o processo educacional pode ser inventado, levando em conta os preceitos determinados pelo estudo das bases científicas. Neste processo criativo, a arte inicial do processo educacional é pareada com os requisitos do modelo cognitivo, definindo os episódios de aprendizado. A pedagogia fica a cargo de um estudo das possíveis interações do educando e o significado das respostas dentro do conteúdo ensinável. Todas estas informações são reunidas para dar corpo final ao processo educacional, agregando as regras que serão estabelecidas para o

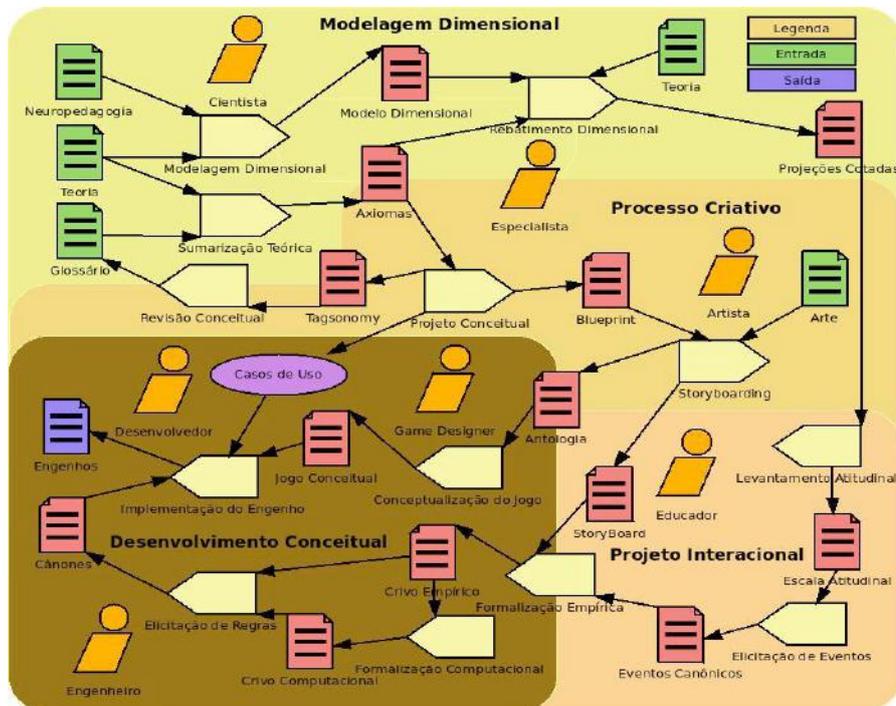
educando e para o engenho que representa o modelo matemático da teoria. (Marques et al., 2015, p. 238)

Logo, dentre todas as etapas, a modelagem dimensional é primordial para a consolidação teórica do jogo e delimitação das ações que serão foco de observação e, conseqüentemente, intervenção. Isto significa que, essencialmente, quanto mais específico é o escopo de observação e intervenção, mais específica a cobertura do espaço interacional no objeto.

Esta visão é análoga a focalizar no tema que se deseja abordar, de modo a prevalecer os componentes sobre a totalidade da temática. Neste momento, embora a totalidade não esteja visível, ela pode ser **inferida a partir da união dos componentes e o conhecimento prévio dos padrões de inter-relacionamento consolidados na fundamentação teórica.**

No método, as classes de componentes são as dimensões do modelo dimensional e compreendem o “itinerário do sujeito aprendente”. E o trânsito entre os microespaço dos componentes e macroespaço da totalidade esperada na aprendizagem principiada na metacognição. Em razão desta complexidade que o processo de modelagem dimensional compreende um grafo de relações entre as áreas de conhecimento. Ademais, o construto científico é passível de ser incorporado a jogos físicos e digitais, plataformas, apps, entre outros.

Figura 11: RUP - O modelo dos processos de produção do instrumento



Fonte: Tese EICA – Estruturas Internas Cognitivas Aprendentes (Marques, 2017, p. 90) □

5 METODOLOGIA

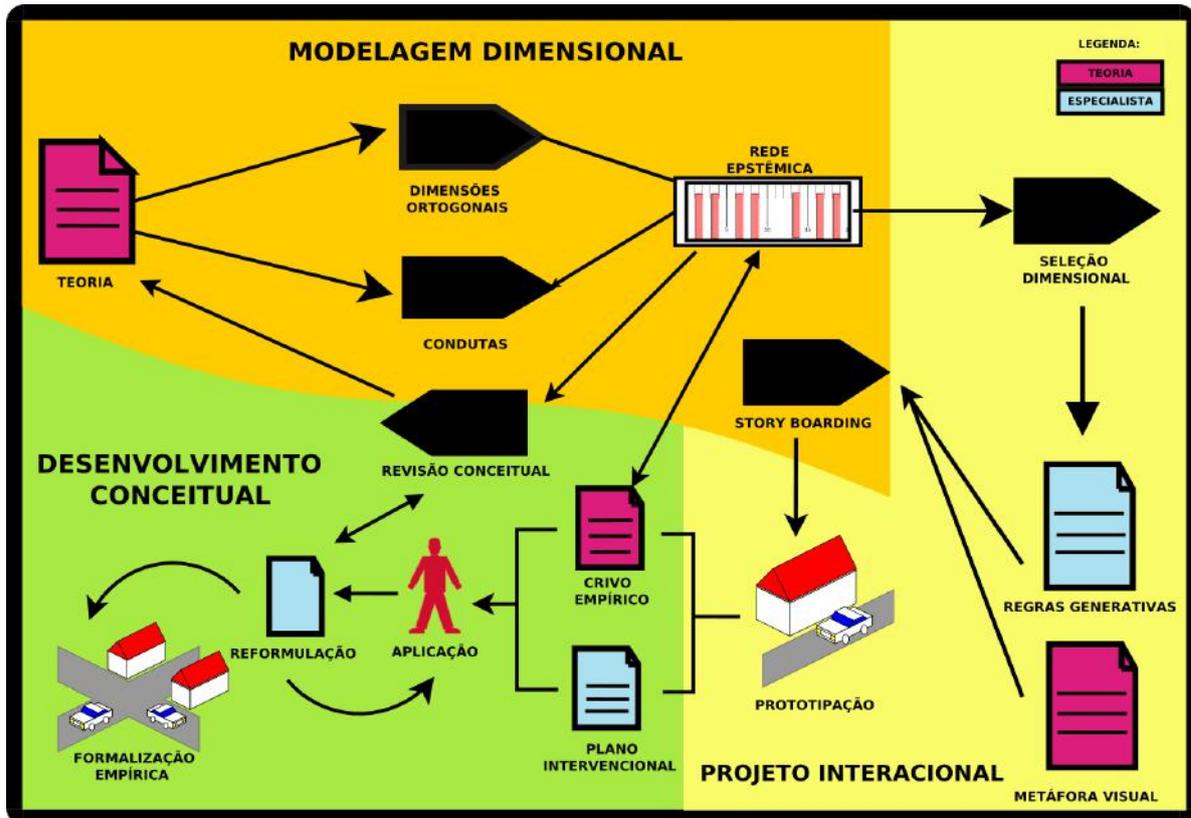
O presente trabalho consiste em uma pesquisa descritiva e busca explicitar o processo de construção de um artefato lúdico de aplicação no âmbito da fonoaudiologia educacional e clínica.

Para tal, foram articulados levantamentos bibliográficos e ações no laboratório de Games Inteligentes (LAGINT/NCE/UFRJ). O levantamento bibliográfico teve por finalidade a fundamentação teórica do jogo e a ação laboratorial objetivou a construção dos protótipos resultando no objeto final.

Os resultados deste trabalho são de natureza quali-quantitativa. Sua face qualitativa se manifesta na materialização do jogo como um construto de captura de informações dos jogadores. A face quantitativa nos crivos do jogo que, originados da sistematização e estratificação das informações extraídas do levantamento bibliográfico, se consolidam como marcadores hierárquicos, onde as jogadas são, implicitamente, valoradas do menor ao maior grau de complexidade observada na teoria e implicada no *affordance* do jogo.

O percurso metodológico se consolida sobre a adaptação do processo de modelagem de sistemas educacionais – RUP (figura 11). Tal adaptação buscou a abreviação do método de modo que fosse possível ser produzido por uma única especialidade. Abaixo o diagrama representativo da adaptação do modelo RUP para esta laboração:

Figura 12: Diagrama de Adaptação da Metodologia RUP



Fonte: Arquivos do autor

A metodologia evidenciada no diagrama acima consiste em três grandes etapas:

- 1) **Modelagem Dimensional:** Como na metodologia originária, esta etapa compreende o levantamento bibliográfico. Em suas subetapas, após levantamento bibliográfico, as referências pertinentes ao tema escolhido são separadas em **dimensões ortogonais** (componentes) e **condutas**. A primeira diz respeito aos subtemas, ou subconceitos, relacionados à teoria e, neste nicho, são listados todos os tópicos passíveis de serem observados através da conduta do jogador. Simultâneo ao listamento destes tópicos, extrai-se **do conteúdo bibliográfico** escalas de condutas, do jogador, que demonstrem o grau de domínio deste sobre o tópico em questão. Tal levantamento influencia proporcionalmente a sensibilidade da observação do sistema, ou seja, quanto mais graus são observados, maior a sensibilidade do sistema.

Ao final, são reunidas em documentos em forma de tabelas as dimensões ortogonais e sua articulação com as sequências de condutas correspondentes, gerando, assim, uma rede de organização do conhecimento onde constam o objeto conceitual total e as relações entre as dimensões.

- 2) **Projeto Interacional:** Este momento corresponde ao processo criativo. Seleciona-se a dimensão (ou dimensões) alvo e extrai-se delas a regra generativa, ou seja, o(s) as operações cognitivas, de per si abstrata, representadas em plano concreto (fórmulas, diagramas, mapas mentais, entre outros.) A metáfora visual corresponde à seleção de um design que eliciará as regras generativas do jogo. Após isso, no storyboarding devem ser esboçados situações-problemas que visem o uso das regras generativas e possam ser observadas todas as condutas levantadas na etapa um, referentes à dimensão selecionada. Enfim, o storyboarding é prototipado em versão física.
- 3) **Desenvolvimento Conceitual:** Nesta última etapa há a verificação final do sistema. Com o protótipo concluído são pareadas as condutas **esperadas** no uso do sistema e as condutas listadas na etapa 1, dando origem ao crivo empírico.

O plano intervencional, feito com base no crivo empírico, organiza o procedimento de aplicação do objeto, traçando a etapa de coleta de dados congruente com o crivo e explicitando o espaço de intervenção.

As documentações e o protótipo são modificados até que o sistema seja isomórfico em relação as regras generativas, ou seja, até que para cada regra haja uma situação-problema correspondente e o sistema seja formalizado.

5.1 JOGO ÁRVORE HEURÍSTICA (JOAH)

A passagem pelas etapas supracitadas originaram o jogo ÁRVORE HEURÍSTICA (JOAH). Tal jogo corresponde ao instrumento da subdimensão Classificação, que se configura como uma estrutura lógica elementar componente da construção do número elementar. O objeto dimensiona 150cm de altura e 125cm de largura. Tem como público-alvo sujeitos entre 6 e 12 anos. E escopo de aplicação, o âmbito de ação da Fonoaudiologia Educacional. A concepção do jogo é descrito a seguir de modo correspondente às etapas supracitadas (figura 12).

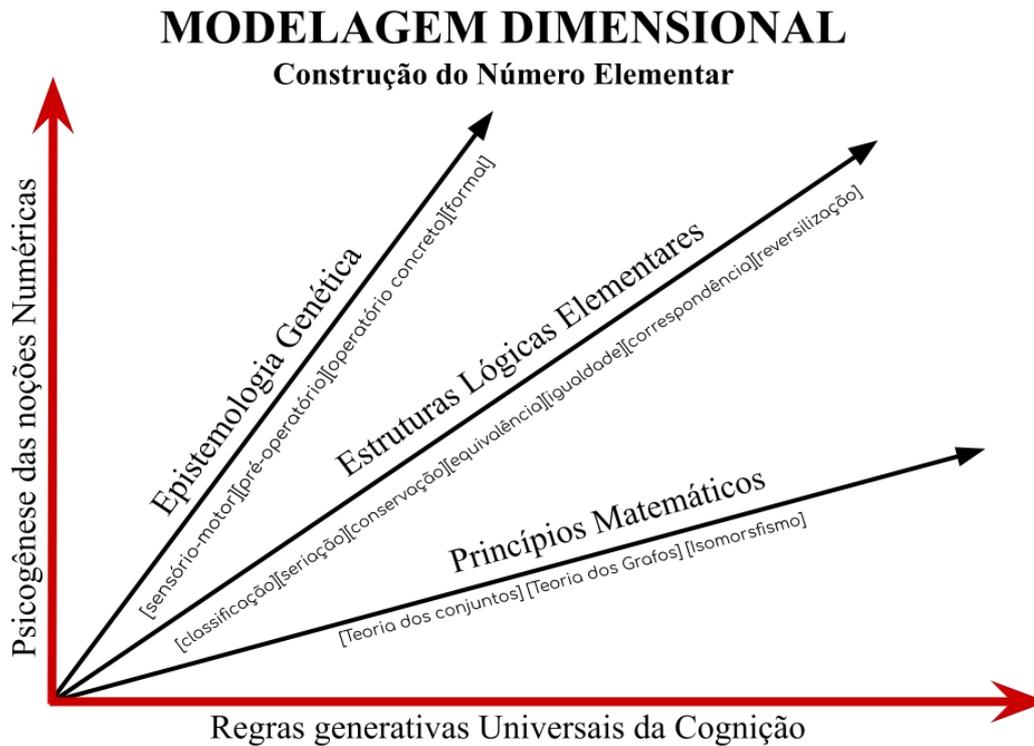
5.2 JOAH: MODELAGEM DIMENSIONAL

O JOAH é fruto de inter-relações teóricas explicitadas através de um modelo dimensional (figura 13). A constituição deste modelo principia que o conhecimento se organiza hierarquicamente e, como tal, pode ser dividido em dimensões, ou classes, que se desdobram, recursivamente, em sub-dimensões.

Desta forma, neste trabalho as dimensões compreendem os conceitos e subconceitos relacionados ao processo de construção do número elementar. Abrange-se, concernente à sua natureza lógico-matemática e social, os objetos reais de conhecimento, onde se assenta a

estrutura mental do número, as estruturas de expressão do conceito numérico e as etapas do desenvolvimento cognitivo na perspectiva piagetiana.

Figura 13: Modelo Dimensional do Jogo Árvore Heurística

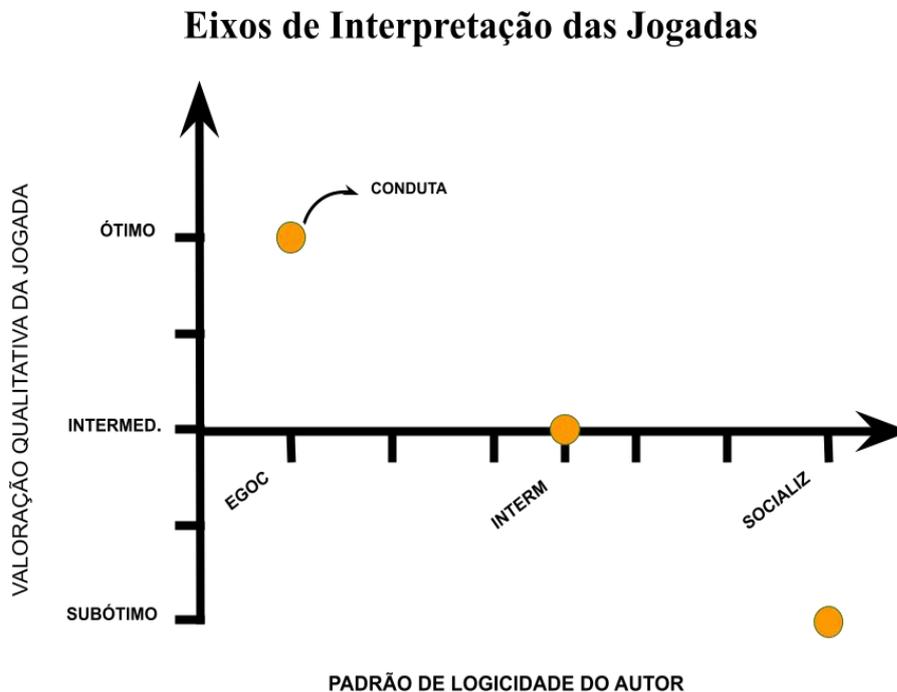


Fonte: Arquivos do autor

Sendo o objetivo deste jogo a tomada de decisão mediacional a partir das condutas do jogador, selecionou-se a vertente teórica que possibilita a visualização das jogadas de modo alternativo ao acerto e o erro (binário).

Deste modo, as soluções são interpretadas a partir de sua proximidade com os estados ótimos de solução esperados para cada estágio de desenvolvimento lógico. A figura abaixo(14) explicita a estrutura desta valoração:

Figura 14: Assinalamento de um mesmo comportamento a partir das perspectivas lógicas egocêntrica, intermediária e socializada;



Fonte: Arquivos do Autor

O eixo x corresponde ao padrão lógico do autor da jogada. Consideradas egocêntricas estão as condutas infra-lógicas que se encaminham à socialização, ou seja, à logicidade (ver seção 13). O eixo y representa a valoração reservada à conduta e cada ponto laranja representa **uma mesma conduta** tomada por autores de padrão lógico egocêntrico, intermediário e socializado.

Neste quadro, busca-se explicitar a relação de proporcionalidade entre a conduta e a valoração qualitativa desta. Um conduta tomada como ótima para um indivíduo de padrão lógico egocêntrico, ou seja, que não esquematiza suas ações sob o stencil da logicidade, será considerado, proporcionalmente, intermediário ao perspectivar o padrão intermediário e socializado de condutas.

Logo, em síntese, o estado ótimo de solução esperado do desafio no estágio lógico egocêntrico, será sempre subótimo para o estágio lógico socializado.

5.3 JOAH: Projeto Interacional

Ao longo do estudo, observou-se a vastidão de habilidades que precisam ser desenvolvidas para que o número se estabeleça como um instrumento de mensuração de quantidades e suporte para

construtos matemáticos mais complexos. Em observância a esta pluralidade, determinou-se que seriam necessários sub-jogos que, unidos, cobrissem a totalidade do construto número. Em razão de a metodologia explicitar as etapas de construção dos jogos pretendidos, criteriou-se que, nesta laboração, apenas um dos instrumentos fosse retratado.

Respectivamente, o Jogo Árvore Heurística (JOAH) é o instrumento que observa a competência de CLASSIFICAÇÃO. O parâmetro para a escolha desta dimensão foi seu apontamento como uma das habilidades base para a fundamentação do construto número, junto à seriação, e seu tangenciamento à diferentes áreas de conhecimento – com relação à organização epistemológica, bem como seu estrito relacionamento com a linguagem no plano da construção de conceitos (Vigotsky, 2000), organização do léxico mental e compreensão e expressão linguística.

5.3.1 Regras Generativas

As regras generativas correspondem à estrutura de abstração metanível de um conhecimento quando tomada ausente sua manifestação concreta (ver seção 30). No processo de construção do jogo, as regras generativas são **incorporadas ao affordance do objeto, de modo que o artefato se torne um ORC viabilizador da expressão simbólica das regras** pertinentes ao conhecimento que se deseja desenvolver.

No brinquedo proposto as regras generativas correspondem aos princípios lógicos da classificação. Logo, a fim de tornar explícitos os meios de manifestação dos cânones na inteligência do objeto, as estruturas generativas serão especificadas a partir da analogia entre os affordances do brinquedo e a teoria dos conjuntos de Cantor (ver seção 32).

No JOAH, as regras generativas a serem expressas são:

1. **Conjunto Universo;**
2. **Igualdade entre conjuntos;**
3. **Subconjunto;**
4. **Intersecção;**
5. **Análise Combinatória;**
6. **Isomorfismo;**

5.3.2 Metáfora Visual

Como já abordado na fundamentação teórica, o grafo é um objeto matemático que expressa, primordialmente, relações não lineares.

Inspirado nesta teoria, o JOAH é construído sobre a metáfora visual do grafo de árvore (figura 8) e explora a construção das relações a partir do planejamento dos nós e gradual construção das ramificações. Busca-se a clousura do objeto simbólico árvore com seus galhos e folhas, bem como a eliciação da expressão simbólica das regras do jogo na edificação da estrutura arbórea.

Esta metáfora empresta ao jogo uma ampla possibilidade de construção e vieses interpretativos que serão delimitados na subetapa crivo empírico da etapa de consolidação conceitual (figura 12).

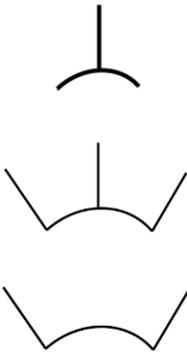
5.3.3 Storyboarding e Prototipação

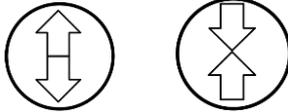
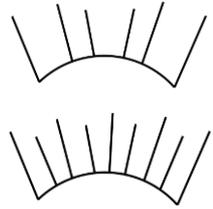
Após delimitação das regras generativas e escolha da metáfora visual, a etapa de storyboarding esboça a visualização, dinâmica do jogo e planejamento das movimentações das peças, bem como a grandeza e planejamento da movimentação das peças.

Considerando que os jogos de construção constituem uma das primeiras modalidades de brincadeira (Ribeiro,2005), a ideação do jogo físico busca aludir, no primeiro contato, ao território dos esquemas de ação motores, a fim de que a partir da exploração tátil-cinestésica o indivíduo tenha a liberdade de manifestar os processos unicamente assimilativos (jogo), acomodativos (imitação) ou a articulação de ambos na tentativa de expressão simbólica da regra (ver seção 15).

O protótipo construído após a etapa de storyboarding é composto de 103 peças classificadas em Criteriáveis, Criteriadores e conectores (tabela 1).

Tabela 1: Tipo, descrição e função das peças do Jogo Árvore de Coordenações

	CRITERIÁVEIS (CV)	CRITERIADORES (CD)	CONECTORES (CT)
FOR MA	□ ○ △	 	

			
DES CRI ÇÃO	<p>Grupo geométrico: Triângulo, Quadrado e círculo; Tamanhos: Grande e Pequeno Cores: Azul, Amarelo e Vermelho Espessura: Fino Quantidade: 1 peça para cada cor, forma e tamanho Total: 18 peças</p>	<p>Grupo Critério: Figura Geométrica, Cor e Tamanho Quantidade: Figura geométrica: 6 de cada Cor: 6 de cada Tamanho: 9 de cada Total: 54 peças</p>	<p>Grupo Conector: Conexões de 1,2,3,6 e 9 casas Quantidade: 1 casa – 18 2 casas – 9 3 casas – 9 6 casas – 3 9 casas – 2 Total: 31 peças</p>
FUN ÇÃO	Representando as folhas da árvore são os objetos a serem decompostos em qualidades.	Representando os nós da árvore, determinam o critério de ramificação da árvore;	Representando os galhos das árvores, determinam a quantidade de ramificações necessárias para atender o critério selecionado;

A respeito da inteligência dos assets, a escolha da estética das peças CD e CV baseiam-se no trabalho correlato 39 e no material de experimentação de Piaget (ver seção 24). Complementa-se que a iconicidade relativa ao *affordance* busca:

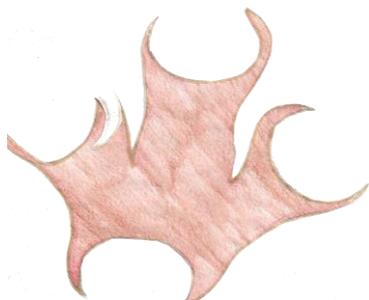
a) **Controle do escopo combinatório a partir das dimensões qualitativas:** O uso de **objetos icônicos** tem como corolário o afunilamento das possibilidades de classificação. Por exemplo, enquanto a imagem representativa de um pássaro pode ser qualificada quanto a presença ou ausência de componentes corporais, pertencimento a grupamentos taxonômicos diversos, vivências e letramentos individuais do indivíduo (eliciando a fabulação), signo icônico tem menor flexibilidade de qualificação, uma vez que seus elementos decomponíveis são semioticamente mais simplificados e restritos.

b) **Controle da observação e distribuição combinatória:** O tópico anterior tem como corolário maior controle sobre a observação e escolha da distribuição dos atributos feitas pelo jogador. Ou seja, enquanto o espaço de compreensão de elementos não-icônicos é facultado ao conhecimento individual, a maior iconicidade, atrelada à simplicidade da representação, facilita o pareamento da significação do objeto pelo jogador e pelo mediador, reduzindo, assim, o escopo de possibilidade na construção dos crivos de análise e o processo mediacional.

Com relação à dinâmica do jogo, as peças são disponibilizadas ao jogador para que sejam manipuladas livremente. A limitação das jogadas é sugestionado pelo affordance do jogo através da quantidade mínima de peças, tamanho e ramificação das peças CT e também a partir da mediação com base no crivo empírico – discorrido na próxima seção – que oportuniza a condução da regra do jogador para regiões de valoração ótima (figura 14).

Abaixo as figuras demonstram o resultado de prototipação e caso de uso:

Figura 15: C output-output do protótipo



Fonte: Arquivos do Autor

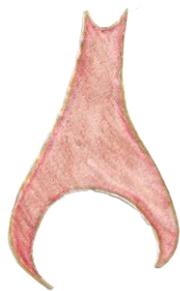


Figura 16: C output-input do protótipo

Fontes: Arquivos do Autor

Figura 17: Caso de uso - Ramificação com critério único



Fonte: Arquivos do autor

Como introduzido nas seções anteriores, a proposta do jogo é expressar as regras generativas da classificação a partir da construção da árvore. Para tal, as peças C são formadas de duas faces nomeadas input e output, onde as peças CV e CD podem ser alocadas (figura 18).

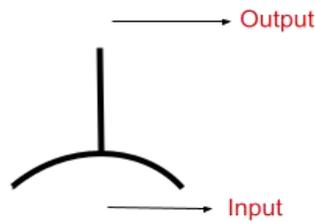


Figura 18: Esquema de Uso da peça CD

Fonte: Arquivos do Autor

5.4 JOAH: Desenvolvimento Conceitual

A etapa de consolidação conceitual compreende a pré-etapa de formalização do objeto. Nesta etapa são levantadas todas as condutas possíveis de serem tomadas pelo jogador a partir do affordance do jogo, seleção das condutas-marcadores e valoração destas de acordo com a teoria (ver seção 45 e apêndice B). Para tal são formalizados crivos onde a movimentação das peças são relacionadas aos achados teóricos sobre os marcos de desenvolvimento da habilidade em questão.

5.4.1 Crivo Empírico

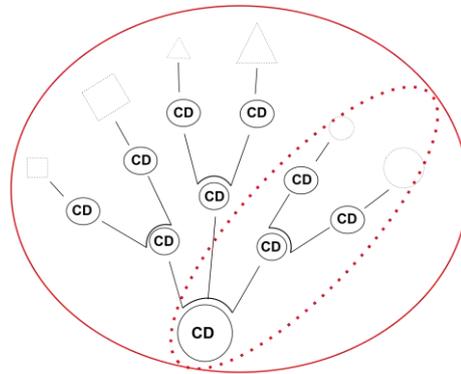
O crivo empírico compreende o assinalamento das condutas do jogador na experimentação dos affordances do jogo. Comumente, os jogos compreendem duas valorações: Errado e Certo. Porém, buscou-se no JOAH, de acordo com a fundamentação teórica psicogenética, a observação das condutas como marcos hierárquicos na evolução ontogenética da construção da competência a ser observada.

Logo, os marcadores discretos graduam as jogadas a partir da conduta mais egocêntrica e sua evolução até a manifestação mais socializada – que o affordance do jogo permite observar (figura 14). Os apontamentos feitos neste crivo permitem a inferência das zonas de desenvolvimento real e proximal do jogador e, conseqüentemente, os territórios aptos à intervenção para o deslocamento do jogador ao patamar lógico superior.

A partir do affordance do JOAH foram levantados dois crivos (Natureza e Reprodução) e um esquema de análise microestrutural. O esquema de análise microestrutural concerne à regra observada nas partes (sucessivo) da jogada, enquanto que os crivos macroestruturais à regra observável na totalidade (simultâneo) do jogo. Na figura abaixo (Figura 19), a linha pontilhada

representa o setor de observação do esquema de análise microestrutural e a linha contínua a observação macroestrutural.

Figura 19: Esquema de observação dos crivos micro e macroestruturais



Fonte: Arquivos do Autor

A observação macro e microestrutural não são naturalmente dissociadas. Porém, balizou-se necessária esta separação uma vez que o jogo também observa a consciência do indivíduo sobre a parte e o todo simultaneamente. Dada a natureza do ORC escolhido, o crivo observa a manutenção da fractalidade entre os ramos, ou seja, o estado ótimo de solução do jogo é encontrado quando a regra da parte é, também, a regra observada no todo (ver seção 60).

5.4.1.1 Crivos Macroestruturais

Os crivos macroestruturais gerados para este jogo tem por objetivo observar a composição das totalidades. Uma vez que as competências recrutadas na ação espontânea e na imitação são diferentes – embora a regra implícita seja a mesma, é analisado na dimensão Natureza do crivo macroestrutural a manifestação espontânea dos esquemas de classificação (Natureza) e na dimensão Imitação na presença de modelo, a capacidade de extrair regras de modelos lógicos para a produção de isomorfos.

Todos os marcadores buscam capturar as zonas de desenvolvimento relativas ao 1) Desenvolvimento do princípio classificatório, 2) Capacidade de extrair regras de composições e aplicá-las a outros objetos (transitividade) e 3) A intenção de imprimir simbólico e intencionalmente uma regra própria.

5.4.1.1.1 Crivo Macroestrutural: Natureza

Como supracitado, os marcadores no crivo buscam capturar condutas respectivas às zonas de desenvolvimento específicas. A tabela a seguir aborda os marcadores relativos ao desenvolvimento da estrutura lógica de classificação.

Os marcadores são hierárquicos e estão ordenados de maneira crescente. Ou seja, os primeiros marcadores representam a conduta mais distante da lógica de classificação e as condutas seguintes graduam a aproximação da conduta à lógica classificatória de maior nível visível ao affordance.

O eixo x apresenta as classes Natureza e Sub-estruturas que compreendem, respectivamente, a inferência dos esquemas de classificação na conduta espontânea (macroestrutura) e seu correlato na conformação física do jogo (microestrutura)

Por fim, o eixo y apresenta as classes nomeadas por Piaget em sua prova de classificação (ver seção 26). Excetua-se a classe coleções figurais que foi subdividida em pré-figurais e figurais para tornar o crivo mais sensível as possíveis condutas do jogador.

A ser retomado na seção posterior (ver seção 64), este crivo focaliza a categorização das **AÇÕES ESPONTÂNEAS**. Balizou-se necessária esta observação pois, uma vez que a estrutura lógica de classificação está diretamente implicada aos processos mentais de categorização e ordenamento das representações dos objetos reais de conhecimento, a captura das criações espontâneas permitirá a observação, no encadeamento ordenado de esquemas ação, da presença graduada ou ausência das heurísticas características à lógica de classificação.

Tabela 2: Crivo de análise das criações espontâneas;

	NATUREZA DA ESTRUTURA	SUB-ESTRUTURAS
PRÉ- FIGURA L	Desconsideração das peças componentes do jogo;	Ausência de manipulação e coordenação de assets;
	Exploração viso-motora de peça única;	Exploração dos potenciais físicos do objeto através de esquemas sensório-motores elementares;
	Exploração viso-motora de múltiplas peças sem relacionamento qualitativo;	
FIGURA L	Relacionamento qualitativo em Alinhamento parcial de critério não exaustivo;	Coordenação unicamente espacial; Ausência de intra-relação;
		Coordenação de múltiplas coleções; intra-relação sucessiva e ausência de inter-relações; Presença de material heterogêneo não colecionado; Modificação espacial altera valor da construção;
	Relacionamento qualitativo em Alinhamento contínuo e com critério não exaustivo;	Coordenação de todos os assets em coleção única; Intra-relação com peça imediatamente anterior; Esgotamento dos assets;

	Relacionamento qualitativo em Alinhamentos e superfícies sem critério exaustivo;	
	Relacionamento qualitativo das peças com formação de objetos coletivos em superfície (2 ou 3 dimensões);	Coleção formada de assets semelhantes (unidimensional); Formação de figuras;
	Relacionamento qualitativo das peças com formação de objetos complexos;	Coleção formada de peças heterogêneas; Formação geométrica ou empírica significada pelo indivíduo;
NÃO FIGURA L	Relacionamento parcial sem critério único e resíduo não classificável;	Consideração inicial do affordance do jogo; Tentativas de relacionamento entre conectores, critérios e criteriadores;
	Relacionamento total não antecipativo das peças e sem critério único	Ausentes composições de grafos;
	Relacionamento total das peças, com critério único e sem intersecções;	Exploração aprofundada do affordance do jogo; Tentativa de implicação de regra ao affordance; Composição de grafo único ou grafos desarticulados;
	Relacionamento total de peças em pequenas coleções e critério dominante único;	Eventual manifestação incompleta de critério; Inexatidão na correspondência de conectores e criteriados à denominação do critério escolhido;
CLASSE S E INCLU=USÕES HIERÁRQUICAS	Relacionamento de peças em subclasses (B = A + A') dicotômicas não hierárquicas; Constituição de relações assimétricas entre classes;	Aplicação de regra ao affordance do jogo; Composição de grafos característicos de combinações assimétricas; Sistematização restrita a qualidade única;
	Relacionamento de peças em subclasses (B = A + A') dicotômicas e não hierárquicas; Presença de classes e subclasses simétricas; Intersecções não declarativas	Aplicação de regra ao affordance do jogo; Composição de grafos característicos de combinações simétricas;
	Relacionamento de peças em subclasses (B = A + A') dicotômicas não hierárquicas; Presença de classes e subclasses simétricas; Intersecções declarativas;	Sistematização de qualidades múltiplas;
	Relacionamento de peças em subclasses (B = A + A') dicotômicas e incluídas hierarquicamente;	Ampla coordenação entre os assets do jogo; Exposição dos cânones do jogo;
	Presença de mobilidade combinatória entre classes incluídas hierarquicamente;	

Fonte: Arquivos do autor

5.4.1.1.2 Crivo Macroestrutural: Imitação na Presença de modelo

Como supracitado, os marcadores no crivo buscam capturar condutas respectivas às zonas de desenvolvimento específicas. A tabela a seguir aborda os marcadores relativos ao desenvolvimento da estrutura lógica de classificação.

Como na tabela anterior, os marcadores são hierárquicos e estão em ordem crescente. Ou seja, os primeiros marcadores representam a conduta mais distante da lógica de classificação e

as condutas seguintes gradam a aproximação da conduta à lógica classificatória de maior nível visível ao affordance.

O eixo x apresenta as classes Natureza e Imitação do Modelo que compreendem, respectivamente, a inferência dos esquemas de classificação na conduta espontânea (macroestrutura) e a característica da reprodução de um modelo.

Por fim, o eixo y apresenta as classes nomeadas por Piaget em sua prova de classificação (ver seção 26). Excetua-se a classe coleções figurais que foi subdividida em pré-figurais e figurais para tornar o crivo mais sensível as possíveis condutas do jogador.

A ser retomado na seção posterior (ver seção 64), este crivo focaliza a categorização das ações no processo de **IMITAÇÃO DE UM MODELO**. Balizou-se necessária esta observação pois a estrutura lógica construída na fase espontânea pode ser manifestada intuitivamente (Piaget e Inhelder, 1975). Logo, uma vez que a construção espontânea requer exteriorização de uma regra, a tarefa de imitação de um modelo requererá a assimilação de uma regra e acomodação destas aos esquemas de ação prévios. Sendo a manifestação de um construto isomórfico ao modelo a ratificação da consciência sobre a regra.

Em síntese, esta etapa busca confirmação da manifestação espontânea e informará se o processo de classificação é empírico – característico das etapas figurais – ou reflexionante – característico de esquemas de ação operante.

A ser retomado na seção posterior (ver seção 64), este crivo focaliza a categorização das ações no processo de **IMITAÇÃO DE UM MODELO**. Balizou-se necessária esta observação pois a estrutura lógica construída na fase espontânea pode ser manifestada intuitivamente (Piaget e Inhelder, 1975). Logo, uma vez que a construção espontânea requer exteriorização de uma regra, a tarefa de imitação de um modelo requererá a assimilação de uma regra e acomodação destas aos esquemas de ação prévios. Sendo a manifestação de um construto isomórfico ao modelo a ratificação da consciência sobre a regra.

Em síntese, esta etapa busca confirmação da manifestação espontânea e informará se o processo de classificação é empírico – característico das etapas figurais – ou reflexionante – característico de esquemas de ação operante.

Tabela 3: Crivo de análise da imitação na presença de modelo;

	NATUREZA DA ESTRUTURA	IMITAÇÃO DO MODELO
PRÉ- FIGUR AL	Desconsideração das peças componentes do jogo;	Ausente reprodução de modelos;
	Exploração viso-motora de peça única;	Reprodução de modelos de exploração sensório-motores;
		Ausente reprodução de alinhamentos e objetos;
	Exploração viso-motora de múltiplas peças sem relacionamento qualitativo;	Reprodução de alinhamentos e objetos através da representação espacial grosseira; (linha, agrupamentos com muitos ou poucos)
FFIGUR AL	Relacionamento qualitativo em Alinhamento parcial de critério não exaustivo;	Reprodução espacial dos modelos; Ausência de consideração sobre aspectos quantitativos e qualitativos do modelo;
	Relacionamento qualitativo em Alinhamento contínuo e com critério não exaustivo;	
	Relacionamento qualitativo em Alinhamentos e superfícies sem critério exaustivo;	
	Relacionamento qualitativo das peças com formação de objetos coletivos em superfície (2 ou 3 dimensões);	
	Relacionamento qualitativo das peças com formação de objetos complexos;	
NÃO- FIGUR AL	Relacionamento parcial sem critério único e resíduo não classificável;	Acerto intuitivo do modelo e desconhecimento da lei; Reprodução idêntica de modelos de classe única e critério unidimensional de semelhança; Ausência de reprodução por princípio isomórfico;
	Relacionamento total não antecipativo das peças e sem critério único	
	Relacionamento total das peças, com critério único e sem intersecções;	
	Relacionamento total de peças em pequenas coleções e critério dominante único;	
CLASSES E INCLUSÃ O HIERÁR	Relacionamento de peças em subclasses ($B = A + A'$) dicotômicas não hierárquicas; Constituição de relações assimétricas entre classes;	Reprodução de modelos com pequenas coleções e critério único; Reprodução de modelos com subclasses e critéri não multiplicativo Reprodução de modelos com pequenas coleções compostos de diferentes critérios; Reprodução de modelos com critério de dessemelhança;
	Relacionamento de peças em subclasses ($B = A + A'$) dicotômicas não hierárquicas; Presença de classes e subclasses simétricas; Intersecções não declarativas;	
	Relacionamento de peças em subclasses ($B = A + A'$) dicotômicas não hierárquicas; Presença de classes e subclasses simétricas; Intersecções declarativas;	

QUICA	Relacionamento de peças em subclasses ($B = A + A'$) incluídas hierarquicamente; Presença de classes e subclasses de níveis	Reprodução de modelos com subclasses múltiplas; Reprodução de qualquer modelo com conservativo;
	Relacionamento combinatório entre classes incluídas hierarquicamente;	Reconhecimento de desvios da lei; Argumentação compreensiva e extensiva;

Fonte: Arquivos do Autor

5.4.1.2 Esquema de Análise Estrutural

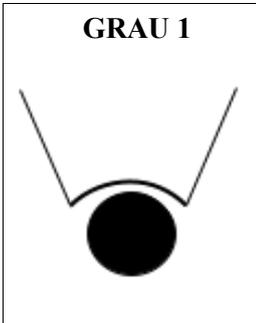
O crivo microestrutural tem por objetivo a observação pontual do construto total. São analisadas as dimensões Profundidade, Hierarquia, Simetria e Closures (coesão) e Articulação. Tais dimensões **não hierarquizáveis**, quando em conjunto, caracterizam a construção espontânea ou acomodativa, auxiliando no plano de intervenção.

- 1. PROFUNDIDADE:** A profundidade compreende o grau de articulação de critério entre os affordances.

GRAU 0

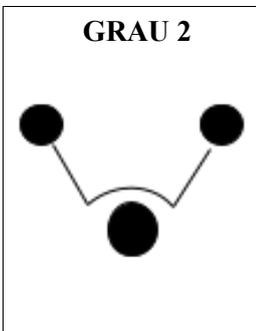
É determinada profundidade **Grau 0** quando constatado **ausência de aplicação de critérios no jogo.**

GRAU 1

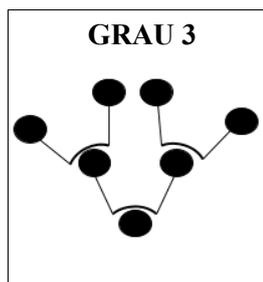


É determinada profundidade **Grau 1** quando constatado **aplicação de critério unidimensional no jogo.**

GRAU 2



É determinada profundidade **Grau 2** quando constatado **aplicação de critério bidimensional no jogo.**



É determinada profundidade **Grau 3** quando constatado **aplicação de critério tridimensional no jogo.**

2. SIMETRIA E CLOSURA: A simetria e a closura discernem, respectivamente, sobre a manutenção da regra/critério nas ramificações adjacentes e presença ou ausência de esgotamento da possibilidade de ramificação frente ao critério escolhido;



Manutenção da regra nos ramos adjacentes e **ausência de fechamento** das possibilidades de classificação frente ao critério escolhido;



Manutenção da regra nos ramos adjacentes e **esgotamento das possibilidades** de classificação frente ao critério escolhido;



Manifestação de regras difusas nos ramos adjacentes e **ausência de esgotamento** das possibilidades de classificação frente ao critério escolhido;



Manifestação de regras difusas nos ramos adjacentes e **esgotamento das possibilidades** de classificação frente ao critério escolhido

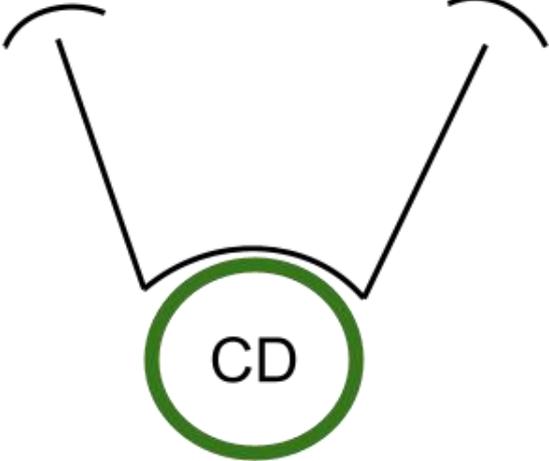
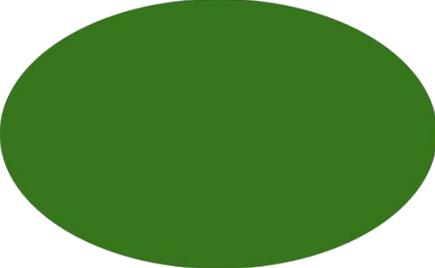
3. ARTICULAÇÃO: Havendo profundidade maior que Grau 0, observa-se a natureza da articulação entre os construtos;

DESARTICULAÇÃO ESPERADA	Manutenção da desarticulação de grafos de classificação sem correlação lógica ;
DESARTICULAÇÃO INESPERADA	Manutenção da desarticulação de grafos de classificação com correlação lógica ;
ARTICULAÇÃO INESPERADA	Manutenção da articulação de grafos de classificação sem correlação lógica ;
ARTICULAÇÃO ESPERADA	Manutenção da articulação de grafos de classificação com correlação lógica ;

5.4.2 Cânones

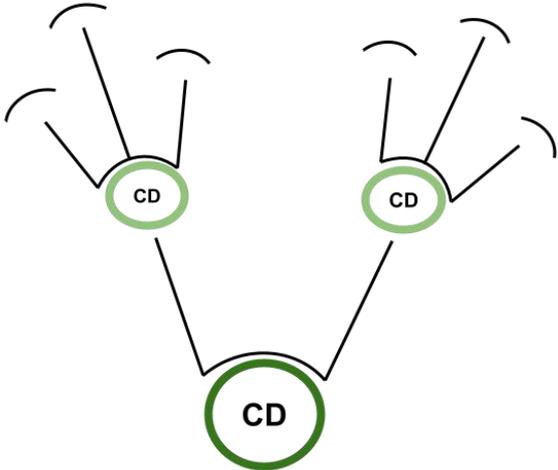
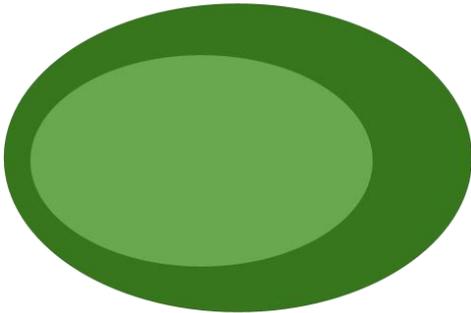
Os cânones representam os estados ótimos de solução do JOAH. Nestas soluções são manifestas, integralmente, as regras generativas da classificação esperadas pelo affordance. No JOAH são esperados a manifestação de quatro cânones, diferidos de acordo com o número de critérios aplicados e a combinatória entre a aplicação destes. As tabelas abaixo explicitam o esquema canônico aplicado à estrutura do jogo, sua descrição e o diagrama respectivo à regra na teoria dos conjuntos.

Tabela 4: Demonstração de regra generativa do Cânone 1A

CÂNONE 1A	DESCRIÇÃO
	<p>Este cânone representa a constituição de classes com critérios únicos.</p> <p>Embora seja o cânone de menor complexidade, sua construção requer a decomposição das peças em, no mínimo, uma classe esperada e previsão do número de peças CV assimiláveis, simultaneamente, às ramificações designadas nas peças CT.</p> <p>As construções que respeitam este cânone informam sobre a manifestação dos princípios de classificação aditiva.</p> <p>Análise Microestrutural: Árvore de profundidade grau 1, Simétrico e fechado e desarticulação esperada.</p>
<p>REGRA DIAGRAMÁTICA</p> 	

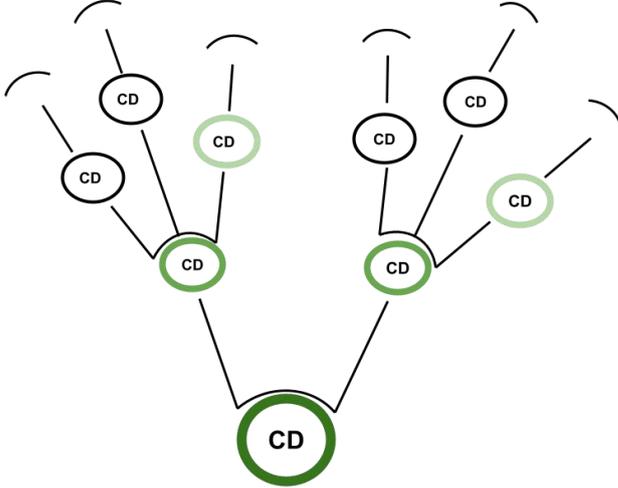
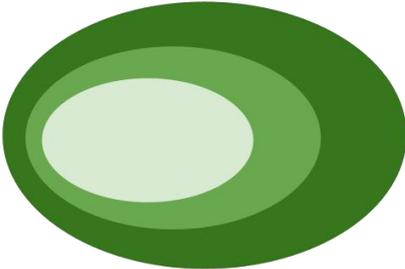
Fonte: Arquivos do Autor

Tabela 5: Demonstração de regra generativa do Cânone 2A

CÂNONE 2A:	DESCRIÇÃO
	<p>Este cânone representa a constituição de classes com instituição de dois critérios.</p> <p>A construção deste cânone requer a decomposição das peças em, no mínimo, duas classe esperadas e previsão do número de peças CV assimiláveis, simultaneamente, às ramificações designadas nas peças CT em relação ao critério.</p> <p>As construções que respeitam este cânone informam sobre a manifestação dos princípios de classificação multiplicativa e subclasses.</p> <p>Análise Microestrutural: Árvore profundidade grau 2, Simétrico e fechado e articulação esperada;</p>
<p>REGRA DIAGRAMÁTICA</p> 	

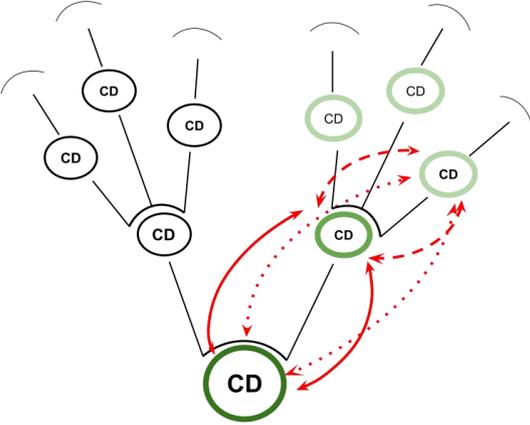
Fonte: Arquivos do Autor

Tabela 6: Demonstração de regra generativa do Cânone 2A

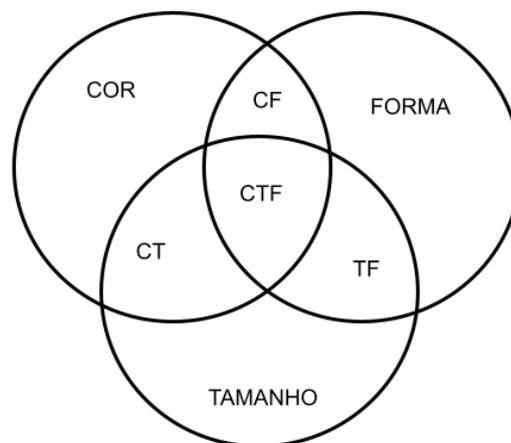
CÂNONE 3A	DESCRIÇÃO
	<p>Este cânone representa a constituição de classes com aplicação de três critérios. Sua construção requer a decomposição das peças ao máximo previsto pelo affordance do jogo e descoberta do número de peças CV assimiláveis, simultaneamente, às ramificações designadas nas peças CT ao uso deste critério.</p> <p>As construções que respeitam este cânone informam sobre a manifestação dos princípios de classificação multiplicativa e subclasses.</p> <p>Análise Microestrutural: Árvore grau 3, simétrico e fechado, articulação esperada;</p>
<p>REGRA DIAGRAMÁTICA</p> 	

Fonte: Arquivos do Autor

Tabela 7: Demonstração de regra generativa do Cânone 4A

CÂNONE 4A	DESCRIÇÃO
	<p>Este cânone representa a possibilidade de combinações de ordenamento dos critérios na construção da árvore de graus 1,2 e3.</p> <p>Este é o cânone de maior complexidade no jogo.</p> <p>Requer do jogador o domínio da construção das classes incluídas hierarquicamente bem como a mobilidade e antecipação dos corolários à modificação da ordem de classificação.</p> <p>As construções que respeitam este cânone informam sobre a manifestação dos princípios de classificação multiplicativa, inclusão hierárquica e o grau de flexibilidade da regra.</p> <p>Análise Microestrutural:Árvore grau 1, 2 ou 3, simétrica e fechada e articulação esperada.</p>

REGRA DIAGRAMÁTICA



Fonte: Arquivos do Autor

5.4.3 Plano Intervencional: Procedimento de Aplicação do Instrumento

Esta seção explicita as etapas de aplicação do JOAH. O procedimento de aplicação compreende **Coleta e análise de Ação Espontânea, Coleta e análise de imitação da presença de modelo, Inferência da ZDP e ZDR e Mediação (Figura 20).**

Figura 20: Fluxo de Procedimentos na Aplicação do Instrumento



Fonte: Arquivos de

Autor

Abaixo as etapas são descritas e justificadas:

Coleta e Análise de Ação espontânea: A coleta de ação espontânea visa a observação da zona de desenvolvimento real do sujeito. Nesta etapa oferece-se as peças do jogo ao sujeito, sem divisão prévia ou sugestão de uso. Observar-se-á a reação para com o objeto:

1. Jogador apresenta interesse no material?
2. Há impulso inicial de **organização das peças**? Se presente, qual a natureza desta organização?
 - Se figural, qual o ordenamento desta organização? (Alinhamentos parciais, contínuos, figurais com aglomerados semelhantes ou heterogêneos)
 - Se classes ou ensaio de classes, qual a ordem desta divisão? (Classe, classe e subclasse, semelhanças, diferenças);
3. O jogador atribuiu significados aos assets? O jogador se atenta ao affordance de encaixe das peças CT?
4. Como o jogador justifica a jogada se perguntado sobre o que ele está tentando criar?

Coleta e Análise de Imitação na presença de Modelo: A coleta de ação na presença de modelo visa a observação da zona de desenvolvimento proximal do indivíduo, sua habilidade de assimilar regras e acomodá-las às suas estruturas cognitivas prévias a fim de criar equivalências. Nesta etapa oferece-se a cada vez um **modelo de complexidade imediatamente anterior e outro imediatamente posterior ao observado na etapa espontânea e um modelo isomórfico ao que ele criou espontaneamente**. Observa-se se o jogador:

1. Jogador busca peças idênticas ao modelo para construí-lo ou se encaminha a construir um modelo isomórfico ao criado?
2. Jogador constrói por tentativa e erro ou antecipa as jogadas?
3. Há o encontro da regra?

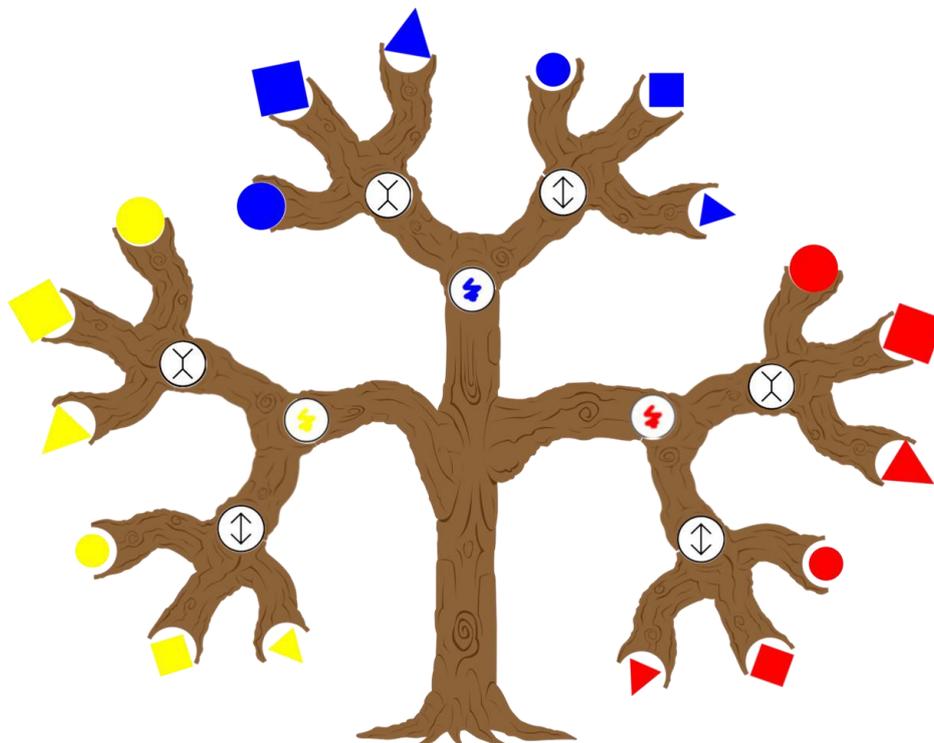
Inferência das zonas de desenvolvimento real e proximal: Como supracitado, a coleta de ação espontânea visa a inferência da ZDR, ou seja, os recursos cognitivos disponíveis ao indivíduo para resolução de um problema. Sendo as estruturas lógicas suporte para o pensamento, infere-se que estas serão recrutadas para a resolução de problemas e expressas através dos esquemas de ação que, voluntárias, manifestarão maior ou menor grau de intenção classificatória. Complementar à etapa anterior, a coleta da imitação na presença de um modelo visa a competência do sujeito em extrair regras. O modelo de complexidade imediatamente anterior e posterior ao apresentado busca ratificar que, de fato, o que o sujeito coincide com a sua ZDR, e a proposição de um modelo isomórfico ao que ele já criou busca suscitar a reincidência da regra utilizada anteriormente. De todo modo, uma vez que o modelo se configura como um molde, espera-se que a ação espontânea, na ausência de molde, seja **de nível evolutivo menor que o modelo**.

Mediação: Inferidos as zonas de desenvolvimento real e proximal do indivíduo, a mediação para evolução da zona de desenvolvimento proximal para a real é feita através da elaboração dirigida com instrumento de caráter isomórfico ao JOAH.

5.5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O Jogo Árvore Heurística é um artefato lúdico que busca eliciar o desenvolvimento e expressão dos princípios de classificação nos jogadores. Após etapa de prototipação e consolidação dos espaços de ação o jogo teve a arte finalizada (Figura 23eApêndice C).

Figura 21: Exemplo de uso JOAH (arte final)



Fonte: Arquivos do Autor

A fundamentação teórica observou que o estado da arte sobre a aprendizagem matemática, embora ainda apresente lacunas importantes, concorda que: a) O senso numérico é uma competência pré-numérica e pré-linguística inata, b) tal competência inata suporta a ampliação da aprendizagem matemática à contagem e a conceptualização aritmética, c) a construção do conceito de número na criança, bem como sua capacidade de lidar com números extensos e operações sucessivas, depende de capacidades cognitivas relacionadas à memória de curto e longo prazo e estratégias atencionais e d) com o nicho da evolução ontogenética da numerosidade qualitativa e contínua para a abstração simbólica e discreta ainda a ser aprofundada, as proposições de intervenção ao estímulo da aprendizagem do número envolvem o desenvolvimento cognitivo e linguístico e a pluralidade na oferta de experimentação da matemática.

Durante o curso metodológico, a vasta dimensionalidade das habilidades observadas nas pesquisas (ver seção 17) sugeriu-nos que apenas um instrumento inteligente de intervenção não supriria a abrangência da temática. Como solução, selecionou-se inicialmente uma fundamentação teórica que sistematizasse a aprendizagem matemática a marcadores irreduzíveis.

Após levantamento, selecionou-se o marcador que a) viabilizasse a captura e intervenção de habilidade pré-numérica e b) estivesse relacionado explicitamente aos processos mentais de organização (inter), relação e ordenamento (intra) de entes; processos estes suscitados, inicialmente, no plano da linguagem para posteriormente, munido de função simbólica, expressarem-se na instrumentalização aritmética (Piaget, 1978; Rizzo, 1996; Vigotsky, 2000)) Tal critério se justifica pois as habilidades pré-numéricas consolidam-se como suporte essencial à ampliação do conhecimento matemático às bases simbólicas, onde serão requeridas, paulatinamente, o pensar lógico-analítico (Rizzo, 1996).

A este respeito, a teoria psicogenética foi escolhida pois fornece sistematização de classes de operações universais que percorrerão toda a educação formal do indivíduo (Bärbele Inhelder & Piaget, 1976) O JOAH buscou a impressão do tópico classificação de operações universais, para que, eliciando o desenvolvimento de seus constituintes (classes aditivas e multiplicativas, subclasse e inclusão hierárquica), o sujeito generalize-os em situações problemas que requerem a estrutura lógica de pensamento evidenciada, por exemplo na dicotomia entre símbolos icônicos e não icônicos e suas subclasses, propriedades aritméticas, enunciados linguísticos, entre outros.

Durante o curso metodológico, a vasta dimensionalidade das habilidades observadas nas pesquisas (ver seção 17) sugeriu-nos que apenas um instrumento inteligente de intervenção não supriria a abrangência da temática. Como solução, selecionou-se inicialmente uma fundamentação teórica que sistematizasse a aprendizagem matemática a marcadores irreduzíveis. Após levantamento, selecionou-se o marcador que a) viabilizasse a captura e intervenção de habilidade pré-numérica e b) estivesse relacionado explicitamente aos processos mentais de organização (inter), relação e ordenamento (intra) de entes; processos estes suscitados, inicialmente, no plano da linguagem para posteriormente, munido de função simbólica, expressarem-se na instrumentalização aritmética (Piaget,1981, Vigotsky,2007). Tal critério se justifica pois as habilidades pré-numéricas consolidam-se como suporte essencial à ampliação do conhecimento matemático às bases simbólicas, onde serão requeridas, paulatinamente, o pensar lógico-analítico (Rizzo, 1996).

A este respeito, a teoria psicogenética foi escolhida pois fornece sistematização de classes de operações universais que percorrerão toda a educação formal do indivíduo (Piaget e Inhelder, 1976). O JOAH buscou a impressão do tópico classificação de operações universais, para que, eliciando o desenvolvimento de seus constituintes (classes aditivas e multiplicativas, subclasse e inclusão hierárquica), o sujeito generalize-os em situações problemas que requerem a estrutura lógica de pensamento evidenciada, por exemplo na

dicotomia entre símbolos icônicos e não icônicos e suas subclasses, propriedades aritméticas, enunciados linguísticos, entre outros.

Com relação as limitações do projeto aponta-se a inviabilidade de experimentação do JOAH com o público-alvo devido condições sanitárias mundiais. Tal etapa, apontada em trabalhos futuros, é primordial pois permite o refinamento dos crivos e da arte do jogo uma vez que podem ser observadas ações que a) são esperadas e ratificam o crivo teórico, b) são possibilitadas pelo *affordance* do jogo mas não são passíveis de serem valoradas, b) são possibilitadas pelo *affordance* do jogo, porém não foram previstas em crivo mas são passíveis de valoração e intervenção, c) são impossibilitadas pelo *affordance* do jogo mas deveriam ocorrer eventualmente ou d) São impossibilitadas pelo *affordance* do jogo e ratificam a estabilidade do instrumento.

Interessa, a esta altura, retomar que o processo artístico do jogo buscou o refinamento dos assets à maior iconicidade possível. Como explicitado anteriormente, a busca pela iconicidade justifica-se na intenção de cercear ramificações semióticas relativas às experiências individuais do jogador. Porém, a ausência da etapa de experimentação do jogo impediu a captura de ações que ratificassem o alcance do grau de iconicidade esperado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A leitura dos conteúdos relacionados à gênese e evolução do número na criança, descortina uma fração mínima do extenso processo da aprendizagem matemática. A partir do estudo, também foi possível inferir que o senso numérico e o domínio da lógica das operações aritméticas não se encerram na quantificação de objetos ou na repetição de operações em trabalhos escolares, mas servem, sobretudo, de alicerce às condutas de resolução de problemas – não particularmente matemáticos – onde serão demandadas estratégias racionais, inovadoras e científicas.

Defronte à perspectiva de que o ensino formal deveria transcender, dos princípios da memorização e repetição, à autonomia e a crítica científica, caberá ao ORC o papel de tornar explícito as arquiteturas simbólicas – de pensamento – que possibilitam o alcance dos conceitos científicos (FLECK, 1935). Em vista disto, a observância dos princípios lógicos neste trabalho, com efeito, a operacionalização lógica, concretiza-se na explicitação do processo de construção de jogos que eliciem a descoberta de regras generativas transitivas através da metacognição.

Ao longo deste trabalho também é desvelado a complexidade inerente ao brinquedo. Este artefato de origem histórica carrega estruturas da qual é consentido à criança, no plano da destituição das regras da realidade, inserir-se no jogo da linguagem e brincar com as descobertas destas regras à medida de sua própria capacidade (Vigotsky, 2007)

Ao longo deste trabalho também é desvelado a complexidade inerente ao brinquedo. Este artefato de origem histórica carrega estruturas da qual é consentido à criança, no plano da destituição das regras da realidade, inserir-se no jogo da linguagem e brincar com as descobertas destas regras à medida de sua própria capacidade (Vigotsky, 2007).

Em suma, é lícito supor que o papel do mediador, no âmbito da intervenção, se realiza na condução da experimentação do sujeito cognoscente às suas zonas de desenvolvimento proximal e provocação destas à zona de desenvolvimento real e conhecimento das regras intrínsecas ao conhecimento. Para tal, o desenvolvimento de recursos lúdicos que descaracterizam-se do caráter corretivo, para observar o percurso ontogenético, apresentam-se como um fecundo portal para o encontro entre o mediador e o sujeito cognoscente no espaço de desenvolvimento da linguagem, e dos potenciais conhecimentos que emanam a partir da complexidade deste, através das ações concretas de experimentação.

7 TRABALHOS FUTUROS

Como trabalhos futuros almeja-se a experimentação do jogo em público-alvo para refinamento das pontuações descritas na seção de discussões. Posterior coleta e análise de dados da experimentação.

Almeja-se também, a construção da versão IOT do jogo, onde as movimentações das peças permitirão a captura dos espaços microgenéticos de tomadas de decisões e evolução do princípio de classificação.

REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações*. 10. ed. Porto Alegre: Booknan, 2012.
- ARAÚJO, T. P. de. **Álgebra Linear: Teoria e Aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- ASSIS, E. F. de. Study of number sense: mathematical learning and research in perspective. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 14, n. 1-15, 2020.
- BENJAMIN, W. **Reflexões sobre a criança, o brinquedo e a educação**. São Paulo: Editora 34, 2002.
- BERCH, D. B. Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. **Journal of Learning Disabilities**, Thousand Oaks, v. 38, n. 4, p. 333-339, 2005.
- BORGHESANI, V. et al. Processing number and length in the parietal cortex: Sharing resources, not a common code. **Cortex**, Varese, v. 114, p. 17-27 2019.
- BURR, D. C.; ANOBILE, G.; ARRIGHI, R. Psychophysical evidence for the number sense. **Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences**, London, v. 373, n. 1740, 2018.
- BUTTERWORTH, B. The development of arithmetical abilities. **Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines**, Oxford, v. 46, n. 1, p. 3-18, 2005.
- CLEMENTS, D. H. Subitizing: What Is It? Why Teach It? **Teaching Children Mathematics**, Reston, v. 5, n. 7, p. 400-405, 1999.
- DARWIN, C. **On the origin of the species**. New York: Gramercy Books, 1979.
- DEHAENE, S. **The number sense: How the mind creates mathematics**. New York: Oxford University Press, 1977.
- DEHAENE, S. **Space, time and number in the brains: Searching for the foundations of mathematical thought**. San Diego: Elsevier, 2011.
- DEVLIN, K. **The Math Gene: How Mathematical Thinking Evolved And Why Numbers Are Like Gossip**. New York: Basic Books, 2001.
- DIAS, L. R. L. **Dificuldades Matemáticas e Discalculia do Desenvolvimento nos anos iniciais: método Montessori de ensino como recurso didático e para diagnóstico**. 2020. Disponível em: <http://repositorio.idaam.edu.br/jspui/handle/prefix/1156>. Acesso em: 18 maio 2021.
- DURO, M. L.; CENCI, D. Linguagem matemática nos anos iniciais: a construção do número segundo piaget. **#Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia**, Canoas, v. 2, n. 1, 2013.
- EVANS, L. A.; GOLD, L. A. Pre mathematics skills in infants: Numerosity as a game. **Contemporary Issues in Early Childhood**, [S. l.], v. 21, n. 1, p. 83-86, 2020.

FAUCONNIER, G. **Mental Spaces**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

FERREIRA, A. B. de H. **Mini Aurélio**: dicionário da língua Portuguesa. 7. ed. Curitiba: Positivo, 2004.

FERREIRA, H. da C. **A teoria piagetiana da equilibração e as suas consequências educacionais**. Bragança: Instituto Politécnico de Bragança, 2003. (Série Estudos, 55).

FISHER, H. **Schema Re-schematized**: A Space for Prospective Thought. Cham: Palgrave Macmillan, 2017.

FLAVELL, J. H. Metacognition and cognitive monitoring. **American Psychologist**, Washington, v. 34, n. 10, p. 906-911, 1979.

FLECK, L. **Gênese e desenvolvimento de um fato científico**. Belo Horizonte: Fabrefactum, 2010.

FONZAR, J. Piaget: do egocentrismo (História de um conceito). **Educar em Revista**, Curitiba, n. 5, n. 1-2, p. 81-103, 1986.

GELMAN, R.; GALLISTEL, C. **Young Children's Understanding of Numbers**. Cambridge: Harvard University Press, 1978.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar (volume 1)**. 3. ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.

INHELDER, B.; CELLÉRIER, G. **O Desenrolar das Descobertas da Criança**. Porto Alegre, Artmed, 2002.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **Da Lógica da Criança à Lógica do Adolescente**. São Paulo: Pioneira, 1976.

LORENSATTI, E. J. C. Linguagem matemática e Língua Portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos. **Conjectura: filosofia e educação**, Caxias do Sul, v. 14, n. 2, 2009. Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/revistas/index.php/conjectura/article/view/17>. Acesso em: 19 maio 2021.

KAMII, C. **A criança e o número**. 20. ed. Campinas: Papyrus, 1983.

KAMII, C.; DeCLARCK, G. **Reinventando a Aritmética**: Implicações da Teoria de Piaget. Campinas: Papyrus, 1992.

KIRSH, D. Metacognition, Distributed Cognition and Visual Design. In: GARDENFORS, P.; JOHANSSON, P. (Ed.). **Cognition, Education, and Communication Technology**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2004.

KOTHE, S. **Pensar é divertido**: como se divertir com blocos lógicos de Dienes. São Paulo: E. P. U., 1997.

LOVELL, K. **O desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.

MANTOAN, M. T. E. Processo de Conhecimento – Tipos de Abstração e Tomada de Consciência. **NIED-Memo**, Campinas, n. 27, 1994.

MARQUES, C.; OLIVEIRA, C.; MOTTA, C. L. R. **Ensaio científico avaliativo da teoria de Franco Lo Presti Seminério**. Rio de Janeiro: NCE, 2010. Disponível em: https://pantheon.ufrj.br/bitstream/11422/3318/3/03_10_000785930.pdf. Acesso em: 19 maio. 2021.

MARQUES, C. V. M. et al. Sistemas educacionais inteligente. In: SALGADO, Ana Carolina; MOTTA, Cláudia Lage Rebello da; SANTORO, Flávia Maria (Org.). **Grandes desafios da computação no Brasil: relatos do 3º seminário**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Computação, 2015. p. 235-251.

MARQUES, C. V. M. **EICA - Estruturas Internas Cognitivas Aprendentes: um modelo neuro-computacional aplicado à instância psíquica do sistema pessoa em espaços dimensionais**. 2017. 181 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e de Computação) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

METCALFE, J.; SHIMAMURA, A. P. **Metacognition: knowing about knowing**. Cambridge: MIT Press, 1996.

MOURA, A. R. L. de et al. **Educar com a Matemática: fundamentos**. São Paulo: Cortez, 2016.

MOUSINHO, R. et al. **Leitura, escrita e matemática: do desenvolvimento aos transtornos específicos de aprendizagem**. [S. l.]: Instituto ABCD, 2020.

NELSON, D. L.; COX, M. M. **Princípios de Bioquímica de Lehninger**. 7. ed. Porto Alegre: Artmed, 2018.

NOGUEIRA, C. **Classificação, seriação e contagem no ensino do número: um estudo de epistemologia genética**. Marília: Oficina Universitária UNESP, 2007.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1977.

OLIVEIRA, M. F.; NEGREIROS, J. G. M.; NEVES, A. C. Constraints of learning mathematics: A systemic historical review of the literature. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 41, n. 4, p. 1023–1037, 2015a.

OLIVEIRA, M. F.; NEGREIROS, J. G. M.; NEVES, A. C. Condicionantes da aprendizagem da matemática: uma revisão sistêmica da literatura. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 41, n. 4, p. 1023-1037, 2015b.

PIAGET, J. **O Nascimento da Inteligência na Criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

PIAGET, J. **A Formação do Símbolo na Criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação**. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

- PIAGET, J. **Seis Estudos de Psicologia**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1994.
- PIAGET, J. **Abstração Reflexionante**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.
- PIAGET, J.; INHELDER, B. **Gênese das Estruturas Lógicas Elementares**. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.
- PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.
- INHELDER, B.; PIAGET, J. **Da Lógica da Criança à Lógica do Adolescente**. São Paulo: Pioneira, 1976.
- RAVEN, R. J. The development of a test of Piaget's logical operations. **Science Education**, New York, v. 57, n. 3, p. 377-385, 1973.
- RIBEIRO, M. P. **Jogando e aprendendo a jogar**: funcionamento cognitivo de crianças com história de insucesso escolar. São Paulo: FAPESP, 2005.
- RICHARDSON, K. **Models of Cognitive Development**. Hove: Psychology Press, 2003.
- RIZZO, G. **Jogos Inteligentes**: a construção do raciocínio na escola natural. 3. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1996.
- ROSSETTO, H. H. P. **Um resgate histórico**: a importância da história da matemática. 2013. 39 f. Monografia (Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2013.
- SEMINÉRIO, F. L. P. et al. **Elaboração Dirigida**: um caminho para o desenvolvimento metaprocessual da cognição humana. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1987.
- SOUZA, D. A. **How the brain learns mathematics**. Thousand Oaks: Sage Publications, 2015.
- STARKEY, P.; COOPER, R. Perception of numbers by human infants. **Science**, v. 210, n. 4473, p. 1033-1035, 1980.
- STRAUSS, M. S.; CURTIS, L. E. Infant Perception of Numerosity. **Child Development**, Chicago, v. 52, n. 4, p. 1146-1152, 1981.
- TONÉIS, C. **A Lógica da Descoberta nos Jogos Digitais**. 2010. 210 f. Dissertação (Mestrado em Mídias Digitais) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.
- TRACANELLA, A. T.; BONANNO, A. DE L. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidade. **Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidade**, 2016.

TRÄFF, U. et al. Kindergarten domain-specific and domain-general cognitive precursors of hierarchical mathematical development: A longitudinal study. **Journal of Educational Psychology**, Arlington, v. 112, n. 1, p. 93-109, 2020.

VIGOTSKY, L. S. **A construção do Pensamento e Linguagem**. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

_____. **A Formação Social da Mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

WENDER, K. F.; ROTHKEGEL, R. Subitizing and its subprocesses. **Psychological Research**, New York, v. 64, n. 2, p. 81-92, 2000.

GLOSSÁRIO

AXIOMA – São princípios demonstráveis que, ao serem estabelecidos e considerado consenso inicial, possibilitam a construção de uma teoria e são, posteriormente, ponto de partida para deduções posteriores;

ISOMÓRFICO – Estado de equivalência virtual, ou seja, equivalências residentes ao estado das relações quando destituídas os conteúdos;

ICONICIDADE – É a qualidade de um signo de ser mais ou menos semelhante ao objeto representado.

OBJETO ICÔNICO – Corresponde ao signo representativo onde a relação entre o signo e o objeto representado, onde o signo é muito semelhante ao objeto. Chamado na semiótica Peirciana de relação de primeiridade.

OBJETO NÃO-ICÔNICO – Corresponde ao signo onde a relação entre o signo e o objeto representado, é de baixa semelhança. Chamado na semiótica Peirciana de relação de secundidade (índice) e terceiridade (símbolo).

APÊNDICE A - TABELA DE CORRELAÇÃO DE CONDUTAS

	EGOCÊNTRICO	INTUITIVO	LÓGICO
SENSÓRIO-MOTOR	1.Arbitrariedade; 2.Goa da pura manipulação das peças; 3.Expressão simbólica ausente ou correlata a esquemas de ações motoras; 4.Não cria regras;		
PRÉ-OPERATÓRIO	1 Arbitrariedade ou estratégia não exaustiva; 1.1 Separação e enfileiramento de peças; 1.2 Sobreposição de peças 2 Expressão simbólica ausente ou atribuída a esquemas motores ou simbólicos; 3 Ausência de regras e não atendimento a regras do outro; 4 Ausência de observação das modificações sucessivas e simultâneas;		
OPERATÓRIO CONCRETO		1 Arbitrariedade inicial ou estratégias assentadas nos resultados perceptuais; 1.1 Reprodução da regra própria desde que com conteúdo igual ao modelo; 1.2 Ausência do princípio isomórfico(equivalência); 2 Alteração pontual da estratégia em situações de conflito; 2.1 Negligência aos fatores externos; 2.2 Variáveis externas se adaptam aos princípios lógicos; 2.3 Todas as variáveis são implicadas; 2.4 Contra-argumentação busca torna aceitável o critério, mesmo que contraditório; 3 Planejamento não exaustivo e ausência de antecipação 4 Coordenação instável entre o simultâneo e o sucessivo 5 Expressão simbólica presente; 6 Constrói regra e busca atender às regras do outro;	
FORMAL			1 Presença de Estratégia; 1.1 Reprodução da regra através do princípio isomórfico; 1.2 Flexibilização ou alteração da estratégia frente conflito; 1.3 Planejamento e Antecipação 2 Princípio lógico se adapta às variáveis; 2.1 Variáveis são relacionadas e ponderadas; 3 Contra-argumentação concerne à explicitação das regras;

APÊNDICE B - PSICOGÊNESE DAS NOÇÕES NUMÉRICAS

PSICOGÊNESE DAS NOÇÕES MATEMÁTICAS

Classificação (objetos intuitivos)

1 Coleções figurais;

1.1 Manifestações não hierarquizáveis:

1.1.1 Alinhamento;

1.1.1.1 Alinhamentos parciais;

- 1.1.1.1.1 Ausência de mudança de critério;
- 1.1.1.1.2 Constituição de pequenas coleções sem inter-relação;

1.1.1.2 Alinhamentos Contínuos com mudança de critério;

- 1.1.1.2.1 Predominância das análises de compreensão e ausência de extensão;
- 1.1.1.2.2 Alinhamentos de **todos os elementos**;

1.1.1.3 Alinhamentos múltiplos;

- 1.1.1.3.1 Alinhamentos orientados em posições diferentes;
 - 1.1.1.3.1.1 Ortogonais;
 - 1.1.1.3.1.2 Perpendiculares;

1.1.1.4 Progressão de alinhamento para superfícies;

- 1.1.1.4.1 Alinhamento segue sob forma de linha e, posteriormente, sob forma de superfície;
- 1.1.1.4.2 **Percebe-se alteração do paradigma sucessivo para o paradigma simultâneo, da totalidade;**

1.1.2 Objetos

1.1.2.1 Objetos coletivos;

- 1.1.2.1.1 Coleções de duas ou três dimensões;
- 1.1.2.1.2 Formada de elementos semelhantes;
- 1.1.2.1.3 Constituição de estrutura geométrica una de três fronteiras: Superior e duas laterais;
- 1.1.2.1.4 Constituição interiça;

1.1.2.2 Objetos complexos;

- 1.1.2.2.1 Mesma característica dos objetos coletivos **porém formados de elementos heterogêneos**;
- 1.1.2.2.2 Estruturas geométricas e formas de significado empírico

1.2 Relações predominantemente sucessivas e espaciais;

- 1.2.1 Ausência de sistema hierárquico de classes e subclasses;
- 1.2.2 Inexistência de critérios de semelhança e diferenças;
- 1.2.3 Semelhanças sem retomada do critério antecedente;
- 1.2.4 Ausência de construções inclusivas (simultâneas);
 - 1.2.4.1 Desarticulação da parte e do todo;
- 1.2.5 Dependência de toda e qualquer figura espacial;
 - 1.2.5.1 Modificação espacial dos elementos altera significação da resultante da ação anterior;

1.3 Ausência de intenção classificatória;

1.4 Esboço da síntese entre a compreensão e a extensão;

1.5 Ausência de esquemas antecipatórios;

1.6 Incapacidade de reprodução operante de um modelo;

- 1.6.1 Fracasso na percepção da lei do sistema;
- 1.6.2 Acerto do modelo sem compreensão sobre o sistema;

1.7 Ausência de composição de classes únicas;

2 Coleções não-figurais;

2.1 Manifestações;

2.1.1 Coleções justapostas, sem critério único e com resíduo heterogêneo;

- 2.1.1.1 Aproximações sucessivas;
- 2.1.1.2 Início de classificações sem planos de conjunto/critério inicial;
- 2.1.1.3 Resíduo final não classificável;

2.1.2 Pequenas coleções sem critério único, resíduos e intersecções;

- 2.1.2.1 Aproximações sucessivas;
- 2.1.2.2 Início das classificações sem plano de conjunto/critério inicial;

2.1.2.3 Presença de correções sucessivas e retroativas;

2.1.2.4 Esgotamento do material a classificar;

2.1.3 Pequenas coleções com critério único, sem resíduos e intersecções;

2.1.3.1 Antecipações parciais;

2.1.3.1.1 Tentativas e hesitações com retrocesso;

2.1.3.2 Estabelecimento de critério dominante ou único

2.1.4 Pequenas coleções com critério de classificação, sem resíduos nem intersecções;

2.1.4.1 Presença de subcoleções - diferenciação interior - das coleções ($B = A + A'$);

2.2 Princípios classificatórios observados:

2.2.1 Classificação de todos os elementos do material;

2.2.2 Repartição em duas ou mais coleções;

2.2.3 Repartições contém todos os elementos semelhantes e nada além destes;

2.2.4 Complementaridades parciais;

2.2.5 Disjunções das coleções de mesmo nível;

2.2.6 Exploração de simplificações e simetrias

2.2.7 Ausência de hierarquia inclusiva;**2.2.7.1 Ausência de operação reversível (reversibilidade);**2.3 Coleções não figurais e consistente de agregados que se baseiam **unicamente na semelhança;****2.4 Progresso nos esquemas de antecipação e retroação nas regulações graduais inerentes aos ensaios e tentativas****2.4.1 Eventual alcance da dicotomia;**

2.5 Capacidade parcial de reprodução operante de um modelo;

2.5.1 Entendimento parcial sobre a lei do sistema;

2.5.2 Inicia sem saber reproduzir e pode, eventualmente, reproduzir;

2.6 Aceita classes únicas por sugestão;

2.6.1 Alcance parcial da compreensão do sistema;

2.6.2 Inicia sem saber reproduzir e reproduz posteriormente;

3 Classes e encaixamentos inclusivos;

3.1 Critério classificação inicial;

3.2 Regulações sucessivas e simultâneas (parte e todo)

3.3 Esquemas antecipatórios;

3.4 Coordenação entre a compreensão e a extensão;

3.4.1 Observação de classes, subclasses e a união e disjunções destas;

3.4.2 Diferenciações em compreensão e encaixamentos em extensão;

3.4.3 Presença de hierarquias e concatenações inclusivas ($A = B - A'$);

3.4.3.1 Uso sistemático de extensores/quantificadores em conjuntos infinitos;

3.4.3.1.1 Todos;

3.4.3.1.2 Alguns;

3.4.3.1.3 Nenhum;

3.5 Capacidade de reprodução operante de um modelo;

3.5.1 Observa-se classificações hierárquicas e primórdios da inclusão;

3.5.2 A lei de composição é reconhecida pelo sujeito

3.5.2.1 Generalização das leis;

3.5.2.2 A argumentação tem como base o princípio de alteridade;

3.5.3 Aparente regressão onde o sujeito implica uma lei mais complexa do que a classe proposta;

3.5.4 Progresso na mobilidade das hipóteses e combinações possíveis;

3.6 Composição de classes únicas;

3.6.1 Princípios de complementaridade e alteridades ampliadas às classes singulares;

3.6.1.1 Complementaridade baseada na alteridade ('os outros')

3.6.2 Observação de generalização;

3.6.3 Mobilidade entre métodos ascendentes e descendentes;

3.6.4 Composição classificatória com mobilidade entre o específico e o geral;

PSICOGÊNESE DAS NOÇÕES MATEMÁTICAS

Classificação

(Objetos não intuitivos/linguísticos)

1 Coleções Figurais;

- 1.1 Ausência de encaixamentos hierárquicos corretos;
- 1.2 Classes pouco generalizadas;
- 1.3 Ausência de respostas operatórias para análise de coleções e subcoleções;

2 Coleções não-figurais;

- 2.1 Presença de encaixamentos hierárquicos passíveis de serem modulados por critérios externos;
- 2.2 Presença de classes mais generalizadas;
- 2.3 Presença de compreensão das relações em extensão;
- 2.4 Respostas hesitantes nas análises de coleções e subcoleções

3 Classes e Inclusões;

Respostas sistemáticas para as questões de análise de coleções e subcoleções;

PSICOGÊNESE DAS NOÇÕES MATEMÁTICAS

Classificação Multiplicativa

(Frames Simbólicos)

1 Ausência de classificação;

- 1.1 Operações análogas às da composição aditiva;
 - 1.1.1 Coleção figural;
 - 1.1.2 Ausência de estruturas espontâneas de matrizes;

2 Classificação unidimensional de algumas qualidades;

- 2.1 Classificação sem considerar todas as propriedades dos estímulos;
 - 2.1.1 Classificação tomando apenas uma qualidade (unidimensional) por vez;
 - 2.1.2 Ausência de subclasses;
 - 2.1.3 Construída as coleções, ausência de alteração posterior dos critérios;
 - 2.1.4 Ausência de relações simultâneas;
- 2.2 Classificação considerando todas as propriedades dos estímulos;
 - 2.2.1 Ausência de subclasses;
 - 2.2.2 Construída as coleções, ausência de alteração posterior dos critérios;
 - 2.2.3 Ausência de relações simultâneas;

3 Constituição assimétrica de classes;

- 3.1 Constituição de grupamentos onde apenas alguns são sub-colecionados;
- 3.2 Desconsideração das qualidades **simétricas** para o sub-colecionamento dos grupamentos seguintes;

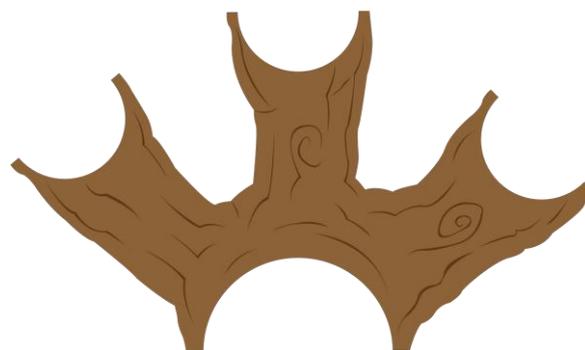
4 Constituição simétrica de classes e ausência de percepção das intersecções;

- 4.1 Constitui grupamentos sub-colecionados;
 - 4.1.1 Ausência de tomada de consciência sobre as intersecções existentes entre os grupamentos;
 - 4.1.2 Dicotomias completas
- 4.2 Constitui grupamentos sub-colecionados;
 - 4.2.1 Tomada de consciência instável sobre as intersecções existentes entre os grupamentos;
 - 4.2.2 Ausência de conservação da regra de intersecção anterior aos outros grupamentos;
 - 4.2.3 Dicotomias completas

5 Classificação multiplicativa;

- 5.1 Classificação de todas as propriedades;
- 5.2 Articulação entre a extensão e a compreensão;

APÊNDICE C - PEÇAS FINAIS DO JOAH



**Instituto Tercio Pacitti de
Aplicações e Pesquisas Computacionais**
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Cx. Postal: 2324 - CEP: 20001-970 - Rio de Janeiro - RJ
Tel: (21) 2598-3212/2598-3130 - FAX: (21) 2270-8554