4. Relativistische Quantenfeldtheorie

4.1 Allgemeine Bemerkungen

Bei genügend hohen Energien hat man es notwendigerweise mit einer Vielteilchentheorie zu tun, da Teilchen erzeugt und vernichtet werden können.

Beispiele (für Anfangszustand pp):

Der Prozess $pp \to pp\pi^0$ ist möglich, sobald die Gesamtenergie der einlaufenden Teilchen größer als die Schwellenenergie $(2m_p + m_\pi)c^2$ ist.

Bei noch größeren Energien ist $pp \to ppp\bar{p}$ möglich.

Bem.: Den Prozess $pp \to pp$ bezeichnet man als elastische Streuung.

weitere Beispiele (Anfangszustand e^+e^-):

$e^+e^- \to e^+e^-$ (elastische Elektron-Positron-Streuung)

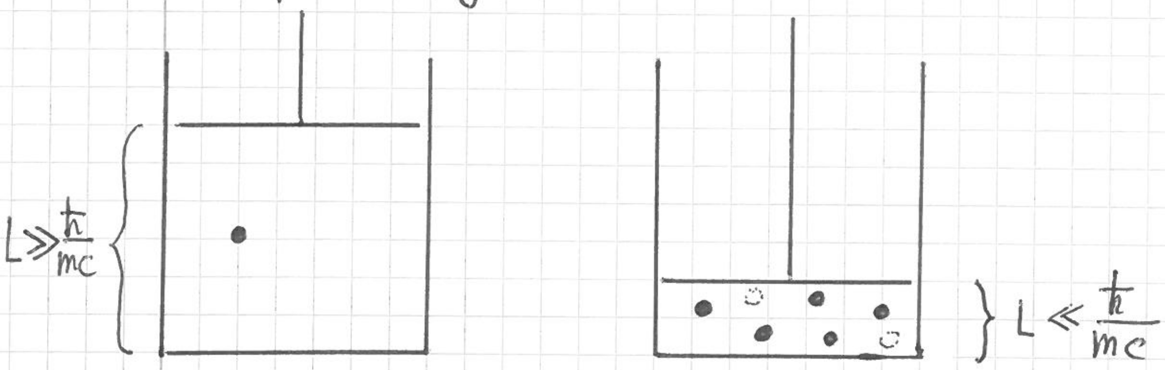
$e^+e^- \to \gamma\gamma$ (Paarvernichtung)

$e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ (Pionproduktion)

$e^+e^- \to e^+e^-\gamma$

$e^+e^- \to 2e^+ + 2e^-$ (Schwellenenergie $4m_ec^2$)

<u>NRQM:</u> Annahme einer beliebig genauen Lokalisierbarkeit eines Teilchens. Wegen der Unschärferelation $\Delta x \, \Delta p \geq \hbar/2$ wird mit $\Delta x \to 0$ lediglich die Impulsunschärfe Δp immer größer. Da man auf die Weise irgendwann in den relativistischen Energiebereich gelangt, können schließlich weitere Teilchen produziert werden und das Konzept einer Einteilchenbeschreibung bricht zusammen. Relevante Größenordnung: $\Delta p \sim mc \quad \Rightarrow \quad \Delta x \sim \frac{\hbar}{mc} = \lambda_c$ (Comptonlänge des Teilchens).



→ Ein Teilchen der Masse m kann nicht in einem Bereich lokalisiert, der kleiner als seine Comptonlänge $\lambda_c = \hbar/mc$ ist. Bei kleineren Distanzen können wegen der Unschärferelation weitere Teilchen erzeugt werden, die Anzahl der Teilchen in dem Behälter ist <u>unbestimmt</u>.

<u>Zahlenbeispiel:</u> $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$

$$\lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{1}{m_e c^2} \underbrace{\hbar c}_{\simeq 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}} = \frac{197 \text{ MeV fm}}{0.511 \text{ MeV}} \simeq 4 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

(R3)

relevante Größe in der <u>Atomphysik</u>: Bohrscher Radius $a \simeq 5 \times 10^{-11} m \gg \lambda_c \rightarrow$ NRQM in der Atomphysik anwendbar (kein Problem mit der Lokalisierbarkeit des e^- im Atom, relativistische <u>Korrekturen</u> zur kinetischen Energie ($v \sim \alpha c^2$!) und durch Mehrteilchenzustände sind klein)

<u>Bemerkung</u> zu <u>relativistischen Korrekturen</u> in der Atomphysik:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} - \frac{3}{4} mv^2 \times \frac{v^2}{c^2} + \ldots$$

relativ zu $\frac{mv^2}{2}$ um Faktor $\sim \frac{v^2}{c^2}$ unterdrückt

Beiträge von <u>Mehrteilchen(zwischen)zuständen</u> zu Energieniveaus von Atomen:

$$\underbrace{H = H_0}_{\text{NR Teil}} + \underbrace{H'}_{\text{Rest}} \qquad H_0 |m\rangle = E_m^{(0)} |m\rangle$$

$$\delta E_m = \langle m | H' | m \rangle + \sum_{n \neq m} \frac{|\langle m | H' | n \rangle|^2}{E_m - E_n} + \ldots$$

auch Beiträge von Mehrteilchenzuständen

typ. atom. Energie

$\rightarrow$ unterdrückt durch Faktor $\frac{E}{mc^2} \sim \frac{mv^2}{mc^2} = \left(\frac{v}{c}\right)^2$

typischer Energienenner

→ Korrekturen durch relat. Kinematik und von Mehrteilchenzuständen sind von der gleichen Größenordnung

Wichtige Erkenntnis: Es gibt keine konsistente relativistische Einteilchen- Quantenmechanik!

Insbes. gibt es in einer relativistischen Theorie keinen Ortsoperator $\vec{X}$, ebensowenig wie die aus der NRQM bekannte Basis $\{|\vec{x}\rangle\}$, da ein Teilchen nicht in einem beliebig kleinen Raumgebiet lokalisiert werden kann.

Es ist recht instruktiv zu sehen, welche Widersprüche sich ergeben, wenn man trotz der vorangegangenen Überlegungen versucht eine Einteilchen-QM zu konstruieren indem man in der NRQM für ein freies Teilchen den Hamilton-operator $H_{NR} = \vec{P}^2/2m$ einfach durch den relativistischen Ausdruck $H = c\sqrt{\vec{P}^2 + m^2c^2}$ ersetzt, ansonsten aber hemmungslos Ortseigenzustände $|\vec{x}\rangle$ verwendet.
Wir betrachten in einer solchen „Theorie" den Ausbreitungskern

$$\langle \vec{x} | e^{-iHt/\hbar} | \vec{o} \rangle =$$

$$= \int d^3p \, \langle \vec{x} | e^{-iHt/\hbar} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{o} \rangle$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \, e^{i\vec{p}.\vec{x}/\hbar} \, e^{-ic\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}\, t/\hbar}$$

R5

$$= \int_0^\infty \frac{dp\, p^2}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; e^{ipr\cos\theta/\hbar}\, e^{-ic\sqrt{p^2+m^2c^2}\,t/\hbar} \qquad r = |\vec{x}|$$

$$= \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty dp\, p^2\, e^{-ic\sqrt{p^2+m^2c^2}\,t/\hbar}\; \frac{e^{ipr/\hbar} - e^{-ipr/\hbar}}{ipr/\hbar}$$

$$= -\frac{i}{(2\pi\hbar)^2 r} \int_0^\infty dp\, p\, \left(e^{ipr/\hbar} - e^{-ipr/\hbar}\right) e^{-ic\sqrt{p^2+m^2c^2}\,t/\hbar}$$

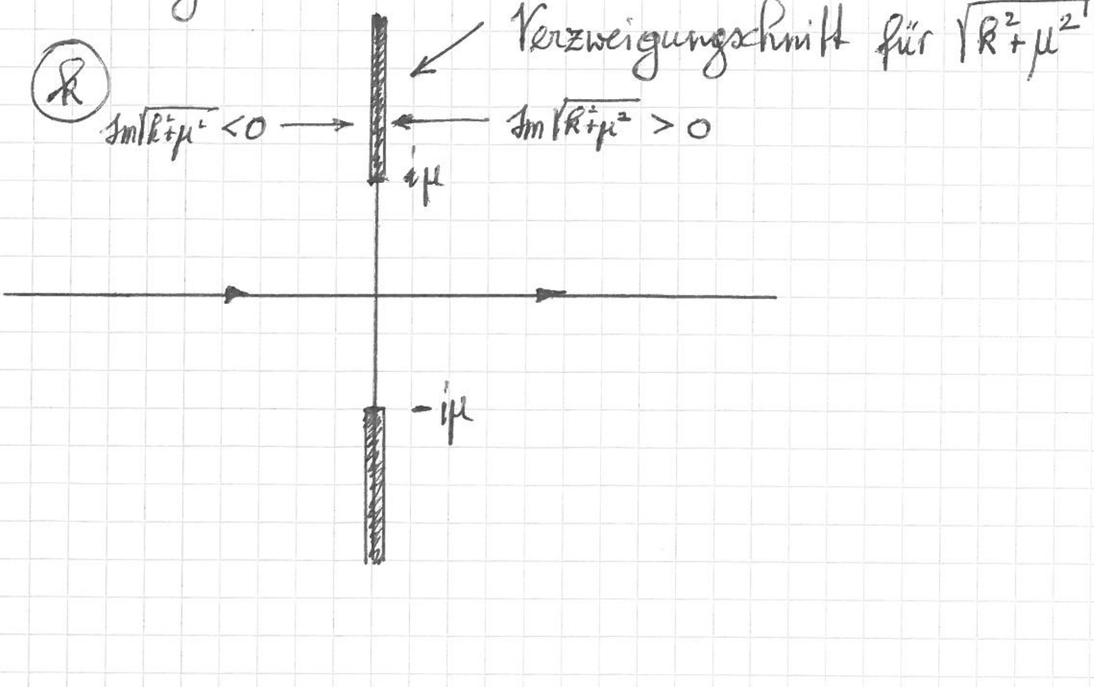
$$= -\frac{i}{(2\pi\hbar)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, p\, e^{ipr/\hbar}\, e^{-ic\sqrt{p^2+m^2c^2}\,t/\hbar} \qquad \boxed{p = \hbar k}$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, k\, e^{ikr}\, e^{-ic\sqrt{k^2+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}}\,t} \qquad \boxed{\mu = \frac{mc}{\hbar}}$$

inverse Compton-länge

$$= -\frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, k\, e^{ikr}\, e^{-ic\sqrt{k^2+\mu^2}\,t} = (*)$$

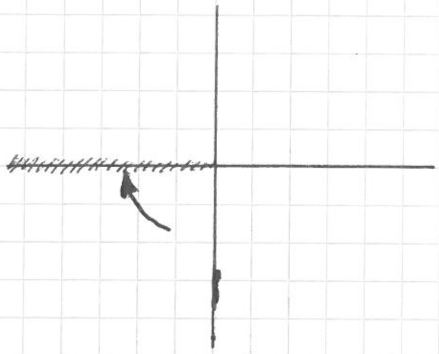
Komplexe Integration



Verhalten von $\sqrt{k^2+\mu^2}$ am linken bzw. rechten Ufer des Verzweigungsschnitts:

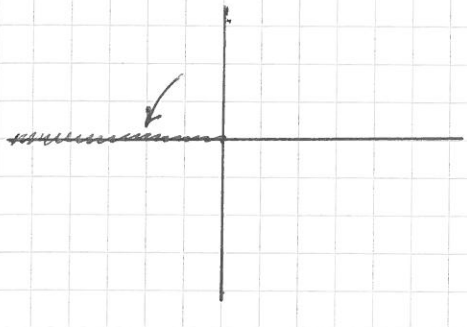
<u>links:</u> $k = iz - \varepsilon \quad , \quad z > \mu$

$$\sqrt{k^2+\mu^2} = \sqrt{-z^2+\mu^2-i\varepsilon} = \sqrt{-\underbrace{(z^2-\mu^2)}_{>0}-i\varepsilon} = \sqrt{z^2-\mu^2}\,(-i)$$



<u>rechts:</u> $k = iz + \varepsilon \quad , \quad z > \mu$

$$\sqrt{k^2+\mu^2} = \sqrt{-z^2+\mu^2+i\varepsilon} = \sqrt{-(z^2-\mu^2)+i\varepsilon} = \sqrt{z^2-\mu^2}\; i$$



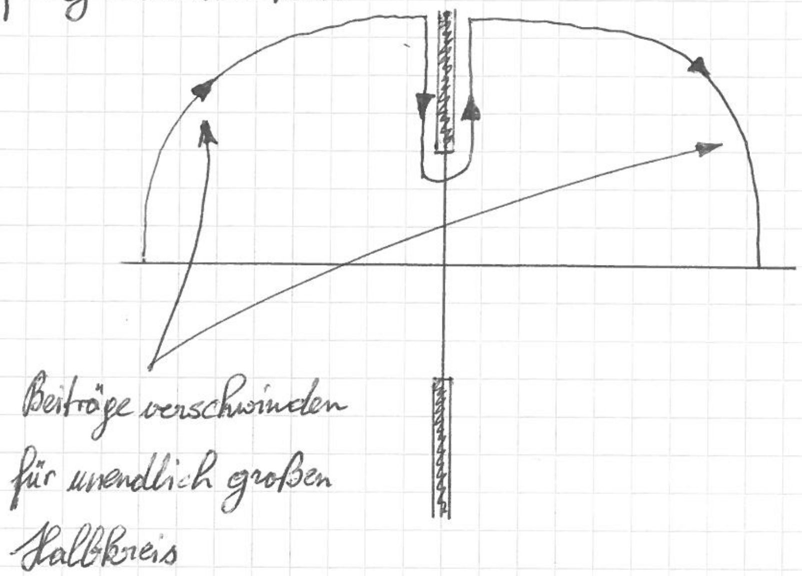
$e^{-ict\sqrt{k^2+\mu^2}}$ fällt exponentiell ab, wenn man am linken Rand des Verzweigungsschnittes aufwärts geht $(t>0)$.

$e^{-ict\sqrt{k^2+\mu^2}}$ wächst exponentiell, wenn man am rechten Rand des Verzweigungsschnittes aufwärts geht.

e^{ikr} fällt (wegen $r>0$) an beiden Ufern des Verzweigungsschnitts exponentiell ab.

R7

Außerhalb des Lichtkegels (d.h. $r>ct$) fällt das Produkt $e^{ikr}\, e^{-ict\sqrt{k^2+\mu^2}}$ immer exponentiell ab. Wir deformieren daher für $r>ct$ den Integrationsweg folgendermaßen:



$$\Rightarrow \quad (*) = \frac{i}{(2\pi)^2\, r} \int_{\mu}^{\infty} dz\, z\, e^{-zr} \left[e^{+\sqrt{z^2-\mu^2}\, ct} - e^{-\sqrt{z^2-\mu^2}\, ct} \right]$$

$$= \frac{i}{2\pi^2\, r} \int_{\mu}^{\infty} dz\, \underbrace{z\, e^{-zr} \sinh\left(ct\sqrt{z^2-\mu^2}\right)}_{>0} \neq 0$$

Verletzung der Kausalität!

Gemäß dieser Theorie könnte man ein Teilchen in einen Behälter beliebig kleiner Größe einsperren, zu einem bestimmten Zeitpunkt freilassen und es dann mit nichtverschwindender Wahrscheinlichkeit in einem Detektor außerhalb des Lichtkegels beobachten. Das Teilchen könnte sich also mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen, somit auch rückwärts in der Zeit mit allen daraus folgenden fürchterlichen Konsequenzen.

4.2 Skalarfeld (Spin-0-Feld)

Ab jetzt: $c = 1$, $\hbar = 1$

Betrachten reelles Skalarfeld $\phi(x) = \phi(x)^*$, $x = (x^0, \vec{x})$

$\phi'(x') = \phi(x)$ unter Poincarétransformation $x' = Lx + a$

$L \in \mathcal{L}_+^\uparrow$

Wirkungsintegral für ein freies Skalarfeld:

$$S = \int d^4x \underbrace{\frac{1}{2}\left(\partial^\mu\phi\, \partial_\mu\phi - m^2\phi^2\right)}_{\mathcal{L}}$$

Feldgleichung $\quad \partial_\mu \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}$

$$\phi_{,\mu} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu\phi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}} = \partial^\mu\phi\,, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi$$

$\Rightarrow$ Klein-Gordon-Gleichung $\quad (\Box + m^2)\phi = 0$

Lagrangedichte $\longrightarrow$ Hamiltondichte

$\pi = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi} = \dot\phi \quad$ kanonisch konjugiert zu ϕ

$$\mathcal{H} = \pi\dot\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\pi^2 + (\vec\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\right]$$

$\mathcal{L}$ hängt nicht <u>explizit</u> von x ab (S ist invariant unter Raum-Zeit-Translationen)
$\Rightarrow$ <u>Energie-Impuls-Erhaltung</u>

<u>Energie-Impuls-Tensor</u> $T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\, \phi_{,\nu} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \quad P^\mu = \int d^3x \; T^{0\mu}(x) = \text{const.} \qquad \text{4-Impuls}$$

$$\vec{P} = - \int d^3x \; \pi \, \vec{\nabla} \phi \qquad \text{3-Impuls}$$

Rotationsinvarianz $\Rightarrow$ Drehimpulserhaltung

$$\vec{L} = - \int d^3x \; \pi \;\; \vec{x} \times \vec{\nabla} \phi$$

<u>Kanonische Quantisierung</u>

$$[\phi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{y})] = i\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[\phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{y})] = [\pi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{y})] = 0$$

<u>Fourierzerlegung</u>

$$\phi(x) = \int \underbrace{\frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2p^0}}_{=:\, d\mu(p)} \left[a(p)\, e^{-ip\cdot x} + a(p)^\dagger e^{+ip\cdot x} \right]$$

Lorentzinv. Maß

$$p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}} =: \omega(\vec{p})$$

$$p\cdot x = p^0 \underbrace{x^0}_{t} - \vec{p}\cdot\vec{x}$$

R10

$$a(p) = i \int d^3x \; e^{ipx} \overleftrightarrow{\partial_0} \phi(x) \qquad \text{UE}$$

$$A \overleftrightarrow{\partial} B = A \partial B - (\partial A) B$$

$$\Rightarrow [a(p), a(p')^\dagger] = \underbrace{(2\pi)^3 \, 2p^0 \, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,')}_{=: \delta(p-p')}$$

$$[a(p), a(p')] = [a(p)^\dagger, a(p')^\dagger] = 0$$

$$H' = \int d^3x \, \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d\mu(p) \, p^0 \, [a(p)^\dagger a(p) + a(p) a(p)^\dagger]$$

$$= \int d\mu(p) \, p^0 a(p)^\dagger a(p) + \underbrace{\frac{1}{2} \int d\mu(p) \, p^0 \, \delta(p,p)}_{E_{Vak}}$$

„Vakuumenergie" $E_{Vak} = \frac{1}{2} \int d^3p \; p^0 \, \delta^{(3)}(\vec{0})$

$$\delta^{(3)}(\vec{0}) = \lim_{\vec{p}\,' \to \vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,') = \lim_{\vec{p}\,' \to \vec{p}} \int d^3x \, \frac{e^{i(\vec{p} - \vec{p}\,') \cdot \vec{x}}}{(2\pi)^3}$$

$\rightarrow \dfrac{V}{(2\pi)^3}$ *bei endlichem Volumen* V (*IR-divergent*)

$\rightarrow$ Energie<u>dichte</u> $\quad \varepsilon_{Vak} = \dfrac{E_{Vak}}{V} = \dfrac{1}{2(2\pi)^3} \underbrace{\int d^3p \, p^0}_{\text{UV-divergent}}$

R11

regularisiere ε_{Vak} durch Abschneideparameter Λ:

$$\frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{|\vec{p}| \leq \Lambda} d^3p \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} = \frac{4\pi}{2(2\pi)^3} \int_0^{\Lambda} dp\, p^2 \sqrt{p^2 + m^2}$$

$$\simeq \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\Lambda^4}{4} \xrightarrow[\Lambda \to \infty]{} \infty$$

Die Vakuumenergie kann durch „Renormierung" beseitigt werden:

$$H' \longrightarrow H = \int d\mu(p)\, p^0\, a(p)^\dagger a(p)$$

Kann formal durch die sog. Normalordnung $:\mathcal{H}:$ der Energiedichte erreicht werden: man schreibt alle Erzeugungsoperatoren links von allen Vernichtungsoperatoren.

analog für Impulsoperator:

$$\vec{P} = -\int d^3x :\pi \vec{\nabla} \phi: = \int d\mu(p)\, \vec{p}\, a(p)^\dagger a(p)$$

$$\rightarrow \quad P^\mu = (H, \vec{P}) = \int d\mu(p)\, p^\mu\, a(p)^\dagger a(p) \qquad \text{4-Impuls}$$

$$\Rightarrow \quad [P^\mu, a(p)] = -p^\mu a(p)$$

$$[P^\mu, a(p)^\dagger] = p^\mu a(p)^\dagger \qquad \text{UE}$$

$\rightarrow$ exponenzierte Form $\quad e^{iP\cdot a} \phi(x) e^{-iP\cdot a} = \phi(x+a)$

P^μ erzeugt Raum-Zeit-Translationen

Grundzustand (Vakuumzustand) $|0\rangle$ charakterisiert durch

$$a(p)\,|0\rangle = 0 \qquad \forall\, p$$

$$\Rightarrow \quad P^\mu\,|0\rangle = 0$$

Einteilchen – Impulseigenzustände: $|p\rangle := a(p)^\dagger\,|0\rangle$

$$P^\mu\,|p\rangle = \underbrace{P^\mu\, a(p)^\dagger}_{a(p)^\dagger P^\mu + p^\mu a(p)^\dagger}\,|0\rangle = p^\mu\,|p\rangle$$

Normierung: $\langle p'|p\rangle = \underbrace{(2\pi)^3\, 2p^0\, \delta^{(3)}(\vec{p}\,'-\vec{p})}_{\delta(p',p)}$

<u>Teilchenzahloperator</u> $\quad N = \int \underbrace{d\mu(p)\, a(p)^\dagger a(p)}_{dn(p)}$

n – Teilchen – Energie – Impuls – Eigenzustände:

$$|p_1,\dots,p_n\rangle = a(p_1)^\dagger \dots a(p_n)^\dagger\,|0\rangle$$

$$P^\mu\,|p_1,\dots,p_n\rangle = (p_1+\dots+p_n)^\mu\,|p_1,\dots,p_n\rangle$$

$$N\,|p_1,\dots,p_n\rangle = n\,|p_1,\dots,p_n\rangle$$

$$\langle p_1,\dots,p_n|k_1,\dots,k_n\rangle = \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n} \delta(p_i, k_{\sigma(i)})$$

R13

Projektor auf den n-Teilchen-Unterraum:

$$\mathbb{P}^{(n)} = \frac{1}{n!} \int d\mu(p_1) \dots d\mu(p_n) \, |p_1, \dots, p_n\rangle\langle p_1, \dots, p_n|$$

normierter n-Teilchen-Zustand:

$$|\psi^{(n)}\rangle = \frac{1}{n!} \int d\mu(p_1) \dots d\mu(p_n) \, |p_1, \dots, p_n\rangle \underbrace{\langle p_1, \dots, p_n | \psi^{(n)}\rangle}_{\psi^{(n)}(p_1, \dots, p_n)}$$

total symmetrische Impulsraum-Wellenfunktion (Bose-Statistik)

$$\langle\psi^{(n)}|\psi^{(n)}\rangle = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n!} \int d\mu(p_1) \dots d\mu(p_n) \, |\psi^{(n)}(p_1, \dots, p_n)|^2 = 1$$

Fockraum:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(2)} \oplus \dots$$

aufgespannt durch $|0\rangle$ $\quad |p\rangle \quad |p_1, p_2\rangle \quad \dots$

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}^{(n)} \, , \quad \mathbb{P}^{(0)} = |0\rangle\langle 0|$$

4.3 Kausalität

Die Messung einer bestimmten Observablen kann nur in einem endlichen Raumzeitgebiet R durchgeführt werden. Die Observable bezieht sich daher auf das Raumzeitgebiet R: $O(R)$ (bzw. im Grenzfall auf einen bestimmten Raumzeitpunkt: $O(x)$). Observable Größen sind lokal (und nicht global wie in der NRQM).

Werden Messungen in zwei raumartig voneinander getrennten Gebieten R_1, R_2 durchgeführt, so können sie einander nicht beeinflussen. Entsprechende Operatoren müssen daher miteinander kommutieren:

$$[O(R_1), O(R_2)] = 0 \quad \text{falls } R_1, R_2 \text{ raumartig}$$

bzw. $$[O(x_1), O(x_2)] = 0 \quad \text{falls } (x_1 - x_2)^2 < 0$$

Da $O(x)$ aus dem Feldoperator $\phi(x)$ aufgebaut ist, genügt es, diese Eigenschaft für $\phi(x)$ zu überprüfen:

$$[\phi(x_1), \phi(x_2)] =$$

$$= \int d\mu(p)\, d\mu(k)\, [a(p) e^{-ipx_1} + a(p)^\dagger e^{ipx_1}, a(k) e^{-ikx_2} + a(k)^\dagger e^{+ikx_2}]$$

$$= \int d\mu(p)\, d\mu(k)\, [\delta(p,k)\, e^{-ipx_1} e^{+ikx_2} - \delta(p,k)\, e^{ipx_1} e^{-ikx_2}]$$

$$= \int d\mu(p)\, [e^{-ip(x_1 - x_2)} - e^{ip(x_1 - x_2)}]$$

$$[\phi(x_1), \phi(x_2)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} \left[e^{-ip(x_1-x_2)} - e^{ip(x_1-x_2)} \right]$$ R15

Ist der 4-Abstand zwischen x_1 und x_2 raumartig, so kann man ein Bezugssystem finden, in dem $x_1^0 = x_2^0$ gilt. Da das Integral lorentzinvariant ist, kann man es in diesem Bezugssystem berechnen:

$$\Rightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0} \left[e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)} - e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)} \right] = 0,$$

wie man durch die Variablentransformation $\vec{p} \to -\vec{p}$ im zweiten Term sofort sieht.

Man kann dieses Resultat natürlich auch direkt aus dem Kommutator $[\phi(x_1), \phi(x_2)]$ sehen, wenn man berücksichtigt, dass $\phi(x)$ ein Skalarfeld ist und in jenem Bezugssystem, wo $x_1^0 = x_2^0 = t$ ist, sich $[\phi(t,\vec{x}_1), \phi(t,\vec{x}_2)] = 0$ ergibt.

$\Rightarrow$ <u>Kausalität in QFT erfüllt</u>