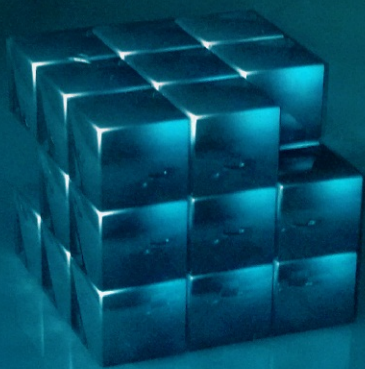


césar r. de oliveira

**introdução à análise
funcional**



césar r. de oliveira

**introdução
à análise funcional**

Oliveira, César R. de

Introdução à análise funcional / César R. de Oliveira.
Rio de Janeiro : IMPA, 2012

257 p. (Projeto Euclides)

ISBN 978-85-244-0311-8

1. Análise funcional. I. Título. II. Série.

CDD-510

césar r. de oliveira

introdução
à análise funcional

primeira edição
(segunda impressão)

impa



INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Sérgio R. Vaz

Projeto Euclides

Comissão Editorial:

Elon Lages Lima
S. Collier Coutinho
Paulo Sad

Títulos Publicados:

- Curso de Análise, Volume 1 - *Elon Lages Lima*
- Medida e Integração - *Pedro Jesus Fernandez*
- Aplicações da Topologia à Análise - *Chaim Samuel Hönig*
- Espaços Métricos - *Elon Lages Lima*
- Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais - *Djairo Guedes de Figueiredo*
- Introdução aos Sistemas Dinâmicos - *Jacob Palis Junior e Wellington C. de Melo*
- Introdução à Álgebra - *Adilson Gonçalves*
- Aspectos Teóricos da Computação - *Cláudio L. Lucchesi, Imre Simon, Istvan Simon, Janos Simon e Tomasz Kowaltowski*
- Teoria Geométrica das Folheações - *Alcides Lins Neto e César Camacho*
- Geometria Riemanniana - *Manfredo P. do Carmo*
- Lições de Equações Diferenciais Ordinárias - *Jorge Sotomayor*
- Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário - *Barry R. James*
- Curso de Análise, Volume 2 - *Elon Lages Lima*
- Teoria Ergódica - *Ricardo Mañé*
- Teoria dos Números Algébricos - *Otto Endler*
- Operadores Auto-Adjuntos e Equações Diferenciais Parciais - *Javier Thayer*
- Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução - *Rafael Lório Jr. e Valéria Lório*
- Álgebra: Um Curso de Introdução - *Arnaldo Leite P. Garcia e Yves Albert E. Lequain*
- Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento - *Elon Lages Lima*
- Funções de uma Variável Complexa - *Alcides Lins Neto*
- Elementos de Álgebra - *Arnaldo Garcia e Yves Lequain*
- Introdução à Geometria Analítica Complexa - *Marcos Sebastiani*
- Curso de Teoria da Medida - *Augusto Armando de Castro Júnior*
- Introdução à Teoria da Medida - *Carlos Isnard*
- Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica - *Johann Baumeister e Antonio Leitão*
- Homologia Básica - *Elon Lages Lima*
- Teoria dos Números: um Passeio com Primos e outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro - *Fabio Brochero Martinez, Carlos Gustavo Moreira, Nicolau Saldanha e Eduardo Tengan*
- Introdução à Análise Funcional - *César R. de Oliveira*

Distribuição:

IMPA

Estrada Dona Castorina, 110

22460-320 Rio de Janeiro, RJ

e-mail: ddic@impa.br

<http://www.impa.br>

Para

Pi. Bichão e Ferinha

Prefácio

Análise Funcional é uma disciplina semestral obrigatória para o Doutorado e optativa para o Mestrado em Matemática da Universidade Federal de São Carlos. Este texto foi escrito para contemplar esta disciplina, e com uma proposta muito objetiva. A idéia é que cada unidade corresponda a uma aula, tentando facilitar o preparo da mesma pelo professor e tornar mais prática a primeira leitura de cada tema pelos alunos. Este é um ponto importante no qual este texto diferencia-se dos demais sobre o mesmo tema. Para atender tal intuito foi necessário manter muito rígida a quantidade de material a ser coberto em cada Capítulo, evitando ultrapassar os limites esperados de uma aula. Isto tornou necessária a seleção de temas com omissões de tópicos e aplicações interessantes. Talvez a principal omissão seja a dos espaços vetoriais topológicos.

Este texto nasceu de notas de aulas ministradas pelo autor no segundo semestre de 1999; já com o intuito de preparar o texto, o material de cada Capítulo foi sendo montado e testado, com adaptações para se encaixar em cada aula, num total de trinta aulas. Parte dos assuntos tratados segue, naturalmente, a orientação do próprio programa de Pós-Graduação e o gosto pessoal do autor; a ênfase é na Análise Funcional Linear e o índice resume os tópicos apresentados. O texto foi originalmente publicado pelo IMPA e passou por correções e pequenas adaptações com o tempo; assim, espera-se que o mesmo esteja mais maduro e melhor concatenado. O resultado final é esta versão do livro.

Pretende-se que este texto transmita uma visão geral de linhas básicas da Análise Funcional e, após segui-lo, que os estudantes estejam preparados para consultar textos mais abrangentes, particularmente de tópicos que aqui não foram cobertos. A maioria dos exercícios originalmente propostos na sala de aula está presente no texto, embora a lista

final de exercícios tenha sido sensivelmente ampliada. No final do livro foram incluídas soluções de alguns exercícios propostos, particularmente daqueles cujas conclusões são, em algum momento, usadas no texto; não houve regra clara na seleção das outras soluções.

Foram incluídas *Notas* na maioria dos Capítulos, as quais objetivam apresentar alguns comentários que normalmente ficam restritos à sala de aula, alguns dados históricos e comentar extensões e aplicações que não foram tratadas no texto, principalmente devido ao espírito pragmático aqui adotado. Com as observações históricas pretende-se, também, lembrar aos leitores que cada área da Matemática se desenvolve com o auxílio de muitos pesquisadores; por exemplo, deixar claro que a própria definição e principais propriedades dos espaços de Hilbert não surgiram em uma tarde inspirada de David Hilbert. Essas *Notas* foram escritas de maneira informal e sem pretensões de trazer quaisquer apresentações ou referências completas.

Supõe-se que os leitores tenham familiaridade com Álgebra Linear (vários resultados em espaços vetoriais de dimensão finita são propostos como exercícios), Topologia Geral (incluindo espaços métricos) e resultados básicos de Funções de Uma Variável Complexa e de Medida e Integração; é suposto que esses assuntos sejam tratados em disciplinas específicas. Resultados como os Teoremas de Stone-Weierstrass e Riesz-Fischer podem ser usados livremente. A bibliografia contém os textos que o autor consultou com maior frequência durante a preparação destas notas, além de alguns considerados clássicos, com omissão clara de textos consagrados; certamente os interessados não encontrarão dificuldades em localizá-los, além de textos complementares, principalmente com o atual grau de informatização de nossas bibliotecas.

Alguns pontos de notação e nomenclatura merecem destaque. Os símbolos \mathcal{N} , \mathcal{B} , \mathcal{H} são usados para designar espaços normados, de Banach e de Hilbert, respectivamente, sem menção explícita toda vez que são usados. Deve-se inferir do termo “não- \mathcal{P} ” que o objeto em questão “não satisfaz a propriedade \mathcal{P} ”, evitando assim algum acúmulo desnecessário de definições. O termo *enumerável* é usado para designar a cardinalidade \aleph_0 do conjunto dos números naturais \mathbb{N} , enquanto *contável* se refere a finito (incluindo zero) ou enumerável; assim, *não-contável* indica que é infinito e com cardinalidade superior a \aleph_0 . Quando um subconjunto $\{\xi_j\}$ é, em particular, uma sequência, na maioria das vezes optou-se por destacar essa propriedade através da notação (ξ_j) . O símbolo $:=$ aponta

PREFÁCIO

uma nova indicação. Também como é usual, um espaço vetorial é dito *trivial* se contém apenas o elemento nulo. O símbolo ■ indica o final de uma demonstração, enquanto • indica o final de um exemplo.

A página da internet

<http://www.dm.ufscar.br/~oliveira/AFEuclides.html>

estará associada a este texto, em particular com uma eventual “Errata”; toda contribuição dos leitores será muito bem-vinda.

Gostaria de agradecer ao Prof. Pedro L. A. Malagutti por ter (corajosamente!) seguido de perto a primeira versão do texto em uma turma de Análise Funcional; isto possibilitou a correção de vários erros tipográficos e imprecisões. Os agradecimentos se estendem aos alunos e colegas que colaboraram com diversas sugestões desde a primeira versão do texto. Finalmente, gostaria de registrar a acolhedora sugestão, do Prof. Elon Lima, para que este livro fosse considerado para publicação no Projeto Euclides.

São Carlos, setembro de 2010.

César R. de Oliveira

Conteúdo

1	Espaços Normados	1
2	Compacidade e Completamento	10
2.1	Compacidade e Dimensão	10
2.2	Completamento de Espaços Normados	11
3	Espaços Separáveis	16
3.1	Espaços Separáveis	16
3.2	Operadores Lineares	19
4	Operadores Limitados e Espaço Dual	24
5	Ponto Fixo de Banach	33
6	Teorema de Baire	41
7	Princípio da Limitação Uniforme	49
8	Teorema da Aplicação Aberta	55
9	Teorema do Gráfico Fechado	62
10	Teorema de Hahn-Banach	68
10.1	Lema de Max Zorn	68
10.2	Hahn-Banach	70
11	Demonstração de Hahn-Banach	76
12	Aplicações de Hahn-Banach	83

13 Operadores Adjuntos em \mathcal{N}	90
14 Convergência Fraca	97
15 Topologias Fracas	104
15.1 Topologias Fracas	104
15.2 Teorema de Alaoglu	108
16 Espaços Reflexivos e Compacidade	113
17 Espaços de Hilbert	119
17.1 Produto Interno	119
17.2 Ortogonalidade	122
18 Projeção Ortogonal	126
18.1 Lei do Paralelogramo	126
18.2 Projeção Ortogonal	129
19 Representação de Riesz em \mathcal{H}	135
19.1 Representação de Riesz	135
19.2 Adjunto de Hilbert e Lax-Milgram	137
20 Operadores Auto-Adjuntos	143
21 Bases Ortonormais	150
22 Séries de Fourier	158
22.1 Séries de Fourier	158
22.2 Integração em Espaços de Hilbert	161
23 Operações em Espaços de Banach	166
23.1 Soma Direta	166
23.2 Espaço Quociente	169
24 Operadores Compactos	175
25 Operadores Compactos em \mathcal{H}	184
26 Operadores de Hilbert-Schmidt	190
27 Espectro	197

CONTEÚDO

28 Classificação Espectral	206
29 Espectro de Auto-Adjuntos	214
30 Espectro de Operadores Compactos	220
30.1 Operadores Compactos	220
30.2 Operadores Normais	222
Soluções de Exercícios Selecionados	229
Bibliografia	249
Índice Remissivo	253

Capítulo 1

Espaços Normados

Grosso modo, a Análise Funcional é uma rica fusão de conceitos de Álgebra Linear, Análise e Topologia, com destaque para espaços vetoriais de dimensão infinita. Partindo de um espaço vetorial, introduz-se uma noção abstrata de comprimento de vetor, mais conhecida como *norma*. Associada a cada norma introduz-se uma distância entre vetores, ou seja, uma métrica, o que torna o espaço vetorial num espaço topológico naturalmente compatível com a estrutura linear. Neste primeiro Capítulo são introduzidos a definição de norma, alguns exemplos básicos e várias notações usadas em todo o texto.

Serão considerados espaços vetoriais tanto sobre o corpo dos números reais \mathbb{R} como sobre o corpo dos números complexos \mathbb{C} . A parte real de um número complexo z será denotada por $\operatorname{Re} z$ e a imaginária por $\operatorname{Im} z$. Em muitas situações não há necessidade de especificar o corpo, assim é conveniente indicar por \mathbb{F} ou \mathbb{C} ou \mathbb{R} . Em geral os espaços vetoriais serão denotados por X, Y, Z, \dots , enquanto seus elementos por ξ, η, ζ, \dots ; os escalares, ou seja, elementos de \mathbb{F} , por $\alpha, \beta, \lambda, \dots$, ou a, b, c, \dots . Recorde que um subconjunto A de um espaço vetorial X é *linearmente independente* se qualquer combinação linear finita de elementos $\xi_j \in A$ resultando no vetor nulo, ou seja, $\sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j = 0$, só ocorre se $\alpha_j = 0$, para todo j (\emptyset é linearmente independente; verifique!). Se $\alpha \in \mathbb{F}$, a notação $\alpha > 0$ indica que $\alpha \in \mathbb{R}$ e é *estritamente positivo*; ainda, $\alpha \geq 0$ será também referenciado por “ α é positivo” (analogamente para *negativo* e *estritamente negativo*). Será usado, muitas vezes, o fato do conjunto dos números racionais \mathbb{Q} ser denso em \mathbb{F} (com a topologia usual), sendo que no caso de $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ entende-se por racionais números da forma $r + is$, com $r, s \in \mathbb{Q}$.

Definição 1.1. Uma *norma* num espaço vetorial X (real ou complexo) é uma aplicação $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

- i. $\|\xi\| \geq 0$ para todo $\xi \in X$, e $\|\xi\| = 0$ se, e somente se, $\xi = 0$ (comprimento positivo).
- ii. $\|\alpha\xi\| = |\alpha| \|\xi\|$, para todo $\xi \in X$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{F}$ (dilatação).
- iii. $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$, para todos $\xi, \eta \in X$ (desigualdade triangular).

Se na definição de norma a condição $\|\xi\| = 0 \Rightarrow \xi = 0$ for retirada, diz-se que $\|\cdot\|$ é uma *seminorma*. É um exercício simples verificar que cada norma define, ou induz, uma métrica d em X por $d(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$. O par $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de *espaço normado*; aqui, $\mathcal{N}, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots$, sempre denotarão espaços normados (com $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ quando se quer especificar a norma). Se não for fornecida outra topologia, fica implícito que em \mathcal{N} a topologia é a induzida pela norma.

É conveniente introduzir mais alguma notação. Se (X, d) é um espaço métrico e $r > 0$, então $B(\xi_0; r) = B_X(\xi_0; r) = \{\xi \in X : d(\xi_0, \xi) < r\}$, $\bar{B}(\xi_0; r) = \bar{B}_X(\xi_0; r) = \{\xi \in X : d(\xi_0, \xi) \leq r\}$ e $S(\xi_0; r) = S_X(\xi_0; r) = \{\xi \in X : d(\xi_0, \xi) = r\}$ indicam a bola aberta, a bola fechada, e a esfera de raio r centradas em ξ_0 , respectivamente, com formas análogas para espaços normados. A notação que não explicita o espaço (nesses casos X) será usada quando não houver possibilidade de confusão. Finalmente, um conjunto é *enumerável* se possui a cardinalidade \aleph_0 de $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, e é *contável* se for finito (incluindo zero) ou enumerável.

EXERCÍCIO 1.1. a) Verifique que se uma métrica d em X provém de uma norma, então $d(\xi + \zeta, \eta + \zeta) = d(\xi, \eta)$, para todos $\xi, \eta, \zeta \in X$. Interprete geometricamente.

b) Mostre que $|\|\xi\| - \|\eta\|| \leq \|\xi - \eta\|$, para todo $\xi, \eta \in X$; conclua então que a norma $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua (\mathbb{R} com a métrica usual).

c) Mostre que num espaço normado a soma de vetores e a multiplicação por escalar são operações contínuas, ou seja, as aplicações $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, $(\eta, \xi) \mapsto \eta + \xi$, e $\mathbb{F} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, $(\alpha, \xi) \mapsto \alpha\xi$, são contínuas.

EXERCÍCIO 1.2. Sejam Ω um subconjunto compacto de um espaço topológico de Hausdorff e $C(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas $\psi :$

$\Omega \rightarrow \mathbb{F}$. Mostre que

$$\|\psi\|_\infty = \sup_{t \in \Omega} |\psi(t)| = \max_{t \in \Omega} |\psi(t)|$$

define uma norma em $C(\Omega)$, e que o espaço normado $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ é completo com a métrica induzida. Esta norma é também chamada de norma da convergência uniforme. Quando não explicitada a norma em $C(\Omega)$ fica subentendido que se trata de $\|\cdot\|_\infty$.

Lembre-se que um espaço métrico é completo se toda sequência de Cauchy, também chamada de *sequência fundamental*, converge a um elemento desse espaço.

Definição 1.2. Um espaço normado que é completo com a métrica induzida pela norma é chamado de *espaço de Banach*; em todo o texto $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots$, sempre denotarão esses espaços.

$(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ é um exemplo de espaço de Banach. Nos próximos exercícios aparecem outros exemplos bem conhecidos; várias verificações são, de fato, similares entre si.

EXERCÍCIO 1.3. Denote por $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ os elementos de \mathbb{F}^n .

a) Mostre que \mathbb{F}^n é um espaço de Banach com cada uma das normas $\|\xi\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p\right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$, e $\|\xi\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j|$. Por que $p < 1$ não define uma norma?

b) Mostre que para todo $\xi \in \mathbb{F}^n$, tem-se $\|\xi\|_\infty \leq \|\xi\|_p \leq n^{1/p} \|\xi\|_\infty$, para todo $p \geq 1$.

EXERCÍCIO 1.4. Mostre que $\|\psi\|_1 = \int_a^b |\psi(t)| dt$ é uma norma em $C[a, b]$ (funções contínuas $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{F}$), e verifique que $\|\psi\|_1 \leq (b-a)\|\psi\|_\infty$ para toda função $\psi \in C[a, b]$. Mostre também que $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$ não é completo. Existe $A > 0$ com $\|\psi\|_\infty \leq A\|\psi\|_1$ para toda $\psi \in C[a, b]$?

Exemplo 1.3. Denote por $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ um ponto genérico de $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$, ou seja, as sequências em \mathbb{F} indexadas por \mathbb{N} . Para $1 \leq p < \infty$ seja $l^p(\mathbb{N}) = \{\xi \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \|\xi\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p} < \infty\}$ e, ainda, $l^\infty(\mathbb{N}) = \{\xi \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \|\xi\|_\infty := \sup_{1 \leq j < \infty} |\xi_j| < \infty\}$. É uma abordagem padrão verificar que $l^p(\mathbb{N})$, para $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach (os casos $p = 1, 2, \infty$

são de verificação bem mais simples). De forma análoga definem-se os espaços de Banach $l^p(\mathbb{Z})$.

Se J é um conjunto, $l^\infty(J)$ denota todas as funções $\psi: J \rightarrow \mathbb{F}$ com $\|\psi\|_\infty := \sup_{t \in J} |\psi(t)| < \infty$, e para $1 \leq p < \infty$, $l^p(J)$ é o conjunto das funções $\psi: J \rightarrow \mathbb{F}$ que se anulam, exceto num subconjunto contável de J , e de forma que $\|\psi\|_p := (\sum_{t \in J} |\psi(t)|^p)^{1/p} < \infty$. Estes espaços também são Banach (note que ‘Banach’ já está sendo usado como adjetivo). Observe que $l^\infty(J) \subset C(J)$, com J tomado com a topologia discreta. •

Exemplo 1.4. Se $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida (positiva), em que \mathcal{A} é uma σ -álgebra em Ω , então é um resultado bem-conhecido em teoria de integração que, para $1 \leq p \leq \infty$, o conjunto $L_\mu^p(\Omega)$ das (classes de equivalências, que identificam duas funções que coincidem μ -q.t.p., de) funções mensuráveis $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{F}$ com

$$\|\psi\|_p := \left(\int_\Omega |\psi(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e $\|\psi\|_\infty := \sup \text{ess}_{t \in \Omega} |\psi(t)| < \infty$, são espaços de Banach. Novamente, os casos $p = 1, 2, \infty$ são de verificação bem mais simples que os outros. Nos Exercícios Adicionais deste Capítulo é apresentado um pequeno roteiro para demonstrar alguns desses resultados. Se a medida é a de Lebesgue em subconjuntos de \mathbb{R}^n a notação será simplesmente $L^p(\Omega)$; no caso de Ω ser um intervalo $[a, b]$ da reta real e a medida a de Lebesgue, então também será usada a notação $L^p[a, b]$. •

EXERCÍCIO 1.5. Verifique que $l^p(J)$, para $p = 1, 2, \infty$ e $L_\mu^\infty(\Omega)$ são espaços de Banach, e que $L_\mu^p(\Omega)$ são espaços normados para $p = 1, 2$.

O espaço vetorial gerado por um subconjunto A de um espaço vetorial X é o conjunto das combinações lineares finitas de seus elementos, e será denotado por $\text{Lin}(A)$; note que $\text{Lin}(A)$ é o menor subespaço que contém A . Lembre, também, que uma *base de Hamel*, ou simplesmente *base*, num espaço vetorial X é um conjunto A linearmente independente maximal, ou seja, $\text{Lin}(A) = X$. Se existe uma base finita de X com n elementos, diz-se que a *dimensão algébrica* de X , denotada por $\dim X$, é finita e igual a n (e todas as bases possuem n elementos); de outra forma, diz-se que a dimensão de X é infinita. Um subconjunto A num espaço normado \mathcal{N} é *total em \mathcal{N}* se $\text{Lin}(A)$ é denso em \mathcal{N} .

Definição 1.5. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ num espaço vetorial X são *equivalentes* se existem $A, B > 0$ de forma que

$$A \|\xi\|_1 \leq \|\xi\|_2 \leq B \|\xi\|_1, \quad \forall \xi \in X.$$

EXERCÍCIO 1.6. a) Verifique que normas equivalentes num espaço vetorial geram a mesma topologia (métrica) e possuem as mesmas sequências de Cauchy; portanto, se um desses espaços métricos for completo, então o outro também será.

b) Mostre que se duas normas geram a mesma topologia, então elas são equivalentes.

Exemplo 1.6. As normas $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ no espaço vetorial dos polinômios em $[0, 1]$ não são equivalentes, pois se $p_n(t) = t^{n-1}$, tem-se $\|p_n\|_\infty = 1$, para todo $n \geq 1$, enquanto $\|p_n\|_1 = 1/n$, que converge a zero quando $n \rightarrow \infty$. •

EXERCÍCIO 1.7. a) Mostre que num espaço normado de dimensão finita um conjunto é compacto se, e somente se, ele é fechado e limitado (lembre-se que num espaço métrico todo compacto é limitado e fechado).

b) Seja $\xi_n = (\delta_{n,j})_{j=1}^\infty$, sendo $\delta_{k,i} = 0$ se $i \neq k$ e $\delta_{k,k} = 1$ o “ δ de Kronecker”. Use essa sequência para mostrar que em $l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, há conjuntos fechados e limitados que não são compactos.

Como motivação é interessante adiantar algumas propriedades particulares de espaços normados de dimensão infinita, e compará-las com o caso de dimensão finita. Tais propriedades serão tratadas futuramente neste texto.

1. Todas as normas num espaço vetorial de dimensão finita são equivalentes e todos esses espaços são Banach, o que não ocorre em dimensão infinita.
2. A bola $\overline{B}(0; 1)$ é compacta se, e somente se, a dimensão do espaço normado é finita.
3. Toda aplicação linear de um espaço normado de dimensão finita nele mesmo é contínua, o que não vale necessariamente em dimensão infinita.

4. Em espaços normados de dimensão infinita há subespaços vetoriais densos próprios (sendo possível que dois desses subespaços densos tenham como intersecção apenas o vetor nulo), e aplicações lineares densamente definidas que não admitem extensões lineares a todo espaço.

Teorema 1.7. *Se X é um espaço vetorial de dimensão finita, então todas as normas em X são equivalentes.*

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de X , de forma que todo $\xi \in X$ pode ser decomposto $\xi = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$. Basta mostrar que qualquer norma $\|\cdot\|$ em X é equivalente a $\|\|\xi\|\| = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|$. Uma desigualdade segue diretamente da estimativa

$$\|\xi\| = \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \|e_j\| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \|e_j\| \right) \|\|\xi\|\| = B \|\|\xi\|\|,$$

em que $B = \max_{1 \leq j \leq n} \|e_j\|$. Para obter a outra desigualdade, suponha que não exista $A > 0$ com $A \|\|\xi\|\| \leq \|\xi\|$, para todo $\xi \in X$. Assim, para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $\xi_N \in X$ com $\|\|\xi_N\|\| = 1$ e $1 = \|\|\xi_N\|\| > N \|\xi_N\|$. Como $S(0; 1)$ é compacta (dimensão finita), existe uma subsequência (ξ_{N_j}) de (ξ_N) convergindo a ξ_0 em $(X, \|\cdot\|)$; pela continuidade da norma vem que $\|\|\xi_0\|\| = 1$. Assim, usando a desigualdade obtida acima,

$$\|\xi_0\| \leq \|\xi_0 - \xi_{N_j}\| + \|\xi_{N_j}\| \leq B \|\|\xi_0 - \xi_{N_j}\|\| + \frac{1}{N_j}$$

que converge a zero para $j \rightarrow \infty$, ou seja, $\|\xi_0\| = 0$ e $\xi_0 = 0$. A contradição com $\|\|\xi_0\|\| = 1$ termina a demonstração. ■

Corolário 1.8. *Todo espaço normado de dimensão finita X é Banach (assim, um subespaço de dimensão finita num espaço normado é fechado).*

Demonstração. Serão aproveitadas as notações utilizadas na demonstração do Teorema 1.7. Como todas as normas são equivalentes, basta considerar $\|\|\cdot\|\|$ (veja o Exercício 1.6). Seja $\xi_k = \sum_{j=1}^n \alpha_j^k e_j$ uma seqüência de Cauchy em $(X, \|\|\cdot\|\|)$. Como

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j^k - \alpha_j^m| = \|\|\xi_k - \xi_m\|\|,$$

vem que, para todo $1 \leq j \leq n$, a sequência $(\alpha_j^k)_{k=1}^\infty$ é Cauchy em \mathbb{F} e converge para algum $\alpha_j^0 \in \mathbb{F}$. Definindo $\xi_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j^0 e_j$ em X , segue

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\xi_k - \xi_0\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |\alpha_j^k - \alpha_j^0| = 0,$$

ou seja, $\xi_k \rightarrow \xi_0$ e o espaço é completo. ■

Exemplo 1.9. Pelo teorema de Stone-Weierstrass (veja por exemplo, [Simmons (1963)]), o espaço vetorial dos polinômios é denso em $C[a, b]$, o que imediatamente mostra que $C[a, b]$ tem dimensão infinita. Além disso, este é um exemplo de espaço vetorial denso mas distinto de todo espaço normado, pois todo polinômio é diferenciável enquanto há funções contínuas em $[a, b]$ que não são diferenciáveis; por exemplo $\psi(t) = |t|$ em $[-1, 1]$. •

No caso particular dos espaços de Banach $L_\mu^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, a desigualdade triangular $\|\psi_1 + \psi_2\|_p \leq \|\psi_1\|_p + \|\psi_2\|_p$ é comumente chamada de *desigualdade de Minkowski*. p e q são ditos *expoentes conjugados* se $1/p + 1/q = 1$ (por convenção, 1 e ∞ são expoentes conjugados), e neste caso vale a *desigualdade de Hölder*

$$\left| \int \psi \varphi d\mu \right| \leq \int |\psi \varphi| d\mu \leq \|\psi\|_p \|\varphi\|_q.$$

Veja o Exercício 1.20 para um guia das demonstrações dessas duas desigualdades padrões.

Notas

A Análise Funcional nasceu de vários problemas em equações diferenciais e integrais, os quais requeriam o uso de espaços vetoriais de dimensão infinita. O estudo sistemático desses espaços iniciou-se na primeira década do século XX, principalmente com trabalhos de S. Banach, M. R. Fréchet, E. Helly, D. Hilbert, F. Riesz, E. Schmidt e outros.

Atualmente pode parecer um passo simples, mas foi um fato extraordinário notar que a definição abstrata de métrica introduz noções precisas de limite, continuidade, compacidade, separabilidade, etc., em espaços distintos de \mathbb{F}^n (cabe ressaltar que o conceito de espaço métrico foi introduzido por Fréchet em sua tese de 1906, embora a expressão “espaço métrico” tenha sido cunhada por Hausdorff). Isto, juntamente com a noção de norma em espaços vetoriais, possibilitou transportar muito da geometria Euclidiana para sistemas de dimensão infinita; em uma dessas contribuições,

E. Schmidt em 1908 introduziu a notação $\| \cdot \|$ para a norma do espaço particular l^2 (o qual foi um dos espaços mais estudados na época), e essa notação foi adotada pela comunidade matemática para designar normas em geral. Um dos primeiros a introduzir a definição abstrata de norma foi o austríaco Helly (que chegou a ser um prisioneiro de guerra na Rússia), por volta de 1920, mas com uma notação distinta daquela de Schmidt.

Em 1932 o matemático polonês S. Banach (pronuncia-se “Bánarr”, de acordo com colegas poloneses) publicou um livro contendo um grande apanhado dos resultados sobre espaços normados até então, incluindo muitos de seus próprios teoremas. Várias das próprias notações do livro foram adotadas pela comunidade matemática e, em sua homenagem, introduziu-se o termo *espaço de Banach*; é curioso observar que Banach não usou os números complexos em seu livro!

Note que os espaços $l^p(J)$ são casos particulares de $L_\mu^p(J)$, de forma que se pode usar os resultados de teoria de integração para mostrar que $l^p(J)$ são Banach. Dê fato, escolha a σ -álgebra \mathcal{A} como o conjunto das partes de J e, para $A \in \mathcal{A}$, defina $\mu(A)$ como a cardinalidade de A se esta é finita, senão $\mu(A) = \infty$; então, $l^p(J) = L_\mu^p(J)$.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 1.8. Analise a convergência das seqüências $(\psi_n(t) = t^n - t^{2n})$, $(\phi_n(t) = t^n - t^{n+1})$ e $(\varphi_n(t) = t^n/n - t^{n+1}/(n+1))$ em $L^p[0, 1]$, para $p = 1$ e ∞ .

EXERCÍCIO 1.9. Denote por $C^1[a, b]$ o conjunto das funções continuamente diferenciáveis $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ com a norma (a' indica derivada)

$$\|\psi\|_{C^1} := \sup_{t \in [a, b]} |\psi(t)| + \sup_{t \in [a, b]} |\psi'(t)|.$$

Verifique que $\| \cdot \|_{C^1}$ é uma norma e $C^1[a, b]$ é Banach; generalize para funções de classe C^r . Analise a convergência da seqüência $(\varphi_n(t) = t^n/n - t^{n+1}/(n+1))$ em $C[0, 1]$ e $C^1[0, 1]$.

EXERCÍCIO 1.10. Qual a dimensão do espaço vetorial das matrizes $n \times m$? Coloque diferentes normas nesse espaço.

EXERCÍCIO 1.11. Verifique que todas as bases de Hamel de um dado espaço vetorial possuem a mesma cardinalidade.

EXERCÍCIO 1.12. Sejam c (ou $c(\mathbf{N})$) e c_0 (ou $c_0(\mathbf{N})$) os conjuntos das seqüências (α_n) em \mathbf{F} cujos limites $\lim \alpha_n$ existe e $\lim \alpha_n = 0$, respectivamente. Mostre que esses conjuntos são subespaços fechados de $l^\infty(\mathbf{N})$ e, portanto, são Banach com a norma $\| \cdot \|_\infty$. Mostre que dado um elemento $\xi \in c$ existem um elemento $\eta \in c_0$ e $\alpha \in \mathbf{F}$ de modo que $\xi = \zeta + \eta$, com $\zeta = (\alpha, \alpha, \alpha, \dots) \in c$.

EXERCÍCIO 1.13. Verifique que em $l^\infty(\mathbf{N})$ a expressão $\|\xi\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} |\xi_n|$ é uma seminorma e $\{\xi \in l^\infty(\mathbf{N}) : \|\xi\| = 0\}$ coincide com c_0 .

EXERCÍCIO 1.14. Desenhe a esfera unitária $S(0; 1)$ no espaço $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ para $p = 1, 2, 5, \infty$. O que ocorre para $0 < p < 1$? Considere $\xi = (1, 0), \eta = (0, 1)$ e mostre que $\|\xi + \eta\|_p > \|\xi\|_p + \|\eta\|_p$ se $0 < p < 1$, ou seja, a desigualdade triangular não é respeitada.

EXERCÍCIO 1.15. Seja $\xi_n = (1/n, 1/n, \dots, 1/n, 0, 0, \dots)$, com as n primeiras entradas iguais a $1/n$ ($\psi_n(t) = \chi_{[0, n]}(t)/n$, sendo χ_A a função característica do conjunto A), uma sequência em $l^1(\mathbb{N})$ ($L^1(\mathbb{R})$). Mostre que $\xi_n \rightarrow 0$ ($\psi_n \rightarrow 0$) **uniformemente**, mas não converge em $l^1(\mathbb{N})$ ($L^1(\mathbb{R})$). Adapte para $l^p(\mathbb{N})$ ($L^p(\mathbb{R})$). $1 < p < \infty$.

EXERCÍCIO 1.16. Mostre que uma métrica d num espaço vetorial X é induzida por uma norma se, e somente se, $d(\xi + \zeta, \eta + \zeta) = d(\xi, \eta)$ e $d(\alpha\xi, \alpha\eta) = |\alpha|d(\xi, \eta)$, para todos $\xi, \eta, \zeta \in X, \alpha \in \mathbb{F}$.

EXERCÍCIO 1.17. Pode ocorrer de duas métricas gerarem a mesma topologia, mas apenas um desses espaços métricos ser completo (o que não ocorre no caso de duas métricas geradas por normas). Verifique isto para as métricas $d(t, s) = |t - s|$ e $D(t, s) = |f(t) - f(s)|$ em \mathbb{R} , sendo $f(t) = t/(1 + |t|)$.

EXERCÍCIO 1.18. Seja Ω um subconjunto aberto não-vazio de \mathbb{C} . Mostre que o conjunto das funções holomorfas limitadas em Ω com a norma $\|\cdot\|_\infty$ é um espaço de Banach.

EXERCÍCIO 1.19. Mostre que o conjunto das funções absolutamente contínuas $\psi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\psi(0) = 0$ e $\psi' \in L^2[-1, 1]$ (a ' indica derivada), é um espaço de Banach com a norma $\|\psi\| = \left(\int_{-1}^1 |\psi'(t)|^2 dt\right)^{1/2}$. Este resultado não é imediato e está relacionado aos espaços de Sobolev.

EXERCÍCIO 1.20. Considere $1 < p < \infty$. Encontre o mínimo da função $\phi(t) = t^p/p - t$ e conclua que $t \leq t^p/p + 1/q$, sendo $1/p + 1/q = 1$. Escolhendo $t = r/s^{q/p}$ conclua que $rs \leq r^p/p + s^q/q$, para quaisquer $r, s > 0$. Use isto para mostrar a desigualdade de Hölder $|\int \psi\varphi d\mu| \leq \int |\psi\varphi| d\mu \leq \|\psi\|_p \|\varphi\|_q$ para $\psi \in L^p_\mu$ e $\varphi \in L^q_\mu$. Escolhendo $\varphi = \psi^{p-1}/\|\psi\|_p^{p/q}$, mostre então que $\|\psi\|_p = \sup_{\|\varphi\|_q=1} \int |\psi\varphi| d\mu$, verifique a desigualdade de Minkowski $\|\psi_1 + \psi_2\|_p \leq \|\psi_1\|_p + \|\psi_2\|_p$ e que $\|\cdot\|_p$ é uma norma. L^p é completo pelo teorema de Riesz-Fischer. Adapte para l^p .

Capítulo 2

Compacidade e Completamento em Espaços Normados

Neste Capítulo são tratadas duas propriedades sobre espaços normados. A primeira é que a bola unitária fechada em \mathcal{N} é compacta se, e somente se, a dimensão de \mathcal{N} é finita (lembre-se que \mathcal{N} sempre denota um espaço normado). A segunda é que todo espaço normado “pode ser completado” num espaço de Banach.

2.1 Compacidade e Dimensão

O seguinte lema é a ferramenta chave para se construir sequências limitadas, que não possuem subsequências convergentes, em espaços \mathcal{N} de dimensão infinita. Embora certamente com a intuição prejudicada pela ausência explícita de ortogonalidade, uma interpretação geométrica de seu enunciado é importante para tornar natural sua demonstração.

Lema 2.1 (Lema de Riesz). *Sejam X um subespaço vetorial fechado próprio do espaço normado $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$. Então, para cada $0 < \alpha < 1$, existe $\xi \in \mathcal{N} \setminus X$ com $\|\xi\| = 1$ e $\inf_{\eta \in X} \|\xi - \eta\| \geq \alpha$.*

Demonstração. Sejam $\zeta \in \mathcal{N} \setminus X$ e $c = \inf_{\eta \in X} \|\eta - \zeta\|$. Como X é fechado, $c > 0$. Assim, para todo $d > c$ existe $\omega \in X$ com $c \leq \|\zeta - \omega\| \leq$

d. O vetor $\xi = (\zeta - \omega) / \|\zeta - \omega\|$ pertence a $\mathcal{N} \setminus X$ e $\|\xi\| = 1$. Além disso, para todo $\eta \in X$ tem-se

$$\|\xi - \eta\| = \frac{1}{\|\zeta - \omega\|} \left\| \zeta - (\omega + \|\zeta - \omega\|\eta) \right\| \geq \frac{c}{\|\zeta - \omega\|} \geq \frac{c}{d}.$$

Portanto, para $0 < \alpha < 1$ dado escolhe-se $d = c/\alpha$ e segue o resultado desejado $\inf_{\eta \in X} \|\xi - \eta\| \geq \alpha$. ■

Teorema 2.2. A bola fechada $\overline{B}(0; 1)$ em um espaço vetorial normado \mathcal{N} é compacta se, e somente se, $\dim \mathcal{N} < \infty$.

Demonstração. Se $\dim \mathcal{N} < \infty$, sabe-se que $\overline{B}(0; 1)$ é compacta (veja o Exercício 1.7). Se $\dim \mathcal{N}$ não é finita, será usado o Lema de Riesz para construir uma sequência em $\overline{B}(0; 1)$ que não possui subsequência convergente.

Seja $\xi_1 \in \mathcal{N}$, $\|\xi_1\| = 1$. Pelo Lema de Riesz existe $\xi_2 \in \mathcal{N}$, com $\|\xi_2\| = 1$, e $\|\xi_1 - \xi_2\| \geq 1/2$ (escolhendo $\alpha = 1/2$ no Lema de Riesz). O espaço vetorial $\text{Lin}(\{\xi_1, \xi_2\})$ é fechado, pois é de dimensão finita. Novamente pelo Lema de Riesz, existe $\xi_3 \in \mathcal{N}$, com $\|\xi_3\| = 1$, $\|\xi_3 - \xi_1\| \geq 1/2$ e $\|\xi_3 - \xi_2\| \geq 1/2$. Desta forma, constrói-se uma sequência $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$, $\|\xi_n\| = 1$, para todo n , e $\|\xi_j - \xi_k\| \geq 1/2$ para todos $j \neq k$. Esta sequência não possui subsequência convergente e, portanto, a bola unitária fechada $\overline{B}(0; 1)$ não é compacta. ■

EXERCÍCIO 2.1. O que se pode dizer se $\overline{B}(0; 1)$ for substituída por $S(0; 1)$ no Teorema 2.2?

EXERCÍCIO 2.2. Dê exemplos de subespaços de $l^1(\mathbb{Z})$, $l^\infty(\mathbb{Z})$ e $L^1(\mathbb{R})$ que não são fechados.

2.2 Completamento de Espaços Normados

Definição 2.3. Dois espaços métricos (X, d) e (Y, D) são ditos *isométricos* se existe uma isometria $\kappa : X \rightarrow Y$ bijetora (lembre que κ é uma isometria se $D(\kappa(\xi), \kappa(\eta)) = d(\xi, \eta)$, para quaisquer $\xi, \eta \in X$, e que toda isometria é injetora).

EXERCÍCIO 2.3. Mostre que um espaço métrico isométrico a um espaço métrico completo também é completo.

Definição 2.4. Dois espaços normados \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 são *isomorfos* se existe uma isometria linear bijetora $\kappa : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ (ou seja, $\kappa(a\xi + \eta) = a\kappa(\xi) + \kappa(\eta)$, para todo $\xi, \eta \in \mathcal{N}_1, a \in \mathbb{F}$ e κ é sobrejetora). A aplicação κ é chamada de *isomorfismo* entre esses espaços normados.

Teorema 2.5. Se (X, d) é um espaço métrico, então ele é isométrico a um subconjunto denso de um espaço métrico completo (\tilde{X}, \tilde{d}) ; tal \tilde{X} é chamado de *completamento* de X . Além disso, quaisquer dois completamentos de X são isométricos.

Demonstração. Será construído o completamento de forma similar à construção de Cantor dos números reais; cada número real pode ser identificado com as seqüências de Cauchy, de números reais ou apenas racionais, que convergem a ele. Não serão apresentados todos os detalhes técnicos da demonstração, pois embora ela envolva vários passos, cada um deles é simples.

Seja \tilde{X} o conjunto das classes de equivalência de seqüências de Cauchy em X , em que duas dessas seqüências (ξ_n) e (ξ'_n) são equivalentes se $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\xi_n, \xi'_n) = 0$. Usando a desigualdade triangular segue que esta relação realmente define classes de equivalência e, ainda, que se $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \tilde{X}$, então o limite

$$\tilde{d}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(\xi_n, \eta_n)$$

existe e não depende dos representantes $((\xi_n), (\eta_n))$ de $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\eta}$, respectivamente) utilizados, e define uma métrica em \tilde{X} . Para se concluir que o limite existe, considere $d(\xi_n, \eta_n) \leq d(\xi_n, \xi_m) + d(\xi_m, \eta_m) + d(\eta_m, \eta_n)$, implicando em

$$|d(\xi_n, \eta_n) - d(\xi_m, \eta_m)| \leq d(\xi_n, \xi_m) + d(\eta_n, \eta_m),$$

e sendo $(\xi_n), (\eta_n)$ seqüências de Cauchy conclui-se que $(d(\xi_n, \eta_n))_n$ é Cauchy em \mathbb{R} , e portanto convergente. A independência dos representantes mostra-se de forma similar.

Defina $\kappa : X \rightarrow \kappa(X) \subset \tilde{X}$, de forma que (ξ, ξ, ξ, \dots) é um representante de $\kappa(\xi)$; então κ é uma isometria cuja imagem é densa em (\tilde{X}, \tilde{d}) . De fato, se (ξ_n) é um representante de $\tilde{\xi} \in \tilde{X}$, então dado $\varepsilon > 0$ tem-se $\tilde{d}(\tilde{\xi}, \kappa(\xi_m)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\xi_n, \xi_m) < \varepsilon$ para m suficientemente grande, já que (ξ_n) é Cauchy; disto segue a densidade.

Utilizando esta isometria, a densidade e novamente a desigualdade triangular, mostra-se que (\tilde{X}, \tilde{d}) é completo. De fato, se $(\tilde{\xi}_n) \subset \tilde{X}$ é

uma seqüência de Cauchy, para cada n escolha $\eta_n \in X$ de forma que $\tilde{d}(\tilde{\xi}_n, \kappa(\eta_n)) < 1/n$; assim,

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\kappa(\eta_n), \kappa(\eta_m)) &\leq \tilde{d}(\kappa(\eta_n), \tilde{\xi}_n) + \tilde{d}(\tilde{\xi}_n, \tilde{\xi}_m) + \tilde{d}(\tilde{\xi}_m, \kappa(\eta_m)) \\ &< \frac{1}{n} + d(\tilde{\xi}_n, \tilde{\xi}_m) + \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

mostrando que $(\kappa(\eta_n))$ é Cauchy e, por isometria, (η_n) é Cauchy em X e, logo, representa algum $\tilde{\eta} \in \tilde{X}$. Usando a desigualdade triangular segue que $\tilde{d}(\tilde{\xi}_n, \tilde{\eta}) \leq \tilde{d}(\tilde{\xi}_n, \kappa(\eta_n)) + \tilde{d}(\kappa(\eta_n), \tilde{\eta}) < 1/n + \lim_{m \rightarrow \infty} d(\eta_n, \eta_m)$ mostrando que, para $n \rightarrow \infty$, $(\tilde{\xi}_n)$ converge a $\tilde{\eta}$; assim \tilde{X} é completo.

Se existe outra isometria sobrejetora $\iota : (X, d) \rightarrow (W, D)$, com W denso no espaço métrico completo (Z, D) , então a composição $\iota \circ \kappa^{-1} : \kappa(X) \rightarrow W$ é uma isometria bijetora, a qual tem extensão única para uma isometria entre os fechos desses espaços, ou seja, entre (\tilde{X}, \tilde{d}) e (Z, D) ; portanto quaisquer dois complementos de (X, d) são isométricos. Frequentemente identifica-se o espaço métrico X com $\iota(X)$ ou $\kappa(X)$. ■

EXERCÍCIO 2.4. Preencha os detalhes da demonstração do Teorema 2.5.

EXERCÍCIO 2.5. Qual o complemento de um espaço com a métrica discreta? E dos números racionais com a métrica usual?

O próximo resultado mostra que a construção realizada para o complemento de um espaço métrico pode ser transladada a espaços normados mantendo a estrutura linear.

Teorema 2.6. *Se $(\mathcal{N}, \|\cdot\|)$ é um espaço normado, então ele é isomorfo a um subespaço denso de um espaço de Banach $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$; tal \mathcal{B} é chamado de complemento de \mathcal{N} . Além disso, quaisquer dois complementos de \mathcal{N} são isomorfos.*

Demonstração. Serão utilizadas as notações introduzidas no Teorema 2.5 e em sua demonstração. Basta mostrar que, neste caso, (\tilde{X}, \tilde{d}) é um espaço vetorial com \tilde{d} gerado por uma norma compatível com $\kappa(\mathcal{N})$. A estrutura linear em \tilde{X} é definida naturalmente pela classe de equivalência de soma pontual de representantes das parcelas envolvidas, assim definindo $\tilde{\zeta} = \tilde{\xi} + \tilde{\eta}$, e o produto por escalar $\alpha\tilde{\xi}$ pela classe de equivalência da qual $(\alpha\xi_n)$ é um representante ((ξ_n) sendo um representante de

$\tilde{\xi}$). Agora, a isometria κ induz uma norma $[\cdot]$ em $\kappa(\mathcal{N})$ com $[\kappa(\xi)] = \|\xi\|$ e, novamente por ser isometria, a métrica correspondente é a restrição de \tilde{d} a $\kappa(\mathcal{N})$. Estende-se esta norma a \tilde{X} definindo-se $\|\tilde{\xi}\| = \tilde{d}(\tilde{0}, \tilde{\xi})$, de forma que (\tilde{X}, \tilde{d}) é um espaço normado; como também é completo, é um espaço de Banach. ■

EXERCÍCIO 2.6. Preencha os detalhes da demonstração do Teorema 2.6; em particular, mostre que $\|\cdot\|$ é uma norma.

OBSERVAÇÃO 2.7. Há ainda um análogo desses completamentos para espaços com produto interno (veja o Teorema 17.15). Outra demonstração do Teorema 2.6 será proposta quando forem discutidos detalhes dos espaços duais de espaços normados; veja o Exercício 12.6.

OBSERVAÇÃO 2.8. Em geral, diferentes normas num espaço vetorial podem levar a diferentes completamentos; por exemplo, se no espaço vetorial das seqüências em \mathbf{F} com apenas um número finito de entradas não-nulas for considerada cada norma $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, então o completamento é isomorfo ao correspondente $l^p(\mathbf{N})$.

Notas

A idéia de completamento de espaços métricos é muito importante; várias operações e conceitos só tomam uma forma satisfatória após algum tipo de extensão ou completamento. Por exemplo, a integral de Lebesgue pode ser definida via extensão da integral de Riemann a certo completamento do espaço das funções contínuas; com a transformada de Fourier ocorre algo similar, sendo $L^2(\mathbf{R})$ seu espaço natural. É fundamental em Análise Matemática, particularmente para a teoria de equações e operadores diferenciais, que há subespaços de funções reais infinitamente diferenciáveis cujos completamentos (com topologias adequadas) resultam em $L^p(\mathbf{R})$.

Embora o completamento de espaços normados possa ser demonstrado de forma elegante usando espaços duais (veja o Exercício 12.6), a demonstração aqui discutida traz uma construção transparente e intuitiva: por isso foi incluída.

Note ainda outra característica particular de espaços normados de dimensão infinita: pode haver dois subespaços vetoriais densos cuja intersecção é apenas o zero, de maneira que a soma de operadores definidos em cada um desses subespaços está, em princípio, definida apenas no zero! Por exemplo, tome em $L^1(\mathbf{R})$ o espaço de Schwarz (funções infinitamente diferenciáveis decaindo rapidamente no infinito) e o espaço das funções simples.

O importante Lema de Riesz 2.1 foi publicado por F. Riesz em 1918, num trabalho cujo principal tema eram os operadores compactos em espaços de Banach e seus espectros; veja também as Notas nos Capítulos 24 e 30.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 2.7. Mostre que em \mathcal{N} de dimensão infinita, qualquer subconjunto que contém um aberto (não-vazio) não é compacto. Conclua que espaços normados de dimensão infinita não possuem subconjuntos localmente compactos

EXERCÍCIO 2.8. Uma sequência $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ num espaço normado \mathcal{N} é *absolutamente somável* se $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\| < \infty$. Mostre que \mathcal{N} é um espaço de Banach se, e somente se, toda sequência absolutamente somável é somável (ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ converge) em \mathcal{N} .

EXERCÍCIO 2.9. Sejam $\psi : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ uniformemente contínua e $\tilde{\mathcal{N}}_1$ e $\tilde{\mathcal{N}}_2$ os completamentos de \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 , respectivamente. Mostre que a aplicação ψ possui uma única extensão $\tilde{\psi} : \tilde{\mathcal{N}}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}_2$ uniformemente contínua (evidentemente cada espaço normado está sendo identificado com um subespaço denso em seu completamento).

EXERCÍCIO 2.10. Construa uma sequência de funções $\psi_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que $\|\psi_n\|_{\infty} = 1$, a qual converge a zero em $L^p[0, 1]$ para todo $1 \leq p < \infty$, e para todo $t \in [0, 1]$ a sequência de escalares $(\psi_n(t))$ não é convergente.

EXERCÍCIO 2.11. Num espaço normado \mathcal{N} , $\psi(S(0, 1))$ é um conjunto limitado para toda aplicação contínua $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$?

EXERCÍCIO 2.12. Qual o completamento de $C^1[-1, 1]$ com a norma

$$\|\psi\| = \sup_{t \in [-1, 1]} |\psi(t)| + \sup_{t \in [-1, 0]} |\psi'(t)| + \sup_{t \in [0, 1]} |\psi'(t)|, \quad \psi \in C^1[-1, 1] ?$$

Capítulo 3

Espaços Separáveis. Operadores Lineares

Neste Capítulo discute-se o conceito de separabilidade em espaços normados e são introduzidos os operadores lineares limitados entre esses espaços.

3.1 Espaços Separáveis

A noção de base de Hamel aplica-se a espaços vetoriais, necessitando-se apenas da definição de conjunto linearmente independente; se a dimensão algébrica do espaço vetorial for infinita, geralmente as bases de Hamel não são contáveis (veja a Proposição 6.11), o que as tornam potencialmente de pouca utilidade prática. Este fato, associado à necessidade de uma definição de base que requeira uma topologia, levou o próprio Banach a incluir em seu livro a seguinte

Definição 3.1. Uma *base de Schauder* de um espaço normado \mathcal{N} é uma sequência (ξ_n) em \mathcal{N} em que, a cada vetor $\xi \in \mathcal{N}$, associa-se uma única sequência $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{F}$, de forma que

$$\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \xi_j := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j.$$

Note que a unicidade da sequência de escalares (α_n) para cada ξ implica em que a base de Schauder (ξ_n) seja linearmente independente.

Também, o caso de \mathcal{N} ter dimensão finita N fica contemplada nessa definição ao se supor que $\alpha_n = 0$ se $n > N$.

Definição 3.2. Um espaço métrico é *separável* se existe um subconjunto contável denso nesse espaço.

Exemplo 3.3. Um espaço com a métrica discreta é separável se, e somente se, é contável. •

Proposição 3.4. *a) Todo espaço normado \mathcal{N} que possui uma base de Schauder é separável.*

b) Um espaço normado \mathcal{N} é separável se, e somente se, existe um subconjunto contável total linearmente independente em \mathcal{N} .

Demonstração. *a)* Se (ξ_n) é uma base de Schauder, então o conjunto das combinações lineares da forma $r_1\xi_1 + \dots + r_n\xi_n$, com r_j um número racional para todo j , é contável e denso em \mathcal{N} . Portanto \mathcal{N} é separável.

b) Um argumento similar ao usado na demonstração do item *a)* mostra que se existe um subconjunto contável $\{\xi_n\}$ total em \mathcal{N} , então esse espaço normado é separável, pois o conjunto das combinações lineares $r_1\xi_1 + \dots + r_n\xi_n$, com r_j racionais, é contável e denso em \mathcal{N} .

Supondo agora que \mathcal{N} é separável, seja $(\xi_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência densa em \mathcal{N} . Defina a sequência total (η_n) pela seguinte indução: η_1 é o primeiro elemento não-nulo de $(\xi_n)_{n=1}^\infty$; escolhidos $(\eta_n)_{n=1}^j$, η_{j+1} é o primeiro elemento de $(\xi_n)_{n=j+1}^\infty$ de modo que $(\eta_n)_{n=1}^{j+1}$ seja linearmente independente (se esse elemento não existir a sequência termina). Por construção, $(\xi_n)_{n=1}^\infty$ e o conjunto $(\eta_n)_{n=1}^\infty$ geram o mesmo espaço vetorial, e esta última é contável e linearmente independente. ■

Todo espaço normado que possui uma base de Schauder é separável; contudo, numa construção elaborada, P. Enflo apresentou um exemplo de espaço de Banach separável que não possui base de Schauder; veja as Notas. Muitas aplicações e resultados requerem que o espaço normado em questão seja separável. A presença de um conjunto contável denso pode simplificar consideravelmente algumas demonstrações.

EXERCÍCIO 3.1. Mostre que um subconjunto E de um espaço normado é separável $\iff \text{Lin}(E)$ é separável.

Exemplo 3.5. Pela densidade dos números racionais em \mathbb{R} , segue que também \mathbb{F}^n é separável. Outra forma de se verificar isto é observar que a base canônica de \mathbb{F}^n é uma base de Schauder. •

Exemplo 3.6. $l^p(\mathbb{N})$ é separável para $1 \leq p < \infty$, pois sua base canônica (ou usual) $\epsilon_n = (\delta_{n,j})_{j=1}^{\infty}$ (δ de Kronecker) é uma base de Schauder. Aqui também pode-se usar a densidade dos racionais nos reais, de forma que a família dos elementos de $l^p(\mathbb{N})$ com entradas apenas racionais é enumerável e denso em $l^p(\mathbb{N})$. •

Exemplo 3.7. $l^{\infty}(\mathbb{N})$ não é separável. De fato, dada $\xi^n = (\xi_j^n)_{j=1}^{\infty}$ uma seqüência em $l^{\infty}(\mathbb{N})$, defina o vetor $\xi = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ cujas entradas são $\xi_j = 0$ se $|\xi_j^n| \geq 1$ e $\xi_j = \xi_j^n + 1$ se $|\xi_j^n| < 1$; assim, $\|\xi\|_{\infty} \leq 2$ e $\|\xi - \xi^n\|_{\infty} \geq 1$ para todo n . Portanto, não existe seqüência densa em $l^{\infty}(\mathbb{N})$. Por que $\{\epsilon_n\}$, como acima, não é base de Schauder de $l^{\infty}(\mathbb{N})$? •

EXERCÍCIO 3.2. Mostre que $l^p(J)$, $1 \leq p < \infty$, é separável se, e somente se, J for contável. Quando $l^{\infty}(J)$ é separável?

EXERCÍCIO 3.3. Aqui está uma demonstração alternativa de que $l^{\infty}(\mathbb{N})$ não é separável; preencha os detalhes. Seja $X \subset l^{\infty}(\mathbb{N})$ o subconjunto das seqüências cujas entradas são apenas 0 e 1. Então a distância entre quaisquer dois elementos distintos de X é igual a um e X não é contável (lembre-se da representação de números reais na base 2).

Exemplo 3.8. [Base de Schauder que não é de Hamel] Denote por \mathcal{N} o subespaço de $l^{\infty}(\mathbb{N})$ formado pelas seqüências com apenas um número finito de entradas não-nulas. A base (de Schauder) canônica $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ também é uma base de Hamel de \mathcal{N} , pois $\mathcal{N} = \text{Lin}(\{e_j\})$. Agora, a seqüência $\{\eta_k = e_k/k - e_{k+1}/(k+1)\}_{k=1}^{\infty}$ não é uma base de Hamel do espaço não-completo \mathcal{N} , pois a única representação de $e_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k$ é uma soma infinita. Contudo, essa é uma base de Schauder de \mathcal{N} , pois cada elemento $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$ de \mathcal{N} pode ser escrito na forma

$$\xi = \sum_{k=1}^n a_k \eta_k + a_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \eta_k,$$

em que $\{a_k\}_{k=1}^n$ é a solução do sistema linear $\xi_1 = a_1$, $\xi_j = (a_j - a_{j-1})/j$, $2 \leq j \leq n$. Este exemplo mostra que mesmo se as bases de Hamel são enumeráveis, pode haver uma base de Schauder que não é de Hamel (confronte com a Proposição 6.11). •

Exemplo 3.9. $C[a, b]$ é separável pela Proposição 3.4b), pois a seqüência $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ é total em $C[a, b]$ pelo conhecido teorema de Stone-Weierstrass;

de forma mais geral, $C(\Omega)$ é separável se Ω é métrico compacto [Simmons (1963)]. Disto segue que $L^p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, é também separável, já que as funções contínuas formam um subconjunto denso em $L^p[a, b]$. •

EXERCÍCIO 3.4. Suponha que exista uma família contável de conjuntos mensuráveis A_n em $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ de forma que $\Omega = \bigcup_n A_n$; identifique $L^p(A_n)$ com um subespaço de $L^p(\Omega)$. Mostre que se $L^p(A_n)$ for separável para todo n , então $L^p(\Omega)$ é separável. Use este fato para mostrar que $L^p(\mathbb{R})$ é separável para $1 \leq p < \infty$.

EXERCÍCIO 3.5. Suponha que exista uma família infinita de conjuntos de medida μ estritamente positiva em (Ω, μ) . Encontre uma família não-contável em $L^\infty_\mu(\Omega)$ cujas distâncias entre dois quaisquer de seus elementos é maior ou igual a 1. Conclua que $L^\infty_\mu(\Omega)$ não é separável. Aplique para $L^\infty[a, b]$.

3.2 Operadores Lineares

Definição 3.10. Um *operador linear* entre os espaços vetoriais X e Y é uma aplicação $T : \text{dom } T \subset X \rightarrow Y$, em que seu domínio $\text{dom } T$ é um subespaço vetorial e $T(\xi + \alpha\eta) = T(\xi) + \alpha T(\eta)$, para todos $\xi, \eta \in \text{dom } T$ e todo escalar $\alpha \in \mathbb{F}$.

Note que $T(0) = 0$ para todo operador linear T , e que o conjunto dos operadores lineares com o mesmo domínio e contra-domínio é um espaço vetorial com as operações pontuais; muitas vezes $T(\xi)$ também será denotado por $T\xi$. Exemplos simples de operadores lineares são o *operador identidade* $\mathbf{1} : X \rightarrow X$, com $\mathbf{1}(\xi) = \xi$, e o *operador nulo* $T\xi = 0$, para todo ξ . Além destes exemplos e dos que seguem, muitos outros surgirão no texto.

Exemplo 3.11. Seja $\phi \in L^\infty_\mu(\Omega)$, com μ sendo σ -finita. Então o operador de multiplicação por ϕ , definido por $\mathcal{M}_\phi : L^p_\mu(\Omega) \rightarrow L^p_\mu(\Omega)$,

$$(\mathcal{M}_\phi\psi)(t) := \phi(t)\psi(t), \quad \psi \in L^p_\mu(\Omega),$$

é um operador linear para qualquer $1 \leq p \leq \infty$. Note que $(\mathcal{M}_\phi\psi) \in L^p_\mu$ para $\psi \in L^p_\mu$. •

Exemplo 3.12. Sejam X e Y espaços métricos compactos e $u : Y \rightarrow X$ contínua. Então $T_u : C(X) \rightarrow C(Y)$, $(T_u \psi)(y) = \psi(u(y))$, é um operador linear. •

EXERCÍCIO 3.6. Seja $T : \text{dom } T \subset X \rightarrow Y$ um operador linear. Verifique os seguintes itens:

- A imagem de T , $\text{img } T := T(\text{dom } T) \subset Y$, e o núcleo de T , $N(T) := \{\xi \in \text{dom } T : T\xi = 0\}$, são subespaços vetoriais.
- Se $\dim(\text{dom } T) = n < \infty$, então $\dim(\text{img } T) \leq n$.
- O operador inverso de T , $T^{-1} : \text{img } T \rightarrow \text{dom } T$, existe se, e somente se, $T\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0$ e, existindo, é um operador linear.
- Se T, S são operadores lineares invertíveis, então $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$ (supondo, logicamente, que as operações têm sentido).

Uma rica teoria é obtida quando se fundem os operadores lineares com a topologia natural gerada por normas. O próximo resultado é um exemplo disto, pois mostra que se um operador linear é contínuo em algum ponto de seu domínio, então ele é uniformemente contínuo em todo domínio.

Teorema 3.13. *Seja $T : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ um operador linear entre espaços normados. Então as seguintes proposições são equivalentes:*

- $\sup_{\|\xi\| \leq 1} \|T\xi\| < \infty$; ou seja, a imagem da bola unitária é limitada.
- Existe $C > 0$ de modo que $\|T\xi\| \leq C\|\xi\|$, para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$.
- T é uniformemente contínuo.
- T é contínuo.
- T é contínuo em zero.

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii) Seja $C = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|T\xi\|$. Se $0 \neq \xi \in \mathcal{N}_1$, então $\|T(\xi/\|\xi\|)\| \leq C$, ou seja, $\|T\xi\| \leq C\|\xi\|$, $\forall \xi \in \mathcal{N}_1$.

(ii) \Rightarrow (iii) Se $\xi, \eta \in \mathcal{N}_1$, então $\|T\xi - T\eta\| = \|T(\xi - \eta)\| \leq C\|\xi - \eta\|$.

(iii) \Rightarrow (iv) e (iv) \Rightarrow (v) são óbvios.

(v) \Rightarrow (i) Como T é contínuo em zero existe $\delta > 0$ em que $\|T\xi - T0\| = \|T\xi\| \leq 1$ se $\|\xi - 0\| = \|\xi\| \leq \delta$. Assim, se $\|\xi\| \leq 1$, vem que $\|\delta\xi\| \leq \delta$ e $\|T(\delta\xi)\| \leq 1$; portanto, $\|T\xi\| \leq 1/\delta$, e (i) vale. ■

Definição 3.14. Um operador linear contínuo é também chamado de *limitado*, e o conjunto dos operadores limitados de \mathcal{N}_1 em \mathcal{N}_2 será denotado por $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. Será também usada a notação $B(\mathcal{N})$ como abreviação de $B(\mathcal{N}, \mathcal{N})$ (note o uso distinto do termo *linear limitado* comparado ao uso em *aplicação limitada* em geral, ou seja, em que a imagem é limitada; neste último sentido toda aplicação linear (não-nula) não é limitada, verifique!).

Exemplo 3.15. O operador T_u do Exemplo 3.12 é contínuo, pois para todo $\psi \in C(X)$ tem-se

$$\|T_u \psi\|_\infty = \sup_{t \in Y} |\psi(u(t))| \leq \sup_{t \in X} |\psi(t)| = \|\psi\|_\infty,$$

e T_u é limitado pelo Teorema 3.13(u). •

EXERCÍCIO 3.7. Sejam X e Y espaços vetoriais de dimensão finita e $T : X \rightarrow Y$ um operador linear. Escolha bases em X e Y e mostre que T pode ser representado por uma matriz, e discuta como muda a matriz que representa T se outras bases forem consideradas. Discuta o análogo de tais resultados no caso em que X e/ou Y possui/possuem dimensão infinita; qual o papel da base de Schauder nesta questão?

Proposição 3.16. Se $T : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ é linear e $\dim \mathcal{N}_1 < \infty$, então T é limitado.

Demonstração. Considerando em \mathcal{N}_1 a norma $\|\xi\| = \|\xi\|_1 + \|T\xi\|_2$, segue que existe $C > 0$ de forma que $\|\xi\| \leq C\|\xi\|_1$ para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$, pois estas normas são equivalentes (Teorema 1.7). Assim, $\|T\xi\|_2 \leq \|\xi\| \leq C\|\xi\|_1$ e T é limitado. ■

Exemplo 3.17. Seja $T : \{(\xi_n) \in l^p(\mathbb{N}) : \sum_n |n^2 \xi_n|^p < \infty\} \rightarrow l^p(\mathbb{N})$, com $1 \leq p < \infty$, $T(\xi_n) = (n^2 \xi_n)$; este operador é linear, mas não é contínuo, pois se $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ é a base canônica de $l^p(\mathbb{N})$, então $e_n/n \rightarrow 0$, enquanto $T e_n$ não converge a zero. Um outro argumento: T não é limitado pois $\|e_n\|_p = 1$ e $\|T e_n\|_p = n^2$. •

Exemplo 3.18. [Shifts] O operador deslocamento, ou *shift*, à direita (resp. esquerda) em $l^p(\mathbb{Z})$, $1 \leq p \leq \infty$, é definido por $S_d \cdot l^p(\mathbb{Z}) \rightarrow l^p(\mathbb{Z})$ (resp. S_e), $\eta = S_d \xi$ (resp. $\eta = S_e \xi$), com $\eta_j = \xi_{j-1}$ (resp. $\eta_j = \xi_{j+1}$), $j \in \mathbb{Z}$. Note que o operador shift em $l^p(\mathbb{Z})$ é uma isometria bijetora

e, portanto, limitado. Definem-se também os shifts em $l^p(\mathbb{N})$ de forma análoga, mas se $\eta = S_d \xi$ define-se $\eta_1 = 0$; estes também são limitados, mas S_d em $l^p(\mathbb{N})$ não é sobrejetor, embora seja isométrico. •

EXERCÍCIO 3.8. Use bases de Hamel (veja as Notas para comentário sobre a existência dessas bases) para mostrar que se todo operador linear $T : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ for contínuo, então $\dim \mathcal{N} < \infty$.

Notas

Todo espaço vetorial admite uma base de Hamel (veja a Proposição 10.9); demonstra-se isto com o auxílio do Lema de Zorn, o qual será discutido em Capítulos sobre o Teorema de Hahn-Banach. Em 1973 Per Enflo (Acta Math. 130, 309-317) apresentou um exemplo de espaço de Banach separável que não possui base de Schauder; veja também os trabalhos de A. M. Davie, Bull. London Math. Soc. 5, (1973) 261-266 e J. Approx. Theory 13, (1975) 392-394, para simplificações técnicas, e P. R. Halmos, Amer. Math. Monthly 85, (1978) 256-257 em que o problema é destacado. Nas Notas do Capítulo 25 aparecem outros detalhes sobre a construção de Enflo.

As condições para que $L^p_\mu(\Omega)$ seja separável dependem tanto de propriedades de Ω quanto da medida μ ; por exemplo, basta que μ seja σ -finita e tenha base contável.

Os operadores lineares têm sido amplamente estudados, pois além de uma teoria bastante desenvolvida, são importantes em aplicações a diversas áreas da ciência. Para citar apenas alguns exemplos: oscilações, difusão, Teoria Ergódica, Mecânica Quântica, Eletromagnetismo, estudos de bifurcações, etc. Uma das técnicas mais utilizadas em Análise e aplicações é a aproximação de operadores gerais por lineares.

Um operador linear é a generalização de matriz em espaços de dimensão infinita. Esta idéia surgiu claramente quando Volterra, baseando-se na construção da integral no Cálculo, usou discretizações para encontrar soluções aproximadas de uma equação integral, resultando num sistema linear de equações (finito). A solução do problema original seria obtida no limite de um número infinito de variáveis.

A Álgebra Linear foi desenvolvida no século XIX na ordem lógica reversa do que é apresentada em textos atualmente, ou seja, surgiu via equações lineares, determinantes, matrizes e, finalmente, espaços vetoriais (de dimensão finita); isto é natural, pois em geral parte-se de um problema particular para a formulação abstrata futura. Seria esperado que tal desenvolvimento desse indicações preciosas sobre os problemas em Análise Funcional, contudo, a própria Álgebra Linear teve pouca influência sobre a ordem em que a Análise Funcional se desenvolveu, não otimizando o processo. Entende-se isto ao se notar que até os primeiros anos do século XX, os espaços vetoriais sempre eram associados a alguma base fixa e, consequentemente, os operadores lineares apareciam sempre através de suas representações matriciais nessas bases. Resumindo, a idéia de vetor como uma n -upla foi abandonada relativamente tarde, pelo menos em termos do desenvolvimento da Análise Funcional abstrata.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 3.9. Seja A um subconjunto linearmente independente do espaço vetorial X . Mostre que A é uma base de Hamel de X se, e somente se, para todo vetor $\xi \in X$ existe $n \in \mathbf{N}$ de modo que ξ pode ser escrito na forma $\xi = \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j$, com $\xi_j \in A, \alpha_j \in \mathbf{F}, 1 \leq j \leq n$ (justificando o termo “maximal” na definição de base de Hamel).

EXERCÍCIO 3.10. Mostre que um espaço métrico é separável se, e somente se, ele tem uma base topológica contável.

EXERCÍCIO 3.11. Adapte o Exercício 3.4 para mostrar que $L^p(\mathbf{R}^n)$ é separável, para $1 \leq p < \infty$.

EXERCÍCIO 3.12. Mostre que os subespaços c e c_0 de $l^\infty(\mathbf{N})$, os quais foram definidos no Exercício 1.12, são separáveis

EXERCÍCIO 3.13. Mostre que um subconjunto de um conjunto separável (num espaço métrico) também é separável, e que o fecho de um subconjunto separável é separável. Use estes fatos, e o Exercício 3.1, para mostrar que um subconjunto A de um espaço normado é separável se, e somente se, o fecho do subespaço gerado por A , $\overline{\text{Lin}(A)}$, é separável.

EXERCÍCIO 3.14. Encontre uma base de Schauder para $C[a, b]$.

EXERCÍCIO 3.15. Mostre que para um operador $S: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ ser contínuo basta satisfazer $S(\xi + \eta) = S(\xi) + S(\eta), \forall \xi, \eta \in \mathcal{N}_1$, e ser contínuo em algum ponto de \mathcal{N}_1 .

EXERCÍCIO 3.16. Seja P_N o espaço normado dos polinômios $p: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ de grau menor ou igual a N , com a norma da convergência uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Seja $D: P_N \rightarrow P_N$ o operador derivada $(Dp)(t) = p'(t)$. Mostre que D é limitado. Escolha uma base de P_N e encontre a matriz que representa D (considerando a função nula um polinômio).

EXERCÍCIO 3.17. Sejam X e Y espaços vetoriais de dimensão finita. Se $\xi \in X$ é tal que $T\xi = 0$ para todo operador linear $T: X \rightarrow Y$, pode-se concluir que $\xi = 0$? Note que esta questão é equivalente a: dados $\xi, \eta \in X, \xi \neq \eta$, existe $T: X \rightarrow Y$ linear com $T\xi \neq T\eta$?

EXERCÍCIO 3.18. Sejam X e Y espaços métricos compactos, $u: Y \rightarrow X$ uma aplicação contínua, e considere o operador linear limitado $T_u: C(X) \rightarrow C(Y)$, $(T_u\psi)(y) = \psi(u(y))$ (veja o Exemplo 3.15). Mostre que:

- T_u é uma isometria se, e somente se, u é sobrejetora.
- T_u é sobrejetor se, e somente se, u é injetora.

Capítulo 4

Operadores Limitados e Espaço Dual

Neste Capítulo introduz-se uma norma em $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, apresentam-se alguns exemplos, e é definido o espaço dual de um espaço normado. Comenta-se o que é um espaço reflexivo, embora a definição precisa apareça somente no Capítulo 12

Note que $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um espaço vetorial com operações pontuais, e decorre que

$$\|T\| := \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{N}_1 \\ \|\xi\| \leq 1}} \|T\xi\|$$

é uma norma em $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. De fato, se $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, então $\|T\| = 0$ se, e somente se, $T\xi = 0$, para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$, ou seja, $T = 0$; a propriedade $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$ é imediata: se $S \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, então

$$\|T + S\| = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|T\xi + S\xi\| \leq \sup_{\|\xi\| \leq 1} (\|T\xi\| + \|S\xi\|) \leq \|T\| + \|S\|.$$

Se não for fornecida explicitamente uma topologia em $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, é suposto que se trata da topologia induzida por esta norma.

EXERCÍCIO 4.1. a) Se $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, verifique que

$$\|T\| = \inf_{\xi \in \mathcal{N}_1} \{C > 0 : \|T\xi\| \leq C\|\xi\|\} = \sup_{\|\xi\|=1} \|T\xi\| = \sup_{\xi \neq 0} \frac{\|T\xi\|}{\|\xi\|}.$$

b) Se T e S são operadores lineares limitados e TS (a composição, mas geralmente chamada de produto de operadores) está definida, mostre que TS é limitado e $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$. Portanto, se T^n (n -ésimo iterado de T) está definido, então $\|T^n\| \leq \|T\|^n$.

Exemplo 4.1. O operador nulo é o único operador cuja norma é zero, e para o operador identidade tem-se $\|1\|=1$ (supondo que $\mathcal{N} \neq \{0\}$). •

Exemplo 4.2. Sejam $\text{dom } D$ o espaço vetorial dos polinômios em $C[0, 1]$ e $D : \text{dom } D \rightarrow C[0, 1]$ o operador derivada $(Dp)(t) = p'(t)$, $p \in \text{dom } D$. Este operador linear não é limitado, pois denotando por $p_n(t) = t^n$, para todo $n \geq 1$, vem que $(Dp_n)(t) = nt^{n-1}$, $\|p_n\|_\infty = 1$, enquanto $\|Dp_n\|_\infty = n$. •

Exemplo 4.3. O operador \mathcal{M}_ϕ , com $\phi \in L_\mu^\infty(\Omega)$ (veja o Exemplo 3.11) é limitado em $L_\mu^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, e $\|\mathcal{M}_\phi\| = \|\phi\|_\infty (= \text{sup ess } |\phi|)$. •

Demonstração. Será suposto que $\|\phi\|_\infty \neq 0$ e demonstrado para $1 \leq p < \infty$. Os casos $p = \infty$ e $\|\phi\|_\infty = 0$ ficam como exercícios. Se $\|\psi\|_p = 1$, segue de

$$\|\mathcal{M}_\phi \psi\|_p^p = \int_\Omega |\phi(t)|^p |\psi(t)|^p d\mu(t) \leq \|\phi\|_\infty^p \|\psi\|_p^p,$$

que \mathcal{M}_ϕ é limitado e $\|\mathcal{M}_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$.

Seja $0 < \theta < \|\phi\|_\infty$; então existe um conjunto mensurável A , com $0 < \mu(A) < \infty$ (lembre-se que μ é σ -finita) de forma que $\|\phi\|_\infty \geq |\phi(t)| > \theta$, para todo $t \in A$. Assim, χ_A , a função característica de A , pertence a $L_\mu^p(\Omega)$ e

$$\|\mathcal{M}_\phi \chi_A\|_p^p = \int_A |\phi(t)|^p |\chi_A(t)|^p d\mu(t) \geq \theta^p \|\chi_A\|_p^p,$$

seguinto que $\|\mathcal{M}_\phi\| \geq \theta$ e, portanto, $\|\mathcal{M}_\phi\| = \|\phi\|_\infty$. ■

Exemplo 4.4. Seja $K : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \times (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{F}$ mensurável (espaço σ -finito) e suponha que exista $C > 0$ com

$$\int_\Omega |K(x, y)| d\mu(x) \leq C, \quad \text{para } y \mu\text{-qtp.}$$

Então, $T_K : L^1_\mu(\Omega) \leftrightarrow$ dado por

$$(T_K\psi)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)\psi(y)d\mu(y), \quad \psi \in L^1_\mu(\Omega),$$

é limitado e $\|T_K\| \leq C$. •

Demonstração. Para $\psi \in L^1_\mu(\Omega)$ tem-se que

$$|(T_K\psi)(x)| \leq \int_{\Omega} |K(x, y)\psi(y)|d\mu(y);$$

assim,

$$\|T_K\psi\|_1 = \int_{\Omega} |(T_K\psi)(x)|d\mu(x) \leq \iint |K(x, y)| |\psi(y)|d\mu(y)d\mu(x).$$

Usando o teorema de Fubini obtém-se

$$\|T_K\psi\|_1 \leq \iint_{\Omega \times \Omega} |K(x, y)|d\mu(x) |\psi(y)|d\mu(y) \leq C\|\psi\|_1.$$

Disto segue que $\|T_K\| \leq C$. ■

EXERCÍCIO 4.2. Sejam $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a base usual de $l^2(\mathbb{N})$ e $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em \mathbb{F} . Mostre que existe um operador limitado $T : l^2(\mathbb{N}) \leftrightarrow$ com $Te_n = \alpha_n e_n$ se, e somente se, $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência limitada. Verifique que, neste caso, $\|T\| = \sup_n |\alpha_n|$.

EXERCÍCIO 4.3. Seja $C^1(0, 1)$ o conjunto das funções reais continuamente diferenciáveis em $(0, 1)$, como subespaço de $L^2(0, 1)$ (ou seja, use a norma de L^2). Aplique o operador derivada $(D\psi)(t) = \psi'(t)$, $D : C^1(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$, às funções $\psi_n(t) = \text{sen}(n\pi t)$ e conclua que D não é limitado.

EXERCÍCIO 4.4. Mostre que o operador derivada $D : C^\infty[a, b] \leftrightarrow$ não é limitado para qualquer norma em $C^\infty[a, b]$.

O próximo resultado responde, de forma simples, uma questão importante. Sob quais condições $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um espaço de Banach? (Veja também a Proposição 12.6.)

Teorema 4.5. *Se \mathcal{N} é um espaço normado e \mathcal{B} um espaço de Banach, então $B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ é Banach.*

Demonstração. Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$. Como para cada $\xi \in \mathcal{N}$ tem-se $\|T_n \xi - T_k \xi\| \leq \|T_n - T_k\| \|\xi\|$, segue que $(T_n \xi)$ é Cauchy em \mathcal{B} e converge a $\eta \in \mathcal{B}$. Defina $T : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{B}$ por $T\xi = \eta$, o qual é claramente linear. Será mostrado que este operador é limitado e $T_n \rightarrow T$ em $B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon)$ de maneira que, se $n, k \geq N(\varepsilon)$, então $\|T_n - T_k\| < \varepsilon$. Pela continuidade da norma segue que

$$\|T_n \xi - T \xi\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T_n \xi - T_k \xi\| \leq \varepsilon \|\xi\|, \quad n \geq N(\varepsilon),$$

e $(T_n - T) \in B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ com $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$. Como $B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ é um espaço vetorial, e $T = T_n + (T - T_n)$, segue que $T \in B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$. A desigualdade $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq N(\varepsilon)$ mostra que $T_n \rightarrow T$ em $B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ e, portanto, $B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ é completo. ■

EXERCÍCIO 4.5. Suponha que $T_n \rightarrow T$ em $B(\mathcal{N})$ e $\xi_n \rightarrow \xi$ em \mathcal{N} . Mostre que $T_n \xi_n \rightarrow T\xi$.

EXERCÍCIO 4.6. Seja $T \in B(\mathcal{B})$. Mostre que, para todo $t \in \mathbb{F}$, o operador e^{tT} definido pela série

$$e^{tT} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tT)^j}{j!}$$

pertence a $B(\mathcal{B})$ e $\|e^{tT}\| \leq e^{|t| \|T\|}$.

EXERCÍCIO 4.7. Seja $T \in B(\mathcal{B})$, com $\|T\| < 1$. Mostre que o operador definido pela série $S = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$ pertence a $B(\mathcal{B})$ e que $S = (1 - T)^{-1}$.

Funções uniformemente contínuas em espaços métricos podem ser estendidas continuamente ao fecho de seu domínio; no caso de operadores lineares há um resultado análogo, o que é uma consequência da continuidade uniforme dos operadores limitados (Teorema 3.13).

Definição 4.6. Sejam $f : X \rightarrow Z$ e $g : Y \rightarrow Z$ aplicações entre conjuntos. f é uma *extensão* de g , ou g é uma *restrição* de f , se $Y \subset X$ e para todo $t \in Y$ tem-se $f(t) = g(t)$. Denota-se $f|_Y = g$.

Teorema 4.7. *Seja $T : \text{dom } T \subset \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{B}$, com $\text{dom } T$ denso em \mathcal{N} , um operador linear limitado. Então T possui uma única extensão $\bar{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{B})$. Além disso $\|\bar{T}\| = \|T\|$.*

Demonstração. Sejam $\xi \in \mathcal{N}$ e $\xi_n \rightarrow \xi$, com $(\xi_n) \subset \text{dom } T$. Como $\|T\xi_n - T\xi_m\| \leq \|T\| \|\xi_n - \xi_m\|$ vem que $(T\xi_n)$ é uma seqüência de Cauchy em \mathcal{B} , logo convergente. Define

$$\eta = \bar{T}\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} T\xi_n.$$

Deve-se mostrar que \bar{T} está bem-definido e que $\|\bar{T}\| = \|T\|$. Se $\xi'_n \rightarrow \xi$, $(\xi'_n) \subset \text{dom } T$, então a seqüência $\xi_1, \xi'_1, \xi_2, \xi'_2, \dots \rightarrow \xi$ e, pelo mesmo argumento usado acima, $T\xi_1, T\xi'_1, T\xi_2, T\xi'_2, \dots$, converge a η' . Como $(T\xi_n)$ é subsequência dessa última, tem-se que $\eta = \eta'$, e $\bar{T} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{B}$ está bem-definido. \bar{T} é evidentemente linear e uma extensão de T , pois se $\xi \in \text{dom } T$ considere a seqüência constante ξ, ξ, \dots , e $\bar{T}\xi = \lim T\xi = T\xi$.

Agora, para $\xi \in \mathcal{N}$, usando a continuidade da norma,

$$\|\bar{T}\xi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\xi_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\| \|\xi_n\| = \|T\| \|\xi\|,$$

de forma que $\|\bar{T}\| \leq \|T\|$. Por outro lado,

$$\|T\| = \sup_{\substack{\xi \in \text{dom } T \\ \|\xi\|=1}} \|T\xi\| \leq \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{N} \\ \|\xi\|=1}} \|\bar{T}\xi\| = \|\bar{T}\|.$$

Portanto, $\|\bar{T}\| = \|T\|$. Suponha que $S \in \mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ é uma extensão de T e seja $\xi \in \mathcal{N}$; então para toda seqüência $(\xi_n) \subset \text{dom } T$, $\xi_n \rightarrow \xi$, tem-se $\bar{T}\xi_n = S\xi_n$ e, por continuidade, $\bar{T}\xi = S\xi$. Portanto $S = \bar{T}$ e a extensão é única. ■

EXERCÍCIO 4.8. *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{B})$. Mostre que T possui uma única extensão $\tilde{T} \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{N}}, \mathcal{B})$, sendo $\tilde{\mathcal{N}}$ o completamento de \mathcal{N} , e $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ (veja também o Exercício 2.9).*

Definição 4.8. *Se \mathcal{N} é um espaço normado, então o espaço de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathbb{F})$ será denotado por \mathcal{N}^* e chamado de *espaço dual* (ou espaço conjugado) de \mathcal{N} . Cada elemento de \mathcal{N}^* é chamado de *funcional linear contínuo em \mathcal{N}* (Por que \mathcal{N}^* é completo?).*

Exemplo 4.9. A integral sobre $C[a, b]$ é um elemento do dual de $C[a, b]$, já que $\psi \mapsto \int_a^b \psi(t) dt$ é linear e contínuo. De fato, toda medida (complexa) boreliana finita μ em $[a, b]$ define um elemento do dual de $C[a, b]$ através da integral $\psi \mapsto \int_a^b \psi(t) d\mu(t)$: $\left| \int_a^b \psi(t) d\mu(t) \right| \leq \|\psi\|_\infty |\mu|([a, b])$. •

Exemplo 4.10. [Funcional Não-Limitado] Considere o funcional linear

$$f : C[-1, 1] \subset L^1[-1, 1] \rightarrow \mathbb{F}, \quad f(\psi) = \psi(0).$$

Escolha uma função $\psi \in C[-1, 1]$ com $\psi(-1) = \psi(1) = 0$ e $\psi(0) \neq 0$. Para cada $n \geq 2$, defina $\psi_n(t) = \psi(nt)$ se $|t| \leq 1/n$, e igual a zero de outra forma. Note que $\|\psi_n\|_1 = \int_{-1}^1 |\psi_n(t)| dt = \|\psi\|_1/n$, o qual converge a zero para $n \rightarrow \infty$. Contudo, $f(\psi_n) = \psi(0) \neq 0$ para todo n , e f não é contínuo. •

Exemplo 4.11. Este exemplo é interessante pela simplicidade. A norma em \mathcal{N} é um funcional não-linear. •

Exemplo 4.12. Sejam $1 < p < \infty$ e $1/p + 1/q = 1$. Cada $\phi \in L_\mu^q(\Omega)$ define um elemento do dual de $L_\mu^p(\Omega)$, pois pela desigualdade de Hölder o produto $\phi\psi \in L_\mu^1(\Omega)$, para todo $\psi \in L_\mu^p(\Omega)$, e a aplicação

$$\psi \mapsto \int_\Omega \phi\psi d\mu$$

é linear e limitada com norma $\leq \|\phi\|_q$ (novamente por Hölder). Assim, $L_\mu^q(\Omega) \subset L_\mu^p(\Omega)^*$. Encontra-se em livros de Teoria de Integração a demonstração de que $L_\mu^p(\Omega)^* = L_\mu^q(\Omega)$, para $1 < p < \infty$ e, se a medida μ é σ -finita, também vale $L_\mu^1(\Omega)^* = L_\mu^\infty(\Omega)$. •

OBSERVAÇÃO 4.13. O dual dos espaços l^p será discutido no Capítulo 13.

Note que, para $1 < p < \infty$, o segundo dual $(L_\mu^p(\Omega)^*)^* = L_\mu^q(\Omega)^* = L_\mu^p(\Omega)$; um espaço normado em que " $\mathcal{N}^{**} = \mathcal{N}$ " é chamado de espaço reflexivo; a definição precisa do que se entende por essa igualdade será apresentada no Capítulo 12. Todo espaço reflexivo é um espaço de Banach (veja observações nas Notas).

Exemplo 4.14. De forma ingênua poderia-se imaginar, com base no Exemplo 4.12, que o dual de L^∞ seria L^1 (veja as Notas deste Capítulo). A seguinte construção mostra que isto não ocorre em geral. Sejam

$f : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{F}$ o funcional linear contínuo $f(\psi) = \psi(0)$, para $\psi \in C[-1, 1]$ (verifique que $\|f\| = 1$), e $F : L^\infty[-1, 1] \rightarrow \mathbb{F}$ uma extensão de f linear contínua (tal extensão existe; veja o Capítulo 10, em particular o Corolário 10.15). Suponha que exista uma função $\phi \in L^1[-1, 1]$ de modo que $F(\psi) = \int_{-1}^1 \phi \psi dt$, para toda $\psi \in L^\infty[-1, 1]$; a seqüência de funções contínuas $\psi_n(t) = e^{-nt^2}$ satisfaz $\|\psi_n\|_\infty = 1$, $F(\psi_n) = f(\psi_n) = 1$, mas $F(\psi_n) = \int_{-1}^1 \phi \psi_n dt$ converge a zero (por convergência dominada). Portanto, não existe uma função $\phi \in L^1[-1, 1]$ representando $F \in L^\infty[-1, 1]^*$. Conclui-se que L^1 em geral não é reflexivo. •

Exemplo 4.15. Este exemplo é importante e geral, e certamente devido a tais adjetivos, de demonstração longa; assim, serão apresentadas referências para sua demonstração nas Notas.

TEOREMA DE RIESZ-MARKOV Sejam X um espaço topológico compacto de Hausdorff e $M(X)$ o conjunto das medidas complexas borelianas (finitas) sobre X com a norma $\|\mu\| = |\mu|(X)$, $\mu \in M(X)$. Então, $C(X)^* = M(X)$; mais especificamente, a aplicação $M(X) \rightarrow C(X)^*$, $\mu \mapsto G_\mu$ com

$$G_\mu(\psi) = \int_X \psi d\mu, \quad \forall \psi \in C(X),$$

é uma isometria linear sobrejetora. Destaca-se que a qualquer elemento positivo $f \in C(X)^*$ (positivo significa que se $\psi \geq 0$, então $f(\psi) \geq 0$) está associado uma única medida positiva boreliana finita μ sobre X . •

EXERCÍCIO 4.9. Mostre que se $f \in C[a, b]^*$ e $f(t^n) = 0$ para todo inteiro $n \geq 0$, então $f = 0$. O que dizer se a medida boreliana finita μ em $[a, b]$ satisfaz $\int t^n d\mu(t) = 0$, para todo $n \geq 0$?

O conceito de dual tornou-se uma ferramenta importante na teoria de Equações Diferenciais Parciais, Teoria Ergódica e em vários ramos da Física-Matemática, e será explorado com mais detalhes em Capítulos posteriores.

Notas

O conceito de dualidade em espaços vetoriais surgiu apenas por volta de 1900, mesmo assim para espaços de dimensão finita e, como já observado anteriormente, surgia sempre associado a n -uplas de números. Há o conceito de *dual algébrico* de um espaço vetorial X , denotando o conjunto dos funcionais lineares sobre X (sem topologia). Contudo, em espaços normados de dimensão infinita pode-se construir

exemplos de funcionais lineares, não-nulos, que se anulam num subconjunto denso; a exigência da continuidade exclui tais patologias. Os dois duais coincidem se, e somente se, a dimensão do espaço normado for finita (veja o Exercício 4.23).

A igualdade entre espaços normados deve sempre ser interpretada como identificação via isomorfismo (aplicação linear isométrica), por exemplo, em $L^p[a, b]^* = L^q[a, b]$ (para $p, q \neq 1$); esta relação foi demonstrada por F. Riesz por volta de 1910, generalizando seus próprios resultados já obtidos para $l^2(\mathbb{N})$ e $C[a, b]$; foi o primeiro exemplo de espaços reflexivos distintos de seus duais. Contudo, Riesz não usava explicitamente o conceito de espaço dual, o qual foi introduzido formalmente por Hahn, por volta de 1925. O fato de que $L^1[a, b]^* = L^\infty[a, b]$ foi demonstrado por H. Steinhaus em 1919, para a caracterização de $L^1_\mu(\Omega)^*$ no caso geral, veja o trabalho original J. Schwartz, Proc. Amer. Math. Soc. 2, (1951) 270-275. A caracterização de $L^\infty_\mu(\Omega)^*$, com elementos representados por integrais em relação à medidas finitamente aditivas, pode ser encontrada no §20 de E. Hewitt e K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, GTM 25, Springer Verlag, Nova Iorque, 1975; outra representação desse espaço pode ser obtida a partir da Proposição 15.11 se for possível encontrar o $C(X)$ que lá aparece; notando-se que L^∞ é uma C^* -álgebra comutativa com identidade, pode-se encontrar $C(X)$ via a transformada de Gelfand [Rudin (1973)] e o importante Teorema de Gelfand-Naimark, e então usar Riesz-Markov. Para uma caracterização do segundo dual de $C(X)$, ou seja, $M(X)^*$, veja [Conway (1985)], página 79.

Todo espaço de Hilbert é reflexivo, como demonstrado no Capítulo 19.

Há algumas variantes do enunciado do Teorema de Riesz-Markov aqui apresentado; por exemplo, pode-se adaptá-lo para espaços topológicos X localmente compactos. Para a demonstração veja A. A. Castro Jr., *Curso de Teoria da Medida*, Rio de Janeiro, Projeto Euclides-CNPq, 2004, ou H. L. Royden, *Real Analysis*, Londres, Macmillan Company, 1968. No caso particular de $C[a, b]^*$ (como já comentado, o caso originalmente tratado por F. Riesz) há demonstrações específicas, por exemplo em [Kreyszig (1978)].

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 4.10. Mostre que se $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ seu núcleo $N(T)$ é um subespaço vetorial fechado. Verifique que $S : l^1(\mathbb{N}) \rightarrow (S\xi)_n = \xi_n/n$ é limitado mas $\text{img } S$ não é fechado, e que seu operador inverso $S^{-1} : \text{img } S \rightarrow l^1(\mathbb{N})$ existe e não é limitado.

EXERCÍCIO 4.11. Seja f um funcional linear sobre \mathcal{N} .

a) Mostre que $f \in \mathcal{N}^*$ se, e somente se, existe $C > 0$ com $|f(\xi)| \leq C$ para todo ξ em alguma bola $B(\eta; r)$. Generalize para operadores lineares entre espaços normados.

b) Mostre que $f \in \mathcal{N}^*$ se, e somente se, $N(f)$ é fechado (embora possa parecer, não é trivial). Isto pode não valer para operadores lineares, veja o Exercício 9.12.

EXERCÍCIO 4.12. Discuta se o núcleo do funcional $f : (l^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{F}$, definido por $f(\xi_1, \xi_2, \dots) = \sum_{j=1}^\infty \xi_j$, é fechado.

EXERCÍCIO 4.13. Se $S, T \in B(B)$, com T invertível em $B(B)$, e $\|T - S\| < 1/\|T^{-1}\|$, adapte o Exercício 4.7 para mostrar que S é invertível. Conclua que o conjunto dos operadores invertíveis em $B(B)$ é aberto.

EXERCÍCIO 4.14. Se $T \in B(B)$, use séries para definir os operadores $\operatorname{sen} T$ e $\operatorname{cos} T$ em $B(B)$.

EXERCÍCIO 4.15. Complete a demonstração no Exemplo 4.3 para o caso $p = \infty$.

EXERCÍCIO 4.16. Mostre que o operador I definido por $(I\psi)(t) = \int_a^t \psi(s) ds$, $\psi \in C[a, b]$, pertence a $B(C[a, b])$. Mostre também que este operador não possui autovalores, ou seja, que não existem $\lambda \in \mathbb{F}$ e $0 \neq \psi \in C[a, b]$ de forma que $I\psi = \lambda\psi$.

EXERCÍCIO 4.17. Seja $T : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ um operador linear (limitado ou não). Mostre que se o seu operador inverso T^{-1} existe e pertence a $B(\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_1)$, então existe $C > 0$ de forma que $\|\xi\| \leq C\|T\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$.

EXERCÍCIO 4.18. Para cada $a \in \mathbb{R}$ considere o funcional em $C[-1, 1]$ dado por

$$f_a(\psi) = \int_{-1}^1 \psi(t) dt + a\psi(0).$$

Mostre que f_a é um elemento do dual de $C[-1, 1]$ e que $\|f_a\| = 2 + |a|$.

EXERCÍCIO 4.19. Seja $\mathcal{N} = \{\psi \in C[0, 1] : \psi(0) = 0\}$. Mostre que \mathcal{N} é completo, analise para quais valores de $r > 0$ o funcional linear

$$f_r(\psi) = \int_0^1 \frac{\psi(t)}{t^r} dt, \quad \psi \in \mathcal{N},$$

pertence a \mathcal{N}^* e calcule sua norma nesses casos.

EXERCÍCIO 4.20. Seja X um subespaço vetorial fechado próprio de \mathcal{N} . Se para $T \in B(\mathcal{N})$ tem-se que $(1 - T)\mathcal{N} \subset X$, mostre que para cada $0 < \alpha < 1$ existe $\xi \in \mathcal{N}$ com $\|\xi\| = 1$ e $\inf_{\eta \in X} \|T\xi - T\eta\| \geq \alpha$.

EXERCÍCIO 4.21. Se $\phi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ é boreliana, mostre que $f : L^2[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(\psi) = \int_{-1}^1 \phi(t)\psi(t) dt, \quad \psi \in L^2[-1, 1],$$

é contínuo se, e somente se, $\phi \in L^2[-1, 1]$.

EXERCÍCIO 4.22. Sejam $T, S \in B(B)$. Se $TS - ST = 1$, mostre que $(S^n$ é o n -ésimo iterado de $S)$ $TS^n - S^nT = nS^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e portanto $\|S^{n-1}\| \leq 2\|T\| \|S\| \|S^{n-1}\|/n$, de forma que $S^N = 0$ para N suficientemente grande. Mostre, então, que $0 = S^N = S^{N-1} = \dots = S^0 = 1$. Desta contradição, conclua que não existem operadores contínuos T, S satisfazendo $TS - ST = 1$ (este resultado é importante em Mecânica Quântica).

EXERCÍCIO 4.23. Mostre que se $\dim \mathcal{N} < \infty$, então \mathcal{N}^* coincide com o dual algébrico de \mathcal{N} (veja as Notas para a definição). Se $\dim \mathcal{N} = \infty$, construa um funcional linear em \mathcal{N} que não é limitado.

EXERCÍCIO 4.24. Seja $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional contínuo com a propriedade

$$\psi(\xi + \eta) = \psi(\xi) + \psi(\eta),$$

para todos $\xi, \eta \in \mathcal{N}$. Mostre que $\psi(\alpha\xi) = \alpha\psi(\xi)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Capítulo 5

Ponto Fixo de Banach

O Teorema do Ponto Fixo de Banach é um resultado sobre espaços métricos com muitas aplicações, particularmente para se demonstrar a existência de soluções de equações diferenciais e integrais. Muitas aplicações ocorrem em espaços normados e não se restringem às transformações lineares. Provavelmente o(a) leitor(a) já tenha se deparado com esse teorema e algumas de suas aplicações, mas devido à sua simplicidade e importância, vale a pena reconsiderá-lo.

Definição 5.1. Seja M um conjunto. Um *ponto fixo* de uma aplicação $A : M \rightarrow M$ é um elemento $\xi \in M$ satisfazendo $A(\xi) = \xi$.

Muitos problemas em Matemática se reduzem a encontrar pontos fixos de alguma aplicação. Assim, torna-se importante dar condições que garantam a existência de pontos fixos. Um caso simples é que toda aplicação contínua $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ possui pelo menos um ponto fixo; isto segue do Teorema do Valor Intermediário ou, de forma um pouco mais sofisticada, porque os intervalos são os conjuntos conexos em \mathbb{R} . Para verificar esse resultado considere a função contínua $\phi(t) = \psi(t) - t$; se $\psi(0) = 0$ ou $\psi(1) = 1$ o resultado é imediato, assim, suponha que essas condições não ocorram. Então, $\phi(0) > 0$ e $\phi(1) < 0$, e existe $t_f \in (0, 1)$ com $\phi(t_f) = 0$, ou seja, $\psi(t_f) = t_f$ e fica demonstrado que ψ possui um ponto fixo.

EXERCÍCIO 5.1. Encontre os pontos fixos das aplicações $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(t) = t^3$ e $T : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $(T\psi)(t) = \psi'(t)$.

Exemplo 5.2. A busca de soluções diferenciáveis ψ em $[t_0 - a, t_0 + a]$ ($a > 0$) da equação diferencial em \mathbb{R} , $\psi'(t) = F(t, \psi(t))$, com a condição inicial $\psi(t_0) = \psi_0$, sendo F continuamente diferenciável numa vizinhança de (t_0, ψ_0) , se reduz, via o Teorema Fundamental do Cálculo, a encontrar todos os pontos fixos do seguinte operador $\Phi : C[t_0 - a, t_0 + a] \leftarrow$

$$(\Phi\psi)(t) = \psi_0 + \int_{t_0}^t F(s, \psi(s)) ds, \quad t \in [t_0 - a, t_0 + a].$$

Isto será discutido mais adiante. •

Dada uma aplicação A de um espaço métrico (X, d) nele mesmo, uma tentativa para se obter pontos fixos é partir de um ponto qualquer $\xi_0 \in X$ e aplicar A , sucessivamente, obtendo-se $\xi_1 = A(\xi_0)$, $\xi_2 = A(\xi_1)$, \dots , $\xi_n = A(\xi_{n-1})$ e, tomar o limite $n \rightarrow \infty$. Se essa sequência ξ_n converge a algum ζ e A é contínua, então realmente obtém-se um ponto fixo, pois

$$\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A(\xi_{n-1}) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n-1}) = A(\zeta).$$

Esta idéia é chamada de método das *aproximações sucessivas*. No caso de espaços métricos completos, uma condição que garante a convergência desses iterados aparece na

Definição 5.3. Sejam (X, d) e (Y, D) espaços métricos. Uma aplicação $A : X \rightarrow Y$ é uma *contração* se existe uma constante $0 \leq \alpha < 1$ de modo que, para todos $\xi, \eta \in X$, $D(A(\xi), A(\eta)) \leq \alpha d(\xi, \eta)$.

EXERCÍCIO 5.2. Constatare que toda contração entre espaços métricos é uniformemente contínua.

EXERCÍCIO 5.3. Seja $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável de forma que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $|\psi'(t)| \leq \alpha < 1$. Mostre que ψ é uma contração. Generalize para aplicações de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n .

Teorema 5.4 (Ponto Fixo de Banach). *Seja R um subconjunto fechado do espaço métrico completo (X, d) . Se a aplicação $A : R \rightarrow R$ é uma contração, então A possui um, e somente um, ponto fixo em R .*

Demonstração. Se ζ_1 e ζ_2 são pontos fixos de A em R , então

$$d(\zeta_1, \zeta_2) = d(A(\zeta_1), A(\zeta_2)) \leq \alpha d(\zeta_1, \zeta_2),$$

ou seja, $(1 - \alpha)d(\zeta_1, \zeta_2) \leq 0$; como $\alpha < 1$ segue que $d(\zeta_1, \zeta_2) = 0$ e a contração A não possui pontos fixos distintos em R .

Para mostrar que existe um ponto fixo basta mostrar que, dado $\xi \in R$, a sequência $(\xi_n = A^n(\xi))_{n=0}^{\infty}$ ($A^0(\xi) = \xi$) é de Cauchy, já que toda contração é contínua. Usando indução obtém-se $d(\xi_1, \xi_2) \leq \alpha d(\xi, \xi_1)$, $d(\xi_2, \xi_3) \leq \alpha d(\xi_1, \xi_2) \leq \alpha^2 d(\xi, \xi_1)$ e, de forma geral, $d(\xi_n, \xi_{n+1}) \leq \alpha^n d(\xi, \xi_1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Assim, para todos $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(\xi_n, \xi_{n+m}) &\leq d(\xi_n, \xi_{n+1}) + d(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}) + \cdots + d(\xi_{n+m-1}, \xi_{n+m}) \\ &\leq \alpha^n (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-1}) d(\xi, \xi_1) \\ &< \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(\xi, \xi_1). \end{aligned}$$

Como $\alpha^n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$, segue que (ξ_n) é sequência de Cauchy em R , e A possui um ponto fixo na região fechada R . ■

O próximo resultado é uma consequência da demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Corolário 5.5. Usando a notação do Teorema 5.4, com $A : R \rightarrow R$ uma contração, então para qualquer $\xi \in R$ a sequência $(\xi_n = A^n(\xi))_{n=0}^{\infty}$ converge ao único ponto fixo ζ de A e com erro (e “velocidade de convergência”) no n -ésimo iterado estimado por

$$d(\xi_n, \zeta) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(\xi, \xi_1).$$

Demonstração. Basta tomar $m \rightarrow \infty$ na expressão

$$d(\xi_n, \xi_{n+m}) < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(\xi, \xi_1)$$

e usar a continuidade da métrica. ■

Exemplo 5.6. A aplicação $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(t) = 2t$, não é uma contração em qualquer aberto da reta, mas possui um único ponto fixo. •

Exemplo 5.7. Permitindo-se $\alpha = 1$ não se tem, em geral, existência nem unicidade de pontos fixos. Considere, na reta real, a aplicação identidade (com infinitos pontos fixos) e a translação $T\xi = \xi + 1$ (a qual não possui pontos fixos). •

Exemplo 5.8. A uniformidade na contração, caracterizada por $0 \leq \alpha < 1$, pode ser essencial para a existência de ponto fixo. Isto é bem exemplificado por $\psi, \phi : [1, \infty) \leftarrow$, $\psi(t) = t + 1/t$, $\phi(t) = t + e^{-t}$, que satisfazem $|\psi(t) - \psi(s)| < |t - s|$, $|\phi(t) - \phi(s)| < |t - s|$, para todos $t, s \in [1, \infty)$, $t \neq s$, mas não possuem pontos fixos. •

Corolário 5.9. *Sejam R um conjunto fechado do espaço métrico completo (X, d) e $A : R \rightarrow R$. Se existe $m \in \mathbb{N}$ de maneira que $A^m : R \rightarrow R$ é uma contração, então A possui um, e somente um, ponto fixo em R . Além disso, para todo $\xi \in R$ a sequência $(A^n(\xi))_{n=0}^{\infty}$ converge a esse ponto fixo.*

Demonstração. Denote $\Phi := A^m$, o qual possui um único ponto fixo $\zeta \in R$, pois é uma contração. Como todo ponto fixo de A é ponto fixo de Φ , apenas ζ pode ser ponto fixo de A em R . Usando que A e Φ comutam entre si, vem que

$$\Phi(A(\zeta)) = A(\Phi(\zeta)) = A(\zeta),$$

ou seja, $A(\zeta)$ é um ponto fixo de Φ ; por unicidade $A(\zeta) = \zeta$, e ζ é o único ponto fixo de A em R .

Dado $\xi \in R$, para mostrar que $A^n(\xi)$ converge a ζ quando $n \rightarrow \infty$, sejam $M = \max_{0 \leq k \leq m-1} d(A^k(\xi), \zeta)$ e $0 \leq \alpha < 1$ de maneira que $d(\Phi(\omega), \Phi(\eta)) \leq \alpha d(\omega, \eta)$, para todos $\omega, \eta \in R$. Cada $n \in \mathbb{N}$ pode ser escrito de forma única $n = jm + k$, com $j \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k < m$. Assim,

$$d(A^n(\xi), \zeta) = d(\Phi^j(A^k(\xi)), \Phi^j(\zeta)) \leq \alpha^j d(A^k(\xi), \zeta) \leq \alpha^j M.$$

Quando $n \rightarrow \infty$ tem-se que $j \rightarrow \infty$ e $d(A^n(\xi), \zeta) \rightarrow 0$. ■

EXERCÍCIO 5.4. Sejam $S, T : M \leftarrow$. Discuta a relação entre os pontos fixos de S e T se eles comutam, ou seja, $TS = ST$.

Exemplo 5.10. Seja $\psi : [-1, 1] \leftarrow$, $\psi(t) = 1 - 2t^2$. A aplicação $\phi = \psi \circ \psi$ possui pontos fixos que não ocorrem para ψ . Esses “novos” pontos fixos são “órbitas de período dois de ψ ”. •

Agora serão discutidas três aplicações padrões do Teorema do Ponto Fixo de Banach: equações integrais de Fredholm, equações afins em espaços de Banach e equações diferenciais ordinárias em \mathbb{R} . Geralmente, a dificuldade em aplicar esse teorema é encontrar espaços ou normas em que o operador de interesse seja uma contração.

Exemplo 5.11. Seja $K : Q \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua dada na região $Q = [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}$ que satisfaz a condição de Lipschitz

$$|K(t, s, u) - K(t, s, v)| \leq L|u - v|, \quad (t, s, u), (t, s, v) \in Q,$$

sendo $L > 0$. Se $\varphi \in C[a, b]$, a equação integral não-linear de Fredholm

$$\psi(t) = \int_a^b K(t, s, \psi(s)) ds + \varphi(t), \quad t \in [a, b],$$

possui uma única solução $\psi \in C[a, b]$ se $L(b-a) < 1$. •

Demonstração. Basta verificar que sob tais condições o operador

$$S : C[a, b] \leftrightarrow, \quad (S\psi)(t) = \int_a^b K(t, s, \psi(s)) ds + \varphi(t),$$

é uma contração em $C[a, b]$. Se $\psi, \phi \in C[a, b]$, para todo $a \leq t \leq b$

$$\begin{aligned} |(S\psi)(t) - (S\phi)(t)| &\leq \int_a^b |K(t, s, \psi(s)) - K(t, s, \phi(s))| ds \\ &\leq L \int_a^b |\psi(s) - \phi(s)| ds \\ &\leq L(b-a) \|\psi - \phi\|_\infty, \end{aligned}$$

de forma que $\|S\psi - S\phi\|_\infty \leq L(b-a)\|\psi - \phi\|_\infty$, mostrando que S é uma contração se $L(b-a) < 1$. ■

Se na equação integral de Fredholm $K(t, s, u) = \lambda \kappa(t, s)u$, $\lambda \in \mathbb{R}$, obtém-se a equação integral linear de Fredholm

$$\psi(t) = \lambda \int_a^b \kappa(t, s)\psi(s) ds + \varphi(t), \quad t \in [a, b].$$

EXERCÍCIO 5.5. Mostre que se $((b-a)|\lambda| \sup_{t,s \in [a,b]} |\kappa(t, s)|) < 1$, então a equação integral linear de Fredholm possui uma única solução em $C[a, b]$.

Exemplo 5.12. Seja $T \in B(\mathcal{B})$. Se $\|T\| < 1$ então, dado $\eta \in \mathcal{B}$, a equação $\xi - T\xi = \eta$ possui uma única solução. De fato, definindo o operador $S : \mathcal{B} \leftrightarrow$, $S\xi = T\xi + \eta$ tem-se que

$$\|S\xi - S\omega\| \leq \|T\| \|\xi - \omega\|,$$

para todos $\xi, \omega \in \mathcal{B}$, o qual é uma contração cujo único ponto fixo ζ é a solução procurada. •

EXERCÍCIO 5.6. Mostre que no Exemplo 5.12 tem-se $\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} T^j \eta$.

Exemplo 5.13. [Teorema de Picard] Dada a função $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $U = [t_0 - b, t_0 + b] \times \overline{B}(\psi_0; r) \subset \mathbb{R}^2$, $r, b > 0$, e satisfazendo a condição de Lipschitz

$$|F(t, \xi) - F(t, \eta)| \leq L|\xi - \eta|, \quad L > 0,$$

para $(t, \xi), (t, \eta) \in U$, denote por $M = \max_{(t, \xi) \in U} |F(t, \xi)|$. O Problema de Cauchy

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = F(t, \psi(t)), \quad \psi(t_0) = \psi_0 \in \mathbb{R},$$

possui uma solução única diferenciável $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$, sendo o intervalo $I = [t_0 - a, t_0 + a]$ com $0 < a < \min(r/M, 1/L, b)$. •

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \{\psi \in C(I) : |\psi(t) - \psi_0| \leq r, \text{ para todo } t \in I\}$ com a norma $\|\psi\| = \max_{t \in I} |\psi(t)|$. \mathcal{B} é completo pois é um subconjunto fechado de $C(I)$. Como já observado anteriormente (Exemplo 5.2), pelo Teorema Fundamental do Cálculo uma forma de mostrar que este Problema de Cauchy possui solução, e é única, é mostrar que o operador Φ dado por

$$(\Phi\psi)(t) = \psi_0 + \int_{t_0}^t F(s, \psi(s)) ds, \quad t \in I,$$

é uma contração. Será deixado a cargo dos leitores verificar que como $a \leq r/M$ tem-se que $\Phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$.

Para $\psi, \phi \in \mathcal{B}$ tem-se

$$\begin{aligned} |(\Phi\psi)(t) - (\Phi\phi)(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |F(s, \psi(s)) - F(s, \phi(s))| ds \right| \\ &\leq |t - t_0| \sup_{s \in I} |F(s, \psi(s)) - F(s, \phi(s))| \\ &\leq aL \sup_{s \in I} |\psi(s) - \phi(s)|, \end{aligned}$$

de forma que $\|(\Phi\psi) - (\Phi\phi)\| \leq aL\|\psi - \phi\|$ e, como $a < 1/L$, segue que Φ é contração. ■

EXERCÍCIO 5.7. Mostre que, se além de F ser contínua, a derivada parcial $\partial F(t, \xi)/\partial \xi$ é contínua em U do Exemplo 5.13, então F satisfaz a condição de Lipschitz.

EXERCÍCIO 5.8. Mostre que a função real $t \mapsto \sqrt{|t|}$, embora contínua, não satisfaz a condição de Lipschitz em qualquer vizinhança da origem.

EXERCÍCIO 5.9. A função $t \mapsto t^k$ é Lipschitz em \mathbb{R} para $k \in \mathbb{N}$?

Notas

A demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach é construtiva, fornecendo aproximações para o ponto fixo e uma estimativa superior para o erro cometido a cada iteração. Aparentemente foram E. Picard e G. Peano (por volta de 1890) os primeiros a considerar sistematicamente esse método das aproximações sucessivas, mas ainda no caso particular de equações diferenciais. Em sua Tese, por volta de 1920, Banach apresentou a formulação abstrata desse método e o teorema aqui discutido; resultados relacionados foram obtidos por R. Caccioppoli na mesma época.

A demonstração do Teorema de Picard apresentada neste Capítulo aplica-se também a equações diferenciais em espaços de Banach, particularmente a equações em \mathbb{R}^n (de forma quase imediata), os chamados sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. Apenas continuidade de F garante a existência de solução do problema de Cauchy, mas não a unicidade (veja, por exemplo, J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, CNPq, Rio de Janeiro, 1979).

Usando Topologia Algébrica, fundada por Poincaré por volta de 1900. L. Brouwer mostrou em 1910 que toda aplicação contínua, de um conjunto homeomorfo à bola unitária em \mathbb{R}^n nele mesmo, possui um ponto fixo, e sem mencionar o conceito de contração. Note que isto é uma generalização de que toda aplicação contínua de $[0, 1]$ nele mesmo possui um ponto fixo. Há adaptações para espaços de Banach de dimensão infinita, por exemplo o teorema de J. Schauder de 1930 e de Tychonov em 1935. Há uma grande quantidade de trabalhos sobre teoremas de pontos fixos e algumas questões relacionadas são tópicos atuais de pesquisa.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 5.10. Seja $\mathcal{B} = C[0, 1]$ real, com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Encontre condições sobre $\varphi \in \mathcal{B}$ de forma que o operador $S : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$

$$(S\psi)(t) = \psi(t) \int_0^1 \psi(s) ds + \varphi(t), \quad \psi \in \mathcal{B},$$

possua pontos fixos e determine-os nesses casos.

EXERCÍCIO 5.11. Seja $K : Q \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $Q = \{t \in [a, b], s \in [a, t], u \in \mathbb{R}\}$, a qual satisfaz a condição de Lipschitz

$$|K(t, s, u) - K(t, s, v)| \leq L|u - v|, \quad (t, s, u), (t, s, v) \in Q,$$

com $L > 0$. Se $\varphi \in C[a, b]$, define-se a equação integral não-linear de Volterra $S\psi = \psi$, em que

$$(S\psi)(t) = \int_a^t K(t, s, \psi(s)) ds + \varphi(t), \quad t \in [a, b].$$

Use indução para mostrar que para todo n tem-se

$$|(S^n \psi)(t) - (S^n \phi)(t)| \leq \frac{L^n (t-a)^n}{n!} \|\psi - \phi\|_\infty,$$

e que para n suficientemente grande S^n é uma contração. Conclua que essa equação integral não-linear de Volterra possui uma única solução em $C[a, b]$.

EXERCÍCIO 5.12. Seja $T \in B(B)$. Se existe n com $\|T^n\| < 1$, mostre que, dado $\eta \in B$, a equação $\xi - T\xi = \eta$ possui uma única solução.

EXERCÍCIO 5.13. Mostre que o problema de Cauchy $dy/dt = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$, possui infinitas soluções diferenciáveis distintas em qualquer vizinhança da origem.

EXERCÍCIO 5.14. Mostre que $\psi(t) = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, não é uma contração, mas $\varphi = \psi \circ \psi$ é uma contração. Use isto para concluir que a equação $t + \ln t = 0$ possui uma única solução real.

EXERCÍCIO 5.15. Sejam X um espaço métrico completo e $f: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ contínua; para cada $a \in \mathbb{R}$ denote por $f_a: X \rightarrow X$ a aplicação $f_a(\xi) = f(a, \xi)$. Suponha que exista $0 < \alpha < 1$ de forma que f_a seja uma contração com constante α (como neste Capítulo) para todo $a \in \mathbb{R}$, e denote por ξ_a seu único ponto fixo. Mostre que a aplicação $a \mapsto \xi_a$ é contínua, ou seja, que o ponto fixo depende continuamente do parâmetro a .

EXERCÍCIO 5.16. Verifique que, para $a > 0$, a aplicação $\psi(t) = (t + a/t)/2$, $0 \neq t \in \mathbb{R}$, possui como pontos fixos $\pm\sqrt{a}$. Em quais regiões essa aplicação é uma contração? Compare com o Exemplo 5.8. Analise também $\varphi(t) = (t + a/t^s)/2$, $s \geq 0$.

EXERCÍCIO 5.17. Seja $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Se $r \in [a, b]$ é uma raiz simples de ψ , mostre que a sequência (t_n) obtida do método iterativo de Newton

$$t_{n+1} = t_n - \psi(t_n)/\psi'(t_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

converge a r se a condição inicial t_0 estiver suficientemente próxima dessa raiz.

EXERCÍCIO 5.18. Verifique que $T: C[0, 1/2] \rightarrow C[0, 1/2]$, $(T\psi)(t) = t(1 + \psi(t))$ possui um único ponto fixo. Encontre esse ponto fixo diretamente da equação resultante e, também, pelo método das aproximações sucessivas.

EXERCÍCIO 5.19. Sejam (X, d) um espaço métrico compacto e $A: X \rightarrow X$ de modo que, para todos $\xi, \eta \in X$, $\xi \neq \eta$, $d(A(\xi), A(\eta)) < d(\xi, \eta)$. Defina $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(\xi) = d(A(\xi), \xi)$. Mostre que f assume um valor mínimo e que esse valor é zero. Conclua, então, que A possui um único ponto fixo. Mostre, também, que para qualquer $\xi \in X$, a sequência $(A^n \xi)_{n \geq 1}$ converge a esse ponto fixo.

EXERCÍCIO 5.20. Verifique que $T_a: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$

$$(T_a \psi)(t) = \frac{3a\pi}{4} \int_0^t \psi(s) \cos(\pi s/2) ds,$$

não é uma contração se $2/3 \leq a < 4/(3\sqrt{2})$, mas T_a^2 é. Conclua que T_a possui um único ponto fixo para esses valores do parâmetro a .

Capítulo 6

Teorema de Baire

Há diferentes maneiras de se quantificar um conjunto. A primeira delas é simplesmente a cardinalidade, e certa propriedade \mathcal{P} seria *robusta* (ou seja, não é desprezível, levando em consideração esta discussão intuitiva) se vale num conjunto de grande cardinalidade. Mas essa caracterização é demasiadamente simples para aplicações importantes em Análise Funcional; isto é claro ao se considerar, por exemplo, que tanto o conjunto dos números primos, o conjunto $\{10^n : n \in \mathbb{N}\}$, bem como \mathbb{Z} , possuem a mesma cardinalidade, mas há diferenças sensíveis se uma propriedade de números inteiros valer (apenas) em cada um desses conjuntos. Uma vantagem da classificação através de cardinalidade é que ela pode ser utilizada em qualquer conjunto.

Restringindo-se somente a conceitos topológicos, um aberto, ou um conjunto com interior não-vazio, traz a idéia de algo *robusto*, bem como a noção de conjunto denso. A fusão desses dois conceitos seria um conjunto aberto e denso, algo *realmente robusto*, que excluiria *patologias* de certa propriedade; o Teorema de Baire diz que em espaços métricos completos, ou topológicos localmente compactos, a densidade é mantida após intersecções enumeráveis de abertos densos, e uma propriedade que vale num tal conjunto é chamada de *genérica*. Assim, se \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 são propriedades genéricas, então o conjunto em que ambas valem é denso; note que a densidade se estende para um conjunto em que valem um número contável de propriedades genéricas! Lembre-se que a intersecção de dois conjuntos (apenas) densos pode ser vazia.

O Teorema de Baire e algumas de suas consequências em Análise Funcional (Princípio da Limitação Uniforme, do Gráfico Fechado, etc.)

são os assuntos tratados neste e nos próximos Capítulos. (Há também a idéia de conjunto robusto via conjuntos de certa medida boreliana total, medida de Lebesgue em subconjuntos de \mathbb{F}^n , mas há casos em que estas duas noções, medida de Lebesgue total e ser genérico, não coincidem; veja o Exercício 6.13.)

Definição 6.1. Um subconjunto de um espaço topológico X é

i.) raro em X se o interior de seu fecho for vazio.

ii.) magro (ou de primeira categoria) em X se ele está contido numa união contável de conjuntos raros.

iii.) não-magro (ou de segunda categoria) em X se ele não é magro em X .

Exemplo 6.2. O conjunto dos racionais \mathbb{Q} é magro em \mathbb{R} , pois cada ponto é um conjunto raro em \mathbb{R} com a topologia usual. •

EXERCÍCIO 6.1. Quais os subconjuntos magros num espaço com a métrica discreta? Encontre um subconjunto magro e denso em \mathbb{C} .

EXERCÍCIO 6.2. Critique a seguinte frase: “ $\mathbb{C}[a, b]$ é magro em $L^\infty[a, b]$.”

Note que subconjuntos de um conjunto raro são raros, e a união de um número finito de conjuntos raros também é um conjunto raro. Contudo, um conjunto magro não é necessariamente raro; veja as equivalências que seguem, bem como a Definição 6.4.

Proposição 6.3. Se X é um espaço topológico, então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) A união enumerável de conjuntos fechados raros em X é um conjunto com interior vazio, ou seja, a união enumerável de fechados com interior vazio resulta num conjunto também com interior vazio.

b) A intersecção enumerável de conjuntos abertos densos em X é um conjunto denso em X .

c) Todo conjunto magro em X contém interior vazio.

d) O complementar de todo subconjunto magro em X é denso em X .

e) Todo conjunto não-vazio e aberto em X é não-magro em X .

Demonstração. Basta considerar os complementares dos respectivos conjuntos para concluir que a) e b) são equivalentes. c) é claramente equivalente a d) e a e). Agora, a) e d) são equivalentes pela definição de conjunto magro. ■

Definição 6.4. Um espaço topológico no qual são satisfeitas as condições na Proposição 6.3 é chamado de *espaço de Baire*. Um subconjunto de um espaço topológico é um G_δ se ele é a intersecção contável de conjuntos abertos; é um F_σ se ele é a união contável de conjuntos fechados. Um subconjunto é *genérico* ou *residual* se ele é um G_δ denso.

Portanto, num espaço de Baire X todo G_δ obtido pela intersecção contável de abertos densos também é denso, e se X é a união contável de conjuntos H_n , então o fecho de pelo menos um desses H_n tem interior não-vazio. Somente a partir de seu enunciado, dificilmente o(a) leitor(a) poderá apreciar o alcance desta ferramenta que é o Teorema de Baire; veja as aplicações apresentadas nas Proposições 6.9 e 6.11, além das Notas.

Teorema 6.5 (Teorema de Baire). *Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.*

Demonstração. Será demonstrada a condição b) da Proposição 6.3. Sejam X um espaço métrico completo e $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, com A_n aberto e denso em X para todo n . Será mostrado que A é denso em X , ou seja, se B_1 representa uma bola aberta qualquer em X , então $A \cap B_1 \neq \emptyset$.

Claramente $A_1 \cap B_1 \neq \emptyset$ e é aberto, logo esta intersecção contém o fecho $\overline{B_2}$ de uma bola aberta B_2 de raio menor do que $1/2$. Novamente, existe uma bola aberta B_3 de raio menor do que $1/3$ de modo que seu fecho $\overline{B_3}$ esteja contido em $A_2 \cap B_2$. Desta forma obtém-se uma sequência de bolas abertas B_n de raio menor do que $1/n$, satisfazendo

$$(A_1 \cap B_1) \supset \overline{B_2} \supset \overline{B_3} \supset \dots,$$

e com $\overline{B_{n+1}} \subset A_n \cap B_n$. A sequência formada pelos centros dessas bolas é de Cauchy e, como X é completo, existe um único $\xi \in X$ em que $\{\xi\} = \bigcap_{n=2}^{\infty} \overline{B_n}$; segue que $\xi \in A \cap B_1 \neq \emptyset$. ■

EXERCÍCIO 6.3. Adapte a demonstração do Teorema 6.5 para verificar que todo espaço topológico de Hausdorff localmente compacto é um espaço de Baire (lembre-se que tais espaços são regulares).

Proposição 6.6. *Se X um espaço de Baire, então todo aberto não-vazio em X e todo subconjunto genérico em X são espaços de Baire.*

Demonstração. Seja $U \subset X$ um conjunto aberto; se U não é um espaço de Baire, existe uma sequência de abertos $U_n \subset U$ densos em U cuja intersecção não é densa em U . Assim, se \bar{U} denota o fecho de U , os $V_n = U_n \cup (X \setminus \bar{U})$ são abertos densos em X cuja intersecção não é densa em X . A contradição com o fato de X ser espaço de Baire demonstra que U também é um espaço de Baire.

Considere uma sequência (A_n) de subconjuntos abertos e densos em X cuja intersecção $G = \bigcap_n A_n$ é densa em X , ou seja, G é um conjunto genérico em X . Se (B_j) é uma sequência de subconjuntos abertos e densos em G , existem C_j abertos e densos em X de forma que $B_j = C_j \cap G$. Assim, $\bigcap_j B_j = \bigcap_j (C_j \cap G) = \bigcap_{j,n} C_j \cap A_n$ é denso em X e, portanto, denso em G . Isto mostra que G também é um espaço de Baire. ■

Proposição 6.7. *Se H é um subconjunto magro de um espaço de Baire X , então seu complementar $X \setminus H$ é um espaço de Baire.*

Demonstração. Como H é magro em X , o conjunto $X \setminus H$ contém um subconjunto genérico G em X . Se (A_n) é uma sequência de conjuntos abertos e densos em $X \setminus H$, então $A_n \cap G$ é aberto e denso em G para todo n . Como G é denso em X , a intersecção $\bigcap_n (A_n \cap G) = (\bigcap_n A_n) \cap G$ é densa em G e em $X \setminus H$. Isto mostra que o conjunto $X \setminus H$ é um espaço de Baire. ■

OBSERVAÇÃO 6.8. Como o Exercício 6.3 e a Proposição 6.6 indicam, o Teorema de Baire é um fato topológico, e não apenas métrico. Por exemplo, \mathbb{R} é um espaço (métrico completo) de Baire, homeomorfo ao intervalo $(-1, 1)$, o qual é de Baire, embora não seja um espaço métrico completo.

EXERCÍCIO 6.4. Mostre que o conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é genérico em \mathbb{R} .

Em outros Capítulos aparecem aplicações do Teorema de Baire à Análise, com ênfase à teoria de operadores lineares. O próximo resultado traz um exemplo padrão, respondendo a seguinte pergunta: Há funções contínuas que não possuem derivada em todos os pontos do domínio? Se sim, são muitas?

Proposição 6.9. *Seja $B = C[0, 1]$ real. Então o conjunto das funções em B que não possuem derivada (finita) em qualquer ponto de $[0, 1]$ é genérico em B .*

Demonstração. Sejam $I = [0, 1]$, $u_\psi^n(t, h) = |\psi(t+h) - \psi(t)| - n|h|$ (para $\psi \in B$ e $(t+h) \in I$) e

$$A_n = \{\psi \in B : \forall t \in I \text{ existe } h \text{ com } u_\psi^n(t, h) > 0\}.$$

Se $\psi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, então ψ não possui derivada em qualquer ponto de $[0, 1]$. Como B é um espaço métrico completo, pelo Teorema de Baire basta mostrar que cada A_n é aberto e denso em B .

Se $\psi \in A_n$ existe $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $t \in I$ existe $\bar{h} = \bar{h}(t)$ com $u_\psi^n(t, \bar{h}) > \varepsilon$. De fato, se tal $\varepsilon > 0$ não existe, então para cada $j \in \mathbb{N}$ existe t_j com $u_\psi^n(t_j, h) \leq 1/j$ para todo h admissível. Como I é compacto, a sequência (t_j) possui um ponto de acumulação t_0 e $u_\psi^n(t_0, h) \leq 0$ para todo h , contradizendo $\psi \in A_n$. Logo, a afirmação está verificada.

Agora, se $\phi \in B$, então

$$\begin{aligned} \varepsilon + n|\bar{h}| &< |\psi(t + \bar{h}) - \psi(t)| \\ &\leq |\psi(t + \bar{h}) - \phi(t + \bar{h})| + |\phi(t + \bar{h}) - \phi(t)| + |\phi(t) - \psi(t)|, \end{aligned}$$

de forma que se $\|\psi - \phi\|_\infty < \varepsilon/2$, segue que $u_\phi^n(t, \bar{h}) > 0$ para todo $t \in [0, 1]$, ou seja, $\phi \in A_n$. Portanto A_n é aberto.

Para mostrar que A_n é denso em B , serão usados dois fatos. Note que qualquer função contínua em $[0, 1]$, constituída por um número finito de partes lineares, cujo módulo da inclinação de cada parte é maior do que n pertence a A_n . O outro fato é que toda função $\psi \in C[0, 1]$ é uniformemente contínua; assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ de modo que se $t, s \in [0, 1]$ e $|t - s| < \delta(\varepsilon)$, então $|\psi(t) - \psi(s)| < \varepsilon$.

Considere uma partição finita de $[0, 1]$ em intervalos de comprimentos menores do que $\delta(\varepsilon)$; o gráfico de $\psi \in B$ em cada um desses intervalos está contido em um retângulo de comprimento menor do que $\delta(\varepsilon)$ e altura menor do que ε ; em cada intervalo construa uma função contínua

com imagem dentro do retângulo correspondente, linear por partes com módulo das inclinações maiores do que n , e de forma que nos extremos da partição essa função coincida com ψ . Isto leva a uma função real φ definida em $[0, 1]$, que pertence a A_n e com $\|\psi - \varphi\|_\infty < \varepsilon$ (faça uma figura com os gráficos de ψ e φ). Portanto A_n é denso em \mathcal{B} . ■

Corolário 6.10. *O conjunto das funções reais contínuas que possuem derivada em algum ponto é magro em $C[a, b]$ real.*

Se o espaço normado não for completo, o Exemplo 3.8 mostra que pode haver base de Hamel enumerável mesmo no caso de dimensão infinita. Segue outra aplicação do Teorema de Baire.

Proposição 6.11. *Se \mathcal{B} é completo e $\dim \mathcal{B} = \infty$, então qualquer base de Hamel de \mathcal{B} não é contável.*

Demonstração. Suponha que $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ seja uma base de Hamel de \mathcal{B} . Pode-se supor que $\|e_j\| = 1$, para todo j . Para cada par de números naturais n, m , seja

$$E_{n,m} = \left\{ \left(\sum_{j=1}^n a_j e_j \right) \in \mathcal{B} : \sum_{j=1}^n |a_j| \leq m \right\},$$

o qual é fechado e $\mathcal{B} = \bigcup_{n,m} E_{n,m}$. Pelo Teorema de Baire, algum $E_{n,m}$ contém uma bola aberta $B(\eta; r)$, $r > 0$; mas isto é impossível pois o vetor $(\eta + r e_{n+1}/2)$ está nesta bola mas não pertence a $E_{n,m}$. Tal contradição mostra que uma base de Hamel de \mathcal{B} não pode ser contável. ■

Notas

O trabalho de Baire sobre o teorema aqui discutido foi publicado em 1899, e tratava de \mathbb{R}^n (note que Osgood apresentou uma versão desse resultado para \mathbb{R} em 1897); a demonstração original de Baire adaptou-se para espaços métricos completos, e essa versão mais geral foi publicada independentemente por Kuratowski e Banach em 1930 (esses trabalhos apareceram um seguindo o outro na revista *Fund. Math*). Esse resultado ganhou projeção particularmente quando foi utilizado por Banach e Steinhaus para dar uma nova demonstração do Princípio da Limitação Uniforme. A nomenclatura de conjuntos de primeira e segunda categorias é devida ao próprio Baire, mas atualmente é pouco utilizada; por isso o Teorema de Baire aqui apresentado é muitas vezes chamado de Teorema de Categoria de Baire.

O Teorema de Baire aparece em diferentes contextos: é um resultado básico na teoria de sistemas dinâmicos, garantindo que certas propriedades são genéricas; pode ser usado para mostrar que o conjunto ternário de Cantor não é enumerável; que dado um ponto na reta real, existem funções contínuas cujas séries de Fourier divergem nesse ponto (veja o Corolário 7.6); que a convergência simples de funções reais não é métrica; aplicações dos Teoremas do Gráfico Fechado e da Limitação Uniforme. Para discussões interessantes sobre o Teorema de Baire, sugere-se os textos da Coleção Projeto Euclides: C. S. Höhng, *Aplicações da Topologia à Análise*, 1976, e E. L. Lima, *Espaços Métricos*, 1983.

Conjuntos robustos dos pontos de vista topológico e de medida de Lebesgue não coincidem, necessariamente; veja o Exercício 6.13.

O primeiro exemplo publicado de função real contínua, mas não-diferenciável em todo ponto, foi de Weierstrass, em 1872 (embora B. Bolzano parecia conhecer um exemplo 40 anos antes). A existência de funções reais contínuas apenas nos irracionais (Exercício 6.7) foi descoberta por K. J. Thomae em 1875; dado qualquer subconjunto F_σ de \mathbb{R} , em 1903 W. H. Young mostrou como construir uma função descontínua exatamente nesse conjunto.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 6.5. Mostre que um espaço topológico homeomorfo a um espaço de Baire é também um espaço de Baire.

EXERCÍCIO 6.6. Mostre que todo conjunto enumerável E num espaço métrico X é magro se, e somente se, E não possui pontos isolados em X .

EXERCÍCIO 6.7. Mostre que \mathbb{Q} não é um conjunto G_δ em \mathbb{R} e que, para cada função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o conjunto de pontos de continuidade de f é um G_δ . Conclua que não existe uma tal função contínua apenas em \mathbb{Q} . Por outro lado: se $\mathbb{Q} = \{p/q\}$ (irreduzível, com $q \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}$), verifique que a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(0) = 1$, $g(p/q) = 1/q$, e nula em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, é contínua apenas nos irracionais.

EXERCÍCIO 6.8. Mostre que a fronteira de um conjunto aberto (ou fechado) num espaço métrico é um conjunto raro.

EXERCÍCIO 6.9. Se X é um espaço métrico completo e existe uma sequência de fechados (F_n) cuja união é X , mostre que $\cup_n \text{int} F_n$ é um aberto denso em X ($\text{int} F_n$ indica o interior de F_n).

EXERCÍCIO 6.10. Mostre que o conjunto das funções reais em $C[a, b]$ que possuem derivada à esquerda (à direita) em algum ponto de $(a, b]$ (de $[a, b)$) é um subconjunto magro em $C[a, b]$.

EXERCÍCIO 6.11. Seja $\psi: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$. Mostre que existem um intervalo não-vazio (a, b) e $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\{t \in (a, b) : \psi(t) > 1/n_0\}$ é denso em (a, b) .

EXERCÍCIO 6.12. Um homeomorfismo $h: X \rightarrow Y$, no espaço métrico separável e completo X , é transitivo se existe $\xi \in X$ cuja órbita $\mathcal{O}(\xi) = \{h^m(\xi) : m \in \mathbb{Z}\}$ é densa em X . Mostre que se h é transitivo, então o conjunto de pontos cujas órbitas não são densas é um F_σ magro.

EXERCÍCIO 6.13. Seja (q_n) uma enumeração dos racionais em \mathbb{R} . Verifique que o conjunto

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{2^{j+n}}, q_n + \frac{1}{2^{j+n}} \right)$$

é não-magro em \mathbb{R} embora seja mensurável e possua medida de Lebesgue nula.

Capítulo 7

Princípio da Limitação Uniforme

Neste Capítulo são apresentadas algumas das principais consequências do Teorema de Baire, ou seja, o Teorema de Banach-Steinhaus e o Princípio da Limitação Uniforme (o termo 'Princípio' é histórico). Tais resultados serão aplicados em Capítulos futuros, particularmente àquelas relacionadas às convergências fracas. O Princípio da Limitação Uniforme dá condições para que o conjunto das normas de uma família de operadores lineares, de qualquer cardinalidade, tenha um limite superior finito.

Teorema 7.1 (Princípio da Limitação Uniforme). *Toda coleção $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de operadores no espaço $B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ que é pontualmente limitada, ou seja, para cada $\xi \in \mathcal{B}$ tem-se*

$$\sup \{ \|T_\alpha \xi\| : \alpha \in J \} < \infty,$$

é de fato uniformemente limitada, ou seja, $\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha\| < \infty$.

Demonstração. Seja $E_k = \{ \xi \in \mathcal{B} : \|T_\alpha \xi\| \leq k, \forall \alpha \in J \}$, o qual é um conjunto fechado pois, como T_α é contínuo, é a intersecção dos fechados $T_\alpha^{-1} \overline{B_{\mathcal{N}}}(0; k)$ para todo $\alpha \in J$. Como $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, pelo Teorema de Baire existe um E_m com interior não-vazio. Seja $B_{\mathcal{B}}(\xi_0; r)$ ($r > 0$) uma bola aberta contida em E_m ; então, para qualquer $\alpha \in J$ tem-se $\|T_\alpha \xi\| \leq m$ para todo $\xi \in B_{\mathcal{B}}(\xi_0; r)$.

Se $\xi \in \mathcal{B}$, $\|\xi\| = 1$, vem que $\eta = \xi_0 + \tau\xi/2$ pertence a $B_{\mathcal{B}}(\xi_0; r)$ e tem-se

$$\|T_{\alpha}\xi\| = \frac{2}{r} \|T_{\alpha}\eta - T_{\alpha}\xi_0\| \leq \frac{2}{r} (\|T_{\alpha}\eta\| + \|T_{\alpha}\xi_0\|) \leq \frac{4m}{r};$$

assim $\|T_{\alpha}\xi\| \leq 4m/r$ para todos $\alpha \in J$ e $\|\xi\| = 1$; disto segue que $\sup_{\alpha} \|T_{\alpha}\| \leq 4m/r < \infty$. ■

Corolário 7.2. *Um subconjunto $H \subset \mathcal{B}^* = B(\mathcal{B}, \mathbb{F})$ é limitado se, e somente se, para todo $\xi \in \mathcal{B}$ tem-se $\sup_{f \in H} |f(\xi)| < \infty$.*

Demonstração. Se H é limitado, então $M = \sup_{f \in H} \|f\| < \infty$ e para todo $\xi \in \mathcal{B}$ tem-se $\sup_{f \in H} |f(\xi)| \leq M\|\xi\| < \infty$. Para demonstrar a outra implicação, utilizando a notação apresentada no Princípio da Limitação Uniforme, é suficiente considerar H como a família T_{α} no espaço de Banach \mathcal{B}^* . ■

Corolário 7.3 (Teorema de Banach-Steinhaus). *Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em $B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ de forma que, para todo $\xi \in \mathcal{B}$, existe o limite*

$$T\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n\xi.$$

Então $\sup_n \|T_n\| < \infty$ e T é um operador em $B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$.

Demonstração. Evidentemente T é linear. Como para todo $\xi \in \mathcal{B}$ existe $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n\xi$, tem-se $\sup_n \|T_n\xi\| < \infty$, e pelo Princípio da Limitação Uniforme $\sup_n \|T_n\| < \infty$. Da definição de T segue que

$$\|T\xi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\xi\| \leq \left(\sup_n \|T_n\| \right) \|\xi\|, \quad \forall \xi \in \mathcal{B},$$

e, portanto, T é limitado. ■

Exemplo 7.4. Seja \mathcal{N} o espaço normado dos elementos $\xi = (\xi_j) \in l^{\infty}(\mathbb{N})$ com $\xi_j \neq 0$ somente para j num conjunto finito de índices. Defina $T_n : \mathcal{N} \rightarrow l^{\infty}$ por $T_n\xi = (n\xi_n)_{j \in \mathbb{N}}$. Então $T_n \in B(\mathcal{N}, l^{\infty})$ para todo n , e para cada $\xi \in \mathcal{N}$ existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n\xi = 0$, mas $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = \infty$. Isto mostra que as conclusões do Teorema de Banach-Steinhaus (e do Princípio da Limitação Uniforme) podem não valer se o domínio dos operadores não for completo. •

EXERCÍCIO 7.1. No Teorema de Banach-Steinhaus, mostre que $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$.

EXERCÍCIO 7.2. Sejam $S_e : l^2(\mathbb{N}) \leftrightarrow$ o shift

$$S_e(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots)$$

e $T_n = S_e^n$. Encontre $\|T_n \xi\|$, e o operador limite do Teorema de Banach-Steinhaus neste caso.

Proposição 7.5. Seja $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família em $B(B, \mathcal{N})$ com

$$\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha\| = \infty.$$

Então o conjunto $\mathcal{I} = \{\xi \in B : \sup_{\alpha} \|T_\alpha \xi\| < \infty\}$ é magro em B .

Demonstração. Usando a notação da demonstração do Princípio da Limitação Uniforme, tem-se que $\mathcal{I} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, e pela demonstração desse Princípio o interior de todo E_k é vazio, pois de outra forma teria-se $\sup_{\alpha \in J} \|T_\alpha\| < \infty$. Como E_k é fechado, segue que \mathcal{I} é magro. ■

Estes resultados serão aplicados à convergência (ou não!) das séries de Fourier de funções contínuas periódicas na reta; no caso de função periódica continuamente diferenciável, tal convergência é uniforme (veja o Corolário 22.6 e Exercícios 22.10 e 22.11). Denote por $C_p[0, 2\pi] = \{\psi \in C[0, 2\pi] : \psi(0) = \psi(2\pi)\}$, o qual é um subespaço fechado de $C[0, 2\pi]$, logo de Banach, e escreva

$$(\mathcal{F}\psi)_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \psi(t) dt, \quad \psi \in C_p[0, 2\pi].$$

Corolário 7.6. O conjunto dos elementos $\psi \in C_p[0, 2\pi]$ cuja série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}\psi)_n e^{int}$ converge em $t = 0$ é magro.

Demonstração. Trabalhando um pouco com relações trigonométricas obtém-se, para cada N , que a reduzida

$$(S_N \psi')(t) = \sum_{|n| \leq N} (\mathcal{F}\psi)_n e^{int}$$

da série de Fourier de ψ pode ser escrita na forma

$$(S_N \psi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}[(2N+1)(t-s)/2]}{\text{sen}[(t-s)/2]} \psi(s) ds.$$

Observe que $f_N : C_p[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $f_N(\psi) = (S_N\psi)(0)$, é um elemento do dual de $C_p[0, 2\pi]$; assim, para concluir esta demonstração, é suficiente mostrar que $\sup_N \|f_N\| = \infty$ e usar a Proposição 7.5 com f_N representada por T_α .

Considere $\phi_N(t) = \text{sen}[(2N+1)t/2]$, um elemento de $C_p[0, 2\pi]$ de norma igual a 1; assim

$$\begin{aligned} f_N(\phi_N) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2[(2N+1)s/2]}{\text{sen}(s/2)} ds \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2[(2N+1)s/2]}{s} ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{(2N+1)\pi} \frac{\text{sen}^2 u}{u} du \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{2N+1} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\text{sen}^2 u}{n\pi} du = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Como a série harmônica é divergente, segue que $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f_N\| = \infty$, terminando a demonstração do Corolário. ■

EXERCÍCIO 7.3. Verifique que $C_p[0, 2\pi]$ é um espaço de Banach, e também a validade da expressão para as reduzidas da série de Fourier utilizada na demonstração do Corolário 7.6.

A próxima aplicação se refere à continuidade de aplicações bilineares. São conhecidas aplicações de duas variáveis separadamente contínuas que não são contínuas; a seguir aparecem dois desses exemplos, uma de aplicação que não é bilinear, mas está presente pela simplicidade (o qual é um exemplo típico em disciplinas de Cálculo Diferencial), e uma outra de aplicação bilinear definida em um espaço normado que não é completo.

Exemplo 7.7. A função $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\psi(t, s) = ts/(t^2 + s^2)$ se $(t, s) \neq (0, 0)$, e $\psi(0, 0) = 0$, é separadamente contínua, mas não é contínua na origem (considere semi-retas $s(t) = mt$ e verifique que o limite à origem depende de m). •

Exemplo 7.8. Seja $\mathcal{N} = (C[0, \pi], \|\cdot\|_1)$, com $\|\psi\|_1 = \int_0^\pi |\psi(t)| dt$, para $\psi \in \mathcal{N}$. Denote por $b(\cdot, \cdot)$ a forma bilinear separadamente contínua (verifique!) $b : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $b(\psi, \phi) = \int_0^\pi \psi(t)\phi(t) dt$. Definindo

$$\psi_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} \text{sen}(nt) & \text{se } 0 \leq t \leq \pi/n \\ 0 & \text{se } \pi/n < t \leq \pi \end{cases},$$

segue que $\|\psi_n\|_1 = 2/\sqrt{n}$ convergindo a zero para $n \rightarrow \infty$, enquanto $b(\psi_n, \psi_n) = \pi/2$ para todo n , e b não é contínua. •

Corolário 7.9. *Se $b : B_1 \times B_2 \rightarrow \mathbb{F}$ é uma aplicação bilinear separadamente contínua (ou seja, $b(\cdot, \eta)$ e $b(\xi, \cdot)$ são lineares e contínuas para cada $\eta \in B_2$ e cada $\xi \in B_1$, respectivamente), então b é contínua, ou seja, se $\xi_n \rightarrow \xi$ e $\eta_n \rightarrow \eta$, então $b(\xi_n, \eta_n) \rightarrow b(\xi, \eta)$.*

Demonstração. Por (bi)linearidade basta considerar $\xi_n \rightarrow 0$ e $\eta_n \rightarrow 0$, e o objetivo é mostrar que $b(\xi_n, \eta_n) \rightarrow 0$. Para cada $\xi_n \in B_1$ defina $T_n : B_2 \rightarrow \mathbb{F}$ por $T_n \eta = b(\xi_n, \eta)$, o qual é contínuo e $T_n \eta$ converge a zero para $n \rightarrow \infty$. Assim, por Banach-Steinhaus, existe $C > 0$ de forma que $|T_n \eta| \leq C \|\eta\|$, para todo $\eta \in B_2$, em particular para η_n acima, e tem-se que

$$|b(\xi_n, \eta_n)| = |T_n \eta_n| \leq C \|\eta_n\|,$$

o qual converge a zero para $n \rightarrow \infty$. ■

O Princípio da Limitação Uniforme, assim como o Teorema de Banach-Steinhaus, são importantes no estudo de convergências fracas em espaços normados, as quais serão tratadas em outros Capítulos.

Notas

Não há consenso na literatura sobre o que é chamado especificamente de Limitação Uniforme e Banach-Steinhaus, com as duas denominações usualmente apresentadas como sinónimos, e também referindo-se ao conjunto dos principais resultados apresentados neste Capítulo. Historicamente, uma primeira versão desses resultados foi devida a Hahn em 1922, mas para funcionais lineares contínuos e usava um argumento de contradição, a qual foi adaptada para operadores lineares contínuos entre espaços de Banach pelo próprio Banach em sua Tese. A demonstração através do Teorema de Baire é devida a Banach e Steinhaus em 1927. Para uma descrição pormenorizada da história desses resultados, consulte [Swartz (1990)] (também [Hochstadt (1979)]).

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 7.4. Demonstre a seguinte versão do Princípio da Limitação Uniforme. Seja $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família de funções (reais ou complexas) contínuas definidas num

espaço métrico completo X , de forma que, para cada $\xi \in X$, $\sup_{\alpha \in J} |\psi_\alpha \xi| < \infty$. Então existe um aberto não-vazio $A \subset X$ em que

$$\sup_{\substack{\alpha \in J \\ \xi \in A}} |\psi_\alpha(\xi)| < \infty.$$

EXERCÍCIO 7.5. Mostre que todo espaço métrico completo que não possui pontos isolados tem um número não-contável de pontos.

EXERCÍCIO 7.6. Use os resultados deste Capítulo para mostrar que $\mathcal{N} = (C[a, b], \|\cdot\|_1)$, sendo $\|\psi\|_1 = \int_a^b |\psi(t)| dt$, não é completo.

EXERCÍCIO 7.7. Seja $T: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$, linear. Mostre que T é limitado se, e somente se, $T^{-1}\overline{B}_{\mathcal{N}_2}(0; 1)$ possui interior não-vazio.

EXERCÍCIO 7.8. Sejam X um espaço compacto de Hausdorff e $\psi_n, \psi \in C(X)$.

a) Usando o Teorema de Riesz-Markov 4.15, e verificando que para cada $t \in X$, $\delta_t: C(X) \rightarrow \mathbb{F}$, $\delta_t \phi = \phi(t)$, para todo $\phi \in C(X)$, é um elemento de $C(X)^*$, mostre que se $\int \psi_n d\mu \rightarrow \int \psi d\mu$, para todo $\mu \in M(X)$, então $\sup_n \|\psi_n\| < \infty$ e $\psi_n \rightarrow \psi$ pontualmente.

b) A partir do Teorema da Convergência Dominada, mostre que vale a recíproca do resultado no item a), ou seja, se $\sup_n \|\psi_n\| < \infty$ e $\psi_n \rightarrow \psi$ pontualmente, então $\int \psi_n d\mu \rightarrow \int \psi d\mu$, para todo $\mu \in M(X)$.

EXERCÍCIO 7.9. O Corolário 7.9 se generaliza a

(a) aplicações $b: \mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_k \rightarrow \mathbb{F}$ multilineares separadamente contínuas em cada variável?

(b) aplicações bilineares separadamente contínuas $b: \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2 \rightarrow \mathcal{N}_3$, em que basta \mathcal{N}_1 ou \mathcal{N}_2 ser completo. Verifique.

EXERCÍCIO 7.10. Seja $(T_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência limitada em $B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ (ou seja, tem-se $\sup_n \|T_n\| < \infty$) em que, para todo ξ num conjunto H denso na esfera $S(0, 1)$ em \mathcal{N} , existe $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n \xi, \xi \in H$. Mostre que para todo $\xi \in \mathcal{N}$ existe

$$T\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \xi$$

e que $T \in B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$.

EXERCÍCIO 7.11. Mostre que existem um subconjunto genérico A em $C_p[0, 2\pi]$ e um conjunto B denso em $[0, 2\pi]$, de forma que a série de Fourier de qualquer elemento de A diverge em todo ponto de B .

Capítulo 8

Teorema da Aplicação Aberta

Neste Capítulo será discutido um resultado técnico importante em Análise Funcional, o Teorema da Aplicação Aberta, devido à Banach. Numa de suas consequências, ele dá condições suficientes para que uma aplicação linear entre espaços de Banach contínua e invertível tenha inversa contínua, em outras palavras, para que seja um homeomorfismo linear. Esse teorema será usado para demonstrar o Teorema do Gráfico Fechado no próximo Capítulo.

Lembre-se que uma aplicação entre espaços topológicos é dita aberta se a imagem de todo subconjunto aberto é também um subconjunto aberto. Nem toda aplicação contínua invertível é aberta, como atestam os exemplos apresentados adiante.

Exemplo 8.1. A aplicação identidade entre \mathbb{R}^n com a topologia discreta e \mathbb{R}^n com a topologia usual é contínua e invertível, mas sua inversa não é contínua, ou seja, esta aplicação contínua não é aberta. •

Exemplo 8.2. Seja $X = [-1, 0] \cup (1, 2]$ em \mathbb{R} e $\psi : X \rightarrow [0, 4]$, $\psi(t) = t^2$. ψ é uma bijeção contínua, mas sua inversa $\psi^{-1} : [0, 4] \rightarrow X$ dada por

$$\psi^{-1}(t) = \begin{cases} -\sqrt{t} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \sqrt{t} & \text{se } 1 < t \leq 4 \end{cases},$$

não é contínua (faça um gráfico). •

EXERCÍCIO 8.1. Mostre que $T : l^1(\mathbb{N}) \leftrightarrow$, dado por

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (\xi_1/1, \xi_2/2, \xi_3/3, \dots),$$

é linear, contínuo e invertível, mas sua inversa T^{-1} , definida na imagem de T , não é um operador contínuo.

Teorema 8.3 (Aplicação Aberta). *Se $T \in B(B_1, B_2)$ e $\text{img } T = B_2$, então T é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Primeiramente, uma idéia da demonstração. Ela será reduzida a mostrar que existe uma bola aberta $B(0; r)$ de modo que $TB(0; r)$ contém um conjunto aberto (ou seja, isto implicará que T é aberta); a linearidade de T implicará que este conjunto aberto pode ser considerado uma vizinhança da origem, e que se pode supor que $r = 1$. Sendo T sobrejetora, pelo Teorema de Baire e linearidade, existe $\delta > 0$ com $B(0; \delta) \subset \overline{TB(0; 1)}$, e por um argumento final interessante $B(0; \delta) \subset \overline{TB(0; 1)} \subset TB(0; 2)$, ou seja, pode-se tomar $r = 2$ acima, o que completará a demonstração.

Serão utilizadas as seguintes propriedades, das quais somente a última não tem verificação imediata:

a) para todos $r, s > 0$ tem-se $TB(0; r) = \frac{r}{s}TB(0; s)$.

b) para todos $\xi \in B_1$ e $r > 0$, tem-se $TB(\xi; r) = T\xi + TB(0; r)$ (soma de conjuntos).

c) se $B(0; \varepsilon) \subset \overline{TB(0; r)}$, então $B(0; \alpha\varepsilon) \subset \overline{TB(0; \alpha r)}$, para todo $\alpha > 0$. Disto segue que se existe $r > 0$ em que $\overline{TB(0; r)}$ contém uma vizinhança da origem, então $\overline{TB(0; s)}$ contém uma vizinhança da origem para todo $s > 0$ (note que tais implicações também valem sem os fechos dos conjuntos).

d) se $B(\eta_0; \varepsilon) \subset \overline{TB(0; r)}$, então existe $\delta > 0$ em que $B(0; \delta) \subset \overline{TB(0; r)}$ (note que também vale sem os fechos dos conjuntos).

Para verificar esta última propriedade, escolha $\xi_1 \in B(0; r)$ de forma que $\|\eta_1 - \eta_0\| < \varepsilon/2$, sendo $\eta_1 = T\xi_1$. Assim,

$$B(\eta_1; \varepsilon/2) \subset B(\eta_0; \varepsilon) \subset \overline{TB(0; r)},$$

e

$$\begin{aligned} B(0; \varepsilon/2) &= B(\eta_1; \varepsilon/2) - \eta_1 \subset \{B(\eta_0; \varepsilon) - T\xi_1\} \\ &\subset \{\overline{TB(0; r)} - T\xi_1\} \subset \overline{[B(0; r) - \xi_1]} \subset \overline{TB(0; 2r)}. \end{aligned}$$

Então $B(0; \varepsilon/2) \subset \overline{TB(0; 2r)}$ e, portanto, $B(0; \delta) \subset \overline{TB(0; r)}$ com $\delta = \varepsilon/4$, demonstrando d).

Lema 8.4. Se $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ e existe $r > 0$ de forma que o interior de $TB(0; r)$ não é vazio, então T é uma aplicação aberta.

Demonstração. Como o interior de $TB(0; r) \neq \emptyset$, segue das propriedades acima que, para todo $s > 0$, $TB(0; s)$ contém uma bola aberta centrada na origem. Para verificar que T é uma aplicação aberta basta mostrar que para todo $\xi \in \mathcal{N}_1$ e todo $s > 0$, $TB(\xi; s)$ contém uma vizinhança de $T\xi$. Como $TB(\xi; s) = T\xi + TB(0; s)$, basta considerar $\xi = 0$ e verificar que para todo $s > 0$ o conjunto $TB(0; s)$ contém uma vizinhança da origem, contudo, isto é exatamente o que foi observado no início desta demonstração. ■

Por este lema, para demonstrar o Teorema da Aplicação Aberta é suficiente verificar que existe algum $r > 0$ de modo que $TB(0; r)$ contém uma bola centrada na origem. Note que apenas a partir deste ponto serão usados os fatos de B_1, B_2 serem completos e que T é sobrejetor; o Teorema de Baire será decisivo.

Como T é sobrejetor $B_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{TB(0; n)}$, e pelo Teorema de Baire existe algum m em que o interior de $\overline{TB(0; m)}$ não é vazio. Pela propriedade c) pode-se supor que $m = 1$.

Pela propriedade d) pode-se supor que existe $\delta > 0$ de forma que $B(0; \delta) \subset \overline{TB(0; 1)}$. O objetivo agora é mostrar que vale a relação $\overline{TB(0; 1)} \subset TB(0; 2)$, o que, pelo Lema 8.4, demonstra o teorema.

Seja $\eta \in \overline{TB(0; 1)}$. Escolha $\xi_1 \in B(0; 1)$ com

$$(\eta - T\xi_1) \in B(0; \delta/2) \subset \overline{TB(0; 1/2)}.$$

Na última passagem foi utilizada a propriedade c). Escolha agora ξ_2 em $B(0; 1/2)$ de modo que (usando novamente a propriedade c))

$$(\eta - T\xi_1 - T\xi_2) \in B(0; \delta/2^2) \subset \overline{TB(0; 1/2^2)}.$$

Por indução, escolha $\xi_n \in B(0; 1/2^{n-1})$ satisfazendo

$$\left(\eta - \sum_{j=1}^n T\xi_j \right) \in B(0; \delta/2^n) \subset \overline{TB(0; 1/2^n)}.$$

Note que $(\sum_{j=1}^n \xi_j)_n$ é uma sequência de Cauchy, e como B_1 é completo, existe $\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j$; sendo T contínuo, segue que $\eta = T\xi$. Como $\|\xi\| < 2$, vem que $\overline{TB(0; 1)} \subset TB(0; 2)$. ■

Do Teorema da Aplicação Aberta é evidente o próximo resultado, algumas vezes chamado de Teorema da Aplicação Inversa.

Corolário 8.5 (Aplicação Aberta 2). *Se $T \in B(B_1, B_2)$ é bijetor entre B_1 e B_2 , então T^{-1} também é uma aplicação linear contínua, ou seja, $T^{-1} \in B(B_2, B_1)$.*

EXERCÍCIO 8.2. Seja $T : C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$ dado por $(T\psi)(t) = \int_{-1}^t \psi(s) ds$. Verifique que T é limitado e invertível, mas T^{-1} não é contínuo. Discuta este resultado em termos do Teorema da Aplicação Aberta.

Exemplo 8.6. Nesta aplicação será demonstrado que não existe uma sequência de números complexos $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de modo que uma sequência $a = (a_n)_n$ é absolutamente somável se, e somente se, $(a_n b_n)_n$ é limitada; em outros símbolos,

$$a \in l^1(\mathbb{N}) \iff (a_n b_n) \in l^\infty(\mathbb{N}).$$

Suponha que tal sequência b exista; como $(1, 1/2, 1/3, \dots)$ não é absolutamente somável, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \infty$, e pode-se supor que $b_n \neq 0$, para todo n . Disto segue que o operador linear $\tau : l^\infty(\mathbb{N}) \rightarrow l^1(\mathbb{N})$, $(\tau c)_n = c_n/b_n$, está bem-definido, é limitado, invertível e $\text{img } \tau = l^1(\mathbb{N})$. Pelo Teorema da Aplicação Aberta 8.5 segue que $\tau^{-1} : l^1(\mathbb{N}) \rightarrow l^\infty(\mathbb{N})$, $(\tau^{-1}d)_n = b_n d_n$ é limitado. Se $(e^m)_{m=1}^\infty$ é a base canônica de $l^1(\mathbb{N})$, tem-se $\|e^m\|_1 = 1$, enquanto

$$\|\tau^{-1}e^m\|_\infty = |b_m| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty,$$

e τ^{-1} não pode ser limitado. Esta contradição mostra que tal “sequência teste” b não existe. •

EXERCÍCIO 8.3. Confira que, sob as hipóteses iniciais na argumentação no Exemplo 8.6, $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \infty$ e o operador τ seria limitado e com $\text{img } \tau = l^1(\mathbb{N})$.

Como outra aplicação do Teorema da Aplicação Aberta, será demonstrado um resultado interessante que indica, de outra forma (veja o Corolário 6.10), que o conjunto das aplicações diferenciáveis em $C[a, b]$ é “pequeno”.

Proposição 8.7. *Todo subespaço vetorial fechado de funções continuamente diferenciáveis em $C[-1, 1]$ possui dimensão finita.*

Demonstração. Seja E um subespaço fechado de $C[-1, 1]$ constituído apenas de funções continuamente diferenciáveis. Observe que E é também um subespaço fechado de $C^1[-1, 1]$ com a norma

$$\|\psi\| = \sup_{t \in [-1, 1]} |\psi(t)| + \sup_{t \in [-1, 1]} |\psi'(t)|,$$

pois, se (ψ_n) é Cauchy nesse espaço, então $\psi_n \rightarrow \psi$ e $\psi'_n \rightarrow \phi$, ambos uniformemente, e escrevendo

$$\psi_n(t) = \psi_n(-1) + \int_{-1}^t \psi'_n(s) ds$$

obtém-se

$$\psi(t) = \psi(-1) + \int_{-1}^t \phi(s) ds$$

e assim $\phi = \psi'$. Logo $(E, \|\cdot\|)$ é também completo (veja o Exercício 1.9). Denote esses espaços de Banach por $\mathcal{B}_1 = (E, \|\cdot\|)$ e $\mathcal{B}_2 = (E, \|\cdot\|_\infty)$.

Considere a aplicação identidade $1 : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$, a qual é linear e limitada; pelo Teorema da Aplicação Inversa (Corolário 8.5) é um homeomorfismo. Seja $\overline{\mathcal{B}_1}(0; 1)$ a bola fechada em \mathcal{B}_1 . O conjunto $1(\overline{\mathcal{B}_1}(0; 1))$ é claramente limitado e fechado em \mathcal{B}_2 e é também equicontínuo, pois para todo $\psi \in 1(\overline{\mathcal{B}_1}(0; 1))$ tem-se ($s < t$)

$$|\psi(t) - \psi(s)| = \left| \int_s^t \psi'(u) du \right| \leq \int_s^t |\psi'(u)| du \leq |t - s|.$$

Logo, pelo teorema de Ascoli, $1(\overline{\mathcal{B}_1}(0; 1))$ é compacto em \mathcal{B}_2 .

Como 1 é um homeomorfismo, $\overline{\mathcal{B}_1}(0; 1)$ também é compacto em \mathcal{B}_1 ; pelo Teorema 2.2, a bola unitária (fechada) num espaço normado é compacta se, e somente se, sua dimensão for finita. ■

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 8.4. Mostre que $\psi: [0, 2\pi) \rightarrow S^1$, $\psi(t) = e^{it}$, é contínua, enquanto sua inversa (que existe) é descontínua em $t = 0$ ($S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$).

EXERCÍCIO 8.5. Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas no espaço vetorial X que o tornam espaços de Banach. Mostre que se existe $C > 0$ de forma que

$$\|\xi\|_1 \leq C\|\xi\|_2, \quad \forall \xi \in X,$$

então estas duas normas são equivalentes.

EXERCÍCIO 8.6. Se $T \in B(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ é bijetor entre \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 , mostre que existem $C_1, C_2 > 0$ de forma que

$$C_1\|\xi\|_{\mathcal{B}_1} \leq \|T\xi\|_{\mathcal{B}_2} \leq C_2\|\xi\|_{\mathcal{B}_1}, \quad \forall \xi \in \mathcal{B}_1.$$

EXERCÍCIO 8.7. Em relação ao Corolário 8.5, vale a pena conferir o seguinte resultado de Topologia Geral: se X e Y são espaços topológicos, com X compacto e Y Hausdorff, e $f: X \rightarrow Y$ é bijetora e contínua, então f é um homeomorfismo

EXERCÍCIO 8.8. Discuta a seguinte afirmação: “Todo funcional linear em \mathcal{N}^* é uma aplicação aberta.”

EXERCÍCIO 8.9. Considerando o Exercício 8.1, deduza que a hipótese de que $\text{img } T$ é um espaço de Banach não pode ser retirada no Teorema da Aplicação Aberta.

EXERCÍCIO 8.10. Seja $T: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ linear, sobrejetor e de forma que a imagem $T(\mathcal{B}_1(0; r))$ está contida em algum compacto, para cada $r > 0$. Mostre que $\dim \mathcal{B}_2 < \infty$.

EXERCÍCIO 8.11. Se $T \in B(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ é sobrejetor, mostre que existe $C > 0$ em que para todo $\eta \in \mathcal{B}_2$ a equação $T\xi = \eta$ possui solução $\xi_\eta \in \mathcal{B}_1$ satisfazendo $\|\xi_\eta\| \leq C\|\eta\|$.

EXERCÍCIO 8.12. Dados $T \in B(\mathcal{B})$ e $\eta \in \mathcal{B}$, considere a equação $T\xi = \eta$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

- Se $T\xi = 0$, então $\xi = 0$ e essa equação possui solução para todo $\eta \in \mathcal{B}$.
- Para todo $\eta \in \mathcal{B}$ essa equação possui uma única solução $\xi = \xi(\eta)$, a qual depende continuamente de η .

EXERCÍCIO 8.13. Seja $\mathcal{F}: \mathcal{B} = L^1[-\pi, \pi] \rightarrow l^\infty(\mathbb{Z})$ o operador que associa a série de Fourier $((\mathcal{F}\psi)_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, de $\psi \in \mathcal{B}$, em que $(\mathcal{F}\psi)_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \psi(t) dt$. O conhecido Lema de Riemann-Lebesgue (veja o Exercício 21.7) afirma que $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \subset c_0$. Sabendo que \mathcal{F} é injetor, use o Teorema da Aplicação Aberta para mostrar que existem seqüências em c_0 que não são séries de Fourier de funções em \mathcal{B} .

EXERCÍCIO 8.14. Use o roteiro que segue para verificar que os elementos sobrejetores em $B(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ formam um subconjunto aberto neste espaço. Notação, os elementos indicados por ξ_j e η_j pertencem a \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 , respectivamente.

- Se $T \in B(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ é sobrejetor, mostre que existe $C > 0$ de forma que para todo $\|\eta_1\| \leq 1$, existe ξ_1 com $T\xi_1 = \eta_1$ e $\|\xi_1\| \leq C\|\eta_1\|$.

b) Seja $S \in B(B_1, B_2)$ com $\|T - S\| \leq 1/(2C)$. Mostre que se $\eta_2 = (T - S)\xi_1$, então $\|\eta_2\| \leq 1/2$ e existe $\|\xi_2\| \leq C/2$ com $T\xi_2 = \eta_2$. Definindo $\eta_3 = (T - S)\xi_2$, então $\|\eta_3\| \leq 1/2^2$.

c) Usando indução, encontre $\|\xi_j\| \leq C/2^{j-1}$ de modo que $T\xi_j = \eta_j$; defina $\eta_{j+1} = (T - S)\xi_j$ e mostre que vale $\|\eta_{j+1}\| \leq 1/2^j$.

d) Verifique que $\eta_1 = S(\xi_1 + \dots + \xi_j) + \eta_{j+1}$, que $\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j$ está bem-definido e satisfaz $\|\xi\| \leq 2C$ e $T\xi = \eta_1$, mostrando que $S(\overline{B}_{B_1}(0; 2C)) \supset \overline{B}_{B_2}(0; 1)$. Conclua que S é uma aplicação aberta e então o resultado proposto.

EXERCÍCIO 8.15. Esta é uma boa oportunidade de registrar que toda aplicação não-constante holomorfa $F : G \rightarrow \mathbb{C}$, definida num aberto $G \subset \mathbb{C}$, é aberta. Confira.

Capítulo 9

Teorema do Gráfico Fechado

Há várias maneiras de se construir operadores não-contínuos. A forma mais brusca de descontinuidade de um operador T (entre espaços normados, que é o ponto de interesse aqui) se apresentaria pela existência de seqüências $\xi_n \rightarrow \xi$ com $T\xi_n \rightarrow \eta$, mas $\eta \neq T\xi$. A noção de operador fechado evita este tipo de descontinuidade, impondo que se $\xi_n \rightarrow \xi$, então ou $T\xi_n$ não converge ou, caso convirja, seja necessariamente a $T\xi$. Assim, entre os operadores não-limitados, os operadores fechados se aproximam, de certa forma, dos operadores contínuos. Isto exclui operadores que dificilmente aparecem em aplicações.

Lembre-se que o produto cartesiano $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ de dois espaços normados possui uma estrutura natural de espaço vetorial dada por $\alpha(\xi, \eta) = (\alpha\xi, \alpha\eta)$, $\alpha \in \mathbb{F}$, e $(\xi_1, \eta_1) + (\xi_2, \eta_2) = (\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2)$; além disso, este produto cartesiano torna-se um espaço normado com a norma $\|(\xi, \eta)\| = \|\xi\|_{\mathcal{N}_1} + \|\eta\|_{\mathcal{N}_2}$.

Definição 9.1. O gráfico de um operador linear $T : \text{dom } T \subset \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ é o subespaço vetorial $\mathcal{G}(T) = \{(\xi, T\xi) : \xi \in \text{dom } T\}$ de $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$.

Definição 9.2. Um operador linear $T : \text{dom } T \subset \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ é *fechado* se para toda seqüência $(\xi_n) \subset \text{dom } T$ convergente, $\xi_n \rightarrow \xi \in \mathcal{N}_1$, com $(T\xi_n) \subset \mathcal{N}_2$ também convergente, $T\xi_n \rightarrow \eta$, tenha-se $\xi \in \text{dom } T$ e $\eta = T\xi$. Em outras palavras, T é fechado se $\mathcal{G}(T)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$.

EXERCÍCIO 9.1. Verifique que $\mathcal{G}(T)$ é um subespaço de $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ e a equivalência apresentada na definição de operador fechado acima.

EXERCÍCIO 9.2. Mostre que $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ com a norma $\|(\xi, \eta)\|$ definida acima é um espaço de Banach.

OBSERVAÇÃO 9.3. Note a diferença entre ser contínuo e ser fechado: um operador T é contínuo se $\xi_n \rightarrow \xi$ em $\text{dom } T$, então necessariamente $T\xi_n \rightarrow T\xi$, enquanto para ser fechado pede-se que tanto (ξ_n) em $\text{dom } T$ quanto $(T\xi_n)$ sejam convergentes e, caso sejam, então necessariamente $\xi = \lim_n \xi_n$ está em $\text{dom } T$ e $T\xi_n \rightarrow T\xi$.

EXERCÍCIO 9.3. Considere o operador linear $T : \text{dom } T \subset \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$, e sejam $\pi_1 : \mathcal{G}(T) \rightarrow \text{dom } T$ e $\pi_2 : \mathcal{G}(T) \rightarrow \text{img } T$ as projeções naturais $\pi_1(\xi, T\xi) = \xi$ e $\pi_2(\xi, T\xi) = T\xi$, para $\xi \in \text{dom } T$. Mostre que tais projeções são operadores lineares contínuos.

É importante dar condições para que operadores fechados sejam contínuos, pois a condição de ser fechado em geral é mais simples de se verificar; o Teorema do Gráfico Fechado, apresentado adiante, diz que tais conceitos são equivalentes no caso de operadores lineares entre espaços de Banach. Um primeiro resultado nesta direção aparece na

Proposição 9.4. *Todo operador $T \in B(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ é fechado.*

Demonstração. Seja $\xi_n \rightarrow \xi$ com $T\xi_n \rightarrow \eta$. Como $\xi \in \text{dom } T$ e T é contínuo, vem que $T\xi_n \rightarrow T\xi = \eta$; logo T é fechado. ■

EXERCÍCIO 9.4. Mostre que todo operador linear $T : \text{dom } T \subset \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ com $\dim \mathcal{N}_1 < \infty$ é fechado.

Exemplo 9.5. [Não-Fechado e Limitado] Seja $\mathbf{1} : \text{dom } \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{B}$, com $\text{dom } \mathbf{1}$ um subespaço próprio denso de \mathcal{B} , o operador identidade $\mathbf{1}(\xi) = \xi$ para $\xi \in \text{dom } \mathbf{1}$; tal operador é limitado. Seja $(\xi_n) \subset \text{dom } \mathbf{1}$ com $\xi_n \rightarrow \xi \in \mathcal{B} \setminus \text{dom } \mathbf{1}$. Como $\xi_n \rightarrow \xi$ e $\mathbf{1}(\xi_n) \rightarrow \xi$, mas $\xi \notin \text{dom } \mathbf{1}$, este operador não é fechado. É um exemplo artificial, mas ilustra a diferença entre operador linear limitado e fechado. •

EXERCÍCIO 9.5. Se $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$, mostre que $T \in B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ é fechado se, e somente se, \mathcal{N} é um espaço de Banach.

OBSERVAÇÃO 9.6. Se $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{B}_2)$ com $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{B}_1$, então sua única extensão linear contínua $\bar{T} : \bar{\mathcal{N}}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$, definida no fecho de \mathcal{N}_1 , é um operador fechado (Proposição 9.4). Assim, vê-se que todo operador linear contínuo é “basicamente” fechado, e a artificialidade no Exemplo 9.5 é inevitável.

Exemplo 9.7. [Fechado e Não-Limitado] Sejam $C^1[0, \pi] \subset C[0, \pi]$ (ambos com a topologia da convergência uniforme) o subespaço das funções continuamente diferenciáveis em $[0, \pi]$ e $D : C^1[0, \pi] \rightarrow C[0, \pi]$, $(D\psi)(t) = \psi'(t)$. D não é contínuo, já que $\psi_n(t) = \sin(nt)/n \rightarrow 0$, enquanto $(D\psi_n)(t) = \cos(nt)$ não converge uniformemente a zero. Contudo, este operador é fechado. De fato, se $\psi_n \rightarrow \psi$ e $D\psi_n = \psi'_n \rightarrow \varphi$, então, como os limites são uniformes,

$$\int_0^t \varphi(s) ds = \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} \psi'_n(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \psi'_n(s) ds = \psi(t) - \psi(0).$$

Assim, $\psi \in \text{dom } D = C^1[0, \pi]$ e $(D\psi)(t) = \varphi(t)$, para todo t , e D é fechado. •

EXERCÍCIO 9.6. A partir do Exemplo 9.7, mostre que se $(\psi_j)_{j=1}^\infty \subset C^1[0, \pi]$ é tal que as séries $\psi(t) = \sum_{j=1}^\infty \psi_j(t)$ e $\varphi(t) = \sum_{j=1}^\infty \psi'_j(t)$ convergem uniformemente, então ψ é continuamente diferenciável e $\varphi = \psi'$.

Exemplo 9.8. [Não-Fechado e Não-Limitado] Sejam $\text{dom } T$ o conjunto das funções contínuas em $L^1[-1, 1]$ e $(T\psi)(t) = \psi(0)$, para todo t , como elemento de $L^1[-1, 1]$. Este operador não é contínuo nem fechado, pois $\psi_n(t) = e^{-|t|^n} \rightarrow 0$ em $L^1[-1, 1]$, mas para todo n tem-se $(T\psi_n)(t) = 1$, para todo t . •

Teorema 9.9 (Gráfico Fechado). *Se $T : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ é um operador linear, então T é contínuo se, e somente se, T é fechado.*

Demonstração. Uma das implicações no enunciado do Teorema do Gráfico Fechado já foi discutida anteriormente na Proposição 9.4; falta apenas mostrar que, sob tais condições, se o operador linear T é fechado, então ele é limitado: será utilizado o Teorema da Aplicação Aberta.

Por hipótese $\mathcal{G}(T)$ é fechado em $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, logo $\mathcal{G}(T)$ também é um espaço de Banach. As projeções π_1 e π_2 (veja o Exercício 9.3) são ambas lineares e contínuas. Além disso, π_1 é uma bijeção entre os espaços

de Banach $\mathcal{G}(T)$ e \mathcal{B}_1 ; assim, pelo Teorema da Aplicação Aberta (Corolário 8.5), sua inversa $\pi_1^{-1} : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{G}(T)$ é contínua. Como T é dado pela composição

$$T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1},$$

segue que ele é um operador limitado. ■

Exemplo 9.10. [Fechado e Não-Limitado] É essencial que a imagem do operador seja um espaço completo. O operador $T^{-1} : \text{img } T \rightarrow l^1(\mathbb{N})$ no Exercício 8.1 possui gráfico fechado mas não é contínuo. •

OBSERVAÇÃO 9.11. Poderia-se imaginar que um operador linear não é fechado porque se tomou um domínio muito pequeno, e considerando o fecho $\overline{\mathcal{G}(T)}$ em $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ obteria-se um operador fechado. Isto pode não funcionar, pois $\overline{\mathcal{G}(T)}$ não é necessariamente o gráfico de um operador; veja o Exemplo 9.8 em que o ponto $(0, 1)$ pertence ao $\overline{\mathcal{G}(T)}$, contudo não é da forma $(0, S0)$ para qualquer operador linear S . Os operadores T , para os quais $\overline{\mathcal{G}(T)}$ é o gráfico de uma extensão linear \overline{T} de T , são chamados de *operadores fecháveis* e \overline{T} é seu fecho.

EXERCÍCIO 9.7. Seja E um subespaço de $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$. Mostre que E é o gráfico de um operador linear se, e somente se, E não contém algum elemento da forma $(0, \eta)$, com $\eta \neq 0$.

Definição 9.12. Se T, S são operadores lineares fechados em \mathcal{N} , diz-se que T é S -limitado se $\text{dom } S \subset \text{dom } T$ e existem $a, b \geq 0$ de forma que $\|T\xi\| \leq a\|S\xi\| + b\|\xi\|$, para todo $\xi \in \text{dom } S$; o ínfimo dos valores de $a \geq 0$ que tal relação vale é chamado de S -limite de T (em geral b é função não-decrescente de a).

Em algumas situações este conceito permite tratar S como uma perturbação de T , mesmo para operadores fechados não-limitados, como é o caso do conhecido teorema de Kato-Rellich. Segue uma condição simples garantindo que T é S -limitado em espaços de Banach.

Proposição 9.13. Se T, S são operadores lineares fechados em \mathcal{B} com $\text{dom } S \subset \text{dom } T$ e existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo que $S - \lambda 1$ possui inversa em $\mathcal{B}(\mathcal{B})$, então T é S -limitado.

Demonstração. Como $\text{dom } S \subset \text{dom } T$ e T é fechado, segue que $T(S - \lambda 1)^{-1}$ está definido em todo \mathcal{B} e é fechado (verifique!). Assim,

pelo Teorema do Gráfico Fechado, este operador é limitado e existe $a \geq 0$ de modo que $\|T(S - \lambda 1)^{-1}\eta\| \leq a\|\eta\|$ para todo $\eta \in B$.

Se $\xi \in \text{dom } S$, então $\xi = (S - \lambda 1)^{-1}\eta$ para algum $\eta \in B$; portanto, $\eta = (S - \lambda 1)\xi$ e

$$\|T\xi\| \leq a\|\eta\| = a\|(S - \lambda 1)\xi\| \leq a\|S\xi\| + a|\lambda|\|\xi\|,$$

para todo $\xi \in \text{dom } S$, e T é S -limitado com $b = a|\lambda|$. ■

EXERCÍCIO 9.8. Se S é um operador linear fechado em B e $T \in B(B)$, confirme que T é S -limitado e com S -limite zero.

Notas

A noção de operador fechado foi introduzida por J. von Neumann, por volta de 1930. Uma demonstração de que o teorema da aplicação aberta segue do teorema do gráfico fechado aparece no Capítulo 23.

A introdução da norma do gráfico (Exercício 9.9) permite estudar operadores fechados como limitados (idéia de Friedrichs), e isto é mais uma forma de se ver que no mundo dos operadores não-limitados os operadores fechados estão, de certa maneira, próximos dos contínuos.

Se T é S -limitado também diz-se que T é *relativamente limitado* com relação a S . O Teorema de Kato-Rellich é uma das principais ferramentas utilizadas para mostrar que certas perturbações de operadores auto-adjuntos em espaços de Hilbert são auto-adjuntas: nesse contexto o conceito de operador relativamente limitado, com $a < 1$, é fundamental [Thayer (1987)], [de Oliveira (2009)].

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 9.9. Seja $T : \text{dom } T \subset B_1 \rightarrow B_2$ e considere a norma do gráfico de T

$$\|\xi\|_T = \|\xi\| + \|T\xi\|, \quad \xi \in \text{dom } T.$$

Mostre que se T é fechado, então $(\text{dom } T, \|\cdot\|_T)$ é um espaço de Banach.

EXERCÍCIO 9.10. a) Se $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathcal{X} = B(\mathcal{N}, B)$ para a qual $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ é Banach e $\|T_n\| \rightarrow 0$ implica em convergência forte $T_n \rightarrow 0$ (veja a Definição 14.5), mostre que $\|\cdot\|$ é equivalente à norma usual de $B(\mathcal{N}, B)$.

b) Verifique que $\|\xi\|_\infty = \max\{\|\xi\|, \|T\xi\|\}$ e, para todo $p > 1$, $\|\xi\|_p = (\|\xi\|^p + \|T\xi\|^p)^{1/p}$, são normas equivalentes à norma do gráfico de $T : \text{dom } T \subset \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$.

EXERCÍCIO 9.11. Sejam $\text{dom } T$ e $\text{dom } S$ os conjuntos das ψ em $L^2[-1, 1]$ satisfazendo, respectivamente, $\psi(t) = 0$ numa vizinhança de zero e $\psi(t)/t \in L^2[-1, 1]$, com

$$(T\psi)(t) = (S\psi)(t) = \frac{\psi(t)}{t}, \quad \forall t \in [-1, 1],$$

para ψ nos domínios apropriados. Mostre que T não é fechado, mas que S é um operador fechado.

EXERCÍCIO 9.12. Seja $T : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ um operador linear fechado. Demonstre que

a) Se T^{-1} existe, então ele também é fechado.

b) Se $S \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, então $T + S$ é fechado.

c) Se $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ o núcleo $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ é um subespaço vetorial fechado de \mathcal{N} (T pode não ser contínuo; compare com o caso em que $\lambda = 0$ e $\mathcal{N}_2 = \mathbb{F}$: Exercício 4.11; um caso muito simples é $\mathbf{1} : (C[0, 1], \|\cdot\|_1) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$).

EXERCÍCIO 9.13. Mostre que o operador identidade

$$\mathbf{1} : (C[0, 1], \|\cdot\|_1) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty), \quad \psi \mapsto \psi,$$

é fechado, contudo não é contínuo. Conclua que $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ não é completo (lembra que $\|\psi\|_1 = \int_0^1 |\psi(t)| dt$ e $\|\cdot\|_\infty$ é a norma da convergência uniforme)

EXERCÍCIO 9.14. Use o teorema do Gráfico Fechado para demonstrar o Corolário 8.5

EXERCÍCIO 9.15. Mostre que o operador linear $T : \text{dom } T \rightarrow C[0, \infty)$, com

$$\text{dom } T = \{\psi \in C[0, \infty) : \exists A > 0 \text{ com } |\psi(t)| \leq A/(1+t^n), \forall t \geq 0\}$$

($n > 0$ fixo), $(T\psi)(t) = t^n \psi(t)$, é fechado e não-limitado.

EXERCÍCIO 9.16. Use o Teorema do Gráfico Fechado para mostrar que se $T : l^p(\mathbb{N}) \rightarrow l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$, é linear e comuta com o operador shift $S(\xi_1, \xi_2, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$, então T é limitado.

EXERCÍCIO 9.17. Sejam T, S operadores lineares fechados em \mathcal{B} com $\text{dom } S \subset \text{dom } T$; considere $\text{dom } S$ com a norma do gráfico (Exercício 9.9). Mostre que T é S -limitado se, e somente se, $T : \text{dom } S \rightarrow \mathcal{B}$ é limitado.

EXERCÍCIO 9.18. Se T, S são operadores lineares fechados em \mathcal{B} com $\text{dom } S \subset \text{dom } T$, mostre que T é S -limitado se, e somente se, existem $c, d \geq 0$ de modo que $\|T\xi\|^2 \leq c^2 \|S\xi\|^2 + d^2 \|\xi\|^2$, para todo $\xi \in \text{dom } S$. Verifique também que o ínfimo dos valores de $c \geq 0$ que tal relação vale coincide com o S -limite de T .

EXERCÍCIO 9.19. Se T, S são operadores lineares fechados em \mathcal{N} e T é S -limitado com S -limite h , mostre que se $h < 1$ então T é $(T+S)$ -limitado com $(T+S)$ -limite $h/(1-h)$. Conclua que se $h < 1/2$, então o $(T+S)$ -limite de T é menor que 1.

Capítulo 10

Teorema de Hahn-Banach

Neste Capítulo será discutido o Teorema de Hahn-Banach. Aplicações importantes, como a noção de operador adjunto e convergências fracas estarão presentes em Capítulos posteriores, formando um dos principais conjuntos de resultados em Análise Funcional. O teorema de Hahn-Banach é um resultado sobre extensões, de funcionais definidos em subespaços, a todo espaço vetorial; note que nenhuma topologia é citada. Futuramente, esse teorema permitirá responder afirmativamente as seguintes questões: Em qualquer espaço normado existem funcionais lineares contínuos não-nulos? Existem em número suficiente para distinguir os pontos desse espaço? Existe um funcional contínuo (não-nulo) que se anula num subespaço fechado (próprio) dado?

A demonstração do teorema de Hahn-Banach será objeto do próximo Capítulo. Uma ferramenta importante neste contexto, a qual trata de famílias de infinitos conjuntos, é o Lema de Zorn.

10.1 Lema de Max Zorn

Definição 10.1. Uma *ordenação parcial* num conjunto X é uma relação binária \prec em X que é reflexiva ($\xi \prec \xi$, $\forall \xi \in X$), transitiva ($\xi \prec \eta$ e $\eta \prec \zeta \Rightarrow \xi \prec \zeta$) e antisimétrica ($\xi \prec \eta$ e $\eta \prec \xi \Rightarrow \xi = \eta$).

OBSERVAÇÃO 10.2. a) O termo “parcial” aparece porque pode haver elementos que não são comparáveis de acordo com a ordenação \prec dada.

b) Se \prec é uma ordenação parcial em X , então (X, \prec) é dito ser um *conjunto parcialmente ordenado*.

Definição 10.3. Um conjunto *totalmente ordenado* é um conjunto parcialmente ordenado no qual quaisquer dois elementos são comparáveis de acordo com a ordenação parcial dada.

Definição 10.4. Seja (X, \prec) um conjunto parcialmente ordenado. $\zeta \in X$ é um *elemento maximal* em X se para todo $\xi \in X$ com $\zeta \prec \xi$, segue-se que $\xi = \zeta$. Um elemento $\eta \in X$ é um *limite superior* de $Y \subset X$ se $\xi \prec \eta$, para todo $\xi \in Y$.

O próximo exemplo, bem como pequenas variações, é padrão e um ótimo guia para fixar as definições acima.

Exemplo 10.5. Denote por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X . A inclusão de conjuntos, ou seja, se $A, B \in \mathcal{P}(X)$, então $A \prec B$ se, e somente se, $A \subset B$, define uma ordenação parcial em $\mathcal{P}(X)$. O único elemento maximal de $\mathcal{P}(X)$ neste caso é X . •

Exemplo 10.6. O conjunto dos números reais \mathbb{R} com a ordenação usual \leq é totalmente ordenado; note que neste caso \mathbb{R} não possui elemento maximal. •

Axioma 10.7 (Lema de Zorn). *Um conjunto não-vazio parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado possui um limite superior, possui um elemento maximal.*

OBSERVAÇÃO 10.8. O termo “Lema” aparece apenas por razões históricas. O Lema de Zorn é equivalente ao Axioma da Escolha, o qual para muitos é intuitivamente aceitável, pelo menos em contraste com o Lema de Zorn. O produto cartesiano de uma família qualquer de conjuntos $\{X_t\}_{t \in J}$, denotado por $\prod_{t \in J} X_t$, é o conjunto de funções $\psi : J \rightarrow \bigcup_{t \in J} X_t$ com $\psi(t) \in X_t$ para todo $t \in J$; cada ψ é também chamada de *função escolha*. O Axioma da Escolha foi proposto por E. Zermelo no início do século XX e diz que “O produto cartesiano de uma família qualquer de conjuntos não-vazios é não-vazio.” Em 1963 P. J. Cohen demonstrou que este axioma é independente dos outros axiomas da Teoria dos Conjuntos. A noção de produto cartesiano de uma família arbitrária de conjuntos aparecerá em outras ocasiões neste texto.

O próximo resultado exemplifica como é normalmente aplicado o Lema de Zorn.

Proposição 10.9. *Todo espaço vetorial não-trivial (ou seja, que contém pelo menos um elemento não-nulo) possui uma base de Hamel.*

Demonstração. Sejam $X \neq \{0\}$ um espaço vetorial e V a coleção de todos subconjuntos linearmente independentes de X . Evidentemente $V \neq \emptyset$ e a inclusão de conjuntos define uma ordem parcial em V . A união de todos elementos num subconjunto totalmente ordenado de V é seu limite superior (o qual é linearmente independente; verifique!). Pelo Lema de Zorn, V possui um elemento maximal M . Será verificado que M é uma base de Hamel de X .

Denote por $W = \text{Lin}(M)$; é claro que $W \subset X$. Se $W \neq X$ existe $0 \neq \xi \in X \setminus W$ e $M \cup \{\xi\}$ seria um conjunto linearmente independente (verifique!) contendo propriamente M , o que contradiz sua maximalidade. Portanto, $W = X$ e M é uma base de Hamel de X . ■

10.2 Hahn-Banach

Como é tradicional, serão apresentadas duas versões do teorema de Hahn-Banach, uma para espaços vetoriais reais e outra para complexos; observe que várias de suas aplicações, garantindo a existência de extensões de funcionais lineares contínuos em espaços normados, também são comumente referidas como Hahn-Banach. Será importante o conceito de funcional sublinear.

Definição 10.10. Um funcional sublinear no espaço vetorial X é uma aplicação $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz para todos $\xi, \eta \in X$,

$$\begin{aligned} p(\xi + \eta) &\leq p(\xi) + p(\eta) \quad (\text{subaditividade}) \\ p(\alpha\xi) &= \alpha p(\xi), \quad \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

Exemplo 10.11. Uma norma, bem como uma seminorma, num espaço vetorial é um funcional sublinear. •

Teorema 10.12 (Hahn-Banach real). *Sejam X um espaço vetorial real e $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear. Se $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear definido no subespaço $Z \subset X$ que é dominado por p , ou seja,*

$$f(\zeta) \leq p(\zeta), \quad \forall \zeta \in Z.$$

então f possui uma extensão linear $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ que também é dominada por p , ou seja,

$$F(\xi) \leq p(\xi), \quad \forall \xi \in X.$$

F é chamada de extensão de Hahn-Banach de f .

Teorema 10.13 (Hahn-Banach complexo). *Sejam X um espaço vetorial (real ou complexo) e $p : X \rightarrow [0, \infty)$ satisfazendo*

$$\begin{aligned} p(\xi + \eta) &\leq p(\xi) + p(\eta), \quad \forall \xi, \eta \in X, \\ p(\alpha\xi) &= |\alpha|p(\xi), \quad \forall \xi \in X, \alpha \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

Se $f : Z \rightarrow \mathbb{F}$ é um funcional linear definido no subespaço $Z \subset X$ (X, Z e f sobre o mesmo corpo) com $|f(\zeta)| \leq p(\zeta), \forall \zeta \in Z$ (i.e., f é dominado por p), então f possui uma extensão linear $F : X \rightarrow \mathbb{F}$ dominada por p , ou seja,

$$|F(\xi)| \leq p(\xi), \quad \forall \xi \in X.$$

F é chamada de extensão de Hahn-Banach de f .

OBSERVAÇÃO 10.14. a) Note que o Teorema 10.13 aplica-se também ao caso de funcionais reais.

b) Na versão real do Hahn-Banach o funcional $p(\xi)$ não é necessariamente positivo para todo ξ ; veja o Exercício 10.6.

c) O ponto principal do teorema de Hahn-Banach não é a simples existência da extensão do funcional linear, mas sim a existência de uma extensão linear dominada por p . Por exemplo, se $\{e_j\}$ é uma base de Hamel de Z e $\{e_j\} \cup \{g_k\}$ uma base de Hamel de X , então para qualquer coleção de escalares $\{\alpha_k\}$ o funcional F definido por (as somas que seguem são finitas)

$$F\left(\sum_j a_j e_j + \sum_k b_k g_k\right) = f\left(\sum_j a_j e_j\right) + \sum_k b_k \alpha_k$$

é uma extensão linear de f a todo X .

Uma consequência importante do Teorema de Hahn-Banach é a existência de extensões limitadas de funcionais limitados definidos em subespaços de espaços vetoriais normados. Algumas vezes este resultado é enunciado como “Teorema de Hahn-Banach”.

Corolário 10.15. *Seja M um subespaço de \mathcal{N} (ambos sobre o mesmo corpo). Então todo f em M^* , o dual de M , possui uma extensão $F \in \mathcal{N}^*$ com $\|F\| = \|f\|$.*

Demonstração. Considere o funcional $p : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(\xi) = \|f\|\|\xi\|$, o qual satisfaz $|f(\eta)| \leq p(\eta)$, para todo $\eta \in M$. Pelo teorema de Hahn-Banach existe uma extensão $F \in \mathcal{N}^*$ de f com $|F(\xi)| \leq p(\xi) = \|f\|\|\xi\|$, para todo $\xi \in \mathcal{N}$; disto segue que $\|F\| \leq \|f\|$. Como F é uma extensão de f tem-se $\|f\| \leq \|F\|$ e, portanto, $\|f\| = \|F\|$. ■

Exemplo 10.16. Em \mathbb{F}^2 com a norma

$$\|(\xi_1, \xi_2)\|_\infty = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\},$$

considere $X = \text{Lin}(\{(1, 1)\})$; então o funcional $f : X \rightarrow \mathbb{F}$, dado por $f(\xi_1, \xi_1) = \xi_1$ possui as extensões $g(\xi_1, \xi_2) = \xi_1$ e $h(\xi_1, \xi_2) = \xi_2$ satisfazendo as conclusões do Corolário 10.15. Compare com o Exemplo 11.5. Veja as Notas no Capítulo 11 para uma observação sobre a unicidade da extensão de Hahn-Banach. •

Exemplo 10.17. No caso complexo, tem-se que as conclusões do Corolário 10.15 podem não valer se o subespaço vetorial M for real.

Dado um espaço normado complexo \mathcal{N} de dimensão infinita, considere uma sequência $(\xi_1, \eta_2, \eta_3, \dots)$ normalizada e linearmente independente neste espaço. Agora, para $j \geq 2$ defina

$$\zeta_j = \frac{\eta_j - j\xi_1}{\|\eta_j - j\xi_1\|},$$

e note que $(\xi_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots)$ também é normalizada e linearmente independente. No que segue r_j, θ_j sempre denotarão números reais e serão construídas sequências $(\theta_j)_{j=1}^\infty$ e $(\zeta_j := e^{i\theta_j} \zeta_j)_{j=1}^\infty$, sendo $\theta_1 = 0$ e $\zeta_1 = \xi_1$, de forma que para todo n seja satisfeita a condição chave

$$|r_1| \leq \|r_1\xi_1 + r_2\zeta_2 + \dots + r_n\xi_n\|, \quad \forall r_1, \dots, r_n.$$

Supondo construídas tais sequências, sejam M o subespaço vetorial obtido pelas combinações lineares reais de $(\xi_j)_{j=1}^\infty$ e $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $f(r_1\xi_1 + r_2\zeta_2 + \dots + r_n\xi_n) = r_1$; então, f é linear, pela condição chave

$\|f\| \leq 1$ e como $f(\xi_1) = 1$ segue que $\|f\| = 1$. Contudo, se $F : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma extensão linear complexa de f , tem-se que

$$F(\eta_j) = F\left(j\xi_1 + \|\eta_j - j\xi_1\|e^{-i\theta_j}\xi_j\right) = j, \quad \forall j \geq 2,$$

e F não é limitado. Portanto, todo espaço normado complexo, de dimensão infinita, possui um subespaço vetorial real sobre o qual existe um funcional linear limitado que não possui extensão linear complexa limitada para todo espaço.

Resta construir $(\theta_j)_{j=2}^{\infty}$ e verificar a condição chave, o que será feito por indução. Essa condição é trivial para $n = 1$; supondo que $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ (e logo ξ_1, \dots, ξ_{n-1}) já foram encontrados, seja Λ_n a região do plano complexo dada por $z \in \mathbb{C}$ de forma que existam r_2, \dots, r_{n-1} com $\|\xi_1 + r_2\xi_2 + \dots + r_{n-1}\xi_{n-1} + z\xi_n\| < 1$, a qual é um conjunto aberto e convexo; como a origem não pertence a Λ_n , segue que existe uma reta $\{z(r) = re^{i\theta_n} : r \in \mathbb{R}\}$ em \mathbb{C} , determinada por algum θ_n fixo, cuja intersecção com Λ_n é vazia (logo, sobre essa reta a desigualdade anterior não se aplica). Definindo $\xi_n = e^{i\theta_n}\zeta_n$, tem-se que $re^{i\theta_n}\zeta_n = r\xi_n$. Assim, se $r_1 = 0$ a condição chave é trivial, e se $r_1 \neq 0$, denotando-se $s_j = r_j/r_1$ tem-se, pela construção de θ_n , que para todos r_2, \dots, r_n vale

$$\|r_1\xi_1 + r_2\xi_2 + \dots + r_n\xi_n\| = |r_1| \|\xi_1 + s_2\xi_2 + \dots + s_n\xi_n\| \geq |r_1|,$$

o que é a condição chave para $r_1 \neq 0$. •

EXERCÍCIO 10.1. Verifique que a região Λ_n , no Exemplo 10.17, é convexa.

Notas

A demonstração de Paul J. Cohen, de que o Axioma da Escolha é independente dos outros axiomas de Zermelo-Fraenkel da teoria dos conjuntos (incluindo a hipótese do contínuo), foi enunciada em dois trabalhos, *The Independence of the Continuum Hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50, (1963) 1143-1148 e *The Independence of the Continuum Hypothesis*. II, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 51, (1964) 105-110. Há uma construção famosa (a qual aparece na maioria dos textos sobre Medida e Integração) de conjuntos não-mensuráveis Lebesgue, devido à Vitali, que faz uso do Axioma da Escolha; se não se supõe válido este "axioma", R. Solovay mostrou que há um modelo de Matemática no qual todo subconjunto de \mathbb{R} é mensurável Lebesgue. Um excelente tratamento a respeito do Axioma da Escolha e suas principais equivalências aparece no livro S.-Y. T. Lin e Y.-F. Lin, "Set Theory: an Intuitive Approach", Boston, Houghton Mifflin Company, 1974.

Poderia-se imaginar que sempre existem funcionais lineares contínuos (não-nulos), em espaços vetoriais, caso as operações de soma de vetores e multiplicação por escalar fossem contínuas na topologia dada, ou seja, nos chamados Espaços Vetoriais Topológicos; como afirmado no início deste Capítulo e demonstrado no Capítulo 12, isto é verdadeiro em espaços normados, mas pode não ser em geral. Em 1941, La Salle (*Pseudo-Normed Linear Spaces*, Duke Math. J. 8, 131-135) mostrou que tais funcionais existem se, e somente se, o espaço possui um aberto, contendo a origem, convexo e distinto de todo espaço; um ano antes, M. M. Day, *The Spaces L^p with $0 < p < 1$* , Bull. Amer. Math. Soc. 46, (1940) 816-823, já havia mostrado que o único funcional linear contínuo em L^p , com $0 < p < 1$, é o funcional nulo.

Neste ponto é natural indagar sobre a existência de extensões lineares contínuas (preservando normas), de operadores lineares contínuos, definidos em subespaços vetoriais próprios de \mathcal{N}_1 com valores em \mathcal{N}_2 . Se $\mathcal{N}_2 = \mathbb{F}$ é o Teorema de Hahn-Banach; em [Nachbin (1950)] aparece uma interessante caracterização, no caso real, dos espaços em que existem essas extensões, em termos de propriedades de intersecção de bolas (veja J. Mira, *A unified approach to the extension problem for normed spaces*, Boll. Un. Mat. Ital. A 6 1, (1982) 225-232, para uma adaptação desse resultado de Nachbin, em que se supõe que os espaços envolvidos são de Banach sobre corpos mais gerais). Existem discussões específicas se $\dim \mathcal{N}_2 < \infty$ ou se \mathcal{N}_1 é um espaço de Hilbert (consulte os comentários sobre o Capítulo 1 em [Brezis (1983)]).

A versão complexa do Teorema de Hahn-Banach foi publicada em 1938 no trabalho de H. F. Bohnenblust e A. Sobczyk, *Extensions of Functionals on Complex Linear Spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 44, 91-93, a construção no Exemplo 10.17 também apareceu nesse trabalho. Finalmente, uma descrição detalhada e atual do Teorema de Hahn-Banach e generalizações podem ser encontradas no belo artigo [Buskes (1993)] (agradeço ao Prof. Buskes por me enviar uma cópia de seu trabalho).

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 10.2. Mostre que o conjunto dos números complexos \mathbb{C} torna-se parcialmente ordenado com a relação $\zeta \prec \eta$ se $\operatorname{Re} \zeta \leq \operatorname{Re} \eta$ e $\operatorname{Im} \zeta \leq \operatorname{Im} \eta$.

EXERCÍCIO 10.3. Mostre que um conjunto parcialmente ordenado (X, \prec) pode ter no máximo um elemento *mínimo*, ou seja, um $\eta \in X$ satisfazendo $\eta \prec \xi$, para todo $\xi \in X$. Idem para elemento *máximo* (definição por conta dos leitores).

EXERCÍCIO 10.4. Use a Proposição 10.9 para mostrar que todo espaço vetorial X admite uma norma.

EXERCÍCIO 10.5. Este exercício indica como ordenações podem se relacionar com o Axioma da Escolha, numa tentativa de deixar o Lema de Zorn mais aceitável (para os “pedestres”, como dizem alguns autores). Um conjunto totalmente ordenado X é *bem-ordenado* se todo $\emptyset \neq A \subset X$ contém um elemento mínimo em A (veja o Exercício 10.3). O Lema de Zorn é também equivalente ao Teorema da Boa Ordenação de Zermelo: “Em todo conjunto existe uma ordenação que o torna bem-ordenado.” Use a seguinte construção para mostrar que isto segue o Axioma da Escolha: Dada uma família de conjuntos não-vazios $\{X_t\}_{t \in J}$, seja $X = \bigcup_{t \in J} X_t$, o qual pode ser bem-ordenado com \prec ; mostre que $\psi(t)$ dada pelo mínimo elemento de X_t , com essa ordenação \prec , é uma função escolha para $\{X_t\}_{t \in J}$.

EXERCÍCIO 10.6. Mostre que $p : l^\infty(\mathbb{N})(\text{real}) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$p(\xi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n,$$

sendo $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$, é um funcional sublinear. Note que este é um exemplo em que o funcional sublinear p não é sempre positivo.

EXERCÍCIO 10.7. Seja p como no Teorema de Hahn-Banach complexo. Mostre que

$$|p(\xi) - p(\eta)| \leq p(\xi - \eta), \quad \forall \xi, \eta \in X$$

EXERCÍCIO 10.8. Mostre que se um funcional sublinear num espaço normado \mathcal{N} é contínuo em $\xi = 0$, então ele é contínuo em todo ponto de \mathcal{N} .

EXERCÍCIO 10.9. Se o espaço normado $\mathcal{N} \neq \{0\}$ (ou seja, é não-trivial), mostre que seu dual $\mathcal{N}^* \neq \{0\}$

EXERCÍCIO 10.10. Verifique as seguintes propriedades do funcional sublinear $p : X \rightarrow \mathbb{R}$: a) $p(0) \geq 0$; b) $\max\{p(\xi), p(-\xi)\} \geq 0, \forall \xi \in X$; c) $q(\xi) = \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha\xi)$ é uma seminorma; d) se $\{p_j\}$ é uma família de funcionais sublineares em que $\{p_j(\xi)\}$ é limitado para cada $\xi \in X$, então $p(\xi) := \sup_j p_j(\xi)$ também é um funcional sublinear.

Capítulo 11

Demonstração do Teorema de Hahn-Banach

Este Capítulo destina-se à demonstração do Teorema de Hahn-Banach. Inicialmente será demonstrada a versão real, a qual será utilizada na demonstração da versão complexa. A ponte entre essas duas versões será feita por um lema, o qual relaciona funcionais complexos com reais e possui interesse próprio.

Demonstração. [**Hahn-Banach (real)**] Seja $G = \{g_t\}$ a coleção de extensões lineares $g_t : Z_t \rightarrow \mathbb{R}$ de f (com $Z \subset Z_t \subset X, \forall t$) que satisfazem $g_t(\xi) \leq p(\xi)$ em seus respectivos domínios Z_t . Como $f \in G$ segue que $G \neq \emptyset$ e é parcialmente ordenado, em que se define $g_t \prec g_s$ se $Z_t \subset Z_s$ e $g_t(\xi) = g_s(\xi)$ para $\xi \in Z_t$. Se $\{g_t\}_{t \in J}$ é um subconjunto totalmente ordenado de G , então $\Lambda = \bigcup_{t \in J} Z_t$, sendo que a união de uma família crescente de subespaços vetoriais é também um subespaço vetorial, e

$$g : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\xi) := g_t(\xi) \text{ se } \xi \in Z_t,$$

está bem-definido e, ainda, $g(\xi) \leq p(\xi)$, para todo $\xi \in \Lambda$. Como para todo $t \in J$ tem-se $g_t \prec g$, conclui-se que cada família totalmente ordenada em G possui um limite superior e, pelo Lema de Zorn, G possui um elemento maximal F definido em $X_0 \subset X$ satisfazendo $F(\xi) \leq p(\xi)$ se $\xi \in X_0$. Em seguida será mostrado que $X_0 = X$, pois de outra maneira encontraria-se uma contradição com a maximalidade de F .

Se $X_0 = X$ não há mais o que demonstrar, assim suponha que exista $0 \neq \eta \in X \setminus X_0$. Basta demonstrar que neste caso existe uma extensão linear \tilde{F} de F ao espaço vetorial $Y = \text{Lin}(X_0 \cup \{\eta\})$ com $\tilde{F} \leq p$.

Denote por \tilde{F} uma extensão linear qualquer de F a Y (que sempre existe, bastando atribuir um valor qualquer a $\tilde{F}(\eta)$). Como cada ξ em Y pode ser escrito na forma $\xi = \zeta + \alpha\eta$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\zeta \in X_0$, tem-se que para cada elemento $\xi \in Y$

$$\tilde{F}(\xi) = \tilde{F}(\zeta + \alpha\eta) = F(\zeta) + \alpha\tilde{F}(\eta), \quad \forall \zeta \in X_0, \alpha \in \mathbb{R};$$

a tarefa agora passa ser a de mostrar que se pode escolher $\tilde{F}(\eta)$ de forma apropriada (veja a Observação 10.14), ou seja, que satisfaça $\tilde{F} \leq p$. Para quaisquer $\zeta_1, \zeta_2 \in X_0$ tem-se

$$F(\zeta_1) + F(\zeta_2) = F(\zeta_1 + \zeta_2) \leq p(\zeta_1 + \zeta_2) \leq p(\zeta_1 - \eta) + p(\zeta_2 + \eta),$$

ou ainda,

$$F(\zeta_1) - p(\zeta_1 - \eta) \leq p(\zeta_2 + \eta) - F(\zeta_2).$$

Portanto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ de maneira que

$$\sup_{\zeta_1 \in X_0} \{F(\zeta_1) - p(\zeta_1 - \eta)\} \leq \lambda \leq \inf_{\zeta_2 \in X_0} \{p(\zeta_2 + \eta) - F(\zeta_2)\}.$$

Usando a construção acima, defina $\tilde{F} : Y \rightarrow \mathbb{R}$, extensão linear de F com $\tilde{F}(\eta) = \lambda$. Para verificar que para todo $\xi \in Y$ tem-se $\tilde{F}(\xi) \leq p(\xi)$, será usada novamente a representação $\xi = \zeta + \alpha\eta$. Se $\alpha > 0$ tem-se

$$\tilde{F}(\xi) = F(\zeta) + \alpha\lambda \leq F(\zeta) + \alpha \left[p\left(\frac{\zeta}{\alpha} + \eta\right) - F\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) \right] = p(\zeta + \alpha\eta),$$

enquanto para $\alpha < 0$ (note que o caso $\alpha = 0$ é trivial),

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\zeta + \alpha\eta) &= \tilde{F}(\zeta - |\alpha|\eta) = F(\zeta) - |\alpha|\lambda \\ &\leq F(\zeta) - |\alpha|[F(\zeta/|\alpha|) - p(\zeta/|\alpha| - \eta)] \\ &= |\alpha|[p(\zeta/|\alpha| - \eta) - F(\zeta/|\alpha|)] = p(\zeta + \alpha\eta). \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{F}(\xi) \leq p(\xi)$ para cada $\xi \in Y$, o que contradiz a maximalidade de F se $X_0 \neq X$, demonstrando o Teorema 10.12. ■

Note que a demonstração acima no caso real utiliza a ordenação em \mathbb{R} , uma estrutura que não está presente em \mathbb{C} .

Definição 11.1. Um funcional linear real num espaço vetorial complexo X é um funcional $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz $h(\xi + \eta) = h(\xi) + h(\eta)$ e $h(\alpha\xi) = \alpha h(\xi)$ para todos $\xi, \eta \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

EXERCÍCIO 11.1. Se $z = x + iy$ é um número complexo, verifique que $z = \operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z$.

Lema 11.2. *Seja X um espaço vetorial complexo.*

i.) *Se $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear real, então $f : X \rightarrow \mathbb{C}$,*

$$f(\xi) = h(\xi) - ih(i\xi), \quad \xi \in X,$$

é um funcional linear complexo.

ii.) *Se $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear complexo, então existe um funcional linear real $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que*

$$f(\xi) = h(\xi) - ih(i\xi), \quad \xi \in X.$$

Em ambos os casos tem-se $h = \operatorname{Re} f$.

Demonstração. A motivação para a construção nesta demonstração vem da seguinte observação. Se $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear, então $g(i\xi) = \operatorname{Re} g(i\xi) + i\operatorname{Im} g(i\xi) = ig(\xi) = i\operatorname{Re} g(\xi) - \operatorname{Im} g(\xi)$, ou seja, vale a relação $\operatorname{Im} g(\xi) = -\operatorname{Re} g(i\xi)$.

i. Dado o funcional linear real h defina $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, $f(\xi) = h(\xi) - ih(i\xi)$. Para mostrar que f é linear complexo basta verificar que $f(i\xi) = if(\xi)$, já que h é linear real. Explicitamente,

$$f(i\xi) = h(i\xi) - ih(-\xi) = h(i\xi) + ih(\xi) = if(\xi).$$

ii. Dado o funcional linear complexo f , seja $h = \operatorname{Re} f$, o qual é claramente linear real; usando a motivação acima,

$$\operatorname{Im} f(\xi) = -\operatorname{Re} f(i\xi) = -h(i\xi),$$

e segue que $f(\xi) = h(\xi) - ih(i\xi)$. ■

Demonstração. [**Hahn-Banach (complexo)**] Seja $h = \operatorname{Re} f$, o qual é um funcional linear real em Z . Assim, como

$$h(\zeta) \leq |f(\zeta)| \leq p(\zeta), \quad \zeta \in Z,$$

vem do Teorema de Hahn-Banach real (se X for complexo, considere X e Z restritos à multiplicação por escalares reais, o que os tornam

espaços vetoriais reais) que existe uma extensão linear real $H : X \rightarrow \mathbb{R}$ de h com $H(\xi) \leq p(\xi)$, para todo $\xi \in X$. Se f é real a demonstração já terminou. Suponha então que f seja complexo; pelo Lema 11.2, $f(\zeta) = h(\zeta) - ih(i\zeta)$.

Defina $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ por $F(\xi) = H(\xi) - iH(i\xi)$, que claramente estende f e, pelo Lema 11.2, é linear complexo. Falta apenas mostrar que $|F(\xi)| \leq p(\xi)$, $\forall \xi \in X$. Se $F(\xi) = 0$ isto é claro, pois $p(\xi) \geq 0$. Se $F(\xi) \neq 0$, então existe $0 \leq \theta < 2\pi$ de forma que $F(\xi) = e^{i\theta}|F(\xi)|$; pela linearidade de F vem que

$$|F(\xi)| = F(e^{-i\theta}\xi) = \operatorname{Re}(F(e^{-i\theta}\xi)) = H(e^{-i\theta}\xi) \leq p(e^{-i\theta}\xi) = p(\xi),$$

e o Teorema 10.13 fica demonstrado. ■

Agora será discutido algo sobre a unicidade da extensão de Hahn-Banach.

Exemplo 11.3. Sejam Z um subespaço do espaço vetorial X , e $p, f : Z \rightarrow \mathbb{C}$, como no Teorema de Hahn-Banach. Se existem duas extensões distintas de Hahn-Banach $F_0, F_1 : X \rightarrow \mathbb{C}$ de f , então para qualquer $s \in [0, 1]$ considere o funcional F_s dado por

$$F_s(\xi) := sF_1(\xi) + (1-s)F_0(\xi), \quad \xi \in X.$$

Note que F_s é linear e para todo $\zeta \in Z$ tem-se

$$F_s(\zeta) = sF_1(\zeta) + (1-s)F_0(\zeta) = sf(\zeta) + (1-s)f(\zeta) = f(\zeta),$$

e logo F_s é uma extensão linear de f . Já que $|F_0(\xi)| \leq p(\xi)$ e $|F_1(\xi)| \leq p(\xi)$, segue que

$$|F_s(\xi)| \leq s|F_1(\xi)| + (1-s)|F_0(\xi)| \leq p(\xi),$$

e F_s é de fato uma extensão de Hahn-Banach de f para cada $s \in [0, 1]$. Portanto, existem infinitas de tais extensões. •

Um espaço normado é *estritamente convexo* se $\|(\xi + \eta)/2\| < 1$ para todo $\xi \neq \eta$ com $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$; $l^p(\mathbb{N})$ é estritamente convexo se, e somente se, $1 < p < \infty$ (veja o Exercício 11.9); os espaços de Hilbert, discutidos no Capítulo 17, são destacados exemplos de espaços estritamente convexos. Do ponto de vista geométrico, \mathcal{N} é estritamente convexo se o

ponto médio de qualquer segmento linear ligando dois pontos distintos da esfera unitária $S(0; 1)$ está no interior da bola unitária $\bar{B}(0; 1)$; de fato, o raio unitário é imaterial e tem-se interpretações similares para qualquer esfera $S(0; r)$.

Proposição 11.4. *Se \mathcal{N}^* é estritamente convexo, então toda extensão linear de Hahn-Banach que preserva norma (como no Corolário 10.15) é única.*

Demonstração. Se M é um subespaço de \mathcal{N} e $f \in M^*$, sejam $F_1, F_2 \in \mathcal{N}^*$ duas extensões de f que preservam norma. Como $(F_1 + F_2)/2 \in \mathcal{N}^*$ é uma outra extensão de f , tem-se que $\|f\| \leq \|(F_1 + F_2)/2\|$. Agora,

$$\left\| \frac{1}{2}(F_1 + F_2) \right\| \leq \frac{1}{2}(\|F_1\| + \|F_2\|) = \|f\|,$$

de forma que $\|(F_1 + F_2)/2\| = \|f\|$, ou seja, $(F_1 + F_2)/2$ também preserva a norma de f . Sendo \mathcal{N}^* estritamente convexo, segue que $F_1 = F_2$. ■

Exemplo 11.5. Seja $\mathcal{N} = \mathbb{R}^2$ com a norma euclidiana, $a \in \mathbb{R}$, $Z = Z_a := \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \xi_2 = a\xi_1\}$, e o funcional linear $f : Z_a \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1, \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in Z.$$

Note que $|f(\xi_1, \xi_2)|^2 = |\xi_1|^2 = \frac{1}{1+a^2} \|(\xi_1, \xi_2)\|^2$, de forma que $\|f\| = 1/\sqrt{1+a^2}$. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma extensão de Hahn-Banach de f como no Corolário 10.15. Será argumentado que tal extensão é única e F será encontrada explicitamente; compare com o Exemplo 10.16.

Escreva $c = F(1, 0)$, $d = F(0, 1)$, e note que $F(\xi_1, \xi_2) = c\xi_1 + d\xi_2$, para todo $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. Cada extensão é descrita por um par c, d conveniente. Como F é uma extensão de f , tem-se que

$$c\xi_1 + ad\xi_1 = F(\xi_1, a\xi_1) = f(\xi_1, a\xi_1) = \xi_1, \quad \forall \xi_1 \in \mathbb{R},$$

o que resulta numa primeira equação $c + ad = 1$. Como $\|F\|^2 = c^2 + d^2$ é igual a $\|f\|^2 = 1/(1+a^2)$, uma segunda equação $c^2 + d^2 = 1/(1+a^2)$ é obtida. Agora, essas equações juntas possuem apenas uma solução

$$c = \frac{1}{1+a^2}, \quad d = \frac{a}{1+a^2},$$

e assim

$$F(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1}{1+a^2} + \frac{a\xi_2}{1+a^2},$$

o qual é a única extensão de Hahn-Banach de f . No caso $a = 0$, a única extensão de Hahn-Banach é simplesmente $F(\xi_1, \xi_2) = \xi_1$. •

Exemplo 11.6. Seja $\mathcal{N} = C[-1, 1]$, M o subespaço de \mathcal{N} das funções constantes, e $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ o funcional contínuo $f(\psi) = \psi(0)$, para todo $\psi \in \mathcal{N}$. Então, para cada $t_0 \in [-1, 1]$ fixo, o funcional $F_{t_0} : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $F_{t_0}(\psi) = \psi(t_0)$, é uma extensão linear de f com $\|F_{t_0}\| = \|f\| = 1$. Logo, neste caso, f tem infinitas extensões (como no Corolário 10.15) de Hahn-Banach distintas e parametrizadas por t_0 . •

Notas

A versão complexa do Teorema de Hahn-Banach surgiu aproximadamente uma década após a versão real. O resultado no caso real foi de Hahn em 1927 e, de forma mais geral, devida a Banach em 1929 (o qual aparentemente desconhecia o trabalho de Hahn); muito embora, de fato, uma primeira versão tenha aparecido num trabalho de Helly em 1922; veja [Hochstadt (1979)]. Nesse trabalho Banach usou o funcional sublinear p , uma contribuição importante para o desenvolvimento da teoria dos espaços localmente convexos.

Hahn-Banach não se refere à unicidade da extensão; de fato, em geral não há unicidade, como discutido em R. R. Phelps, *Uniqueness of the Hahn-Banach extensions and unique best approximation*, Trans. Amer. Math. Soc. **95**, (1960) 238–255. Em S. R. Foguel, *On a theorem of A. E. Taylor*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958) 325, concluiu-se que num espaço normado \mathcal{N} toda extensão de Hahn-Banach que preserva norma (veja a Proposição 11.4) é única se, e somente se, seu dual \mathcal{N}^* é estritamente convexo.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 11.2. Demonstre o Corolário 10.15 no caso em que \mathcal{N} é separável, sem usar o Lema de Zorn.

EXERCÍCIO 11.3. Se X é um espaço vetorial real e $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear, mostre que para cada $\eta \in X$ existe um funcional linear $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz $f(\eta) = p(\eta)$ e $f(\xi) \leq p(\xi)$, $\forall \xi \in X$. Enuncie e demonstre uma versão deste resultado no caso em que X é complexo.

EXERCÍCIO 11.4. Verifique que toda seminorma num espaço normado é um funcional sublinear. Vale a recíproca?

EXERCÍCIO 11.5. Se $p : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é subaditivo ($p(\xi + \eta) \leq p(\xi) + p(\eta)$), mostre que se $p(\xi) \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{N}$ com $\|\xi\| \geq r > 0$, então $p(\xi) \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{N}$

EXERCÍCIO 11.6. Sejam \mathcal{N} um espaço normado complexo e $h : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear real limitado. Mostre que $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$, dado por $f(\xi) = h(\xi) - ih(i\xi)$, pertence ao dual de \mathcal{N} e $\|f\| = \|h\|$.

EXERCÍCIO 11.7. [Versão do Teorema de Hahn-Banach real] Sejam X um espaço vetorial real, Y um subespaço de X e \mathcal{C} um cone positivo em X (ou seja, $(\xi + \eta), t\xi \in \mathcal{C}$ se $\xi, \eta \in \mathcal{C}$ e $t \geq 0$), de forma que para cada $\xi \in X$ exista $\eta \in Y$ com $(\eta - \xi) \in \mathcal{C}$. Suponha que $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear com $f(\eta) \geq 0$ se $\eta \in (\mathcal{C} \cap Y)$. Defina $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $p(\xi) = \inf\{f(\eta) : \eta \in Y, (\eta - \xi) \in \mathcal{C}\}$. Verifique que p é um funcional sublinear e demonstre que existe um funcional linear $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ que estende f e $F(\xi) \geq 0$ se $\xi \in \mathcal{C}$.

EXERCÍCIO 11.8. Sejam $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ dois espaços normados não-triviais. Use o Teorema de Hahn-Banach para mostrar que se qualquer operador linear limitado e não-nulo $T : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ é sobrejetor, então $\dim \mathcal{N}_2 = 1$.

EXERCÍCIO 11.9. Use a desigualdade de Minkowski para mostrar que $l^p(\mathbb{N})$ é estritamente convexo se, e somente se, $1 < p < \infty$.

EXERCÍCIO 11.10. Mostre que se existem duas extensões distintas de Hahn-Banach de $f \in M^*$, como no Corolário 10.15, então existem infinitas de tais extensões que preservam a norma de f .

EXERCÍCIO 11.11. Sejam $M = \{\xi \in l^1(\mathbb{N}) : \xi_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}\}$ e $0 \neq f \in M^*$. Use que $l^1(\mathbb{N})^* = l^\infty(\mathbb{N})$ (veja a Proposição 13.4) para encontrar explicitamente infinitas extensões lineares de f que preservam norma (como no Corolário 10.15).

Capítulo 12

Aplicações do Teorema de Hahn-Banach

Neste e nos próximos Capítulos serão discutidas aplicações importantes do Teorema de Hahn-Banach, algumas delas confundidas com o próprio Teorema de Hahn-Banach na literatura. Nos Capítulos anteriores apresentou-se esse teorema como um resultado de extensão; agora as aplicações referem-se principalmente aos espaços duais e separabilidade. Com tais ferramentas será possível discutir algo da interação entre os espaços normados e seus duais equipados com topologias apropriadas.

O próximo resultado será utilizado repetidas vezes no texto.

Teorema 12.1. *Sejam \mathcal{N} um espaço normado não-trivial e \mathcal{N}^* seu espaço dual. Então:*

- i.) *Se $0 \neq \xi \in \mathcal{N}$, então existe $f \in \mathcal{N}^*$ com $f(\xi) = \|\xi\|$ e $\|f\| = 1$.*
- ii.) *Se η e ξ são elementos distintos de \mathcal{N} , então existe $f \in \mathcal{N}^*$ de modo que $f(\xi) \neq f(\eta)$ (separa pontos).*
- iii.) *Se $\xi \in \mathcal{N}$ satisfaz $f(\xi) = 0$, para todo $f \in \mathcal{N}^*$, então $\xi = 0$.*
- iv.) *Se $\xi \in \mathcal{N}$, então*

$$\|\xi\| = \sup_{0 \neq f \in \mathcal{N}^*} \frac{|f(\xi)|}{\|f\|} = \max_{0 \neq f \in \mathcal{N}^*} \frac{|f(\xi)|}{\|f\|}$$

Demonstração. i.) Basta aplicar Hahn-Banach sob as seguintes condições. O funcional sublinear é $p : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $p(\eta) = \|\eta\|$; o

subespaço $Z = \text{Lin}(\{\xi\})$ e o funcional linear $g : Z \rightarrow \mathbf{F}$ definido como $g(\alpha\xi) = \alpha\|\xi\|$, para todo $\alpha \in \mathbf{F}$.

ii.) Se $\xi \neq \eta$, então $\xi - \eta \neq 0$, e pelo item i.) acima existe $f \in \mathcal{N}^*$ de forma que $0 \neq f(\xi - \eta) = f(\xi) - f(\eta)$.

iii.) É imediato de ii.).

iv.) Se $\xi = 0$ o resultado é claro. Suponha que $\xi \neq 0$; pelo item i.) existe $g \in \mathcal{N}^*$ com $\|g\| = 1$ e $g(\xi) = \|\xi\|$. Assim,

$$\|\xi\| = \frac{g(\xi)}{\|g\|} \leq \sup_{0 \neq f \in \mathcal{N}^*} \frac{|f(\xi)|}{\|f\|} \leq \sup_{0 \neq f \in \mathcal{N}^*} \frac{\|f\| \|\xi\|}{\|f\|} = \|\xi\|.$$

O funcional g acima garante que o 'sup' pode ser substituído por 'max'. ■

Uma família G de funcionais separa pontos de um conjunto X se para cada par de elementos $\xi, \eta \in X$ distintos, existe $f \in G$ com $f(\xi) \neq f(\eta)$; assim, pelo Teorema 12.1, \mathcal{N}^* separa pontos de \mathcal{N} .

EXERCÍCIO 12.1. Sejam $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \subset \mathcal{N}$ um conjunto linearmente independente e $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbf{F}$. Mostre que existe $f \in \mathcal{N}^*$ de forma que $f(\xi_j) = a_j$ para todo $1 \leq j \leq n$.

Proposição 12.2. Sejam X um subespaço vetorial fechado próprio de \mathcal{N} e $\xi \in \mathcal{N} \setminus X$. Se $\delta = d(\xi, X) := \inf_{\eta \in X} \|\xi - \eta\|$, então existe $f \in \mathcal{N}^*$ satisfazendo

$$\|f\| = 1, \quad f(\xi) = \delta \text{ e } f|_X = 0.$$

Demonstração. A distância δ entre ξ e o subespaço X é maior do que zero pois X é fechado. Defina o funcional linear $g : \text{Lin}(\{\xi, X\}) \rightarrow \mathbf{F}$ por

$$g(\lambda\xi + \eta) = \lambda\delta, \quad \eta \in X, \lambda \in \mathbf{F}.$$

Evidentemente $g|_X = 0$. Pela definição de δ tem-se (para $\lambda \neq 0$)

$$|g(\lambda\xi + \eta)| = |\lambda|\delta \leq |\lambda|\|\xi + \eta/\lambda\| = \|\lambda\xi + \eta\|,$$

e, assim, $\|g\| \leq 1$. Para cada $\eta \in X$ tem-se

$$\|g\| \geq \frac{|g(\xi - \eta)|}{\|\xi - \eta\|} = \frac{\delta}{\|\xi - \eta\|},$$

e disto segue que

$$\|g\| \geq \sup_{\eta \in X} \frac{\delta}{\|\xi - \eta\|} = \frac{\delta}{\inf_{\eta \in X} \|\xi - \eta\|} = \frac{\delta}{\delta} = 1.$$

Portanto $\|g\| = 1$.

Agora basta aplicar Hahn-Banach, encontrando a extensão f de g , com $p(\zeta) = \|\zeta\|$, $\forall \zeta \in \mathcal{N}$, que devido à relação acima satisfaz $|g| \leq p$ em $\text{Lin}(\{\xi, X\})$ (ou envie o Corolário 10.15). ■

Corolário 12.3. *Um subespaço vetorial X de \mathcal{N} é denso em \mathcal{N} se, e somente se, o único elemento de \mathcal{N}^* que se anula em X é o funcional nulo.*

EXERCÍCIO 12.2. Detalhe a demonstração do Corolário 12.3.

Proposição 12.4. *Se \mathcal{N}^* é separável, então \mathcal{N} é separável.*

Demonstração. Se \mathcal{N}^* é separável, existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ densa em \mathcal{N}^* . Escolha $\xi_n \in \mathcal{N}$, com $\|\xi_n\| = 1$ e $|f_n(\xi_n)| \geq \|f_n\|/2$, para todo n , e seja $X = \overline{\text{Lin}(\{\xi_n\})}$, o qual é separável (Proposição 3.4). O objetivo é mostrar que $\mathcal{N} = X$, e para isto basta mostrar que se $f \in \mathcal{N}^*$ com $f|_X = 0$, então f é o funcional nulo.

Considere tal f e tome uma subsequência $f_{n_j} \rightarrow f$. Como para todo n_j ,

$$\|f - f_{n_j}\| \geq |(f - f_{n_j})(\xi_{n_j})| = |f_{n_j}(\xi_{n_j})| \geq \|f_{n_j}\|/2,$$

segue que

$$\|f\| \leq \|f - f_{n_j}\| + \|f_{n_j}\| \leq 3\|f - f_{n_j}\| \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

mostrando que $f = 0$. Portanto $\mathcal{N} = X$ e é separável. ■

OBSERVAÇÃO 12.5. Há exemplos de espaços separáveis cujos duais não são separáveis. Um exemplo padrão é $l^1(\mathbb{N})^* = l^\infty(\mathbb{N})$, tratado no Capítulo 13.

Como outra aplicação do teorema de Hahn-Banach será mostrado que vale a recíproca do Teorema 4.5, ou seja,

Proposição 12.6. *Suponha que $\mathcal{N}_1 \neq \{0\}$. Se $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é completo, então \mathcal{N}_2 é Banach.*

Demonstração. Seja (η_j) uma sequência de Cauchy em \mathcal{N}_2 e escolha $\xi_0 \in \mathcal{N}_1$ com $\|\xi_0\| = 1$. Pelo Teorema 12.1 existe $f \in \mathcal{N}_1^*$ com $\|f\| = f(\xi_0) = 1$. A relação $\eta_j = f(\xi_0)\eta_j$ motiva definir $T_j \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ por $T_j\xi = f(\xi)\eta_j$, $\xi \in \mathcal{N}_1$; segue que (T_j) é Cauchy em $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, pois

$$\|(T_j - T_k)\xi\| = |f(\xi)| \|\eta_j - \eta_k\| \leq \|\eta_j - \eta_k\| \|\xi\|;$$

logo existe $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ em que $T_j \rightarrow T$. Como

$$\|\eta_j - T\xi_0\| = \|T_j\xi_0 - T\xi_0\| \leq \|T_j - T\| \|\xi_0\|,$$

segue que $\eta_j \rightarrow T\xi_0$, mostrando que \mathcal{N}_2 é completo. ■

Como \mathcal{N}^* é um espaço de Banach, está definido $\mathcal{N}^{**} := (\mathcal{N}^*)^*$, chamado de *segundo dual* ou *bidual* de \mathcal{N} . Há uma forma natural de identificar elementos de \mathcal{N} com elementos de seu segundo dual: a cada $\xi \in \mathcal{N}$ associa-se $\hat{\xi} \in \mathcal{N}^{**}$ por

$$\hat{\xi}(f) := f(\xi), \quad f \in \mathcal{N}^*.$$

Esta aplicação é chamada de *aplicação canônica* de \mathcal{N} em \mathcal{N}^{**} , e vale

Proposição 12.7. *A aplicação $\hat{\cdot} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}^{**}$ definida acima é uma isometria linear.*

Demonstração. A linearidade da aplicação canônica $\hat{\cdot}$ é clara. O fato de também ser isometria segue de

$$\|\hat{\xi}\| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{N}^* \\ \|f\| \leq 1}} \frac{|\hat{\xi}(f)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f \in \mathcal{N}^* \\ \|f\| \leq 1}} \frac{|f(\xi)|}{\|f\|} = \|\xi\|,$$

sendo que na última igualdade foi utilizado o Teorema 12.1. ■

Neste ponto há condições de apresentar (e apreciar) precisamente ● que se entende por espaço reflexivo (o qual foi comentado no Capítulo 4).

Definição 12.8. Se a aplicação canônica $\hat{\cdot}$ é sobrejetora, então o espaço normado \mathcal{N} é chamado de espaço *reflexivo*. Em outras palavras, \mathcal{N} é reflexivo se ele é isomorfo a \mathcal{N}^{**} e o isomorfismo sendo dado por essa aplicação canônica. A relação $\hat{\mathcal{N}} := \hat{\cdot}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}^{**}$ algumas vezes será indicada (com certo abuso) por $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}^{**}$.

EXERCÍCIO 12.3. Mostre que todo espaço normado reflexivo é Banach, e se $\dim \mathcal{N} < \infty$, então \mathcal{N} é reflexivo.

OBSERVAÇÃO 12.9. Um caso importante de espaço reflexivo é dado pelos espaços de Hilbert; veja o Corolário 19.5.

Proposição 12.10. *Todo subespaço vetorial fechado de um espaço normado reflexivo é também reflexivo.*

Demonstração. Seja E um subespaço fechado, suposto próprio, de um espaço reflexivo \mathcal{B} (todo espaço normado reflexivo é Banach); note que E também é Banach. Se $f \in \mathcal{B}^*$, sua restrição $f_E := f|_E$ ao subespaço E é um elemento de E^* . Por Hahn-Banach (veja o Corolário 10.15), de fato $E^* = \{f_E : f \in \mathcal{B}^*\}$. Assim, para todo $h \in E^{**}$ basta considerar $h(f_E)$, e o objetivo é encontrar $\xi_h \in E$ de modo que $h = \hat{\xi}_h$.

Defina o funcional linear $H : \mathcal{B}^* \rightarrow \mathbb{F}$, $H(f) = h(f_E)$, $f \in \mathcal{B}^*$, e como

$$|H(f)| = |h(f_E)| \leq \|h\| \|f_E\| \leq \|h\| \|f\|,$$

segue que $H \in \mathcal{B}^{**}$, e sendo \mathcal{B} reflexivo, existe um $\xi_h \in \mathcal{B}$ de forma que $H = \hat{\xi}_h$ (sendo $\hat{\cdot}$ a aplicação canônica $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^*$). Por construção

$$h(f_E) = H(f) = \hat{\xi}_h(f) = f(\xi_h), \quad \forall f \in \mathcal{B}^*.$$

O próximo passo é mostrar que $\xi_h \in E$. De fato, se $\xi_h \notin E$, pela Proposição 12.2 existiria $f \in \mathcal{B}^*$ em que $f(\xi_h) \neq 0$ e $f_E = 0$, mas isto contradiz a relação logo acima, pois teria-se $0 \neq f(\xi_h) = h(f_E) = 0$. Portanto $\xi_h \in E$.

Assim, $h(f_E) = f(\xi_h) = f_E(\xi_h)$, para todo $f \in \mathcal{B}^*$, e como $E^* = \{f_E : f \in \mathcal{B}^*\}$, segue que $h(g) = g(\xi_h)$, para todo $g \in E^*$, ou seja, $h = \hat{\xi}_h$, sendo agora $\hat{\cdot}$ a aplicação canônica $E \mapsto E^*$. Portanto essa aplicação é sobrejetora, concluindo-se que E é reflexivo. ■

Notas

Um ponto na definição de espaço reflexivo, que certamente ficou obscuro na discussão apresentada no Capítulo 4, é a necessidade da isometria entre \mathcal{N} e \mathcal{N}^{**} ser através da aplicação canônica $\hat{\cdot}$; no trabalho R. C. James, *A Nonreflexive Banach Space Isometric with Its Second Conjugate Space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37**, (1951) 174-177, foi apresentado um exemplo de espaço de Banach isométrico ao seu

segundo dual que não é reflexivo. É interessante notar que um espaço vetorial é algebricamente reflexivo (usando \cdot mas ignorando topologias) se, e somente se, possui dimensão finita.

Resultados como a) um espaço de Banach é reflexivo se, e somente se, seu dual é reflexivo (Exercício 12.11), b) todo espaço reflexivo é *fracamente completo* (Teorema 16.5), c) um subespaço fechado de um espaço reflexivo também é reflexivo (Proposição 12.10), apareceram originalmente em B. J. Pettis, *A Note on Regular Banach Spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **44**, (1938) 420–428. O termo *espaço reflexivo* foi introduzido por E. R. Lorch em 1939, em substituição a *espaço regular* usado até então.

Devido ao seu caráter introdutório, algumas aplicações importantes de Hahn-Banach não serão apresentadas neste texto; por exemplo, a separação de conjuntos convexos por hiperplanos (também chamada de versão geométrica de Hahn-Banach), o Teorema de Krein-Milman, resultados de Malgrange em teoria de Equações Diferenciais Parciais, limites de Banach, etc.

Para a recíproca do Exercício 12.12 (ou seja, se para qualquer $f \in B^*$ existe $\xi \in B$, com $\|\xi\| = 1$, de modo que $\|f\| = f(\xi)$, então o espaço é reflexivo) veja R. C. James, *Characterizations of Reflexivity*, Studia Mathematica **23**, (1964) 205–216 ou R. C. James, *Reflexivity and the sup of Linear Functionals*, Israel J. Math. **13** (1972), 289–300. Finalmente, vale a pena informar que os importantes Teorema 12.1 e Proposição 12.2 já apareceram no trabalho original de Hahn sobre o tema, em 1927.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 12.4. Seja Z um subespaço vetorial de \mathcal{N} . Mostre que todo funcional linear limitado em Z é restrição de algum elemento de \mathcal{N}^* . Conclua, então, que $Z^* = \{f|_Z : f \in \mathcal{N}^*\}$.

EXERCÍCIO 12.5. Mostre que se $\xi \in \mathcal{N}$ é tal que $f(\xi) = 0$, para todo f num conjunto denso em \mathcal{N}^* , então $\xi = 0$.

EXERCÍCIO 12.6. Use a Proposição 12.7 para mostrar que todo espaço normado pode ser completado, ou seja, que todo espaço normado é linearmente isométrico a um subconjunto denso num espaço de Banach (veja o Teorema 2.6).

EXERCÍCIO 12.7. Mostre que um subconjunto $K \subset B^*$ é limitado se, e somente se, para cada $\xi \in B$ tem-se $\sup_{f \in K} |\xi(f)| < \infty$.

EXERCÍCIO 12.8. Se $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, demonstre que

$$\|T\| = \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{N}_1 \\ \|\xi\|=1}} \sup_{\substack{f \in \mathcal{N}_2^* \\ \|f\|=1}} |f(T\xi)|.$$

EXERCÍCIO 12.9. Seja X um subespaço de \mathcal{N} (algumas afirmações abaixo valem se e X for apenas um subconjunto de \mathcal{N}). O *anulador* de X é definido por

$$X^0 := \{f \in \mathcal{N}^* : f(\xi) = 0, \forall \xi \in X\}.$$

De forma análoga, define-se o *anulador* de um subespaço Λ de \mathcal{N}^* por

$$\Lambda^\dagger := \{\xi \in \mathcal{N} : f(\xi) = 0, \forall f \in \Lambda\}.$$

- a) Mostre que X^0 e Λ^\dagger são subespaços fechados de \mathcal{N}^* e \mathcal{N} , respectivamente
 b) Verifique que $\Lambda^\dagger = \mathcal{N} \cap \Lambda^0$ (identificando \mathcal{N} com $\tilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}^{**}$).
 c) Mostre que $X \subset (X^0)^\dagger$ e, se X for fechado, então $X = (X^0)^\dagger$.
 d) Mostre que $\Lambda \subset (\Lambda^\dagger)^0$ e, se \mathcal{N} for reflexivo e Λ fechado, então $(\Lambda^\dagger)^0 = \Lambda$.

EXERCÍCIO 12.10. Se E é um subespaço de um espaço normado \mathcal{N} , mostre que seu fecho pode ser escrito na forma

$$\bar{E} = \bigcap \{N(f) : f \in \mathcal{N}^*, E \subset N(f)\}.$$

EXERCÍCIO 12.11. Mostre que um espaço de Banach é reflexivo se, e somente se, seu dual é reflexivo.

EXERCÍCIO 12.12. Se \mathcal{B} é reflexivo, mostre que para qualquer $f \in \mathcal{B}^*$ existe $\xi \in \mathcal{B}$, com $\|\xi\| = 1$, de modo que $\|f\| = f(\xi)$ (ou seja, em espaços reflexivos todo funcional linear contínuo atinge o máximo na bola unitária).

EXERCÍCIO 12.13. Seja $f : c_0 \rightarrow \mathbf{R}$ (espaço real) dado por $f((\xi_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty \xi_j/j$. Mostre que $f \in c_0^*$, $\|f\| = \sum_{j=1}^\infty 1/j$ mas não existe $\xi = (\xi_j) \in c_0$ com $\|\xi\| = 1$ e $f(\xi) = \|f\|$. Usando o Exercício 12.12 conclua que c_0 não é reflexivo.

Capítulo 13

Operadores Adjuntos em Espaços Normados

Neste Capítulo define-se o operador adjunto de Banach de um operador linear contínuo entre espaços normados. Além do interesse próprio, tais operadores estão diretamente relacionados às soluções de várias equações envolvendo operadores lineares.

Definição 13.1. Seja $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. O operador $T^a : \mathcal{N}_2^* \rightarrow \mathcal{N}_1^*$ dado por

$$(T^a g)(\xi) := g(T\xi), \quad g \in \mathcal{N}_2^*, \xi \in \mathcal{N}_1,$$

é chamado de *operador adjunto de Banach* de T ; note que como $T^a(g)$ está unicamente definido para cada $g \in \mathcal{N}_2^*$, segue que o mesmo vale para T^a .

Proposição 13.2. Se $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, então $T^a \in B(\mathcal{N}_2^*, \mathcal{N}_1^*)$ e, ainda, $\|T^a\| = \|T\|$.

Demonstração. A linearidade de T^a é clara. Como para todo $g \in \mathcal{N}_2^*$

$$\|(T^a g)(\xi)\| = \|g(T\xi)\| \leq \|g\| \|T\| \|\xi\|, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}_1,$$

vem que $\|T^a g\| \leq \|T\| \|g\|$, ou seja, $T^a \in B(\mathcal{N}_2^*, \mathcal{N}_1^*)$ e $\|T^a\| \leq \|T\|$. Assim, se $T = 0$ então $T^a = 0$ e a demonstração terminou; suponha, então, que $T \neq 0$.

Pelo Teorema 12.1, dado $0 \neq \xi_0 \in \mathcal{N}_1$ com $T\xi_0 \neq 0$, existe $f \in \mathcal{N}_2^*$ de maneira que $0 \neq f(T\xi_0) = \|T\xi_0\|$ e $\|f\| = 1$. Assim,

$$\|T\xi_0\| = f(T\xi_0) = |(T^a f)(\xi_0)| \leq \|T^a\| \|f\| \|\xi_0\| = \|T^a\| \|\xi_0\|,$$

de forma que $\|T\| \leq \|T^a\|$; portanto $\|T^a\| = \|T\|$. ■

Exemplo 13.3. Dada uma base de \mathbb{F}^n , um operador $T \in B(\mathbb{F}^n)$ é representado por uma matriz. Então o seu operador adjunto T^a é representado pela transposta dessa matriz. Verifique que isto também se adapta ao caso em que $T \in B(\mathcal{N})$ e \mathcal{N} possui uma base de Schauder. •

EXERCÍCIO 13.1. Mostre que se $T, S \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, então $(S + T)^a = S^a + T^a$, e para $\alpha \in \mathbb{F}$ tem-se $(\alpha T)^a = \alpha T^a$. Além disso, se o produto TS está definido tem-se $(TS)^a = S^a T^a$, e se $T^{-1} \in B(\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_1)$, então $(T^{-1})^a = (T^a)^{-1}$.

EXERCÍCIO 13.2. Para $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, mostre que T^a é injetor se, e somente se, $\text{img } T$ é densa em \mathcal{N}_2 (veja também o Exercício 13.6).

Proposição 13.4. $l^1(\mathbb{N})^* = l^\infty(\mathbb{N})$.

Demonstração. A cada $f \in l^1(\mathbb{N})^*$ será associado um elemento $\alpha = (\alpha_j) \in l^\infty(\mathbb{N})$, e vice-versa, e esta associação será linear e uma isometria, mostrando que o dual de l^1 é isomorfo a l^∞ .

Sejam $\{e_j\}$ a base canônica de $l^1(\mathbb{N})$ e $f \in l^1(\mathbb{N})^*$. Assim, para $\xi = (a_j)_{j=1}^\infty = \sum_{j=1}^\infty a_j e_j$ em l^1 tem-se

$$f(\xi) = \sum_j a_j f(e_j) = \sum_j a_j \alpha_j,$$

em que $\alpha_j = f(e_j)$; desta forma $|\alpha_j| = |f(e_j)| \leq \|f\| \|e_j\| = \|f\|$. Definindo $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^\infty$ vem que $\|\alpha\|_\infty \leq \|f\|$ e $\alpha \in l^\infty$. Por outro lado, tem-se

$$|f(\xi)| \leq \sum_j |a_j| |\alpha_j| \leq \|\alpha\|_\infty \|\xi\|_1,$$

ou seja, $\|f\| \leq \|\alpha\|_\infty$. Portanto $\|\alpha\|_\infty = \|f\|$ e a aplicação linear $f \mapsto \alpha$ definida acima é uma isometria entre $l^1(\mathbb{N})^*$ e um subconjunto de $l^\infty(\mathbb{N})$. Agora basta mostrar que a imagem dessa aplicação é todo $l^\infty(\mathbb{N})$.

Se $\beta = (\beta_j) \in l^\infty$ define o funcional linear g agindo em l^1 por $g(\xi) = g(\sum_j a_j e_j) := \sum_j a_j \beta_j$. Como $|g(\xi)| \leq \|\beta\|_\infty \|\xi\|_1$, segue que $g \in l^1(\mathbb{N})^*$, e a aplicação acima é sobrejetora. ■

OBSERVAÇÃO 13.5. Por uma variação da construção acima, claramente tem-se que $l^1(\mathbb{N}) \subset l^\infty(\mathbb{N})^*$, mas como l^∞ não é separável, segue da Proposição 12.4 que l^1 não é o dual de l^∞ (veja o Exemplo 3.7), e então l^1 não é reflexivo.

Exemplo 13.6. Seja $S_d : l^1(\mathbb{N}) \leftrightarrow$ o operador shift à direita $S_d \xi = S_d(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$. Então seu adjunto $S_d^a : l^\infty(\mathbb{N}) \leftrightarrow$ é o operador shift à esquerda $S_e(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots)$. •

EXERCÍCIO 13.3. Complete os detalhes do Exemplo 13.6.

Proposição 13.7. $l^p(\mathbb{N})^* = l^q(\mathbb{N})$ se $p > 1$ e $1/p + 1/q = 1$. Além disso, l^p é reflexivo para $1 < p < \infty$.

Demonstração. Esta demonstração é similar àquela da Proposição 13.4, e será utilizada notação semelhante. A cada $f \in l^p(\mathbb{N})^*$ será associado um elemento $\alpha = (\alpha_j) \in l^q(\mathbb{N})$, e vice-versa, e esta associação será linear e uma isometria, mostrando que o dual de l^p é isomorfo a l^q .

Sejam $\{e_j\}$ a base de Schauder canônica de $l^p(\mathbb{N})$ e $f \in l^p(\mathbb{N})^*$. Assim, para $\xi = (a_j)_{j=1}^\infty = \sum_{j=1}^\infty a_j e_j$ em l^p tem-se

$$f(\xi) = \sum_j a_j f(e_j) = \sum_j a_j \alpha_j,$$

em que $\alpha_j = f(e_j)$.

Usando a sequência $\xi^{(n)} = (\xi_j^{(n)})_{j=1}^\infty$ definida pelas entradas $\xi_j^{(n)} = |\alpha_j|^q / \alpha_j$, se $\alpha_j \neq 0$ e $1 \leq j \leq n$, e $\xi_j^{(n)} = 0$ de outra forma, obtém-se $f(\xi^{(n)}) = \sum_j^n |\alpha_j|^q$. Por outro lado,

$$f(\xi^{(n)}) \leq \|f\| \|\xi^{(n)}\|_p = \|f\| \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^q \right)^{1/p}$$

Essas duas relações levam a

$$\sum_j^n |\alpha_j|^q = f(\xi^{(n)}) \leq \|f\| \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^q \right)^{1/p},$$

ou seja, $(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^q)^{1/q} \leq \|f\|$. Como esta desigualdade vale para todo n segue-se que $\|\alpha\|_q \leq \|f\|$ e $\alpha \in l^q(\mathbb{N})$, sendo $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^\infty$.

Usando a desigualdade de Hölder obtém-se

$$|f(\xi)| = \left| \sum_j a_j \alpha_j \right| \leq \|\xi\|_p \|\alpha\|_q,$$

e conclui-se que $\|f\| = \|\alpha\|_q$. Portanto, a aplicação linear $f \mapsto \alpha$ definida acima é uma isometria entre $l^p(\mathbb{N})^*$ e um subconjunto de $l^q(\mathbb{N})$. Agora basta mostrar que a imagem dessa aplicação é todo $l^q(\mathbb{N})$.

Se $\beta = (\beta_j) \in l^q$, defina o funcional g agindo em l^p por $g(\sum_j a_j e_j) := \sum_j a_j \beta_j$. Usando Hölder novamente obtém-se que $g \in l^p(\mathbb{N})^*$, e a aplicação acima é sobrejetora.

Note que esta representação de $l^p(\mathbb{N})^*$ mostra que $l^p(\mathbb{N})^{**}$ é identificado com $l^p(\mathbb{N})$ pela aplicação canônica da Proposição 12.7 e, assim, $l^p(\mathbb{N})$ é reflexivo ($1 < p < \infty$). ■

OBSERVAÇÃO 13.8. Lembre-se que no caso geral vale $L_\mu^p(\Omega)^* = L_\mu^q(\Omega)$ para $p > 1$ e $1/p + 1/q = 1$ (e são reflexivos), e se a medida μ é σ -finita tem-se $L_\mu^1(\Omega)^* = L_\mu^\infty(\Omega)$, como mencionado no Capítulo 4. Veja particularmente o Exemplo 4.12.

Exemplo 13.9. Considere $K : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{F}$ mensurável e limitada, e defina o operador linear $T_K : L^p[-1, 1] \rightarrow L^q[-1, 1]$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, por

$$(T_K \psi)(t) = \int_{-1}^1 K(t, s) \psi(s) ds, \quad \psi \in L^p[-1, 1].$$

Pela desigualdade de Hölder este operador é limitado. Como $L^q[-1, 1]^* = L^p[-1, 1]$, cada elemento $F \in L^q[-1, 1]^*$ é representado por um único elemento $f \in L^p[-1, 1]$ e tem-se

$$F(\psi) = \int_{-1}^1 f(t) \psi(t) dt, \quad \forall \psi \in L^q[-1, 1].$$

Assim, definindo $\phi(t) = \int_{-1}^1 K(s, t)f(s)ds$ e usando Fubini, para $\varphi \in L^p$,

$$\begin{aligned}(T_K^a F)(\varphi) &= F(T_K \varphi) = \int_{-1}^1 dt f(t) \int_{-1}^1 ds K(t, s)\varphi(s) \\ &= \int_{-1}^1 ds \varphi(s) \int_{-1}^1 dt K(t, s)f(t) = \int_{-1}^1 \varphi(s)\phi(s) ds,\end{aligned}$$

ou seja, ϕ (em $L^p[-1, 1]^*$) representa o funcional $(T_K^a F)$ e, portanto,

$$(T_K^a F)(t) = \int_{-1}^1 K(s, t)f(s) ds.$$

Note que também vale para $1 \leq q, p < \infty$ (sem a restrição $1/p + 1/q = 1$). •

O próximo resultado, Proposição 13.10, é uma versão do Teorema de Hellinger-Toeplitz para espaços de Banach (a versão original é para espaços de Hilbert, veja a Proposição 20.4). Ele indica que no estudo de operadores não-limitados, com um adjunto bem-definido, questões sutis de domínio devem entrar em cena, pois tais operadores não podem ser definidos em todo espaço de Banach.

Proposição 13.10. *Suponha que os operadores lineares $T : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ e $S : \mathcal{B}_2^* \rightarrow \mathcal{B}_1^*$ satisfaçam*

$$g(T\xi) = (Sg)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathcal{B}_1, g \in \mathcal{B}_2^*.$$

Então S e T são operadores limitados e $S = T^a$.

Demonstração. Para mostrar que T é limitado será usado o Teorema do Gráfico Fechado. Suponha que $\xi_n \rightarrow \xi$ em \mathcal{B}_1 e $T\xi_n \rightarrow \eta$ em \mathcal{B}_2 . Assim, para cada $g \in \mathcal{B}_2^*$ tem-se

$$g(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(T\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Sg)(\xi_n) = (Sg)(\xi) = g(T\xi),$$

de forma que $\eta = T\xi$ (Teorema 12.1) e o gráfico de T é fechado. Logo T é limitado, T^a está definido e, pela definição de operador adjunto de Banach,

$$(T^a g)(\xi) = g(T\xi) = (Sg)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathcal{B}_1, g \in \mathcal{B}_2^*.$$

Portanto, os funcionais $T^a(g)$ e $S(g)$ coincidem para todo $g \in \mathcal{B}_2^*$, ou seja, $S = T^a$ e S é limitado. ■

Notas

Aparentemente foi Lagrange quem introduziu o conceito de operador adjunto, e no caso de um operador diferencial particular; ele percebeu relações entre o operador adjunto e soluções de equações envolvendo o operador original. Essa idéia de Lagrange foi generalizada apenas pouco antes de 1900 por S. Pincherle. A noção de adjunto de um operador é particularmente importante em espaços de Hilbert; tais espaços são “idênticos” aos seus duais, sendo portanto possível que um operador coincida com seu adjunto, os chamados operadores auto-adjuntos (veja os Capítulos 19 e 20).

É possível definir o adjunto de operadores não-limitados, necessitando apenas que estejam densamente definidos [de Oliveira (2009)]; fica como exercício para o(a) leitor(a) esta verificação (neste ponto houve grande contribuição de J. von Neumann, por volta de 1930). Essa generalização é importante no caso de operadores diferenciais parciais lineares e Teoria de Distribuições; normalmente nesse enfoque usa-se o termo *operador transposto*.

A notação T^* para o operador adjunto de Banach não é padrão; muitos autores denotam esse operador adjunto por T^* , mas aqui esta notação será reservada ao operador *adjunto de Hilbert* (esta sim uma notação muito usada), o qual será discutido no Capítulo 19.

Para uma versão bem geral do Teorema de Hellinger-Toeplitz, válida em alguns espaços vetoriais topológicos localmente convexos, veja V. Pták, *The Principle of Uniform Boundedness and the Closed Graph Theorem*, Czech. Math. J 12, (1962) 523-528.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 13.4. Se $f \in \mathcal{N}^*$, determine f^* .

EXERCÍCIO 13.5. Se $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, mostre que $\text{img } T \subset N(T^*)^\perp$ (o anulador, definido no Exercício 12.9). Discuta as consequências disto na solução da equação

$$T\xi = \eta, \quad \eta \in \mathcal{N}_2.$$

Conclua que o adjunto pode ser útil para analisar se um operador é invertível.

EXERCÍCIO 13.6. Se $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, então $N(T) = (\text{img } T^*)^\perp$ e $N(T^*) = (\text{img } T)^\perp$ (notação como no Exercício 12.9). Conclua que T é injetor se, e somente se, $T^*(\mathcal{N}_2^\circ)$ separa pontos de \mathcal{N}_1 .

EXERCÍCIO 13.7. Para $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ defina T^{**} , identifique \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 com $\tilde{\mathcal{N}}_1$ e $\tilde{\mathcal{N}}_2$, respectivamente, e mostre que $T^{**}|_{\mathcal{N}_1} = T$. Se \mathcal{N}_1 for reflexivo, então $T^{**} = T$ (isto está relacionado com o Exercício 25.3).

EXERCÍCIO 13.8. Se $T \in B(B_1, B_2)$ com T^* sobrejetor, verifique, por Aplicação Aberta, que existe $r > 0$ de modo que $T^*B_{B_2}(0; 1) \supset B_{B_1}(0; r)$; usando também o Teorema 12.1, conclua que $\|T\xi\| \geq r\|\xi\|$, para todo $\xi \in B_1$. Com tais resultados, mostre que T é invertível se, e somente se, T^* é invertível.

EXERCÍCIO 13.9. Verifique que $c_0(\mathbf{N})^* = l^1(\mathbf{N})$ e conclua que c_0 não é reflexivo.

EXERCÍCIO 13.10. Seja $\mathcal{N}_p \subset l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$, composto de seqüências com apenas um número finito de entradas não-nulas. Verifique que $\mathcal{N}_p^* = l^q(\mathbb{N})$, $1/q + 1/p = 1$.

EXERCÍCIO 13.11. a) Mostre que se \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são isomorfos, então \mathcal{B}_1^* e \mathcal{B}_2^* são isomorfos.

b) Se para algum $T \in B(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ tem-se que T^a é um isomorfismo entre \mathcal{B}_2^* e \mathcal{B}_1^* (sobrejetor), mostre que \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são isomorfos.

EXERCÍCIO 13.12. Para $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \in l^1(\mathbb{N})$, defina $T\xi$ por

$$(T\xi)_n = \sum_{j \geq n} \xi_j.$$

Mostre que $T \in B(l^1, c_0)$ e encontre T^a

EXERCÍCIO 13.13. Sejam E um subespaço vetorial de \mathcal{N} e $\iota : E \rightarrow \mathcal{N}$ a inclusão canônica. Confira que ι é um operador linear limitado, e mostre que seu adjunto de Banach $\iota^a : \mathcal{N}^* \rightarrow E^*$ é o operador de restrição $\iota^a(f) = f|_E$, para todo $f \in \mathcal{N}^*$

EXERCÍCIO 13.14. Seja $T \in B(\mathcal{N}, l^\infty(\mathbb{N}))$. Mostre que existe uma seqüência limitada $(f_j) \subset \mathcal{N}^*$, de modo que $T\xi = (f_j(\xi))_j$, para todo $\xi \in \mathcal{N}$

Capítulo 14

Convergência Fraca

Neste Capítulo são apenas introduzidas as noções de convergências fracas e fortes, tanto de seqüências em espaços normados, como de operadores lineares nesses espaços. As topologias fracas, incluindo a topologia fraca*, são assuntos para outros Capítulos.

Definição 14.1. Uma seqüência $(\xi_n) \subset \mathcal{N}$ converge fracamente a $\xi \in \mathcal{N}$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) = f(\xi)$ para todo $f \in \mathcal{N}^*$.

OBSERVAÇÃO 14.2. a) $\xi_n \rightarrow \xi$, $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$ e $w\text{-lim } \xi_n = \xi$ serão usados, indistintamente, para indicar que (ξ_n) converge fracamente a ξ .

b) Convergência de (ξ_n) a ξ na norma de \mathcal{N} será chamada de convergência forte e indicada por $\xi_n \rightarrow \xi$, $\xi_n \xrightarrow{s} \xi$ e $s\text{-lim } \xi_n = \xi$.

c) Optou-se pelas indicações 'w' e 's' acima que vêm da língua inglesa, já que em português as palavras *fraco* e *forte* iniciam-se com a mesma letra.

O próximo resultado garante que a noção de convergência fraca acima está bem-definida.

Proposição 14.3. *Suponha que $\xi_n \rightarrow \xi$ em \mathcal{N} . Então o limite ξ é único e a seqüência (ξ_n) é limitada.*

Demonstração. Se $\xi_n \rightarrow \xi$ e $\xi_n \rightarrow \eta$, então para todo $f \in \mathcal{N}^*$ tem-se

$$f(\xi - \eta) = f(\xi) - f(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(\xi_n) - f(\xi_n)) = 0.$$

Do Teorema 12.1 segue que $\xi = \eta$ e o limite fraco é único.

Para demonstrar que $(\|\xi_n\|)$ é limitada será usada a Proposição 12.7, em particular que $\hat{\xi}_n \in \mathcal{N}^{**}$ e $\|\xi_n\| = \|\hat{\xi}_n\|$. Para cada $f \in \mathcal{N}^*$ tem-se $\hat{\xi}_n(f) = f(\xi_n)$, o qual é convergente e portanto limitado. Pelo Princípio da Limitação Uniforme segue que $\sup_n \|\xi_n\| = \sup_n \|\hat{\xi}_n\| < \infty$. ■

Como $|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq \|f\| \|\xi_n - \xi\|$, vê-se que a convergência forte em espaços normados garante a convergência fraca e com os mesmos limites, justificando a nomenclatura. Será visto que há casos em que a convergência fraca não garante a convergência forte.

EXERCÍCIO 14.1. Se $\dim \mathcal{N} < \infty$, mostre que os conceitos de convergências fraca e forte de seqüências coincidem.

Proposição 14.4. $\xi_n \rightarrow \xi$ em \mathcal{N} se, e somente se, $f(\xi_n) \rightarrow f(\xi)$ para f num conjunto denso em \mathcal{N}^* e $(\|\xi_n\|)$ for um conjunto limitado.

Demonstração. Uma implicação segue diretamente da Proposição 14.3. Para mostrar a outra, denote por W o conjunto dos $f \in \mathcal{N}^*$ que satisfazem $f(\xi_n) \rightarrow f(\xi)$, e seja $\infty > C \geq \|\xi_n\|$, para todo n .

Se $g \in \mathcal{N}^*$, dado $\varepsilon > 0$ existe $f \in W$ com $\|f - g\| < \varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned} |g(\xi_n) - g(\xi)| &\leq \\ &\leq |g(\xi_n) - f(\xi_n)| + |f(\xi_n) - f(\xi)| + |f(\xi) - g(\xi)| \\ &\leq \varepsilon \|\xi_n\| + |f(\xi_n) - f(\xi)| + \varepsilon \|\xi\|. \end{aligned}$$

Para n suficientemente grande tem-se $|f(\xi_n) - f(\xi)| < \varepsilon$ e $|g(\xi_n) - g(\xi)| < \varepsilon(1 + C + \|\xi\|)$; sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário conclui-se que $g(\xi_n) \rightarrow g(\xi)$ e, portanto, $\xi_n \rightarrow \xi$. ■

Agora serão introduzidas diferentes noções de convergência no espaço de operadores lineares $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.

Definição 14.5. Sejam (T_n) uma seqüência de operadores no espaço $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ e $T : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ linear. Diz-se que

a) T_n converge uniformemente, ou em norma, para T se

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0.$$

Denota-se tal convergência por $T_n \rightarrow T$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$.

b) T_n converge fortemente para T se

$$\|T_n \xi - T \xi\|_{\mathcal{N}_2} \rightarrow 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}_1.$$

Denota-se por $T_n \xrightarrow{s} T$ ou $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$.

c) T_n converge fracamente para T se

$$|f(T_n \xi) - f(T \xi)| \rightarrow 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{N}_1, f \in \mathcal{N}_2^*.$$

Denota-se a convergência fraca de operadores lineares por $T_n \xrightarrow{w} T$, $T_n \rightarrow T$ ou $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$.

EXERCÍCIO 14.2. Mostre que em $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ os três tipos de limites definidos acima são únicos (se existirem, logicamente). Além disso, verifique que convergência uniforme \Rightarrow convergência forte \Rightarrow convergência fraca, e com os mesmos limites.

Exemplo 14.6. Sejam (e_j) a base canônica de $l^1(\mathbb{N})$ e $P_n : l^1(\mathbb{N}) \rightarrow l^1(\mathbb{N})$, $P_n \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$, em que $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$. Como

$$\|P_n \xi - \xi\| = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|$$

vem que $P_n \xrightarrow{s} 1$ para $n \rightarrow \infty$. Por outro lado, para todo n tem-se que $\|P_n \xi - \xi\| \leq \|\xi\|$ e

$$\|P_n e_{(n+1)} - e_{(n+1)}\| = \|e_{(n+1)}\| = 1,$$

e segue que $\|P_n - 1\| = 1$ e (P_n) não é uniformemente convergente, pois se fosse deveria convergir a 1 . •

Exemplo 14.7. Seja $T_n : c_0 \rightarrow c_0$ o operador linear

$$T_n \xi = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ entradas}}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots),$$

Como $c_0^* = l^1$ (Exercício 13.9), cada $f \in c_0^*$ é representado por $\eta \in l^1$ na forma

$$f(T_n \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} (T_n \xi)_j \eta_j = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_{(j+n)}.$$

Disto segue que $|f(T_n \xi)| \leq \|\xi\|_\infty \sum_{j=1}^{\infty} |\eta_{(j, n)}|$, o qual converge a zero para $n \rightarrow \infty$. Portanto $T_n \xrightarrow{w} 0$.

Contudo, $\|T_n \xi\| = \|\xi\|$, para todos $\xi \in c_0, n \in \mathbb{N}$, de forma que T_n não converge fortemente a zero. Note que T_n é uma isometria linear, para todo n , e que converge fracamente a zero! •

EXERCÍCIO 14.3. Mostre que a sequência de operadores lineares $T_n : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$, dada por

$$T_n \xi = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ entradas}}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \dots)$$

converge fortemente a zero, mas não converge uniformemente.

EXERCÍCIO 14.4. Mostre que a sequência de operadores lineares $T_n : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$, dada por

$$T_n \xi = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ entradas}}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$$

converge fracamente a zero, mas não converge fortemente.

Numa reformulação do Teorema de Banach-Steinhaus e do Exercício 7.1, tem-se (usando-se uma generalização óbvia de convergência de operadores)

Proposição 14.8. Se (T_n) em $B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ converge fortemente a o operador $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{N}$, então $T \in B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ e $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$.

Exemplo 14.9. A hipótese de \mathcal{B} ser completo na Proposição 14.8 não pode ser retirada. Considere a sequência de operadores com o mesmo domínio $\text{dom } T_n = \{\xi \in l^1(\mathbb{N}) : \xi_j \neq 0 \text{ apenas para um número finito de índices}\}$,

$$T_n \xi = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \dots, n\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots).$$

Então (T_n) é uma sequência de operadores limitados, $\|T_n\| = n$, a qual converge fortemente para T , sendo $\text{dom } T = \text{dom } T_n$ e $(T\xi)_j = j\xi_j$ para todo j , contudo T não é limitado. •

EXERCÍCIO 14.5. Mostre que se (T_n) em $B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ converge uniformemente a $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{N}$, então $T \in B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ e $\|T\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$.

De forma análoga à Proposição 14.4, pode-se mostrar a

Proposição 14.10. (T_n) é fortemente convergente em $B(B_1, B_2)$ se, e somente se, $(T_n \xi)$ é uma sequência de Cauchy para ξ num conjunto total em B_1 e $\{\|T_n\|\}$ é um conjunto limitado.

EXERCÍCIO 14.6. Demonstre a Proposição 14.10.

O próximo exemplo de I. Schur é um tanto surpreendente!

Exemplo 14.11. Em $l^1(\mathbb{N})$ a convergência fraca de sequências é equivalente à convergência forte. •

Demonstração. Seja (ξ^n) uma sequência em l^1 que converge fracamente; como convergência forte implica na convergência fraca, basta mostrar que (ξ^n) converge fortemente. Pode-se supor que (ξ^n) converge fracamente a zero.

Se (ξ^n) não converge fortemente a zero, ela possui uma subsequência, também denotada por (ξ^n) , com $\|\xi^n\|_1 \geq 3\varepsilon_0$, para todo n , para algum $\varepsilon_0 > 0$. Como esta subsequência converge fracamente a zero tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \xi_j^n = 0, \quad \forall \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots) \in l^1(\mathbb{N})^* = l^\infty(\mathbb{N}).$$

Escolhendo para η os elementos e^j da base canônica de $l^1(\mathbb{N}) \subset l^\infty(\mathbb{N})$, obtém-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_j^n = 0$ para todo j fixo. Note então que, para cada m fixo, $\sum_{j=1}^m |\xi_j^n| < \varepsilon_0$ para n suficientemente grande, e dado k tem-se que $\sum_{j=M}^{\infty} |\xi_j^k| < \varepsilon_0$ para M suficientemente grande; tais propriedades serão usadas no que segue.

Defina $m_0 = n_0 = 1$ e, indutivamente, as sequências estritamente crescentes (m_k) e (n_k) da seguinte maneira: n_k é o menor inteiro maior do que n_{k-1} de forma que

$$\sum_{j=1}^{m_{k-1}} |\xi_j^{n_k}| < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

e m_k como o menor inteiro, maior do que m_{k-1} , satisfazendo

$$\sum_{j=m_k+1}^{\infty} |\xi_j^{n_k}| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Note que nessas desigualdades estão sendo usados, explicitamente, que a sequência (ξ^n) está em l^1 , e que ambos m_k e n_k convergem a infinito.

Construa $\eta \in l^\infty$ da seguinte maneira: $\eta_1 = 1$ e para $m_{k-1} < j \leq m_k$ defina $\eta_j = 0$ se $\xi_j^{n_k} = 0$ e $\eta_j = \xi_j^{n_k}/|\xi_j^{n_k}|$ se $\xi_j^{n_k} \neq 0$ (a barra denota complexo conjugado); note que $\|\eta\|_\infty = 1$.

Assim, (usando $|a| - |b| \leq |a - b|$, $a, b \in \mathbb{F}$)

$$\begin{aligned} 3\varepsilon_0 - \left| \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \xi_j^{n_k} \right| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{n_k}| - \left| \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \xi_j^{n_k} \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{\infty} (|\xi_j^{n_k}| - \eta_j \xi_j^{n_k}) \right| \\ &= \left| \left(\sum_{j=1}^{m_{k-1}} + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \right) (|\xi_j^{n_k}| - \eta_j \xi_j^{n_k}) \right| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{m_{k-1}} + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \right) (|\xi_j^{n_k}| + |\eta_j \xi_j^{n_k}|) \\ &\leq \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Portanto, $\varepsilon_0 \leq \left| \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \xi_j^{n_k} \right|$, para todo $k > 1$, contradizendo a convergência fraca da subsequência $\xi^{n_k} \xrightarrow{w} 0$. Esta contradição completa a demonstração. ■

EXERCÍCIO 14.7. Por que a demonstração acima não se adapta aos espaços l^p , $1 < p < \infty$? Verifique que em l^p , $p > 1$, existem seqüências fracamente convergentes que não convergem fortemente.

Notas

O primeiro a introduzir o conceito de convergência fraca foi Hilbert, em 1906, para os espaços l^2 , embora sem usar esta terminologia. Hilbert também demonstrou que a bola unitária em l^2 é fracamente sequencialmente compacta (veja os próximos Capítulos), uma propriedade útil que justifica a introdução da convergência fraca. A extensão para os espaços $L^p[a, b]$ foi devida a F. Riesz, quando estudava soluções em L^p de certos sistemas de equações. As demonstrações de que o dual de l^2 é o próprio l^2 foi devida a Hellinger e Toeplitz em 1906 e, no ano seguinte, E. Landau adaptou para os l^p . Usando o resultado de Landau, Riesz encontrou o dual de L^p . O Exemplo 14.11 foi publicado por Schur em 1921.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 14.8. Se $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ e $\xi_n \rightarrow \xi$ em \mathcal{N}_1 , mostre que $T\xi_n \rightarrow T\xi$ em \mathcal{N}_2 .

EXERCÍCIO 14.9. Suponha que $\psi_n \xrightarrow{w} \psi$ em $C[a, b]$. Mostre que ψ_n converge pontualmente a ψ .

EXERCÍCIO 14.10. Seja $\psi \in \mathcal{B} = C[-1, 1]$ com $\psi(-1) = \psi(1) = 0$ e $\psi(0) \neq 0$. Para cada $n \geq 2$, defina $\psi_n(t) = \psi(nt)$ se $|t| \leq 1/n$, e igual a zero de outra forma. Mostre que para todo $f \in \mathcal{B}^*$ a sequência $(f(\psi_n))$ é convergente em \mathbb{F} , contudo (ψ_n) não converge fracamente em \mathcal{B} (isto não ocorre em espaços reflexivos; veja o Exercício 16.8).

EXERCÍCIO 14.11. Verifique a seguinte versão do Princípio da Limitação Uniforme: Se para o subconjunto $\{T_j\}_{j \in J} \subset B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ vale $\sup_{j \in J} \|g(T_j \xi)\| < \infty$, para todos $\xi \in \mathcal{B}$, $g \in \mathcal{N}^*$, então $\sup_{j \in J} \|T_j\| < \infty$. Isto generaliza aquele Princípio?

EXERCÍCIO 14.12. A sequência $(\xi_n) \subset \mathcal{N}$ é dita *fracamente limitada* se $(f(\xi_n))$ é limitada para todo $f \in \mathcal{N}^*$. Mostre que toda sequência fracamente limitada é limitada e que se (T_n) converge fracamente em $B(\mathcal{B}, \mathcal{N})$, então $(\|T_n\|)$ é limitada.

EXERCÍCIO 14.13. Se $\xi_n \rightarrow \xi$ no espaço de Banach \mathcal{B} , use o Teorema de Hahn-Banach para mostrar que existe uma sequência de combinações lineares dos elementos (ξ_n) que converge fortemente a ξ .

EXERCÍCIO 14.14. Mostre que se $T_n \xrightarrow{a} T$ e $S_n \xrightarrow{w} S$ em $B(\mathcal{B})$, então $S_n T_n \xrightarrow{w} ST$. Escolhendo $T_n = 1$, conclua que $S_n T_n$ pode não convergir fortemente a ST .

EXERCÍCIO 14.15. Sejam $\{T_n, T\} \subset B(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ e $\{S_n, S\} \subset B(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$ com $T_n \xrightarrow{a} T$ e $S_n \xrightarrow{a} S$. Mostre que $S_n T_n \xrightarrow{a} ST$.

EXERCÍCIO 14.16. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $T_n : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$ dado por

$$T_n \xi = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ entradas}}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots),$$

o qual converge fracamente a zero. Encontre T_n^n e mostre que $T_n^n \xrightarrow{a} 0$ e, portanto, $T_n^n \xrightarrow{w} 0$. Mostre, então, que $T_n^n T_n = 1$, para todo n , e portanto não valem as conclusões do Exercício 14.15 se convergência forte for substituída por convergência fraca.

EXERCÍCIO 14.17. Mostre que a sequência $\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \dots)$ em $l^p(\mathbb{N})$ ($1 \leq p < \infty$) converge fracamente a $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \dots)$ em $l^p(\mathbb{N})$ se, e somente se, $\{\|\xi^n\|_p\}$ for um conjunto limitado e $\xi_j^n \rightarrow \xi_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ (ou seja, há convergência pontual). Verifique que em l^1 essas condições coincidem com a convergência forte.

Capítulo 15

Topologias Fracas e Teorema de Alaoglu

Agora será introduzida a noção de convergência fraca* (pronuncia-se “fraca estrela”) e definidas algumas topologias fracas em espaços normados. Termina-se este Capítulo com o Teorema de Alaoglu, e como primeira aplicação é dada uma caracterização geral dos espaços normados.

15.1 Topologias Fracas

Define-se a convergência fraca num espaço normado \mathcal{N} através de seu dual \mathcal{N}^* . De maneira análoga há a noção de convergência fraca em \mathcal{N}^* via \mathcal{N}^{**} . Lembrando que $\hat{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}^{**}$ (veja o Capítulo 12), será introduzida uma noção de convergência em \mathcal{N}^* , ainda mais fraca, usando-se $\hat{\mathcal{N}}$.

Definição 15.1. Dado um espaço normado \mathcal{N} , diz-se que uma sequência $(f_n) \subset \mathcal{N}^*$ converge fracamente* a $f \in \mathcal{N}^*$ se ocorre $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\xi}(f_n) = \hat{\xi}(f)$, para todo $\hat{\xi} \in \hat{\mathcal{N}}$. $f_n \xrightarrow{w^*} f$ indicará esta convergência.

Note que como $\hat{\xi}(f_n) = f_n(\xi) \rightarrow f(\xi)$, a convergência fraca* corresponde à convergência pontual de funcionais!

Proposição 15.2. Se $f_n \xrightarrow{w^*} f$ em \mathcal{N}^* , então o limite f é único. Além disso, $\hat{\mathcal{N}}$ separa pontos de \mathcal{N}^* e, se \mathcal{N} é Banach, então $\{\|f_n\|\}$ é um conjunto limitado.

Demonstração. Suponha que para todo $\xi \in \mathcal{N}$ tenha-se $\hat{\xi}(f) = \hat{\xi}(g)$, $f, g \in \mathcal{N}^*$; então $f(\xi) = g(\xi)$ para todo $\xi \in \mathcal{N}$, ou seja, $f = g$. Isto mostra a unicidade do limite e, como corolário, que \mathcal{N} separa pontos de \mathcal{N}^* .

Para demonstrar que $\{\|f_n\|\}$ é limitado será usado o Teorema de Banach-Steinhaus, daí a necessidade de \mathcal{N} ser completo. Como $f_n \xrightarrow{w^*} f$ vem que para todo $\xi \in \mathcal{N}$, $|\hat{\xi}(f_n)| = |f_n(\xi)|$ é convergente, logo limitado. Segue, por Banach-Steinhaus, que $\{\|f_n\|\}$ é limitado. ■

Proposição 15.3. $\{f_n\} \subset \mathcal{B}^*$ é fracamente* convergente se, e somente se, $(f_n(\xi))$ é uma sequência de Cauchy para ξ num conjunto total em \mathcal{B} e $\{\|f_n\|\}$ é um conjunto limitado.

EXERCÍCIO 15.1. Demonstre a Proposição 15.3.

Exemplo 15.4. Sejam $\mathcal{B} = C[0, 1]$ e f, f_n os seguintes elementos de \mathcal{B}^* (no Exemplo 4.15 aparece uma caracterização desse espaço):

$$f(\psi) = \psi(0), \quad f_n(\psi) = n \int_0^{1/n} \psi(t) dt, \quad \psi \in \mathcal{B}.$$

Note que $f_n(\psi)$ é a média de ψ no intervalo $[0, 1/n]$. Considere $\psi_n(t) = 4nt(1 - nt)$ se $0 \leq t \leq 1/n$ e $\psi_n(t) = 0$ se $t \geq 1/n$. Então $\|\psi_n\|_\infty = 1$, $f(\psi_n) = 0$ e $f_n(\psi_n) = 2/3$ para todo n , e conclui-se que $\|f - f_n\| \geq 2/3$ em \mathcal{B}^* . No entanto, para cada $\psi \in \mathcal{B}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de forma que $|\psi(t) - \psi(0)| < \varepsilon$ se $0 \leq t \leq 1/n$ para todo $n \geq N$; assim, se $n \geq N$,

$$|\psi(f_n) - \psi(f)| = |f_n(\psi) - f(\psi)| = \left| n \int_0^{1/n} (\psi(t) - \psi(0)) dt \right| \leq \varepsilon,$$

concluindo que $\hat{\psi}(f_n) \rightarrow \hat{\psi}(f)$ para todo $\psi \in \mathcal{B}$, ou seja, $f_n \xrightarrow{w^*} f$ no espaço \mathcal{B}^* . •

Será conveniente introduzir explicitamente as topologias associadas às convergências fracas já discutidas. Lembre que uma topologia τ_1 é menos fina do que a topologia τ_2 se $\tau_1 \subset \tau_2$, ou seja, todo elemento de τ_1 pertence a τ_2 . É bom lembrar que numa topologia menos fina, a noção de convergência (veja o Exercício 15.2) é “mais fraca”, ou seja, um número menor de condições é imposto.

Definição 15.5. A topologia forte em \mathcal{N} é a topologia métrica induzida pela norma de \mathcal{N} . Uma base (aberta) dessa topologia é dada pelas bolas abertas $B_{\mathcal{N}}(\xi; r)$, com $\xi \in \mathcal{N}, r > 0$.

Definição 15.6. A topologia fraca em \mathcal{N} é a topologia $\tau(\mathcal{N}, \mathcal{N}^*)$ gerada pelos funcionais lineares em \mathcal{N}^* , ou seja, é a topologia menos fina em \mathcal{N} na qual todos os elementos de \mathcal{N}^* permanecem contínuos. Uma sub-base (aberta) de $\tau(\mathcal{N}, \mathcal{N}^*)$ é a coleção

$$V(\xi; f; r) = f^{-1}B_{\mathbb{F}}(f(\xi); r) = \{\eta \in \mathcal{N} : |f(\xi) - f(\eta)| < r\},$$

com $\xi \in \mathcal{N}, r > 0$ e $f \in \mathcal{N}^*$. Lembre-se que uma base da topologia é dada pela família de intersecções finitas de elementos da sub-base.

Claramente, a topologia fraca em \mathcal{N}^* é $\tau(\mathcal{N}^*, \mathcal{N}^{**})$; agora será introduzida outra topologia útil no espaço dual \mathcal{N}^* .

Definição 15.7. A topologia fraca* em \mathcal{N}^* é a topologia $\tau(\mathcal{N}^*, \hat{\mathcal{N}})$ gerada pelos funcionais lineares em $\hat{\mathcal{N}}$, ou seja, é a topologia menos fina em \mathcal{N}^* em que todos os elementos de $\hat{\mathcal{N}}$ permanecem contínuos. Uma sub-base (aberta) de $\tau(\mathcal{N}^*, \hat{\mathcal{N}})$ é a coleção

$$\begin{aligned} V^*(f; \xi; r) &= \hat{\xi}^{-1}B_{\mathbb{F}}(\hat{\xi}(f); r) = \left\{g \in \mathcal{N}^* : |\hat{\xi}(f) - \hat{\xi}(g)| < r\right\} \\ &= \{g \in \mathcal{N}^* : |f(\xi) - g(\xi)| < r\}, \end{aligned}$$

com $f \in \mathcal{N}^*, \xi \in \mathcal{N}$ e $r > 0$.

Um elemento típico da base gerada pela sub-base acima da topologia $\tau(\mathcal{N}^*, \hat{\mathcal{N}})$ é dado por

$$V^*(f; \xi_1, \dots, \xi_n; r) = \left\{g \in \mathcal{N}^* : \max_{1 \leq j \leq n} |\hat{\xi}_j(f) - \hat{\xi}_j(g)| < r\right\}.$$

De forma análoga obtêm-se os elementos da base de $\tau(\mathcal{N}, \mathcal{N}^*)$

$$V(\xi; f_1, \dots, f_n; r) = \left\{\eta \in \mathcal{N} : \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(\xi) - f_j(\eta)| < r\right\}.$$

Proposição 15.8. *Seja \mathcal{N} um espaço normado. Então:*

i.) *A topologia fraca* em \mathcal{N}^* é menos fina do que a topologia fraca em \mathcal{N}^* .*

ii.) Se \mathcal{N} é reflexivo as topologias fraca e fraca* em \mathcal{N}^* coincidem (veja também o Exercício 15.11).

iii.) As topologias fraca em \mathcal{N} e fraca* em \mathcal{N}^* são de Hausdorff.

Demonstração. Os dois primeiros itens seguem diretamente das definições. O terceiro item segue do fato de que os respectivos conjuntos de funcionais separam pontos (Proposições 14.3 e 15.2). Aqui será detalhado o caso da topologia fraca*, o outro caso sendo similar.

Se $f, g \in \mathcal{N}^*$ e $f \neq g$, então existe $\xi \in \mathcal{N}$ de maneira que

$$0 < \delta = |f(\xi) - g(\xi)| = |\hat{\xi}(f) - \hat{\xi}(g)|.$$

Assim, $V^*(f; \xi; \delta/3)$ e $V^*(g; \xi; \delta/3)$ são vizinhanças abertas não-vazias de f e g , respectivamente; como também são disjuntas segue que a topologia fraca* é de Hausdorff. ■

EXERCÍCIO 15.2. Uma sequência (x_n) num espaço topológico de Hausdorff (X, τ) converge a $x \in X$ se, para cada vizinhança $U \in \tau$ de x , tem-se que $x_n \in U$ para todo n suficientemente grande.

(a) Verifique que se ξ_n converge a ξ na topologia $\tau(\mathcal{N}, \mathcal{N}^*)$, então $\xi_n \rightarrow \xi$ em \mathcal{N} .

(b) Verifique que se f_n converge a f na topologia $\tau(\mathcal{N}^*, \hat{\mathcal{N}})$, então $f_n \xrightarrow{w^*} f$ em \mathcal{N}^* .

(c) Valeriam as recíprocas nos itens (a) e (b) acima?

Em relação às topologias fracas introduzidas, o próximo resultado puramente algébrico é relevante, além de interessante por si mesmo.

Proposição 15.9. *Sejam f, f_1, \dots, f_n funcionais lineares num espaço vetorial X (sem topologia!). Existem escalares a_1, \dots, a_n de forma que $f = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ se, e somente se,*

$$N := \bigcap_{j=1}^n N(f_j) \subset N(f).$$

Demonstração. O caso $f = 0$ é trivial; assim, suponha que $f \neq 0$. Note que se f pode ser decomposto desta maneira $f = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$, então, claramente, $\bigcap_{j=1}^n N(f_j) \subset N(f)$. Resta a recíproca.

Primeiramente considere o caso de dois funcionais f, g com $N(g) \subset N(f)$, cuja demonstração mais simples ilustra a idéia no caso geral. Escolha $\zeta \in X \setminus N(f)$; assim, $g(\zeta) \neq 0$ e para todo $\xi \in X$ o vetor $\eta = \xi - g(\xi)\zeta/g(\zeta)$ pertence a $N(g)$, e como então está também em $N(f)$, segue que $0 = f(\eta) = f(\xi) - a_1 g(\xi)$, ou seja,

$$f = a_1 g, \quad a_1 = \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)}.$$

No caso geral, para cada $1 \leq i \leq n$ escolha $\xi_i \in [\bigcap_{j \neq i} N(f_j) \setminus N]$; se algum ξ_i não existe, pode-se excluir f_i nos argumentos; caso reste apenas um único funcional f_k , escolha $\zeta \in X \setminus N(f)$ como acima.

Definindo $\eta_i = \xi_i/f_i(\xi_i)$, tem-se que $f_j(\eta_i) = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker). Agora, para cada $\xi \in X$ note que $\eta = \xi - \sum_{j=1}^n f_j(\xi)\eta_j$ pertence a N . logo

$$f(\eta) = 0 = f(\xi) - \sum_{j=1}^n a_j f_j(\xi),$$

sendo $a_j = f(\xi_i)/f_i(\xi_i)$, concluindo que $f = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$. ■

15.2 Teorema de Alaoglu

Um dos motivos para se introduzir a topologia fraca* é o Teorema de Alaoglu. Se $\dim \mathcal{N}^* = \infty$ sabe-se que $\overline{B}_{\mathcal{N}^*}(0; 1)$ não é compacta na topologia usual de \mathcal{N}^* (Teorema 2.2). Mas tem-se o

Teorema 15.10 (Alaoglu). *Se \mathcal{N} é um espaço normado, então a bola fechada $B^* := \overline{B}_{\mathcal{N}^*}(0; 1) = \{f \in \mathcal{N}^* : \|f\| \leq 1\}$ é um espaço topológico de Hausdorff compacto na topologia fraca*.*

Demonstração. Já se sabe que B^* com a topologia fraca* é de Hausdorff. Para mostrar que B^* é compacta será usado o Teorema de Tychonov [Simmons (1963)] para encontrar um espaço topológico compacto K , no qual B^* é um subconjunto fechado de K , logo compacto, e a topologia induzida coincide com a fraca*. Isto demonstra o teorema.

A cada $\xi \in \mathcal{N}$ associe $K_\xi = \{z \in \mathbb{F} : |z| \leq \|\xi\|\}$, o qual é compacto em \mathbb{F} e, pelo Teorema de Tychonov, o produto cartesiano K de todos os K_ξ é compacto na topologia produto. Vale a pena lembrar que a

topologia produto é a topologia menos fina no espaço produto de modo que todas as projeções π_t sejam contínuas (veja a página 166).

Cada elemento de K é uma função f que associa a cada $\xi \in \mathcal{N}$ um escalar $f(\xi)$ com $|f(\xi)| \leq \|\xi\|$; assim, a bola unitária B^* é o subconjunto de K obtido pela restrição às funções $f \in K$ que são lineares. Para $f \in B^*$ considere as famílias $V^*(f; \xi; r)$ (definidas acima) e

$$U(f; \xi; r) := \left\{ g \in K : |f(\xi) - g(\xi)| < r \right\},$$

para ξ percorrendo \mathcal{N} e todo $r > 0$. Tais famílias são sub-bases locais de vizinhanças de $f \in B^*$ na topologia fraca* e na topologia produto, respectivamente. Como $B^* \subset K \cap \mathcal{N}^*$, vem que

$$V^*(f; \xi; r) \cap B^* = U(f; \xi; r) \cap B^*$$

e a topologia fraca* de B^* e a topologia induzida de K em B^* coincidem. Assim, para terminar a demonstração, basta mostrar que B^* é um subconjunto fechado de K .

Seja g um elemento do fecho de B^* em K . Pela definição de K tem-se $|g(\xi)| \leq \|\xi\|$, de forma que para mostrar que $g \in B^*$ é suficiente verificar que g é linear. Toda vizinhança de g em K intersecta B^* ; assim, dados $\xi, \eta \in \mathcal{N}$ e $\varepsilon > 0$, existe

$$h \in [B^* \cap U(g; \xi; \varepsilon/3) \cap U(g; \eta; \varepsilon/3) \cap U(g; \xi + \eta; \varepsilon/3)].$$

Usando a linearidade de h segue que

$$\begin{aligned} |g(\xi + \eta) - g(\xi) - g(\eta)| &= |g(\xi + \eta) - h(\xi + \eta) - g(\xi) - g(\eta) + h(\xi + \eta)| \\ &= |g(\xi + \eta) - h(\xi + \eta) - g(\xi) + h(\xi) - g(\eta) + h(\eta)| \\ &\leq |g(\xi + \eta) - h(\xi + \eta)| + |g(\eta) - h(\eta)| + |g(\xi) - h(\xi)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $g(\xi + \eta) = g(\xi) + g(\eta)$. De forma análoga, para todo $\xi \in \mathcal{N}$ mostra-se que vale $g(\alpha\xi) = \alpha g(\xi)$, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$, e conclui-se que g é uma aplicação linear. ■

EXERCÍCIO 15.3. Mostre que se B é reflexivo, então a bola unitária B^* (como na demonstração do Teorema de Alaoglu) e a bola $\overline{B}_B(0; 1)$ são fracamente compactas.

A primeira aplicação do Teorema de Alaoglu é uma caracterização dos espaços normados.

Proposição 15.11. *Se \mathcal{N} um espaço normado, então existe um espaço topológico de Hausdorff compacto X em que \mathcal{N} é isomorfo (via aplicação linear isométrica) a um subespaço de $C(X)$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Alaoglu basta escolher $X = \overline{B_{\mathcal{N}^*}}(0; 1)$ com a topologia fraca* e a aplicação canônica $\hat{\cdot}: \mathcal{N} \rightarrow \hat{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}^{**}$ sendo a isometria linear entre \mathcal{N} e um subespaço de $C(X)$. Observe que tal subespaço é fechado se, e somente se, \mathcal{N} é um espaço de Banach. ■

Note que a utilidade desse tipo de resultado de caracterização pode ser pequena. Usar apenas $C(X)$, com X de Hausdorff compacto, para estudar todos os espaços normados tem valor se não for usada qualquer propriedade específica de $C(X)$, ou seja, restringindo-se àquelas propriedades advindas da definição de espaços normados. Isto se reduz a usar a definição diretamente. A Proposição 15.11 mostra como é rico o conjunto dos subespaços de $C(X)$!

OBSERVAÇÃO 15.12. Será visto que todo espaço de Hilbert é essencialmente algum l^2 (Proposição 22.1).

Notas

O Teorema de Alaoglu foi publicado em L. Alaoglu, *Weak Topologies of Normed Linear Spaces*, Ann. Math. 41, (1940) 252-267; na mesma época apareceram demonstrações relacionadas devidas a N. Bourbaki e S. Kakutani. Em relação à Proposição 15.11, vale lembrar que, segundo o Teorema de Banach-Mazur, todo espaço de Banach separável é isométrico a algum subespaço fechado de $C[-1, 1]$.

As topologias fraca e fraca*, como em geral topologias envolvendo a noção de convergência pontual, podem ser introduzidas de forma elegante usando famílias de seminormas

O ponto forte do Teorema de Tychonov, demonstrado em 1930, é que ele vale para o produto cartesiano de uma família qualquer de conjuntos compactos, e está diretamente relacionado ao Lema de Zorn, no caso de cardinalidade enumerável, há demonstrações mais simples que usam o processo diagonal de Cantor. Pode-se dizer que o Teorema de Alaoglu indica que a topologia natural no produto cartesiano é realmente a topologia produto, menos fina do que a topologia gerada pelos produtos de abertos. Alguns autores arriscam-se a dizer que o Teorema de Alaoglu é a aplicação mais importante do Teorema de Tychonov

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 15.4. Considere \mathcal{N} com a topologia fraca. Se $\zeta \in \mathcal{N}$ e $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$, mostre que as aplicações $M_\alpha, T_\zeta : \mathcal{N} \leftrightarrow$, dadas por $T_\zeta \xi = \zeta + \xi$ e $M_\alpha \xi = \alpha \xi$, são homeomorfismos. Qual o análogo para \mathcal{N}^* com a topologia fraca*?

EXERCÍCIO 15.5. Uma sequência $(\psi_n) \subset C[-1, 1]$ pode ser considerada em $C[-1, 1]^*$ via $\psi_n(\phi) = \int_{-1}^1 \phi(t)\psi_n(t) dt$, $\phi \in C[-1, 1]$. Mostre que se $\psi_n \xrightarrow{w^*} \delta$, sendo $\delta(\phi) = \phi(0)$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \psi_n(t) dt = 1$ e existe $C > 0$ de modo que $\int_{-1}^1 |\psi_n(t)| dt \leq C$ para todo n .

EXERCÍCIO 15.6. Se $\dim \mathcal{N} = \infty$, mostre que, para quaisquer f_1, \dots, f_n em \mathcal{N}^* dados, existe um subespaço vetorial não-trivial formado por soluções ξ de $f_j(\xi) = 0$, $j = 1, \dots, n$ (veja a Proposição 15.9). Use isto para concluir que, no caso de $\dim \mathcal{N} = \infty$, todo aberto não-vazio de \mathcal{N} na topologia fraca, bem como todo aberto não-vazio de \mathcal{N}^* com a topologia fraca*, contém elementos de norma arbitrariamente grande. Mostre, então, que as respectivas normas não são contínuas nessas topologias (veja também o Exercício 21.5).

EXERCÍCIO 15.7. Se $\dim \mathcal{N} = \infty$, com base no Exercício 15.6, mostre que a topologia fraca em \mathcal{N} , bem como a topologia fraca* em \mathcal{N}^* , não são geradas por normas.

EXERCÍCIO 15.8. Se $\dim \mathcal{N}$ é finita, mostre que as topologias fraca e forte em \mathcal{N} coincidem.

EXERCÍCIO 15.9. Siga o roteiro abaixo para demonstrar o seguinte resultado, o qual será usado em exercícios que seguem: Sejam X um espaço vetorial e Y um espaço vetorial de funcionais lineares que separa pontos de X . Denote por Z o espaço vetorial X com a topologia $\tau(X, Y)$ gerada por Y , ou seja, $Z = (X, \tau(X, Y))$. Então o dual Z^* de Z (funcionais lineares contínuos nessa topologia) é Y .

a) Se $f \in Z^*$ então $\{\xi \in X : |f(\xi)| < 1\}$ contém um aberto da forma $U = \{\xi : |f_j(\xi)| < \varepsilon, 1 \leq j \leq n\}$, para funcionais $f_j \in Y$ e algum $\varepsilon > 0$, o que garante a existência de $C > 0$ de modo que $|f(\xi)| \leq C \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(\xi)|$, para todo $\xi \in X$.

b) Conclua que $\cap_{j=1}^n N(f_j) \subset N(f)$ e, pela Proposição 15.9, que existem escalares $a_j, 1 \leq j \leq n$, de modo que $f = \sum_{j=1}^n a_j f_j$. Como Y é um espaço vetorial segue que $f \in Y$.

EXERCÍCIO 15.10. Use o Exercício 15.9 para mostrar:

a) Que a topologia fraca $\tau(\mathcal{N}, \mathcal{N}^*)$ em \mathcal{N} não introduz novos funcionais lineares contínuos, ou seja, que o conjunto de funcionais lineares contínuos sobre \mathcal{N} , com a topologia fraca, continua sendo \mathcal{N}^* .

b) Que na topologia fraca* em \mathcal{N}^* , o conjunto de funcionais lineares contínuos sobre \mathcal{N}^* é precisamente $\dot{\mathcal{N}}$.

EXERCÍCIO 15.11. Use o Exercício 15.9 para mostrar que a topologia fraca e a topologia fraca* em \mathcal{N}^* coincidem se, e somente se, \mathcal{N} é reflexivo (veja a Proposição 15.8).

EXERCÍCIO 15.12. a) Mostre que se $E \subset \mathcal{N}^*$ é fechado na topologia fraca* e limitado (na norma de \mathcal{N}^*), então E é fracamente* compacto

b) Mostre que num espaço de Banach \mathcal{B} um subconjunto $E \subset \mathcal{B}^*$ é fracamente* compacto se, e somente se, E é fechado na topologia fraca* e limitado (na norma de \mathcal{N}^*).

c) Se \mathcal{B} for reflexivo, verifique que b) vale com topologia fraca no lugar de fraca* (e \mathcal{B} no lugar de \mathcal{B}^* , claramente).

EXERCÍCIO 15.13. Se o espaço vetorial X admite um funcional linear $f : X \rightarrow \mathbb{F}$ com $N(f) = \{0\}$, o que se pode dizer sobre $\dim X$?

Capítulo 16

Espaços Reflexivos e Compacidade Sequencial

Continuando com aplicações do Teorema de Alaoglu, neste Capítulo são discutidas algumas relações entre as topologias fracas e espaços reflexivos e separáveis. Em espaços normados de dimensão infinita, sempre há seqüências fracamente convergentes que não convergem fortemente?

Propriedades de \mathcal{N} são refletidas em $\hat{\mathcal{N}}$ e, assim, na topologia fraca*. Lembre-se que \mathcal{N} é separável se, e somente se, $\hat{\mathcal{N}}$ é separável.

Proposição 16.1. *Se $B^* = \overline{B_{\mathcal{N}^*}}(0; 1)$ é metrizable na topologia fraca*, então \mathcal{N} é separável.*

Demonstração. Sendo B^* metrizable, existe uma seqüência de conjuntos abertos (A_n) em B^* (na topologia fraca*) de modo que $\bigcap_n A_n = \{0\}$. Cada A_n contém um conjunto da base da topologia na forma

$$V_n^*(0; J_n; \varepsilon_n) = \left\{ f \in \mathcal{N}^* : |\hat{\xi}(f)| < \varepsilon_n, \forall \xi \in J_n \right\},$$

sendo $J_n \subset \mathcal{N}$ finito. Assim, $J = \bigcup_n J_n$ é contável e $E := \text{Lin}(J)$ é um subespaço separável de \mathcal{N} pela Proposição 3.4.

Seja $g \in \mathcal{N}^*$ de modo que $g|_E = 0$; logo $J \subset N(g)$ e $g \in A_n$, para todo n . Portanto $g = 0$ e, pelo Corolário 12.3, segue que E é denso em \mathcal{N} , mostrando que \mathcal{N} é separável. ■

Para discutir a recíproca da Proposição 16.1 e algumas conseqüências, o próximo resultado será útil.

Proposição 16.2. *Seja (X, τ) um espaço topológico compacto. Se existe uma sequência (f_n) de funções contínuas, $f_n : X \rightarrow \mathbb{F}$, que separa pontos de X , então (X, τ) é metrizable.*

Demonstração. Pode-se supor que $\|f_n\|_\infty \leq 1$, para todo n . Como (f_n) separa pontos, define-se a métrica em X

$$d(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(t)|, \quad x, t \in X,$$

cujas séries convergem uniformemente em $X \times X$, implicando que para todo $x \in X$ a função $d_x : (X, \tau) \rightarrow [0, \infty)$ dada por $d_x(\cdot) := d(x, \cdot)$ é contínua. Assim, as bolas $B(x; r) = d_x^{-1}([0, r))$, $x \in X, r > 0$, são abertos em (X, τ) e a topologia τ_d gerada por essa métrica em X é menos fina do que τ , já que tais bolas formam uma base de τ_d . Para concluir que essas topologias são equivalentes será mostrado que todo conjunto fechado em (X, τ) também é fechado em (X, τ_d) .

Seja F um subconjunto fechado em (X, τ) . Sendo (X, τ) compacto vem que F também é compacto em (X, τ) . Como $\tau_d \subset \tau$, toda cobertura de F por abertos de τ_d é também cobertura por abertos de τ ; logo possui subcobertura finita e segue que F também é compacto em (X, τ_d) . Como todo compacto num espaço métrico é fechado, segue-se que F é fechado em (X, τ_d) e $\tau \subset \tau_d$. Portanto as topologias τ e τ_d coincidem. ■

Proposição 16.3. *Se \mathcal{N} é separável e $S \subset \mathcal{N}^*$ é compacto na topologia fraca*, então S é metrizable na topologia fraca*.*

Demonstração. Seja (ξ_n) uma sequência densa em \mathcal{N} . Por definição $\hat{\xi}_n$ é contínuo na topologia fraca*; se para todo n tem-se $\hat{\xi}_n(f) = \hat{\xi}_n(g)$, f, g em \mathcal{N}^* , ou seja, $f(\xi_n) = g(\xi_n)$, para todo n , segue-se que $f = g$, pois ambos são funcionais contínuos que coincidem num conjunto denso em \mathcal{N} . Portanto $(\hat{\xi}_n)$ é uma sequência de funções contínuas que separa pontos de \mathcal{N}^* e, em particular, separa pontos de S . Pela Proposição 16.2, segue que S é metrizable na topologia fraca*. ■

EXERCÍCIO 16.1. Se \mathcal{N} é separável e $S \subset \mathcal{N}^*$ é compacto na topologia fraca*, mostre que convergência de uma sequência em S na métrica associada (àquela da Proposição 16.3) equivale à convergência fraca* (veja a Definição 15.1).

EXERCÍCIO 16.2. Se \mathcal{N} é separável, mostre que toda sequência limitada (f_n) em \mathcal{N}^* possui uma subsequência fracamente* convergente. Diz-se que, neste caso, todo subconjunto limitado de \mathcal{N}^* é *fracamente* sequencialmente compacto* (veja o Exercício 16.12).

Como consequência desses resultados, obtém-se uma caracterização interessante de espaços separáveis.

Teorema 16.4. \mathcal{N} é separável se, e somente se, para todo $r > 0$, o conjunto $\overline{B_{\mathcal{N}^*}}(0, r)$ é metrizável na topologia fraca*.

Demonstração. É suficiente considerar $r = 1$ (a multiplicação por escalar é um homeomorfismo em $\tau(\mathcal{N}^*, \hat{\mathcal{N}})$). Se B_1^* é metrizável na topologia fraca*, então \mathcal{N} é separável pela Proposição 16.1. Por outro lado, pelo Teorema de Alaoglu, B_1^* é compacto nessa topologia e, sendo \mathcal{N} separável, segue da Proposição 16.3 que B_1^* é metrizável. ■

Relacionado à Proposição 12.4, tem-se:

EXERCÍCIO 16.3. Se \mathcal{B} é reflexivo e separável, mostre que \mathcal{B}^* é separável (note que também é reflexivo).

Teorema 16.5. Se \mathcal{B} é reflexivo, então toda sequência limitada em \mathcal{B} possui subsequência fracamente convergente.

Demonstração. Sejam (ξ_n) uma sequência limitada em \mathcal{B} e $E = \text{Lin}((\xi_n))$. Por construção, E é separável (veja a Proposição 3.4) e, sendo fechado, segue da Proposição 12.10 que também é reflexivo. Logo $\hat{E} = E^{**}$ é separável e, pela Proposição 12.4, E^* é separável.

Do Exercício 16.2, aplicado a $\mathcal{N} = E^*$, conclui-se que $(\hat{\xi}_n) \subset \hat{E}$ (sendo $\hat{\cdot}$ a aplicação canônica $E \mapsto \hat{E} = E^{**}$) possui subsequência fracamente* convergente a certo $\hat{\xi} \in \hat{E}$, ou seja, para todo $g \in \hat{E}^*$ (sendo $\hat{\cdot}$ a aplicação canônica $E^* \mapsto \hat{E}^* \subset E^{***}$) tem-se $g(\hat{\xi}_{n_j}) \rightarrow g(\hat{\xi})$.

Lembrando que cada $g = \check{f}$, para algum $f \in E^*$, tem-se que

$$g(\hat{\xi}_{n_j}) = \check{f}(\hat{\xi}_{n_j}) = \hat{\xi}_{n_j}(f) = f(\xi_{n_j})$$

é convergente a $g(\hat{\xi}) = f(\hat{\xi})$, e vale para qualquer $f \in E^*$. Contudo, para todo $F \in \mathcal{B}^*$ tem-se que $F|_E \in E^*$, seguindo que $F(\xi_{n_j}) = F|_E(\xi_{n_j}) \rightarrow F|_E(\hat{\xi}) = F(\hat{\xi})$; ou seja, (ξ_{n_j}) é fracamente convergente a $\hat{\xi}$. ■

Diz-se, portanto, que no caso de espaços reflexivos \mathcal{B} , todo subconjunto limitado de \mathcal{B} é *fracamente sequencialmente compacto*.

Corolário 16.6. *Se B é reflexivo e $\dim B = \infty$, então há seqüências fracamente convergentes em B que não convergem fortemente.*

Demonstração. Pelo saudoso Teorema 2.2, a bola unitária $\overline{B}_B(0; 1)$ não é fortemente compacta, logo existe uma seqüência $(\xi_n) \subset \overline{B}_B(0; 1)$ que não possui subsequência convergente. Aplique o Teorema 16.5 à seqüência limitada (ξ_n) . ■

Note que a demonstração do Corolário 16.6 implica também numa outra conclusão: Se B é reflexivo com $\dim B = \infty$, então este possui seqüências fracamente convergentes as quais não possuem subsequências fortemente convergentes.

Exemplo 16.7. O Exemplo 14.11 mostra que há casos de espaços de Banach não-reflexivos em que as conclusões do Corolário 16.6 não valem, pois em $l^1(\mathbb{N})$ as convergências fraca e forte são equivalentes. •

EXERCÍCIO 16.4. $C[a, b]$ não é reflexivo (veja Exercício 14.10; além do Teorema de Riesz-Markov e as Notas do Capítulo 4). Mostre que em $C[a, b]$ há seqüências que convergem fracamente mas não convergem fortemente.

OBSERVAÇÃO 16.8. Se $\dim \mathcal{N} = \infty$, então as topologias fraca e forte são distintas (veja, por exemplo, os Exercícios 15.7 e 16.14), mesmo se as convergências fraca e forte coincidirem, como em $l^1(\mathbb{N})$ (Exemplo 14.11).

Agora será discutida uma aplicação à Teoria Ergódica. Se Ω é um espaço métrico compacto, uma medida boreliana μ em Ω é *invariante* pela aplicação contínua $A : \Omega \leftrightarrow \Omega$

$$\int_{\Omega} \psi \, d\mu = \int_{\Omega} (\psi \circ A) \, d\mu, \quad \forall \psi \in C(\Omega).$$

Uma medida μ é dita de *probabilidade* se $\mu(\Omega) = 1$.

Teorema 16.9 (Krylov-Bogolioubov). *Toda aplicação A como acima possui uma medida de probabilidade invariante.*

Demonstração. Denote $\mathcal{B} = C(\Omega)$. Por Riesz-Markov $\mathcal{B}^* = M(\Omega)$, em que para $\mu \in M(\Omega)$, $\hat{\psi}(\mu) = \mu(\psi) = \int_{\Omega} \psi \, d\mu$, $\psi \in C(\Omega)$. Lembrando que \mathcal{B} é separável segue, pelo Teorema de Alaoglu e a Proposição 16.3.

que $\overline{B_{B^*}}(0; r)$ é compacto e metrizável na topologia fraca*, para todo $r > 0$; logo $\overline{B_{B^*}}(0; r)$ é sequencialmente compacto.

Para $\xi \in \Omega$, seja δ_ξ a medida $\delta_\xi(\psi) = \psi(\xi)$; a sequência $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{A^j(\xi)}$ está contida em $\overline{B_{B^*}}(0; r)$ para algum $r > 0$ (veja a demonstração da Proposição 16.2) e, portanto, possui subsequência fracamente* convergente a alguma $\nu \in \overline{B_{B^*}}(0; r)$; tal subsequência será também denotada por μ_n . Assim, para toda $\psi \in C(\Omega)$ tem-se

$$\hat{\psi}(\nu) = \int_{\Omega} \psi d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\psi}(\mu_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi(A^j(\xi)).$$

Agora,

$$\int_{\Omega} \psi \circ A d\mu_n - \int_{\Omega} \psi d\mu_n = \frac{1}{n} (\psi \circ A^n(\xi) - \psi(\xi)),$$

e sendo ψ limitada obtém-se, para $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{n} (\psi \circ A^n(\xi) - \psi(\xi)) \rightarrow 0$ e, portanto, $\int_{\Omega} \psi \circ A d\nu = \int_{\Omega} \psi d\nu$, ou seja, ν é invariante por A . Escolhendo $\psi = 1$, conclui-se que $\nu(\Omega) = 1$. ■

Notas

Os espaços de Hilbert constituem exemplos importantes de espaços reflexivos (veja o Corolário 19.5), e com a vantagem da noção de ortogonalidade. Tal vantagem se traduz, por exemplo, em versões específicas e menos abstratas do Corolário 16.6; veja, por exemplo, o Exercício 21.5. Vale a pena mencionar um resultado interessante que não foi discutido aqui: B é reflexivo se, e somente se, $\overline{B_{B^*}}(0, 1)$ é compacta na topologia fraca. Uma breve demonstração deste resultado pode ser encontrada em D. M. Oberlin, *A measure-theoretic proof of a theorem on reflexivity*, Proc. Amer. Math. Soc. **41**, (1973) 325-326.

O Teorema 16.5 é de Pettis em 1938; encontra-se a recíproca desse resultado em W. F. Eberlein, *Weak Compactness in Banach Spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **33**, (1947) 51-53. Mesmo em espaços reflexivos o fecho fraco não pode ser definido em termos de convergência fraca; de fato, em 1929 von Neumann mostrou casos em que uma sequência possui um único ponto de acumulação na topologia fraca, contudo não possui subsequência que converge fracamente a esse ponto (veja o Exemplo 22.4)!

Em N. Krylov e N. Bogolioubov, *La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire*, Ann. of Math. **38**, (1937) 65-113, iniciou-se a procura de medidas invariantes a partir de médias similares àsquelas na demonstração do Teorema 16.9.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 16.5. Seja $\psi_n(t) = e^{int}$ em $L^1[-\pi, \pi]$. Mostre que $\psi_n \rightarrow 0$, mas não converge fortemente.

EXERCÍCIO 16.6. Mostre que num espaço topológico compacto (X, τ) , toda topologia métrica menos fina que τ é, de fato, equivalente a τ .

EXERCÍCIO 16.7. Seja $\delta_n \in l^2(\mathbb{N})^* = l^2(\mathbb{N})$ definido por $\delta_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = \xi_n$. Mostre que $\delta_n \xrightarrow{w^*} 0$, mas (δ_n) não converge em $l^2(\mathbb{N})$.

EXERCÍCIO 16.8. Use o seguinte roteiro para mostrar que todo espaço reflexivo B é fracamente sequencialmente completo, ou seja, se $(\xi_n) \subset B$ é uma sequência em que $(f(\xi_n))$ é convergente em F para todo $f \in B^*$, então (ξ_n) é fracamente convergente (veja o Exercício 14.10 para um caso de espaço não-reflexivo que não é fracamente sequencialmente completo).

a) Mostre que sob tais condições existe $R > 0$ de modo que $\|\xi_n\| \leq R$, para todo n (veja o Exercício 14.12).

b) Sendo B reflexivo, use o Teorema de Alaoglu para concluir que $\overline{B}_B(0, R)$ é fracamente compacta, logo (ξ_n) possui ponto de acumulação fraco $\xi \in \overline{B}_B(0, R)$ (definição por conta dos leitores).

c) Como $(f(\xi_n))$ é convergente, conclua que $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$.

EXERCÍCIO 16.9. Mostre que o dual de um espaço de Banach reflexivo é fracamente sequencialmente completo (veja definição no Exercício 16.8).

EXERCÍCIO 16.10. Verifique que no cubo de Hilbert

$$C = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^p(\mathbb{N}) : |\xi_j| \leq 1/j, \forall j\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

a convergência fraca é equivalente à convergência forte.

EXERCÍCIO 16.11. Analise a seguinte afirmação: Se num subconjunto limitado e fechado X , de um espaço de Banach reflexivo, a convergência fraca de seqüências é equivalente à convergência forte, então X é fortemente compacto. Portanto o cubo de Hilbert (Exercício 16.10) em $l^2(\mathbb{N})$ é sequencialmente compacto.

EXERCÍCIO 16.12. Verifique que a seqüência $(f_n) \subset l^\infty(\mathbb{N})^*$, $f_n(\xi) = \xi_n$, é limitada mas não possui subsequência fracamente convergente, ilustrando a Proposição 16.1 (ou, ainda, que a hipótese de \mathcal{N} ser separável não pode ser retirada no Exercício 16.2).

EXERCÍCIO 16.13. Mostre que se $\dim \mathcal{N} = \infty$, então o interior do conjunto $B_{\mathcal{N}}(0, 1)$ é vazio na topologia fraca $\tau(\mathcal{N}, \mathcal{N}^*)$. Use isto para argumentar que as topologias fraca e forte são distintas neste caso (incluindo $l^1(\mathbb{N})$ em que as convergências fraca e forte de seqüências coincidem; veja o Exemplo 14.11).

EXERCÍCIO 16.14. Mostre que se $\dim \mathcal{N} = \infty$, então 0 pertence ao fecho da esfera $S_{\mathcal{N}}(0; 1)$ na topologia fraca. Qual seria o fecho de $S_{\mathcal{N}}(0; 1)$ na topologia fraca?

Capítulo 17

Espaços de Hilbert

Os espaços de Hilbert formam a classe mais importante de espaços de Banach; além da norma, aparece também a noção de *produto interno*, uma generalização de produto escalar em \mathbb{R}^3 . O próprio Hilbert estudou principalmente os espaços l^2 e L^2 ; foi J. von Neumann quem, por volta de 1930, introduziu a definição abstrata de espaço de Hilbert, a qual foi necessária na formulação matemática da Mecânica Quântica que acabara de surgir. Neste Capítulo serão apresentadas a definição de espaço de Hilbert e algumas propriedades básicas; ao final introduz-se o conceito fundamental de ortogonalidade.

17.1 Produto Interno

Definição 17.1. Um *produto interno* no espaço vetorial X é um funcional $(\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, \eta \rangle$, de $X \times X \rightarrow \mathbb{F}$, de maneira que para quaisquer $\xi, \eta, \zeta \in X$ e $\alpha \in \mathbb{F}$,

$$i.) \langle \alpha\xi + \eta, \zeta \rangle = \bar{\alpha}\langle \xi, \zeta \rangle + \langle \eta, \zeta \rangle$$

$$ii.) \langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \xi \rangle}$$

$$iii.) \langle \xi, \xi \rangle \geq 0 \text{ e } \langle \xi, \xi \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } \xi = 0.$$

OBSERVAÇÃO 17.2. Como anteriormente, a barra $\bar{\alpha}$ denota o complexo conjugado do escalar α . Será usada também a notação $\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$, pois será mostrado adiante que esta função é uma norma em X . Caso seja necessário explicitar o espaço em que esteja definido determinado produto interno, será usada a notação $\langle \xi, \eta \rangle_X$.

Note que para cada $\xi \in X$ a função $\eta \mapsto \langle \xi, \eta \rangle$ é linear, enquanto que para cada $\eta \in X$ a função $\xi \mapsto \langle \xi, \eta \rangle$ é *conjugada linear*, também chamada de *antilinear* ($S: X \rightarrow Y$ é antilinear se para todos ξ, η no espaço vetorial X e $\alpha \in \mathbf{F}$ tem-se $S(\alpha\xi + \eta) = \bar{\alpha}S(\xi) + S(\eta)$); estas propriedades são referidas conjuntamente ao se dizer que a função $(\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, \eta \rangle$ é *sesquilinear* (“sesqui” significa uma vez e meia).

EXERCÍCIO 17.1. Verifique que se $\xi = 0$ então $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \eta, \xi \rangle = 0$, para todo $\eta \in X$.

Um espaço vetorial X com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é chamado de *espaço produto interno* ou *espaço pré-Hilbertiano* e, normalmente, denotado pelo par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ou apenas por X , quando estiver claro qual o produto interno referido.

Exemplo 17.3. Em $C[a, b]$ a função $\langle \psi, \phi \rangle = \int_a^b \overline{\psi(t)}\phi(t) dt$ é um produto interno. •

Exemplo 17.4. $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j \eta_j$ é um produto interno em \mathbf{C}^n . De forma similar em \mathbf{R}^n (dispensando o complexo conjugado, logicamente). •

Exemplo 17.5. $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\xi}_j \eta_j$ é um produto interno em $l^2(\mathbf{N})$. Esta série está bem-definida, ou seja, é absolutamente convergente, pois $l^2(\mathbf{N})^* = l^2(\mathbf{N})$: explicitamente, como $|\bar{\xi}_j \eta_j| \leq 1/2(|\xi_j|^2 + |\eta_j|^2)$ segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\bar{\xi}_j \eta_j| \leq \frac{1}{2}(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2) < \infty.$$

Será mostrado no Exemplo 18.2 que l^p não é espaço produto interno (compatível com a norma) se $p \neq 2$. •

Exemplo 17.6. $\langle \psi, \phi \rangle = \int_{\Omega} \overline{\psi(t)}\phi(t) d\mu(t)$ é um produto interno em $L^2_{\mu}(\Omega)$. Esta integral está bem-definida (por Hölder ou) pois, como

$$\left| \overline{\psi(t)}\phi(t) \right| \leq \frac{1}{2} (|\psi(t)|^2 + |\phi(t)|^2),$$

segue que $\overline{\psi}\phi \in L^1_{\mu}(\Omega)$. Será mostrado, no Exemplo 18.3, que $L^p_{\mu}(\Omega)$ não é espaço produto interno (compatível com a norma) se $p \neq 2$. •

Proposição 17.7. Se $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço produto interno, então para todos $\xi, \eta \in X$:

i.) (desigualdade de Cauchy-Schwarz) $|\langle \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\| \|\eta\|$; a igualdade ocorre se, e somente se, $\{\xi, \eta\}$ é linearmente dependente.

ii.) (desigualdade triangular) $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$; a igualdade ocorre se, e somente se, $\xi = 0$ ou $\eta = t\xi$ para algum $t \geq 0$.

Demonstração. i.) Se $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ é imediato. Se $\langle \xi, \eta \rangle \neq 0$, então $\eta \neq 0$ e para $t \in \mathbb{F}$ tem-se

$$0 \leq \langle \xi - t\eta, \xi - t\eta \rangle = \|\xi\|^2 - t\langle \xi, \eta \rangle - \bar{t}\langle \eta, \xi \rangle + |t|^2 \|\eta\|^2;$$

escolhendo $t = \langle \eta, \xi \rangle / \|\eta\|^2$ vem que $0 \leq \|\xi\|^2 - |\langle \xi, \eta \rangle|^2 / \|\eta\|^2$ e, portanto, $\|\xi\|^2 \|\eta\|^2 \geq |\langle \xi, \eta \rangle|^2$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, existe $t \in \mathbb{F}$ com $\xi - t\eta = 0$, ou seja, $\xi = t\eta$.

ii.) Usando o item i.) obtém-se

$$\begin{aligned} \|\xi + \eta\|^2 &= \|\xi\|^2 + \langle \xi, \eta \rangle + \langle \eta, \xi \rangle + \|\eta\|^2 \\ &\leq \|\xi\|^2 + 2|\langle \xi, \eta \rangle| + \|\eta\|^2 \leq \|\xi\|^2 + 2\|\xi\| \|\eta\| + \|\eta\|^2 \\ &= (\|\xi\| + \|\eta\|)^2, \end{aligned}$$

e a desigualdade triangular está demonstrada. A igualdade ocorre se, e somente se, $2\|\xi\| \|\eta\| = \langle \xi, \eta \rangle + \langle \eta, \xi \rangle = 2\operatorname{Re} \langle \xi, \eta \rangle$. Supondo isto, vem do item i.) que

$$|\langle \xi, \eta \rangle| \geq \operatorname{Re} \langle \xi, \eta \rangle = \|\xi\| \|\eta\| \geq |\langle \xi, \eta \rangle|,$$

ou seja, $|\langle \xi, \eta \rangle| = \|\xi\| \|\eta\| = \operatorname{Re} \langle \xi, \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \geq 0$. Estas condições incluem a condição de igualdade em Cauchy-Schwarz; portanto ou $\xi = 0$ ou existe $t \in \mathbb{F}$ de modo que $\eta = t\xi$. Usando novamente as condições acima tem-se que $0 \leq \langle \xi, \eta \rangle = \langle \xi, t\xi \rangle = t\|\xi\|^2$, e portanto $t \geq 0$. ■

OBSERVAÇÃO 17.8. Entende-se intuitivamente a condição $t \geq 0$ para igualdade na triangular ao lembrar-se que números com parte imaginária não-nula também “giram” os vetores após multiplicação. Números reais negativos “giram os vetores de 180° ”; por exemplo, para $\xi \neq 0$ e $t = -1$ tem-se $0 = \|\xi - \xi\| \neq \|\xi\| + \|\xi\| = 2\|\xi\|$.

Neste ponto é claro o seguinte:

Corolário 17.9. Num espaço produto interno $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ a função

$$\xi \mapsto \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}, \quad \xi \in X,$$

é uma norma, chamada de norma induzida pelo produto interno. A menos de menção explícita em contrário, esta é a norma adotada num espaço produto interno.

EXERCÍCIO 17.2. Aponte os detalhes que demonstram o Corolário 17.9.

EXERCÍCIO 17.3. Se $\xi_n \rightarrow \xi$ e $\eta_n \rightarrow \eta$ num espaço produto interno, mostre que $\langle \xi_n, \eta_n \rangle \rightarrow \langle \xi, \eta \rangle$, ou seja, o produto interno é contínuo pela convergência forte.

Definição 17.10. Um espaço de Hilbert é um espaço produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno. Em todo o texto as notações $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$, sempre denotarão espaços de Hilbert.

Exemplo 17.11. $l^2, L^2_\mu, \mathbf{F}^n$ com a norma $\|\cdot\|_2$ (incluindo o próprio conjunto \mathbf{F}) são espaços de Hilbert (na falta de menção explícita em contrário, fica subentendido que no contexto de espaços com produto interno, esta é a norma em \mathbf{F}^n). $C[a, b]$ com o produto interno do Exemplo 17.3 não é um espaço de Hilbert, pois não é completo; confira! •

EXERCÍCIO 17.4. Verifique a identidade de polarização

$$\langle \eta, \xi \rangle = \frac{1}{4} (\|\xi + \eta\|^2 - \|\xi - \eta\|^2).$$

$$\langle \eta, \xi \rangle = \frac{1}{4} (\|\xi + \eta\|^2 - \|\xi - \eta\|^2 + i\|\xi + i\eta\|^2 - i\|\xi - i\eta\|^2);$$

a primeira num espaço produto interno real e a segunda num espaço produto interno complexo. Esta importante identidade mostra como o produto interno pode ser recuperado através da norma.

17.2 Ortogonalidade

O produto interno, sendo uma generalização do produto escalar em \mathbf{R}^3 , pode ser usado para definir ângulo entre dois vetores; contudo, será introduzida apenas a *ortogonalidade* em espaços produto interno. Este conceito estará presente em vários argumentos e demonstrações nos próximos Capítulos.

Definição 17.12. Dois elementos ξ, η num espaço produto interno X são *ortogonais* se $\langle \xi, \eta \rangle = 0$. O símbolo $\xi \perp \eta$ indicará que esses vetores

são ortogonais. Se E, F são subconjuntos de X , então $E \perp F$ indica que $\xi \perp \eta$ sempre que $\xi \in E$ e $\eta \in F$; se, além disso, E e F forem subespaços, diz-se que eles são ortogonais. Denota-se por E^\perp o conjunto de todos os vetores de X ortogonais a E , ou seja, $E^\perp = \{\xi \in X : \langle \xi, \eta \rangle = 0, \forall \eta \in E\}$.

EXERCÍCIO 17.5. a) Mostre que se $\xi \perp \eta$ (ambos não-nulos), então $\{\xi, \eta\}$ é um conjunto linearmente independente. Note que o vetor nulo é ortogonal a qualquer outro vetor, e só ele tem esta propriedade (verifique!).

b) Confira que se $\xi \perp \eta$, então $\|\xi + \eta\|^2 = \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2$.

c) Se $\xi_n \perp \eta$ para todo n , e $\xi_n \rightarrow \xi$, conclua que $\xi \perp \eta$.

O próximo resultado técnico, uma caracterização de ortogonalidade entre vetores, será usado no texto. Analise-o geometricamente.

Lema 17.13. Num espaço produto interno, tem-se que $\xi \perp \eta$ se, e somente se,

$$\|\xi + t\eta\| \geq \|\xi\|, \quad \forall t \in \mathbb{F}.$$

Demonstração. Se $\eta = 0$ esta relação é óbvia. Suponha que $\eta \neq 0$. Claramente

$$0 \leq \|\xi + t\eta\|^2 = \|\xi\|^2 + 2\operatorname{Re}(t\langle \xi, \eta \rangle) + |t|^2\|\eta\|^2.$$

Se $\xi \perp \eta$ segue que, para todo $t \in \mathbb{F}$, $\|\xi + t\eta\|^2 = \|\xi\|^2 + |t|^2\|\eta\|^2 \geq \|\xi\|^2$, ou seja, $\|\xi + t\eta\| \geq \|\xi\|$.

Por outro lado, se $\|\xi + t\eta\| \geq \|\xi\|$ para todo $t \in \mathbb{F}$, elevando ao quadrado esta expressão e escolhendo o valor particular $t = -\langle \eta, \xi \rangle / \|\eta\|^2$, obtém-se $0 \leq -|\langle \xi, \eta \rangle|^2$, de forma que $\xi \perp \eta$. ■

O próximo resultado mostra que também está definido o completamento de um espaço produto interno, agora como um espaço de Hilbert.

Definição 17.14. Um operador linear $U : (X, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (Y, [\cdot, \cdot])$, entre dois espaços produto interno, é *unitário* se for sobrejetor em Y e $\langle \xi, \eta \rangle = [U\xi, U\eta]$ para todos $\xi, \eta \in X$. Se existe tal operador unitário, então os espaços X e Y são chamados de *unitariamente equivalentes*. Esta é a noção natural de isomorfismo entre espaços com produto interno.

Se os espaços com produto interno envolvidos são reais, usa-se também o termo *operador ortogonal*, como sinônimo de operador unitário.

EXERCÍCIO 17.6. a) Use a identidade de polarização para mostrar que todo operador linear isométrico e sobrejetor, entre espaços com produto interno, é unitário. Esta é uma aplicação típica de polarização.

b) Mostre que todo operador unitário é uma isometria, portanto invertível, e que sua inversa também é unitário. Se U é unitário, compute UU^{-1} e $U^{-1}U$.

Teorema 17.15. *Se $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço produto interno, então ele é unitariamente equivalente a um subespaço denso num espaço de Hilbert \mathcal{H} ; tal \mathcal{H} é chamado de complemento de X . Além disso, quaisquer dois complementos de X são unitariamente equivalentes entre si.*

Demonstração. A partir do Teorema 2.6 e sua notação, considere $\mathcal{H} = \tilde{X}$, e o único ponto que falta demonstrar é a compatibilidade do produto interno de X com o de \mathcal{H} , ou melhor, a partir da demonstração do Teorema 2.6 deve-se definir de forma apropriada o produto interno no espaço de Banach \tilde{X} .

Pela continuidade do produto interno (Exercício 17.3) pode-se definir o produto interno em \tilde{X} por

$$\langle \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rangle := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \xi_n, \eta_n \rangle.$$

o qual induz a norma de \tilde{X} . Usando a identidade de polarização (Exercício 17.4) vem que κ é um operador unitário entre X e $\kappa(X)$, ambos considerados como espaços produto interno. ■

Notas

Como já mencionado, a expressão *espaço de Hilbert* foi uma homenagem a David Hilbert que estudou, particularmente, os espaços l^2 e L^2 . Por volta de 1906, E. Fischer e F. Riesz, de forma independente, mostraram que $l^2(\mathbb{Z})$ é isomorfo a $L^2[a, b]$, o que motivou a definição abstrata de espaço de Hilbert, levando von Neumann a trabalhar “intrinsecamente” e a apresentar a definição geral pouco antes de 1930, embora incluindo a condição de separabilidade. Em 1934 Rellich, Riesz e Löwig mostraram que vários resultados valiam sem a condição de separabilidade, chegando-se à definição atual de espaço de Hilbert. É interessante notar que se sabe atualmente que todo espaço de Hilbert é unitariamente equivalente a algum l^2 (Proposição 22.1). Baseado em resultados como o Lema 17.13, há propostas interessantes de se estender a noção de ortogonalidade a espaços de Banach, os leitores interessados podem iniciar a consulta com F. B. Saidi. *An Extension of the Notion of Orthogonality to Banach Spaces*, J. Math. Anal. Appl. 267 (2002) 29-47

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 17.7. Verifique que a desigualdade de Cauchy-Schwarz continua válida se a condição $\langle \xi, \xi \rangle = 0 \Rightarrow \xi = 0$, na definição de produto interno, for retirada.

EXERCÍCIO 17.8. a) Se para todo ζ num espaço produto interno tem-se $\langle \xi, \zeta \rangle = \langle \eta, \zeta \rangle$, mostre que $\xi = \eta$.

b) Mostre que a condição $\|\xi\| = \|\eta\|$ num espaço com produto interno real implica que $\langle \xi + \eta, \xi - \eta \rangle = 0$, ou seja, que $(\xi - \eta)$ e $(\xi + \eta)$ são ortogonais

EXERCÍCIO 17.9. Verifique que num espaço produto interno vale a relação $\|\xi\| = \max_{\|\eta\|=1} |\langle \xi, \eta \rangle|$.

EXERCÍCIO 17.10. Qual o número máximo de diferentes produtos internos que podem induzir uma norma dada num espaço vetorial?

EXERCÍCIO 17.11. Seja $V: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{H}$ linear, isométrico e sobrejetor. Mostre que \mathcal{N} é um espaço de Hilbert.

EXERCÍCIO 17.12. Sejam ξ_1, ξ_2, ξ_3 vetores num espaço produto interno. Mostre que estes vetores formam um conjunto linearmente independente se, e somente se, o determinante da matriz $(\langle \xi_i, \xi_j \rangle)$ não é nulo.

EXERCÍCIO 17.13. Mostre que num espaço de Hilbert a sequência (ξ_n) converge a ξ se, e somente se, $\|\xi_n\| \rightarrow \|\xi\|$ e $\langle \xi_n, \xi \rangle \rightarrow \|\xi\|^2$.

EXERCÍCIO 17.14. Dado um subconjunto E de um espaço produto interno, mostre que E^\perp é um subespaço vetorial fechado e, se E também é um subespaço vetorial, então $E \cap E^\perp = \{0\}$.

EXERCÍCIO 17.15. Se E é um subespaço de um espaço produto interno, mostre que $\eta \in E^\perp$ se, e somente se, $\|\eta - \xi\| \geq \|\eta\|, \forall \xi \in E$.

EXERCÍCIO 17.16. Seja $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ com $\text{img } S = \mathcal{H}$ e $\langle S(\xi), S(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$, para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Mostre que existe o operador inverso S^{-1} , o qual satisfaz $\langle S^{-1}(\xi), S^{-1}(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$ e, também, $\langle S(\xi), \eta \rangle = \langle \xi, S^{-1}(\eta) \rangle$, para todos $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Use tais resultados para concluir que S é linear e, portanto, um operador unitário.

EXERCÍCIO 17.17. Denote por X o espaço $C[-1, 1]$ com o produto interno do Exemplo 17.3 e por Y o espaço $C[-1, 1]$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$ usual. Mostre que as aplicações $\mathbf{1}: X \rightarrow Y$ (identidade) e $S: X \rightarrow Y, S\psi = \psi(0)$ não são contínuas, enquanto $T: X \rightarrow Y, (T\psi)(t) = \int_0^t \psi(s) ds$ é contínua. Encontre a norma de T .

Capítulo 18

Projeção Ortogonal

Continua-se o estudo dos espaços com produto interno neste Capítulo; dois pontos importantes são tratados. O primeiro é uma caracterização de quando uma norma é induzida de um produto interno: o segundo ponto é a introdução do operador de projeção ortogonal, um ingrediente que não está presente em espaços normados em geral.

18.1 Lei do Paralelogramo

EXERCÍCIO 18.1. Verifique, mesmo que por substituição direta, que num espaço produto interno $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vale a lei do paralelogramo

$$\|\xi + \eta\|^2 + \|\xi - \eta\|^2 = 2\|\xi\|^2 + 2\|\eta\|^2, \quad \forall \xi, \eta \in X.$$

Interprete geometricamente esta “lei”.

Teorema 18.1. *A norma $\|\cdot\|$ num espaço normado \mathcal{N} é induzida por um produto interno se, e somente se, ela satisfaz a lei do paralelogramo.*

Demonstração. Se a norma é induzida por um produto interno, então, pelo Exercício 18.1, ela satisfaz a lei do paralelogramo. Supondo válida a lei do paralelogramo em \mathcal{N} , esta será usada para mostrar que, no caso real inicialmente.

$$f(\xi, \eta) := \frac{1}{2} (\|\xi + \eta\|^2 - \|\xi\|^2 - \|\eta\|^2), \quad \xi, \eta \in \mathcal{N},$$

define um produto interno que induz a norma $\|\cdot\|$. A motivação para tal f vem da expansão de $\|\xi + \eta\|^2$ e isolando-se o produto (ξ, η) .

Claramente $f(\xi, \xi) = \|\xi\|^2$ e $f(\xi, \xi) = 0 \iff \xi = 0$; ainda, $f(\xi, \eta) = f(\eta, \xi)$. Portanto, para mostrar que f define um produto interno resta apenas verificar a bilinearidade; observe que ainda não foi usada a lei do paralelogramo. Serão usadas as seguintes propriedades, facilmente verificadas: (a) $f(0, \eta) = 0$, para todo η , e (b) se $\xi_n \rightarrow \xi$, então $f(\xi_n, \eta) \rightarrow f(\xi, \eta)$.

Explicando $f(\xi, \zeta) + f(\eta, \zeta)$, e usando a lei do paralelogramo para os dois pares de vetores $(\xi + \zeta), (\eta + \zeta)$ e ξ, η , sucessivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} f(\xi, \zeta) + f(\eta, \zeta) &= \frac{1}{4} (\|\xi + \eta + 2\zeta\|^2 - \|\xi + \eta\|^2 - 4\|\zeta\|^2) \\ &= 2f\left(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \zeta\right). \end{aligned}$$

Escolhendo $\eta = 0$ obtém-se $f(\xi, \zeta) = 2f(\xi/2, \zeta)$, para todos ξ, ζ , e assim

$$f(\xi, \zeta) + f(\eta, \zeta) = f(\xi + \eta, \zeta).$$

Note que escolhendo $\eta = -\xi$, vem que $f(\xi, \zeta) = -f(-\xi, \zeta)$. Das relações acima segue que $f(n\xi, \eta) = nf(\xi, \eta)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Falta, no caso real, apenas generalizar esta expressão para os escalares em \mathbb{R} .

Se $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ tem-se (para $n \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n}{m}\xi, \eta\right) &= f\left(n\frac{\xi}{m}, \eta\right) = nf\left(\frac{\xi}{m}, \eta\right) \\ &= \frac{n}{m}mf\left(\frac{\xi}{m}, \eta\right) = \frac{n}{m}f(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ escolha uma sequência de racionais (q_n) convergindo a α , e use a propriedade (b) para obter

$$f(\alpha\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n f(\xi, \eta) = \alpha f(\xi, \eta),$$

e o teorema está demonstrado no caso real.

Para o caso complexo defina

$$F(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) - if(\xi, i\eta), \quad \xi, \eta \in \mathcal{N},$$

sendo f a mesma função utilizada acima (veja o Lema 11.2 para a motivação desta definição de F). O objetivo é mostrar que F define um

produto interno que induz a norma do espaço. Note que valem $F(\xi, \xi) = \|\xi\|^2$, $f(i\xi, i\eta) = f(\xi, \eta)$, para todos $\xi, \eta \in \mathcal{N}$, $F(\xi, i\eta) = f(\xi, i\eta) - if(\xi, -\eta) = i(f(\xi, \eta) - if(\xi, \eta)) = iF(\xi, \eta)$ e, agora, basta verificar que $F(\xi, \eta) = \overline{F(\eta, \xi)}$, o que também mostra que a (sesqui)linearidade se estende aos números complexos. As outras propriedades seguem de forma análoga ao caso real.

De fato

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) &= f(\xi, \eta) - if(\xi, i\eta) = f(\eta, \xi) - if(i\eta, \xi) \\ &= f(\eta, \xi) - if(-\eta, i\xi) = f(\eta, \xi) + if(\eta, i\xi) \\ &= \overline{F(\eta, \xi)}, \end{aligned}$$

e o teorema está demonstrado. ■

Exemplo 18.2. $l^p(\mathbb{N})$ é um espaço produto interno se, e somente se, $p = 2$. •

Demonstração. Esses espaços são de Banach, mas a lei do paralelogramo não vale se $p \neq 2$. De fato, escolha $\xi = e_j$ e $\eta = e_{2j}$, sendo $\{e_j\}$ a base canônica de $l^p(\mathbb{N})$ (no caso $p = \infty$ não é base de Schauder!); assim, $\|\xi\|^2 = \|\eta\|^2 = 1$ e $\|\xi - \eta\|^2 = \|\xi + \eta\|^2 = 2^{2/p}$, se $p \neq \infty$, e vale 1 se $p = \infty$. ■

Exemplo 18.3. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida que possua dois conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$, $0 < \mu(A) \neq \mu(B) < \infty$. Então $L^p_\mu(\Omega)$ é um espaço produto interno se, e somente se, $p = 2$. Note que essas condições são bem gerais. •

Demonstração. Será discutido apenas o caso $1 \leq p < \infty$, ficando $p = \infty$ como exercício. Basta verificar que as funções $\psi = \chi_A$ e $\phi = \chi_B$ (funções características de A e B , respectivamente) satisfazem $\|\psi\|_p^2 = \mu(A)^{2/p}$, $\|\phi\|_p^2 = \mu(B)^{2/p}$, $\|\psi + \phi\|_p^2 = \|\psi - \phi\|_p^2 = (\mu(A) + \mu(B))^{2/p}$, e não vale a lei do paralelogramo no caso de $p \neq 2$. ■

OBSERVAÇÃO 18.4. Note que \mathbb{F}^n com as correspondentes normas $\|\cdot\|_p$ (similares àquelas de $l^p(\mathbb{N})$) é um espaço produto interno se, e somente se, $p = 2$, embora todas essas normas sejam equivalentes entre si.

Exemplo 18.5. $C[-1, 1]$ não é um espaço produto interno. •

Demonstração. Basta verificar que neste espaço de Banach os elementos $\psi(t) = t$ e $\phi(t) = 1$ satisfazem $\|\psi\| = \|\phi\| = 1$, enquanto $\|\psi - \phi\|^2 = \|\psi + \phi\|^2 = 4$, e não vale a lei do paralelogramo. ■

18.2 Projeção Ortogonal

Definição 18.6. Um espaço vetorial X é a soma direta de dois de seus subespaços X_1 e X_2 , o que se denota por

$$X = X_1 \oplus X_2,$$

se todo $\xi \in X$ possui uma representação única

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \xi_1 \in X_1, \xi_2 \in X_2.$$

Teorema 18.7 (Projeção Ortogonal). *Se E é um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert \mathcal{H} , então*

$$\mathcal{H} = E \oplus E^\perp$$

Por isso E^\perp é chamado de complemento ortogonal do subespaço E em \mathcal{H} (o Exercício 18.6 complementa a visão geométrica deste resultado.)

Demonstração. Sejam $\xi \in \mathcal{H}$, $\delta := \inf_{\zeta \in E} \|\xi - \zeta\|$ e $(\eta_n) \subset E$ de forma que $\|\xi - \eta_n\| \rightarrow \delta$. Pela lei do paralelogramo tem-se

$$2\|\eta_n - \xi\|^2 + 2\|\eta_k - \xi\|^2 = \|\eta_n - \eta_k\|^2 + \|\eta_n + \eta_k - 2\xi\|^2,$$

e como $(\eta_n + \eta_k)/2 \in E$, segue que

$$\begin{aligned} \|\eta_n - \eta_k\|^2 &= 2\|\eta_n - \xi\|^2 + 2\|\eta_k - \xi\|^2 - 4\|(\eta_n + \eta_k)/2 - \xi\|^2 \\ &\leq 2\|\eta_n - \xi\|^2 + 2\|\eta_k - \xi\|^2 - 4\delta^2, \end{aligned}$$

mostrando que (η_n) é uma sequência de Cauchy em E , e portanto convergente a algum η que pertence a E , pois esse subespaço é completo (fechado em \mathcal{H}). Pela continuidade da norma vem que $\|\xi - \eta\| = \delta$.

Como $(t\xi - \eta) \in E$ para todos $\zeta \in E$ e $t \in \mathbb{F}$, obtém-se

$$\|(\xi - \eta) + t\xi\| = \|\xi + (t\xi - \eta)\| \geq \delta = \|\xi - \eta\|,$$

e portanto $(\xi - \eta) \in E^\perp$ pelo Lema 17.13. Assim, chega-se à decomposição

$$\xi = \eta + (\xi - \eta), \quad \eta \in E, (\xi - \eta) \in E^\perp.$$

Resta apenas mostrar a unicidade desta decomposição. Suponha que $\xi = \eta' + \zeta'$, com $\eta' \in E$ e $\zeta' \in E^\perp$; então

$$\eta' + \zeta' = (\xi - \eta) + \eta \implies \zeta' - (\xi - \eta) = (\eta - \eta') \in E \cap E^\perp,$$

de forma que ambos são nulos; assim $\zeta' = (\xi - \eta)$ e $\eta' = \eta$. ■

Corolário 18.8. *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert.*

i.) *Se E é um subespaço fechado de \mathcal{H} , então $(E^\perp)^\perp = E$. Assim, neste caso, E é o complemento ortogonal de E^\perp .*

ii.) *Se M é um subconjunto de \mathcal{H} , então*

$$\overline{\text{Lin}(M)} = \mathcal{H} \iff M^\perp = \{0\}.$$

Demonstração. i.) Evidentemente $E \subset E^{\perp\perp} := (E^\perp)^\perp$, e como

$$E \oplus E^\perp = \mathcal{H} = E^{\perp\perp} \oplus E^\perp,$$

vem, da unicidade da soma direta, que $E = E^{\perp\perp}$ (lembre-se que E^\perp é fechado).

ii.) Sejam $N = \text{Lin}(M)$ e \overline{N} seu fecho. Verifica-se diretamente que $M^\perp = N^\perp = \overline{N}^\perp$ (confira a última igualdade!). Assim,

$$\mathcal{H} = \overline{N} \oplus \overline{N}^\perp = \overline{N} \oplus M^\perp,$$

de forma que $\overline{N} = \mathcal{H}$ se, e somente se, $M^\perp = \{0\}$. ■

OBSERVAÇÃO 18.9. A soma direta de subespaços vetoriais não supõe, em princípio, a ortogonalidade entre os subespaços envolvidos; contudo, no caso de soma direta de subespaços E e F de um espaço produto interno X , na notação $X = E \oplus F$ será suposto que $E \perp F$. Muitas vezes usa-se $F = X \ominus E$ para indicar que F é o complemento ortogonal de E em X . O Capítulo 23 tratará, de forma um pouco mais abrangente, o conceito de soma direta de espaços.

EXERCÍCIO 18.2. Encontre o complemento ortogonal em $L^2[-1, 1]$ do subespaço gerado por: a) polinômios com termo constante nulo; b) polinômios com apenas potências pares.

A decomposição $\mathcal{H} = E \oplus E^\perp$, para cada subespaço fechado $E \subset \mathcal{H}$, define, naturalmente, o operador P_E de projeção ortogonal sobre E

$$P_E : \mathcal{H} \rightarrow E, \quad P_E \xi = \xi_E,$$

sendo $\xi = \xi_E + \xi_{E^\perp}$, $\xi_E \in E$, $\xi_{E^\perp} \in E^\perp$. Diz-se que $(\xi_E + \xi_{E^\perp})$ é a decomposição ortogonal de ξ em relação a E , e $P_E \xi = \xi_E$ é a componente ortogonal, ou projeção ortogonal, de ξ em E .

EXERCÍCIO 18.3. Verifique as seguintes propriedades básicas do operador P_E de projeção ortogonal sobre o subespaço fechado $\{0\} \neq E \subset \mathcal{H}$:

- P_E é linear e limitado com $\|P_E\| = 1$.
- P_E é sobrejetor, ou seja, $\text{img } P_E = E$.
- $P_E^2 = P_E$ (idempotente) e $(P_E)|_E = 1$ (identidade em E).
- $E^\perp = N(P_E)$ e $P_{E^\perp} = 1 - P_E$ (1 sendo a identidade em \mathcal{H}).
- $P_E P_{E^\perp} = P_{E^\perp} P_E = 0$ (operador nulo).

A noção de projeção ortogonal só faz sentido em espaços com produto interno: define-se um operador de projeção num espaço vetorial qualquer como um operador idempotente (veja os exemplos abaixo, e o Teorema 20.11 no caso de projetores ortogonais). Se \mathcal{R} é um operador de projeção no espaço vetorial X , fica um convite, no Exercício 18.16, para os leitores verificarem que qualquer $\xi \in X$ pode ser escrito, e de forma única, como $\xi = \eta + \zeta$, $\eta \in \text{img } \mathcal{R}$ e $\zeta \in N(\mathcal{R})$.

Exemplo 18.10. [Projeção Não-Ortogonal] Se $\{\zeta, \eta\}$ é uma base de \mathbb{F}^2 e $\eta^\perp \perp \eta$ com $\langle \eta^\perp, \zeta \rangle = 1$, então o operador $\mathcal{R} : \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}^2$, $\mathcal{R}\xi = \langle \eta^\perp, \xi \rangle \zeta$, para todo $\xi \in \mathbb{F}^2$, é linear, idempotente, $\text{img } \mathcal{R} = \text{Lin}(\{\zeta\})$, $N(\mathcal{R}) = \text{Lin}(\{\eta\})$ e $\|\mathcal{R}\| = \|\zeta\| \|\eta^\perp\|$. Sob quais condições $\|\mathcal{R}\| = 1$? •

Exemplo 18.11. [Projeção Não-Limitado] A condição $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$, que define os operadores de projeção (veja também o Teorema 20.11), não é suficiente para garantir que \mathcal{R} seja limitado. Seja $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, $0 \leq \varphi \in \mathcal{H}$ com $\|\varphi\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = 1$. Defina $\text{dom } \mathcal{R} = L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, e a ação

$$(\mathcal{R}\psi)(t) := \psi(t) - \varphi(t) \int_{\mathbb{R}} \psi(s) ds, \quad \psi \in \text{dom } \mathcal{R}.$$

Uma verificação direta mostra que $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$ em $\text{dom } \mathcal{R}$, e $\mathcal{R}\psi = \psi$ se, e somente se, $\int_{\mathbf{R}} \psi(t) dt = 0$, ou seja, \mathcal{R} é o operador de projeção sobre o subespaço de \mathcal{H} das funções com integral nula. Agora escolha $\psi_n(t) = \chi_{[0,n]}(t)/\sqrt{n}$, de forma que $\psi_n \in \text{dom } \mathcal{R}$, $\|\psi_n\|_2 = 1$ e $\|\psi_n\|_1 = \sqrt{n}$, para todo n , e

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}\psi_n\|_2^2 &= \int_{\mathbf{R}} |\psi_n(t) - \varphi(t)\sqrt{n}|^2 dt \\ &= \|\psi_n\|_2^2 + n\|\varphi\|_2^2 - 2 \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\chi_{[0,n]}(t) dt \\ &\geq 1 + n\|\varphi\|_2^2 - 2 \int_{\mathbf{R}} \varphi(t) dt = 1 + n\|\varphi\|_2^2 - 2. \end{aligned}$$

Logo, $\|\mathcal{R}\psi_n\|_2 \rightarrow \infty$ para $n \rightarrow \infty$, e o operador de projeção \mathcal{R} (densamente definido) não é limitado. •

A noção de projeção ortogonal, e ortogonalidade em geral, facilita vários argumentos técnicos e demonstrações em espaços de Hilbert, pelo menos em comparação aos correspondentes em espaços de Banach.

Notas

O Teorema 18.1 foi demonstrado pela primeira vez em 1935 por Jordan e von Neumann. Há outras condições técnicas, mais recentes e elaboradas, as quais garantem que uma norma é induzida por um produto interno, e isto pode ser importante para certas equações diferenciais parciais e problemas variacionais.

Relações de ortogonalidade e projeções foram usadas em espaços de funções específicos por Fourier, Poisson e outros (em particular em séries trigonométricas), embora sem esta linguagem, muito antes da formulação abstrata aqui apresentada. Contribuições de Sturm e Liouville levaram a uma formulação mais geral desses resultados, culminando com o famoso "problema de Sturm-Liouville"; o termo pode ser enganoso, pois eles também apresentaram soluções bem gerais desse "problema" (veja, por exemplo, B. M. Levitan e I. S. Sargsjan, *Introduction to Spectral Theory*, Transl. Math. Monographs, AMS, vol. 39, 1975). O problema de Sturm-Liouville foi uma das sementes que originou a teoria espectral de operadores em espaços de Hilbert.

A respeito da existência e unicidade da mínima distância no Exercício 18.6, há uma versão importante para espaços de Banach uniformemente convexos (os quais incluem $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$): esses resultados apareceram em James A. Clarkson, *Uniformly Convex Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40, (1936) 396-414.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 18.4. Seja (ξ_j) é uma sequência ortogonal, ou seja, $\xi_j \perp \xi_k, \forall j \neq k$.

a) Verifique a relação de Pitágoras

$$\left\| \sum_{j=1}^n \xi_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|\xi_j\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) Se $\xi = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \xi_j$ (soma convergente na norma), mostre que

$$\|\xi\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \|\xi_j\|^2.$$

EXERCÍCIO 18.5. Dado um conjunto J com mais de um elemento, mostre que $l^p(J)$ é um espaço de Hilbert se, e somente se, $p = 2$ (veja o Exemplo 1.3).

EXERCÍCIO 18.6. Sejam E um subespaço fechado de \mathcal{H} e $\xi \in \mathcal{H}$. Assim, da decomposição $\mathcal{H} = E \oplus E^\perp$, tem-se $\xi = \zeta + \eta$, $\zeta \in E, \eta \in E^\perp$. Mostre que ζ e η são os únicos elementos de E e E^\perp , respectivamente, cujas distâncias a ξ são minimais. Este exercício complementa a visão geométrica da decomposição enunciada no Teorema 18.7

EXERCÍCIO 18.7. Em $L^2[0, \infty)$ considere $E = \text{Lin}(\{e^{-t}, te^{-t}\})$ e $\psi(t) = (1+t^2)e^{-t}$. Encontre a decomposição $\psi = \psi_E + \psi_{E^\perp}$, com $\psi_E \in E$ e $\psi_{E^\perp} \in E^\perp$

EXERCÍCIO 18.8. Considere \mathbb{R}^2 com a norma $\|\xi\| = |\xi_1| + |\xi_2|$ (neste caso \mathbb{R}^2 não é um espaço produto interno). sendo $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, e o subespaço $E = \{(\xi_1, \xi_1) : \xi_1 \in \mathbb{R}\}$ de \mathbb{R}^2 . Se $\eta = (-1, 1)$, mostre que

$$d(\eta, E) = \inf_{\xi \in E} \|\eta - \xi\| = 2.$$

e que existem infinitos elementos $\zeta \in \mathbb{R}^2$ com $d(\eta, E) = \|\zeta - \eta\|$ (desenhe as esferas centrada em η) Compare com o Exercício 18.6

EXERCÍCIO 18.9. Se $E = \{\xi \in l^2(\mathbb{N}) : \xi_{2j} = 0, \forall j \in \mathbb{N}\}$, mostre que E é fechado e determine E^\perp

EXERCÍCIO 18.10. Seja $\iota : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \setminus \{0, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\iota(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \frac{\|\xi + \eta\|^2 + \|\xi - \eta\|^2}{\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2}.$$

Verifique que $(1/2) \inf_{(\xi, \eta)} \iota(\xi, \eta) \leq 1 \leq \sup_{(\xi, \eta)} \iota(\xi, \eta) \leq 2$ Quando a norma de \mathcal{N} é derivada de um produto interno?

EXERCÍCIO 18.11. Seja $E = \{\psi \in L^2[-1, 1] : \int_{-1}^1 \psi(t) dt = 0\}$. Determine E^\perp

EXERCÍCIO 18.12. Um subconjunto M num espaço vetorial é convexo se, para todos $\xi, \eta \in M$, tem-se que $t\xi + (1-t)\eta$ pertence a M para qualquer $t \in [0, 1]$. Mostre que num espaço de Hilbert todo conjunto (não-vazio) convexo e fechado possui um único elemento de norma minimal.

EXERCÍCIO 18.13. Sejam E, F subconjuntos de \mathcal{H} . Mostre que:

- a) se $E \subset F$, então $F^\perp \subset E^\perp$ e $E^{\perp\perp} = E^\perp$.
 b) $E^{\perp\perp}$ é o menor subespaço vetorial fechado que contém o conjunto E . Conclua que se E for subespaço vetorial, então $\overline{E} = E^{\perp\perp}$.
 c) E é subespaço fechado de \mathcal{H} se, e somente se, $E = E^{\perp\perp}$.

EXERCÍCIO 18.14. Mostre que, no caso de espaço de Hilbert real, todo operador $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ que preserva a distância entre vetores, ou seja, $\|S(\xi) - S(\eta)\| = \|\xi - \eta\|$, para todos $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, possui a forma $S(\xi) = S(0) + V\xi$, para alguma isometria linear $V \in B(\mathcal{H})$.

EXERCÍCIO 18.15. Se E é um subespaço fechado de \mathcal{H} e $T \in B(\mathcal{H})$, diz-se que E é invariante por T se $T(E) \subset E$. Mostre que E é invariante por T se, e somente se, $TP_E = P_ETP_E$, sendo P_E o projetor ortogonal sobre E .

EXERCÍCIO 18.16. Seja X um espaço vetorial. Se $\mathcal{R}: \text{dom } \mathcal{R} \subset X \rightarrow X$ é um operador de projeção, mostre que qualquer $\xi \in \text{dom } \mathcal{R}$ pode ser unicamente escrito na forma $\xi = \eta + \zeta$, com $\eta \in \text{img } \mathcal{R}$ e $\zeta \in N(\mathcal{R})$.

Capítulo 19

Representação de Riesz em Espaços de Hilbert

Neste Capítulo é apresentado um famoso teorema de Riesz, o qual mostra que todo espaço de Hilbert é naturalmente identificado com seu dual. Como aplicações desse resultado, será mostrado que todo espaço de Hilbert é reflexivo, será dada uma caracterização das formas sesquilineares limitadas em espaços de Hilbert, e definido o adjunto de Hilbert de um operador linear limitado.

19.1 Representação de Riesz

Teorema 19.1 (Representação de Riesz). *Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert e \mathcal{H}^* seu dual. A aplicação $\gamma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$, $\gamma(\xi) = f_\xi$, para cada $\xi \in \mathcal{H}$, dada por*

$$\gamma(\xi)(\eta) = f_\xi(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle, \quad \forall \eta \in \mathcal{H},$$

é uma isometria antilinear e sobrejetora em \mathcal{H}^ .*

OBSERVAÇÃO 19.2. Deste teorema segue que cada elemento de \mathcal{H}^* é identificado com um único $\xi \in \mathcal{H}$, via f_ξ , e $\|f_\xi\| = \|\xi\|$; diz-se que ξ representa f_ξ . Note que foram introduzidas duas notações distintas para indicar esta aplicação: $\gamma(\xi)$ e f_ξ ; isto será conveniente no que segue.

Demonstração. Se $\xi = 0$, claramente $f_\xi = 0$. Se $\xi \in \mathcal{H}$, então f_ξ é um funcional linear e $|f_\xi(\eta)| = |\langle \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\| \|\eta\|$, de forma que $f_\xi \in \mathcal{H}^*$ com $\|f_\xi\| \leq \|\xi\|$. Como $\|\xi\|^2 = f_\xi(\xi) \leq \|f_\xi\| \|\xi\|$, segue que $\|f_\xi\| \geq \|\xi\|$. Portanto $\|f_\xi\| = \|\xi\|$, e a aplicação γ é uma isometria. evidentemente

antilinear (linear no caso real). Resta apenas mostrar que todo elemento $f \in \mathcal{H}^*$ é da forma f_ξ para algum $\xi \in \mathcal{H}$.

Se $f = 0$, então $f = f_\xi$ para $\xi = 0$. Se $f \neq 0$, como o núcleo $N(f)$ é um espaço vetorial fechado (pois f é contínuo) próprio de \mathcal{H} , pelo Teorema 18.7 vem que

$$\mathcal{H} = N(f) \oplus N(f)^\perp.$$

e existe $\zeta \in N(f)^\perp$ com $\|\zeta\| = 1$. Agora, observando que o vetor $(f(\eta)\zeta - f(\zeta)\eta) \in N(f)$, para todo $\eta \in \mathcal{H}$ (esta observação é simples, mas fundamental nesta demonstração), conclui-se que

$$\langle \zeta, f(\eta)\zeta - f(\zeta)\eta \rangle = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{H},$$

ou seja, $f(\eta) = \overline{f(\zeta)\zeta} \eta$. Portanto, $f = \gamma(\overline{f(\zeta)\zeta})$. ■

EXERCÍCIO 19.1. Se $f \in \mathcal{H}^*$, qual a dimensão de $N(f)^\perp$?

Exemplo 19.3. A hipótese do espaço produto interno ser completo não pode ser retirada no Teorema 19.1. Considere o subespaço \mathcal{N} de $l^2(\mathbb{N})$ constituído por elementos com apenas um número finito de entradas não-nulas; então $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{F}$, $f(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j/j$, pertence a \mathcal{N}^* , mas não existe $\xi \in \mathcal{N}$ de forma que $f = f_\xi$, pois o vetor $(1, 1/2, 1/3, \dots) \notin \mathcal{N}$. •

Lema 19.4. \mathcal{H}^* é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle f_\xi, f_\eta \rangle_{\mathcal{H}^*} := \langle \eta, \xi \rangle_{\mathcal{H}}, \quad f_\xi, f_\eta \in \mathcal{H}^*.$$

Demonstração. Como γ é isometria, a lei do paralelogramo é satisfeita para $\mathcal{H}^* = \gamma(\mathcal{H})$, logo \mathcal{H}^* é um espaço produto interno pelo Teorema 18.1 e, sendo completo, Hilbert. Segue de polarização e do fato de γ ser antilinear, que o produto interno é o acima. ■

Corolário 19.5. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Deve-se mostrar que $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^{**}$, ou seja, se $g \in \mathcal{H}^{**}$, então existe $\xi \in \mathcal{H}$ de maneira que $g = \hat{\xi}$. Como todo elemento de \mathcal{H}^* é da forma $\gamma(\eta) = f_\eta$, $\eta \in \mathcal{H}$, basta considerar $g(f_\eta)$.

Pelo Teorema de Representação de Riesz, aplicado a $g \in \mathcal{H}^{**}$ (lembre-se que \mathcal{H}^* e \mathcal{H}^{**} são espaços de Hilbert), existe um único elemento $f_\xi \in \mathcal{H}^*$, para algum $\xi \in \mathcal{H}$, de forma que

$$g(f_\eta) = \langle f_\xi, f_\eta \rangle_{\mathcal{H}^*}, \quad \forall \eta \in \mathcal{H}.$$

Usando esta expressão e o Lema 19.4, para todo $\eta \in \mathcal{H}$ tem-se

$$g(f_\eta) = \langle \eta, \xi \rangle_{\mathcal{H}} = f_\eta(\xi) = \hat{\xi}(f_\eta),$$

ou seja, $g = \hat{\xi}$. ■

19.2 Adjunto de Hilbert e Lax-Milgram

Definição 19.6. Uma forma sesquilinear sobre dois espaços normados \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 é uma aplicação $b : \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2 \rightarrow \mathbb{F}$, linear na segunda variável e antilinear na primeira variável. b é limitada se sua norma

$$\|b\| := \sup_{\substack{0 \neq \xi_1 \in \mathcal{N}_1 \\ 0 \neq \xi_2 \in \mathcal{N}_2}} \frac{|b(\xi_1, \xi_2)|}{\|\xi_1\| \|\xi_2\|} < \infty.$$

Proposição 19.7. Se $b : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{F}$ é uma forma sesquilinear limitada, então existe um único operador $T_b \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ satisfazendo

$$b(\xi_1, \xi_2) = \langle T_b \xi_1, \xi_2 \rangle, \quad \forall \xi_1 \in \mathcal{H}_1, \xi_2 \in \mathcal{H}_2.$$

Além disso, $\|T_b\| = \|b\|$.

Demonstração. Para cada $\xi_1 \in \mathcal{H}_1$ o funcional $L_{\xi_1} : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{F}$, $L_{\xi_1}(\xi_2) = b(\xi_1, \xi_2)$ é linear, e como

$$|L_{\xi_1}(\xi_2)| = |b(\xi_1, \xi_2)| \leq \|b\| \|\xi_1\| \|\xi_2\|,$$

vem que $\|L_{\xi_1}\| \leq \|b\| \|\xi_1\|$ e $L_{\xi_1} \in \mathcal{H}_2^*$.

Pelo Teorema de Representação de Riesz existe um único $\eta_2 \in \mathcal{H}_2$ em que $L_{\xi_1}(\xi_2) = \langle \eta_2, \xi_2 \rangle$, para todo $\xi_2 \in \mathcal{H}_2$. Defina $T_b : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ por $T_b \xi_1 = \eta_2$, para o qual $b(\xi_1, \xi_2) = \langle T_b \xi_1, \xi_2 \rangle$, para todos $\xi_1 \in \mathcal{H}_1, \xi_2 \in \mathcal{H}_2$, e é linear. Note que $T_b = 0$ se, e somente se, b é nula (a definição é clara!).

Assim, se $b \neq 0$ (como $\langle T_b \xi_1, T_b \xi_1 \rangle = b \langle \xi_1, T_b \xi_1 \rangle$, para todo ξ_1),

$$\begin{aligned} \|T_b\| &= \sup_{\substack{0 \neq \xi_1 \\ T_b \xi_1 \neq 0}} \frac{\|T_b \xi_1\|}{\|\xi_1\|} = \sup_{\substack{0 \neq \xi_1 \\ T_b \xi_1 \neq 0}} \frac{|\langle T_b \xi_1, T_b \xi_1 \rangle|}{\|\xi_1\| \|T_b \xi_1\|} \leq \|b\| \\ &= \sup_{\substack{0 \neq \xi_1 \\ 0 \neq \xi_2}} \frac{|\langle T_b \xi_1, \xi_2 \rangle|}{\|\xi_1\| \|\xi_2\|} \leq \sup_{\substack{0 \neq \xi_1 \\ 0 \neq \xi_2}} \frac{\|T_b \xi_1\| \|\xi_2\|}{\|\xi_1\| \|\xi_2\|} = \|T_b\|, \end{aligned}$$

mostrando que $T_b \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e $\|T_b\| = \|b\|$. A unicidade do operador segue da relação $\langle T_b \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle S \xi_1, \xi_2 \rangle$, para quaisquer ξ_1, ξ_2 , implicando que os operadores S e T_b coincidem. ■

O exemplo padrão de forma sesquilinear limitada é o produto interno num espaço de Hilbert, e neste caso com $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ tem-se $T_b = 1$.

Os resultados acima permitem definir o operador adjunto de Hilbert para cada $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, o qual será denotado por T^* para distingui-lo do operador adjunto de Banach T^a , introduzido no Capítulo 13. No Capítulo 20 será discutido como esses operadores se relacionam.

Dado $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então

$$b_T(\xi_2, \xi_1) := \langle \xi_2, T \xi_1 \rangle_{\mathcal{H}_2}, \quad \xi_1 \in \mathcal{H}_1, \xi_2 \in \mathcal{H}_2,$$

define uma forma sesquilinear $b_T : \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{F}$, e como tem-se $|b_T(\xi_2, \xi_1)| \leq \|T\| \|\xi_1\| \|\xi_2\|$, segue que b_T é limitada com $\|b_T\| \leq \|T\|$. De forma similar à demonstração da Proposição 19.7, mostra-se que $\|b_T\| = \|T\|$. Também por essa proposição, existe um único $T^* \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ satisfazendo

$$\langle T^* \xi_2, \xi_1 \rangle = b_T(\xi_2, \xi_1) = \langle \xi_2, T \xi_1 \rangle, \quad \xi_1 \in \mathcal{H}_1, \xi_2 \in \mathcal{H}_2,$$

e, ainda, $\|T^*\| = \|b_T\| = \|T\|$.

Definição 19.8. Se $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então o único operador $T^* \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ construído acima é chamado de *operador Hilbert adjunto* ou *operador adjunto de Hilbert* de T . Quando se tratar de espaços de Hilbert, normalmente será dito somente “o adjunto” ao se referir ao operador adjunto de Hilbert.

Definição 19.9. Um operador $T \in B(\mathcal{H})$ é *normal* se $T^*T = TT^*$. Se $T = T^*$ (ou seja, $\langle T \xi, \eta \rangle = \langle \xi, T \eta \rangle$ para todos ξ, η), então este operador é chamado de *auto-adjunto*, um caso particular de operador normal.

EXERCÍCIO 19.2. Mostre que um operador $U \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é unitário se, e somente se, $U^{-1} = U^*$; equivalentemente, $UU^* = 1 = U^*U$.

EXERCÍCIO 19.3. Mostre que se $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então $T^{**} = (T^*)^* = T$.

Existe uma variação, devida a Lax e Milgram, do Teorema de Representação de Riesz que é útil no estudo de certas equações diferenciais parciais.

Teorema 19.10 (Lax-Milgram). *Se $b : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{F}$ é uma forma sesquilinear limitada e existe $c > 0$ de modo que $|b(\eta, \eta)| \geq c\|\eta\|^2$, para todo $\eta \in \mathcal{H}$, então para todo $f \in \mathcal{H}^*$ existe um único $\xi_f \in \mathcal{H}$ com*

$$f(\eta) = b(\xi_f, \eta), \quad \forall \eta \in \mathcal{H}.$$

Demonstração. Pela Proposição 19.7, existe único $T_b \in B(\mathcal{H})$ de forma que $b(\zeta, \eta) = \langle T_b \zeta, \eta \rangle$, $\forall \zeta, \eta \in \mathcal{H}$. Como

$$c\|\eta\|^2 \leq |b(\eta, \eta)| = |\langle T_b \eta, \eta \rangle| \leq \|\eta\| \|T_b \eta\| \leq \|\eta\|^2 \|T_b\|,$$

ou seja, $c\|\eta\| \leq \|T_b \eta\| \leq \|\eta\| \|T_b\|$ para todo $\eta \in \mathcal{H}$, segue que T_b é invertível, $\text{img } T_b$ é fechada em \mathcal{H} e T_b^{-1} é limitado (veja o Exercício 19.14).

Seja $\zeta \in (\text{img } T_b)^\perp$. Assim $0 = |\langle T_b \zeta, \zeta \rangle| = |b(\zeta, \zeta)| \geq c\|\zeta\|^2$, implicando que $\zeta = 0$ e $\text{img } T_b$ é densa; portanto $\text{img } T_b = \mathcal{H}$ e $\text{dom } T_b^{-1} = \mathcal{H}$. Pelo Teorema de Representação de Riesz, $f = f_\xi$ para um único $\xi \in \mathcal{H}$ e, para todo $\eta \in \mathcal{H}$, $f(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle = b(T_b^{-1}\xi, \eta)$. Escreva $\xi_f = T_b^{-1}\xi$ para terminar a demonstração do teorema. ■

Agora apresenta-se um resultado técnico que, apesar de simples, é muito útil, embora possa não valer no caso de espaço com produto interno real, como ilustrado no Exemplo 19.12.

Proposição 19.11. *Seja $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço produto interno complexo. Se $T : X \rightarrow X$ é um operador linear e $\langle T\xi, \xi \rangle = 0$ para todo $\xi \in X$, então $T = 0$.*

Demonstração. Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ e quaisquer $\xi, \eta \in X$ tem-se

$$0 = \langle T(\alpha\xi + \eta), \alpha\xi + \eta \rangle = \bar{\alpha}\langle T\xi, \eta \rangle + \alpha\langle T\eta, \xi \rangle.$$

Escolhendo, sucessivamente, $\alpha = 1$ e $\alpha = -i$ obtém-se

$$\langle T\xi, \eta \rangle + \langle T\eta, \xi \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle T\xi, \eta \rangle - \langle T\eta, \xi \rangle = 0,$$

cuja única solução é $\langle T\xi, \eta \rangle = 0$, para todos $\xi, \eta \in X$, ou seja, T é o operador nulo. ■

Exemplo 19.12. Considere a rotação R por um ângulo reto no espaço de Hilbert real \mathbb{R}^2 , de forma que $R \neq 0$ enquanto que $\langle R\xi, \xi \rangle = 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$ (cf., Proposição 19.11). Se $T, S \in B(\mathcal{H})$ e $\langle T\xi, \xi \rangle = \langle S\xi, \xi \rangle$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$, então $T = S$? •

O próximo resultado deveria ser comparado ao Exercício 14.13.

Proposição 19.13. Se $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$ em \mathcal{H} , então existe uma subsequência (ξ_{n_j}) de modo que sua "média aritmética" converge fortemente a ξ , ou seja,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \xi_{n_j} = \xi.$$

Demonstração. Para construir a subsequência, primeiro observe que para todo $\eta \in \mathcal{H}$ tem-se, para $n \rightarrow \infty$,

$$f_{\xi_n - \xi}(\eta - \xi) = \langle \xi_n - \xi, \eta - \xi \rangle \rightarrow 0,$$

já que $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$. Seja $\xi_{n_1} = \xi_1$. Agora escolha n_2 de forma que $|f_{\xi_{n_2} - \xi}(\xi_{n_1} - \xi)| < 1$. Suponha que n_1, \dots, n_j tenham sido selecionados; então use a observação acima para selecionar n_{j+1} de modo que $|f_{\xi_{n_{j+1}} - \xi}(\xi_{n_k} - \xi)| < 1/(2j)$, para $k = 1, 2, \dots, j$. Para essa subsequência (ξ_{n_j}) tem-se que (seja $L = \sup_n \|\xi_n - \xi\|^2 < \infty$; veja a Proposição 14.3)

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \xi_{n_j} - \xi \right\|^2 &= \frac{1}{M^2} \left(\sum_{j=1}^M \|\xi_{n_j} - \xi\|^2 + \sum_{k \neq j} f_{\xi_{n_j} - \xi}(\xi_{n_k} - \xi) \right) \\ &\leq \frac{1}{M^2} \left(ML + 2 \sum_{j=2}^M \sum_{k=1}^{j-1} |f_{\xi_{n_j} - \xi}(\xi_{n_k} - \xi)| \right) \\ &\leq \frac{1}{M^2} \left(ML + 2 \sum_{j=2}^M \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{2(j-1)} \right) \leq \frac{L+1}{M}, \end{aligned}$$

o qual se anula para $M \rightarrow \infty$. ■

Notas

O Teorema de Representação de Riesz foi demonstrado, primeiramente, em 1907 por F. Riesz e M. Fréchet, de forma independente; por isso é algumas vezes chamado de Teorema de Riesz-Fréchet. Ele foi usado por von Neumann numa demonstração elegante do Teorema de Radon-Nikodym, o qual caracteriza uma medida (σ -finita) absolutamente contínua em relação à outra medida; veja detalhes em [Rudin (1974)].

Pode-se demonstrar que todo espaço de Hilbert é reflexivo (Corolário 19.5) diretamente da teoria de espaços uniformemente convexos, sem utilizar explicitamente o Teorema de Representação de Riesz (veja H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Paris, Masson, 1983).

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 19.4. Mostre que toda sequência limitada em um espaço de Hilbert \mathcal{H} possui subsequência fracamente convergente.

EXERCÍCIO 19.5. Mostre que se $\dim \mathcal{H} = \infty$, então há sequências em \mathcal{H} que convergem fracamente e que não possuem subsequências fortemente convergentes (alguns exemplos explícitos surgirão ao se discutir bases ortonormais no Capítulo 21).

EXERCÍCIO 19.6. Enuncie e demonstre um resultado análogo ao Teorema de Representação de Riesz para funcionais antilineares limitados em \mathcal{H} (definições por conta dos leitores).

EXERCÍCIO 19.7. Mostre que se $T, S \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então $(S + T)^* = S^* + T^*$, e para $\alpha \in \mathbb{F}$ tem-se $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$; se $T^{-1} \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, então $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. Além disso, se o produto TS está definido tem-se $(TS)^* = S^* T^*$ e, portanto, $(T^n)^* = (T^*)^n$, para $T \in B(\mathcal{H})$ e $n \in \mathbb{N}$.

EXERCÍCIO 19.8. Mostre que existe uma aplicação bijetora e isométrica entre $B(\mathcal{H})$ e o conjunto das formas sesquilineares limitadas $b(\cdot, \cdot)$ em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

EXERCÍCIO 19.9. Se $T \in B(\mathcal{H})$, mostre que $N(T) = (\text{img } T^*)^\perp$, e também que $N(T^*) = (\text{img } T)^\perp$. Assim, o adjunto pode ser útil para analisar se um operador é invertível.

EXERCÍCIO 19.10. Use (e verifique) a seguinte variação da identidade de polarização

$$4\langle \xi, \eta \rangle = \langle \xi + \zeta, \rho + \eta \rangle - \langle \xi - \zeta, \rho - \eta \rangle + i(\langle \xi + i\zeta, \rho + i\eta \rangle - \langle \xi - i\zeta, \rho - i\eta \rangle),$$

para quaisquer ξ, η, ζ, ρ num \mathcal{H} complexo, para apresentar outra demonstração da Proposição 19.11.

EXERCÍCIO 19.11. Sejam T e S operadores auto-adjuntos em um espaço de Hilbert. Mostre que o produto TS é auto-adjunto se, e somente se, esses operadores comutam entre si.

EXERCÍCIO 19.12. Use o Teorema de Representação de Riesz para mostrar que se $f, g \in \mathcal{H}^*$ possuem o mesmo núcleo, então existe $a \neq 0$ de forma que $f = ag$. Lembre-se que, pela Proposição 15.9, isto já vale com pouca estrutura.

EXERCÍCIO 19.13. Verifique:

a) O conjunto dos operadores unitários em \mathcal{H} forma um grupo em relação à operação de multiplicação de operadores.

b) Dados um subespaço $E \subset \mathcal{H}$ e um operador unitário $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, então vale a relação $U(E^\perp) = (UE)^\perp$.

c) Se $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é unitário e $U^2 = \mathbf{1}$, então ele é auto-adjunto. Além disso, todo operador $V \in B(\mathcal{H})$ que é unitário e auto-adjunto satisfaz $V^2 = \mathbf{1}$.

EXERCÍCIO 19.14. Mostre que T_b na demonstração do Teorema 19.10 é invertível, $\text{img } T_b$ é fechada em \mathcal{H} e T_b^{-1} é limitado.

Capítulo 20

Operadores Auto-Adjuntos

Neste Capítulo são apresentados vários resultados adicionais sobre operadores adjuntos em espaços de Hilbert (auto-adjuntos em particular), uma caracterização de operadores de projeção ortogonal, e discutida a relação entre os dois tipos de operadores adjuntos, T^a e T^* , em espaços de Hilbert

No Capítulo anterior foi introduzido o conceito de adjunto de Hilbert em $B(\mathcal{H})$; no que segue são apresentados exemplos simples envolvendo esse conceito.

Exemplo 20.1. Sejam $\phi \in L^\infty_\mu(\Omega)$ uma função limitada e o operador de multiplicação $\mathcal{M}_\phi : L^2_\mu(\Omega) \rightarrow L^2_\mu(\Omega)$ introduzido nos Exemplos 3.11 e 4.3,

$$(\mathcal{M}_\phi \psi)(t) = \phi(t)\psi(t), \quad \psi \in L^2_\mu(\Omega)$$

Foi mostrado que \mathcal{M}_ϕ é um operador limitado e que $\|\mathcal{M}_\phi\| = \text{sup ess } |\phi|$. O adjunto deste operador é $\mathcal{M}_\phi^* = \mathcal{M}_{\bar{\phi}}$, de forma que ele é um operador normal; note que \mathcal{M}_ϕ é auto-adjunto se, e somente se, ϕ for uma função real (μ -q.t.p., logicamente). •

Demonstração. Como para todos $\varphi, \psi \in L^2_\mu(\Omega)$ tem-se

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \mathcal{M}_\phi \psi \rangle &= \int_\Omega \overline{\varphi(t)} \phi(t) \psi(t) d\mu(t) \\ &= \int_\Omega \overline{\phi(t) \varphi(t)} \psi(t) d\mu(t) = \langle \mathcal{M}_{\bar{\phi}} \varphi, \psi \rangle, \end{aligned}$$

conclui-se que $\mathcal{M}_\phi^* = \mathcal{M}_{\bar{\phi}}$, o qual é normal pois $\mathcal{M}_\phi^* \mathcal{M}_\phi = \mathcal{M}_{\bar{\phi} \phi} = \mathcal{M}_{\phi \bar{\phi}} = \mathcal{M}_\phi \mathcal{M}_\phi^*$. Ainda, \mathcal{M}_ϕ é auto-adjunto se, e somente se, $\phi = \bar{\phi}$. ■

Exemplo 20.2. Dada uma base de \mathbb{F}^n , um operador $T \in B(\mathbb{F}^n)$ é representado por uma matriz. Então o seu operador adjunto de Hilbert T^* é representado pelo complexo conjugado da transposta dessa matriz. •

Exemplo 20.3. Para cada $0 \neq s \in \mathbb{R}$ fixo, o operador $T_s \in B(L^2(\mathbb{R}))$, $(T_s\psi)(t) = \frac{1}{2s}[\psi(t+s) + \psi(t-s)]$, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, é auto-adjunto. •

EXERCÍCIO 20.1. Encontre o operador adjunto do operador shift à esquerda $S_e : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$, dado por $S_e(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_2, \xi_3, \dots)$.

EXERCÍCIO 20.2. Mostre que todo autovalor de um operador linear auto-adjunto é real.

O resultado que segue é devido à Hellinger-Toeplitz, na versão em espaços de Hilbert, publicado em 1910. Ele traz consequências importantes na formulação matemática de diversos problemas. A demonstração apresentada para a versão em espaços de Banach (Proposição 13.10) adapta-se aqui, contudo será apresentada uma demonstração alternativa, a qual não usa explicitamente o Teorema do Gráfico Fechado, mas o Princípio da Limitação Uniforme.

Proposição 20.4 (Hellinger-Toeplitz). *Seja $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear satisfazendo*

$$\langle T\eta, \xi \rangle = \langle \eta, T\xi \rangle, \quad \forall \eta, \xi \in \mathcal{H}.$$

Então $T \in B(\mathcal{H})$ e é auto-adjunto.

Demonstração. Para cada $\eta \in \mathcal{H}$ com $\|\eta\| = 1$ tem-se, por Cauchy-Schwarz, que o funcional linear $L_\eta : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{F}$, dado por $L_\eta(\xi) = \langle T\eta, \xi \rangle = \langle \eta, T\xi \rangle$ é limitado, pois $|L_\eta(\xi)| \leq \|T\eta\| \|\xi\|$. Novamente por Cauchy-Schwarz tem-se $|L_\eta(\xi)| = |\langle \eta, T\xi \rangle| \leq \|T\xi\|$, para todo η com $\|\eta\| = 1$. Pelo Princípio da Limitação Uniforme, encontra-se $C > 0$ de modo que $\|L_\eta\| \leq C$, para todo η com $\|\eta\| = 1$. Assim

$$\|T\eta\|^2 = |L_\eta(T\eta)| \leq C\|T\eta\|, \quad \|\eta\| = 1,$$

mostrando que T é limitado. Sendo limitado, segue diretamente da definição que T também é auto-adjunto. ■

EXERCÍCIO 20.3. Se $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ é linear e existe $S : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$, não necessariamente linear, com $\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, S(\eta) \rangle$ para todos $\xi \in \mathcal{H}_1$ e $\eta \in \mathcal{H}_2$, conclua que S é linear, T e S são limitados e $T^* = S$.

Proposição 20.5. *Seja $T \in B(\mathcal{H})$, sendo \mathcal{H} um espaço de Hilbert complexo. Então T é auto-adjunto se, e somente se, $\langle T\xi, \xi \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.*

Demonstração. Se T é auto-adjunto, então para todo $\xi \in \mathcal{H}$

$$\overline{\langle T\xi, \xi \rangle} = \langle \xi, T\xi \rangle = \langle T\xi, \xi \rangle;$$

portanto $\langle T\xi, \xi \rangle$ é real. Se $\langle T\xi, \xi \rangle$ é real para todo $\xi \in \mathcal{H}$, então

$$\begin{aligned} \langle (T - T^*)\xi, \xi \rangle &= \langle T\xi, \xi \rangle - \langle T^*\xi, \xi \rangle = \langle \xi, T\xi \rangle - \langle T^*\xi, \xi \rangle \\ &= \langle T^*\xi, \xi \rangle - \langle T^*\xi, \xi \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 19.11, segue que $T = T^*$. ■

Exemplo 20.6. O exemplo em que R representa uma rotação de um ângulo reto em \mathbb{R}^2 mostra que, no caso de espaço de Hilbert real, pode ocorrer de $\langle R\xi, \xi \rangle$ ser (obviamente!) real para todo vetor ξ , embora R não seja auto-adjunto. Basta olhar para a representação desses operadores

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

obtida da base canônica de \mathbb{R}^2 . •

Proposição 20.7. *Se $T \in B(\mathcal{H})$ então $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$. Portanto:*

i.) $T^*T = 0$ se, e somente se, $T = 0$.

ii.) Se T é normal, então $\|T^2\| = \|T\|^2$.

Demonstração. Se $T \in B(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \sup_{\|\xi\|=1} \|T\xi\|^2 = \sup_{\|\xi\|=1} \langle T\xi, T\xi \rangle = \sup_{\|\xi\|=1} \langle T^*T\xi, \xi \rangle \\ &\leq \sup_{\|\xi\|=1} \|T^*T\| \|\xi\|^2 = \|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2, \end{aligned}$$

e $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Adaptando os papéis de T e T^* nesta estimativa, obtêm-se $\|TT^*\| = \|T\|^2$. i.) é imediato desta relação.

Agora, se T comuta com seu adjunto, então para todo $\xi \in \mathcal{H}$ tem-se $\|T^*T\xi\|^2 = \langle T^*T\xi, T^*T\xi \rangle = \langle T^2\xi, T^2\xi \rangle = \|T^2\xi\|^2$, implicando em $\|T^2\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$. ■

OBSERVAÇÃO 20.8. Como já mencionado anteriormente, os operadores unitários formam os isomorfismos naturais entre espaços de Hilbert. Estende-se esta noção para operadores limitados: Os operadores $T \in B(\mathcal{H}_1)$ e $S \in B(\mathcal{H}_2)$ são ditos unitariamente equivalentes se existe um operador unitário $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ de modo que $T = U^*SU$. O Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos (tratado parcialmente aqui apenas no caso compacto no Capítulo 30) diz que todo operador auto-adjunto limitado é unitariamente equivalente a algum \mathcal{M}_ϕ (veja o Exemplo 20.1), com ϕ sendo uma função real limitada.

Exemplo 20.9. O operador linear $S_d : l^2(\mathbb{N}) \leftrightarrow$ dado pela lei $S_d(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$ é uma isometria entre espaços de Hilbert, preserva o produto interno (ou seja, $\langle S_r\xi, S_r\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$, para todos ξ, η), mas não é unitário, pois não é sobrejetor. ●

Serão ainda discutidos dois resultados neste Capítulo. O primeiro relaciona as duas definições de operador adjunto em espaços de Hilbert, ou seja, o adjunto de Banach T^* e o de Hilbert T^* . O segundo é uma importante caracterização de operadores de projeção ortogonal (veja a página 131) em termos do conceito de operador auto-adjunto.

Proposição 20.10. *Sejam $\gamma_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1^*$ e $\gamma_2 : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2^*$ as isometrias antilíneares advindas do Teorema de Representação de Riesz em \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , respectivamente. Então, se $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, tem-se*

$$T^* = \gamma_1^{-1} \circ T^a \circ \gamma_2.$$

Demonstração. Esta demonstração se resume a escrever adequadamente as definições; assim, é útil recordá-las: $\gamma_j(\xi_j)(\eta_j) = f_{\xi_j}(\eta_j) = \langle \xi_j, \eta_j \rangle$, $\forall \xi_j, \eta_j \in \mathcal{H}_j$, para $j = 1, 2$, e $T^a : \mathcal{H}_2^* \rightarrow \mathcal{H}_1^*$, $(T^a f)(\xi_1) = f(T\xi_1)$, para todos $\xi_1 \in \mathcal{H}_1$, $f \in \mathcal{H}_2^*$.

Para todos $\xi_1 \in \mathcal{H}_1$, $\xi_2 \in \mathcal{H}_2$, denotando $\eta_1 = \gamma_1^{-1}(T^a f_{\xi_2})$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle \xi_2, T\xi_1 \rangle &= f_{\xi_2}(T\xi_1) = (T^a f_{\xi_2})(\xi_1) = f_{\eta_1}(\xi_1) = \langle \eta_1, \xi_1 \rangle \\ &= \langle \gamma_1^{-1}(T^a f_{\xi_2}), \xi_1 \rangle = \langle (\gamma_1^{-1} \circ T^a \circ \gamma_2)(\xi_2), \xi_1 \rangle. \end{aligned}$$

Disto segue que $T^* = \gamma_1^{-1} \circ T^a \circ \gamma_2$ (note que esse último operador é linear). ■

Teorema 20.11. *Seja $P \in B(\mathcal{H})$. Então P é um operador de projeção ortogonal (ou seja, existe um subespaço fechado $E \subset \mathcal{H}$ de maneira que $P = P_E$) se, e somente se, $P^2 = P$ e P é auto-adjunto.*

Demonstração. Se $P = P_E$ para algum subespaço fechado $E \subset \mathcal{H}$, então todo $\xi \in \mathcal{H}$ se decompõe $\xi = \xi_E + \xi_{E^\perp}$, $\xi_E \in E$ e $\xi_{E^\perp} \in E^\perp$ (esta notação será usada outras vezes nesta demonstração). Como

$$P^2\xi = P(P\xi) = P\xi_E = \xi_E = P\xi,$$

segue que $P^2 = P$ (como já se sabia). Para verificar que neste caso P é também auto-adjunto, considere dois vetores $\xi = \xi_E + \xi_{E^\perp}$ e $\eta = \eta_E + \eta_{E^\perp}$ quaisquer em \mathcal{H} . Como,

$$\langle P\xi, \eta \rangle = \langle \xi_E, \eta_E + \eta_{E^\perp} \rangle = \langle \xi_E, \eta_E \rangle = \langle \xi, \eta_E \rangle = \langle \xi, P\eta \rangle,$$

segue que P é auto-adjunto.

Suponha agora que P seja auto-adjunto com $P^2 = P$. Defina

$$E := \{\xi \in \mathcal{H} : P\xi = \xi\} = N(1 - P).$$

Já que $P \in B(\mathcal{H})$ vem que E é subespaço fechado de \mathcal{H} . Será mostrado que $P = P_E$. Note que todo $\xi \in \mathcal{H}$ pode ser escrito na forma

$$\xi = P\xi + (1 - P)\xi,$$

com $P\xi \in E$, pois $P(P\xi) = P^2\xi = P\xi$, e $(1 - P)\xi \in E^\perp$, já que para todo $\eta \in E$ vale

$$\langle \eta, (1 - P)\xi \rangle = \langle P\eta, (1 - P)\xi \rangle = \langle \eta, (P - P^2)\xi \rangle = 0.$$

Segue, da unicidade da soma direta $\mathcal{H} = E \oplus E^\perp$, que $E = \text{img } P$ (com $P\xi = \xi_E$) e $E^\perp = \text{img } (1 - P)$ (com $(1 - P)\xi = \xi_{E^\perp}$).

Adicionalmente a essas relações, $P\xi_E = P(P\xi) = P^2\xi = P\xi = \xi_E$ e conclui-se que $P|_E = 1|_E$, enquanto $P\xi_{E^\perp} = P(1 - P)\xi = 0$, logo $P|_{E^\perp} = 0$. Em resumo, $P = P_E$. ■

Notas

É interessante observar que o conjunto dos operadores auto-adjuntos limitados forma um subespaço de Banach real de $B(\mathcal{H})$. Como descrito no Exercício 20.4, todo operador em $B(\mathcal{H})$ é a combinação linear de dois operadores auto-adjuntos. Pode-se mostrar que qualquer operador auto-adjunto em $B(\mathcal{H})$ é a combinação linear de dois operadores unitários (veja [de Oliveira (2009)]); portanto, qualquer operador em $B(\mathcal{H})$ é a combinação linear de quatro operadores unitários.

Uma analogia intuitiva: Talvez a principal diferença entre operadores e funções é que no primeiro caso eles podem não comutar. No mundo dos operadores em espaços de Hilbert, os auto-adjuntos corresponderiam às funções reais, os normais às funções complexas (parte real e imaginária comutam, veja o Exercício 20.4) e os unitários às funções bijetoras com valores na circunferência $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Os projetores corresponderiam às funções características de conjuntos (subespaços), enquanto as funções simples corresponderiam às combinações lineares $\sum_{j=1}^n \alpha_j P_{E_n}$ (são operadores "diagonalizáveis"); quais operadores podem ser aproximados (com topologias convenientes) por este tipo de soma?

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 20.4. Seja $T \in B(\mathcal{H})$ com \mathcal{H} complexo. Mostre que existem únicos operadores auto-adjuntos T_R e T_I de forma que $T = T_R + iT_I$ e $T^* = T_R - iT_I$. Verifique que T é normal se, e somente se, T_R e T_I comutam entre si, e que é unitário se, e somente se, T_R e T_I comutam entre si e $T_R^2 + T_I^2 = 1$.

EXERCÍCIO 20.5. Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert e (T_n) uma sequência de operadores em $B(\mathcal{H})$ auto-adjuntos com $T_n \xrightarrow{w} T \in B(\mathcal{H})$. Mostre que T também é auto-adjunto. Verifique que essa conclusão continua valendo se a convergência fraca de operadores for substituída por convergência forte ou uniforme.

EXERCÍCIO 20.6. Usando o Exercício 13.8, mostre que $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é invertível se, e somente se, T^* é invertível. É possível concluir isso diretamente das definições?

EXERCÍCIO 20.7. Um operador $T \in B(\mathcal{H})$ é maior do que $\lambda \in \mathbb{R}$ se para todo $\xi \in \mathcal{H}$ tem-se $\langle (T - \lambda I)\xi, \xi \rangle \geq 0$. Mostre que qualquer operador dessa forma, com \mathcal{H} complexo, é auto-adjunto. No caso particular de $\lambda = 0$ diz-se que T é um operador positivo.

EXERCÍCIO 20.8. Adapte a demonstração da Proposição 13.10 para demonstrar o resultado de Hellinger-Toeplitz 20.4 em espaços de Hilbert.

EXERCÍCIO 20.9. [Operadores Normais] Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert complexo e $T \in B(\mathcal{H})$. Verifique os seguintes itens:

a) T é normal se, e somente se, $\|T\xi\| = \|T^*\xi\|$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Use isto para mostrar que $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$, se: T for um operador normal.

b) Se T é normal, então $N(T) = N(T^*) = (\text{img } T)^\perp$; consequentemente, se $\alpha \in \mathbb{C}$ é um autovalor do operador normal T , então $\bar{\alpha}$ é autovalor de T^* .

c) Se $\alpha \neq \beta$ são autovalores distintos de um operador normal T , então os auto-espacos correspondentes são ortogonais entre si.

d) Se $T^2 = T$ e T é normal, então T é auto-adjunto e operador de projeção ortogonal.

EXERCÍCIO 20.10. Seja $T \in B(\mathcal{H})$. Mostre que $N(T) = N(T^*T)$ e conclua que $\text{img } T^* = \text{img } T^*T$.

EXERCÍCIO 20.11. Sejam P_E e P_F operadores de projeção ortogonal sobre os sub-espacos fechados $E, F \subset \mathcal{H}$, respectivamente. Mostre que se $\text{img } P_E \cap N(P_F) \neq \{0\}$, então $\|P_E - P_F\| = 1$. Quando $(P_F - P_E)$ é um operador de projeção ortogonal?

EXERCÍCIO 20.12. Sejam E, F sub-espacos fechados de \mathcal{H} e P_E, P_F os operadores de projeção ortogonal correspondentes. Demonstre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) O operador $(P_F - P_E)$ é positivo (veja o Exercício 20.7).

b) Para todo $\xi \in \mathcal{H}$ tem-se $\|P_E \xi\| \leq \|P_F \xi\|$.

c) $E \subset F$

d) $P_F P_E = P_E P_F = P_E$.

EXERCÍCIO 20.13. Sejam E, F sub-espacos fechados de \mathcal{H} e P_E, P_F os operadores de projeção ortogonal correspondentes. Demonstre que $E \perp F$ se, e somente se, $P_E P_F = P_F P_E = 0$.

EXERCÍCIO 20.14. Seja $T : l^2(\mathbf{Z}) \rightarrow l^2(\mathbf{Z})$ dado por $(T\xi)_n = (\xi_{n-1} - \xi_{n-1})$, sendo $\xi = (\dots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots)$. Mostre que T é limitado. Determine $\|T\|$ e T^* .

EXERCÍCIO 20.15. Seja $T : l^2(\mathbf{Z}) \rightarrow l^2(\mathbf{Z})$ dado por $(T\xi)_n = (\xi_{n+1} + \xi_{n-1})$, sendo $\xi = (\dots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots)$. Mostre que T é limitado e auto-adjunto. Determine $\|T\|$.

EXERCÍCIO 20.16. Mostre que o conjunto dos operadores auto-adjuntos limitados forma um subespaço de Banach real de $B(\mathcal{H})$.

Capítulo 21

Bases Ortonormais em Espaços de Hilbert

Um fator conveniente dos espaços de Hilbert é a presença de conjuntos ortonormais, os quais podem ser usados para decompor os vetores desses espaços, ou seja, pode-se falar em “coordenadas ortogonais”. O fato de serem ortogonais traz várias simplificações técnicas, além de importantes, e interessantes relações entre as normas de vetores e tais coordenadas.

Definição 21.1. Uma família $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ em \mathcal{H} é *ortonormal* se $\|\xi_\alpha\| = 1$, para todo $\alpha \in J$, e $\xi_\alpha \perp \xi_\beta$, se $\alpha \neq \beta \in J$. Uma *base ortonormal* de \mathcal{H} é um conjunto ortonormal total, ou seja, $\overline{\text{Lin}(\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J})} = \mathcal{H}$.

EXERCÍCIO 21.1. Mostre que uma família ortonormal é linearmente independente.

Exemplo 21.2. A base canônica $\{e_j\}_{j=1}^n$ de \mathbb{F}^n é uma base ortonormal desse espaço. •

Exemplo 21.3. A base canônica de $l^2(\mathbb{N})$ é uma base ortonormal desse espaço. •

Exemplo 21.4. $\{e^{int}/\sqrt{2\pi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é um conjunto ortonormal no espaço $L^2[0, 2\pi]$. Será demonstrado que também é uma base ortonormal (Teorema 22.5). •

O uso de bases ortonormais simplifica várias abordagens e demonstrações em espaços de Hilbert. Dada uma sequência (ξ_n) linearmente

independente em \mathcal{H} , existem seqüências ortonormais que geram o mesmo subespaço vetorial, construídas pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt (discutido à frente), o qual demonstra a existência de bases ortonormais em \mathcal{H} no caso separável. No caso geral demonstra-se a existência de tais bases com auxílio do Lema de Zorn.

Proposição 21.5. *Todo espaço de Hilbert não-trivial (ou seja, $\neq \{0\}$) possui uma base ortonormal.*

Demonstração. Seja $\mathcal{H} \neq \{0\}$. Denote por \mathcal{O} o conjunto de todas as famílias ortonormais em \mathcal{H} , a qual não é vazia pois se $0 \neq \xi \in \mathcal{H}$, então $\{\xi/\|\xi\|\}$ é um conjunto ortonormal. Ordenando \mathcal{O} por inclusão de conjuntos, dada uma família totalmente ordenada em \mathcal{O} , a união dos membros dessa família é seu limite superior (a qual pertence a \mathcal{O}). Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal M em \mathcal{O} . Será mostrado que M é uma base ortonormal de \mathcal{H} .

Se M não é base ortonormal, então pelo Teorema 18.7 existe um vetor $0 \neq \eta \in \overline{\text{Lin}(M)}^\perp$, de forma que $M \cup \{\eta/\|\eta\|\}$ seria uma família ortonormal, contradizendo a maximalidade de M em \mathcal{O} . Portanto M é uma base ortonormal de \mathcal{H} . ■

Proposição 21.6 (Gram-Schmidt). *Seja $\{\xi_n\}$ uma coleção contável linearmente independente em \mathcal{H} . Então existe uma coleção ortonormal $\{e_n\}$ em \mathcal{H} , com a mesma cardinalidade de $\{\xi_n\}$, de forma que, para todo m , $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ e $\{e_1, \dots, e_m\}$ geram o mesmo subespaço vetorial.*

Demonstração. Note, inicialmente, que dado um conjunto ortonormal $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$, o vetor $(\eta - \sum_{j=1}^k \langle \eta_j, \eta \rangle \eta_j)$ é ortogonal a cada η_j , logo é ortogonal ao subespaço gerado por $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$.

A seqüência (e_n) será construída por recorrência. Define-se $e_1 = \xi_1/\|\xi_1\|$, e claramente e_1 e ξ_1 geram o mesmo subespaço vetorial. Supondo que o processo foi construído para e_1, \dots, e_k , definem-se

$$\xi'_{k+1} = \xi_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle e_j, \xi_{k+1} \rangle e_j, \quad e_{k+1} = \xi'_{k+1}/\|\xi'_{k+1}\|.$$

Como $\{\xi_1, \dots, \xi_{k+1}\}$ é linearmente independente, vem que o conjunto $\{e_1, \dots, e_k, \xi_{k+1}\}$ também é linearmente independente, pois $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$

e $\{e_1, \dots, e_k\}$ geram o mesmo subespaço. Assim, pela observação no início desta demonstração, e_{k+1} é ortogonal a $\text{Lin}(\{e_1, \dots, e_k\})$. Por construção $\{\xi_1, \dots, \xi_{k+1}\}$ e $\{e_1, \dots, e_{k+1}\}$ geram o mesmo subespaço vetorial, e este último conjunto é ortonormal. ■

Proposição 21.7. *Seja $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ um conjunto ortonormal em \mathcal{H} . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H} .

(ii) Se $\xi \in \mathcal{H}$ satisfaz $\xi \perp e_\alpha$, para todo $\alpha \in J$, então $\xi = 0$.

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii) Sejam $\{e_\alpha\}$ uma base ortonormal e $\xi \perp e_\alpha$, para todo $\alpha \in J$. Por definição, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma combinação linear finita $\sum_{j=1}^n a_j e_{\alpha_j}$ (a_α , são escalares) que satisfaz

$$\|\xi\|^2 + \sum_{j=1}^n |a_j|^2 = \left\| \xi - \sum_{j=1}^n a_j e_{\alpha_j} \right\|^2 < \varepsilon,$$

implicando que $\|\xi\|^2 < \varepsilon$. Portanto $\xi = 0$.

(ii) \Rightarrow (i) Se $M = \text{Lin}(\{e_\alpha\}_{\alpha \in J})$, como $\overline{M}^\perp = (\{e_\alpha\}_\alpha)^\perp$, pelo Corolário 18.8, tem-se

$$\mathcal{H} = \overline{M} \oplus (\{e_\alpha\}_{\alpha \in J})^\perp.$$

Agora (ii) implica que $(\{e_\alpha\}_{\alpha \in J})^\perp = \{0\}$, e assim $\{e_\alpha\}_\alpha$ é um conjunto ortonormal maximal, ou seja, $\overline{M} = \mathcal{H}$ e $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é base ortonormal. ■

Proposição 21.8 (Desigualdade de Bessel). *Se $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é um conjunto ortonormal em \mathcal{H} , então para cada $\xi \in \mathcal{H}$*

$$\sum_{\alpha \in J} |\langle \xi_\alpha, \xi \rangle|^2 \leq \|\xi\|^2.$$

Em particular, $\langle \xi_\alpha, \xi \rangle \neq 0$ apenas num conjunto contável de índices $\alpha \in J$.

Demonstração. Considere inicialmente um conjunto contável ortonormal $\{\xi_j\}$. Dado $\xi \in \mathcal{H}$, seja $\eta_n = \xi - \sum_{j=1}^n \langle \xi_j, \xi \rangle \xi_j$, o qual é ortogonal a todo ξ_j com $1 \leq j \leq n$. Note que

$$\|\xi\|^2 = \|\eta_n\|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle \xi_j, \xi \rangle|^2 \geq \sum_{j=1}^n |\langle \xi_j, \xi \rangle|^2.$$

Assim, se J é finito a demonstração terminou. Se J não é finito, desta desigualdade segue que

$$\|\xi\|^2 \geq \sum_J |\langle \xi_j, \xi \rangle|^2,$$

para todo conjunto contável ortonormal $\{\xi_j\}$. Para cada $m \geq 1$, denote por $J_m = \{\alpha \in J : |\langle \xi_\alpha, \xi \rangle| \geq 1/m\}$. Da relação acima vem que J_m é finito para todo m . Como

$$\{\alpha \in J : \langle \xi_\alpha, \xi \rangle \neq 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} J_m.$$

conclui-se que para cada $\xi \in \mathcal{H}$ o conjunto de índices em que $\langle \xi_\alpha, \xi \rangle \neq 0$ é contável. ■

EXERCÍCIO 21.2. Mostre que um espaço de Hilbert é separável se, e somente se, ele possui uma base ortonormal contável.

Corolário 21.9. *Todas as bases ortonormais, num certo espaço de Hilbert dado, possuem a mesma cardinalidade.*

Demonstração. Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert. Se \mathcal{H} possui uma base ortonormal finita, a demonstração fica como exercício. Suponha então que há uma base ortonormal infinita. Sejam $U = \{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ e $V = \{\eta_\beta\}_{\beta \in K}$ duas bases ortonormais de \mathcal{H} . Para cada $\alpha \in J$, segue da desigualdade de Bessel que o conjunto

$$V_\alpha := \{\eta_\beta \in V : \langle \eta_\beta, \xi_\alpha \rangle \neq 0\}$$

é contável e, pela Proposição 21.7, cada η_β pertence a pelo menos um V_α : assim, $V = \bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha$.

Sendo cada V_α contável (lembre-se que \aleph_0 é a menor das “cardinalidades infinitas”), segue que [cardinalidade de V] \leq [cardinalidade de U]. De forma análoga mostra-se a desigualdade inversa. Portanto U e V possuem a mesma cardinalidade. ■

Esse último resultado permite associar uma cardinalidade específica a cada espaço de Hilbert.

Definição 21.10. A *dimensão de Hilbert*, ou simplesmente *dimensão*, de um espaço de Hilbert é a cardinalidade de uma base ortonormal desse espaço.

EXERCÍCIO 21.3. Escolha adequadamente conjuntos J para construir espaços de Hilbert $l^2(J)$ de dimensão (de Hilbert) arbitrária.

EXERCÍCIO 21.4. Mostre que se existe um operador unitário $U: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, então a imagem por U de uma base ortonormal em \mathcal{H}_1 é uma base ortonormal em \mathcal{H}_2 . Conclua então que esses espaços possuem a mesma dimensão de Hilbert.

Dada uma base ortonormal num espaço de Hilbert, é possível usá-la para definir coordenadas de vetores desse espaço. Neste contexto as coordenadas são também chamadas de coeficientes de Fourier.

Definição 21.11. Dado um conjunto ortonormal $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ em \mathcal{H} , a família $\{(\xi_\alpha, \xi)\}_{\alpha \in J}$ é chamada de *coeficientes de Fourier* de $\xi \in \mathcal{H}$, e a soma

$$\sum_{\alpha \in J} (\xi_\alpha, \xi) \xi_\alpha$$

é chamada *série de Fourier* de ξ em relação à $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$.

Em relação às séries de Fourier, o próximo passo é dar critérios sobre uma família ortonormal para que valha a igualdade na desigualdade de Bessel, e também critérios para que essa família seja uma base. Tais critérios coincidem.

Teorema 21.12. *Seja $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ um conjunto ortonormal em \mathcal{H} . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i.) $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H} .
- ii.) Se $\xi \in \mathcal{H}$, então a série de Fourier de ξ , em relação à $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$, converge em \mathcal{H} para ξ (e independe da ordem na soma), ou seja,

$$\xi = \sum_{\alpha \in J} (\xi_\alpha, \xi) \xi_\alpha, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

iii.) [Identidade de Parseval] Para todo $\xi \in \mathcal{H}$ tem-se

$$\|\xi\|^2 = \sum_{\alpha \in J} |(\xi_\alpha, \xi)|^2.$$

Demonstração. Se $\xi \in \mathcal{H}$, então $\langle \xi_\alpha, \xi \rangle \neq 0$ apenas num conjunto contável, que aqui será suposto ser \mathbb{N} ou $\{1, 2, \dots, n\}$ no caso finito, apenas para facilitar a notação.

i.) \Rightarrow *ii.)* Por Bessel $\sum_{j \in J} |\langle \xi_j, \xi \rangle|^2$ é convergente, assim

$$\left\| \sum_{j=n}^m \langle \xi_j, \xi \rangle \xi_j \right\|^2 = \sum_{j=n}^m |\langle \xi_j, \xi \rangle|^2 \rightarrow 0, \quad \text{para } n, m \rightarrow \infty,$$

de forma que $\sum_{j \in J} \langle \xi_j, \xi \rangle \xi_j$ é convergente, pois as somas parciais dos termos não-nulos formam uma sequência de Cauchy.

Definindo $\eta = \xi - \sum_{j \in J} \langle \xi_j, \xi \rangle \xi_j$ e usando a continuidade do produto interno, vem que $\langle \xi_\alpha, \eta \rangle = 0$ para todo $\alpha \in J$, e sendo $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma base ortonormal conclui-se, pela Proposição 21.7, que $\eta = 0$, ou seja,

$$\xi = \sum_{\alpha \in J} \langle \xi_\alpha, \xi \rangle \xi_\alpha, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

ii.) \Rightarrow *iii.)* Usando a notação na demonstração acima, tem-se que para $n < \infty$

$$\left| \|\xi\|^2 - \sum_{j=1}^n |\langle \xi_j, \xi \rangle|^2 \right| = \left\| \xi - \sum_{j=1}^n \langle \xi_j, \xi \rangle \xi_j \right\|^2,$$

o qual converge a zero para $n \rightarrow \infty$, pois $\|\eta\| = 0$.

iii.) \Rightarrow *i.)* Suponha que valha a identidade de Parseval e que $\langle \xi_\alpha, \xi \rangle = 0$, para todo $\alpha \in J$. Então $\xi = 0$, e pela Proposição 21.7 conclui-se que $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é base ortonormal de \mathcal{H} . ■

Notas

Muitos termos usados em Matemática são em homenagem a personagens que deram contribuições importantes, em casos particulares, no início do desenvolvimento de uma teoria; por exemplo, o termo "coeficientes de Fourier" neste Capítulo é devido à similaridade com o desenvolvimento das Séries de Fourier, no caso particular de séries trigonométricas estudadas por esse matemático. Algo similar ocorre com a desigualdade de Bessel e a identidade de Parseval, demonstradas por esses pesquisadores também no caso particular de séries trigonométricas, por volta de 1800.

Como ocorre frequentemente, uma técnica desenvolvida para um problema específico passa a ser aplicada a vários casos e, assim, transforma-se em um método. Este é o caso do processo de Gram-Schmidt. J. P. Gram introduziu, em 1883, uma

generalização no processo de mínimos quadrados desenvolvido por Legendre, Gauss e Tchebychev e usou, aparentemente pela primeira vez, o processo de ortogonalização, o qual tem sido atribuído a Erhard Schmidt, um estudante de Hilbert. Disto vem a nomenclatura *ortonormalização de Gram-Schmidt*. Esta é também uma ferramenta útil em Cálculo Numérico.

Em Teorias de Otimização e Aproximação, apenas tocada nos Teorema 18.7 e Exercícios 18.6 e 21.8, é notável um resultado publicado em 1914 por Ch. H. Muntz, o qual afirma que dada uma seqüência $(n_j) \subset \mathbb{N}$, em $\tilde{\text{Lin}}((t^{n_j}))$ é denso em $L^2[0, 1]$ se, e somente se, $\sum_j 1/n_j = \infty$. Observe que se essa soma diverge, então pode-se retirar qualquer número finito de termos (e até alguns infinitos) de (t^{n_j}) que o fecho do subespaço gerado continua sendo denso em $L^2[0, 1]$; isto contrasta fortemente com subconjuntos ortonormais, dos quais não se pode eliminar qualquer elemento sem diminuir o subespaço linear gerado. Pouco depois, O. Szász estendeu o trabalho de Muntz para n_j complexos.

Os leitores que já tiveram a oportunidade de consultar um livro sobre Mecânica Quântica para físicos, certamente irão reconhecer na relação apresentada no Exercício 21.9 a chamada "notação de Dirac", bastando simplesmente ignorar os "vetores" ' ξ ' e ' η ' naquela relação e substituir $\langle \xi, \eta \rangle$ pelo operador identidade. Com um pouco mais de experiência em Análise Funcional (e talvez em Física também) pode-se, ainda de tal relação, também apreciar a motivação de Dirac para introduzir a "função δ ", a qual foi definida rigorosamente apenas na Teoria de Distribuições, muitos anos mais tarde (cuja abordagem geral foi iniciada na década de 1940 por L. Schwartz)

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 21.5. a) Mostre que toda seqüência ortonormal num espaço de Hilbert converge fracamente a zero e não possui subsequência que converge fortemente. Compare com os resultados relacionados a espaços de Banach reflexivos no Capítulo 16.

b) Contudo, mostre que se $\xi_n \xrightarrow{w} \xi$ em \mathcal{N} , então tem-se $\|\xi\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n\|$. O item a) mostra que a igualdade pode não ocorrer.

EXERCÍCIO 21.6. Se $\psi \in L^2[0, 2\pi]$, use a desigualdade de Bessel para demonstrar o Lema de Riemann-Lebesgue neste caso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{-int} \psi(t) dt = 0.$$

EXERCÍCIO 21.7. Usando que $L^2[0, 2\pi]$ é denso em $L^1[0, 2\pi]$, mostre que o Lema de Riemann-Lebesgue (Exercício 21.6) vale para $v \in L^1[0, 2\pi]$.

EXERCÍCIO 21.8. Sejam $\{\xi_j\}$ uma seqüência ortonormal no espaço de Hilbert \mathcal{H} e $E_n = \text{Lin}(\{\xi_1, \dots, \xi_n\})$. Dado $\xi \in \mathcal{H}$, mostre que o mínimo de

$$d(\xi, E_n) = \inf_{\eta \in E_n} \|\xi - \eta\|$$

ocorre, e somente para $\eta = \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j$.

EXERCÍCIO 21.9. Mostre que o conjunto ortonormal $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é base ortonormal de \mathcal{H} se, e somente se, para quaisquer $\xi, \eta \in \mathcal{H}$

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{\alpha \in J} \langle \xi, \xi_\alpha \rangle \langle \xi_\alpha, \eta \rangle.$$

EXERCÍCIO 21.10. Use o Teorema 21.12 para demonstrar que a aplicação $\gamma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$, no Teorema de Representação de Riesz 19.1, é sobrejetora. Note que isto pode ser usado para se montar uma demonstração independente desse resultado de Riesz.

EXERCÍCIO 21.11. Em cada um dos casos abaixo, aplique o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos três primeiros termos apresentados

a) $\mathcal{H} = L^2[-1, 1]$, e $\xi_j(t) = t^j$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$. Os polinômios ortonormais resultantes são chamados de *polinômios de Legendre*.

b) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, e $\xi_j(t) = t^j e^{-t^2/2}$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$. Os polinômios ortonormais resultantes são chamados de *polinômios de Hermite*.

c) $\mathcal{H} = L^2[0, \infty)$, e $\xi_j(t) = t^j e^{-t/2}$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$. Os polinômios ortonormais resultantes são chamados de *polinômios de Laguerre*.

EXERCÍCIO 21.12. Em espaços normados não há, em geral, uma noção de ortogonalidade; contudo existe uma versão do processo de Gram-Schmidt para esses espaços. Dado um espaço normado separável \mathcal{N} de dimensão infinita, baseando-se na demonstração do processo de Gram-Schmidt 21.6 e no Lema de Riesz 2.1, construa, para cada $0 < \alpha < 1$, uma sequência de vetores (ξ_n) , com $\|\xi_n\| = 1$, para todo n , de forma que $\|\xi_j - \xi_k\| \geq \alpha$, para todo $j \neq k$, e com $\text{Lin}(\{\xi_n\})$ denso em \mathcal{N} .

Capítulo 22

Séries de Fourier

Inicia-se este Capítulo mostrando que cada espaço de Hilbert é unitariamente equivalente a algum l^2 . Então são discutidas as Séries de Fourier clássicas em seu hábitat natural, ou seja, $L^2[a, b]$, surgindo um importante exemplo de base ortonormal. No final deste Capítulo o Teorema de Representação de Riesz é usado para construir uma teoria de integração em espaços de Hilbert.

22.1 Séries de Fourier

Proposição 22.1. *Dado um espaço de Hilbert \mathcal{H} , existe um conjunto J de forma que \mathcal{H} é unitariamente equivalente a $l^2(J)$.*

Demonstração. Seja $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma base ortonormal de \mathcal{H} ; portanto a cardinalidade de J é a dimensão de Hilbert de \mathcal{H} . Defina o operador $U : \mathcal{H} \rightarrow l^2(J)$ por

$$(U\xi)_\alpha = \langle \xi_\alpha, \xi \rangle, \quad \alpha \in J,$$

o qual é linear e isométrico, pois por Parseval

$$\|U\xi\|_2^2 = \sum_{\alpha \in J} |\langle \xi_\alpha, \xi \rangle|^2 = \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Resta apenas mostrar que U é sobrejetor em $l^2(J)$.

Tem-se que $\{e_\alpha := U\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é a base canônica de $l^2(J)$, pois $\|e_\alpha\| = 1$ e suas componentes são $(e_\alpha)_\beta = \langle e_\beta, e_\alpha \rangle = \delta_{\alpha, \beta}$ (δ de Kronecker). Assim, a img U contém $\text{Lin}(\{e_\alpha\}_{\alpha \in J})$, um conjunto denso em $l^2(J)$ e, sendo U

isométrico (e com \mathcal{H} completo), vem que $\text{img } U$ é um conjunto fechado. Portanto, $U(\mathcal{H}) = l^2(J)$ e U é um operador unitário. ■

EXERCÍCIO 22.1. Siga os seguintes argumentos para mostrar que $\text{img } U$ é igual a $l^2(J)$ na demonstração da Proposição 22.1. Use Pitágoras para mostrar que, dado $f = (f_\alpha) \in l^2(J)$, as somas parciais da série $\sum_\alpha f_\alpha \xi_\alpha$ formam uma sequência de Cauchy em \mathcal{H} , portanto convergente a algum $\xi \in \mathcal{H}$; conclua que $U\xi = f$.

Corolário 22.2. *Dois espaços de Hilbert são unitariamente equivalentes se, e somente se, eles possuem a mesma dimensão de Hilbert.*

Demonstração. Sejam \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 espaços de Hilbert. Se existe um operador unitário $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, então a imagem de uma base ortonormal de \mathcal{H}_1 por U é uma base ortonormal de \mathcal{H}_2 . Como U é bijetor, vem que esses espaços de Hilbert possuem a mesma dimensão.

Suponha agora que \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 possuam a mesma dimensão de Hilbert; seja J um conjunto cuja cardinalidade coincide com tal dimensão. Pela Proposição 22.1 ambos os espaços de Hilbert são unitariamente equivalentes a $l^2(J)$ e, portanto, \mathcal{H}_1 é unitariamente equivalente a \mathcal{H}_2 (basta fazer uma composição de operadores unitários, o qual é unitário). ■

OBSERVAÇÃO 22.3. Tanto na Proposição 22.1 quanto no Corolário 22.2, há necessidade de se distinguir os casos real e complexo. Para cada cardinalidade “há apenas um espaço de Hilbert real e outro complexo”. Em particular, para cada dimensão finita n “há apenas os espaços de Hilbert \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n ”.

EXERCÍCIO 22.2. Mostre, sem usar o Teorema de Hahn-Banach, que num espaço de Hilbert os limites fraco e fraco* de sequências são únicos (se existirem).

Exemplo 22.4. Será mostrado que todo espaço de Hilbert de dimensão infinita contém sequências em que zero é um ponto de acumulação fraco, mas que não possuem subsequências fracamente convergentes a qualquer ponto. Pela Proposição 22.1 pode-se considerar $\mathcal{H} = l^2$ e, para facilitar a notação, será tratado $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$ (o caso geral adapta-se deste).

A sequência $\mathcal{S} = (\xi^n)_{n \geq 1}$ em que $\xi_m^n = \sqrt{n} \delta_{m,n}$ (delta de Kronecker), está em $l^2(\mathbb{N})$ e não possui subsequência limitada, logo não possui subsequência fracamente convergente. Agora, qualquer vizinhança fraca de

zero contém um aberto da forma

$$V(0; \mathcal{C}; \varepsilon) = \left\{ \xi \in l^2(\mathbb{N}) : \max_{1 \leq j \leq k} \{ |f_{\eta^j}(\xi)| = |\langle \eta^j, \xi \rangle| \} < \varepsilon \right\},$$

sendo $\mathcal{C} = \{\eta^1, \dots, \eta^k\} \subset l^2(\mathbb{N})$ e $\varepsilon > 0$. O objetivo é mostrar que para todo aberto dessa forma $\mathcal{S} \cap V(0; \mathcal{C}; \varepsilon) \neq \emptyset$, concluindo que zero é ponto de acumulação de \mathcal{S} na topologia fraca.

Se $\mathcal{S} \cap V(0; \mathcal{C}; \varepsilon) = \emptyset$, então para algum j tem-se que $\sqrt{n_r} |\eta_{n_r}^j| = |\langle \eta^j, \xi^{n_r} \rangle| \geq \varepsilon$ para infinitos índices n_r e com $\sum_r 1/n_r = \infty$, já que há finitas possibilidades para o índice j e a série harmônica é divergente. Mas isto implica em

$$\|\eta^j\|_2^2 \geq \varepsilon^2 \sum_r 1/n_r = \infty,$$

contradizendo $\eta^j \in l^2(\mathbb{N})$; logo $\mathcal{S} \cap V(0; \mathcal{C}; \varepsilon) \neq \emptyset$. •

Agora será discutido o principal exemplo histórico de base ortonormal em um espaço de Hilbert de dimensão infinita, as séries de Fourier em $L^2[a, b]$.

Teorema 22.5. *O conjunto enumerável $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, em que*

$$\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{i2\pi n(t-a)}{(b-a)}},$$

é uma base ortonormal do espaço de Hilbert $L^2[a, b]$ complexo.

Demonstração. Claramente $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é um conjunto ortonormal no espaço $L^2[a, b]$. Denote $E := \text{Lin}(\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}})$ e $S := \{\psi \in C[a, b] : \psi(a) = \psi(b)\}$. Note inicialmente que a aplicação identidade

$$(C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \xrightarrow{1} (C[a, b], \|\cdot\|_2)$$

é contínua, assim existe $C > 0$ de modo que $\|\psi\|_2 \leq C\|\psi\|_\infty$ e convergência uniforme implica convergência em $L^2[a, b]$.

Serão usados dois fatos conhecidos: 1) de teoria de integração tem-se que $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$ é denso em $L^2[a, b]$, e 2) o Teorema de Fejér (tratado em textos de Séries de Fourier em $C[a, b]$), do qual segue que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ é denso em $(S, \|\cdot\|_\infty)$.

Agora, $(S, \|\cdot\|_2)$ é denso em $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$. De fato, se $\phi \in C[a, b]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ define

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \phi(t) & a \leq t \leq b - \frac{1}{n} \\ \phi(a) + n(b-t) \left(\phi(b - \frac{1}{n}) - \phi(a) \right) & b - \frac{1}{n} < t \leq b \end{cases}$$

que pertence a S para todo n e $\|\phi - \phi_n\|_2 \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$.

Resumindo, $(E, \|\cdot\|_\infty)$ é denso em S (com a norma $\|\cdot\|_\infty$), que por sua vez é denso em $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$, e este último é denso em $L^2[a, b]$; isto, juntamente com a continuidade da aplicação identidade acima, asseguram que E é denso em $L^2[a, b]$, o que demonstra o teorema. ■

Corolário 22.6. A aplicação $\mathcal{F} : L^2[a, b] \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ dada por

$$(\mathcal{F}\psi)_n = \int_a^b \overline{\psi_n(t)} \psi(t) dt, \quad \psi \in L^2[a, b],$$

com ψ_n como no Teorema 22.5, é um operador unitário e

$$\psi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}\psi)_n \psi_n(t) \quad \text{em } L^2[a, b].$$

Demonstração. Pelos Teoremas 21.12 e 22.5 segue que

$$\psi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \psi_n, \psi \rangle \psi_n(t) \quad \text{em } L^2[a, b],$$

sendo que o produto interno é dado por $\langle \psi_n, \psi \rangle = (\mathcal{F}\psi)_n$, para todo índice $n \in \mathbb{Z}$. Para terminar a demonstração, basta notar que \mathcal{F} faz o papel do operador unitário U na demonstração da Proposição 22.1, identificando J com \mathbb{Z} . ■

OBSERVAÇÃO 22.7. \mathcal{F} é chamada de *transformada de Fourier* no espaço $L^2[a, b]$. Note que a ação de \mathcal{F} está também definida em $L^p[a, b]$, contudo não há sentido falar em unitariedade se $p \neq 2$.

22.2 Integração em Espaços de Hilbert

Pode-se desenvolver uma teoria de integração para funções com valores num espaço de Banach separável, mas restringindo-se aos espaços

de Hilbert pode-se usar, de forma elegante e concisa, o Teorema de Representação de Riesz para definir a integral em alguns casos. Este será o procedimento adotado no que segue.

Se \mathcal{H} é separável, logo com base ortonormal contável (Exercício 21.2), diz-se que $\psi : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathcal{H}$ é mensurável se para todo $\xi \in \mathcal{H}$ a função $\Omega \rightarrow \mathbb{F}$, $t \mapsto \langle \xi, \psi(t) \rangle$, é mensurável. Tal ψ é integrável se é mensurável e $\int_{\Omega} \|\psi(t)\| d\mu(t) < \infty$.

EXERCÍCIO 22.3. Use as identidades de Parseval e polarização para mostrar que se $\psi, \phi : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathcal{H}$ são mensuráveis, então a aplicação $t \mapsto \langle \phi(t), \psi(t) \rangle$ é mensurável se \mathcal{H} for separável. Verifique também que o conjunto dessas aplicações mensuráveis é um espaço vetorial.

Proposição 22.8. *Seja $\psi : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathcal{H}$ uma aplicação integrável. Então existe um único $\xi \in \mathcal{H}$ de forma que*

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_{\Omega} \langle \psi(t), \eta \rangle d\mu(t), \quad \forall \eta \in \mathcal{H}.$$

Além disso, $\|\xi\| \leq \int_{\Omega} \|\psi(t)\| d\mu(t)$.

OBSERVAÇÃO 22.9. Denota-se tal vetor ξ por $\int_{\Omega} \psi(t) d\mu(t)$, o qual é chamado de integral de ψ em relação à medida μ .

Demonstração. Pelo Exercício 22.3, $t \mapsto \|\psi(t)\|$ é mensurável. Defina o funcional linear $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{F}$ por

$$f(\eta) = \int_{\Omega} \langle \psi(t), \eta \rangle d\mu(t).$$

Por Cauchy-Schwarz segue que

$$|f(\eta)| \leq \int_{\Omega} \|\psi(t)\| \|\eta\| d\mu(t) \leq \left(\int_{\Omega} \|\psi(t)\|^2 d\mu(t) \right)^{1/2} \|\eta\|,$$

para todo η , de forma que $f \in \mathcal{H}^*$. Pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um único $\xi \in \mathcal{H}$ em que $f = f_{\xi}$, ou seja, para todo $\eta \in \mathcal{H}$ tem-se $f(\eta) = f_{\xi}(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle$. Finalmente, também por Riesz, $\|\xi\| = \|f_{\xi}\| = \|f\| \leq \int_{\Omega} \|\psi(t)\| d\mu(t)$. ■

Notas

As séries de Fourier surgiram com Joseph Fourier, por volta de 1820, ao estudar modelos para condução de calor, e aplicadas a problemas de vibrações considerados anteriormente por Daniel Bernoulli, por volta de 1750. A idéia foi representar fenômenos periódicos complicados em termos de outros periódicos mais simples, generalizando-se, atualmente, no conceito de base ortonormal. Note-se que o trabalho de Fourier não era rigoroso matematicamente, mas devido à importância das questões ali surgidas, vários matemáticos (como Cauchy e Dirichlet) foram motivados a desenvolver as bases sólidas do que se denomina atualmente de Análise Matemática.

Em 1926 Kolmogorov apresentou um exemplo de $\psi \in L^1[a, b]$ cuja série de Fourier diverge em todo ponto desse intervalo; somente em 1966, Lennart Carleson, *On the Convergence and Growth of Partial Sums of Fourier Series*, Acta Math. 116, 135–157, foi mostrado que se $\psi \in L^p[a, b]$, $1 < p \leq \infty$, então sua série de Fourier converge num conjunto de medida de Lebesgue total em $[a, b]$.

Na década de 1980 foi desenvolvido um método chamado “transformada wavelet”, similar àquela de Fourier, mas adequado à análise de fenômenos com rápidas oscilações e diferentes escalas. Este já é um ramo da Matemática bastante desenvolvido com aplicações a diversas áreas, incluindo Análise Funcional, Teoria de Fractais, Processamento de Imagens, etc. Há métodos numéricos otimizados para a(s) transformada(s) wavelet. Caso haja interesse, dê uma olhada em M. Holschneider, *Wavelets: An Analysis Tool*, Nova Iorque, Oxford University Press, 1999.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 22.4. Use a Proposição 22.1 para apresentar uma solução alternativa do Exercício 21.9.

EXERCÍCIO 22.5. Seja $U : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$, $(U\psi)(t) = \psi(-t)$. Mostre que U é unitário e $U^2 = 1$. Determine o complemento ortogonal de $E = \{\psi \in L^2(\mathbf{R}) : U\psi = \psi\}$.

EXERCÍCIO 22.6. Seja $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ uma base ortonormal no espaço de Hilbert separável \mathcal{H} , de forma que $\xi = \sum_{j=1}^\infty a_j \xi_j$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Mostre que as seqüências de operadores $T_n \xi = a_n \xi_n$ e $S_n \xi = \sum_{j=1}^\infty a_j \xi_{j+n}$ pertencem à $B(\mathcal{H})$, para todo n . que $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, mas não converge em norma, enquanto que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, mas não converge fortemente.

EXERCÍCIO 22.7. a) Mostre que se (U_n) é uma seqüência de operadores isométricos em \mathcal{H} e $U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U$, então U é isométrico.

b) Mostre que a seqüência de operadores unitários (verifique) $U_n : l^2(\mathbf{N}) \rightarrow l^2(\mathbf{N})$

$$U_n \xi = (\xi_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)$$

converge fortemente a um operador que, embora isométrico, não é unitário.

c) Dê exemplo de seqüência de operadores isométricos em algum espaço de Hilbert que converge fracamente a um operador que não é isométrico

EXERCÍCIO 22.8. Seja \mathcal{N} o espaço vetorial dos polinômios trigonométricos $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $p(t) = \sum_{j=1}^n a_j e^{i\tau_j t}$, $a_j \in \mathbb{C}$ e $\tau_j \in \mathbb{R}$, para todo j . Verifique que

$$(p, q) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overline{p(t)} q(t) dt, \quad p, q \in \mathcal{N},$$

é um produto interno e que $\{\psi_r = e^{i\tau r}\}_{r \in \mathbb{R}}$ é um conjunto ortonormal em \mathcal{N} . Conclua que esse espaço (diretamente relacionado às funções penepiódicas, “almost periodic” em inglês) não é separável.

EXERCÍCIO 22.9. Sejam U um operador unitário em \mathcal{H} e $E = \{\xi \in \mathcal{H} : U\xi = \xi\}$. Mostre que $E = \{\xi \in \mathcal{H} : U^n \xi = \xi\}$ e, considerando o operador $(1 - U)$ e o Exercício 20.9, mostre que a sequência de operadores limitados

$$T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n U^j$$

converge fortemente ao operador de projeção ortogonal P_E (este resultado é conhecido como “Mean Ergodic Theorem”, originalmente devido à von Neumann.)

EXERCÍCIO 22.10. Seja $\psi \in L^2[0, 2\pi]$ de forma que $(n(\mathcal{F}\psi)_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ pertença a $l^2(\mathbb{Z})$. Use Cauchy-Schwarz para mostrar que a série de Fourier de ψ

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}\psi)_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$$

converge absoluta e uniformemente a ψ . Conclua que ψ é contínua e $\psi(0) = \psi(2\pi)$.

EXERCÍCIO 22.11. Se $\psi \in C^1[0, 2\pi]$ com $\psi(0) = \psi(2\pi)$, verifique que $(\mathcal{F}\psi')_n = in(\mathcal{F}\psi)_n$. Use isto para mostrar que se ψ é continuamente diferenciável, sua série de Fourier converge uniformemente (a $'$ indica derivada).

EXERCÍCIO 22.12. a) Verifique a linearidade e $\int_{A \cup B} = \int_A + \int_B$, se $A \cap B = \emptyset$, para a integral definida na Observação 22.9

b) Demonstre a seguinte versão do Teorema da Convergência Dominada. Se $\psi_j: (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathcal{H}$ (separável) e integrável com $\psi_j \xrightarrow{\text{a.q.p.}} \psi$, e existe uma função $g \in L^1_\mu(\Omega)$ com $\|\psi_j(t)\| \leq |g(t)|$, μ -q.t.p. então ψ é integrável e $\int_\Omega \psi_j d\mu \rightarrow \int_\Omega \psi d\mu$ para $j \rightarrow \infty$.

EXERCÍCIO 22.13. Sejam $T: \mathbb{R} \rightarrow B(\mathcal{H})$ contínuo, sendo \mathbb{R} com a medida de Lebesgue e \mathcal{H} separável.

a) Mostre que para todo $\xi \in \mathcal{H}$ a aplicação $t \mapsto T(t)\xi$ é mensurável

b) Considere que $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = S$ em $B(\mathcal{H})$. Mostre que, para todo $\delta > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} T(t)\xi dt, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

está bem-definido e vale $S\xi = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta \int_0^\infty e^{-\delta t} T(t)\xi dt, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}$.

EXERCÍCIO 22.14. Seja M o conjunto das $\psi : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathcal{H}$ (separável) mensuráveis satisfazendo $\int_{\Omega} \|\psi(t)\|^2 d\mu(t) < \infty$. Mostre que M é um espaço vetorial e que

$$[\psi, \phi] := \int_{\Omega} \langle \psi(t), \phi(t) \rangle_{\mathcal{H}} d\mu(t), \quad \psi, \phi \in M,$$

é um produto interno em M . Seria este espaço pré-Hilbertiano completo? Note que no caso em que $\mathcal{H} = \mathbf{F}$ tem-se que $M = L^2_{\mu}(\Omega)$

EXERCÍCIO 22.15. Siga os passos adiante para uma indicação de como o Teorema de Fejér segue de Stone-Weierstrass (veja [Simmons (1963)]). Sejam E e S como na demonstração do Teorema 22.5. Note que $(S, \|\cdot\|_{\infty})$ pode ser identificado com o espaço $(C(I), \|\cdot\|_{\infty})$, sendo I o intervalo $[a, b]$ com os extremos a, b identificados (uma circunferência). Mostre que E é um espaço vetorial complexo de $C(I)$, que é uma álgebra invariante por conjugação complexa, que separa pontos de I e contém funções constantes. Por Stone-Weierstrass, conclua que E é denso em $C(I)$.

Capítulo 23

Operações em Espaços de Banach

Há algumas maneiras de se gerar novos espaços de Banach através de espaços dados. Aqui são introduzidas apenas duas construções importantes, a soma direta e os espaços quocientes.

23.1 Soma Direta

Para fixar a notação é conveniente recordar o conceito de produto cartesiano de conjuntos. O produto cartesiano de uma família qualquer de conjuntos $\{X_t\}_{t \in J}$, denotado por $\prod_{t \in J} X_t$, é o conjunto das funções

$$\psi : J \rightarrow \bigcup_{t \in J} X_t$$

cujas componentes $\pi_t \psi := \psi(t) \in X_t$, para todo $t \in J$: lembre-se que cada ψ é também chamada de *função escolha*. Pelo Axioma da Escolha segue que o produto cartesiano de uma família qualquer de conjuntos não-vazios também é não-vazio. Supõe-se, tacitamente, que todo X_t não é vazio. Se $X_t = X$ para todo $t \in J$, indica-se também $\prod_{t \in J} X_t = X^J$, ou X^n se $J = \{1, 2, \dots, n\}$, o qual é identificado com as n -uplas ordenadas de elementos de X . Note que, no caso em que os conjuntos X_t são espaços vetoriais, então $\pi_t : \prod_{j \in J} X_j \rightarrow X_t$, a chamada projeção na t -ésima coordenada, é linear para todo índice t .

Seja $\{(\mathcal{N}_t, \|\cdot\|_t)\}_{t \in J}$ uma família de espaços normados; então $\prod_{t \in J} \mathcal{N}_t$ torna-se um espaço vetorial com as operações lineares definidas pontualmente. Para cada $1 \leq p < \infty$ define-se a seguinte norma

$$\|\psi\|_p := \left(\sum_{t \in J} \|\pi_t \psi\|_t^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

no espaço vetorial $\bigoplus_p \mathcal{N}_t = \bigoplus_p (\mathcal{N}_t)_{t \in J}$, o qual é constituído pelas $\psi \in \prod_{t \in J} \mathcal{N}_t$ que satisfazem $\pi_t \psi \neq 0$ apenas num conjunto contável de índices $t \in J$, e com $\|\psi\|_p < \infty$. Para $p = \infty$ introduz-se a norma

$$\|\psi\|_\infty := \sup_{t \in J} \|\pi_t \psi\|_t$$

no subespaço $\bigoplus_\infty \mathcal{N}_t = \bigoplus_\infty (\mathcal{N}_t)_{t \in J}$ constituído pelas ψ no produto $\prod_{t \in J} \mathcal{N}_t$ que satisfazem $\|\psi\|_\infty < \infty$.

Proposição 23.1. Para $1 \leq p \leq \infty$, $\bigoplus_p \mathcal{N}_t$ é um espaço normado e, para todo $t \in J$, π_t é um operador linear limitado com $\|\pi_t\| \leq 1$. Além disso, $\bigoplus_p \mathcal{N}_t$ é um espaço de Banach se todo \mathcal{N}_t for Banach.

Demonstração. Será apresentada a demonstração para $1 \leq p < \infty$; o caso $p = \infty$ fica como exercício. Claramente $\bigoplus_p \mathcal{N}_t$ é um espaço normado com $\|\cdot\|_p$, π_t é linear e $\|\pi_t \psi\|_t \leq \|\psi\|_p$, mostrando que se tem $\|\pi_t\| \leq 1$ para todo $t \in J$.

Suponha que todo \mathcal{N}_t é Banach. Seja $(\psi^n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\bigoplus_p \mathcal{N}_t$. A desigualdade

$$\|\pi_t \psi^n - \pi_t \psi^m\|_t \leq \|\psi^n - \psi^m\|_p, \quad \forall n, m, t,$$

mostra que, para todo $t \in J$, $(\pi_t \psi^n)$ é Cauchy em \mathcal{N}_t e, portanto, converge a algum $\psi_t \in \mathcal{N}_t$. Note que para $\psi := \{\psi_t\}_{t \in J}$ tem-se que $\psi_t \neq 0$ apenas num conjunto contável.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ com $\|\psi^n - \psi^m\|_p < \varepsilon$ se $n, m \geq N(\varepsilon)$. Assim, para todo conjunto finito de índices $f \subset J$, tem-se

$$\left(\sum_{t \in f} \|\pi_t \psi^n - \pi_t \psi^m\|_t^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\psi^n - \psi^m\|_p < \varepsilon, \quad n, m \geq N(\varepsilon).$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ vem que $\sum_{t \in f} \|\pi_t \psi^n - \psi_t\|_t^p \leq \varepsilon^p$ para qualquer conjunto finito f ; portanto, $\sum_{t \in J} \|\pi_t \psi^n - \psi_t\|_t^p \leq \varepsilon^p$ se $n \geq N(\varepsilon)$ e

$(\psi^n - \psi) \in \bigoplus_p \mathcal{N}_t$; sendo este último espaço vetorial, $(\psi^n - \psi) + \psi^n = \psi \in \bigoplus_p \mathcal{N}_t$. Da desigualdade logo acima segue também que $\psi^n \rightarrow \psi$ em $\bigoplus_p \mathcal{N}_t$. Portanto, $\bigoplus_p \mathcal{N}_t$ é completo. ■

EXERCÍCIO 23.1. Demonstre a Proposição 23.1 no caso $p = \infty$. Para todos $1 \leq p \leq \infty, t \in J$, mostre que $\|\pi_t\| = 1$.

Definição 23.2. Os termos *soma direta* e *produto direto* de espaços normados referem-se a $\bigoplus_p \mathcal{N}_t$, indistintamente, para qualquer $1 \leq p \leq \infty$.

No caso em que os \mathcal{N}_t são espaços de Hilbert há um produto interno natural somente se $p = 2$, e o termo *soma direta de espaços de Hilbert* será usado apenas neste caso particular.

Proposição 23.3. Se $\{\mathcal{H}_t\}_{t \in J}$ é uma coleção de espaços de Hilbert, então a soma direta destes espaços

$$\bigoplus \mathcal{H}_t := \bigoplus_2 \mathcal{H}_t.$$

é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle \psi, \phi \rangle_{\mathbb{F}} := \sum_{t \in J} \langle \pi_t \psi, \pi_t \phi \rangle, \quad \psi, \phi \in \bigoplus \mathcal{H}_t.$$

Demonstração. Devido à Proposição 23.1 basta verificar que $\langle \psi, \phi \rangle_{\mathbb{F}}$ está bem-definido e é um produto interno (que gera a norma correta). Verificar que esta expressão define um produto interno é deixado a cargo dos leitores.

Se $\psi, \phi \in \bigoplus \mathcal{H}_t$, da desigualdade

$$\begin{aligned} \left| \sum_t \langle \pi_t \psi, \pi_t \phi \rangle \right| &\leq \sum_t |\langle \pi_t \psi, \pi_t \phi \rangle| \leq \sum_t \|\pi_t \psi\| \|\phi_t \psi\| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum (\|\pi_t \psi\|^2 + \|\phi_t \psi\|^2) < \infty. \end{aligned}$$

segue que o produto $\langle \psi, \phi \rangle_{\mathbb{F}}$ converge absolutamente e está bem-definido. ■

EXERCÍCIO 23.2. Verifique que no caso de $\mathcal{N}_j = \mathbb{F}$, para todo $j \in J$, tem-se $\bigoplus_p \mathcal{N}_t = l^p(J)$.

OBSERVAÇÃO 23.4. Em $\bigoplus \mathcal{H}_t$ tem-se, por construção, que " $\mathcal{H}_{t_1} \perp \mathcal{H}_{t_2}$ " se $t_1 \neq t_2$, no sentido que se $\psi^1, \psi^2 \in \bigoplus \mathcal{H}_t$ e $\pi_t \psi^1 = 0$ para $t \neq t_1$, e $\pi_t \psi^2 = 0$, para $t \neq t_2$, então $\langle \psi^1, \psi^2 \rangle_{\mathcal{H}} = 0$.

Com base na observação acima, define-se a *soma direta interna*, indicada por $\bigoplus^{\text{int}} \mathcal{H}_t$, de uma família de subespaços fechados $\{\mathcal{H}_t\}_{t \in J}$ de um espaço de Hilbert \mathcal{H} , somente se eles forem dois a dois ortogonais, e tem-se $\bigoplus^{\text{int}}_{t \in J} \mathcal{H}_t = \overline{\text{Lin}(\{\mathcal{H}_t\}_{t \in J})}$. Um caso particular de soma direta interna é a decomposição $\mathcal{H} = E \oplus E^\perp$, sendo E um subespaço fechado do espaço de Hilbert \mathcal{H} , descrita no Teorema 18.7.

Exemplo 23.5. Sejam $\{(\Omega_t, \mathcal{A}_t, \mu_t)\}_{t \in J}$ uma família de espaços de medida, Ω a união disjunta de $\{\Omega_t\}_{t \in J}$, \mathcal{A} a σ -álgebra $\{A \subset \Omega : A \cap \Omega_t \in \mathcal{A}_t, \forall t \in J\}$, e μ a medida $\mu(A) = \sum_t \mu_t(A \cap \Omega_t)$, com $A \in \mathcal{A}$. Assim, a aplicação $V : \bigoplus L^2_{\mu_t}(\Omega_t) \rightarrow L^2_{\mu}(\Omega)$ dada por

$$(V\psi)(s) = (\pi_t \psi)(s), \quad \text{se } s \in \Omega_t.$$

é uma aplicação unitária. De fato, como V é linear e

$$\begin{aligned} \langle V\psi, V\psi \rangle &= \int_{\Omega} |V\psi(s)|^2 d\mu(s) = \sum_t \int_{\Omega_t} |(\pi_t \psi)(s)|^2 d\mu_t(s) \\ &= \sum_t \|\pi_t \psi\|_t^2 = \|\psi\|_2^2. \end{aligned}$$

vem que V é isométrico. Resta apenas mostrar que V é sobrejetor em $L^2_{\mu}(\Omega)$. Se $u \in L^2_{\mu}(\Omega)$, seja $\psi_t = u|_{\Omega_t}$, de forma que

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |u(s)|^2 d\mu(s) = \sum_t \int_{\Omega_t} |\psi_t(s)|^2 d\mu_t(s),$$

ou seja, $\psi = \{\psi_t\}_{t \in J} \in \bigoplus L^2_{\mu_t}(\Omega_t)$ e $V\psi = u$, mostrando que V é sobrejetor e, portanto, um operador unitário. •

23.2 Espaço Quociente

Dado um subespaço fechado E de um espaço de Banach \mathcal{B} , denota-se por \mathcal{B}/E a coleção dos subconjuntos de \mathcal{B} da forma

$$\xi + E := \{\xi + \eta : \eta \in E\}.$$

o qual será denotado também por $[\xi]_E$, ou simplesmente $[\xi]$, quando for claro qual o subespaço E considerado. Cada um desses conjuntos $[\xi]$ é chamado de coset de E . Note que se $\xi \in E$, então $[\xi]_E = E$: em particular tem-se $[0]_E = E$.

Há uma estrutura linear natural em \mathcal{B}/E , com as operações definidas, para todos $\xi, \eta \in \mathcal{B}$, $\alpha \in \mathbb{F}$, por

$$\begin{aligned} [\xi] + [\eta] &= \xi + E + \eta + E = \xi + \eta + E = [\xi + \eta], \\ \alpha[\xi] &= \alpha(\xi + E) = \alpha\xi + E = [\alpha\xi], \end{aligned}$$

(em que $\alpha E = E$ e $\beta[E] = [E]$ para $\beta = 0$, pois $[0]_E = E$) e \mathcal{B}/E torna-se um espaço vetorial chamado de *espaço quociente* de \mathcal{B} módulo E .

Geralmente os elementos de E possuem alguma propriedade comum que se deseja “descartar” ou “associar”, e a forma de se fazer isto é identificando tais elementos, como na integral de Lebesgue em que funções que diferem em conjuntos de medida nula são identificadas.

OBSERVAÇÃO 23.6. Os cosets são classes de equivalência. Note a identificação dos vetores ξ e η , ou seja, pertencem ao mesmo coset, se, e somente se, $(\xi - \eta) \in E$. Uma visão ilustrativa do espaço quociente é obtida considerando-se E como uma reta, no plano \mathbb{R}^2 , passando pela origem; assim, em \mathbb{R}^2/E , cada coset $[\xi]$ é uma reta em \mathbb{R}^2 , paralela a E , que contém o ponto ξ . Faça um desenho.

Exemplo 23.7. Observe que na construção de \mathcal{B}/E basta que E e \mathcal{B} sejam espaços vetoriais. Assim, se $\|\cdot\|$ é uma seminorma num espaço vetorial X e $E = \{\xi \in X : \|\xi\| = 0\}$, então E é um subespaço de X e $\|[\xi]_E\| = \|\xi\|$ é uma norma em X/E (verifique!). Este é um uso típico de espaço quociente, no qual dois vetores ξ e η são identificados se $\|\xi - \eta\| = 0$. •

Proposição 23.8. *Seja E um subespaço fechado de um espaço de Banach \mathcal{B} . Então*

i.) *A aplicação $\|\cdot\|_Q : \mathcal{B}/E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\|[\xi]\|_Q := d(\xi, E) = \inf_{\eta \in E} \|\xi - \eta\|,$$

é uma norma em \mathcal{B}/E , chamada de norma quociente.

ii.) *Para todo $\xi \in \mathcal{B}$ tem-se que $\|[\xi]\|_Q \leq \|\xi\|$, e, portanto, a aplicação $(\mathcal{B}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathcal{B}/E, \|\cdot\|_Q)$, $\xi \mapsto [\xi]$, é contínua.*

iii.) $(B/E, \|\cdot\|_Q)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. i.) A verificação deste item é simples. Note que é importante que E seja fechado, de outra forma $\|\cdot\|_Q$ pode ser apenas uma seminorma.

ii.) $\|[\xi]\|_Q = \inf_{\eta \in E} \|\xi - \eta\| \leq \|\xi - 0\| = \|\xi\|$. Disto também segue que a aplicação $\xi \mapsto [\xi]$ é contínua.

iii.) Seja $([\xi_n])_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em B/E . Será mostrado que existe $\xi_0 \in B$ com $[\xi_n] \rightarrow [\xi_0]$. Escolha uma subsequência $([\xi_{n_j}])$ de $([\xi_n])$ em que, para todo j , $\|[\xi_{n_j}] - [\xi_{n_{j+1}}]\|_Q < 2^{-j-1}$ (que existe, confira!). Escolha uma sequência $(\eta_j) \subset E$ de forma que, para todo j ,

$$\|(\xi_{n_j} - \eta_j) - (\xi_{n_{j+1}} - \eta_{j+1})\| < \|[\xi_{n_j}] - [\xi_{n_{j+1}}]\|_Q + \frac{1}{2^{j+1}} < \frac{1}{2^j}.$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j-1} < \infty$, segue que $(\xi_{n_j} - \eta_j)$ é uma sequência de Cauchy em B e, assim, converge a algum $\xi_0 \in B$.

Como a aplicação $\xi \mapsto [\xi]$ é contínua, vem que (usando que $\eta_j \in E$)

$$[\xi_{n_j}] = [\xi_{n_j} - \eta_j] \rightarrow [\xi_0],$$

e sendo $([\xi_{n_j}])$ uma subsequência da sequência de Cauchy $([\xi_n])$, conclui-se que $[\xi_n] \rightarrow [\xi_0]$ e B/E é completo.

EXERCÍCIO 23.3. Apresente detalhes de como são feitas as escolhas dos elementos da sequência $(\eta_j) \subset E$ na demonstração da Proposição 23.8.

Exemplo 23.9. Seja $E = \{\psi \in C[-1, 1] : \psi(0) = 0\}$. Então $C[-1, 1]/E$ é identificado (ou seja, é isomorfo, como espaço normado) com \mathbb{F} , pois cada coset $[\phi]$ é identificado com o valor de $\phi(0)$, ou seja, $[\psi] = [\phi]$ se, e somente se, $\psi(0) = \phi(0)$. •

Como aplicação do conceito de espaço quociente, o Teorema da Aplicação Aberta 8.3 será obtido a partir do Teorema do Gráfico Fechado 9.9; como a recíproca foi discutida no Capítulo 9, segue que esses importantes teoremas são, de fato, equivalentes.

Lema 23.10. Se E é um subespaço fechado de B , então a aplicação $(B, \|\cdot\|) \rightarrow (B/E, \|\cdot\|_Q)$, $\xi \mapsto [\xi]$, é aberta.

Demonstração. Basta verificar que a imagem de qualquer bola aberta $B = B_B(\xi_0, r)$ é aberta em B/E ; de fato, será mostrado que $[B] =$

$B_{B/E}(\{\xi_0\}; r)$ (lembrando que toda bola aberta é um conjunto aberto); claramente $[B] = \{\xi \in B, \|\xi - \xi_0\| < r\}$.

Se $\xi \in B$, então, usando a continuidade da aplicação $[\cdot]$, de $\|\xi - \xi_0\| < r$ obtém-se que

$$\|[\xi] - [\xi_0]\|_Q = \|[\xi - \xi_0]\|_Q \leq \|\xi - \xi_0\| < r,$$

mostrando que $[B] \subset B_{B/E}(\{\xi_0\}; r)$. Agora, se $[\xi] \in B_{B/E}(\{\xi_0\}; r)$ tem-se $\|[\xi - \xi_0]\|_Q = \|[\xi] - [\xi_0]\|_Q < r$ e existe $\eta \in E$ de forma que $\|(\xi - \xi_0) - \eta\| < r$, ou seja,

$$([\xi] - [\xi_0]) = [\xi - \xi_0] = [\xi - \xi_0 - \eta] \in [B_{B/E}(0; r)],$$

ou ainda, $[\xi] \in [B]$, e portanto $B_{B/E}(\{\xi_0\}; r) \subset [B]$. ■

Pelo Exercício 9.14 tem-se que o Teorema da Aplicação Inversa 8.5 segue do Teorema do Gráfico Fechado. Assim, para atingir o objetivo proposto pode-se supor válido o Teorema 8.5.

Se $T \in B(B_1, B_2)$ com $\text{img } T = B_2$ tem-se que $N(T)$ é subespaço fechado e $T_Q : B_1/N(T) \rightarrow B_2$, definido pela relação $T = T_Q \circ [\cdot]_{N(T)}$ (ou seja, $T_Q(\xi + N(T)) = T\xi$, $\xi \in B_1$), é linear e bijetor, pois se $T_Q[\xi] = 0$ então $T\xi = 0$, $\xi \in N(T)$ e $[\xi] = [0]$. Como para todo $\eta \in N(T)$ tem-se $T_Q[\xi] = T\xi = T(\xi - \eta)$, segue que $\|T_Q[\xi]\| \leq \|T\| \|\xi - \eta\|$ e, então,

$$\|T_Q[\xi]\| \leq \|T\| \inf_{\eta \in N(T)} \|\xi - \eta\| = \|T\| \|[\xi]\|_Q.$$

concluindo que T_Q é limitado. logo um homeomorfismo pelo Teorema 8.5. Isto, juntamente com o Lema 23.10, mostra que T é a composição de um homeomorfismo T_Q com uma aplicação aberta $[\cdot]_{N(T)}$, logo T também é aberta.

Notas

Nem todos os autores consideram que os termos *soma direta* e *produto direto* são sinónimos: por exemplo, alguns consideram produtos diretos de espaços normados e chamam seus complementos de soma direta; outros, ainda, restringem a nomenclatura a alguma norma $\|\cdot\|_p$ específica. A soma (como conjuntos) de dois subespaços fechados num espaço de Banach pode não ser fechado veja o Exercício 23.11.

Soma direta de espaços e espaços quocientes possuem muitas aplicações, por exemplo em Teoria Espectral, W^* -álgebras comutativas, representações de C^* -álgebras, Teoria Quântica de Campos, etc. Há também a noção de *integral direta* de

espaços de Hilbert (introduzida por J. von Neumann), generalizando a soma direta. Pode-se definir, também, a *soma direta de operadores*. Uma construção não tratada aqui, mas também importante em alguns contextos, é o *produto tensorial de espaços*, o qual consiste, de forma muito simplificada, na generalização do produto de funções definidas em diferentes conjuntos. Em [Blank, Ex & Havl (1994)] pode-se ter contato com tais construções e encontrar extensa lista de referências.

Há demonstrações do Teorema do Gráfico Fechado que não fazem uso explícito do Teorema da Aplicação Aberta; veja, por exemplo, V Trénoigne, *Analyse Fonctionnelle*, Moscou, Mir, 1985

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 23.4. Mostre que se algum \mathcal{N}_i não for completo, então $\bigoplus_p \mathcal{N}_i$ não é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

EXERCÍCIO 23.5. Se J é um conjunto finito, mostre que todas as normas $\|\cdot\|_p$ são equivalentes na soma direta.

EXERCÍCIO 23.6. Mostre que $\bigoplus_p \mathcal{N}_i$, $1 \leq p < \infty$, é separável se, e somente se, J é contável e cada \mathcal{N}_i é separável. É o caso $p = \infty$?

EXERCÍCIO 23.7. Se E é um subespaço fechado de \mathcal{B} , use o Teorema da Aplicação Aberta para mostrar que a aplicação $(\mathcal{B}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathcal{B}/E, \|\cdot\|_Q)$, $\xi \mapsto [\xi]$, é aberta.

EXERCÍCIO 23.8. Use o seguinte roteiro para mostrar que se E é um subespaço fechado de \mathcal{B} e E^0 o seu anulador, definido no Exercício 12.9, então $E^0 = (\mathcal{B}/E)^*$. com (como sempre) igualdade significando que esses espaços são isomorfos entre si.

- a) Verifique diretamente que se $f \in (\mathcal{B}/E)^*$ então $f \circ [\]_E \in E^0$ (com $(f \circ [\]_E)(\xi) = f([\xi]_E)$), e que a aplicação $A : (\mathcal{B}/E)^* \rightarrow E^0$, $A(f) := f \circ [\]_E$ é uma isometria linear
- b) Se $h \in E^0$, mostre que $f : \mathcal{B}/E \rightarrow \mathbb{F}$, $f([\xi]_E) := h(\xi)$ está bem-definido e é linear. Mostre então que para todo $\eta \in E$,

$$|f([\xi]_E)| = |h(\xi + \eta)| \leq \|h\| \|\xi + \eta\|$$

e, portanto, $\|f\| \leq \|h\|$. Conclua que $f \in (\mathcal{B}/E)^*$, $A(f) = h$, e que A é o isomorfismo procurado.

EXERCÍCIO 23.9. Se E é um subespaço fechado de \mathcal{H} , mostre que \mathcal{H}/E é isomorfo a E^\perp . Explicitamente, mostre que a aplicação $[\]_E : E^\perp \rightarrow \mathcal{H}/E$ é um isomorfismo isométrico. Conclua que \mathcal{H}/E é Hilbert e que $(\mathcal{H}/E)^*$ é isomorfo a E^\perp . Compare com o Exercício 23.8.

EXERCÍCIO 23.10. Sejam K um subconjunto finito de \mathbb{N} , $1 \leq p \leq \infty$ e $E_K = \{\xi \in l^p(\mathbb{N}) : \xi_k = 0, \forall k \in K\}$. Mostre que E_K é fechado e que $l^p(\mathbb{N})/E_K$ pode ser identificado (ou seja, é isomorfo, como espaço normado) com o próprio $l^p(\mathbb{N})$. E se K for infinito?

EXERCÍCIO 23.11. É interessante observar que o subespaço soma $E_1 + E_2 = \{\xi + \eta, \xi \in E_1, \eta \in E_2\}$ de dois subespaços fechados E_1, E_2 de um espaço de Banach não é necessariamente fechado. Defina E_1 como os $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2(\mathbb{N})$ de modo que $\xi_{2j-1} = 0$, para todo j , e E_2 como o subespaço dos ξ com $\xi_{2j} = j\xi_{2j-1}$ em $l^2(\mathbb{N})$.

(a) Mostre que E_1, E_2 são subespaços fechados.

(b) Verifique que qualquer sequência em $E_1 + E_2$ pode ser escrita na seguinte forma única

$$\xi = (0, \xi_2 - \xi_1, 0, \xi_4 - 2\xi_3, 0, \xi_6 - 3\xi_5, \dots) + (\xi_1, \xi_1 - \xi_3, 2\xi_3, \xi_5, 3\xi_5, \dots).$$

(c) Verifique que $E_1 + E_2$ contém todas as sequências que possuem apenas um número finito de entradas não-nulas; conclua que $E_1 + E_2$ é denso em $l^2(\mathbb{N})$.

(d) Verifique que $\xi = (1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, 1/4, 0, \dots)$ pertence a $l^2(\mathbb{N})$ mas não a $E_1 + E_2$; conclua que essa soma não é fechado em $l^2(\mathbb{N})$.

Capítulo 24

Operadores Compactos

Inicia-se agora um estudo mais detalhado de algumas classes de operadores limitados em espaços normados; este Capítulo destina-se à introdução e propriedades básicas dos chamados operadores compactos.

Os operadores compactos possuem algumas características similares àquelas dos operadores em espaços de dimensão finita e, assim, sua teoria apresenta simplificações em vários aspectos técnicos; não obstante, esses operadores são importantes em muitas aplicações, sendo que frequentemente aparecem na forma de operadores integrais, um exemplo historicamente importante de operador compacto.

É conveniente recordar algumas definições e propriedades, na forma de exercícios, da teoria de espaços métricos. Um conjunto A num espaço métrico (X, d) é *relativamente compacto*, ou *precompacto*, se seu fecho \bar{A} é compacto. A é *totalmente limitado* se, para todo $\varepsilon > 0$, A está contido numa união finita de bolas abertas em X de raio ε ; logo, qualquer conjunto totalmente limitado é também limitado.

EXERCÍCIO 24.1. Mostre que se $A \subset (X, d)$ é precompacto, então A é totalmente limitado e, assim, limitado.

EXERCÍCIO 24.2. Se $A \subset (X, d)$ é totalmente limitado, mostre que, para todo $\varepsilon > 0$, A está contido na união de um número finito de bolas abertas de raio ε centradas em pontos de A . Conclua que um conjunto totalmente limitado é separável (com a topologia induzida).

Lema 24.1. *Todo conjunto totalmente limitado num espaço métrico completo é precompacto.*

Demonstração. Seja A totalmente limitado; então seu fecho também é totalmente limitado (pois modificando uma cobertura do conjunto com os mesmos centros mas com raios dobrados sobre o fecho do conjunto). Como este conjunto está contido num espaço métrico completo, para mostrar que seu fecho é compacto basta verificar que toda sequência $(\xi_n) \subset \bar{A}$ possui subsequência de Cauchy. Sendo esse conjunto totalmente limitado, existe uma subsequência $(\xi_{1,n})$ de (ξ_n) contida numa bola aberta de raio 1. Da mesma forma, existe uma subsequência $(\xi_{2,n})$ de $(\xi_{1,n})$ contida numa bola aberta de raio $1/2$; constrói-se, assim, subsequências $(\xi_{k,n})_{n \geq 1}$ de $(\xi_{k-1,n})_{n \geq 1}$ contida numa bola aberta de raio $1/k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Termina-se a demonstração ao observar-se que $(\xi_{k,k})_{k \geq 1}$ é, de fato, uma subsequência de Cauchy da sequência original. ■

Definição 24.2. Um operador linear $T : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ é *compacto*, também chamado de *completamente contínuo*, se a imagem $T(A)$, de todo subconjunto limitado $A \subset \mathcal{N}_1$, é precompacta em \mathcal{N}_2 . O conjunto desses operadores compactos é denotado por $B_0(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ (ou simplesmente $B_0(\mathcal{N})$, no caso em que $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}$).

OBSERVAÇÃO 24.3. De forma equivalente, $T : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ linear é compacto se $(T\xi_n)$ possui subsequência convergente em \mathcal{N}_2 para toda sequência limitada $(\xi_n) \subset \mathcal{N}_1$. Confira!

EXERCÍCIO 24.3. Se $\dim \mathcal{N} = \infty$, mostre que o operador identidade $1 : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ não é compacto.

Proposição 24.4. *Sejam \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 espaços normados e T e S operadores lineares limitados entre estes espaços normados. Então:*

- i.) $B_0(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é um subespaço vetorial de $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$.
- ii.) Se T é compacto, então TS e ST são operadores compactos (supondo bem-definidas tais operações).

Demonstração. i.) Seja $T \in B_0(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$; como $T(S(0, 1))$ é precompacto, segue que também é limitado. Assim, $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. Verificar que $B_0(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é subespaço vetorial fica para os leitores.

ii.) Se A é um conjunto limitado, então $S(A)$ também é limitado e, assim, $T(S(A))$ é precompacto. Portanto, TS é compacto.

Dado um conjunto limitado A , a imagem por T de qualquer sequência $(\xi_n) \subset A$ possui subsequência $(T\xi_{n_j})$ convergente, pois T é compacto. Como S é contínuo, $(ST\xi_{n_j})$ também é convergente. Assim, $ST(A)$ é precompacto e ST é um operador compacto. ■

OBSERVAÇÃO 24.5. Uma aplicação entre espaços métricos é chamada de compacta, se leva conjuntos limitados em conjuntos precompactos. A função de Dirichlet $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = 1$ se $t \in \mathbb{Q}$ e $h(t) = 0$ de outra forma, é compacta, mas não é contínua em qualquer ponto de seu domínio. Compare com a Proposição 24.4.

Exemplos importantes de operadores compactos são os operadores de posto finito.

Definição 24.6. Um operador $T \in B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é dito ser de *posto finito* se $\dim \text{img } T < \infty$. O espaço vetorial dos operadores de posto finito entre esses espaços será denotado por $B_f(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ (também será usada a notação óbvia $B_f(\mathcal{N})$).

Proposição 24.7. *Todo operador de posto finito é compacto.*

Demonstração. Sejam $T \in B_f(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ e $A \subset \mathcal{N}_1$ um conjunto limitado. Como T é um operador limitado, $T(A)$ é limitado e seu fecho $\overline{T(A)}$ é um conjunto fechado e limitado e, como $\dim \text{img } T < \infty$, vem que $\overline{T(A)}$ é compacto. ■

Corolário 24.8. *Se \mathcal{N} é um espaço normado, então seu dual é $\mathcal{N}^* = B_0(\mathcal{N}, \mathbb{F})$.*

Uma propriedade de operadores compactos muito usada, tanto no desenvolvimento teórico como em aplicações, aparece na

Proposição 24.9. *Seja $T \in B_0(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$. Se $\xi_n \rightarrow \xi$ em \mathcal{N}_1 , então $T\xi_n \rightarrow T\xi$, ou seja, um operador compacto leva sequências fracamente convergentes em sequências fortemente convergentes.*

Demonstração. Suponha que $\xi_n \rightarrow \xi$ em \mathcal{N}_1 ; pela Proposição 14.3 $\{\xi_n\}$ é um conjunto limitado. Se $g \in \mathcal{N}_2^*$

$$g(T\xi_n) = (T^*g)(\xi_n) \rightarrow (T^*g)(\xi) = g(T\xi),$$

mostrando que $T\xi_n \rightarrow T\xi$. Se $T\xi_n$ não converge fortemente a $T\xi$, existe $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $(T\xi_{n_j})$ com $\|T\xi_{n_j} - T\xi\| \geq \varepsilon$. Como T é um operador compacto, $T\xi_{n_j}$ possui uma subsequência fortemente convergente e, como $T\xi_n \rightarrow T\xi$, necessariamente deve convergir a $T\xi$. Esta contradição com a desigualdade acima demonstra a proposição. ■

Exemplo 24.10. O operador identidade em $l^1(\mathbb{N})$ não é compacto, contudo todo operador linear limitado em $l^1(\mathbb{N})$ leva seqüências fracamente convergentes em fortemente convergentes, pois neste caso a convergência fraca é equivalente à convergência forte (veja o Exemplo 14.11); assim, essa propriedade não pode ser usada para caracterizar os operadores compactos. Contudo, veja a Proposição 25.6 que trata de espaços reflexivos. •

Teorema 24.11. $B_0(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ é um subespaço fechado de $B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$. Portanto, $B_0(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $(T_n) \subset B_0(\mathcal{N}, \mathcal{B})$, com $T_n \rightarrow T$ em $B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$. Será mostrado que para todo $r > 0$ o conjunto $TB(0; r)$ é totalmente limitado e, portanto, precompacto pelo Lema 24.1. Disto seguirá que T também é um operador compacto.

Fixe $r > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe n de forma que $\|T_n - T\| < \varepsilon/r$. Sendo T_n compacto, o conjunto $T_n B(0; r)$ é totalmente limitado e, assim, está contido numa união de certas bolas

$$B(T_n \xi_1; \varepsilon), B(T_n \xi_2; \varepsilon), \dots, B(T_n \xi_m; \varepsilon),$$

com $\xi_j \in B(0; r)$, para todo $1 \leq j \leq m$. Assim, se $\xi \in B(0; r)$, existe um desses ξ_j em que $T_n \xi \in B(T_n \xi_j; \varepsilon)$. A partir disto

$$\begin{aligned} \|T\xi - T\xi_j\| &\leq \|T\xi - T_n\xi\| + \|T_n\xi - T_n\xi_j\| + \|T_n\xi_j - T\xi_j\| \\ &< \|T - T_n\| \|\xi\| + \varepsilon + \|T_n - T\| \|\xi_j\| \\ &< \frac{\varepsilon}{r} r + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{r} r = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

mostrando que $TB(0, r) \subset \bigcup_{j=1}^m B(T_n \xi_j; 3\varepsilon)$. Portanto $TB(0; r)$ é totalmente limitado para todo $r > 0$. ■

Corolário 24.12. Se $(T_n) \subset B_f(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ e $T_n \rightarrow T$ em $B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$, então o operador T é compacto.

Demonstração. Combine a Proposição 24.7 e o Teorema 24.11 (veja o Exemplo 24.16 e a Proposição 25.6 para resultados correlatos). ■

Exemplo 24.13. Seja $(e_n)_{n \geq 1}$ uma base ortonormal do espaço de Hilbert separável \mathcal{H} ; lembre-se que todo elemento $\xi \in \mathcal{H}$ se escreve na forma $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, \xi \rangle e_n$. Dados uma sequência limitada $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{F}$ e o operador linear $T \in B(\mathcal{H})$ com $T e_n = a_n e_n$, implicando em

$$T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, \xi \rangle e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, \xi \rangle a_n e_n,$$

segue então que T é compacto se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. De fato, se $a_n \rightarrow 0$, definindo

$$T_N \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, \xi \rangle a_n e_n \right) = \sum_{n=1}^N \langle e_n, \xi \rangle a_n e_n,$$

o qual é de posto finito para todo N e, por Pitágoras e Parseval, $\|T_N \xi - T \xi\|^2 = \|\sum_{n > N} \langle e_n, \xi \rangle a_n e_n\|^2 \leq (\sup_{n > N} |a_n|^2) \|\xi\|^2$ mostrando que $T_N \rightarrow T$ e então concluindo que T é compacto. Se a_n não converge a zero, existe $\varepsilon > 0$ em que $J = \{j \in \mathbb{N} : |a_j| \geq \varepsilon\}$ é infinito: assim, para $j, k \in J$, $\|T e_j - T e_k\|^2 = |a_j|^2 + |a_k|^2 \geq 2\varepsilon^2$ e a sequência $(T e_j)_{j \in J}$ não possui subsequência de Cauchy, embora $(e_j)_{j \in J}$ seja limitada, concluindo que T não é compacto. •

EXERCÍCIO 24.4. Mostre que o operador $T : l^p(\mathbb{N}) \rightarrow l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, $T(\xi_j) = (\xi_j/j)$ é compacto.

Exemplo 24.14. Seja $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ uma base ortonormal do espaço de Hilbert separável \mathcal{H} . Se $P_N : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador

$$P_N \xi = P_N \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, \xi \rangle e_j \right) = \sum_{j=1}^N \langle e_j, \xi \rangle e_j,$$

então cada P_N é compacto, $P_N \xrightarrow{s} 1$, mas 1 não é compacto. Assim, a convergência uniforme não pode ser substituída por convergência forte no Teorema 24.11. •

Exemplo 24.15. Entre os principais exemplos de operadores compactos estão os operadores integrais $T_K : C[a, b] \leftrightarrow$,

$$(T_K\psi)(t) = \int_a^b K(t, s) \psi(s) ds, \quad \psi \in C[a, b],$$

com $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbf{F}$ contínuo. T_K é denominado *operador integral com núcleo* K . Veja também os Exemplos 25.4 e 25.5. •

Demonstração. Denote por $Q = [a, b] \times [a, b]$ e a estimativa $M = \max_{(t,s) \in Q} |K(t, s)| < \infty$. Tem-se que $\|T_K\psi\|_\infty \leq M(b-a)\|\psi\|_\infty$, ou seja, $\|T_K\| \leq M(b-a)$ e, portanto, para $\psi \in B(0; R)$ vale $\|T_K\psi\|_\infty \leq M(b-a)R$ e T_K é uniformemente limitado nessa bola (para cada $R > 0$ fixo). A idéia é aplicar o Teorema de Ascoli a $T_K B(0; R)$, sendo então necessário mostrar que esse conjunto é equicontínuo.

Como K é uniformemente contínuo em Q , pois Q é compacto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma que $|K(t, s) - K(r, s)| < \varepsilon$ se $|t - r| < \delta$ (independente de s). Assim, se $\psi \in B(0; R)$ e $|t - r| < \delta$,

$$\begin{aligned} |(T_K\psi)(t) - (T_K\psi)(r)| &\leq \int_a^b |K(t, s) - K(r, s)| |\psi(s)| ds \\ &\leq \varepsilon(b-a)\|\psi\|_\infty \leq \varepsilon(b-a)R, \end{aligned}$$

mostrando que $T_K B(0; R)$ é equicontínuo. Portanto, pelo Teorema de Ascoli, $T_K B(0; R)$ é precompacto; como vale para todo $R > 0$, o operador integral $T_K : C[a, b] \leftrightarrow$ é compacto. ■

Exemplo 24.16. Este exemplo mostra que a hipótese de \mathcal{B} ser completo não pode ser omitida no Corolário 24.12 (nem no Teorema 24.11; veja também o Exercício 24.12). Sejam $\mathcal{B}_1 = C^1[0, 1]$ com a norma $\|\psi\| = \|\psi\|_\infty + \|\psi'\|_\infty$, $\mathcal{N}_1 = C^1[0, 1]$ com a norma $\|\psi\|_\infty$ e $I \in \mathcal{B}(\mathcal{B}_1, \mathcal{N}_1)$ dado por $I(\psi) = \psi$; ambos, \mathcal{B}_1 e \mathcal{N}_1 são tomados reais. Note que $\|I\| = 1$, mas este operador não é compacto; de fato, basta considerar uma seqüência limitada em \mathcal{B}_1 de funções continuamente diferenciáveis convergindo uniformemente a, por exemplo, $\psi(t) = |t - \frac{1}{2}|$, a qual não pertence a \mathcal{N}_1 . Portanto, o fecho de $I(\psi_n)$ não possui subsequência convergente.

Defina a sequência $(\text{Ber}_n) \subset \text{Br}(\mathcal{B}_1, \mathcal{N}_1)$ através dos polinômios de Bernstein, sendo $C_{n,k} = \binom{n}{k}$,

$$(\text{Ber}_n \psi)(t) = \sum_{k=0}^n C_{n,k} \psi\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}, \quad \psi \in \mathcal{B}_1.$$

O objetivo é mostrar que $\text{Ber}_n \rightarrow \text{I}$, completando o exemplo.

Diferenciando o binômio de Newton $\sum_{k=0}^n C_{n,k} t^k (1-t)^{n-k} = 1$, multiplicando então por $t(1-t)$, obtém-se

$$\sum_{k=0}^n C_{n,k} t^k (1-t)^{n-k} (k-nt) = 0.$$

Diferenciando essa última relação e usando o binômio novamente obtém-se $\sum_{k=0}^n C_{n,k} t^{k-1} (1-t)^{n-k-1} (k-nt)^2 = n$; finalmente, multiplicando-se tal expressão por $t(1-t)$ chega-se à relação procurada (reserve!)

$$\sum_{k=0}^n C_{n,k} t^k (1-t)^{n-k} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 = \frac{t(1-t)}{n}.$$

Agora, se $\|\psi\| \leq 1$, tem-se, usando novamente a expressão do binômio,

$$(\text{I} - \text{Ber}_n)(\psi)(t) = \sum_{k=0}^n C_{n,k} \left(\psi(t) - \psi\left(\frac{k}{n}\right)\right) t^k (1-t)^{n-k},$$

e como $|\psi(t) - \psi(s)| \leq |t - s|$, para todos $t, s \in [0, 1]$, conclui-se que

$$\|(\text{I} - \text{Ber}_n)\psi\| \leq \sum_{k=0}^n C_{n,k} \left|t - \frac{k}{n}\right| t^k (1-t)^{n-k}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, para cada $t \in [0, 1]$ divida essa soma em Σ' e Σ'' , sendo a primeira restrita aos valores de k com $|t - \frac{k}{n}| < \varepsilon$ e a segunda ao seu complementar. Assim, $\Sigma' \leq \varepsilon$ e da relação deduzida acima segue que

$$\varepsilon^2 \sum_{|t - \frac{k}{n}| \geq \varepsilon} C_{n,k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \frac{t(1-t)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

Lembrando que $|t - \frac{k}{n}| \leq 1$, obtém-se

$$\sum'' \leq \sum_{|t - \frac{k}{n}| \geq \varepsilon} C_{n,k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

e para $n > 1/(4\varepsilon^3)$ tem-se, para todo $t \in [0, 1]$, $\sum'' \leq \varepsilon$. Portanto, $\|(I - \text{Ber}_n)\psi\| \leq 2\varepsilon$ se $n > 1/(4\varepsilon^3)$, para todo ψ com $\|\psi\| = 1$, mostrando que $\text{Ber}_n \rightarrow I$. •

Notas

Em seus estudos de equações lineares, Hilbert costumava usar formas bilineares, principalmente em l^2 , com destaque para uma classe que ele chamava de *completamente contínua*; originalmente, completamente contínuo se referia a operadores que transformavam seqüências fracamente convergentes em fortemente convergentes; alguns autores ainda seguem esta nomenclatura, diferenciando-os dos operadores compactos. Essa noção foi adaptada para espaços l^p , com $p \neq 2$, por F. Riesz que, em 1918, notou que a propriedade importante era que esses operadores transformavam conjuntos limitados em precompactos, daí o termo *operador compacto*. A adaptação desse conceito para operadores entre espaços normados em geral foi imediata. Atualmente esta última definição é a adotada na maioria dos textos, e neste em particular (essas duas definições são equivalentes?). Esse trabalho de Riesz de 1918 apresentou muito da teoria estudada atualmente, incluindo resultados que serão tratados no Capítulo sobre a teoria espectral de operadores compactos.

Os polinômios de Bernstein, bem como partes técnicas do Exemplo 24.16, são utilizados em uma forma de se demonstrar o famoso Teorema de Weierstrass sobre aproximações uniformes de funções contínuas por polinômios; veja [Simmons (1963)].

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 24.5. Mostre que $T \in B(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ é compacto se, e somente se, $T(A)$ é totalmente limitado para todo subconjunto limitado A de \mathcal{N} .

EXERCÍCIO 24.6. a) Mostre que se $T \in B_0(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, então $T(\mathcal{N}_1)$ é separável.

b) Mostre que $T: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ linear é compacto se, e somente se, $TB(0, 1)$ é precompacto em \mathcal{N}_2 .

EXERCÍCIO 24.7. Seja $T: \text{dom } T \subset \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{B}$ um operador compacto. Se $\text{dom } T$ é denso em \mathcal{N} , mostre que sua extensão $\bar{T}: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{B}$ também é compacta (veja o Teorema 4.7).

EXERCÍCIO 24.8. Suponha que $T \in B(\mathcal{B})$ satisfaça alguma das seguintes relações (veja Exercício 4.14): a) $T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0I = 0$, $a_0 \neq 0$; b) $\cos T = 0$; c) $\exp(aT) + I = 0$, com $a \neq 0$. Mostre que T é compacto se, e somente se, $\dim \mathcal{B} < \infty$.

EXERCÍCIO 24.9. Sob quais condições $B_0(\mathcal{N}) = B(\mathcal{N})$?

EXERCÍCIO 24.10. Sejam $a, b : [a_0, b_0] \rightarrow [a_0, b_0]$ e $K : [a_0, b_0] \times [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{F}$ funções contínuas. Mostre que o operador $T_K : C[a_0, b_0] \rightarrow C[a_0, b_0]$,

$$(T_K \psi)(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} K(t, s) \psi(s) ds, \quad \psi \in C[a_0, b_0],$$

é compacto.

EXERCÍCIO 24.11. Seja $T \in B_0(\mathcal{N})$ bijetor, com $\dim \mathcal{N} = \infty$. Mostre que T^{-1} não é limitado.

EXERCÍCIO 24.12. Complemente o Teorema 24.11: mostre que $B_0(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é completo se, e somente se, \mathcal{N}_2 é Banach. Conclua que $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é completo se, e somente se, $B_0(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ é completo

EXERCÍCIO 24.13. Se $0 \neq \phi \in L^2[a, b]$ é limitada, mostre que o operador de multiplicação por ϕ , $\mathcal{M}_\phi : L^2[a, b] \rightarrow (M_\phi \psi)(t) = \phi(t)\psi(t)$, $\psi \in L^2[a, b]$, não é um operador compacto

EXERCÍCIO 24.14. a) Se $T \in B_0(\mathcal{B})$ e E é um subespaço vetorial fechado de \mathcal{B} , invariante por T , mostre que a restrição $T|_E$ é compacta

b) Se $0 \neq \phi \in C[a, b]$, mostre que o operador de multiplicação $\mathcal{M}_\phi : C[a, b] \rightarrow (M_\phi \psi)(t) = \phi(t)\psi(t)$, $\psi \in C[a, b]$, não é um operador compacto.

EXERCÍCIO 24.15. Este é o Exercício 8 10 com linguagem mais apropriada. Se $T \in B_0(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, mostre que $\text{img } T$ não contém subespaço fechado de \mathcal{B}_2 de dimensão infinita. Conclua que se T for sobrejetor, então $\dim \mathcal{B}_2 < \infty$.

Capítulo 25

Operadores Compactos em Espaços de Hilbert

Algumas propriedades de operadores compactos em espaços de Hilbert são discutidas neste Capítulo. Ao final, adapta-se um resultado conhecido para adjuntos de Hilbert, mostrando que um operador linear limitado entre espaços normados é compacto se, e somente se, seu adjunto de Banach é compacto.

Num espaço de Hilbert o fecho (com a norma usual de $B(\mathcal{H})$) do espaço vetorial dos operadores de posto finito coincide com o conjunto dos operadores compactos; para mostrar isto será usado o seguinte resultado técnico, o qual também tem interesse próprio.

Lema 25.1. *Se $T \in B_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então $\text{img } T$ e $N(T)^\perp$ são subespaços separáveis de \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_1 , respectivamente.*

Demonstração. Que $\text{img } T$ é separável aparece no Exercício 24.6, deixado a cargo dos leitores. Seja $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma base ortonormal de $N(T)^\perp$. Se J é finito o resultado é claro.

Suponha que J não é finito; o objetivo é mostrar que J é enumerável (veja o Exercício 21.2). Toda sequência $(e_{\alpha_j})_{j=1}^\infty$ de elementos dois a dois distintos de $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ converge fracamente a zero (Exercício 21.5) e, pela Proposição 24.9, vem que $T e_{\alpha_j} \rightarrow 0$, para $j \rightarrow \infty$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe apenas um número finito de $\alpha \in J$ com $\|T e_\alpha\| \geq 1/n$. Portanto, J é enumerável, pois

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha : \|T e_\alpha\| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Lembre-se que $Te_\alpha \neq 0$, para todo $\alpha \in J$, já que $e_\alpha \in N(T)^\perp$. ■

Teorema 25.2. *Um operador $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é compacto se, e somente se, existe uma seqüência de operadores de posto finito (T_n) (ou seja, em $B_f(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$) que converge a T em $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.*

Demonstração. Se T é o limite de operadores de posto finito, então T é compacto pelo Corolário 24.12. Sejam $T \in B_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e P o projetor ortogonal sobre $N(T)^\perp$, de forma que $T = TP$. Se $\dim N(T)^\perp < \infty$ o resultado é claro; suponha então que se tenha $\dim N(T)^\perp = \infty$ e escolha uma base ortonormal $(e_j)_{j=1}^\infty$ de $N(T)^\perp$, a qual é enumerável pelo Lema 25.1. Denote por P_n o projetor ortogonal sobre $\text{Lin}(\{e_1, \dots, e_n\})$. Assim, o operador $T_n = TP_n$ é de posto finito. Será mostrado que $T_n \rightarrow T$.

Para cada n existe $\xi_n \in \mathcal{H}_1$, $\|\xi_n\| = 1$, satisfazendo

$$\frac{1}{2}\|T - T_n\| \leq \|(T - T_n)\xi_n\| = \|T(P - P_n)\xi_n\|.$$

Como $(P_n - P) \xrightarrow{s} 0$ e para todo $\eta \in \mathcal{H}_1$

$$|\langle \eta, (P - P_n)\xi_n \rangle| = |\langle (P - P_n)\eta, \xi_n \rangle| \leq \|(P - P_n)\eta\|,$$

tem-se que $(P - P_n)\xi_n \xrightarrow{w} 0$. Sendo T um operador compacto, pela Proposição 24.9 segue que $T(P - P_n)\xi_n \rightarrow 0$ e, da desigualdade acima, segue que $\|T - T_n\| \rightarrow 0$. ■

EXERCÍCIO 25.1. Seja $T \in B(\mathcal{H})$, com \mathcal{H} separável. Mostre que existe uma seqüência (T_n) de operadores de posto finito que converge fortemente a T , ou seja, $T_n \xrightarrow{s} T$.

Corolário 25.3. *Seja $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Então T é compacto se, e somente se, seu adjunto de Hilbert T^* é compacto.*

Demonstração. T é compacto se, e somente se, existe uma seqüência $(T_n) \subset B_f(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ de forma que $T_n \rightarrow T$. Como T_n^* também é de posto finito (Exercício 25.4) e $\|T^* - T_n^*\| = \|(T - T_n)^*\| = \|T - T_n\|$, conclui-se que T é compacto se, e somente se, T^* é compacto. ■

Os próximos exemplos estão relacionados ao Exemplo 24.15.

Exemplo 25.4. Seja $K : Q \rightarrow \mathbb{F}$ contínuo, em que $Q = [a, b] \times [a, b]$. Então o operador integral $T_K : L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$ dado por

$$(T_K\psi)(t) = \int_a^b K(t, s)\psi(s) ds, \quad \psi \in L^2[a, b].$$

é compacto. •

Demonstração. Para cada $t \in [a, b]$ a função $s \mapsto K(t, s)$ é um elemento de $L^2[a, b]$. Sejam $\psi \in B(0; R) \subset L^2[a, b]$ e $M = \max_{(t,s) \in Q} |K(t, s)|$. Para todo $t \in [a, b]$ tem-se

$$\begin{aligned} |(T_K\psi)(t)| &\leq \int_a^b |K(t, s)| |\psi(s)| ds \\ &\leq \left(\int_a^b |K(t, s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_2 \leq M\sqrt{b-a} R, \end{aligned}$$

assim $\|T_K\psi\|_2 \leq M(b-a)R$ e $T_K B(0; R)$ é um conjunto limitado. Este conjunto também é equicontínuo, pois, de forma análoga ao Exemplo 24.15, para $\psi \in B(0; R)$

$$\begin{aligned} |(T_K\psi)(t) - (T_K\psi)(r)| &\leq \|K(t, \cdot) - K(r, \cdot)\|_2 \|\psi\|_2 \\ &\leq \varepsilon\sqrt{b-a} R, \end{aligned}$$

se $|t - r| < \delta$. Portanto, pelo Teorema de Ascoli, $T_K B(0; R)$ é precompacto em $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. Como $\|\phi\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|\phi\|_\infty$, para toda ϕ contínua (em particular para $\phi = T_K\psi$), segue que $T_K B(0; R)$ é precompacto em $L^2[a, b]$. ■

EXERCÍCIO 25.2. Mostre que um conjunto precompacto (resp. compacto) em $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ é precompacto (resp. compacto) em $L^2[a, b]$. Isto decorre porque a identidade $1 : (C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow L^2[a, b]$ é contínua.

Exemplo 25.5. Seja $K \in L^2(Q)$, em que $Q = [a, b] \times [a, b]$. Então o operador linear integral $T_K : L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$ dado por $(T_K\psi)(t) = \int_a^b K(t, s)\psi(s) ds$, para $\psi \in L^2[a, b]$, é compacto. •

Demonstração. Como o conjunto das funções contínuas em Q é denso em $L^2(Q)$, existe uma sequência $K_n : Q \rightarrow \mathbb{F}$ de funções contínuas de modo que $\|K - K_n\|_{L^2(Q)} \rightarrow 0$. Assim, definindo $T_n : L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$

$$(T_n\psi)(t) = \int_a^b K_n(t, s)\psi(s) ds, \quad \psi \in L^2[a, b],$$

e usando estimativas similares àquelas dos exemplos anteriores, obtém-se

$$\|T_n\psi - T_K\psi\|_2 \leq \|K_n - K\|_{L^2(Q)} \|\psi\|_2,$$

e logo

$$\|T_n - T_K\| \leq \|K_n - K\|_{L^2(Q)},$$

o qual se anula para $n \rightarrow \infty$. Pelo Exemplo 25.4 sabe-se que cada T_n é um operador compacto, o que possibilita concluir que T_K é compacto (Teorema 24.11). ■

No caso de espaços reflexivos, e de Hilbert em particular, pode-se dizer muito mais do que a Proposição 24.9. Veja o Exemplo 24.10 para o caso de um espaço de Banach que não é reflexivo em que a caracterização de operadores compactos a seguir não vale.

Proposição 25.6. *Sejam B um espaço de Banach reflexivo e T um operador em $B(B, \mathcal{N})$. Então T é compacto se, e somente se, $(T\xi_n)$ é convergente em \mathcal{N} para toda sequência (ξ_n) fracamente convergente em B . Note que esta caracterização vale se B é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Se $\dim B < \infty$ a demonstração é simples. Suponha que $\dim B = \infty$. Levando-se em conta as hipóteses e a Proposição 24.9, basta mostrar que para toda sequência limitada (ξ_n) em B a sequência $(T\xi_n)$ possui subsequência convergente. Pelo Teorema 16.5, (ξ_n) possui subsequência (ξ_{n_j}) fracamente convergente; por hipótese, $(T\xi_{n_j})$ é convergente. Assim, a imagem de toda sequência limitada admite subsequência convergente, ou seja, T é um operador compacto. ■

Devido ao Corolário 25.3, surge naturalmente a questão sobre a relação entre um operador compacto T , entre espaços normados, e seu adjunto de Banach T^a . O seguinte resultado esclarece tal questão.

Teorema 25.7. *Sejam \mathcal{E} e \mathcal{N} espaços normados. Então $T \in B(\mathcal{E}, \mathcal{N})$ é compacto se, e somente se, seu adjunto T^a é compacto.*

Demonstração. Lembre-se que $T^a \in B(\mathcal{N}^*, \mathcal{E}^*)$. Suponha que $T \in B(\mathcal{E}, \mathcal{N})$ seja compacto. Para cada $r > 0$, denote $B_r = \overline{B_{\mathcal{E}}(0; r)}$ e $B_r^* = \overline{B_{\mathcal{N}^*}(0; r)}$. Para concluir que T^a é compacto, será mostrado que $(T^a g_n)$ possui subsequência convergente em \mathcal{E}^* para qualquer sequência (g_n) em B_r^* (para qualquer $r > 0$ fixo).

Seendo T compacto, $\overline{TB_1} \subset \mathcal{N}$ é um conjunto compacto. Como para todos $\eta, \zeta \in \mathcal{N}$

$$|g_n(\eta) - g_n(\zeta)| \leq \|g_n\| \|\eta - \zeta\| \leq r \|\eta - \zeta\|,$$

segue que (g_n) é equicontínuo em \mathcal{N} . Para $\eta \in TB_1$ tem-se $|g_n(\eta)| \leq \|g_n\| \|\eta\| \leq r\|T\|$, para todo n , e por continuidade vale também para todo $\eta \in \overline{TB_1}$, mostrando que $\{g_n(\overline{TB_1})\}$ é uniformemente limitado. Pelo Teorema de Ascoli, (g_n) é um subconjunto precompacto de $C(\overline{TB_1})$ e possui subsequência de Cauchy nesse espaço. Lembrando que $g_n(T) = T^n(g_n)$,

$$\begin{aligned} \|T^n g_n - T^m g_m\|_{\mathcal{E}^*} &= \sup_{\xi \in B_1} |g_n(T\xi) - g_m(T\xi)| \\ &= \|g_n - g_m\|_{C(TB_1)} \leq \|g_n - g_m\|_{C(\overline{TB_1})}, \end{aligned}$$

e $(T^n g_n)$ possui subsequência de Cauchy em \mathcal{E}^* , logo convergente já que \mathcal{E}^* é completo. Portanto, T^a é compacto.

Suponha agora que T^a seja compacto e denote por $\eta \mapsto \hat{\eta}$ a aplicação canônica de \mathcal{E} em \mathcal{E}^{**} . Pelo exposto acima, T^{aa} é compacto, e se $B_r^{**} = \overline{B_{\mathcal{E}^{**}}}(0; r)$, então $T^{aa} B_r^{**} \subset \mathcal{N}^{**}$ é um conjunto precompacto. Como $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}^{**}$ através da aplicação canônica $\xi \mapsto \hat{\xi}$, $\xi \in \mathcal{N}$, e usando que $\widehat{T\eta} = T^{aa}\hat{\eta}$, para todo $\eta \in \mathcal{E}$, tem-se

$$\widehat{TB_r} \subset T^{aa} B_r^{**},$$

e, portanto, $\widehat{TB_r}$ é um subconjunto precompacto. Como $\hat{\cdot}$ é uma aplicação isométrica (Proposição 12.7), conclui-se que TB_r é precompacto para todo $r > 0$, e T é um operador compacto. ■

EXERCÍCIO 25.3. Sejam \mathcal{E} e \mathcal{N} espaços normados e $T \in B(\mathcal{E}, \mathcal{N})$. Mostre que $\widehat{T\eta} = T^{aa}\hat{\eta}$, para todo $\eta \in \mathcal{E}$.

Notas

A primeira versão do Teorema 25.7 é devida a J. Schauder publicada em 1930. Uma forma alternativa de demonstrá-lo é usando o Teorema de Alaoglu (veja a página 178 de [Conway (1985)]).

Como enunciado no Exercício 25.7, a presença de uma base de Schauder num espaço de Banach garante que todo operador compacto pode ser aproximado, em norma, por operadores de posto finito. O exemplo de Per Enflo, mostrando que há espaços de Banach separáveis (e reflexivos) que não possuem uma base de Schauder, consistiu em mostrar que existem casos em que o conjunto dos operadores de posto finito não é denso no conjunto dos operadores compactos. Veja as Notas do Capítulo 3.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 25.4. Seja $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Mostre que T é de posto finito se, e somente se, seu adjunto de Hilbert T^* é de posto finito, e neste caso tem-se $\dim \text{img } T = \dim \text{img } T^*$.

EXERCÍCIO 25.5. Dê condições necessárias e suficientes para que um operador de projeção ortogonal num espaço de Hilbert seja compacto.

EXERCÍCIO 25.6. Use o Teorema 25.7 para demonstrar o Corolário 25.3.

EXERCÍCIO 25.7. Mostre que se o espaço de Banach \mathcal{B} possui uma base de Schauder, então valem as conclusões do Teorema 25.2 para caracterizar o conjunto $B_0(\mathcal{B})$.

EXERCÍCIO 25.8. Se X é um espaço métrico compacto, mostre que $B_f(C(X))$ é denso em $B_0(C(X))$. Isto exemplifica que a caracterização de operadores compactos em espaços de Hilbert, dada no Teorema 25.2, pode valer em alguns espaços de Banach não-reflexivos.

EXERCÍCIO 25.9. Use o Teorema 25.7 e o Exercício 13.9 para mostrar que se \mathcal{B} é reflexivo, então $B(c_0(\mathbb{N}), \mathcal{B}) = B_0(c_0(\mathbb{N}), \mathcal{B})$.

EXERCÍCIO 25.10. Sejam $T \in B(\mathcal{H})$ e (T_n) uma seqüência em $B(\mathcal{H})$; mostre que

i) se $T_n \xrightarrow{a} T^*$, então $ST_n \rightarrow ST$ em $B(\mathcal{H})$, para todo operador compacto $S \in B_0(\mathcal{H})$.

ii) se $T_n \xrightarrow{a} T$, então $T_n S \rightarrow TS$ em $B(\mathcal{H})$, para todo operador compacto $S \in B_0(\mathcal{H})$.

iii) considerando os operadores de deslocamento (shift) em $l^2(\mathbb{N})$, verifique que pode ocorrer de uma seqüência de operadores lineares limitados convergir fortemente mas seus respectivos adjuntos não.

EXERCÍCIO 25.11. Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita

a) Se (ξ_j) é uma base ortonormal de \mathcal{H} , mostre que o operador linear $T\xi = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\xi_j, \xi)\xi_j$, com a_j supondo apenas os valores 0 e 1, é limitado. Mostre que a distância, em $B(\mathcal{H})$, entre dois desses operadores (distintos, é claro) é sempre igual a 1. Conclua que $B(\mathcal{H})$ não é separável.

b) Mostre que existe uma seqüência (P_n) de operadores de posto finito em $B(\mathcal{H})$, com $P_n \xrightarrow{a} 1$, e de forma que para todo operador compacto $T \in B_0(\mathcal{H})$ tem-se $P_n T P_n \rightarrow T$. Conclua que $B_0(\mathcal{H})$ é um subconjunto separável de $B(\mathcal{H})$.

EXERCÍCIO 25.12. Denote $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$. Para cada $t \in (0, 1)$ defina $T_t \cdot \mathcal{H} \leftarrow$

$$T_t(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (t\xi_1, t^2\xi_2, t^3\xi_3, \dots).$$

Mostre que cada T_t é compacto, que $w\text{-}\lim_{t \uparrow 1} T_t = 1$ e que para cada operador compacto $S \in B_0(\mathcal{H})$ vale $\lim_{t \uparrow 1} ST_t = S$ em $B(\mathcal{H})$.

EXERCÍCIO 25.13. Se $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e T^*T é compacto, mostre que T é compacto. Use isto para apresentar uma demonstração alternativa de que se $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é compacto, então T^* é compacto.

EXERCÍCIO 25.14. Se \mathcal{B} é reflexivo, mostre que $B(\mathcal{B}, l^1(\mathbb{N})) = B_0(\mathcal{B}, l^1(\mathbb{N}))$.

Capítulo 26

Operadores de Hilbert-Schmidt

Uma das classes mais importantes de operadores compactos em espaços de Hilbert é constituída pelos operadores de Hilbert-Schmidt, discutida neste Capítulo. Muitas vezes, o caminho mais curto para mostrar que um operador é compacto é verificar que ele é Hilbert-Schmidt.

Definição 26.1. Diz-se que um operador $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é de *Hilbert-Schmidt* se existe uma base ortonormal $\{e_j\}_{j \in J}$ de \mathcal{H}_1 com

$$\|T\|_{\text{HS}} := \left(\sum_{j \in J} \|Te_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

O conjunto dos operadores de Hilbert-Schmidt entre esses espaços de Hilbert será denotado por $\text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ou, brevemente, por $\text{HS}(\mathcal{H})$ se $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$.

Proposição 26.2. *Seja $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Então*

- i.) $\|T\|_{\text{HS}}$ não depende da base ortonormal considerada.*
- ii.) $T \in \text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ se, e somente se, seu adjunto $T^* \in \text{HS}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. Além disso, $\|T\|_{\text{HS}} = \|T^*\|_{\text{HS}}$.*

Demonstração. Se $\{e_j\}_{j \in J}$ e $\{f_k\}_{k \in K}$ são bases ortonormais de \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , respectivamente, então, por Parseval,

$$\sum_{j \in J} \|Te_j\|^2 = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} |\langle Te_j, f_k \rangle|^2 = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} |\langle e_j, T^* f_k \rangle|^2 = \sum_{k \in K} \|T^* f_k\|^2.$$

Sendo essas bases arbitrárias, vem que $\|T\|_{\text{HS}} = \|T^*\|_{\text{HS}}$, e tais valores não dependem das bases ortonormais consideradas. ■

Corolário 26.3. *Sejam S, T operadores limitados entre dois espaços de Hilbert. Se um deles é de Hilbert-Schmidt, então o produto TS também é de Hilbert-Schmidt (supondo definido o produto).*

Demonstração. Se S é de Hilbert-Schmidt, então para qualquer base ortonormal $\{e_j\}_{j \in J}$ de seu domínio

$$\|TS\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{j \in J} \|TSe_j\|^2 \leq \|T\|^2 \sum_{j \in J} \|Se_j\|^2 = \|T\|^2 \|S\|_{\text{HS}}^2,$$

e TS é de Hilbert-Schmidt.

Se o operador T é de Hilbert-Schmidt, então pela Proposição 26.2 e da primeira parte deste corolário, vem que S^*T^* é de Hilbert-Schmidt. Como $TS = (S^*T^*)^*$, segue que TS é Hilbert-Schmidt. ■

Teorema 26.4. *$\text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é um subespaço de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e é um espaço de Hilbert com a norma $\|\cdot\|_{\text{HS}}$, chamada norma de Hilbert-Schmidt, a qual é induzida pelo produto interno*

$$\langle T, S \rangle_{\text{HS}} := \sum_{j \in J} \langle Te_j, Se_j \rangle, \quad T, S \in \text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2),$$

sendo $\{e_j\}_{j \in J}$ uma base ortonormal qualquer de \mathcal{H}_1 . Além disso, vale a desigualdade $\|T\| \leq \|T\|_{\text{HS}}$.

Demonstração. Se $T, S \in \text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então para qualquer base ortonormal $\{e_j\}_{j \in J}$ de \mathcal{H}_1 e todo $\alpha \in \mathbb{F}$ tem-se (usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no produto interno $\sum_{j \in J} \|Te_j\| \|Se_j\|$ em l^2 , como utilizado no próximo parágrafo)

$$\begin{aligned} \|T + \alpha S\|_{\text{HS}}^2 &\leq \sum_{j \in J} \|Te_j\|^2 + |\alpha|^2 \sum_{j \in J} \|Se_j\|^2 + 2|\alpha| \sum_{j \in J} \|Te_j\| \|Se_j\| \\ &\leq (\|T\|_{\text{HS}} + |\alpha| \|S\|_{\text{HS}})^2. \end{aligned}$$

mostrando que $\text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é um espaço vetorial. A partir desta mesma desigualdade segue facilmente que $\|\cdot\|_{\text{HS}}$ é uma norma.

Agora será verificado que $\langle T, S \rangle_{\text{HS}}$ está bem-definido e independe da base ortonormal considerada. Por Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} |\langle T e_j, S e_j \rangle| &\leq \sum_{j \in J} \|T e_j\| \|S e_j\| \\ &\leq \left(\sum_{j \in J} \|T e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j \in J} \|S e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|T\|_{\text{HS}} \|S\|_{\text{HS}}, \end{aligned}$$

(note que isso corresponde a $|\langle T, S \rangle_{\text{HS}}| \leq \|T\|_{\text{HS}} \|S\|_{\text{HS}}$) e a série que define $\langle T, S \rangle_{\text{HS}}$ converge absolutamente; as demais propriedades de produto interno são simples de se verificar. Pela identidade de polarização aplicada a $\langle T, S \rangle_{\text{HS}}$ (ou de forma similar à demonstração da Proposição 26.2) vem que

$$\sum_j \langle T e_j, S e_j \rangle = \sum_k \langle S^* f_k, T^* f_k \rangle,$$

para qualquer base ortonormal $\{f_k\}$ de \mathcal{H}_2 , mostrando que $\langle T, S \rangle_{\text{HS}}$ independe da base ortonormal e, portanto, está bem-definido.

Se $\xi \in \mathcal{H}_1$, $\|\xi\| = 1$, tome uma base ortonormal de \mathcal{H}_1 da seguinte forma $\{\xi, \eta_l\}_{l \in M}$. Assim,

$$\|T\xi\|^2 \leq \sum_l \|T\eta_l\|^2 + \|T\xi\|^2 = \|T\|_{\text{HS}}^2,$$

mostrando que $\|T\| \leq \|T\|_{\text{HS}}$.

Resta apenas mostrar que $\text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é completo; para isto, considere uma sequência de Cauchy $(T_n) \subset \text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Da desigualdade $\|\cdot\|_{B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)} \leq \|\cdot\|_{\text{HS}}$ segue que (T_n) é Cauchy em $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e, portanto, converge a algum $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Será mostrado que esse $T \in \text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e que $T_n \rightarrow T$ neste espaço.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ de forma que $\|T_n - T_m\|_{\text{HS}}^2 < \varepsilon$ se $n, m \geq N(\varepsilon)$. Considere uma base ortonormal $\{e_j\}_{j \in J}$ de \mathcal{H}_1 . Se $F \subset J$ é finito,

$$\sum_{j \in F} \|T_n e_j - T_m e_j\|^2 \leq \|T_n - T_m\|_{\text{HS}}^2 < \varepsilon.$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ obtém-se $\sum_{j \in F} \|(T_n - T)e_j\|^2 \leq \varepsilon$, para todo subconjunto finito F . Portanto,

$$\|T_n - T\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{j \in J} \|(T_n - T)e_j\|^2 \leq \varepsilon,$$

mostrando que $(T - T_n) \in \text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e $(T_n - T) \rightarrow 0$ neste espaço. Sendo $\text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ um espaço vetorial, vem que $T = (T - T_n) + T_n$ pertence a $\text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, e este espaço é de Hilbert. ■

EXERCÍCIO 26.1. Apresente detalhes de que $\|\cdot\|_{\text{HS}}$ é uma norma e de que $\langle T, S \rangle_{\text{HS}}$ é um produto interno.

Neste ponto já estão disponíveis resultados suficientes para se verificar que todo operador de Hilbert-Schmidt é compacto.

Teorema 26.5. $\text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subset \text{B}_0(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

Demonstração. Sejam $T \in \text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e $(\xi_n) \subset \mathcal{H}_1$, com $\xi_n \rightarrow \xi$. Pela Proposição 25.6, para mostrar que T é compacto basta verificar que $T\xi_n \rightarrow T\xi$. Note que, por linearidade, é suficiente considerar o caso $\xi_n \rightarrow 0$.

Seja $\{e_j\}_{j \in J}$ uma base ortonormal de \mathcal{H}_2 . Para cada n sabe-se que o conjunto $J_n = \{j \in J : \langle e_j, T\xi_n \rangle \neq 0\}$ é contável de modo que $\cup_n J_n$ também é contável e, por simplicidade de notação, será denotado pelos números naturais (se for finito o argumento que segue adapta-se facilmente). Assim,

$$\|T\xi_n\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle e_j, T\xi_n \rangle|^2 \leq \sum_{j=1}^N |\langle T^*e_j, \xi_n \rangle|^2 + M \sum_{j=N+1}^{\infty} \|T^*e_j\|^2,$$

sendo $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\xi_n\|^2$ (M é finito pois toda sequência fracamente convergente é limitada: Proposição 14.3).

Dado $\varepsilon > 0$, escolha N com $\sum_{j=N+1}^{\infty} \|T^*e_j\|^2 < \varepsilon/M$, o qual existe pois $T^* \in \text{HS}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. Agora, como $\xi_n \rightarrow 0$, existe K de modo que $\sum_{j=1}^N |\langle T^*e_j, \xi_n \rangle|^2 < \varepsilon$ se $n \geq K$. Assim, se $n \geq K$ tem-se $\|T\xi_n\|^2 < 2\varepsilon$, e conclui-se que $T\xi_n \rightarrow 0$. ■

EXERCÍCIO 26.2. Seja $T : l^2(\mathbb{N}) \leftrightarrow l^2(\mathbb{N})$ o operador dado por $(T\xi)_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}\xi_j$, $n \in \mathbb{N}$, sendo $(a_{nj})_{n,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz infinita com $\sum_{n,j \in \mathbb{N}} |a_{nj}|^2 < \infty$. Mostre que T é um operador de Hilbert-Schmidt e determine sua norma de Hilbert-Schmidt.

O próximo lema será usado no importante exemplo que o segue.

Lema 26.6. *Sejam $\mathcal{H}_1 = L^2_\mu(\Omega)$ e $\mathcal{H}_2 = L^2_\nu(\Lambda)$ espaços separáveis, com μ, ν medidas σ -finitas, e $\mathcal{H}_3 = L^2_{\mu \times \nu}(\Omega \times \Lambda)$. Se (ψ_n) e (ϕ_j) são bases ortonormais (contáveis) de \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , respectivamente, então $(\overline{\psi_n \phi_j})$ é base ortonormal de \mathcal{H}_3 , o qual também é separável.*

Demonstração. Por Fubini $(\overline{\psi_n \phi_j})$ é um conjunto ortonormal em \mathcal{H}_3 . Pela Proposição 21.7, para demonstrar este lema basta verificar que se $f \in \mathcal{H}_3$ satisfaz $\langle f, \overline{\psi_n \phi_j} \rangle_{\mathcal{H}_3} = 0$, para todos n, j , então $f = 0$.

Para cada $s \in \Lambda$, considere a função setor $f^s : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$ por $f^s(t) = f(t, s)$, a qual pertence a \mathcal{H}_1 para s num conjunto de medida ν total, e para cada n denote $F_n(s) = \langle \overline{f^s}, \psi_n \rangle_{\mathcal{H}_1}$ (que é mensurável já que ν é σ -finita), segue que $\langle f, \overline{\psi_n \phi_j} \rangle_{\mathcal{H}_3} = \langle F_n, \phi_j \rangle_{\mathcal{H}_2}$. Note que, por Cauchy-Schwartz, ν -qtp tem-se $|F_n(s)| \leq \|f^s\|_{\mathcal{H}_1}$, de forma que $F_n \in \mathcal{H}_2$ para todo n , pois

$$\|F_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \leq \int_{\Lambda} \|f^s\|_{\mathcal{H}_1}^2 d\nu(s) = \|f\|_{\mathcal{H}_3}^2.$$

Assim, a condição $\langle f, \overline{\psi_n \phi_j} \rangle_{\mathcal{H}_3} = 0$ foi reduzida a $\langle F_n, \phi_j \rangle_{\mathcal{H}_2} = 0$, para todos n, j ; sendo (ϕ_j) base de \mathcal{H}_2 , tem-se para todo n que $F_n(s) = 0$ ν -qtp e, usando que (ψ_n) é base de \mathcal{H}_1 , obtém-se $f^s = 0$ (em \mathcal{H}_1) ν -qtp. Segue que $\|f\|_{\mathcal{H}_3}^2 = \int_{\Lambda} \langle f^s, f^s \rangle_{\mathcal{H}_1} d\nu(s) = 0$. ■

Exemplo 26.7. Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ e \mathcal{H}_3 como no Lema 26.6. Então, um operador $T \in \text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ se, e somente se, existe $K \in \mathcal{H}_3$ de modo que

$$(T\psi)(t) = (T_K\psi)(t) := \int_{\Omega} K(t, s)\psi(s)d\mu(s), \quad \psi \in \mathcal{H}_1.$$

Além disso, $\|T\|_{\text{HS}} = \|K\|_{\mathcal{H}_3}$. •

Demonstração. Se (ψ_n) e (ϕ_j) são bases ortonormais de \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , respectivamente, então, pelo Lema 26.6, $(\overline{\psi_n \phi_j})$ é base ortonormal de \mathcal{H}_3 . Suponha que $T = T_K$; então

$$\begin{aligned} \sum_n \|T_K\psi_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 &= \sum_{n,j} |\langle T_K\psi_n, \phi_j \rangle_{\mathcal{H}_2}|^2 \\ &= \sum_{n,j} |\langle K, \overline{\psi_n \phi_j} \rangle_{\mathcal{H}_3}|^2 = \|K\|_{\mathcal{H}_3}^2, \end{aligned}$$

mostrando que $T_K \in \text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e $\|T_K\|_{\text{HS}} = \|K\|_{\mathcal{H}_3}$.

Seja $T \in \text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Usando a notação acima, tem-se

$$\sum_{n,j} |\langle \phi_j, T\psi_n \rangle_{\mathcal{H}_2}|^2 = \sum_n \|T\psi_n\|^2 = \|T\|_{\text{HS}}^2 < \infty,$$

o que permite definir a função $K_0(t, s) := \sum_{n,j} \langle \phi_j, T\psi_n \rangle_{\mathcal{H}_2} \overline{\psi_n(s)} \phi_j(t)$ no espaço \mathcal{H}_3 ; note que $\|K_0\|_{\mathcal{H}_3} = \|T\|_{\text{HS}}$. Será verificado que $T = T_{K_0}$.

Se $\psi \in \mathcal{H}_1$ e $\phi \in \mathcal{H}_2$ tem-se, usando que T é limitado e a continuidade do produto interno,

$$\begin{aligned} \langle \phi, T_{K_0}\psi \rangle_{\mathcal{H}_2} &= \int_{\Lambda} d\nu(t) \left(\overline{\phi(t)} \int_{\Omega} K_0(t, s) \psi(s) d\mu(s) \right) \\ &= \langle \overline{\psi}, K_0 \rangle_{\mathcal{H}_3} = \sum_{n,j} \langle \phi_j, T\psi_n \rangle_{\mathcal{H}_2} \langle \overline{\psi}, \phi_j \overline{\psi_n} \rangle_{\mathcal{H}_3} \\ &= \sum_{n,j} \langle \phi_j, T\psi_n \rangle_{\mathcal{H}_2} \langle \phi, \phi_j \rangle_{\mathcal{H}_2} \langle \psi_n, \psi \rangle_{\mathcal{H}_1} \\ &= \left\langle \sum_j \langle \phi_j, \phi \rangle_{\mathcal{H}_2} \phi_j, \sum_n \langle \psi_n, \psi \rangle_{\mathcal{H}_1} T\psi_n \right\rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= \left\langle \phi, \sum_n \langle \psi_n, \psi \rangle_{\mathcal{H}_1} T\psi_n \right\rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= \left\langle \phi, T \sum_n \langle \psi_n, \psi \rangle_{\mathcal{H}_1} \psi_n \right\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \phi, T\psi \rangle_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned}$$

Portanto, $T = T_{K_0}$. ■

OBSERVAÇÃO 26.8. Note que o Exemplo 26.7 proporciona outra demonstração de que o operador no Exemplo 25.5 é compacto.

Notas

O termo *operador de Hilbert-Schmidt* é uma homenagem a D. Hilbert e seu estudante E. Schmidt, que investigaram formas bilineares simétricas compactas no início do século XX.

Há uma família de operadores compactos em $B(\mathcal{H})$ para cada $1 \leq p < \infty$, em que certa norma $\|T\|_p < \infty$ (essa norma é baseada naquela de l^p); os operadores de Hilbert-Schmidt são obtidos através de $p = 2$. O caso $p = 1$ tem importância em Física-Matemática, particularmente em Mecânica Estatística e Teoria de Espalhamento, e tais operadores são chamados de “classe traço”, numa tradução livre de

trace class em inglês ($\|T\|_1$ é uma generalização do traço dos valores absolutos de uma matriz finita). Pode-se mostrar que um operador pertence à classe traço se, e somente se, ele é o produto de dois operadores de Hilbert-Schmidt. Uma referência específica para esse assunto é o livro R. Schatten, *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*, Berlin, Springer-Verlag, 1960.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 26.3. Dê outra demonstração do Teorema 26.5: com a notação utilizada naquela demonstração, seja P_N o projetor ortogonal sobre o espaço $\text{Lin}(\{e_1, \dots, e_N\})$, e defina $T_N = P_N T$. Mostre que T_N é de posto finito e que $T_N \rightarrow T$ na norma $\|\cdot\|_{\text{HS}}$

EXERCÍCIO 26.4. Mostre que $\text{HS}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é o fecho do conjunto dos operadores de posto finito com a norma $\|\cdot\|_{\text{HS}}$

EXERCÍCIO 26.5. Discuta a afirmação: Se Ω é um espaço métrico compacto e μ uma medida boreliana σ -finita em Ω , então a todo operador $T \in \text{B}(L^2_\mu(\Omega))$ pode-se associar uma função $K \in L^2_{\mu \times \mu}(\Omega \times \Omega)$ de maneira que $T = T_K$, sendo

$$(T_K \psi)(t) = \int_{\Omega} K(t, s) \psi(s) d\mu(s). \quad \psi \in L^2_\mu(\Omega).$$

EXERCÍCIO 26.6. Sejam $T, S \in \text{B}(\mathcal{H})$

- Se T e S são invertíveis, mostre que $(T - S)$ é de Hilbert-Schmidt se, e somente se, $(T^{-1} - S^{-1})$ é de Hilbert-Schmidt.
- Se $(T - S)$ é de Hilbert-Schmidt, mostre que $(T^2 - S^2)$ é de Hilbert-Schmidt. O que se pode dizer de $(T^n - S^n)$?

EXERCÍCIO 26.7. Fixe $\eta \in \mathcal{H}$ com $\|\eta\| = 1$. Seja $T_\eta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido por $T_\eta \xi = \langle \eta, \xi \rangle \eta$, $\xi \in \mathcal{H}$. Mostre que T_η é um operador linear de Hilbert-Schmidt e calcule sua norma $\|T_\eta\|_{\text{HS}}$.

EXERCÍCIO 26.8. Sejam \mathcal{H} separável e $T \in \text{B}(\mathcal{H})$ um operador que possui uma base ortonormal (ξ_j) de \mathcal{H} , formada por autovetores de T , ou seja, para todo j tem-se $T\xi_j = \lambda_j \xi_j$, $\lambda_j \in \mathbb{F}$. Dê condições para que $T \in \text{IIS}(\mathcal{H})$. Verifique que, em espaços de Hilbert de dimensão infinita, sempre há operadores compactos que não são de Hilbert-Schmidt.

EXERCÍCIO 26.9. Existem seqüências $(T_n) \subset \text{IIS}(\mathcal{H})$ que convergem em $\text{B}(\mathcal{H})$ mas que não convergem em $\text{HS}(\mathcal{H})$?

EXERCÍCIO 26.10. Mostre que para concluir que $T = T_{K_0}$ no Exemplo 26.7, basta verificar que $\langle \phi_j, T \psi_n \rangle = \langle \phi_j, T_{K_0} \psi_n \rangle$ para todos j, n .

Capítulo 27

Espectro

Neste Capítulo inicia-se o estudo do espectro de operadores lineares contínuos em espaços de Banach complexos. Os casos particulares e importantes de operadores auto-adjuntos e operadores compactos serão tratados em outros Capítulos.

Intuitivamente, o espectro de um operador linear se constitui “nos valores em \mathbb{F} que esse operador assume”: a própria definição de espectro já justifica esta interpretação. O espectro é uma generalização do conjunto de autovalores de operadores lineares. A questão espectral está diretamente relacionada à solubilidade e unicidade de soluções de equações lineares em espaços de Banach, problemas de contorno, aproximações de problemas não-lineares por versões lineares, estabilidade e, de forma essencial, ao aparato matemático da Mecânica Quântica (veja, por exemplo, o livro [de Oliveira (2009)]). No que segue, os espaços de Banach são considerados complexos.

Definição 27.1. Seja $T : \text{dom } T \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ linear no espaço de Banach complexo $\mathcal{B} \neq \{0\}$. O conjunto resolvente de T , denotado por $\rho(T)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador resolvente de T em λ

$$R_\lambda(T) : \mathcal{B} \rightarrow \text{dom } T, \quad R_\lambda(T) := (T - \lambda I)^{-1}.$$

existe e é limitado, ou seja, pertence a $\mathcal{B}(\mathcal{B})$.

Definição 27.2. O espectro de T é o conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

OBSERVAÇÃO 27.3. a) Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{B})$ e $(T - \lambda I)$ é bijetor com imagem igual a \mathcal{B} , segue, por Aplicação Aberta, que $R_\lambda(T) \in \mathcal{B}(\mathcal{B})$ e $\lambda \in \rho(T)$.

- b) Todo autovalor λ de T (ou seja, existe autovetor $\xi \neq 0$ com $T\xi = \lambda\xi$) pertence ao espectro de T , já que $(T - \lambda 1)$ não é invertível neste caso.
- c) Notação: $T_\lambda = T - \lambda 1$ e, se está claro qual o operador T envolvido, $R_\lambda = R_\lambda(T)$.

Não se restringe a definição de espectro aos números reais para evitar que ele seja vazio para operadores contínuos (veja adiante neste Capítulo). Por exemplo, se $\dim \mathcal{B} < \infty$, o espectro é exatamente o conjunto de autovalores do operador, mas no caso do operador de rotação por um ângulo reto em \mathbb{R}^2 não há autovalor real (confira!).

EXERCÍCIO 27.1. Seja $T : \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B}$ linear com $\dim \mathcal{B} < \infty$. Mostre que $\sigma(T)$ é o conjunto de autovalores de T e, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, conclua que $\sigma(T) \neq \emptyset$ neste caso.

Proposição 27.4. *Seja $T : \text{dom } T \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ linear. Então os autovetores $\{\xi_j\}_{j \in J}$ de T , correspondendo a autovalores $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ dois a dois distintos, formam um conjunto linearmente independente em $\text{dom } T$.*

Demonstração. Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ são escalares, aplicando-se o operador $T_{\lambda_{j_2}} T_{\lambda_{j_3}} \dots T_{\lambda_{j_m}}$ a $\alpha_1 \xi_{\lambda_{j_1}} + \alpha_2 \xi_{\lambda_{j_2}} + \dots + \alpha_m \xi_{\lambda_{j_m}} = 0$ obtém-se

$$\alpha_1 (\lambda_{j_2} - \lambda_{j_1}) (\lambda_{j_3} - \lambda_{j_1}) \dots (\lambda_{j_m} - \lambda_{j_1}) \xi_{\lambda_{j_1}} = 0,$$

e segue que $\alpha_1 = 0$, já que os autovalores são distintos. De forma similar mostra-se que $\alpha_j = 0$, para todo $2 \leq j \leq m$; portanto, $\{\xi_j\}_{j \in J}$ é linearmente independente. ■

Proposição 27.5. *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{B})$. Então todo operador $S \in \mathcal{B}(\mathcal{B})$ que comuta com T , ou seja, $TS = ST$, também comuta com $R_\lambda(T)$, para todo $\lambda \in \rho(T)$, e para quaisquer $\lambda, \mu \in \rho(T)$ vale a primeira identidade do resolvente*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T).$$

Além disso, $R_\lambda(T)$ comuta com $R_\mu(T)$.

Demonstração. Se $\lambda \in \rho(T)$ e $ST = TS$ tem-se $ST_\lambda = T_\lambda S$. Usando $1 = R_\lambda T_\lambda = T_\lambda R_\lambda$, segue que

$$R_\lambda S = R_\lambda S T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda S R_\lambda = S R_\lambda,$$

ou seja, R_λ comuta com S . Como R_μ comuta com T , do argumento acima conclui-se que R_μ comuta com R_λ , para todos $\mu, \lambda \in \rho(T)$.

Considere agora

$$R_\lambda - R_\mu = R_\lambda T_\mu R_\mu - R_\lambda T_\lambda R_\mu = R_\lambda (T_\mu - T_\lambda) R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu,$$

o que demonstra a primeira identidade do resolvente. ■

EXERCÍCIO 27.2. Use a primeira identidade do resolvente para mostrar que, para $T \in B(\mathcal{B})$, $R_\lambda(T)$ comuta com $R_\mu(T)$, para todos $\lambda, \mu \in \rho(T)$.

EXERCÍCIO 27.3. Se para $T \in B(\mathcal{B})$ existe $\lambda_0 \in \rho(T)$ de forma que $R_{\lambda_0}(T)$ é compacto, mostre que $R_\lambda(T)$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(T)$ (esses são os chamados *operadores com resolvente compacto*).

Teorema 27.6. Se $T \in B(\mathcal{B})$ e $\lambda_0 \in \rho(T)$, então para todo λ no disco $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}(T)\|$ do plano complexo tem-se que $R_\lambda(T) \in B(\mathcal{B})$ e

$$R_\lambda(T) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}(T)^{j+1},$$

com a série convergindo em $B(\mathcal{B})$.

Demonstração. Note inicialmente que $R_{\lambda_0}(T) \neq 0$, pois é o inverso de um operador. Como motivação, considere

$$T - \lambda \mathbf{1} = T - (\lambda_0 + (\lambda - \lambda_0))\mathbf{1} = T_{\lambda_0} [\mathbf{1} + (\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}]$$

e, apenas formalmente, seguiria que

$$R_\lambda = \left(\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j \right) R_{\lambda_0}.$$

Resta justificar esta expressão e mostrar que ela define $(T - \lambda \mathbf{1})^{-1}$ em $B(\mathcal{B})$. Para $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}(T)\|$ vê-se que esta série converge

absolutamente em $B(\mathcal{B})$ e define um operador que satisfaz

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=0}^N (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1} \right) (T - \lambda \mathbf{1}) \\ &= \sum_{j=0}^N (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1} [T - (\lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)) \mathbf{1}] \\ &= \sum_{j=0}^N (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j - \sum_{j=0}^N (\lambda - \lambda_0)^{j+1} R_{\lambda_0}^{j+1} \\ &= \mathbf{1} - [(\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}]^{N+1}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{N \rightarrow \infty} [(\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}]^N = 0$ em $B(\mathcal{B})$, pois $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}(T)\|$, vem que

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1} \right) (T - \lambda \mathbf{1}) = \mathbf{1}.$$

Analogamente, mostra-se que

$$(T - \lambda \mathbf{1}) \left(\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1} \right) = \mathbf{1}.$$

Isto completa a demonstração. ■

Corolário 27.7. *Se $T \in B(\mathcal{B})$, então $\rho(T)$ é um conjunto aberto e $\sigma(T)$ é um conjunto fechado em \mathbb{C} . Além disso, se $|\lambda| > \|T\|$, então $\lambda \in \rho(T)$ e $\|R_{\lambda}(T)\| \rightarrow 0$ para $|\lambda| \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Que $\rho(T)$ é aberto vem diretamente do Teorema 27.6, logo $\sigma(T)$ é fechado. De forma análoga à demonstração desse teorema (escrevendo $T - \lambda \mathbf{1} = -\lambda(\mathbf{1} - T/\lambda)$), conclui-se que a representação de $R_{\lambda}(T)$ pela série, chamada *série de Neumann* de T ,

$$R_{\lambda}(T) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda} \right)^j$$

converge em norma se $|\lambda| > \|T\|$ e, neste caso, que

$$\|R_{\lambda}(T)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j \geq 0} \|(T/\lambda)^j\| = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

Disto segue que o espectro $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$ e, como consequência, $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|R_\lambda(T)\| = 0$. ■

EXERCÍCIO 27.4. Conclua que $\rho(T) \neq \emptyset$ e é um conjunto não-limitado para todo $T \in B(\mathcal{B})$.

Corolário 27.8. *Seja $T \in B(\mathcal{B})$. A aplicação $\rho(T) \rightarrow B(\mathcal{B})$ dada por $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ é contínua e uniformemente holomorfa, no sentido que possui derivada em $B(\mathcal{B})$ definida pelo limite*

$$\frac{dR_\lambda(T)}{d\lambda} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_{\lambda+h}(T) - R_\lambda(T)}{h} = R_\lambda(T)^2,$$

para todo λ numa vizinhança de cada ponto $\lambda_0 \in \rho(T)$.

Demonstração. Pelo Teorema 27.6, se $\lambda_0 \in \rho(T)$ e $|\lambda - \lambda_0| < 1/\|R_{\lambda_0}\|$,

$$\begin{aligned} \|R_\lambda(T) - R_{\lambda_0}(T)\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^j \|R_{\lambda_0}(T)\|^j \\ &\leq |\lambda - \lambda_0| \|R_{\lambda_0}(T)\|^2 \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^j \|R_{\lambda_0}(T)\|^j \\ &= \frac{|\lambda - \lambda_0| \|R_{\lambda_0}(T)\|^2}{1 - |\lambda - \lambda_0| \|R_{\lambda_0}(T)\|} \rightarrow 0 \text{ para } \lambda \rightarrow \lambda_0, \end{aligned}$$

mostrando que a aplicação $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ em $\rho(T)$ é contínua.

Da primeira identidade do resolvente tem-se $(R_{\lambda+h} - R_\lambda)/h = R_{\lambda+h}R_\lambda$; tomando o limite $h \rightarrow 0$ e usando a continuidade demonstrada acima, conclui-se que a derivada existe e vale $dR_\lambda(T)/d\lambda = R_\lambda(T)^2$. ■

Corolário 27.9. *Se $T \in B(\mathcal{B})$, então $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Se $f \in B(\mathcal{B})^*$ (o dual de $B(\mathcal{B})$) defina $F : \rho(T) \rightarrow \mathbb{C}$ por $F(\lambda) = f(R_\lambda(T))$. Assim, pelo Corolário 27.8 vem que, para todo $\lambda \in \rho(T)$,

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\lambda+h) - F(\lambda)}{h} = f(R_\lambda(T)^2),$$

a qual é contínua; assim, F é holomorfa em $\rho(T)$. Da desigualdade $|F(\lambda)| \leq \|f\| \|R_\lambda(T)\|$ e pelo Corolário 27.7, $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} F(\lambda) = 0$.

Se $\sigma(T) = \emptyset$, ou seja, $\rho(T) = \mathbb{C}$, por continuidade F é limitada em qualquer bola em \mathbb{C} , e como tende a zero para $|\lambda| \rightarrow \infty$, vem que $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função inteira e limitada, logo constante pelo Teorema de Liouville. Usando que $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} F(\lambda) = 0$, conclui-se que $F(\lambda) = f(R_\lambda(T)) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in B(\mathcal{B})^*$. Pelos corolários do Teorema de Hahn-Banach (veja o Teorema 12.1), segue que $R_\lambda(T) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, mas isto não pode ocorrer, pois $R_\lambda(T)$ é o inverso de algum operador. Esta contradição mostra que $\sigma(T) \neq \emptyset$. ■

Corolário 27.10. Se $T \in B(\mathcal{B})$, então $\|R_\lambda(T)\| \geq 1/d(\lambda, \sigma(T))$ para todo $\lambda \in \rho(T)$ (sendo $d(\lambda, \sigma(T)) := \inf_{\mu \in \sigma(T)} |\mu - \lambda|$).

EXERCÍCIO 27.5. Demonstre o Corolário 27.10.

Definição 27.11. O raio espectral de $T \in B(\mathcal{B})$ é

$$r_\sigma(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

A demonstração do próximo resultado será apresentada no Capítulo 28, bem como algumas de suas consequências.

Teorema 27.12. Se $T \in B(\mathcal{B})$, então valem

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \|T\|.$$

Exemplo 27.13. Seja $S_e: l^\infty(\mathbb{N}) \leftrightarrow$ o operador deslocamento

$$S_e(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots).$$

Como $\|S_e\| = 1$ vem que $\sigma(S_e) \subset \overline{B}(0; 1)$. Todo $|\lambda| \leq 1$ é autovalor de S_e , pois a equação $S_e \xi^\lambda = \lambda \xi^\lambda$ tem solução $\xi^\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$ em $l^\infty(\mathbb{N})$. Portanto $\sigma(S_e) = \overline{B}(0; 1)$, $r_\sigma(S_e) = 1$, e todo ponto do espectro é autovalor do operador. •

Exemplo 27.14. O operador de Volterra $T: C[0, 1] \leftrightarrow$, $(T\psi)(t) = \int_0^t \psi(s) ds$ não possui autovalores. De fato, da equação de autovalores $(T\psi)(t) = \lambda\psi(t) = \int_0^t \psi(s) ds$ vem que $\lambda\psi'(t) = \psi(t)$ (ψ é diferenciável pois é integral de uma função contínua). Se $\lambda = 0$ segue que $\psi = 0$ e zero não é autovalor; se $\lambda \neq 0$, as soluções desta equação diferencial são

$\psi(t) = C \exp(t/\lambda)$, e como $\psi(0) = 0$ conclui-se que a constante $C = 0$, ou seja $\psi = 0$, e nenhum $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de T .

Da desigualdade $|(T\psi)(t)| \leq t\|\psi\|_\infty$ segue, usando indução, que

$$|(T^2\psi)(t)| \leq \int_0^t s\|\psi\|_\infty ds = \frac{t^2}{2}\|\psi\|_\infty, \quad |(T^n\psi)(t)| \leq \frac{t^n}{n!}\|\psi\|_\infty.$$

Assim, $\|T^n\| \leq 1/n!$ e $r_\sigma(T) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n!)^{1/n} = 0$. Portanto $r_\sigma(T) < \|T\|$, $\sigma(T) = \{0\}$ (pois $\neq \emptyset$) e o operador de Volterra T não possui autovalores. •

Notas

A história da Teoria Espectral é longa e interessante; uma visão abrangente pode ser encontrada em [Steen (1973)], embora não seja uma referência recente.

O ponto de vista aqui apresentado surgiu, provavelmente, com os trabalhos de Fourier e seu método de separação de variáveis, e com as tentativas de se generalizar a teoria de Sturm-Liouville no século XIX. Pode-se “perceber” o espectro contínuo nesses casos, ou ao se tomar o limite para o período tendendo ao infinito nas expansões em série de Fourier, em que a soma se torna uma integral, ou ao ver que os autovalores dos problemas de Sturm-Liouville associados a certas equações “preenchem intervalos” no limite de condições de contorno no infinito. Foi Hilbert quem percebeu claramente o que era o espectro contínuo no início do século XX. Foi o próprio Hilbert que popularizou o termo “espectro” em análise: observe que os níveis energéticos de um átomo ou molécula são também chamados de espectro, os quais podem ser teoricamente obtidos pelo espectro de certos operadores diferenciais de Schrödinger ou Dirac [de Oliveira (2009)] (uma coincidência linguística a se pensar!).

Contribuições importantes para o desenvolvimento inicial da teoria espectral foram dadas por F. Riesz, E. Hellinger e J. von Neumann. Por exemplo, foi Riesz quem propôs pela primeira vez a definição de espectro como apresentada neste texto. von Neumann adaptou as definições de operador resolvente, espectro, adjunto de Hilbert, entre outras, para desenvolver uma teoria espectral de operadores normais (não necessariamente limitados) em espaços de Hilbert (cuja definição abstrata ele também introduziu). A fórmula para o raio espectral é devida a I. Gelfand, que a demonstrou no contexto de álgebras de Banach, na década de 1940; note que ela relaciona, por um lado, um limite que usa fortemente a métrica e, por outro, o raio espectral que é definido via o supremo de um conjunto. A primeira identidade do resolvente é devida a Hilbert.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 27.6. Se $T, S \in B(\mathcal{B})$ e S comuta com $R_\lambda(T)$ para algum $\lambda \in \rho(T)$, mostre que S comuta com T e com $R_\mu(T)$, para todo $\mu \in \rho(T)$.

EXERCÍCIO 27.7. Para $T, S \in B(\mathcal{B})$ e $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$, demonstre a segunda identidade do resolvente

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(T)(S - T)R_\lambda(S) = R_\lambda(S)(S - T)R_\lambda(T).$$

EXERCÍCIO 27.8. Sejam $A, T \in B(\mathcal{H})$ e $S = T + A^*A$ um “operador perturbado”. Use a segunda identidade do resolvente para mostrar que para todo $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$ vale $AR_\lambda(S)A^* = 1 - (1 + AR_\lambda(T)A^*)^{-1}$.

EXERCÍCIO 27.9. Mostre que a fórmula para o raio espectral (Teorema 27.12) de um operador limitado resulta no mesmo valor se for considerada uma norma equivalente no espaço de Banach.

EXERCÍCIO 27.10. Considere o operador, agindo em \mathbb{C}^2 , representado pela matriz $T = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e com A não-nulo. Verifique que seu espectro $\sigma(T) = \{1\}$, logo $r_\sigma(T) = 1 < \|T\| = (1 + |A|^2)^{1/2}$. Confira que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = 1$. Este operador é normal?

EXERCÍCIO 27.11. Se $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ é o operador de Volterra do Exemplo 27.14, usando a série de Neumann mostre que para $\lambda \neq 0$ tem-se

$$(R_\lambda(T)\psi)(t) = \frac{\psi(t)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{(t-s)/\lambda} \psi(s) ds, \quad \psi \in C[0, 1].$$

EXERCÍCIO 27.12. Se $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $T_K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$

$$(T_K\psi)(t) = \int_a^t K(t, s)\psi(s) ds, \quad \psi \in C[a, b],$$

mostre que $r_\sigma(T_K) = 0$. Este T_K também é chamado de operador de Volterra

EXERCÍCIO 27.13. Mostre que se $ST=TS$, $T, S \in B(\mathcal{B})$, então $r_\sigma(TS) \leq r_\sigma(T)r_\sigma(S)$, e usando o binômio de Newton que $r_\sigma(T+S) \leq r_\sigma(T) + r_\sigma(S)$.

EXERCÍCIO 27.14. Se $T \in B(\mathcal{B})$ é invertível, com $T^{-1} \in B(\mathcal{B})$, mostre que $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T)\}$.

EXERCÍCIO 27.15. Se $T \in B(\mathcal{B})$, mostre que $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda R_\lambda(T) = -1$.

EXERCÍCIO 27.16. Baseie-se no Exemplo 27.13 para dar uma demonstração alternativa de que $l^\infty(\mathbb{N})$ não é separável (veja o Exemplo 3.7)

EXERCÍCIO 27.17. Para $T \in B(\mathcal{B})$, considere $V(t) = \exp(tT)$, $t \in \mathbb{R}$. Mostre que:

- a) A aplicação $t \mapsto V(t) \in B(\mathcal{B})$ é contínua com $V(0) = 1$ e $V(t+s) = V(t)V(s)$.
 b) Se $S \in B(\mathcal{B})$ comuta com T , então também comuta com $V(t)$, para todo t .
 c) Essa aplicação é uniformemente holomorfa e $dV(t)/dt = TV(t)$

EXERCÍCIO 27.18. Em $C[0, \infty)$, restrito às funções limitadas e com a norma da convergência uniforme, infira que os autovalores λ do operador $(T\psi)(t) = \int_0^{t+\frac{1}{2}} \psi(s) ds$ se relacionam com os autovetores ψ_λ correspondentes por (supondo $\psi_\lambda(0) \neq 0$)

$$\lambda = \frac{1}{\psi_\lambda(0)} \int_0^{\frac{1}{2}} \psi_\lambda(s) ds.$$

Verifique que $\lambda_k = (-1)^k (2k-1)^{-1}$, $k \in \mathbf{N}$, são autovalores de T e que os autovetores associados satisfazem a relação acima, e que zero é autovalor de multiplicidade infinita (ou seja, $\dim N(T) = \infty$). Note que o operador (similar?! de Volterra $(V\psi)(t) = \int_0^t \psi(s) ds$ não possui autovalores (com $\psi \in C[0, \infty)$)

EXERCÍCIO 27.19. Siga o seguinte roteiro para mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$ existe. Denote por $r = \inf_n \|T^n\|^{1/n}$. Dado $\varepsilon > 0$ escolha m de modo que $\|T^m\|^{1/m} \leq r + \varepsilon$. Escreva cada número inteiro positivo $n = p_n m + q_n$ com $0 \leq q_n < m$, mostre que $\|T^n\|^{1/n} \leq (r + \varepsilon)^{m p_n/n} \|T\|^{q_n/n}$, e conclua que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r + \varepsilon)^{m p_n/n} \|T\|^{q_n/n} = r + \varepsilon.$$

Portanto existe $N(\varepsilon)$ em que $(r + \varepsilon)^{m p_n/n} \|T\|^{q_n/n} < (r + 2\varepsilon)$ se $n \geq N(\varepsilon)$. Assim, $r \leq \|T^n\|^{1/n} < r + 2\varepsilon$ se $n \geq N(\varepsilon)$; conclua que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$ existe e é igual a r .

Capítulo 28

Classificação Espectral

Neste Capítulo é demonstrado o Teorema 27.12 e são apresentados alguns de seus corolários. Em seguida é dada uma classificação tradicional do espectro em pontual, contínuo e residual, e um resultado sobre o espectro de operadores unitários em espaços de Hilbert. Finalmente, mostra-se que um operador em $B(\mathcal{B})$ possui o mesmo espectro que seu adjunto.

Demonstração. [Teorema 27.12] Note, inicialmente, que devido ao Corolário 27.7 $r_\sigma(T) \leq \|T\|$. Para demonstrar o Teorema 27.12 serão usados alguns resultados da Teoria das Funções Holomorfas combinados com “toda sequência fracamente convergente é limitada”, e a seguinte observação simples: se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são suas raízes n -ésimas em \mathbb{C} , então

$$T^n - \lambda \mathbf{1} = T_{\lambda_1} T_{\lambda_2} \cdots T_{\lambda_n}.$$

Disto segue que $\lambda \in \sigma(T^n)$ se, e somente se, $\lambda_j \in \sigma(T)$ para algum $1 \leq j \leq n$. Portanto, $\sigma(T^n) = \sigma(T)^n$, em que

$$\sigma(T)^n := \{\lambda^n : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Desta relação conclui-se que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $r_\sigma(T) = r_\sigma(T^n)^{1/n} \leq \|T^n\|^{1/n}$.

Para cada f no dual de $B(\mathcal{B})$, defina $F : \rho(T) \rightarrow \mathbb{C}$ por $F(\lambda) = f(R_\lambda(T))$, a qual é uma função holomorfa (veja a demonstração do Corolário 27.9). Se $|\lambda| > \|T\|$, usando a série de Neumann tem-se

$$F(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} f(T^n),$$

e da unicidade da expansão de Laurent segue que a série acima converge para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ na região $|\lambda| > r_\sigma(T)$ (ou expansão de Taylor ao se considerar a variável $s = 1/\lambda$ com $F(0) = 0$).

Dado $\varepsilon > 0$, para $r_\sigma(T) < \alpha < r_\sigma(T) + \varepsilon$ e todo $f \in B(\mathcal{B})^*$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} f(T^n/\alpha^n)$ converge. Assim, a sequência T^n/α^n converge fracamente a zero em $B(\mathcal{B})$ e, portanto, limitada, de forma que existe $C = C(\alpha) > 0$ em que

$$\|T^n/\alpha^n\| \leq C \implies \|T^n\|^{1/n} \leq \alpha C^{1/n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} C^{1/n} = 1$, existe $N(\varepsilon) > 0$ de modo que

$$\|T^n\|^{1/n} < r_\sigma(T) + \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Esta relação, juntamente com $r_\sigma(T) \leq \|T^n\|^{1/n}$ verificado acima, mostra que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$ existe e é igual a $r_\sigma(T)$. ■

EXERCÍCIO 28.1. Se quaisquer dois dos operadores $\{T_1, \dots, T_n\} \subset B(\mathcal{B})$ comutam entre si, mostre que o produto $T_1 T_2 \cdots T_n$ é invertível com inversa limitada se, e somente se, cada um dos T_j for invertível em $B(\mathcal{B})$.

Corolário 28.1. Para todo $T \in B(\mathcal{B})$, tem-se que $\sigma(T^n) = \sigma(T)^n$ e $r_\sigma(T^n) = r_\sigma(T)^n$.

EXERCÍCIO 28.2. Apresente a demonstração do Corolário 28.1.

Corolário 28.2. Se $T \in B(\mathcal{H})$ é normal, então $r_\sigma(T) = \|T\|$ (portanto tal igualdade vale para operadores auto-adjuntos e unitários).

Demonstração. Se T é normal tem-se $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$ (veja a Proposição 20.7) para todo $n \in \mathbb{N}$; assim

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{2^n}\|^{1/2^n} = \|T\|.$$

Lembre-se que, existindo o limite, pode-se tomar qualquer subsequência para calculá-lo. ■

Se $T \in B(\mathcal{B})$, então tanto $\rho(T)$ quanto $\sigma(T)$ não são vazios. Retirando a hipótese de continuidade do operador, isto pode não valer. Os dois exemplos adiante ilustram essas situações; por isto vale a pena introduzir a definição de espectro no caso de operadores não-limitados. O

número complexo λ pertence ao conjunto resolvente $\rho(T)$ do operador linear (não necessariamente limitado) $T : \text{dom } T \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, se existe um operador linear limitado $R_\lambda : \mathcal{B} \rightarrow \text{dom } T$ de modo que $R_\lambda(T - \lambda 1) = 1$, identidade em $\text{dom } T$, e $(T - \lambda 1)R_\lambda = 1$, identidade em \mathcal{B} . O espectro desse operador é $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Exemplo 28.3. Sejam $D : \text{dom } D = C^1[0, 1] \subset C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ e $(D\psi)(t) = \psi'(t)$, o qual é um operador não-limitado e fechado. Se $\lambda \in \mathbb{C}$, a função $\psi_\lambda(t) = e^{\lambda t} \in \text{dom } D$ e $D\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$, mostrando que $\sigma(D) = \mathbb{C}$ e é constituído exclusivamente de autovalores. Portanto $\rho(D) = \emptyset$. •

Exemplo 28.4. Sejam $\text{dom } d = \{\psi \in (C^1[0, 1], \|\cdot\|_\infty) : \psi(0) = 0\}$, $d : \text{dom } d \rightarrow C[0, 1]$, $(d\psi)(t) = \psi'(t)$, o qual é um operador não-limitado e fechado. Se $\lambda \in \mathbb{C}$, o operador $W_\lambda : C[0, 1] \rightarrow \text{dom } d$,

$$(W_\lambda\phi)(t) = e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} \phi(s) ds, \quad \phi \in C[0, 1],$$

é limitado e satisfaz $(d - \lambda 1)W_\lambda = 1$ (identidade em $C[0, 1]$) e $W_\lambda(d - \lambda 1) = 1$ (identidade em $\text{dom } d$). Portanto W_λ é o operador resolvente de d em λ e $\rho(d) = \mathbb{C}$, mostrando que $\sigma(d) = \emptyset$ (a ação do resolvente W_λ é obtido ao se considerar a solução da equação diferencial $\psi' - \lambda\psi = \phi$ com $\psi(0) = 0$). •

EXERCÍCIO 28.3. Preencha os detalhes no Exemplo 28.4.

O *espectro pontual* de $T \in B(\mathcal{B})$ é o conjunto de seus autovalores, denotado por $\sigma_p(T)$; no caso de $\dim \mathcal{B} < \infty$ tem-se $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, mas se $\dim \mathcal{B} = \infty$ o operador T_λ pode ser injetor com $\text{img } T_\lambda \neq \mathcal{B}$. Se T_λ^{-1} existe, distinguem-se dois casos: o *espectro contínuo* de T , denotado por $\sigma_c(T)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ cuja $\text{img } T_\lambda$ é densa em \mathcal{B} (mas distinta de \mathcal{B} ; se $\text{img } T_\lambda = \mathcal{B}$ então $\lambda \in \rho(T)$ por Aplicação Aberta) com resolvente $R_\lambda(T)$ não-limitado, enquanto que o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo que $\overline{\text{img } T_\lambda} \neq \mathcal{B}$ é o *espectro residual* de T , denotado por $\sigma_r(T)$. Com essas definições,

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T),$$

com união disjunta (confira!). Esta classificação espectral aplica-se também a operadores não-limitados. Os leitores devem estar cientes de que, em estudos específicos sobre operadores auto-adjuntos, existe um conflito

de nomenclatura, pois o termo “espectro contínuo” [de Oliveira (2009)] tem outro significado conceitual.

É interessante analisar rapidamente algumas implicações associadas aos diferentes tipos espectrais. O termo *resolvente* é motivado pela equação (com $\eta \in \mathcal{B}$ dado)

$$T\xi - \lambda\xi = \eta,$$

se $\lambda \in \rho(T)$, então $R_\lambda(T)\eta$ é a única solução deste problema (para todo η) e depende continuamente de η . Se $\lambda \in \sigma_p(T)$ e ξ é solução daquela equação, então $\xi + \xi_\lambda$, para qualquer $0 \neq \xi_\lambda \in N(T_\lambda)$, também é solução e não há unicidade. Se $\lambda \in \sigma_c(T)$ a solução é então obtida através de um operador não-contínuo e, finalmente, se $\lambda \in \sigma_r(T)$ a equação não possui soluções para η num conjunto aberto de \mathcal{B} (e quando há solução, elas são descontínuas como função de η).

Exemplo 28.5. O operador do Exemplo 27.13 possui *espectro pontual puro*, ou seja, $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. •

Exemplo 28.6. No caso do operador de Volterra, Exemplo 27.14, tem-se $\{0\} = \sigma_r(T) = \sigma(T)$, ou seja, *espectro residual puro* (confira; note que $\psi(0) = 0$). •

Exemplo 28.7. Seja \mathcal{M}_ϕ em $L^2[0, 1]$, com $\phi(t) = t$. Então \mathcal{M}_ϕ não possui autovalores, pois de $\mathcal{M}_\phi\psi = \lambda\psi$ vem que $(t - \lambda)\psi(t) = 0$, ou ainda, $\psi(t) = 0$ para todo $t \neq \lambda$, ou seja, $\psi = 0$ em $L^2[0, 1]$.

O espectro residual de \mathcal{M}_ϕ é vazio. De fato, se $\psi \in L^2[0, 1]$, seja

$$\psi_n(t) = \chi_{[\frac{1}{n}, 1]}(t) \frac{\psi(t)}{t} \in L^2[0, 1];$$

(lembre-se que χ_A denota a função característica do conjunto A) assim,

$$(\mathcal{M}_\phi\psi_n)(t) - \psi(t) \rightarrow 0, \quad \text{q.t.p.,}$$

e como $|(\mathcal{M}_\phi\psi_n)(t) - \psi(t)|^2 \leq |\psi(t)|^2 \in L^1[0, 1]$, segue por Convergência Dominada que $\|(\mathcal{M}_\phi\psi_n) - \psi\|_2 \rightarrow 0$, mostrando que $\text{img } \mathcal{M}_\phi$ é densa em $L^2[0, 1]$ e $0 \notin \sigma_r(T)$. De forma análoga, mostra-se que para todo λ , $\text{img } (\mathcal{M}_\phi - \lambda 1) = \text{img } \mathcal{M}_{\phi-\lambda}$, é densa em $L^2[0, 1]$ e $\sigma_r(\mathcal{M}_\phi) = \emptyset$. Portanto, este operador possui *espectro contínuo puro*, ou seja, $\sigma(\mathcal{M}_\phi) = \sigma_c(\mathcal{M}_\phi)$. •

EXERCÍCIO 28.4. Mostre que no Exemplo 28.7 tem-se $\sigma(\mathcal{M}_\phi) = [0, 1]$.

Não é difícil verificar que todo autovalor de um operador unitário U em $B(\mathcal{H})$ possui módulo igual a um; de fato, se $U\xi_\lambda = \lambda\xi_\lambda$, então $\langle \xi_\lambda, \xi_\lambda \rangle = \langle U\xi_\lambda, U\xi_\lambda \rangle = |\lambda|^2 \langle \xi_\lambda, \xi_\lambda \rangle$, e $|\lambda| = 1$. Isto se estende a todo ponto do espectro de operadores unitários.

Proposição 28.8. *Se $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador unitário, então $\sigma(U)$ é um subconjunto de $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.*

Demonstração. Como $\|U\| = 1$ segue, do Corolário 27.7, que todo $|\lambda| > 1$ está no conjunto resolvente de U . Como $U^{-1} = R_0(U)$ é unitário e $UU^{-1} = \mathbf{1} = U^{-1}U$, segue que $0 \in \rho(U)$ e se $|\lambda| = |\lambda - 0| < 1/\|U^{-1}\| = 1$ vem, usando o Teorema 27.6, que λ também pertence ao conjunto resolvente de U . Portanto, se $\lambda \in \sigma(U)$ tem-se $|\lambda| = 1$. ■

O próximo resultado não vale para o adjunto de Hilbert; por exemplo, o operador $T = i\mathbf{1}$ em \mathcal{H} tem espectro $\{i\}$, enquanto que $\sigma(T^*) = \{-i\}$; veja o Exercício 28.11.

Teorema 28.9. *Se $T \in B(\mathcal{B})$, então $\sigma(T^a) = \sigma(T)$.*

Demonstração. Será mostrado que $\rho(T) = \rho(T^a)$. Se $\lambda \in \rho(T)$ então $R_\lambda(T) \in B(\mathcal{B})$, e como $(T - \lambda\mathbf{1})R_\lambda(T) = \mathbf{1} = R_\lambda(T)(T - \lambda\mathbf{1})$,

$$R_\lambda(T)^a(T^a - \lambda\mathbf{1}) = \mathbf{1} = (T^a - \lambda\mathbf{1})R_\lambda(T)^a, \quad \text{em } \mathcal{B}^*.$$

Isto mostra que $\lambda \in \rho(T^a)$. Portanto, $\rho(T) \subset \rho(T^a)$.

Suponha agora que $\lambda \in \rho(T^a)$, de forma que $R_\lambda(T^a) \in B(\mathcal{B}^*)$ e tem-se

$$R_\lambda(T^a)(T^a - \lambda\mathbf{1}) = \mathbf{1} = (T^a - \lambda\mathbf{1})R_\lambda(T^a), \quad \text{em } \mathcal{B}^*.$$

Tomando adjuntos e denotando $S = R_\lambda(T^a)^a \in B(\mathcal{B}^{**})$ obtém-se

$$(T^{aa} - \lambda\mathbf{1})S = \mathbf{1} = S(T^{aa} - \lambda\mathbf{1}), \quad \text{em } \mathcal{B}^{**}.$$

Lembrando que a aplicação canônica $\hat{\cdot} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^{**}$ é isométrica e satisfaz $\widehat{T\xi} = T^{aa}\hat{\xi}$, para todo $\xi \in \mathcal{B}$ (Exercício 25.3), seguem que

$$S(T^{aa} - \lambda\mathbf{1})\hat{\xi} = \widehat{ST_\lambda\xi} = \hat{\xi}, \quad \forall \xi \in \mathcal{B},$$

c $\|\xi\| = \|\hat{\xi}\| = \|\widehat{ST_\lambda\xi}\| \leq \|S\| \|T_\lambda\xi\|$. Portanto $N(T_\lambda) = \{0\}$ e $R_\lambda(T)$ existe. Esta condição também garante que $\text{img } T_\lambda$ é fechado. De fato, sejam $\eta \in \overline{\text{img } T_\lambda}$ e $(\xi_j) \subset \mathcal{B}$ com $T_\lambda\xi_j \rightarrow \eta$. Desta relação segue que (ξ_j) é sequência de Cauchy em \mathcal{B} e, portanto, converge a algum elemento $\xi \in \mathcal{B}$. Como T_λ é contínuo conclui-se que $T_\lambda\xi = \eta$ e $\text{img } T_\lambda$ é fechado.

Para concluir que $\lambda \in \rho(T)$ resta apenas mostrar que o operador resolvente $R_\lambda(T) \in \mathcal{B}(\mathcal{B})$, o que se reduz a mostrar que $\text{img } T_\lambda = \mathcal{B}$, pelo Teorema da Aplicação Aberta (Corolário 8.5).

Seja $f \in \mathcal{B}^*$ de forma que a restrição $f|_{\text{img } T_\lambda} = 0$. Assim, $0 = f(T_\lambda\xi) = (T_\lambda^\alpha f)(\xi)$, para todo $\xi \in \mathcal{B}$, e $f \in N(T^\alpha - \lambda 1)$; logo, $f = 0$ já que $\lambda \in \rho(T^\alpha)$. Pelo Corolário 12.3, $\text{img } T_\lambda$ é denso em \mathcal{B} ; sendo $\text{img } T_\lambda$ fechado, $\text{img } T_\lambda = \mathcal{B}$. Resumindo, $\rho(T^\alpha) \subset \rho(T)$. Isto completa a demonstração do teorema. ■

Notas

Há outras classificações espectrais, em geral adequadas à certas classes de operadores e ao tipo de problema tratado; a definição aqui apresentada tem a vantagem de se aplicar a qualquer operador linear. Alguns autores utilizam o termo espectro pontual para se referir ao fecho do conjunto de autovalores, e os leitores devem estar precavidos dessas diferenças nas nomenclaturas. Apenas para citar outros termos que aqui não são tratados: espectro essencial, espectro absolutamente contínuo, espectro contínuo singular, espectro discreto.

Atualmente há grande interesse em se estudar a dimensão de Hausdorff do espectro de operadores lineares (limitados ou não) e generalizações. Como referência geral sobre medidas de Hausdorff consulte C. A. Rogers, *Hausdorff Measures*, Cambridge Univ. Press, Londres, 1970, e para a relação com a dinâmica de operadores de Schrödinger consulte o artigo Y. Last, *Quantum Dynamics and Decompositions of Singular Continuous Spectra*, J. Funct. Anal. **142**, (1996) 406–445, bem como o livro [de Oliveira (2009)].

O subespaço X gerado por um (ou mais) autovetor de um operador linear limitado T é invariante, ou seja, se $\xi \in X$, então $T\xi \in X$. O operador de Volterra, Exemplo 27.1.4, embora não possua autovalores, possui subespaços invariantes distintos de $\{0\}$ e de todo espaço (ou seja, não-triviais). De fato, para cada $s \in (0, 1)$, $E_s = \{\psi \in C[0, 1] : \psi(t) = 0, 0 \leq t \leq s\}$ é um subespaço próprio invariante desse operador. Talvez sob influência dos espaços de dimensão finita, a falsa impressão de que todo subespaço invariante de um operador linear está necessariamente associado a autovetores tem ocorrido, e este exemplo simples esclarece a situação (isto está na raiz do espectro contínuo). Tal tipo de resultado é mais geral, em 1954, N. Aroaszajn e K. T. Smith, *Invariant Subspaces of Completely Continuous Operators*, Ann. Math. **60**, 345–350, mostraram que todo operador compacto num espaço de Banach

complexo possui subespaços invariantes não-triviais; em 1973, V. I. Lomonosov generalizou este resultado e simplificou sua demonstração (há também extensões de C. Pearcy e A. L. Shields, e P. Rosenthal, ambas em 1974). Um livro sobre o assunto é H. Radjavi e P. Rosenthal, *Invariant Subspaces*, Nova Iorque, Springer-Verlag, 1973.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 28.5. Sejam $V : B_1 \rightarrow B_2$ um isomorfismo (operador linear isométrico e sobrejetor), $T \in B(B_1)$ e $S = VTV^{-1}$. Mostre que $S \in B(B_2)$ e $\sigma_j(T) = \sigma_j(S)$, para $j = p, r, c$.

EXERCÍCIO 28.6. a) Se $T \in B(B)$ é idempotente, ou seja, $T^2 = T$, mostre que $\sigma(T) \subset \{0, 1\}$. Analise o que ocorre com o espectro se T é idempotente mas distinto do operador nulo e da identidade

b) Mostre que se $T^n = 0$ para algum n , então $\sigma(T) = \{0\}$. Analise o espectro de $T : l^p(\mathbb{N}) \rightarrow l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$, $T(\xi_1, \xi_2, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, 0, \dots)$.

EXERCÍCIO 28.7. Verifique que se T é normal e $\sigma(T) = \{\lambda_0\}$, então $T = \lambda_0 1$.

EXERCÍCIO 28.8. Se $T \in B(B)$, mostre que $R_\lambda(T^a) = R_\lambda(T)^a$, para todo $\lambda \in \rho(T)$. Também que $\sigma_r(T) \subset \sigma_r(T^a)$ e que $\sigma_p(T) \subset \sigma_p(T^a) \cup \sigma_r(T^a)$.

EXERCÍCIO 28.9. Combine a Proposição 20.7 com o Corolário 28.2 para mostrar que para $T \in B(\mathcal{H})$ tem-se $\|T\| = \sqrt{r_\sigma(T^*T)}$.

EXERCÍCIO 28.10. Usando os Exercícios 19.2 e 27.14, demonstre que $\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ para cada operador unitário U (Proposição 28.8).

EXERCÍCIO 28.11. Se $T \in B(\mathcal{H})$, tome adjuntos na relação $T_\lambda R_\lambda(T) = 1 = R_\lambda(T) T_\lambda$ para mostrar que $\sigma(T^*)$ é o complexo conjugado de $\sigma(T)$. Demonstre o mesmo resultado a partir de $(T_\lambda^*)^{-1} = (T_\lambda^{-1})^*$.

EXERCÍCIO 28.12. É possível usar diretamente do Teorema 28.9 para mostrar que se $T \in B(\mathcal{H})$, então $\sigma(T^*)$ é o complexo conjugado de $\sigma(T)$?

EXERCÍCIO 28.13. Mostre que se $r_\sigma(T) > 1$, então a série $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ não converge.

EXERCÍCIO 28.14. Se para certo $T \in B(B)$ tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\| = 0$, mostre que o raio espectral $r_\sigma(T) < 1$ e conclua que $\sum_{n=0}^{\infty} T^n = (1 - T)^{-1} \in B(B)$.

EXERCÍCIO 28.15. Mostre que se $T \in B(\mathcal{H})$ é normal, então $\|T^n\| = \|T\|^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

EXERCÍCIO 28.16. Se $0 \neq \phi \in C[a, b]$, mostre que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor do operador de multiplicação $\mathcal{M}_\phi : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, $(\mathcal{M}_\phi \psi)(t) = \phi(t)\psi(t)$, $\psi \in C[a, b]$, se, e somente se, o conjunto $\phi^{-1}(\lambda)$ possui interior não-vazio.

EXERCÍCIO 28.17. Se $T : C[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi]$, $(T\psi)(t) = e^{it}\psi(t)$, encontre $\sigma_j(T)$, $j = p, r, c$.

EXERCÍCIO 28.18. Sejam $K \in \mathcal{H} = L^2[-1, 1]$, periodicamente estendida ao conjunto dos números reais, e $T_K : \mathcal{H} \leftrightarrow$ dado por

$$(T_K \psi)(t) = \int_{-1}^1 K(t-s)\psi(s) ds, \quad \psi \in \mathcal{H}.$$

Se K é uma função par, determine os autovetores de T_K , mostre que

$$\sigma_p(T_K) = \left\{ \int_{-1}^1 K(s) \cos(\pi n s) ds : n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

e que $\sigma(T_K) = \{0\} \cup \sigma_p(T_K)$. Adapte este resultado para o caso de K ser uma função ímpar. Generalize para qualquer $K \in \mathcal{H}$ e mostre que zero é sempre um ponto de $\sigma(T_K)$.

Capítulo 29

Espectro de Operadores Auto-Adjuntos Limitados

Alguns resultados da teoria espectral de operadores auto-adjuntos limitados em espaços de Hilbert aparecem neste Capítulo. Demonstram-se que o espectro de um operador auto-adjunto é real e que seu espectro residual é vazio.

Muitas propriedades espectrais são simples de verificar quando se consideram apenas autovalores, necessitando-se de ferramentas mais elaboradas para tratar a versão geral (como na Proposição 28.8). Por exemplo, é fácil verificar que cada autovalor de um operador auto-adjunto é real (Exercício 20.2; veja abaixo), mas para demonstrar que todo o espectro é real será usado o

Teorema 29.1. *Seja $T \in B(\mathcal{H})$ um operador auto-adjunto. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i.) $\lambda \in \rho(T)$.

ii.) $\text{img } T_\lambda = \mathcal{H}$.

iii.) *Existe $C > 0$ de forma que $\|T_\lambda \xi\| \geq C\|\xi\|$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$ (e neste caso tem-se $C \leq 1/\|R_\lambda(T)\|$).*

Demonstração. Se $T\xi = \lambda\xi$, então (sendo T auto-adjunto) $\lambda\langle\xi, \xi\rangle = \langle\xi, T\xi\rangle = \langle T\xi, \xi\rangle = \bar{\lambda}\langle\xi, \xi\rangle$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, mostrando que $\sigma_p(T)$ é real. Vale a pena também destacar que se iii.) vale, segue que se $T_\lambda \xi = 0$ então $\xi = 0$, ou seja, λ não é autovalor de T .

i.) \Rightarrow ii.) Segue diretamente da definição de conjunto resolvente.

ii.) \Rightarrow i.) Suponha que $\text{img } T_\lambda = \mathcal{H}$. Então

$$\{0\} = (\text{img } T_\lambda)^\perp = N(T^* - \bar{\lambda}1) = N(T - \bar{\lambda}1)$$

e $\bar{\lambda} \notin \sigma_p(T)$. Como $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$, vem que $\lambda \notin \sigma_p(T)$ e $R_\lambda(T)$ existe com domínio igual a \mathcal{H} . Pelo Teorema da Aplicação Aberta segue que $R_\lambda(T) \in B(\mathcal{H})$ e $\lambda \in \rho(T)$.

i.) \Rightarrow iii.) Se $\lambda \in \rho(T)$, então para qualquer $\xi \in \mathcal{H}$

$$\|\xi\| = \|R_\lambda(T)T_\lambda\xi\| \leq \|R_\lambda(T)\| \|T_\lambda\xi\|$$

e iii.) segue com $C = 1/\|R_\lambda(T)\|$.

iii.) \Rightarrow i.) e ii.) Supondo iii.) segue imediatamente que T_λ é injetor e $R_\lambda(T)$ existe com domínio $\text{img } T_\lambda$. Será mostrado que $\text{img } T_\lambda$ é fechado e denso em \mathcal{H} , concluindo i.) e ii.) simultaneamente.

Sejam $\eta \in \overline{\text{img } T_\lambda}$ e $(\xi_j) \subset \mathcal{H}$ em que $T_\lambda\xi_j \rightarrow \eta$. De iii.) segue que (ξ_j) é de Cauchy em \mathcal{H} e, portanto, converge a algum $\xi \in \mathcal{H}$. Como T_λ é contínuo conclui-se que $T_\lambda\xi = \eta$ e $\text{img } T_\lambda$ é fechado em \mathcal{H} .

Seja $\xi_0 \in (\text{img } T_\lambda)^\perp = N(T^* - \bar{\lambda}1) = N(T - \bar{\lambda}1)$; assim $T\xi_0 = \bar{\lambda}\xi_0$, e se $\xi_0 \neq 0$ então $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$ e, portanto, $\lambda \in \mathbb{R}$. Suponha então que $\lambda \in \mathbb{R}$; de iii.) vem que $0 = \|T_\lambda\xi_0\| \geq C\|\xi_0\|$ e $\xi_0 = 0$; esta contradição mostra que $\text{img } T_\lambda$ é denso em \mathcal{H} . Portanto i.) e ii.) valem.

Se $\eta \in \mathcal{H}$ e i.) vale, então existe $\xi \in \mathcal{H}$ com $\eta = T_\lambda\xi$. Assim,

$$\|R_\lambda(T)\eta\| = \|R_\lambda(T)T_\lambda\xi\| = \|\xi\| \leq \frac{1}{C}\|T_\lambda\xi\| = \frac{1}{C}\|\eta\|,$$

de forma que $\|R_\lambda(T)\| \leq 1/C$, ficando verificada a observação adicional em iii.). ■

Corolário 29.2. Se $T \in B(\mathcal{H})$ é auto-adjunto, então $\sigma(T)$ é um subconjunto dos números reais contido no intervalo $[-\|T\|, \|T\|]$, e $-\|T\|$ ou $\|T\|$ (ou ambos) pertence(m) ao espectro de T .

Demonstração. Se $\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, então para todo $\xi \in \mathcal{H}$

$$\|T_\lambda\xi\|^2 = \|T_a\xi - ib\xi\|^2 = \|T_a\xi\|^2 + b^2\|\xi\|^2 \geq b^2\|\xi\|^2.$$

Portanto, $\lambda \in \rho(T)$ se $\text{Im } \lambda = b \neq 0$ e $\sigma(T)$ é real. Combinando isto com o Corolário 28.2 e $\sigma(T)$ é fechado, seguem as outras afirmações. ■

Da demonstração do Corolário 29.2, juntamente com o Teorema 29.1, segue o

Corolário 29.3. Se $\text{Im } \lambda \neq 0$ e o operador $T \in B(\mathcal{H})$ é auto-adjunto, então $\|R_\lambda(T)\| \leq 1/|\text{Im } \lambda|$.

Corolário 29.4. Se $T \in B(\mathcal{H})$ é auto-adjunto, então $\sigma_r(T) = \emptyset$.

Demonstração. Se $\sigma_r(T) \neq \emptyset$, existe $\lambda \in \sigma_r(T) \subset \mathbb{R}$ de modo que $\text{img } T_\lambda$ não é denso em \mathcal{H} . Seja $0 \neq \eta \in (\text{img } T_\lambda)^\perp = N(T_\lambda)$; assim, $T_\lambda \eta = 0$ e $\lambda \in \sigma_p(T)$, contradizendo $\lambda \in \sigma_r(T)$. ■

EXERCÍCIO 29.1. Sejam $\{e_j\}_{j \in J}$ uma base ortonormal do espaço \mathcal{H} e $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ um conjunto limitado em \mathbb{R} . Mostre que um operador $T \in B(\mathcal{H})$ de modo que $T e_j = \lambda_j e_j$, para todo $j \in J$, é auto-adjunto e $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_j\}_{j \in J}}$ (a barra indica o fecho do conjunto).

No caso de $T \in B(\mathcal{H})$ auto-adjunto, tem-se que $\langle \xi, T\xi \rangle$ é real para todos $\xi \in \mathcal{H}$, e esses valores estão diretamente relacionados ao espectro de T . Observe que $|\langle \xi, T\xi \rangle| \leq \|T\| \|\xi\|^2$ se $\|\xi\| = 1$.

Corolário 29.5. Sejam $T \in B(\mathcal{H})$ auto-adjunto,

$$m = \inf_{\|\xi\|=1} \langle \xi, T\xi \rangle \quad \text{e} \quad M = \sup_{\|\xi\|=1} \langle \xi, T\xi \rangle.$$

Então $\sigma(T) \subset [m, M]$ e $|m|, |M| \leq \|T\|$.

Demonstração. Basta considerar $\lambda \in \mathbb{R}$. Será mostrado que $\lambda \in \rho(T)$ se $\lambda > M$. O caso $\lambda < m$ trata-se de forma similar. Se $\lambda > M$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$

$$\langle \xi, (\lambda I - T)\xi \rangle \geq (\lambda - M) \|\xi\|^2.$$

Por outro lado,

$$|\langle \xi, (\lambda I - T)\xi \rangle| \leq \|\xi\| \|T_\lambda \xi\|,$$

ou seja, $\|T_\lambda \xi\| \geq (\lambda - M) \|\xi\|$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$, mostrando que $\lambda \in \rho(T)$ pelo Teorema 29.1 com $C = (\lambda - M)$. ■

EXERCÍCIO 29.2. Lembre-se que um operador $T \in B(\mathcal{H})$ é positivo se $\langle \xi, T\xi \rangle \geq 0$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Se T for positivo, mostre que a aplicação

$$\xi, \eta \mapsto [\xi, \eta] := \langle \xi, T\eta \rangle, \quad \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

satisfaz as propriedades que definem um produto interno em \mathcal{H} , exceto (talvez) $[\xi, \xi] = 0 \Rightarrow \xi = 0$. Conclua que vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \xi, T\eta \rangle| \leq \langle \xi, T\xi \rangle^{1/2} \langle \eta, T\eta \rangle^{1/2}$$

(veja o Exercício 17.7).

Proposição 29.6. *Ambos, m e M introduzidos no Corolário 29.5, pertencem ao espectro do operador auto-adjunto T .*

Demonstração. Será mostrado apenas que $m \in \sigma(T)$; o caso de M é análogo. O operador $T_m = T - m\mathbf{1}$ é positivo e, pelo Exercício 29.2, para qualquer $\xi \in \mathcal{H}$ tem-se

$$|\langle T_m \xi, \eta \rangle|^2 \leq \langle \xi, T_m \xi \rangle \langle \eta, T_m \eta \rangle.$$

Escolhendo $\eta = T_m \xi$

$$\|T_m \xi\|^4 \leq \langle \xi, T_m \xi \rangle \langle T_m \xi, T_m^2 \xi \rangle \leq \langle \xi, T_m \xi \rangle \|T_m\|^3 \|\xi\|^2.$$

Assim,

$$\inf_{\|\xi\|=1} \|T_m \xi\|^4 \leq \|T_m\|^3 \inf_{\|\xi\|=1} (\langle \xi, T\xi \rangle - m) = 0,$$

e não existe $C > 0$ como no Teorema 29.1. Portanto $m \in \sigma(T)$. Veja também o Exercício 29.4. ■

Corolário 29.7. *Usando a notação introduzida no Corolário 29.5, se T é auto-adjunto, então*

$$\|T\| = \max\{|m|, |M|\} = \sup_{\|\xi\|=1} |\langle \xi, T\xi \rangle|.$$

Demonstração. A segunda igualdade é clara. Como $m, M \in \sigma(T)$, a primeira igualdade segue das relações

$$\sigma(T) \subset [m, M] \subset [-\|T\|, \|T\|],$$

e $-\|T\|$ ou $\|T\|$ está no espectro de T , já que $r_\sigma(T) = \|T\|$. ■

OBSERVAÇÃO 29.8. Segue do Corolário 29.7 que se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é auto-adjunto e $\langle T\xi, \xi \rangle = 0$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$, então $T = 0$, mesmo em espaços de Hilbert reais. Compare com a Proposição 19.11 e com o Exemplo 19.12.

EXERCÍCIO 29.3. Se $T \in B(\mathcal{H})$ é auto-adjunto, então verifique que: a) $\|T\| = \sup_{\|\xi\|=\|\eta\|=1} |\langle T\xi, \eta \rangle|$; b) autovetores de T correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.

Notas

A teoria espectral padrão dos operadores auto-adjuntos, limitados ou não, culmina com o chamado Teorema Espectral (há resultados similares para operadores normais). É um dos conjuntos de resultados mais interessantes da Matemática. Tais resultados não são tratados neste texto, aparecerá apenas uma versão simplificada para operadores compactos normais no Capítulo 30. Veja o artigo [Steen (1973)] para informações históricas; o Teorema Espectral aparece em vários textos, por exemplo, em [Conway (1985)] e também em [Reed & Simon (1980)].

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 29.4. Considere $T \in B(\mathcal{H})$ auto-adjunto.

- a) Mostre que $\lambda \in \sigma(T)$ se, e somente se, existe uma sequência (ξ_n) em \mathcal{H} , com $\|\xi_n\| = 1$, para todo n , satisfazendo $T_\lambda \xi_n \rightarrow 0$.
- b) Mostre que $\lambda \in \sigma(T)$ se, e somente se, $\inf_{\|\xi\|=1} \|T_\lambda \xi\| = 0$.
- c) As caracterizações em a) e b) acima não valem para todo operador (embora valham para operadores normais). Verifique isto ao considerar o shift à direita em $l^2(\mathbb{N})$, mostrar que zero pertence ao seu espectro, mas como esse operador é uma isometria a) e b) não valem para $\lambda = 0$.

EXERCÍCIO 29.5. Como complemento ao Exercício 29.4, dado $S \in B(\mathcal{H})$ (não necessariamente auto-adjunto), mostre que $\lambda \in \sigma(S)$ se existe (ξ_n) em \mathcal{H} , $\|\xi_n\| = 1$, com $S_\lambda \xi_n \rightarrow 0$. Se λ é um ponto de fronteira de $\sigma(S)$, mostre que vale a recíproca.

EXERCÍCIO 29.6. Use a Proposição 29.6 para mostrar que o espectro de um operador auto-adjunto limitado não é vazio.

EXERCÍCIO 29.7. Mostre que dois operadores auto-adjuntos, que são unitariamente equivalentes entre si, possuem o mesmo espectro. E se não forem auto-adjuntos? (Note que é um caso particular do Exercício 28.5; está incluso por sua importância.)

EXERCÍCIO 29.8. Se P_E é o operador de projeção ortogonal sobre o subespaço fechado próprio $E \subset \mathcal{H}$, determine m e M para P_E .

EXERCÍCIO 29.9. Mostre que se $T \in B(\mathcal{H})$ é auto-adjunto e $T^n = 0$ para algum n , então $T = 0$. E se T for um operador normal?

EXERCÍCIO 29.10. Sejam $T, S \in B(\mathcal{H})$. Mostre que:

- a) Se $T \geq S$ (ou seja, $(T - S)$ é positivo) e $S \geq T$, então $T = S$.
- b) O espectro de T^*T é real e contido em $[0, \infty)$.

- c) S é positivo se, e somente se, S é auto-adjunto e $\sigma(S) \subset [0, \infty)$.
 d) Se T é auto-adjunto, então $(1 + \lambda T^2)^{-1} \in B(\mathcal{H})$ para todo $\lambda \geq 0$.
 e) $(1 + \lambda T^* T)^{-1} \in B(\mathcal{H})$ para todo $\lambda \geq 0$.

EXERCÍCIO 29.11. Demonstre a seguinte versão do Teorema 29.1 para operadores limitados em espaços de Banach. Se $T \in B(B)$, então são equivalentes:

i) $\lambda \in \rho(T)$

ii.) Existe $C > 0$ com $\|T_\lambda \xi\| \geq C\|\xi\|$, para todo $\xi \in B$, e $\text{img } T_\lambda$ é densa em B (e neste caso tem-se $C \leq 1/\|R_\lambda(T)\|$).

EXERCÍCIO 29.12. Seja $T \in B(\mathcal{H})$. Use o Exercício 29.11 para mostrar que se existe $C > 0$ com $\|(T - \lambda 1)\xi\| \geq C\|\xi\|$ e $\|(T^* - \bar{\lambda} 1)\xi\| \geq C\|\xi\|$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$, então $\lambda \in \rho(T)$.

EXERCÍCIO 29.13. Este exercício requer familiaridade com a teoria geral de medida e integração. Mostre que $\sigma(\mathcal{M}_\phi)$, $\mathcal{M}_\phi : L^2_\mu(\Omega) \rightarrow L^\infty_\mu(\Omega)$, com $\phi \in L^\infty_\mu(\Omega)$, é dado por $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo que $\mu(\phi^{-1}B(\lambda; \varepsilon)) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$ ($B(\lambda; \varepsilon)$ designa uma bola aberta em \mathbb{C}).

Capítulo 30

Espectro de Operadores Compactos

Neste Capítulo são discutidas algumas propriedades gerais sobre o espectro de operadores lineares compactos em espaços de Banach. em seguida é discutido o caso importante de operadores compactos normais (auto-adjuntos em particular), e finaliza-se com uma versão do Teorema Espectral para esses operadores.

30.1 Operadores Compactos

Como esperado, a teoria espectral de operadores lineares compactos apresenta algumas similaridades com a teoria espectral em espaços de dimensão finita; por exemplo, será mostrado que, com possível exceção do zero, cada autovalor de um operador compacto é de multiplicidade finita. Contudo, são conhecidos operadores compactos que não possuem autovalores (veja o Exercício 30.5).

Proposição 30.1. *Se $T \in B_0(B)$, então todo $0 \neq \lambda \in \sigma_p(T)$ possui multiplicidade finita, ou seja, $\dim N(T_\lambda) < \infty$.*

Demonstração. Seja B_1 a bola fechada de centro zero e raio igual a um no espaço vetorial $N(T_\lambda)$. Será mostrado que B_1 é compacta e, portanto, $\dim N(T_\lambda) < \infty$ pelo Teorema 2.2. Dada uma sequência $(\xi_n) \subset B_1$, como T é compacto, $(T\xi_n = \lambda\xi_n)$ possui uma subsequência convergente

$(T\xi_{n_j})$ e, assim, $(\xi_{n_j} = T\xi_{n_j}/\lambda)$ também converge a um elemento de B_1 , mostrando que essa bola é compacta. ■

EXERCÍCIO 30.1. Use o seguinte argumento como variante da demonstração da Proposição 30.1: suponha que B_1 não seja compacta; assim deve existir uma seqüência $(\xi_n) \subset B_1$ que não possui subsequência convergente; use a compacidade de T para chegar a uma contradição.

Proposição 30.2. *Se $T \in B_0(B)$, então para todo $\varepsilon > 0$ o número de autovalores λ de T (contados com multiplicidade) com $|\lambda| \geq \varepsilon$ é finito.*

Demonstração. Suponha que se possa escolher $\varepsilon > 0$ de modo que existam infinitos autovalores $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de T com módulo maior ou igual a ε . Pela Proposição 30.1 pode-se supor que esses autovalores são distintos dois a dois e denote por $\{\xi_j\}$ os respectivos autovetores. Lembre-se que este conjunto é linearmente independente (Proposição 27.4).

Denote por $E_0 = \{0\}$ e $E_n = \text{Lin}(\{\xi_1, \dots, \xi_n\})$, que é fechado para todo n . Pelo Lema de Riesz 2.1, existe uma seqüência $\{\eta_n\}$, $\eta_n \in E_n$, $\|\eta_n\| = 1$ e $\|\eta_n - \xi\| \geq 1/2$, para todo $\xi \in E_{n-1}$. O objetivo é mostrar que $\|T\eta_n - T\eta_m\| \geq \varepsilon/2$ para todos n, m distintos, a qual então não possui subsequência convergente, contradizendo a compacidade de T .

Supondo $m < n$, tem-se

$$T\eta_n - T\eta_m = \lambda_n \eta_n + \{(T - \lambda_n \mathbf{1})\eta_n - T\eta_m\}.$$

Claramente $T\eta_m \in E_m$ e, escrevendo $\eta_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j$, vem que

$$(T - \lambda_n \mathbf{1})\eta_n = \left[\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_n) \xi_j \right] \in E_{n-1},$$

de forma que $\zeta_m := -\{(T - \lambda_n \mathbf{1})\eta_n - T\eta_m\}/\lambda_n$ pertence ao subespaço E_{n-1} . Portanto,

$$\|T\eta_n - T\eta_m\| = |\lambda_n| \|\eta_n - \zeta_m\| \geq \frac{|\lambda_n|}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

e $\{T\eta_n\}$ não possui subsequência convergente. ■

Destas proposições (e algum argumento extra) segue o importante

Corolário 30.3. Se $T \in B_0(\mathcal{B})$, então:

- i.) O único ponto de acumulação possível de $\sigma_p(T)$ é o zero.
- ii.) $\sigma_p(T)$ é contável e, se $\lambda \neq 0$, então $\dim N(T_\lambda) < \infty$.
- iii.) Se $\sigma_p(T)$ é infinito, então os autovalores de T podem ser ordenados numa sequência convergindo a zero.
- iv.) Se $\dim \mathcal{B} = \infty$, então zero pertence ao espectro de T .

EXERCÍCIO 30.2. Detalhe a demonstração do Corolário 30.3.

Exemplo 30.4. Todo operador de posto finito é compacto e possui espectro finito. •

Exemplo 30.5. Considere o operador linear $T : l^2(\mathbb{N}) \leftrightarrow$ dado por $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (\xi_2/2, \xi_3/3, \xi_4/4, \dots)$. T é compacto e $0 \in \sigma_p(T)$, pois $T(1, 0, 0, \dots) = 0$. •

Exemplo 30.6. Considere o operador linear $T : l^2(\mathbb{N}) \leftrightarrow$ dado por $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (0, \xi_1/1, \xi_2/2, \xi_3/3, \dots)$. T é compacto e $0 \in \sigma_r(T)$ (veja o Corolário 30.3iv.). Este operador não possui autovalores (Exercício 30.5). •

Exemplo 30.7. Considere o operador linear $T : l^2(\mathbb{N}) \leftrightarrow$ dado por $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (\xi_1/1, \xi_2/2, \xi_3/3, \dots)$. T é compacto e $0 \in \sigma_c(T)$. De fato, zero não é autovalor de T , contudo pertence ao seu espectro, pois $\{1, 1/2, 1/3, \dots\} \subset \sigma_p(T)$ e o espectro é fechado. Sendo este operador auto-adjunto, tem-se que $\sigma_r(T) = \emptyset$. Portanto zero pertence ao espectro contínuo. Pode-se também inferir diretamente que o operador resolvente $R_0(T)$ existe, com domínio denso, mas não é limitado. •

30.2 Operadores Normais

Agora será considerado o caso particular de operadores compactos normais num espaço de Hilbert. Muitos dos resultados adaptam-se para operadores compactos em espaços de Banach, mas com diferentes argumentos (aqui não tratados).

Lema 30.8. Todo operador não-nulo $T \in B(\mathcal{H})$ compacto e auto-adjunto possui um autovalor não-nulo, pois $-||T||$ ou $||T||$ é autovalor de T .

Demonstração. Por ser auto-adjunto, pelo Corolário 29.2, $-\|T\|$ ou $\|T\|$ pertence ao espectro de T (note que este fato não é usado nesta demonstração); usando a compacidade de T será mostrado que um deles é autovalor, o que equivale a mostrar que existe $0 \neq \zeta \in \mathcal{H}$ com $(T^2 - \|T\|^2 \mathbf{1})\zeta = 0$.

Seja (ξ_n) , $\|\xi_n\| = 1$, para todo n , de modo que $\|T\xi_n\| \rightarrow \|T\|$. Sendo T compacto, existe subsequência de $(T\xi_n)$, também denotada por $(T\xi_n)$, convergente; como T é contínuo, $(T^2\xi_n)$ também converge.

A estimativa

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|T^2\xi_n - \|T\xi_n\|^2\xi_n\|^2 = \|T^2\xi_n\|^2 - \|T\xi_n\|^4 \\ &\leq \|T\|^2\|T\xi_n\|^2 - \|T\xi_n\|^4 \rightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

mostra que a seqüência $\eta_n = T^2\xi_n - \|T\xi_n\|^2\xi_n$ converge a zero e, assim,

$$\xi_n = (T^2\xi_n - \eta_n) / \|T\xi_n\|^2$$

converge a um vetor ζ com $\|\zeta\| = 1$. Portanto, denotando por $\lambda = \|T\|$ e lembrando que T é contínuo, $0 = T^2\zeta - \|T\|^2\zeta = T_\lambda T_{-\lambda}\zeta$. Disto segue que ou $T_{-\lambda}\zeta = 0$ e $-\|T\|$ é um autovalor de T , ou $T_{-\lambda}\zeta \neq 0$ e $\|T\|$ é um autovalor de T . ■

Teorema 30.9 (Hilbert-Schmidt). *Se $T \in B_0(\mathcal{H})$ é um operador auto-adjunto, então*

$$\mathcal{H} = \left[\bigoplus_{0 \neq \lambda \in \sigma_p(T)} N(T_\lambda) \right] \oplus N(T).$$

Demonstração. Como T é auto-adjunto $N(T_\lambda) \perp N(T_\mu)$ se $\lambda \neq \mu$, e a soma direta acima está bem-definida. Seja

$$E = \bigoplus_{0 \neq \lambda \in \sigma_p(T)} N(T_\lambda);$$

se $\eta \in E^\perp$, então para todo $\xi_\lambda \in N(T_\lambda)$, $\lambda \neq 0$, tem-se que $\langle T\eta, \xi_\lambda \rangle = \langle \eta, T\xi_\lambda \rangle = \lambda \langle \eta, \xi_\lambda \rangle = 0$, mostrando que $T\eta \in N(T_\lambda)^\perp$. Como isto ocorre para todo $\lambda \in \sigma_p(T)$, segue que $T\eta \in E^\perp$, ou seja, E^\perp é invariante por T ; também tem-se que $\mathcal{H} = E \oplus E^\perp$.

Note que $N(T) \subset E^\perp$; será mostrado que $E^\perp = N(T)$, encerrando a demonstração. Como E também é invariante por T , conclui-se que

$S = T|_{E^\perp}$, a restrição de T a E^\perp , está bem-definida e é um operador auto-adjunto compacto. Se $S \neq 0$, pelo Lema 30.8, existe um autovetor $0 \neq \zeta$ de S com autovalor não-nulo; assim, por construção, $\zeta \in E$ e $\zeta \in E^\perp$, e necessariamente $\zeta = 0$. Isto mostra que $S = 0$, ou seja, $E^\perp = N(T)$. ■

Corolário 30.10. *Se $T \in B_0(\mathcal{H})$ é auto-adjunto, então \mathcal{H} possui uma base ortonormal de autovetores de T .*

Demonstração. Para cada autovalor $\lambda \neq 0$ de T , denote por $d_\lambda = \dim N(T_\lambda) < \infty$ e escolha uma base ortonormal $\{\xi_j^\lambda\}_{j=1}^{d_\lambda}$ de $N(T_\lambda)$. Seja $\{\eta_j\}_{j \in J}$ uma base ortonormal do núcleo de T . Pelo Teorema 30.9,

$$\left[\bigcup_{0 \neq \lambda \in \sigma_p(T)} \{\xi_j^\lambda\}_{j=1}^{d_\lambda} \right] \cup \{\eta_j\}_{j \in J}$$

é uma base ortonormal de \mathcal{H} . ■

Este último resultado se generaliza para operadores normais compactos. Para verificar isso, o seguinte lema será útil. Lembre-se que dois operadores R, S comutam se $RS = SR$.

Lema 30.11. *Se $R, S \in B_0(\mathcal{H})$ são auto-adjuntos e comutam, então \mathcal{H} possui uma base ortonormal de autovetores simultâneos de R e S .*

Demonstração. Para cada autovalor λ de S , $S\xi^\lambda = \lambda\xi^\lambda$, tem-se que $S(R\xi^\lambda) = R(S\xi^\lambda) = \lambda R\xi^\lambda$, e $N(S_\lambda)$ é invariante por R (bem como seu complemento ortogonal). Como o operador restrição $R|_{N(S_\lambda)}$ é auto-adjunto e compacto, pode-se escolher uma base ortonormal de $N(S_\lambda)$ (como no Corolário 30.10) formada por autovetores de R e, logicamente, também autovetores de S . Tomando a união sobre todos os autovalores de S o resultado segue, novamente pelo Corolário 30.10. ■

Corolário 30.12. *Se $T \in B_0(\mathcal{H})$ é normal, então \mathcal{H} possui uma base ortonormal de autovetores de T e vale a decomposição de \mathcal{H} como no Teorema de Hilbert-Schmidt 30.9.*

Demonstração. Basta lembrar que se pode escrever $T = T_R + iT_I$, com T_R, T_I auto-adjuntos e compactos (T^* também é compacto pelo

Corolário 25.3 e T_R, T_I são obtidos de combinações lineares de T e T^* e, sendo T operador normal, T_R comuta com T_I (Exercício 20.4), e então usa-se o Lema 30.11. Note que se $T\xi^\lambda = \lambda\xi^\lambda$, então $T_R\xi^\lambda = (\operatorname{Re} \lambda)\xi^\lambda$ e $T_I\xi^\lambda = (\operatorname{Im} \lambda)\xi^\lambda$, e que autovetores correspondendo a autovalores distintos são ortogonais. ■

Teorema 30.13 (Teorema Espectral). *Sejam T um operador linear compacto e normal em \mathcal{H} , $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{C}$ os autovalores não-nulos de T , para cada j , P_j o projetor ortogonal sobre $N(T\lambda_j)$. Então*

$$T = \sum_j \lambda_j P_j,$$

com a série convergindo em $B(\mathcal{H})$.

Demonstração. Lembre-se que $\dim N(T\lambda_j) < \infty$. Seja P_0 o projetor ortogonal sobre $N(T)$. Pelo Corolário 30.12 tem-se $\mathbf{1} = P_0 + \sum_j P_j$; assim, para todo $\xi \in \mathcal{H}$

$$T\xi = TP_0\xi + T \sum_j P_j\xi = \sum_j T(P_j\xi) = \sum_j \lambda_j P_j\xi.$$

Disto e $P_j P_k = 0$, se $j \neq k$, segue que (supondo que j percorre os naturais, por simplicidade)

$$\begin{aligned} \left\| \left(T - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j \right) \xi \right\|^2 &= \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 \|P_j \xi\|^2 \\ &\leq \left(\max_{j \geq n+1} |\lambda_j|^2 \right) \sum_{j=n+1}^{\infty} \|P_j \xi\|^2 \leq \left(\max_{j \geq n+1} |\lambda_j|^2 \right) \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, $\|T - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j\|^2 \leq \max_{j \geq n+1} |\lambda_j|^2$. Como, pelo Corolário 30.3, λ_j forma uma sequência convergindo a zero, vem que $T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j$ em $B(\mathcal{H})$. ■

EXERCÍCIO 30.3. Mostre que todo operador da forma $\sum_j \lambda_j P_j$, sendo P_j projetores ortogonais em subespaços de dimensão finita dois a dois ortogonais, e $\lambda_j \rightarrow 0$, é compacto e normal. Verifique, além disso, que esse operador é auto-adjunto se, e somente se, $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$.

Corolário 30.14. Se $T \in B_0(\mathcal{H})$ é positivo, então existe um operador positivo compacto S de forma que $S^2 = T$ (S é chamado de raiz quadrada de T , e frequentemente denotado por $T^{1/2}$ ou \sqrt{T}).

Demonstração. Como T é positivo ele é auto-adjunto com todos seus autovalores não-nulos $\lambda_j > 0$. Pelo Teorema Espectral $T = \sum_j \lambda_j P_j$. Defina o operador S por $S = \sum_j \sqrt{\lambda_j} P_j$, o qual é compacto, pois como $\lambda_j \rightarrow 0$ para $j \rightarrow \infty$, S pode ser aproximado por operadores de posto finito em $B(\mathcal{H})$ (explicitamente por $\sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} P_j$). Fica como exercício verificar que $S^2 = T$. ■

OBSERVAÇÃO 30.15. É possível mostrar que S no Corolário 30.14 é o único operador positivo com aquelas propriedades. Veja o Exercício 30.22.

EXERCÍCIO 30.4. Seja $T \in B_0(\mathcal{H})$ positivo. Qual o espectro de \sqrt{T} ?

OBSERVAÇÃO 30.16. Seja $T \in B_0(\mathcal{H})$ normal. Dada uma função limitada $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$, define-se o operador $f(T) := \sum_j f(\lambda_j) P_j$. Qual o espectro pontual de $f(T)$? Pode-se garantir que $f(T)$ é compacto?

Notas

Foi F. Riesz quem percebeu que a propriedade importante na “alternativa de Fredholm” (veja Exercício 30.10) era a compacidade dos operadores lineares envolvidos. Num trabalho de 1916 escrito em húngaro, Riesz adotou a visão de operadores de Fredholm, ao invés das formas bilineares de Hilbert (como já mencionado em outras Notas), e desenvolveu a teoria espectral de operadores compactos em espaços de Banach. Grande parte dos resultados aqui discutidos para espaços de Hilbert vale para espaços de Banach; veja as referências bibliográficas para detalhes.

Exercícios Adicionais

EXERCÍCIO 30.5. Verifique que para o operador T definido no Exemplo 30.6 tem-se $\sigma_p(T) = \sigma_c(T) = \emptyset$. Logo, um operador compacto pode não possuir autovalores; esse operador é normal?

EXERCÍCIO 30.6. Encontre o espectro do operador compacto $T_K : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, dado por $(T_K \psi)(t) = \int_0^1 K(t, s) \psi(s) ds$, com $K(t, s) = (t - s)$.

EXERCÍCIO 30.7. Seja $T \in B(\mathcal{H})$, com $\dim \mathcal{H} = \infty$. Mostre que se existe $C > 0$ com $\|T\xi\| \geq C\|\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$, então T não é compacto.

EXERCÍCIO 30.8. Se $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ é auto-adjunto, mostre que $m = \inf_{\|\xi\|=1} \langle \xi, T\xi \rangle$ e $M = \sup_{\|\xi\|=1} \langle \xi, T\xi \rangle$ são o menor e o maior autovalor de T , respectivamente.

EXERCÍCIO 30.9. Demonstre a Proposição 30.2, no caso de espaço de Hilbert e operadores compactos auto-adjuntos, sem usar o Lema de Riesz.

EXERCÍCIO 30.10. [Alternativa de Fredholm] Seja $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ normal. Considere a equação $T\xi - \lambda\xi = \eta$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathcal{H}$, e a equação homogênea correspondente $T\xi - \lambda\xi = 0$. Mostre que para cada $\lambda \neq 0$, uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades ocorre (note que, neste caso, unicidade implica em existência de solução!):

i.) A equação homogênea possui apenas a solução trivial e a equação original possui uma única solução para cada $\eta \in \mathcal{H}$

ii.) A equação homogênea possui $0 < \dim N(T_\lambda) < \infty$ soluções linearmente independentes, e a equação original ou possui infinitas soluções ou nenhuma solução.

EXERCÍCIO 30.11. Encontre os autovalores e autovetores do operador compacto $T_K : C[0, 1] \rightarrow (T_K\psi)(t) = \int_0^1 K(t, s)\psi(s) ds$ com $K(t, s) = ts(1 - ts)$.

EXERCÍCIO 30.12. Sejam $0 \neq \varphi \in L^2[0, 1]$ e $K(t, s) = \varphi(t)\overline{\varphi(s)}$, $t, s \in [0, 1]$. Mostre que $\lambda = \|\varphi\|_2^2$ é o único autovalor não-nulo do operador $T_K : L^2[0, 1] \rightarrow (T_K\psi)(t) = \int_0^1 K(t, s)\psi(s) ds$. Encontre a autofunção correspondente (note que é comum usar o termo *autofunção* para designar autovetor num espaço vetorial de funções). Determine também as autofunções correspondentes ao autovalor nulo.

EXERCÍCIO 30.13. Fixe $\eta \in \mathcal{H}$ com $\|\eta\| = 1$. Seja $T_\eta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido por $T_\eta\xi = \langle \eta, \xi \rangle \eta$, $\xi \in \mathcal{H}$ (Exercício 26.7). Determine o espectro e o raio espectral de T_η .

EXERCÍCIO 30.14. Seja $T : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ dado por $(T\xi)_n = (1/|n|)(\xi_{n+1} - \xi_{n-1})$, sendo $\xi = (\dots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots)$. Mostre que T é limitado, que seu espectro é real e calcule seu raio espectral.

EXERCÍCIO 30.15. Encontre os autovalores e autovetores do operador compacto $T_K : L^2[0, 1] \rightarrow (T_K\psi)(t) = \int_0^1 K(t, s)\psi(s) ds$, com $K(t, s) = a \sin(t - s)$, $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

EXERCÍCIO 30.16. Seja $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitário, logo normal: mostre que ele só pode ser compacto se $\dim \mathcal{H} < \infty$. Qual a consequência disso sobre o Teorema Espectral 30.13 no caso de espaços de dimensão infinita?

EXERCÍCIO 30.17. Analise o que ocorre com o espectro de T_t do Exercício 25.12 para $t \downarrow 1$. Essa convergência de operadores é uniforme? Justifique.

EXERCÍCIO 30.18. Para $n \in \mathbb{N}$ denote por $S_{(n)}$ uma raiz n -ésima do operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, ou seja, $(S_{(n)})^n = T$ (verifique a existência de $S_{(n)}$ para operadores compactos positivos). Mostre que T é invertível se, e somente se, $S_{(n)}$ é invertível para algum $n \geq 2$, o que por sua vez implica que $S_{(n)}$ é invertível todo todo $n \geq 1$.

EXERCÍCIO 30.19. Mostre que uma sequência (T_n) de operadores positivos em $\mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ converge fortemente a T se, e somente se, $\sqrt{T_n} \xrightarrow{f} \sqrt{T}$. Use isto para concluir que para seqüências crescentes de operadores (ou seja, $(T_n - T_{n-1}) \geq 0$) em $\mathcal{B}_0(\mathcal{H})$, \mathcal{H} complexo, a convergência forte de tais operadores é equivalente à convergência fraca.

EXERCÍCIO 30.20. Sejam $A, T \in B(\mathcal{H})$, com T auto-adjunto de modo que para todo $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, $AR_z(T)A^*$ é compacto. Considere $S = T + A^*A$, uma “perturbação de T ”. Se o número real $\lambda \in \rho(T)$ mas $(1 + AR_\lambda(T)A^*)$ não possui inversa em $B(\mathcal{H})$, mostre que λ é autovalor de S (veja também o Exercício 27.8).

EXERCÍCIO 30.21. Sejam $A, T \in B(\mathcal{H})$ e auto-adjuntos, com A compacto e $AT = TA$. Mostre que $\sigma(T + A) \subset \sigma(T) \cup \sigma_p(T + A)$.

EXERCÍCIO 30.22. Mostre que existe um único operador compacto e positivo S de forma que $S^2 = T$ no Corolário 30.14.

EXERCÍCIO 30.23. Seja $T : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$, $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (0, \xi_2, \xi_3, \dots)$. Mostre que T é limitado, positivo e auto-adjunto, e que $\sqrt{T} = T$.

Soluções de Exercícios

Selecionados

Sol. 1.6: b) Suponha que $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ geram a mesma topologia em X ; será mostrado que essas normas são equivalentes.

Sejam $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ e $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$. Sendo $B_{X_1}(0; 1)$ também aberto em X_2 , esta bola contém uma vizinhança da origem e existe $\varepsilon > 0$ com $B_{X_2}(0; \varepsilon) \subset B_{X_1}(0; 1)$. Dado $0 \neq \xi \in X$, o vetor $\varepsilon\xi/(2\|\xi\|_2)$ pertence a $B_{X_1}(0; 1)$; assim

$$\left\| \frac{\varepsilon\xi}{2\|\xi\|_2} \right\|_1 < 1 \implies \|\xi\|_1 < \frac{2}{\varepsilon}\|\xi\|_2.$$

A outra desigualdade conclui-se de forma similar.

Sol. 1.7: a) Todo subconjunto compacto num espaço métrico é limitado e fechado. Então é suficiente mostrar que para qualquer $r > 0$ a bola fechada $\overline{B}(0; r)$ é compacta em todo espaço normado de dimensão finita.

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de \mathcal{N} ; assim, qualquer $\xi \in \mathcal{N}$ pode ser escrito na forma $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$. Inicialmente será mostrado que neste caso de dimensão finita existe $K > 0$ de modo que $\|\xi\| \geq K \sum_{j=1}^n |\xi_j|$, para todo $\xi \in \mathcal{N}$, ou, de forma equivalente, existe $K > 0$ em que

$$\|\eta\| \geq K, \quad \forall \eta = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j \text{ com } \sum_{j=1}^n |\eta_j| = 1;$$

o caso de vetor nulo é trivial.

Se essa relação não é satisfeita, existe uma sequência $\eta^m = \sum_{j=1}^n \eta_j^m e_j$, com $\sum_{j=1}^n |\eta_j^m| = 1$ e $\|\eta^m\| \rightarrow 0$ para $m \rightarrow \infty$. Como cada sequência $(\eta_j^m)_{m=1}^{\infty}$ é limitada em \mathbb{F} , essa possui subsequência convergente, e usando o processo usual de tomar subsequências consecutivamente, encontra-se $(m_n) \subset \mathbb{N}$ de forma que para todo $1 \leq j \leq n$ existe $\eta_j^0 \in \mathbb{F}$, com $\eta_j^{m_n} \rightarrow \eta_j^0$ quando $m_n \rightarrow \infty$. Definindo $\eta^0 = \sum_{j=1}^n \eta_j^0 e_j$, tem-se uma contradição, pois por um lado $\sum_{j=1}^n |\eta_j^0| \neq 0$ e, por outro, $\|\eta^0\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\eta^m\| = 0$, o que não pode ocorrer já que $\{e_j\}$ é linearmente independente.

Para ver a compacidade de $\overline{B}(0; r)$, considere uma sequência qualquer $\eta^m = \sum_{j=1}^n \eta_j^m e_j$ nessa bola, e usando a relação acima obtém-se que $\sum_{j=1}^n |\eta_j^m| \leq r/K$, para todo m , e então pode-se seguir os argumentos acima para encontrar uma subsequência de (η^m) convergente em $\overline{B}(0; r)$. Portanto essa bola fechada é compacta.

Sol. 1.17: Para $D(t, s)$ considere a sequência $t_n = n$. Como tem-se que $D(t_n, t_m) = D(n, m) \rightarrow 0$ para $n, m \rightarrow \infty$, vem que (t_n) é de Cauchy em (\mathbb{R}, D) ; por outro lado, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(t_n, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{1+n} - \frac{t}{1+|t|} \right|$$

não pode se anular, pois teria-se $\frac{t}{1+|t|} = 1$. o qual não possui solução em \mathbb{R} . Conclui-se que (\mathbb{R}, D) não é completo.

Sol. 2.11: Se $\dim \mathcal{N} < \infty$ a resposta é afirmativa, pois $S(0; 1)$ é compacto e sendo ψ contínua tem-se que $\psi(S(0; 1))$ é compacta em \mathbb{R} , logo é um conjunto limitado.

Se $\dim \mathcal{N} = \infty$ a resposta é negativa. Considere a sequência $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ na esfera $S(0; 1)$, construída a partir do Lema de Riesz, de forma que $\|\xi_n - \xi_k\| \geq 1/2$, para todo $n \neq k$.

Para cada n seja $f_n : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que vale um em $\overline{B}(\xi_n; 1/8)$ e zero no complementar de $B(\xi_n; 1/5)$; tais funções existem pelo Lema de Uryshon e para $n \neq k$ o suporte de f_n é disjunto do suporte de f_k . Assim, a função $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(\xi), \quad \xi \in \mathcal{N},$$

é contínua e $\psi(S(0; 1))$ não é limitado.

Sol. 3.1: Será mostrado um resultado mais geral de uma das implicações, ou seja, que todo subconjunto de um espaço métrico separável é separável. Seja (X, d) separável e $E \subset X$. Se (x_n) é denso em X , para cada $j \in \mathbb{N}$ tem-se $X = \cup_n B(x_n; 1/j)$. Escolha $y_{n,j} \in E_{n,j} := E \cap B(x_n; 1/j)$, $n, j = 1, 2, 3, \dots$, e seja Y a união desses $y_{n,j}$. Afirmação: $Y \subset E$ é denso em E . logo E é separável. De fato, se $x \in E$, para qualquer j existe n de modo que $x \in E_{n,j}$; assim, $d(x, y_{n,j}) < 2/j$ (pela desigualdade triangular).

Sol. 4.11: b) O ponto importante é que $\text{img } f$ é unidimensional (como deveria!). Se $f \in \mathcal{N}^*$ segue que $N(f)$ é fechado por continuidade.

Agora, suponha que para certo funcional f linear sobre \mathcal{N} tenha-se que $N(f)$ é fechado e $f \neq 0$ (o caso de funcional nulo é trivial). Então existe $0 \neq \xi \in \mathcal{N}$ com $f(\xi) \neq 0$. Se f não é contínuo, existem $\|\xi_n\| = 1$ e $(a_n) \subset \mathbb{C}$ com $|a_n| \rightarrow \infty$, de forma que $f(\xi_n) = a_n f(\xi)$, já que $f(\xi)$ gera $\text{img } f$.

Assim, $\eta_n = (\xi_n - a_n \xi) \in N(f)$ e como $\xi_n/a_n \rightarrow 0$, da relação $\eta_n/a_n = \xi_n/a_n - \xi$ tem-se que $\eta_n/a_n \rightarrow -\xi$, e sendo o núcleo fechado, ξ deveria pertencer a $N(f)$. Esta contradição mostra que f é limitado.

Sol. 4.13: Escreva $S = T - (T - S) = T(1 - T^{-1}(T - S))$. Assim, se $\|T^{-1}(T - S)\| < 1$, segue que S é invertível (veja o Exercício 4.7). A condição no enunciado do exercício $\|T^{-1}\| \|(T - S)\| < 1$ implica essa.

Sol. 4.19: Que \mathcal{N} é completo é simples. Se $0 < r < 1$, então

$$f_r(\psi) \leq \int_0^1 \frac{\|\psi_t\|_\infty}{t^r} dt = \frac{\|\psi\|_\infty}{1-r}, \quad \forall \psi \in \mathcal{N},$$

mostrando que $f_r \in \mathcal{N}^*$ e $\|f_r\| \leq 1/(1-r)$. A sequência $\psi_n(t)$ abaixo mostra que $\|f_r\| = 1/(1-r)$.

Para $1 \leq r < 2$ considere $\psi_n(t) = nt$ se $t \leq 1/n$ e igual a 1 se $t \geq 1/n$. Então $\|\psi_n\|_\infty = 1$ e

$$f_r(\psi_n) = \frac{n^{r-1}}{2-r} + \begin{cases} (n^{r-1} - 1)/(r-1) & \text{se } r > 1 \\ \ln n & \text{se } r = 1 \end{cases},$$

mostrando que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_r(\psi_n) = \infty$ para $1 \leq r < 2$; logo f_r não é limitado nesses casos. Para $r \geq 2$ as funções ψ_n não pertencem ao domínio do funcional f_r e o mesmo não pode pertencer ao dual do espaço.

Sol. 5.19: Como se $\xi \neq \eta$ tem-se $d(A(\xi), A(\eta)) < d(\xi, \eta)$, segue que A é contínua, bem como a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\xi) = d(A(\xi), \xi)$; sendo X compacto, essa função assume mínimo $m_0 = f(\xi_0) = d(A(\xi_0), \xi_0)$, para algum $\xi_0 \in X$. A possui ponto fixo se, e somente se, $m_0 = 0$.

Se $m_0 \neq 0$ existe $\xi_0 \neq A(\xi_0)$ e $0 < d(A^2(\xi_0), A(\xi_0)) < f(\xi_0) = m_0$, contradizendo a definição de m_0 ; logo, $m_0 = 0$ e A possui ponto fixo.

Se ξ_0, η_0 são dois pontos fixos distintos de A , então

$$0 < d(\xi_0, \eta_0) = d(A(\xi_0), A(\eta_0)) < d(\xi_0, \eta_0),$$

e essa contradição mostra a unicidade do ponto fixo.

Sendo A contínua, sabe-se que se $(A^{n_j}(\xi))$ é convergente, então converge ao seu único ponto fixo ξ_0 . Agora, por compacidade, para cada $\xi \in X$ a sequência $(A^n(\xi))$ possui subsequência convergente $(A^{n_j}(\xi))$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe N_ε em que se $n_j \geq N_\varepsilon$ tem-se $d(A^{n_j}(\xi), \xi_0) < \varepsilon$. Como para todo n (supondo $A^n(\xi) \neq \xi_0$, para todo n)

$$\begin{aligned} d(A^n(\xi), \xi_0) &= d(A^n(\xi), A^n(\xi_0)) < d(A^{n-1}(\xi), A^{n-1}(\xi_0)) \\ &< d(A^k(\xi), A^k(\xi_0)), \quad \forall k < (n-1), \end{aligned}$$

segue que $d(A^n(\xi), \xi_0) < d(A^{n_j}(\xi), \xi_0) < \varepsilon$ se $n > n_j \geq N_\varepsilon$, ou seja, $A^n(\xi) \rightarrow \xi_0$.

Sol. 5.20: Sejam $\psi_0(t) = t$ e $\phi_0(t) = 0$. Como $d(\psi_0, \phi_0) = 1$ e $d(T\psi_0, T\phi_0) = 3a/2$, segue que T não é uma contração se $a \geq 2/3$. Para quaisquer $\psi, \phi \in C[0, 1]$ tem-se

$$\begin{aligned} |T\psi(t) - T\phi(t)| &\leq a \frac{3\pi}{4} \int_0^t |\psi(s) - \phi(s)| \cos(\pi s/2) ds \\ &\leq d(\psi, \phi) a \frac{3\pi}{4} \int_0^t \cos(\pi s/2) ds \\ &= d(\psi, \phi) \frac{3a}{2} \sin(\pi t/2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |T^2\psi(t) - T^2\phi(t)| &\leq a \frac{3\pi}{4} \int_0^t |T\psi(s) - T\phi(s)| \cos(\pi s/2) ds \\ &\leq a \frac{3\pi}{4} d(\psi, \phi) \frac{3a}{2} \int_0^t \sin(\pi s/2) \cos(\pi s/2) ds \\ &\leq \left(\frac{3a}{4}\right)^2 d(\psi, \phi) (1 - \cos(\pi t)), \end{aligned}$$

e $d(T^2\psi, T^2\phi) \leq 2(3a/4)^2 d(\psi, \phi)$; portanto T^2 é uma contração se $0 \leq a < 4/(3\sqrt{2})$. Aplique o Corolário 5.9.

Sol. 6.7: “ \mathbb{Q} não é um G_δ ”. Se que \mathbb{Q} fosse um G_δ ele seria escrito como intersecção contável de abertos densos em \mathbb{R} . Seu complementar $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ seria, então, uma união contável de fechados com interior vazio, mas isto implica que $\mathbb{R} = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} \{t\} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ também seria uma união contável de fechados com interior vazio, contradizendo o fato de \mathbb{R} ser espaço de Baire. Portanto \mathbb{Q} não é um G_δ .

“O conjunto dos pontos de continuidade de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um G_δ ”. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja A_n o conjunto dos $t \in \mathbb{R}$ para os quais existe um aberto V_t , contendo t , de modo que $|f(s) - f(r)| < 1/n$ para todos $s, r \in V_t$. Tem-se que A_n é aberto, pois se $t \in A_n$, então $V_t \subset A_n$. Agora, da definição de continuidade segue que $\bigcap_n A_n$ é o conjunto de pontos de continuidade de f ; logo tal conjunto é um G_δ .

Sol. 6.12: Como X é separável existe uma seqüência $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ densa em X . Assim, o conjunto dos pontos que possuem órbita densa em X é dado por

$$D = \bigcap_{n,k} \bigcup_m h^m(B(\xi_n, 1/k)), \quad m \in \mathbb{Z}, n, k \in \mathbb{N},$$

logo um G_δ , pois h é homeomorfismo. Se h é transitivo, existe $\xi \in X$ com $\mathcal{O}(\xi) = \{h^m(\xi) : m \in \mathbb{Z}\}$ densa em X ; observando que, para cada $m \in \mathbb{Z}$ tem-se que $\mathcal{O}(h^m(\xi))$ também é densa, conclui-se que neste caso D é um G_δ denso em X ; portanto seu complementar, ou seja, o conjunto de pontos cujas órbitas não são densas, é um F_σ magro.

Sol. 8.8: Suponha $f \in \mathcal{N}^*$ não-nulo (e $\mathcal{N} \neq \{0\}$); então a resposta à questão formulada é sim. Com efeito:

Se $\emptyset \neq A \subset \mathcal{N}$ é aberto, considere $a \in f(A)$; logo existe $\xi \in A$ com $a = f(\xi)$. Será mostrado que $a \in \text{int } f(A)$ (o interior de $f(A)$). Escolha $\eta \in \mathcal{N}$ com $f(\eta) = 1$ (isto é possível pois f é sobrejetor). Por continuidade da multiplicação por escalar, existe $\varepsilon > 0$ em que $(\xi + t\eta) \in A$, $\forall |t| < \varepsilon$. Assim, $f(\xi + t\eta) \in f(A)$, $\forall |t| < \varepsilon$, e como $f(\xi + t\eta) = f(\xi) + t f(\eta) = a + t$, segue que $a \in \text{int } f(A)$.

Valem duas observações. Primeiramente essa solução não usa explicitamente a continuidade do funcional linear f e, segundo, se \mathcal{N} for completo o resultado segue por Aplicação Aberta ($f \neq 0$).

Sol. 8.13: \mathcal{F} é linear e como para todo n vale $(\mathcal{F}\psi)_n \leq \|\psi\|_1$, tem-se que $\|\mathcal{F}\psi\|_\infty \leq \|\psi\|_1$, e levando Riemann-Lebesgue em consideração, segue que $\mathcal{F} \in B(\mathcal{B}, c_0)$. O ponto no exercício é verificar que \mathcal{F} não é sobrejetor. Suponha, então, que esse operador é sobrejetor; por Aplicação Aberta segue que seu inverso \mathcal{F}^{-1} seria limitado. Se $\phi^m = \sum_{n=-m}^m e^{int}$ (que pertence a \mathcal{B}), então $(\mathcal{F}\phi^m)_n = 1$ se $|n| \leq m$ e zero nos outros casos, de forma que $\|\mathcal{F}\phi^m\|_\infty = 1$ para todo m ; contudo, no que segue argumenta-se que $\|\phi^m\|_1 \rightarrow \infty$ para $m \rightarrow \infty$, mostrando que \mathcal{F}^{-1} não é limitado, logo \mathcal{F} não é sobrejetor.

Para estimar adequadamente $\|\phi^m\|_1$, note que

$$\phi^m(t) = \frac{\text{sen}((m+1/2)t)}{\text{sen}(t/2)}, \quad t \neq 0,$$

e $\phi^m(0) = 2m+1$. Assim, lembrando que $|\text{sen}(t)| \leq |t|$, uma estimativa análoga àquela que aparece na demonstração do Corolário 7.6 leva a

$$\|\phi^m\|_1 \geq \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \rightarrow \infty \quad \text{para } m \rightarrow \infty.$$

Sol. 9.14: $T \in B(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ possui gráfico fechado. Como é invertível $T^{-1} : \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1$, tem-se $\mathcal{G}(T^{-1}) = H\mathcal{G}(T)$, em que $H : \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_1$ é o homeomorfismo (isométrico) $H(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1)$; portanto $\mathcal{G}(T^{-1})$ também é fechado. Pelo Teorema do Gráfico Fechado T^{-1} é limitado.

Sol. 9.15: Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $\psi_n(t) = n/(n+t^s)$; tem-se $\|\psi_n\| =$

1, e para todo $t \geq 0$, $|\psi_n(t)| \leq n/(1+t^s)$, ou seja, $\psi_n \in \text{dom } T$. Como $\|(T\psi_n)(t)\| = \|t^s n/(n+t^s)\| = n$, vem que T não é limitado.

Para ver que T é fechado, sejam $\psi_n \rightarrow \psi$ e $T\psi_n = t^s \psi_n \rightarrow \phi$, com convergências uniformes. Como $1+t^s \geq 1$, tem-se, para todo $t \geq 0$,

$$\left| \psi_n(t) - \frac{\psi(t) + \phi(t)}{1+t^s} \right| \leq |(1+t^s)\psi_n(t) - (\psi(t) + \phi(t))|,$$

e como o lado direito dessa desigualdade se anula uniformemente para $n \rightarrow \infty$, conclui-se que

$$\psi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) = \frac{\psi(t) + \phi(t)}{1+t^s}, \quad \text{em } C[0, \infty).$$

Disto segue que $|\psi(t)| \leq (\|\psi\| + \|\phi\|)/(1+t^s)$, ou seja, $\psi \in \text{dom } T$, e que $\phi(t) = t^s \psi(t) = (T\psi)(t)$, concluindo que T é fechado.

Sol. 9.16: Pelo Teorema do Gráfico Fechado, basta mostrar que T é fechado para concluir que é limitado, o que se reduz a mostrar que se $\xi^j \rightarrow 0$ e $T\xi^j \rightarrow \eta$ em \mathcal{B} (para $j \rightarrow \infty$), então $\eta = 0$. Seja $\{e_j\}$ a base canônica de $\mathcal{B} = l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$. Para cada par $j, k \in \mathbb{N}$ defina o funcional linear $f^{j,k} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{F}$, $f^{j,k}(\xi) = \xi_j (Te_j)_k$, o qual é limitado pois $|f^{j,k}(\xi)| \leq \|Te_j\| \|\xi\|$.

Suponha que $\xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j, \dots) \rightarrow 0$ e $T\xi^j \rightarrow \eta$ em \mathcal{B} . Para cada par j, k denote por $\zeta^{j,k} = (\xi_{k+1}^j, \xi_{k+2}^j, \dots)$; assim

$$\xi^j = \sum_{m=1}^k \xi_m^j e_m + S^k(\zeta^{j,k}),$$

e como T e S comutam entre si, tem-se

$$\left[T(S^k(\zeta^{j,k})) \right]_k = \left[S^k(T(\zeta^{j,k})) \right]_k = 0$$

e, portanto,

$$(T\xi^j)_k = \left[\sum_{m=1}^k \xi_m^j T(e_m) \right]_k = \sum_{m=1}^k f^{m,k}(\xi^j).$$

Sendo esses funcionais contínuos e $\xi^j \rightarrow 0$, segue que cada componente

$$\eta_k = \lim_{j \rightarrow \infty} (T\xi^j)_k = \sum_{m=1}^k f^{m,k}(0) = 0,$$

concluindo-se que $\eta = 0$ e T é fechado. Os mesmos argumentos se adaptam para $p = \infty$.

Sol. 10.1: Sejam $z', z'' \in \Lambda_n$; assim, existem r'_2, \dots, r'_{n-1} e r''_2, \dots, r''_{n-1} de forma que $\|\xi_1 + r'_2 \xi_2 + \dots + r'_{n-1} \xi_{n-1} + z' \zeta_n\| < 1$ e $\|\xi_1 + r''_2 \xi_2 + \dots + r''_{n-1} \xi_{n-1} + z'' \zeta_n\| < 1$. Denote $\eta' := r'_2 \xi_2 + \dots + r'_{n-1} \xi_{n-1}$ e $\eta'' := r''_2 \xi_2 + \dots + r''_{n-1} \xi_{n-1}$. Se $0 \leq t \leq 1$, então, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} \|\xi_1 + t\eta' + (1-t)\eta'' + (tz' + (1-t)z'')\zeta_n\| \\ = \|t(\xi_1 + \eta' + z'\zeta_n) + (1-t)(\xi_1 + \eta'' + z''\zeta_n)\| \\ < t + (1-t) = 1, \end{aligned}$$

mostrando que $(tz' + (1-t)z'') \in \Lambda_n$.

Sol. 12.10: Seja $F = \bigcap \{N(f) : f \in \mathcal{N}^* \text{ e } E \subset N(f)\}$. Como cada f é contínuo, segue que F é fechado e, por construção, $E \subset F \Rightarrow \overline{E} \subset F$. Se $\xi_0 \notin \overline{E}$, então por Hahn-Banach existe $f \in \mathcal{N}^*$, $\|f\| = 1$ e $f(\xi_0) = d(\xi_0, \overline{E}) > 0$, ou seja, $\xi_0 \notin F$. Portanto $F \subset \overline{E}$ e $\overline{E} = F$.

Sol. 12.11: a) Informalmente: se $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{**}$, então $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^{***}$.

Em detalhes: É conveniente distinguir as duas aplicações canônicas envolvidas $\hat{\cdot} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^{**}$ e $\check{\cdot} : \mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{B}^{***}$. Como \mathcal{B} é reflexivo, a cada $g \in \mathcal{B}^{**}$ existe $\xi_g \in \mathcal{B}$ com $\hat{\xi}_g = g$. Assim, se $h \in \mathcal{B}^{***}$, para todo $g \in \mathcal{B}^{**}$ tem-se

$$h(g) = h(\hat{\xi}_g) = (h \circ \hat{\cdot})(\xi_g) = u(\xi_g),$$

sendo que $u = (h \circ \hat{\cdot}) \in \mathcal{B}^*$. Segue então

$$h(g) = u(\xi_g) = \hat{\xi}_g(u) = g(u) = \check{u}(g),$$

mostrando que $h = \check{u}$ e $\check{\cdot}$ é sobrejetor, ou seja, \mathcal{B}^* é reflexivo.

b) Serão usadas as mesmas notações para as aplicações canônicas da parte a). Se \mathcal{B} é reflexivo a parte a) mostra que \mathcal{B}^* é reflexivo.

Suponha agora que \mathcal{B}^* seja reflexivo. Se \mathcal{B} não é reflexivo, existe $g \in \mathcal{B}^{**} \setminus \hat{\mathcal{B}}$. Então, sendo \mathcal{B} completo, $\hat{\mathcal{B}}$ é um subespaço fechado próprio de \mathcal{B}^{**} e existe $h \in \mathcal{B}^{***}$ com $h(g) \neq 0$ e $h|_{\hat{\mathcal{B}}} = 0$ (Proposição 12.2). Sendo \mathcal{B}^* reflexivo, existe $f \in \mathcal{B}^*$ com $h = \check{f}$; assim

$$0 \neq h(g) = \check{f}(g) = g(f) \Rightarrow f \neq 0.$$

Por outro lado, para todo $\xi \in \mathcal{B}$,

$$0 = h(\hat{\xi}) = \check{f}(\hat{\xi}) = \hat{\xi}(f) = f(\xi) \Rightarrow f = 0.$$

Tal contradição mostra que \mathcal{B} é reflexivo.

Sol. 13.2: $g \in N(T^a) \Leftrightarrow T^a(g) = 0 \Leftrightarrow (T^a g)(\xi) = 0, \forall \xi \in \mathcal{N}_1 \Leftrightarrow g(T\xi) = 0, \forall \xi \in \mathcal{N}_1$. Como T^a é linear, ele é injetor se, e somente se, $N(T^a) = \{0\}$, e como g representa funcionais contínuos, vem que

$$[g(T\xi) = 0, \forall \xi \in \mathcal{N}_1 \Rightarrow g = 0] \Leftrightarrow [\text{img } T \text{ é densa em } \mathcal{N}_2],$$

ou seja, T^a é injetor se, e somente se, $\text{img } T$ é densa em \mathcal{N}_2 .

Sol. 13.6: Que $N(T^a) = (\text{img } T)^0$ aparece na solução do Exercício 13.2. Para a outra relação: $\xi \in N(T) \Leftrightarrow T(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(T\xi) = 0, \forall g \in \mathcal{N}_2^* \Leftrightarrow (T^a g)(\xi) = 0, \forall g \in \mathcal{N}_2^* \Leftrightarrow \xi \in (\text{img } T^a)^\perp$, ou seja, $N(T) = (\text{img } T^a)^\perp$.

Sol. 13.9: Escreva $c_0 \ni \xi = \sum_{j \geq 1} \xi_j e_j$. Se $f \in c_0^*$, então $f(\xi) = \sum_{j \geq 1} \xi_j \alpha_j$, com $\alpha_j = f(e_j)$. Tomando o elemento $\xi^n \in c_0$ com entradas $\xi_j^n = \overline{\alpha_j} / |\alpha_j|$ (ou nulas se $\alpha_j = 0$) se $1 \leq j \leq n$ e zero se $j > n$, segue que $\|\xi^n\| \leq 1$ e $\|f\| \geq |f(\xi^n)| = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|$, e como isso vale para todo n tem-se que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \in l^1(\mathbb{N})$ and $\|\alpha\|_1 \leq \|f\|$.

Note que a aplicação linear acima $c_0^* \ni f \mapsto \alpha \in l^1(\mathbb{N})$ é injetora, pois $\alpha = 0$ se, e somente se, $f = 0$. Agora será mostrado que tal aplicação é sobrejetora e isométrica. De fato, se $\alpha \in l^1$ então defina $f : c_0 \rightarrow \mathbb{F}$ por $f(\xi) = \sum_{j \geq 1} \xi_j \alpha_j$, logo

$$|f(\xi)| \leq \|\xi\|_\infty \|\alpha\|_1, \quad \forall \xi \in c_0,$$

de forma que $f \in c_0^*$ e $\|f\| \leq \|\alpha\|_1$. Segue também que a aplicação acima satisfaz $\|f\| = \|\alpha\|_1$.

Sol. 14.9: Como $\delta_t : C[a, b] \rightarrow \mathbb{F}$, dado por $\delta_t(\phi) = \phi(t)$, $\phi \in C[a, b]$, é um elemento de $C[a, b]^*$ para todo $t \in [a, b]$, segue que $\psi_n(t) = \delta_t(\psi_n) \rightarrow \delta_t(\psi) = \psi(t)$.

Sol. 14.10: Por Riesz-Markov cada $f \in C[-1, 1]^*$ é representado por uma medida μ finita (boreliana). Assim, para a sequência (ψ_n) dada,

$f(\psi_n) = \int_{[-1,1]} \psi_n d\mu \rightarrow \psi(0)\mu(\{0\})$ pelo Teorema da Convergência Dominada, logo $f(\psi_n)$ é convergente para toda $f \in C[-1,1]^*$. Pelo Exercício 14.9, se ψ_n converge fracamente a alguma φ , então converge pontualmente a φ , mas φ não pode ser representada por uma função contínua.

Sol. 14.13: O enunciado do exercício é equivalente a $\xi \in E = \overline{\text{Lin}(\{\xi_n\})}$. Se $\xi \notin E$, então $\xi \neq 0$ e, pelos corolários de Hahn-Banach, existe $f \in \mathcal{N}^*$ com $f(\xi) \neq 0$ e $f|_E = 0$, o que contradiz $f(\xi_n) \rightarrow f(\xi)$. Portanto, $\xi \in E$.

Sol. 15.6: Será discutido apenas o caso da topologia fraca, pois o outro caso é similar. Como $\dim \mathcal{N} = \infty$, note que $N(f) \neq \{0\}$, $\forall f \in \mathcal{N}^*$. Seja $\{f_1, \dots, f_n\}$ em \mathcal{N}^* linearmente independente (basta tratar este caso), e considere o sistema $f_j(\xi) = 0, 1 \leq j \leq n$, cuja solução é o espaço vetorial $U = \bigcap_{j=1}^n N(f_j)$; $U \neq \{0\}$, pois em caso contrário $\{f_1, \dots, f_n\}$ seria base de \mathcal{N}^* , pois para qualquer $f \in \mathcal{N}^*$ teria-se $U \subset N(f)$ e pela Proposição 15.9 esse funcional seria linearmente gerado por $\{f_1, \dots, f_n\}$. Isto conclui a primeira parte do exercício.

Um aberto básico em $\tau(\mathcal{N}, \mathcal{N}^*)$ é da forma $V(\xi; f_1, \dots, f_n; \varepsilon) = \{\eta \in \mathcal{N} : \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(\xi) - f_j(\eta)| < \varepsilon\}$, o qual contém $\xi + U$, $U = \bigcap_{j=1}^n N(f_j)$, pois para todo $\zeta \in U$ tem-se que

$$\max_{1 \leq j \leq n} |f_j(\xi) - f_j(\xi + \zeta)| = 0 < \varepsilon.$$

Assim, todo aberto não-vazio na topologia fraca ($\dim \mathcal{N} = \infty$) contém elementos de norma arbitrariamente grande (de fato, um subespaço vetorial não-trivial).

Como a imagem inversa pela norma do aberto $(-\infty, 1)$ em \mathbb{R} é $B_{\|\cdot\|}(0; 1)$, o qual, sendo limitado, não é um elemento de $\tau(\mathcal{N}, \mathcal{N}^*)$, tem-se que a norma não é uma aplicação contínua na topologia fraca.

Sol. 15.7: Se $\tau(\mathcal{N}, \mathcal{N}^*)$ fosse gerada por uma norma $\|\cdot\|$, então a bola aberta nessa norma $B_{\|\cdot\|}(0; 1)$ seria um aberto que conteria um subespaço ($\dim \mathcal{N} = \infty$) vetorial U não-trivial (veja a solução do Exercício 15.6); mas isto é impossível, pois se $\xi \in B_{\|\cdot\|}(0; 1) \cap U$, com $\|\xi\| = 1/2$, então $4\xi \in B_{\|\cdot\|}(0; 1)$, o que é um absurdo pois $\|4\xi\| = 2$.

Sol. 15.9: Os abertos básicos de $\tau(X, Y)$ podem ser escolhidos na forma

$$U(\eta; f_1, \dots, f_n; \varepsilon) = \left\{ \xi \in X : \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(\xi) - f_j(\eta)| < \varepsilon \right\},$$

com $\{f_1, \dots, f_n\} \subset Y$.

a) Se $f \in Z^*$, então $\{\xi \in X : |f(\xi)| < 1\} = |f|^{-1}(-\infty, 1)$ é um aberto que contém zero, logo contém $U := U(0; f_1, \dots, f_n; \varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$ e algum conjunto $\{f_1, \dots, f_n\} \subset Y$. Se $\xi \in X$, então denotando por $M = M(\xi) = \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(\xi)|$, se $M \neq 0$ tem-se que

$$\frac{\varepsilon \xi}{2M} \in U \Rightarrow \left| f \left(\frac{\varepsilon \xi}{2M} \right) \right| < 1 \Rightarrow |f(\xi)| < \frac{2}{\varepsilon} M.$$

Se $M(\xi) = 0$ então para todo $t > 0$ $f_j(t\xi) = 0, \forall j$; logo $|f(t\xi)| < 1$, $|f(\xi)| < 1/t$ e fazendo $t \rightarrow \infty$ segue que $f(\xi) = 0$ e a desigualdade também é válida.

b) De a) segue que se $f \in Z^*$, então $\cap_{j=1}^n N(f_j) \subset N(f)$ para algum $\{f_1, \dots, f_n\} \subset Y$ e, pela Proposição 15.9, existem escalares $a_j, 1 \leq j \leq n$, de modo que $f = \sum_{j=1}^n a_j f_j$ e $f \in Y$.

Sol. 16.1: Seja $(f_j) \subset S$. A convergência $f_j \rightarrow f$ na métrica equivale à convergência de $\hat{\xi}_n(f_j) \rightarrow \hat{\xi}_n(f)$ para um conjunto $(\hat{\xi}_n)$ denso em \mathcal{N}^* (veja a demonstração da Proposição 16.2), e como S é compacto, ele é também limitado nessa métrica; agora aplique a Proposição 15.3.

Sol. 16.2: Sendo (f_n) limitado, existe $r > 0$ de modo que essa sequência está contida no conjunto compacto $\overline{B}_{\mathcal{N}^*}(0; r)$ na topologia $\tau(\mathcal{N}^*, \hat{\mathcal{N}})$. Como \mathcal{N} é separável, a correspondente topologia induzida nessa bola é metrizável (Proposição 16.3) e, logo, sequencialmente compacta. Pelo Exercício 16.1, essa convergência métrica é equivalente à convergência fraca* de seqüências.

Sol. 16.3: Como \mathcal{B} é reflexivo, tem-se que $\mathcal{B}^{**} = \hat{\mathcal{B}}$; como \mathcal{B} é separável, segue que $\hat{\mathcal{B}}$ é separável, logo \mathcal{B}^{**} é separável. Pela Proposição 12.4, \mathcal{B}^* é separável.

Sol. 16.7: $\delta_n \in l^2(\mathbb{N})^* = l^2(\mathbb{N})$, $\delta_n(\xi_1, \xi_2, \dots) = \xi_n$. Para todo $\xi \in l^2(\mathbb{N})$ tem-se $\hat{\xi}(\delta_n) = \delta_n(\xi) = \xi_n$ que se anula para $n \rightarrow \infty$, logo $\delta_n \xrightarrow{w^*} 0$.

Por outro lado, como δ_n é “representado” por e_n (elemento da base canônica) em $l^2(\mathbb{N})$, tem-se $\|\delta_n - \delta_k\|_2 = \sqrt{2}$ para todo $n \neq k$ e (δ_n) nem possui subsequência de Cauchy em $l^2(\mathbb{N})$.

Sol. 17.16: Se $S(\xi) = S(\eta)$, então $0 = \langle S(\xi) - S(\eta), S(\xi) - S(\eta) \rangle = \langle S(\xi), S(\xi) \rangle - \langle S(\xi), S(\eta) \rangle - \langle S(\eta), S(\xi) \rangle + \langle S(\eta), S(\eta) \rangle = \langle \xi, \xi \rangle - \langle \xi, \eta \rangle - \langle \eta, \xi \rangle + \langle \eta, \eta \rangle = \|\xi - \eta\|^2$, portanto S é injetor e $S^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ existe.

Se $S^{-1}(\xi_1) = \xi$ e $S^{-1}(\eta_1) = \eta$, como $\langle S(\xi), S(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$ segue que $\langle \xi_1, \eta_1 \rangle = \langle S^{-1}(\xi_1), S^{-1}(\eta_1) \rangle$; sendo S bijetor tal relação vale para todos os vetores do espaço. Nessa relação, se $\xi_1 = S(\xi_2)$, então $\langle S(\xi_2), \eta_1 \rangle = \langle \xi_2, S^{-1}(\eta_1) \rangle$, novamente para todos os vetores de \mathcal{H} .

Agora, para todos $\eta, \xi, \zeta \in \mathcal{H}$ e $a, b \in \mathbb{F}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \langle S(a\xi + b\eta), \zeta \rangle &= \langle a\xi + b\eta, S^{-1}(\zeta) \rangle \\ &= \bar{a}\langle \xi, S^{-1}(\zeta) \rangle + \bar{b}\langle \eta, S^{-1}(\zeta) \rangle \\ &= \bar{a}\langle S(\xi), \zeta \rangle + \bar{b}\langle S(\eta), \zeta \rangle \\ &= \langle aS(\xi), \zeta \rangle + \langle bS(\eta), \zeta \rangle \\ &= \langle aS(\xi) + bS(\eta), \zeta \rangle, \end{aligned}$$

mostrando que $S(a\xi + b\eta) = aS(\xi) + bS(\eta)$, ou seja, que S é linear.

Sol. 18.14: Note que como $\|S(\xi) - S(\eta)\| = \|\xi - \eta\|$, escolhendo $\eta = 0$ obtém-se que $\|S(\xi) - S(0)\| = \|\xi\|$, e $V(\xi) = S(\xi) - S(0)$ é uma isometria em \mathcal{H} . Por polarização real,

$$\langle V(\xi), V(\eta) \rangle = \frac{1}{4} (\|V(\xi) + V(\eta)\|^2 - \|V(\xi) - V(\eta)\|^2);$$

expandindo os quadrados e usando que V é isometria, encontra-se que $\langle V(\xi), V(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$. Como na solução do Exercício 17.16, deduz-se que V é linear.

Sol. 18.15: Se E é invariante por T , então para todo $\xi \in \mathcal{H}$, $TP_E\xi \in E$, o que leva a $P_ETP_E\xi = TP_E\xi$, e $TP_E = P_ETP_E$. Agora, se essa relação vale, então para $\eta \in E$, $T\eta = TP_E\eta = P_ETP_E\eta$, o qual pertence a E . Portanto, $T(E) \subset E$.

Sol. 19.14: Se $T_b\eta = 0$ tem-se que $0 = \|T_b\eta\| \geq c\|\eta\|$ e $\eta = 0$; assim T_b é invertível. Se $\eta = T_b^{-1}\xi$, então $c\|T_b^{-1}\xi\| \leq \|\xi\|$ e T_b^{-1} é limitado. Agora

se $\zeta \in \overline{\text{img } T_b}$, existe $T_b \eta_n \rightarrow \zeta$, e da desigualdade na hipótese segue que η_n é de Cauchy (já que $T_b \eta_n$ é Cauchy), logo convergente $\eta_n \rightarrow \xi$. Sendo T contínuo, $T\xi = \zeta$ e $\zeta \in \text{img } T_b$; logo $\text{img } T_b$ é fechado.

Sol. 20.4: Para $T \in B(\mathcal{H})$ defina $T_R = (T + T^*)/2$ e $T_I = (T - T^*)/(2i)$; é imediato que $T = T_R + iT_I$ e $T^* = T_R - iT_I$. Se T_R comuta com T_I segue diretamente que T comuta com seu adjunto, logo T é normal. Agora, se T comuta com T^* , então usando essa decomposição encontra-se $-i(T_R T_I - T_I T_R) = i(T_R T_I - T_I T_R)$, e $(T_R T_I - T_I T_R) = 0$. Explicitando $TT^* = \mathbf{1} = T^*T$ e igualando as partes reais e imaginárias encontra-se a caracterização dos operadores unitários.

Sol. 20.9: a) Combine

$$\|T\xi\|^2 - \|T^*\xi\|^2 = \langle T\xi, T\xi \rangle - \langle T^*\xi, T^*\xi \rangle = \langle \xi, (T^*T - TT^*)\xi \rangle$$

com a Proposição 19.11.

d) De $(1 - T)\xi = \xi - T\xi$ vem que $\xi \in N(1 - T)$ se, e somente se, $T\xi = \xi$; assim, $\text{img } T \supset N(1 - T)$. Usando que $T^2 = T$, se $\xi \in \text{img } T$, então $\xi = T\eta$ e $T\xi = T^2\eta = T\eta = \xi$, mostrando que, de fato, $\text{img } T = N(1 - T)$, logo um conjunto fechado. Como $(1 - T)^2 = 1 - T$, de forma similar conclui-se que $\text{img } (1 - T) = N(T)$.

Sendo T normal, $\|T\xi\| = \|T^*\xi\|$ e $N(T) = N(T^*)$. Combinando as relações acima com $N(T^*) = (\text{img } T)^\perp$, tem-se que $\text{img } (1 - T) = (\text{img } T)^\perp$ e $\text{img } T = (\text{img } (1 - T))^\perp$. Assim.

$$\begin{aligned} \langle T\xi, \eta \rangle &= \langle T\xi, T\eta + (1 - T)\eta \rangle = \langle T\xi, T\eta \rangle \\ &= \langle \xi - (1 - T)\xi, T\eta \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle, \end{aligned}$$

e T é auto-adjunto, logo operador de projeção ortogonal pelo Teorema 20.11.

Sol. 21.2: Partindo-se da definição de base ortonormal, basta combinar a Proposição 3.4 (ou seja, que \mathcal{H} é separável se, e somente se, ele possui um conjunto contável (linearmente independente) total) com o processo de Gram-Schmidt.

Sol. 21.5: a) Seja $(\xi_j)_j$ ortonormal em \mathcal{H} ; então $\|\xi_j - \xi_k\|^2 = 2$ se $j \neq k$. Portanto não possui subsequência de Cauchy. Pela Desigualdade

de Bessel, para todo $\xi \in \mathcal{H}$ a série $\sum_j |\langle \xi_j, \xi \rangle|^2$ é convergente, logo $\langle \xi_j, \xi \rangle \rightarrow 0$ se $j \rightarrow \infty$; conclui-se que $\xi_j \xrightarrow{w} 0$.

Sol. 21.10: Sejam $f \in \mathcal{H}^*$, $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma base ortonormal de \mathcal{H} e $a_\alpha = f(\xi_\alpha)$. Se J_f denota o conjunto de índices $\alpha \in J$ de modo que $a_\alpha \neq 0$, será mostrado inicialmente que J_f é contável. Considere o subconjunto finito ξ_1, \dots, ξ_n e $\delta^2 = \sum_{j=1}^n |a_j|^2$; se $\delta > 0$, introduza $\xi := 1/\delta \sum_{j=1}^n \overline{a_j} \xi_j$ e, por Pitágoras, $\|\xi\| = 1$ e $f(\xi) = \delta$; logo $\|f\| \geq |f(\xi)| = \delta$ e no máximo $n-1$ desses ξ_α 's pode satisfazer $|a_\alpha| > \|f\|/\sqrt{n}$. Disto segue que J_f é contável.

Restringindo J a J_f e, para facilitar a notação, supondo que $J_f = \mathbb{N}$ (se J_f é finito o argumento abaixo se adapta), como $\sum_{j=1}^n |a_j|^2 \leq \|f\|^2$ para todo n , segue que $\sum_{j=1}^n \overline{a_j} \xi_j$ é sequência de Cauchy e converge a $\eta = \sum_j \overline{a_j} \xi_j$. Agora, para $\xi = \sum_\alpha \langle \xi_\alpha, \xi \rangle \xi_\alpha$ (soma sobre conjunto contável) é fácil verificar que $f(\xi) = \langle \eta, \xi \rangle$, ou seja, $f = f_\eta$. Portanto, γ é sobrejetora.

Sol. 22.3: Sendo $t \mapsto \langle \xi, \psi(t) \rangle$ mensurável para todo $\xi \in \mathcal{H}$, então se (ψ_j) é uma base ortonormal (contável) de \mathcal{H} , por Parseval

$$\|\psi'(t)\|^2 = \sum_j |\langle \xi_j, \psi(t) \rangle|^2,$$

seguindo que $t \mapsto \|\psi(t)\|^2$ é limite de mensuráveis, logo também é mensurável. Por polarização vem que $t \mapsto \langle \phi(t), \psi(t) \rangle$ é mensurável.

Sol. 22.9: Denote $E = \{\xi \in \mathcal{H} : U\xi = \xi\}$ e $F = \{\xi \in \mathcal{H} : U^*\xi = \xi\}$; verifica-se facilmente que ambos são subespaços vetoriais fechados. Se $\xi \in E$, então $U\xi = \xi$, $\xi = U^*U\xi = U^*\xi$, e $E \subset F$. De forma análoga mostra-se que $F \subset E$; logo, $E = F$.

Como $E = N(1-U)$ e $(1-U)$ é normal, segue do Exercício 20.9 que $E = (\text{img}(1-U))^\perp$; assim, $\mathcal{H} = E \oplus \overline{\text{img}(1-U)}$.

Se $\xi \in E$, então $U^j \xi = \xi$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, e $T_n \xi \rightarrow \xi$. Se $\xi \in \text{img}(1-U)$, então $\xi = (1-U)\eta$ e $U^j \xi = (U^j - U^{j+1})\eta$, de forma que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n U^j \xi = \frac{1}{n+1} (\eta - U^{n+1} \eta) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Agora, se $\xi \in E^\perp = \overline{\text{img}(1-U)}$, aproxima-se este vetor por uma sequência $\xi_k = (1-U)\eta_k$ em $\text{img}(1-U)$, e da desigualdade triangular segue que o limite acima também se anula para tais vetores. Como qualquer vetor $\xi \in \mathcal{H}$ se decompõe $\xi = P_E\xi + P_{E^\perp}\xi$, o resultado segue.

Sol. 22.13: a) Sendo $T(t)$ contínuo, vem que $t \mapsto \langle \eta, T(t)\xi \rangle$ é mensurável.

b) Como para cada $\xi \in \mathcal{H}$, $T(t)\xi$ converge para $t \rightarrow \infty$, segue por Banach-Steinhaus que $M = \sup_{t \in [0, \infty)} \|T(t)\| < \infty$; assim,

$$\int_0^\infty \|e^{-\delta t} T(t)\| dt \leq M \int_0^\infty e^{-\delta t} dt = \frac{M}{\delta},$$

e $\int_0^\infty e^{-\delta t} T(t)\xi dt$ está bem-definido (Proposição 22.8).

Agora, para cada $\varepsilon > 0$ existe $s \in \mathbb{R}$ com $\|(S - T(t))\xi\| < \varepsilon$ se $t > s$. Assim, a integral $\delta \int_0^\infty e^{-\delta t} T(t)\xi dt$ iguala-se a

$$\delta \int_0^s e^{-\delta t} T(t)\xi dt + \delta \int_s^\infty e^{-\delta t} (T(t) - S)\xi dt + \delta \int_s^\infty e^{-\delta t} S\xi dt.$$

Para $\delta \rightarrow 0^+$ a primeira integral se anula. A segunda integral

$$\leq \delta \int_s^\infty e^{-\delta t} \|(T(t) - S)\xi\| dt \leq \varepsilon \delta \int_s^\infty e^{-\delta t} dt \leq \varepsilon;$$

enquanto a terceira integral

$$= \left(\delta \int_s^\infty e^{-\delta t} dt \right) S\xi = e^{-\delta s} S\xi$$

converge a $S\xi$ para $\delta \rightarrow 0^+$. Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, segue o resultado proposto.

Sol. 24.3: É uma consequência direta do Teorema 2.2.

Sol. 24.6: a) Como $\mathcal{N}_1 = \bigcup_{j=1}^\infty B(0; j)$, vem que para $T : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$, $\text{img } T = \bigcup_{j=1}^\infty T(B(0; j))$. Para concluir o exercício, basta mostrar que para cada $j \in \mathbb{N}$ o conjunto $T(B(0; j))$ possui um subconjunto contável denso.

Se T é compacto, $TB(0; j)$ é totalmente limitado; assim, para cada $m \in \mathbb{N}$ ele pode ser coberto por um número finito de bolas abertas

de raio $1/m$, centradas em pontos de $TB(0; j)$. A união dos centros dessas bolas abertas para todo $m \in \mathbb{N}$ é um conjunto contável denso em $TB(0; j)$.

Sol. 24.12: Note que na demonstração da Proposição 12.6 os operadores T_j são de posto um, logo compactos. Portanto, aquela demonstração usa apenas o fato de $B_0(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ ser completo para concluir que \mathcal{N}_2 é completo. Em resumo, apenas substitua $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ por $B_0(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ naquela demonstração.

Sol. 24.13: Considere, para facilitar a notação, $L^2[0, 2\pi]$; então a sequência $\psi_n(t) = e^{int}/\sqrt{2\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, é ortonormal e converge fracamente a zero; como $\|\mathcal{M}_\phi \psi_n\|_2 = \|\phi(t)\|_2 \neq 0$, para todo n , $\mathcal{M}_\phi \psi_n$ não converge a zero e esse operador não é compacto pela Proposição 24.9.

Sol. 25.3: Para $\eta \in \mathcal{E}$ tem-se $T\eta \in \mathcal{N}$ e $\widehat{T}\eta \in \mathcal{N}^{**}$. Assim, para todo $g \in \mathcal{N}^*$, $(T^a g) \in \mathcal{E}^*$ e como

$$\widehat{T}\eta(g) = g(T\eta) = (T^a g)(\eta) = \check{\eta}(T^a g) = (T^{aa}\check{\eta})(g),$$

conclui-se que $\widehat{T}\eta = T^{aa}\check{\eta}$.

Sol. 25.4: Sejam T de posto finito e $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ uma base ortonormal de $\text{img } T$. Assim, para todo $\xi \in \mathcal{H}$ tem-se $T\xi = \sum_{j=1}^n a_j \xi_j$ e segue que $a_j = \langle \xi_j, T\xi \rangle = \langle T^* \xi_j, \xi \rangle$; denotando $\eta_j = T^* \xi_j$, encontra-se a forma geral de operadores de posto finito em espaços de Hilbert

$$T \cdot = \sum_{j=1}^n \langle \eta_j, \cdot \rangle \xi_j.$$

Desta expressão segue que $T^* \cdot = \sum_{j=1}^n \langle \xi_j, \cdot \rangle \eta_j$.

Suponha que $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ é linearmente dependente; pode-se supor que $\eta_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \eta_j$. Assim,

$$T\xi = \sum_{j=1}^n \langle \eta_j, \xi \rangle \xi_j = \sum_{j=1}^{n-1} \langle \eta_j, \xi \rangle (\xi_j + \bar{a}_j \xi_n),$$

e $\dim \text{img } T \leq (n-1)$; esta contradição com a hipótese de que $\dim \text{img } T = n$, mostra que $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ é linearmente independente e $\dim \text{img } T^* = n$.

Sol. 25.8: Se $T \in B(C(X))$, então para quaisquer

$$\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \subset X \quad \text{e} \quad \{f_1, \dots, f_n\} \subset C(X),$$

o operador $(T_n\psi) = \sum_{j=1}^n (T\psi)(\xi_j) f_j$, $\psi \in C(X)$, pertence a $B_f(C(X))$.

Se T é compacto, então $T\overline{B}(0; 1)$ é limitado e equicontínuo, assim para quaisquer $\varepsilon > 0$ e $\xi \in X$ existe $B(\xi; r_\xi)$ de forma que para todo η nessa bola $|(T\psi)(\xi) - (T\psi)(\eta)| < \varepsilon$, $\forall \psi \in \overline{B}(0; 1)$. Sendo X compacto, ele é coberto por um número finito dessas bolas $X = \cup_{j=1}^n B(\xi_j; r_j)$. Tomando $\{f_1, \dots, f_n\}$ como a partição da unidade associada a essas bolas (ou seja, $0 \leq f_j \leq 1$, $f_j = 0$ fora de $B(\xi_j; r_j)$ e, para todo $\xi \in X$, $\sum_{j=1}^n f_j(\xi) = 1$) tem-se, para $\psi \in \overline{B}(0; 1)$,

$$\begin{aligned} |(T_n\psi)(\xi) - (T\psi)(\xi)| &= \left| \sum_{j=1}^n (T\psi)(\xi_j) f_j(\xi) - (T\psi)(\xi) f_j(\xi) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |(T\psi)(\xi_j) - (T\psi)(\xi)| f_j(\xi). \end{aligned}$$

Lembrando que $f_j(\xi) \neq 0$ só pode ocorrer se $\xi \in B(\xi_j; r_j)$, vem que cada termo na última soma é nulo, com a possível exceção de apenas um deles que é $< \varepsilon$; portanto, $\|T_n\psi - T\psi\| < \varepsilon$, $\forall \psi \in \overline{B}(0; 1)$, mostrando que $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$, e $B_f(C(X))$ é denso em $B_0(C(X))$.

Sol. 27.5: Pelo Teorema 27.6, se $\lambda_0 \in \rho(T)$ e $\|R_{\lambda_0}(T)\| |\lambda - \lambda_0| < 1$, então $\lambda \in \rho(T)$. Assim, se $\lambda \in \sigma(T)$, necessariamente $\|R_{\lambda_0}(T)\| |\lambda - \lambda_0| \geq 1$, ou seja,

$$\|R_{\lambda_0}(T)\| \geq \frac{1}{|\lambda - \lambda_0|}, \quad \forall \lambda \in \sigma(T),$$

em particular vale o que pede o exercício (lembre-se que $\sigma(T) \neq \emptyset$).

Sol. 28.1: Seja $S = T_1 T_2 \cdots T_n$. Se cada T_j é invertível em $B(\mathcal{B})$, é claro que $S^{-1} = T_n^{-1} \cdots T_1^{-1}$ existe e é limitado. Agora suponha que $S^{-1} \in B(\mathcal{B})$; então

$$S^{-1} T_2 T_3 \cdots T_n, \quad T_2 T_3 \cdots T_n S^{-1}$$

são limitados e inversas à esquerda e à direita de T_1 , respectivamente (basta fazer o produto para verificar isto). De forma similar para T_j ,

$j \geq 2$. Ocorre que se um elemento u possui inversa à esquerda u_e e também à direita u_r , esses elementos inversos coincidem. De fato, tem-se $uu_d = 1$ e $u_e u = 1$; multiplicando-se adequadamente essas relações por u_e e u_d obtém-se

$$u_e u u_d = u_d, \quad u_e u u_d = u_e,$$

e $u_e = u_d$.

Sol. 28.15: Como $(T^n)^* = (T^*)^n$, é claro que T^n também é normal se T o for. Nesse caso, como $\sigma(T^n) = \sigma(T)^n$,

$$\begin{aligned} \|T^n\| &= r_\sigma(T^n) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T^n)\} = \sup\{|\lambda^n| : \lambda \in \sigma(T)\} \\ &= (\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\})^n = r_\sigma(T)^n = \|T\|^n. \end{aligned}$$

Sol. 29.5: Se existe tal (ξ_n) , então λ não pode pertencer a $\rho(S)$, pois teria-se $1 = \|\xi_n\| = \|R_\lambda(S)S_\lambda \xi_n\| \leq \|R_\lambda(S)\| \|S_\lambda \xi_n\| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$.

Se λ é ponto de fronteira de $\sigma(S)$ (então pertence ao espectro, pois esse é fechado), então existe $(\lambda_n) \subset \rho(S)$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Como pelo Corolário 27.10 $\|R_{\lambda_n}(S)\| \geq 1/d(\lambda_n, \sigma(S))$, pode-se associar uma sequência sem elementos nulos $(\eta_n) \subset \mathcal{H}$ de modo que

$$\left\| R_{\lambda_n}(S) \frac{\eta_n}{\|\eta_n\|} \right\| \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

e simultaneamente com $\xi_n = R_{\lambda_n}(S)\eta_n$ normalizado. Assim, $1 = \|\xi_n\| = \|R_{\lambda_n}(S) \frac{\eta_n}{\|\eta_n\|}\| \|\eta_n\|$, e segue que $\|\eta_n\| \rightarrow 0$; assim,

$$\|S_\lambda \xi_n\| = \|\eta_n + (\lambda_n - \lambda)\xi_n\| \leq \|\eta_n\| + |\lambda_n - \lambda| \rightarrow 0. \quad n \rightarrow \infty.$$

Portanto, (ξ_n) é a sequência procurada.

Sol. 29.10: d) Seja $S = 1 + \lambda T^2$ ($\lambda \geq 0$). Para todo $\xi \in \mathcal{H}$ tem-se que $\|S\xi\|^2 = \|\xi\|^2 + \lambda^2 \|T^2 \xi\|^2 + 2\lambda \langle T\xi, T\xi \rangle \geq \|\xi\|^2$. Do Teorema 29.1 conclui-se que $0 \notin \sigma(S)$, logo $(1 + \lambda T^2)^{-1} \in B(\mathcal{H})$ para todo $\lambda \geq 0$.

e) Idêntica à parte d), pois o fato importante foi que T^2 é positivo, o que também ocorre com T^*T e TT^* .

Sol. 29.13: Se existe $\varepsilon_0 > 0$ com $\mu(\phi^{-1}B(\lambda; \varepsilon_0)) = 0$, então $Q = \mathcal{M}_{1/(\phi-\lambda)}$ satisfaz [denotando $\Omega' = \Omega \setminus \phi^{-1}B(\lambda; \varepsilon_0)$]

$$\begin{aligned} \|Q\psi\|_2^2 &= \int_{\Omega} \left| \frac{1}{\phi(t) - \lambda} \right|^2 |\psi(t)|^2 d\mu(t) \\ &= \int_{\Omega'} \left| \frac{1}{\phi(t) - \lambda} \right|^2 |\psi(t)|^2 d\mu(t) \\ &\leq \int_{\Omega'} \frac{1}{\varepsilon_0^2} |\psi(t)|^2 d\mu(t) \leq \frac{1}{\varepsilon_0^2} \|\psi\|_2^2, \quad \forall \psi \in L^2_{\mu}(\Omega), \end{aligned}$$

mostrando que Q é limitado com $\|Q\| \leq 1/\varepsilon_0$, e como $Q\mathcal{M}_{(\phi-\lambda)} = \mathcal{M}_{(\phi-\lambda)}Q = 1$, segue que $\lambda \in \rho(\mathcal{M}_{\phi})$.

Agora, se $\lambda \in \rho(\mathcal{M}_{\phi})$ existe um operador limitado R (não-nulo) de forma que $R\mathcal{M}_{(\phi-\lambda)} = \mathcal{M}_{(\phi-\lambda)}R = 1$; assim, para toda $\psi \in L^2_{\mu}(\Omega)$ tem-se $\|\psi\|^2 \leq \|R\|^2 \|\mathcal{M}_{(\phi-\lambda)}\psi\|^2$, ou seja,

$$0 \leq \int_{\Omega} \left(|\phi(t) - \lambda|^2 - \frac{1}{\|R\|^2} \right) |\psi(t)|^2 d\mu(t),$$

concluindo-se que $1/\|R\| \leq |\phi(t) - \lambda|$ μ -qtp; em outros termos, esse resultado diz que $\mu(\phi^{-1}B(\lambda; 1/\|R\|)) = 0$.

Sol. 30.2: *iv.)* Seja $T \in B_0(\mathcal{B})$; se zero não pertence ao espectro de T , então $T^{-1} = R_0(T) \in B(\mathcal{B})$ e $1 = TT^{-1}$ é um operador compacto; então $\overline{B}(0; 1) = 1(\overline{B}(0; 1))$ é um conjunto compacto e, portanto, $\dim \mathcal{B} < \infty$.

Sol. 30.20: Como S é auto-adjunto, seu espectro é real; por isso restringe-se a $\lambda \in \mathbb{R}$. Tomando uma sequência $z_n \rightarrow \lambda$, com $\text{Im } z_n \neq 0$, tem-se que

$$\|AR_{z_n}(T)A^* - AR_{\lambda}(T)A^*\| \leq \|A\|^2 \|R_{z_n}(T) - R_{\lambda}(T)\| \rightarrow 0$$

por continuidade, logo, pelo Teorema 24.11, $AR_{\lambda}(T)A^*$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(T)$; note que é também auto-adjunto para λ real.

Por hipótese, $(1 + AR_{\lambda}(T)A^*)$ não possui inversa em $B(\mathcal{H})$, então $-1 \in \sigma(AR_{\lambda}(T)A^*)$ e por compacidade deste operador é autovvalor assim, existe $0 \neq \xi \in \mathcal{H}$ em que $-\xi = AR_{\lambda}(T)A^*\xi = A\eta$, sendo $0 \neq \eta = R_{\lambda}(T)A^*\xi$. Agora,

$$S_{\lambda}\eta = T_{\lambda}\eta + A^*A\eta = T_{\lambda}R_{\lambda}(T)A^*\xi + A^*(-\xi) = 0,$$

mostrando que η é autovetor de S associado ao autovalor λ .

Sol. 30.21: Se $\lambda \in \sigma(T + A) \cap \rho(T)$, então $\lambda \in \mathbb{R}$ e, da relação,

$$T + A - \lambda 1 = (T - \lambda 1) [1 + R_\lambda(T)A]$$

segue que -1 é um autovalor do operador compacto e auto-adjunto $R_\lambda(T)A$ (pois $R_\lambda(T) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$), e o núcleo de $T + A - \lambda 1$ não é trivial, ou seja, λ é autovalor de $T + A$. Note que a comutatividade entre T e A só é usada para concluir que $R_\lambda(T)A$ é auto-adjunto, mas, de fato, esta solução vale mesmo sem a hipótese de comutatividade (basta saber que, excetuando o zero, o espectro de qualquer operador compacto é formado exclusivamente de autovalores).

Sol. 30.22: Denote por ξ_j os autovetores de $T = \sum_j \lambda_j P_j$, e $S = \sum_j \sqrt{\lambda_j} P_j$. Seja Q um operador compacto positivo com $Q^2 = T$; pretende-se concluir que $Q = S$. Da relação $QT = QQ^2 = Q^2Q = TQ$ e do Lema 30.11, tem-se que $Q\xi_j = q_j\xi_j$, para todo j (q_j são os autovalores de Q), e isto implica que $QS = SQ$. Como $(S - Q)$ é auto-adjunto, ambos os operadores $R_1 = (S - Q)S(S - Q)$ e $R_2 = (S - Q)Q(S - Q)$ são positivos e

$$R_1 + R_2 = (S - Q)(S^2 - Q^2) = (S - Q)(T - T) = 0;$$

logo, pela Proposição 19.11, $R_1 = R_2 = 0$. Agora

$$(S - Q)^4 = (S - Q)(S - Q)^3 = (S - Q)(R_1 - R_2) = 0,$$

e, pela Proposição 20.7*n*.), segue que

$$\|S - Q\|^4 = \|(S - Q)^4\| = 0.$$

Portanto $Q = S$.

Bibliografia

- [*Bachman & Narici* (1966)] G. Bachman e L. Narici, *Functional Analysis*, Nova Iorque, Academic Press
- [*Blank, Ex & Havl* (1994)] J. Blank, P. Exner and M. Havlíček. *Hilbert Space Operators in Quantum Physics*, Nova Iorque. AIP Press
- [*Conway* (1985)] J. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Berlim, Springer-Verlag
- [*de Oliveira* (2009)] C. R. de Oliveira. *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*. Basel, Birkhäuser
- [*Hirsch & Lacombe* (1999)] F. Hirsch e G. Lacombe, *Elements of Functional Analysis*, Berlim, Springer-Verlag
- [*Kreyszig* (1978)] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Nova Iorque, John Wiley & Sons
- [*Kubrusly* (2001)] C. S. Kubrusly. *Elements of Operator Theory*. Boston, Birkhäuser
- [*Reed & Simon* (1980)] M. Reed e B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I. Functional Analysis*, 2ª edição. Nova Iorque, Academic Press
- [*Rudin* (1973)] W. Rudin, *Functional Analysis*, Nova Iorque, McGraw-Hill
- [*Rudin* (1974)] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 2ª edição, Nova Iorque, McGraw-Hill
- [*Simmons* (1963)] G. F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, Londres, McGraw-Hill

[Thayer (1987)] J. Thayer, *Operadores Auto-Adjuntos e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro, Projeto Euclides-CNPq

[Schechter (1971)] M. Schechter, *Principles of Functional Analysis*, Nova Iorque, Academic Press

Clássicos e Históricos

[Banach (1932)] S. Banach, *Theorie des Opérations Linéaires*, Varsóvia, Monografia Matemática vol. 1 (publicado também em 1955, em Nova Iorque, por Chelsea Publ. Co.)

[Birkhoff & Kreyszig (1984)] G. Birkhoff e E. Kreyszig, *The Establishment of Functional Analysis*, *Historia Math.* **11**, 258–321

[Brezis (1983)] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle*, Paris, Masson

[Dieudonné (1981)] J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, Oxford, North-Holland

[Dunford & Schwartz (1958, 1963)] N. Dunford e J. Schwartz, *Linear Operators I e II*, Nova Iorque, Interscience

[Buskes (1993)] G. Buskes, *The Hahn-Banach Theorem Surveyed*, *Dissertationes Math.* **327**

[Hochstadt (1979)] H. Hochstadt, *Eduard Helly, Father of the Hahn-Banach Theorem*. *Math. Intell.* **2**, 123–125

[Kato (1966)] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Berlin, Springer-Verlag

[Lusternik & Sobolev (1989)] L. Lusternik e V. Sobolev, *Précis d'Analyse Fonctionnelle*, Moscou, Mir

[Nachbin (1950)] L. Nachbin. *A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **68**, 28–46

[Riesz & Sz.-Nagy (1955)] F. Riesz e B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, Nova Iorque, F. Ungar Publ. Co.

[Steen (1973)] L. A. Steen, *Highlights in The History of Spectral Theory*, *Amer. Math. Monthly* **80**, 359–381

- [Stone (1932)] M. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Spaces and Their Applications to Analysis*, Nova Iorque, Amer. Math. Soc. Collq. Publ., vol. 15
- [Swartz (1990)] C. Swartz, *The Evolution of the Uniform Boundedness Principle*, Math. Chronicle 19, 1-18. Addendum: (1991) Math. Chronicle 20, 157-159
- [Taylor (1971)] A. E. Taylor, *Notes On The History of The Uses of Analyticity in Operator Theory*, Amer. Math. Monthly 78, 331-342
- [Yosida (1968)] K. Yosida. *Functional Analysis*, 2ª edição, Berlim, Springer-Verlag

Índice Remissivo

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, 4
 $B_X(\xi_0; r)$, 2
 F_σ , 43
 G_δ , 43
 $M(X)$, 30
 P_E , 131, 147
 $R_\lambda(T)$, 197
S-limitado, 65
S-limite, 65
 $S_X(\xi_0; r)$, 2
 T^* , 138
 T^a , 90, 138
 T_λ , 198
 $B(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, $B(\mathcal{N})$, 21, 24
 $B_0(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, $B_0(\mathcal{N})$, 176
 $B_f(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$, $B_f(\mathcal{N})$, 177
 $C(\Omega)$, 2
 \mathbb{F} , 1, 122
 \mathbb{F}^n , 122
 $\mathcal{G}(T)$, 62
1, 19
 $\text{Im } z$, 1
 $L^p(\Omega)$, 4
 $L^p[a, b]$, 4
 L^p_μ , 4
 $\text{Re } z$, 1
 \mathcal{B} , 3
 χ_A , 9
 δ de Kronecker, 5, 18, 108, 158.
- $\dim X$, 4
 $\text{dom } T$, 19
 $\hat{\cdot}$, 86
 \mathcal{H} , 122
 $\mathcal{P}(X)$, 69
 $\mathcal{N}(T)$, 20
s-lim, 97, 99
w-lim, 97, 99
 \mathcal{N} , 2
 \mathcal{N}^* , 28
 \ominus , 130
 \oplus , 129
 $\overline{B}_X(\xi_0; r)$, 2
 $\overline{\text{Lin}}(A)$, 23
 \perp , 122
 \prec , 68
 $\rho(T)$, 197
 \xrightarrow{s} , 97, 99
 $\sigma(T)$, 197
 $\sigma_c(T)$, 208
 $\sigma_p(T)$, 208
 $\sigma_r(\mathcal{M}_\delta)$, 209
 \sqrt{T} , 226
 $\tau(\mathcal{N}, \mathcal{N}^*)$, 106
 $\tau(\mathcal{N}^*, \mathcal{N})$, 106
 \xrightarrow{w} , 97, 99
 $\xrightarrow{w^*}$, 104
 \rightarrow , 97, 99
c. 8, 23
 c_0 , 8, 23, 60, 89, 95, 99, 189

- $f, -Y27$
 l^∞ , 3
 l^p , 3
 $HS(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, 190
 $\text{Lin}(A)$, 4
 $\text{img } T$, 20
 \mathcal{M}_ϕ , 19, 25, 143, 183, 209, 210
- absolutamente somável, 15, 58
 adjunto de Banach, 90
 adjunto de Hilbert, 95, 138
 Alaoglu, 108, 115, 116
 alternativa de Fredholm, 227
 antilinear, 120
 anulador, 88, 95
 aplicação aberta, 55, 58, 64, 171, 197, 208, 211, 215
 aplicação bilinear, 53
 aplicação canônica, 86
 aplicação inversa, 58, 172
 aproximações sucessivas, 34
 auto-adjunto, 138
 autofunção, 227
 autovalor, 32, 198
 autovetor, 196, 198
 Axioma da Escolha, 69, 166
- Baire, teorema de, 43
 Banach-Steinhaus, 50, 53, 105
 base, 4
 base canônica l^p , 18
 base de Hamel, 4, 22, 23, 46
 base de Schauder, 16, 22
 base ortonormal, 150
 base usual l^p , 18
 Bessel, 152
 bidual, 86
 bilinear, 53
 bola, 2
- categoria, 46
 Cauchy, problema de, 38
 Cauchy-Schwarz, 121, 217
 coeficientes de Fourier, 154
 compacto normal, 222
 complemento ortogonal, 129
 completamento, 12, 13, 28, 88, 124
 completamento, métrico, 12
 completamento, normado, 13
 completamento, produto interno, 124
 componente ortogonal, 131
 composição operadores, 25
 condição de Lipschitz, 37-39
 cone positivo, 82
 conjugada linear, 120
 conjunto F_σ , 43
 conjunto G_δ , 43
 conjunto convexo, 133
 conjunto genérico, 43
 conjunto magro, 42
 conjunto não-magro, 42
 conjunto ortonormal, 150
 conjunto parc. ordenado, 68
 conjunto raro, 42
 conjunto residual, 43
 conjunto resolvente, 197
 conjunto total, 4
 contável, 2
 contração, 34
 convergência em norma, 98
 convergência forte, 97, 99
 convergência fraca, 97, 99
 convergência uniforme, 98
 converge fracamente*, 104
 convexo, 133
 coset. 170

- cubo de Hilbert, 118
 decomposição ortogonal, 131
 desigualdade Cauchy-Schwarz, 121
 desigualdade de Bessel, 152
 desigualdade de Hölder, 7, 9
 desigualdade de Minkowski, 7, 9
 desigualdade triangular, 2, 121
 deslocamento, 21
 dimensão algébrica, 4
 dimensão de Hilbert, 154
 dual, 28
 dual algébrico, 30
 elemento maximal, 69
 enumerável, 2
 equação integral Fredholm, 37
 escalar, 1
 Escolha, Axioma da, 69, 166
 esfera, 2
 esfera unitária, 9
 espaço conjugado, 28
 espaço de Baire, 43
 espaço de Banach, 3
 espaço de Hilbert, 122
 espaço de medida, 4
 espaço dual, 28
 espaço não-trivial, 70
 espaço pré-Hilbertiano, 120
 espaço produto interno, 120
 espaço quociente, 170
 espaço reflexivo, 29, 31, 86, 136
 espaço separável, 17
 espaço vetorial gerado, 4
 espectro, 197
 espectro contínuo, 208
 espectro operador compacto, 220
 espectro pontual, 208
 espectro pontual puro, 209
 espectro residual, 208
 estritamente convexo, 79
 estritamente negativo, 1
 estritamente positivo, 1
 extensão, 27
 família ortonormal, 150
 fecho, 23
 fecho de operador, 65
 forma sesquilinear, 137
 forte, convergência, 97, 99
 Fourier, 154
 fraca*, 104
 fraca, convergência, 97, 99
 fracamente limitada, seq, 103
 fracamente seq compacto, 115
 fracamente seq completo, 118
 fracamente* seq compacto, 115
 função característica, 9
 função escolha, 69, 166
 funcional linear, 28
 funcional linear real, 77
 funcional sublinear, 70
 genérico, 43
 gráfico de operador, 62
 gráfico fechado, 64, 171
 Gram-Schmidt, 151
 Hölder, 9
 Hahn-Banach, 68
 Hellinger-Toeplitz, 94, 144
 Hilbert adjunto, 138
 Hilbert-Schmidt, 190, 223
 identidade, 19
 identidade de Parseval, 154
 identidade de polarização, 122,
 124, 141, 162, 192
 identidade do resolvente, 198

- imagem, 20
 isométricos, espaços, 11
 isometria, 11
 isomorfismo, normados, 12
 isomorfismo, produto interno, 123
 Krylov-Bogolioubov, 116
 Lax-Milgram, 139
 lei do paralelogramo, 126
 lema de Riesz, 10, 157, 221, 227
 lema de Zorn, 22, 69, 151
 lema Riemann-Lebesgue, 60, 156
 Limitação Uniforme, 49, 103, 144
 limite superior, 69
 linearmente independente, 1
 métrica, 2
 magro, 42
 medida invariante, 116
 Minkowski, 9
 multiplicidade finita, 220
 multiplicidade infinita, 205
 núcleo, 20
 núcleo operador, 180
 número racional, 1
 não-magro, 42
 negativo, 1
 norma, 2
 norma convergência uniforme, 3
 norma do gráfico, 66
 norma Hilbert-Schmidt, 191
 norma quociente, 170
 norma, convergência em, 98
 normados isomorfos, 12
 normal, 138
 normal compacto, 222
 operador adjunto, 90
 operador auto-adjunto, 138
 operador compacto, 176
 operador completamente contínuo, 176
 operador de multiplicação, 19, 183
 operador de projeção ortogonal, 131, 147
 operador de projeção, 131
 operador de Volterra, 202, 204, 209
 operador deslocamento, 21
 operador fechável, 65
 operador fechado, 62
 operador Hilbert adjunto, 138
 operador Hilbert-Schmidt, 190
 operador identidade, 19
 operador integral, 180
 operador limitado, 21
 operador linear, 19
 operador normal, 138
 operador nulo, 19
 operador positivo, 148, 216
 operador posto finito, 177
 operador raiz quadrada, 226
 operador resolvente, 197
 operador shift, 21, 51, 92, 144, 189
 operador unitário, 123
 ordenação parcial, 68
 ortonormalização, 151
 ortogonal, operador, 123
 ortogonalidade, 122
 Parseval, 154
 Picard, 38
 Pitágoras, 133
 polarização, 122, 124, 141, 162, 192
 polinômios de Hermite, 157

- polinômios de Laguerre, 157
 polinômios de Legendre, 157
 ponto fixo, 33
 positivo, 1
 posto finito, 177
 precompacto, 175
 primeira categoria, 42
 primeira identidade do resolvente, 198
 Princípio da Limitação Uniforme, 49, 98, 103, 144
 problema de Cauchy, 38
 processo de Gram-Schmidt, 151
 processo de ortonormalização, 151
 produto cartesiano, 69, 108, 166
 produto de operadores, 25
 produto direto, 168
 produto interno, 119
 produto interno Hilbert-Schmidt, 191
 projeção ortogonal, 131, 147
 projeção não-ortogonal, 131
 racional, 1
 raio espectral, 202
 raro, 42
 reflexivo, espaço, 86
 relação de Pitágoras, 133
 relativamente compacto, 175
 relativamente limitado, 66
 residual, 43
 resolvente, 197
 resolvente compacto, 199
 restrição, 27
 Riemann-Lebesgue, 60, 156
 Riesz, lema de, 10, 157, 221, 227
 Riesz, Representação, 135, 146, 162
 Riesz-Fischer, 9
 Riesz-Markov, 30, 116
 série de Fourier, 51, 154, 160
 série de Neumann, 200
 Schauder, 16, 22
 segunda identidade do resolvente, 204
 segundo dual, 29, 86
 seminorma, 2, 70, 171
 separável, 17
 separa pontos, 84
 sequência ortogonal, 132
 sesquilinear, 120, 137
 shift, 21, 51, 92, 144, 189
 soma direta, 129, 168
 soma direta interna, 169
 subaditividade, 70
 teorema de Baire, 43, 49, 57
 teorema de Categoria, 46
 teorema de Picard, 38
 teorema espectral, 225
 topologia forte, 106
 topologia fraca, 106
 topologia fraca*, 106
 topologia menos fina, 105
 total, conjunto, 4
 totalmente limitado, 175
 totalmente ordenado, 69
 uniforme, convergência, 98
 uniformemente holomorfa, 201
 unitariamente equivalentes, espaço, 123, 159
 unitariamente equivalentes, operadores, 146, 218
 vetores ortogonais, 122
 Zorn, lema de, 22, 69, 151

césar r. de oliveira

Nasceu em Patrocínio, no Triângulo Mineiro, mas foi criado na cidade de São Paulo (SP), e obteve sua formação acadêmica na USP. Vem trabalhando com Física Matemática, particularmente com problemas matemáticos da Mecânica Quântica, tendo publicado artigos científicos e também um livro sobre o assunto pela Birkhäuser. É autor de um livro-texto intitulado "Física em Ação: Mecânica", para estudantes do Ensino Médio, publicado em CD-ROM pela EdUFSCar, com animações, rotinas numéricas, etc. Foi professor visitante na Università degli Studi di Milano (Itália) e na University of British Columbia (Canadá). Gosta de passar seu tempo livre com a família e, além de apreciar vinhos, tem o bom gosto de torcer pelo Santos F.C.

ISBN 978-85-244-0311-8



introdução à análise funcional

impa



Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada