Grupo de Automorfismos de una Variedad Tórica

Jesús Pablo Moreno González

Julio 2018

Tesis doctoral presentada por Jesús P. Moreno González para optar al título de Doctor por la
Universidad de Salamanca

Este trabajo ha sido dirigido y **visado** por Carlos Sancho de Salas y María Teresa Sancho de Salas, quienes aprueban su presentación

M. T. Sancho de Salas J. P. Moreno González Carlos Sancho de Salas

Agradecimientos

Doy sinceramente las gracias a mis directores de tesis, Teresa Sancho y Carlos Sancho. En primer lugar por aceptar dirigir la tesis a alguien alejado de la universidad, ciertamente en sentido físico y quizá también en el metafísico, que a saber qué es. En segundo lugar por lo mucho que han significado en mi formación en general y sus aportaciones a este trabajo en particular; Teresa como profesora, directora de tesina y ahora de tesis, Carlos, quien aunque no tuve como profesor, sus aportaciones siempre fueron determinantes, antes en momentos puntuales cuando yo acudía al despacho que entonces compartía con sus hermanos Teresa y Fernando a preguntar dudas y él no podía evitar participar de la conversación para acabar explicándome algo de lo que yo tomaba escuetas notas sin entender nada pero que después casi por magia acababan siendo la clave para resolver el problema, ahora en la certera dirección de esta tesis.

Agradecimiento a mis padres, a quienes dedico este trabajo del que seguro no van a entender nada, pero sí entenderán que son ejemplo para mí y el verdadero motivo de todo mi esfuerzo.

A mi mujer, por aceptar sin llegar a entender que pueda dedicar tanto tiempo a esto y tan poco a ella.

A Dios, por haber hecho coincidir el final de este trabajo con su mejor regalo, mi hija Julia.

Por último el recuerdo y gratitud a mi profesor de Matemáticas del bachillerato, Fernando Llanos, por mostrarme el camino y por las excesivas expectativas que tuvo en mí.

Resumen

El objetivo de esta tesis es estudiar el grupo algebraico $Aut(X)$ de los automorfismos de una variedad tórica $(X, \mathcal{O}_X)$ (completa) sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado y de característica cero y que siempre está asociada a un único abanico Δ (en general **no simplicial**) de conos cuyas aristas (generadores de los conos de dimensión 1) están en un reículo N, por lo que escribiremos $X = X(N, \Delta)$. El conjunto finito de las aristas es Δ_1. Su toro maximal es $T = Spec\, K[M]$ donde $M = N^*$.
Demostramos que $Aut^\circ(X)$ (que es su componente conexa en la identidad) es el producto semidirecto del radical unipotente y de un grupo reductivo. Nos referiremos a ellos como parte unipotente y parte reductiva. Además se demuestra que el radical unipotente es el producto semidirecto de grupos aditivos y se calcula, en términos de Δ_1, la cantidad mínima de grupos aditivos en cuyo producto semidirecto puede descomponer el radical unipotente y se dan explícitamente tales grupos aditivos. Se demuestra que la parte reductiva es el cociente por un grupo multiplicativo del producto directo de grupos lineales que también se calculan y dependen sólo de Δ_1. Además se calcula cómo opera la parte reductiva sobre la parte unipotente y sobre cada uno de sus subgrupos aditivos. También calculamos las raíces en T de cada uno de estos subgrupos y sus álgebras de Lie.
Demostramos que el cociente del grupo $Aut(X)$ por su componente conexa es un grupo isomorfo a cierto subgrupo del grupo finito de la permutaciones en Δ_1 que no afectan al abanico Δ, módulo aquellas que permutan raíces parejables ó semisimples. Estos resultados se presentan en el **Teorema de estructura 8.1.**

Introducción

Existe una apreciable literatura sobre las variedades tóricas como parte importante de las variedades algebráicas. Las referencias habituales son [19], [4] y el libro de Fulton [8]. No ocurre igual con la búsqueda de teoremas de estructura que permitan clasificar el grupo de automorfismos de una variedad tórica y en este sentido la referencia es el trabajo de D. Cox [2] en el que supone que X es simplicial. También indirectamente T. Oda [18] en la búsqueda de grupos de Cremona y M. Demazure [5] en la de sistemas de Enriques saturados y subgrupos del grupo de Cremona, bajo el supuesto de X variedad tórica no singular, tratan este problema.
Oda ([18], p. 140) afirma que, **para X no singular**, $Aut^{\circ}(X)$ está generado como grupo, por el toro T y por los automorfismos de los grupos uniparamétricos asociados al conjunto $R(\Delta)$ de raíces del abanico según la definición de Demazure (Definición 4, p.572 [5]); esto significa que todo automorfismo se puede poner como composición de tales automorfismos, pero en número y orden indeterminados.
Dice que además $Aut^{\circ}(X)$ es producto semidirecto del radical unipotente por un subgrupo reductivo. El radical unipotente, como subgrupo, no lo calcula pero dice que es **como variedad** de dimensión igual al número de elementos del conjunto $R^u(\Delta)$ de las raíces no parejables (no semisimples) del abanico y que como variedad está generada, en este caso sí, por el producto ordenado de los grupos uniparamétricos asociados a las raíces $R^u(\Delta)$. Afirma que el subgrupo reductivo tiene como raíces del grupo en T a las raices parejables del abanico, que denotamos $R^s(\Delta)$. Estas afirmaciones son ciertas y no sólo como variedades sino también como grupos algebraicos y se cumplen para cualquier variedad tórica completa X no necesariamente no singular ni simplicial, como se demuestra en esta tesis.
T. Oda se refiere a este enunciado como *"Teorema de estructura de Demazure"* y remite a la proposición 11, p. 585, [5]. En ese trabajo M. Demazure no intenta dar un teorema de estructura para $Aut\,X$ sino determinar para X no singular, las condiciones para que un subconjunto $R \subseteq R(\Delta)$ sea un sistema de enriques saturado y la condición que enuncia (teorema 4, p. 577, [5]) es que exista un subgrupo afín conexo en $Aut\,X$ cuyas raíces en T sean R; en el caso $R = R(\Delta)$ el subgrupo sería el propio $Aut^{\circ}X$ y esto traducido al lenguaje de esta tesis significa que el tangente en la identidad a $Aut\,X$ es como $T-$módulo no nulo sólo en los $\alpha \in M$ tales que $\alpha \in R(\Delta)$.
La demostración en dos partes de este teorema (una parte es el lema 6. p.577 y la otra

el punto B. p. 579, [5]) junto con la citada proposición 11 dará el enunciado de T. Oda al que nos estamos refiriendo. En el punto B. p. 579, [5], enuncia lo relativo a la parte reductiva y no da una demostración, pero sí un esquema de ella.

En el supuesto de X no necesariamente no singular pero sí **simplicial**, es decir, los conos del abanico están generados por vectores $\mathbb{Q}-$independientes, D. Cox da enunciados similares. Tanto M. Demazure en el caso no singular como D. Cox en el caso simplicial, calculan el grupo finito $Aut\ X/Aut^{\circ}X$ (proposición 11, p. 581, [5] y corolario 4.7, [2]).

D. Cox también utiliza los grupos uniparamétricos de automorfismos asociados a las raíces pero no como automorfismos en X sino en un álgebra graduada que llama *anillo de coordenadas homogéneas* a la que nos referiremos como *álgebra de Cox*, A_C, que ya había sido definida por V. Danilov (ver [4] y [18], pg. 133-134) como el álgebra simétrica asociada al $\mathbb{Z}-$módulo $Div_T(X)$, en adelante A_{n-1} de grupo multiplicativo asociado $T_{A_{n-1}}$, de los divisores de Weil $T-$invariantes, pero con otra graduación diferente a la que utiliza Cox; mientras que esta no depende del abanico inicial Δ, la que da Danilov es la del *anillo de Chow* que sí depende de él y por tanto de la variedad X.
D. Cox demuestra, en el caso simplicial, que los abieros afines que recubren el esquema X son ciertos invariantes de $Spec\, A_C$ por la acción de $T_{A_{n-1}}$ y deduce que $Aut^{\circ}X$ es el cociente $Aut_gA_C/T_{A_{n-1}}$ ([2], teorema 4.2) y calcula Aut_gA_C, sin la hipótesis simplicial, como producto semidirecto de su radical unipotente y un producto de grupos lineales que es su parte reductiva, como puede verse en la proposición 4.3 de [2] y [3]. A mi parecer la demostración no es correcta ó al menos es incompleta porque como explico en la observación 18 lo que demuestra es que el pretendido radical unipotente es el conjunto de ciertas matrices unipotentes, pero no determina exactamente cuáles y no demuestra que el producto de tales matrices sea una de ellas, de modo que el conjunto sea un subgrupo del grupo lineal. El resto de enunciados referidos a $Aut^{\circ}X$ los basa en la determinación del radical unipotente de Aut_gA_C y como considero que no está suficientemente demostrado, aunque los enunciados de Cox en [2] y [3] son correctos, me referiré a ellos en tal sentido.

Por tanto podemos resumir que lo conocido hasta la fecha, al menos que tengamos conciencia de ello, es:

- $T_e(Aut\, X)$ cuando X es **no singular** es un $T-$módulo graduado no nulo en los grados $\alpha \in R(\Delta)$

- $Aut^{\circ}X$ es producto semidirecto de su radical unipotente y un subgrupo reductivo G_s (teoría general de grupos algebraicos afines, [1], propos. 5.4.1)
- **En el caso no singular**, $Aut^{\circ}(X)$ está generado por el toro T y por los automorfismos de los grupos uniparamétricos asociados al conjunto $R(\Delta)$: El radical unipotente es isomorfo como variedad al producto de los grupos uniparamétricos asociados a las raíces no parejables y el subgrupo reductivo simplemente está generado por los automorfismos de los grupos uniparamétricos asociados al conjunto $R^s(\Delta)$ de las parejables
- **En el caso simplicial (no suficientemente demostrado)**, $Aut^{\circ}(X)$ está generado por el toro T y por los automorfismos de los grupos uniparamétricos asociados al conjunto $R(\Delta)$
- **En el caso simplicial** $Aut^{\circ}X \simeq Aut_g A_C / T_{A_{n-1}}$
- **En general (no suficientemente demostrado),** el radical unipotente de $Aut_g A_C$ está generado por los automorfismos de los grupos uniparamétricos asociados al conjunto $R^u(\Delta)$ y es isomorfo como variedad a un espacio afín de dimensión igual al número de elementos en $R^u(\Delta)$, mientras que su parte reductiva es el producto de grupos lineales cociente por un toro
- El grupo finito $Aut\, X / Aut^{\circ}X$ **en el caso simplicial** (suponiendo cierto que los automorfismos que llevan el toro en el toro sean tóricos) es el cociente del grupo de automorfismos $\mathbb{Z}-$lineales que conservan el abanico Δ por el subgrupo de Weyl de G_s que está generado por ciertos automorfismos asociados a las raíces parejables

La aportación de esta tesis, concentrada en el **teorema final de estructura**, teorema 8.1 es:

- Se generaliza lo anterior a toda variedad tórica completa $X = X(N, \Delta)$
- Se calcula el radical unipotente como subgrupo de $Aut^{\circ}X$ demostrando que es producto semidirecto de grupos aditivos que además son subgrupos normales en todo el grupo, dando de antemano la cantidad mínima de ellos en los que puede descomponer y la fórmula explícita de la operación interna. En particular se demuestra que está generado como grupo por el producto de los grupos uniparamétricos asociados

a las raíces no parejables y se dan los subgrupos uniparamétricos que generan cada subgrupo aditivo de la descomposición. Además se calculan sus respectivas álgebras de Lie

- Se calcula el radical de $Aut^{\circ}X$ que es el producto semidirecto del radical unipotente antes calculado y el toro maximal del radical que es el toro asociado al cociente de M por el submódulo generado por $R^s(\Delta)$

- Se da la operación de la parte reductiva sobre la parte unipotente dando la operación (luego la representación lineal) de cada subgrupo lineal de la parte reductiva sobre cada subgrupo aditivo de la parte unipotente

En esta tesis también utilizamos un álgebra graduada A' a la que llamamos *álgebra de Cox generalizada* que permite fácilmente recuperar el cuerpo de fracciones $K(X)$ y deducir que $Aut^{\circ}X$ es el cociente de los automorfismos graduados de A' por un toro y demostramos que tales automorfismos coinciden, salvo un toro, con los automorfismos graduados de A_C deduciendo en particular la equivalencia entre $Aut^{\circ}X$ y $Aut_g A_C$ sin necesidad de la hipótesis simplicial. Este trabajo se desarrolla en tres grandes bloques: Uno consiste en reducir el cálculo de $Aut\,X$ al de $Aut_g A_C$; otro consiste en dar un teorema de estructura para $Aut_g A_C$ y por tanto para $Aut\,X$. Utilizamos la equivalencia entre subgrupos normales conexos y sus ágebras de Lie ([12], teorema 13.1) que dependen del espacio tangente al grupo en el elemento neutro. Para poder utilizar este resultado, dedicamos un tercer bloque a calcular las derivaciones del anillo (haz) $\mathcal{O}_X$ de la variedad tórica y de un álgebra graduada, con las que es más fácil trabajar porque dependen de las condiciones iniciales de X, y a demostrar que tales derivaciones, con su estructura de álgebra de Lie graduada, coincide con el álgebra de Lie del grupo $Aut(X)$ y de automorfismos graduados respectivamente. A lo largo de todo el desarrollo está presente el concepto de raíz, introducido por M. Demazure (ver [5], p. 572) como caso particular de *Sistema de Enriques saturado*; en la definición, Demazure incluye una tercera condición con respecto a la definición que en general se da después y en este trabajo aunque en el caso regular coinciden porque esta tercera condición se deduce de las dos anteriores ([5], nota p. 572) y por tanto es una propiedad que se tiene en el caso regular pero no en el general que tratamos. No tener esta propiedad dificulta el cálculo del grupo finito $Aut\ X/Aut^{\circ}X$ que solventamos con la proposición 8.9.

El desarrollo por capítulos con los resultados más relevantes es el siguente:

El capítulo 1 se dedica a fijar los conceptos iniciales y a los elementos básicos de una variedad tórica. En el teorema 1.4 se demuestra que toda variedad tórica es del tipo $X = X(N, \Delta)$

En el capítulo 2 se calcula el grupo A_{n-1} de las clases de los divisores de Weil $T-$invariantes. Primero se ve en el teorema 2.6 cuáles son las subvariedades cerradas íntegra de los abiertos afines, que son invariante por el toro T y en el teorema 2.8 se calculan las hipersuperficies $T-$ invariantes de X

En el capítulo 3 se calculan las derivaciones en el anillo de una variedad tórica afín y de la variedad tórica completa X; esto se hace respectivamente en los teoremas 3.8 y 3.1 demostrando que si $\mathcal{D} = \mathcal{D}er\left(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X\right)$ es el haz de derivaciones sobre X, entonces las secciones globales de $\mathcal{D}$ son el subespacio vectorial de $M^* \otimes_K K[M]$:

$$\Gamma\left(X, \mathcal{D}\right) =$$

$$(M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K[S_\Delta]) + \sum_{v \in \Delta_1} \{x^m.D_v : \ m \in M, \, v(m) = -1 \text{ y } e(m) \geq 0 \ \forall \ v \neq e \in \Delta_1\}$$

En el capítulo 4 se demuestra la equivalencia entre espacio tangente y derivaciones:

Teorema 4.6 Sea $G = AutX$ el grupo de automorfismos de la variedad tórica X y $K[G]$ su anillo de funciones. Entonces el morfismo funtorial $\widetilde{f} : G^{\cdot} \to \mathcal{F}$ define un isomorfismo canónico entre los espacios vectoriales $M-$ graduados

$$\mathcal{G} = Der_K(K[G], K) = \oplus_{\alpha \in M} \mathcal{G}_\alpha \overset{\widetilde{f}}{\simeq} Der_K(\mathcal{O}_X) = \oplus_{\alpha \in M} \mathcal{D}_\alpha$$

tal que $\widetilde{f}(\mathcal{G}_\alpha) = \mathcal{D}_{-\alpha}$ y además conserva los paréntesis de Lie:

$$\widetilde{f}[D, E] = [\widetilde{f}D, \widetilde{f}D] \ \forall \ D, \, E \in \mathcal{G}$$

Diremos por tanto que $\mathcal{G}$ y $Der_K(\mathcal{O}_X)$ son álgebras de Lie $M-$graduadas canónicamente isomorfas y las denotaremos T_eG.

El hecho de que $\widetilde{f}(\mathcal{G}_\alpha) = \mathcal{D}_{-\alpha}$, habida cuenta de que las raíces α definidas por Demazure son las $-\alpha$ tales que $\mathcal{D}_{-\alpha} \neq 0$, prueba que en efecto las raíces de Demazure son los grados en M no nulos del espacio tangente al grupo, definido como las derivaciones en K de su anillo de funciones, tal y como afirma Demazure en el caso no singular.

El teorema 4.7 ofrece un resultado similar cuando el grupo de automorfismos es el de un álgebra graduada.

El capítulo 5 se dedica a la construcción (simplificada) del anillo de Cox y del anillo de Cox generalizado; se calculan sus grupos de automorfismos graduados y sus álgebras de Lie. Lo primero se hace en el corolario 5.5. Después se da un resultado fundamental que es:

Teorema 5.8 El grupo $Aut_{\mathbb{Z}^s} A'$ es el producto semidirecto $AutgA_C \rtimes T(B)$ donde $T(B)$ es un toro contenido en el toro maximal inicial $T = T(M)$.
Este teorema y el corolario 5.9 reduce el cálculo de $Aut_{\mathbb{Z}^s} A'$ al de $Aut_g A_C$ y la relación con el objeto de estudio $Aut\, X$ se ve en la sección siguiente. En el teorema 5.10 se calculan las álgebras de Lie de $Aut_{\mathbb{Z}^s} A'$ y $AutgA_C$.

En el capítulo 6 se demuestra la equivalencia entre $Aut^\circ X$ y los automorfismos graduados del anillo de Cox generalizado módulo un toro, de donde se deduce la equivalencia entre $Aut^\circ X$ y los automorfismos graduados del anillo de Cox, lo que es clave y fundamental en este trabajo. Esto se enuncia y demuestra en el **teorema 6.8 y corolario 6.9**

En el capítulo 7 se calcula el grupo de automorfismos graduados de A_C dando las partes unipotente y reductiva. Se demuestra cómo descomponer el radical unipotente en producto semidirecto de grupos aditivos dando un **invariante** que es el número menor de tales subgrupos en los que se puede descomponer. La parte reductiva se demuestra que es el producto de grupos lineales y se demuestra cómo la segunda opera sobre la primera y lo hace operando cada subgrupo lineal de la parte reductiva en cada subgrupo aditivo de la parte unipotente.
Mientras que Demazure, Oda y Cox basan sus demostraciones en los grupos uniparamétricos de automorfismos asociados a cada raíz y tal vez por el desconocimiento previo de estos textos, la forma de proceder en este trabajo es la opuesta; cada automorfismo se corresponde con una única derivación hasta el punto de dar una estructura de grupo al espacio vectorial de las derivaciones (las asociadas a raíces no parejables) y este grupo, al que denotamos $(Der^u \mathcal{O}_X, \bullet)$, va a ser el subgrupo de los correspondientes automorfismos que denotaremos $1 + \mathcal{N}$, como se ve en el corolario 7.12. Los resultados más relevantes de este capítulo son:

- En el teorema 7.10 y corolario 7.11 se demuestra el el grupo $1 + \mathcal{N}$, que a la postre va a ser el radical unipotente de $Aut_g A_C$ y también de $Aut\, X$, está generado por los grupos uniparamétricos de las raíces no parejables

- En el teorema 7.14 se demuestra que $1+\mathcal{N}$ es unipotente viendo que es resoluble por subgrupos normales cuyos cocientes son aditivos

- En el teorema 7.15 se demuestra que $1+\mathcal{N}$ es el producto semidirecto de grupos aditivos en cantidad mínima e igual a $l(\Delta_1)$ definida como la mayor de las longitudes de los elementos de Δ_1 con el orden definido en 99 y sólamente es abeliano si tal cantidad es uno, es decir, cuando es un grupo aditivo

- En el lema 7.17 se calculan los álgebras de Lie de los grupos que van a ser el radical unipotente, la parte reductiva y también de los subgrupos aditivos en los que descompone el radical unipotente

- En el teorema 7.18 se prueba que efectivamente $1+\mathcal{N}$ es el radical unipotente

- En el teorema 7.19 se prueba la **Existencia de parte unipotente y parte reductiva:**
$$Aut_g^{\circ} A_C = 1+\mathcal{N} \rtimes Aut_{g,\varepsilon} A_C$$
donde $Aut_{g,\varepsilon} A_C$ se define en la página 94

- En el teorema 7.20 se calcula la parte reductiva de $Aut_g^{\circ} A_C$ como producto de grupos lineales y en el corolario 7.21 se da la estructura de $Aut_g^{\circ} A_C$ como producto semidirecto por un lado de grupos aditivos que es su parte unipotente y por otro del producto directo de grupos lineales que es su parte reductiva y se describe la operación interna en el radical unipotente

- En el teorema 7.23, la proposición 7.26 y el corolario 7.25 se demuestra la operación de la parte reductiva sobre la unipotente dando la operación de cada subgrupo lineal de la parte reductiva en cada subgrupo aditivo de la parte unipotente

Este resultado va a ser exportable a $Aut^{\circ} X$ gracias a los teoremas 5.8 y 6.8 que dan la relación entre $Aut^{\circ} X$ y $Aut_g^{\circ} A_C$ y al corolario 7.31 que afirma que el grupo $T_{A_{n-1}}$ es un subgrupo del toro $Spec\, K[\mathbb{Z}^s]$ que como subgrupo de la parte reductiva opera en R_u por la identidad. Esto ya se ve en el capítulo siguiente.

En el capítulo 8 se enuncia el teorema 8.1 que consiste en traducir a $Aut\,X$ los resultados dados en el capítulo anterior para $Aut_g A_C$; su escueta demostración es poner las referencias de los resultados convenientes de los capítulos anteriores, salvo el grupo finito $Aut\,X/Aut^{\circ}X$ que se calcula en la sección 8.1.

Se concluye con el capítulo 9 dando ejemplos con los que se muestran cómo funcionan los algoritmos concretos para calcular los elementos descritos en las secciones anteriores. En cada caso concreto es más fácil obtenerlos sin aplicar las fórmulas generales de la teoría; en algunos de ellos las aplicamos para mostrar su correcto funcionamiento y en otros lo hacemos de manera particular más sencilla. El primero de los ejemplos es de superficies regladas, en concreto **suferficie de Hirzebruch** y se obtienen los resultados de las dos maneras, con las fórmulas generales y de forma particular.
Otro de los ejemplos es **el cono** en el que se demuestra que en la parte reductiva no ocurre como en la unipotente, que sea el producto de los grupos uniparamétricos, en este caso de $R^s(\Delta)$, está generada por ellos pero no es el producto como variedad.

Índice

Capítulo 1

1. Notación y definiciones

Sea S un semigrupo abeliano y para K un cuerpo algebraicamente cerrado la $K-$ álgebra

$$K[S] = \{\sum_{s\in S} \lambda^s x^s : \ \lambda_s \in K \text{ todos nulos salvo finitos}\}$$

con la operación $x^s.x^{s'} = x^{s+s'}$. El morfismo $s \rightsquigarrow x^s$ define $S \hookrightarrow K[S]$ como subsemigrupo y $\forall$ $K-$ álgebra B con la estructura de semigrupo con el producto se cumple:

$$Hom_{semig}(S, B) = Hom_{K-\text{álg}}(K[S], B)$$

Por tanto $K[S]$ es el representante del funtor sobre la categoría de $K-$ álgebras

$$F(B) = Hom_{semig}(S, B)$$

Sea $M = G(S)$ el grupo generado por S y supondremos que es $\mathbb{Z}-$ módulo libre y su rango es n. En particular $S \subset M$ no tiene torsión y por tanto $K[S]$ es íntegro.
Definición: Se dice que S es finito generado si $\exists$ sucesión exacta $\mathbb{N}^p \to S \to 0$ para algún $p \in \mathbb{N}$

Proposición 1.1. *Son equivalentes:*

1. $K[S]$*es noetheriano*
2. S *es finito generado*
3. $K[S]$ *es de tipo finito*

Demostración: Todo es trivial salvo $1 \Rightarrow 2$, luego supongamos que $K[S]$ es noetheriano. Sea $S^* \subset S$ el subsemigrupo de invertibles y el ideal de $K[S]$ $\wp_S = \{\sum_{s\in S\setminus S^*} \lambda_s x^s\}$ que por hipótesis es finito ngenerado $\Rightarrow$ $\wp_S = (x^{e_1}) + \cdots + (x^{e_1})$ y entonces $S = S^* + \langle e_1, \dots, e_p\rangle_{\mathbb{N}}$ y se acaba porque S^* es un $\mathbb{Z}-$ módulo libre de rango finito.

□

Definición: Decimos que S es *saturado* en M cuando cumple:

$$\{\alpha \in M : \; n\alpha \in S \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\} \subset S$$

Si S es saturado $\Rightarrow K[S]$ es íntegramente cerrado y como también es íntegro $\Rightarrow K[S]$ es normal.
Definición: LLamaremos *variedad tórica afín* a la variedad algebraica normal $Spec\, K[S]$ donde S es un semigrupo que cumple las siguientes condiciones:

1. Es finito generado
2. El grupo $M = G(S)$ que genera es un $\mathbb{Z} -$ módulo libre de rango n
3. Es saturado en M

Un ejemplo de tales variedades son las definidas por conos y como veremos a continuación son las únicas.

1.1. Variedad tórica afín de un cono

Sea N un *retículo*, esto es, un $\mathbb{Z}-$módulo libre de rango n y consideremos el grupo

$$M = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathrm{N}, \mathbb{Z})$$

Se denotará por $\mathrm{V} = \mathrm{N}_{\mathbb{Q}}$ el espacio vectorial de dimensión n asociado a N y $\mathrm{V}^* = M_{\mathbb{Q}}$ será su espacio vectorial dual. Sea el cono

$$\sigma = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle_{\mathbb{Q}+}$$

que supondremos *racional* es decir, $v_i \in \mathrm{N}$. Su cono dual es

$$\sigma^\vee = \{w \in \mathrm{V}^* : w(v) \geq 0 \qquad \forall\, v \in \sigma\}$$

que también es racional. Por tanto se tiene $\sigma^\vee = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle_{\mathbb{Q}+}$ con $u_i \in M$ $\forall i$. Supondremos que σ es *fuertemente convexo* esto es, $\sigma^\vee.\mathbb{Q} = \mathrm{V}^*$ o equivalentemente, $\sigma \cap (-\sigma) = 0$, que es la menor cara del cono. Se dice que σ es *simplicial* si el sistema mínimo de vectores generadores del cono es linealmente independiente. Se dice que σ es *regular* cuando además de simplicial, tal sistema mínimo de vectores forma parte de una base del retículo. Obviamente si σ es regular y $\sigma.\mathbb{Q} = \mathrm{V}$ entoces tendremos una base del retículo y el álgebra

multigraduada $K[S_\sigma]$ donde $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ consiste en el anillo de polinomios.
El hecho de que sea fuertemente convexo es importante porque implica que las direcciones dadas por los generadores fundamentales $v_i \in \sigma$ son la intersección del cono con algún hiperplano a soporte es decir del tipo $u^\perp \cap \sigma$ para algún $u \in \sigma^\vee$. También el resto de caras de σ son $\tau = u^\perp \cap \sigma$ para cualquier $u \in (\tau^\perp \cap \sigma^\vee)^\circ$ el interior topológico de la cara $\tau^\perp \cap \sigma^\vee$. Además toda cara de $\sigma^\vee$ es del tipo $\tau^\perp \cap \sigma^\vee$ para una única cara $\tau \subset \sigma$ y se cumple

$$\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{Q}_+.(-u) \qquad \text{para} \qquad \tau = u^\perp \cap \sigma$$

En particular las hipercaras de $\sigma^\vee$ son el ortogonal de los generadores v_i de σ. Consideremos ahora el subsemigrupo

$$S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$$

que cumple las condiciones de la definición dada de variedad tórica afín; en efecto:

1. S es de tipo finito por el Lema de Gordon [8]

2. $G(S) = M$ porque σ es fuertemente convexo y por tanto $\mathbb{Q}.\sigma^\vee = M_\mathbb{Q}$

3. S es saturado en M porque $\sigma^\vee$ es la intersección de semiespacios

Además se cumple el recíproco (ejercicio [8]):

Proposición 1.2. *Si S es un semigrupo abeliano que comple las tres condiciones anteriores entonces $\exists\ v : M \to \mathbb{Z}^d$ morfismo de $\mathbb{Z}-$ módulos tal que para cada $i \in \{1,\ldots,d\}$ la correspondiente coordenada $x_i : \mathbb{Z}^d \Rightarrow \mathbb{Z}$ con $x_i(a) = a_i$ y $v_i = x_i \circ v \in Hom_\mathbb{Z}(M,\mathbb{Z}) = N$ el cono*

$$\sigma = \langle v_1, \ldots, v_d \rangle_{\mathbb{Q}_+} \subset M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} = M_\mathbb{Q}$$

es fuertemente convexo y $S = S_\sigma$

Demostración: Sea $\{e_1,\ldots,e_d\} = \{e_i\}$ un sistema generador de S y el cono $\tau = \langle\{e_i\}\rangle_{\mathbb{Q}_+}$. Como $M = S - S \Rightarrow M = \langle\{e_i\}\rangle_\mathbb{Z}$ y $M_\mathbb{Q} = \langle\{e_i\}\rangle_\mathbb{Q} = \tau + (-\tau)$ y por tanto $\sigma = \tau^\vee$ es fuertemente convexo. Resta ver que $S = \sigma^\vee \cap M$ es decir, ver que $S = \tau \cap M$. Una contención es trivial y para la otra, por el teorema de Carateodory todo elemento de $\tau \cap M$ está en $\langle\{e_i\}\rangle_{\mathbb{Q}_+}$ luego multiplicando por un natural está en S y se concluye por la hipótesis S saturado en M.

$\square$

A partir de ahora una variedad tórica será $Spec\, K[S]$ para $S = S_\sigma$, con σ cono fuértemente convexo y $M = S_\sigma - S_\sigma$ un $\mathbb{Z}-$ módulo libre que define al toro $T = Spec\, K[M]$. El toro es el caso particular de variedad tórica cuando $S = M$ y por tanto representante del funtor, para cada $K-$ álgebra B, $Hom_{semig}(M, B)$ considerando B como semigrupo con el producto. Denotaremos $T^{\cdot}$ a su funtor de puntos. En los puntos racionales es

$$T^{\cdot}(K) = Spec_{rac} K[M] = Hom_K(K[M], K) = Hom_{grup}(M, K^*)$$

y si se elige una base de M entonces en los puntos racionales es

$$T^{\cdot}(K) = Spec_{rac} K[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}] = K^{*n}$$

donde $K^* = K \setminus \{0\}$ con la estructura de grupo multiplicativo.
Si $\tau \subset \sigma$ es una cara entonces $S_\sigma \subset S_\tau$ y

$$X_\tau = Spec\, K[S_\tau] \subset Spec\, K[S_\sigma] = X_\sigma$$

es el abierto principal dado por la localización de $K[S_\sigma]$ por el sistema multiplicativo que genera $\tau^\perp \cap S_\sigma$. Si $u \in (\tau^\perp \cap \sigma^\vee)^\circ \Leftrightarrow u(\sigma \setminus \tau) > 0 \Leftrightarrow u^\perp \cap \sigma = \tau$, entonces $S_\tau = S_\sigma + \langle -u \rangle_{\mathbb{N}}$ y por tanto $X_\tau = Spec\, K[S_\sigma]_{x^u}$ es un abierto básico. En particular si consideramos el abierto principal dado por la cara mínima de σ obtendremos un abierto denso de X_σ y por ser el cono fuertemente convexo, la mínima cara es el cero de modo que X_σ contiene al toro $T = X_0 = Spec\, K[M]$ como abierto denso. Con más precisión, como σ es fuertemente convexo, podemos elegir $u \in \sigma^\vee$ tal que $u(\sigma \setminus 0) > 0$ de modo que

$$u \in (0^\perp \cap \sigma^\vee)^\circ$$

y

$$M = S_\sigma + \langle -u \rangle_{\mathbb{N}}$$

con lo que el toro es el abierto básico

$$T = Spec\, K[S_\sigma]_{x^u}.$$

Luego podemos definir variedad tórica afín la que tiene como anillo el álgebra $K[S]$ para $S = S_\sigma$, y que es finito generada, normal e íntegra (cociente del anillo de polinomios por un ideal laticial y primo) que contiene como abierto denso al toro $T = Spec\, K[G(S) = M]$. Si λ es un punto de T denotaremos $\lambda(m) = \lambda^m$. En caso de elegir una base $M = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$

$\Rightarrow \lambda = (\lambda_i)$ siendo $\lambda_i = \lambda(m_i)$ y $\lambda(m) = \lambda^m$ es elevar a las coordenadas de m respecto la base elegida. T es un grupo algebraico con la operación:

$$\begin{array}{ccc} T \times T & \longrightarrow & T \\ (\lambda, \lambda') & \rightsquigarrow & \lambda.\lambda' \quad \text{donde } (\lambda.\lambda')^m = \lambda^m \lambda'^m \end{array}$$

Además el toro T opera sobre toda la variedad tórica afín $X_\sigma = Spec\, K[S_\sigma]$ dando a X_σ la siguiente estructuta de $T-$esquema:

$$\begin{array}{rcl} Hom_{grp}(M, K^*) \times Hom_{sgrp}(S, K) & \longrightarrow & Hom_{sgrp}(S, K) \\ g, f & \longrightarrow & g.f \end{array}$$

Esta acción de T sobre X_σ prolonga la operación sobre él mismo como grupo y además es la única operación que lo cumple gracias a que T es abierto denso de X_σ.
Hemos visto pues que toda variedad tórica afín es X_σ para σ un cono racional fuértemente convexo y la variedad X_σ resulatante es *una variedad algebraica afín, normal y que contiene al toro T como abierto denso y que opera en X_σ extendiendo la operación sobre sí mismo como grupo algebraico.* También se cumple el recíproco, si $X = Spec\, K[S]$ es afín y normal ($K[S]$ es íntegra e íntegramente cerrada en su cuerpo de fracciones $K(S)$) que contiene al toro $T = Spec\, K[M]$ como abierto denso y que opera en X extendiendo la operación sobre sí mismo, entonces como $M = S - S$ y por tanto S es de tipo finito y además S es saturado en M porque si $p.m \in S$ para $p \in \mathbb{N}$ entonces x^m es solución de la ecuación en y con coeficientes en $K[S]$, $y^p - x^{pm}$ y como $K[S]$ es íntegra e íntegramente cerrada entonces $x^m \in K[S]$ y $m \in S$ con lo que se ha demostrado:

Teorema 1.3. *Tota variedad algebraica afín, normal X y que contiene un toro T como abierto denso y que opera en X extendiendo la operación sobre sí mismo es una variedad tórica $X = X_\sigma$ de toro T para un cono fuertemente convexo σ.*

$\square$

1.2. Variedad tórica de un abanico

Sea N un retículo de rango finito. Un *abanico* es una familia finita Δ de conos fuertemente convexos en $N_{\mathbb{Q}}$ tales que si τ es una cara de $\sigma \in \Delta$ entonces $\tau \in \Delta$ y si σ y ξ son conos de la familia, entonces la intersección $\sigma \cap \xi$ es una cara común de σ y ξ.

El soporte del abanico es $|\Delta| = \bigcup_{\sigma\in\Delta}\sigma$ y se dice que es *completo* cuando $|\Delta| = \mathrm{N}_{\mathbb{Q}}$ en cuyo caso el semigrupo $S_\Delta = \bigcap_{\sigma\in\Delta}\sigma^\vee$ se reduce al cero. Denotaremos con Δ_1 al conjunto finito de todas las aristas de todos los conos de Δ que sean minimales, esto es, v tal que

$$v \notin \mathbb{Z}_+.\{\langle v\rangle_{\mathbb{Q}} \cap N\}$$

Al conjunto Δ_1 nos referiremos simplemente como el de las aristas de Δ y siempre supondremos que $\mathbb{Q}_+.\Delta_1 = \mathbb{Q}^n$ y nos referiremos aello como el **caso semicompleto** que es una condición menos fuerte que la de que Δ sea completo, lo cual es necesario cuando hablemos del grupo $Aut\,X$ para garantizar su existencia. Consideremos ahora las variedades tóricas afines $X_\sigma = Spec(K[S_\sigma])$ de modo que la intersección de dos de estas variedades $X_\sigma \cap X_\xi$ es la variedad tórica afín asociada a la cara común $\sigma\cap\xi$ y tenemos el esquema $X = \bigcup_{\sigma\in\Delta} X_\sigma$ asociado al abanico Δ.

Definición: Se llama *variedad tórica* a toda variedad algebraica separada y normal X que contiene a un toro T como un abierto denso y dotado de una acción sobre X que extiende la acción sobre él mismo.

Como se ha visto, un ejemplo son las variedades X_σ y son todas según el siguiente teorema cuya demostración puede verse en [18], teorema 4.1:

Teorema 1.4. *El esquema X_Δ definido por un abanico es una variedad tórica cuyo toro es $T = X_0 = Spec(K[M])$ y además toda variedad tórica es de este tipo*

Demostración: X es nomal porque hemos visto que los abiertos X_σ son normales. Para ver que X es separada, sean σ y σ' conos del abanico. Entonces $(\sigma\cap\sigma')^\vee \subseteq \sigma^\vee \cap \sigma'^\vee$ $\Rightarrow$

$$K[S_\sigma]\otimes K[S_{\sigma'}] \to K[S_{\sigma\cap\sigma'}] \to 0$$

es exacta y el morfismo diagonal

$$X_{\sigma\cap\sigma'} = X_\sigma \cap X_{\sigma'} \to X_\sigma \times X_{\sigma'}$$

es cerrado. El toro es abierto denso de X por serlo de todos los abiertos X_σ y opera en todo X como lo hace en cada X_σ siendo compatible con el recolement ya que $\sigma\cap\sigma'$ es otro elemento del abanico.

La demostración del recíproco se debe a Sumihiro [21], que demuestra que toda variedad que cumple las condiciones del enunciado posee un recubrimiento por abiertos afines que cumplen las condiciones de la definición dada de variedad tórica afín y por tanto son del tipo X_σ.

$\square$

Capítulo 2

2. Subvariedades $T-$ estables y Divisores $T-$ Weil

Sea pues X una variedad tórica de toro T y Δ el abanico asociado tal que $X = X_\Delta$. Para calcular las subvariedades invariantes por la acción de T vamos a calcularlas en cada abierto afín del esquema X dado por las variedades tóricas afines X_σ tal que $\sigma \in \Delta$.

2.1. Cálculo de las órbitas

Para cada cara $\tau \subset \sigma$ consideremos el punto $x_\tau \in X_\sigma$ definido por $x_\tau : S_\sigma \to K$

$$x_\tau(m) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & m \in \tau^\perp \cap \sigma^\vee \\ 0 & m \notin \tau^\perp \end{array} \right\}$$

que es morfismo de semigrupos porque $\tau^\perp \cap \sigma^\vee$ son las caras de $\sigma^\vee$. Este morfismo de semigrupos induce morfismo de álgebras

$$\begin{aligned} [x_\tau] \quad : \quad & K[S] \longrightarrow K \\ & [x_\tau](x^s) = x_\tau(s) \end{aligned}$$

y también denotaremos por x_τ al punto racional asociado, cuya parte homogénea es $K[S \setminus \tau^\perp]$ que como veremos es un ideal primo homogéneo al que denotaremos $\mathcal{P}_\tau$.

La órbita de x_τ se denotará por O_τ y es el toro

$$O_\tau = T \cap \tau^\perp = Hom(M \cap \tau^\perp, K^*)$$

Se cumple que cada punto de X_σ está en la órbita de un punto x_τ para una única cara de σ y se tiene ([8], Sec. 3.1)

Proposición 2.1. *Toda variedad tórica afín es la unión (disjunta cuando se supone que el cono σ asociado es fuertemente convexo) de las órbitas de los puntos asociados a sus caras:*

$$X_\sigma = \coprod_{\tau \subset \sigma} O_\tau$$

En cuanto a la órbita de una cara y la de otra que la contenga se tiene:

Proposición 2.2. *Para $\tau \subset \sigma$ cara, el cierre de la orbita de τ en X_σ es la unión disjunta de las órbitas de las caras de σ que contengan a τ*

$$\overline{O_\tau} = \coprod_{\omega \supset \tau} O_\omega$$

En particular la única órbita de X_σ relativamente cerrada es O_σ.

2.2. Subvariedades invariantes por T

Vamos a ver que las subvariedades invariantes por la acción del toro se corresponden de forma biunívoca con las caras del cono.

Proposición 2.3. *Todo ideal primo homogeneo de $K[S]$ es del tipo $K[S \setminus F]$ para una única cara F de $\sigma^\vee$*

Demostración:
Los primos homogeneos son $K[S']$ para $S' \subset S$ subsemigrupo con la propiedad

$$s_1 + s_2 \in S' \quad \Leftrightarrow \quad s_1 \in S' \text{ ó } s_2 \in S'$$

Por otra parte un subconjunto $F \subset S$ es cara cuando cumple la condición:

$$s_1 + s_2 \notin F \Leftrightarrow s_1 \notin F \text{ ó } s_2 \notin F$$

lo cual equivale a que $S' = S \setminus F$ sea subsemigrupo con $K[S']$ primo homogeneo y en definitiva se tiene la correspondencia biunívoca antiorden:

$$K[S'] \text{ primo homogeneo} \Leftrightarrow F = S \setminus S' \text{ cara de } \sigma^\vee$$

$\square$

Observación 1. *Como toda cara de $\sigma^\vee$ es $F_\tau = \tau^\perp \cap \sigma^\vee$ para $\tau \subset \sigma$ cara única, si denotamos $\mathcal{P}_\tau = K[S \setminus F_\tau]$ se tiene*

$$\omega \subset \tau \Leftrightarrow \mathcal{P}_\omega \subset \mathcal{P}_\tau \textit{ con } \omega \textit{ y } \tau \textit{ caras de } \sigma$$

Vamos a ver cuáles son los puntos del toro, que obviamente consisten en la órbita dada por la cara menor del cono, que es cero, de modo que $T = Orb(x_0)$ y el único primo homogéneo que contiene es el ideal nulo.

Proposición 2.4. *El toro $T = X_M$ es el abierto de X_S que consiste en los puntos $p : S \to K$ que tienen inverso, es decir, $p(s) \neq 0 \ \forall s \in S$ y por tanto sus puntos son los puntos de X que no contienen elementos homogéneos*

Demostración:
Por ser σ fuertemente convexo, $0 = \sigma \cap u^{\perp}$ para cualquier $u \in (\sigma^{\vee})^{\circ}$ de manera que X_M es el abierto complementario de los ceros de x^u en $K[S]$ y entonces

$$p \in X_M \Leftrightarrow p(u) \neq 0 \text{ para } u \in S^{\circ}$$

Como p transforma suma en producto y u es interior a $\sigma^{\vee} = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle_{\mathbb{R}_+}$, $u = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i$ con $\alpha_i > 0 \ \forall i$ se deduce que lo anterior equivale a que $p(u_i) \neq 0 \ \forall i$ con lo que se concluye.

$\square$

Consideremos el primo homogeneo $\mathcal{P}_\tau = K[ker x_\tau]$ dado por el nucleo del morfismo de semigrupos $f = x_\tau$. Este morfismo induce

$$\begin{aligned} [f] \quad : \quad & K[S] \longrightarrow K \\ & [f](x^s) = f(s) \end{aligned}$$

El primo asociado a f no es el ideal homogéneo $K[ker(f)]$ sino $ker([f]) \supseteq K[ker(f)]$. Por la proposición anterior sabemos que $\forall g \in X_M$, $ker(g.f)$ coincide con $ker(f)$ de modo que toda la órbita de x está formada por puntos que contienen a $\mathcal{P}_\tau$ que por tanto es el mayor primo homogeneo de O_τ. Hemos visto por otra parte que

$$\omega \subset \tau \Leftrightarrow \mathcal{P}_\omega \subset \mathcal{P}_\tau \text{ con } \omega \text{ y } \tau \text{ caras de } \sigma$$

y por tanto se tiene

$$\mathcal{P}_\omega \subseteq \bigcap_{\tau \supset \omega} \left(\bigcap_{y \in O_\tau} y \right)$$

Vamos a ver que los ideales primos homogéneos de X_σ y como luego veremos, las subvariedades invariantes por el toro, quedan determinados por la órbita correspondiente según la proposición 2.3.
La proposición 2.1 dice que cada punto racional y está en la órbita de un único punto x_τ para τ cara de σ. Esto significa que la parte homogénea de y genera un ideal primo homogéneo que denotaremos por $\mathcal{P}_y$ y que es el primo homogéneo $\mathcal{P}_\tau$ para una única cara $\tau \subseteq \sigma$, de modo que $\mathcal{P}_y = K[ker(x_\tau)] = K[S \setminus \tau^{\perp}]$.

Proposición 2.5. *Dada una cara $\omega \subset \sigma$ y el ideal primo homogeneo asociado $\mathcal{P}_\omega$. Se cumple la igualdad*

$$\mathcal{P}_\omega = \bigcap_{y \in \overline{O_\omega}} \mathcal{P}_y$$

Demostración:
En primer lugar conocemos la igualdad $\overline{O_\omega} = \coprod_{\tau \supseteq \omega} O_\tau$. Si $y \in X_\sigma$ es tal que $y \supset \mathcal{P}_\omega$ entonces $\mathcal{P}_y = \mathcal{P}_\tau \supset \mathcal{P}_\omega$ para única τ que necesariamente debe contener a ω y como $y \in O_\tau$, de la igualdad anterior se sigue que $y \in \overline{O_\omega}$. Por otro lado al ser $K[S]$ finito generada, es la intersección de los maximales que lo contienen que por lo visto están en $\overline{O_\omega}$ es decir,

$$\mathcal{P}_\omega = \bigcap_{y \in \overline{O_\omega}} y$$

Se concluye porque al ser $\mathcal{P}_\omega$ homogéneo, los y pueden sustituirse por los homogeneos asociados $\mathcal{P}_y$.

□

Observación 2. *Nótese que de la igualdad anterior se sigue:*

$$\mathcal{P}_\omega = \bigcap_{\tau \supset \omega} \left(\bigcap_{y \in O_\tau} y \right)$$

Teorema 2.6. *Toda subvariedad cerrada íntegra de $Spec\, K[S] = X_\sigma$ invariante por el toro T es del tipo $Y = Spec\,(K[S]/\mathcal{P}_\omega)$ cociente por el primo homogeneo asociado a la cara $\omega \subset \sigma$*

Demostración:
Sea $Y = Spec\,(K[S]/\mathcal{P}_\omega)$ que por lo visto antes se tiene

$$Y = \coprod_{\tau \supset \omega} O_\tau = \overline{O_\omega}$$

que obviamente es cerrado e invariante por G.
Recíprocamente, sea $Y = Spec\,(K[S]/\mathcal{P})$ subvariedad cerrada invarante con $\mathcal{P}$ primo. Por ser X_σ unión de órbitas y por ser Y invarante, se deduce que

$$Y = \coprod_{\tau \in \mathcal{F}} O_\tau \text{ donde } \mathcal{F} = \{\tau \subset \sigma : \mathcal{P} \subset \mathcal{P}_\tau\}$$

Si escribimos $\mathcal{P}$ como intersección de los primos que lo contienen, $\mathcal{P} = \bigcap_{\tau \in \mathcal{F}} \mathcal{P}_\tau \Rightarrow \mathcal{P}$ es primo homogeneo y vale $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\omega$ donde $\omega = \bigcap_{\tau \in \mathcal{F}} \tau$ y se concluye.

$\square$

Se ha probado que las subvariedades algebraicas afines T estables son el cociente por los ideales primos homogeneos $\mathcal{P}_\tau = K[S \setminus F_\tau]$ siendo $F_\tau = \tau^\perp \cap \sigma^\vee$. Las subvariedades T estables de codimensión uno vendrán entonces dadas por los primos homogeneos minimales y entonces hipercaras de $\sigma^\vee$ que a su vez dependen de las aristas v_i del cono σ y son $\mathcal{P}_{H_i} = K[S \setminus v_i^\perp]$ y la coorrespondiente variedad de codimensión uno es

$$Spec\ (K[S]/\mathcal{P}_{H_i})\,\text{subvariedad } T \text{ estable máxima}$$

Por contra las subvariedades T estables mínimas están dadas por el cociente por el *punto distinguido* $x_S = K[S \setminus S^*]$ (donde S^* es la cara mínima de $\sigma^\vee$) que es primo homogeneo máximo. Este ideal será el irrelevante cuando $S^* = 0 \Leftrightarrow S \cap -S = 0 \Leftrightarrow \sigma^\vee$ es fuertemente convexo es decir, cuando el cono σ genere todo V_σ.

Proposición 2.7. *Sea X_S variedad tórica afín y X_M el toro contenido como abierto básico que opera en X_S. Entonces su cerrado complementario $Z = X_S \setminus X_M$ contiene a todos los primos homogeneos de $K[S]$ y además:*

$$Z = Spec\,K[S]/\mathcal{P}_{H_1} \cup \ldots \cup Spec\,K[S]/\mathcal{P}_{H_k}$$

donde $H_i = v_i^\perp$ son las hipercaras de $\sigma^\vee$ y $\mathcal{P}_{H_i} = K[S \setminus v_i^\perp]$

Demostración:

Sea $\mathcal{P}$ el ideal primo dado por el morfismo $p : S \to K$ de modo que $\mathcal{P} = ker[p]$ y como se vió en la proposición 2.4

$$\mathcal{P} \in X_M \Leftrightarrow kerp = 0 \Leftrightarrow [p](x^s) = p(s) \neq 0 \forall s \in S \Leftrightarrow \mathcal{P} \text{ no tiene homogeneos}$$

Luego todos los primos homogeneos están en el cerrado complementario Z.
Como Z es cerrado descompone en unión de sus componentes irreducibles $Z = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$ que además son cerrados invarantes por la acción del toro conexo T, por tanto son el cociente por un primo homogeneo y necesariamente minimal por ser componentes irreducibles Z que contiene a los primos homogeneos. Se tiene pues que

$$Y_i = Spec\,K[S]/\mathcal{P}_{H_i}$$

y se concluye.

□

Denotaremos para cada arista $v_i \in \sigma$, $H_i(\sigma) = H_{v_i}(\sigma)$ a la correspondiente subvariedad de X_σ $T-$estable de codimensión uno:

$$H_i(\sigma) = Spec\ (K[S]/\mathcal{P}_{H_i})\,\text{subvariedad } T \text{ estable máxima}$$

Sea $\Delta_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ el subconjunto de todas las aristas de los conos del abanico Δ cuya variedad tórica es $(X, \mathcal{O}_X)$ recubierta por los abiertos afines X_σ. Sea $v \in \Delta_1$ y para cada cono σ que contenda a v, la hipersuperficie afín invariante por T

$$H_v(\sigma) = Spec\left(K[S_\sigma]/\mathcal{P}_{H_v(\sigma)}\right) \text{ donde } \mathcal{P}_{H_v(\sigma)} = K[S_\sigma \setminus v^\perp] = K[ker(x_v)]$$

Entonces

$$H_i = H_v = \bigcup_{v \subset \sigma \in \Delta} H_v(\sigma)$$

es una hipersuperficie de toda la variedad tórica X, de codimensión uno e invariante por T y necesariamente estas son todas, por tanto

Teorema 2.8. *Si $\Delta_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ es el subconjunto de todas las aristas de los conos del abanico Δ cuya variedad tórica es X entonces $H_1, \ldots, H_r$ son las hipersuperficies $T-$invariantes de X*

2.3. Divisores $T-$Weil

Como hemos visto H_i son divisores de Weil primos y además son los únicos invarantes por T. Denotaremos $[H_i]$ a su clase módulo la equivalencia lineal respecto la cual dos divisores primos son equivalentes si difieren en un divisor principal. Entonces $[H_1], \ldots, [H_r]$ generan un grupo cuya relevancia se verá en la sección 5.

Capítulo 3

3. Derivaciones de una variedad tórica

En la teoría de grupos algebraicos el espacio tangente al grupo en el neutro da mucha información sobre el propio grupo. En esta sección vamos a calcular las derivaciones de una variedad tórica X que como ya hemos visto siempre está asociada a un abanico. En la sección siguiente se demostrará que tales derivaciones son el espacio tangente en el neutro al grupo $Aut\, X$.

Pretendemos ahora demostrar el siguiente **Teorema:**

Teorema 3.1. *Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ una variedad tórica y Δ el abanico que la define según el teorema 1.4. Sea $\mathcal{D} = \mathcal{D}er\,(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X))$ el haz de derivaciones sobre X. Entonces las secciones globales de $\mathcal{D}$ son el subespacio vectorial de $M^* \otimes_K K[M]$:*

$$\Gamma\,(X, \mathcal{D}) =$$

$$(M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K[S_\Delta]) + \sum_{v \in \Delta_1} \{x^m.D_v : \; m \in M,\, v(m) = -1 \;\, y \;\, e(m) \geq 0 \;\forall\; v \neq e \in \Delta_1\}$$

Demostración:

$$\Gamma\,(X, \mathcal{D}) = \bigcap_{\sigma \in \Delta} \mathcal{D}er\,(K[S_\sigma], K[S_\sigma])$$

luego para la demostración del teorema debemos calcular las derivaciones en cada abierto afín de anillo $K[S_\sigma]$.

Para calcular las derivaciones de $K[S_\sigma]$ vamos a describirla en función de las aristas v de σ y de M. Consideremos el morfismo $v : M \to \mathbb{Z}$ cuyo núcleo es $v^\perp$ y que contiene a la hipercara $H_v = v^\perp \cap \sigma^\vee$. Las aristas se suponen fundamentales y minimales como generadores del cono, de modo que como elementos del retículo no tienen divisores comunes entre sus coeficientes y por tanto podemos asegurar que el morfismo v es epiyectivo y existe $\alpha \in M$ tal que $v(\alpha) = 1$. Sea ahora $S_v = v^\vee \cap M$ semigrupo que contiene a α y si elegimos $u \in (v^\perp \cap \sigma^\vee)^\circ$ es decir, $u^\perp \cap \sigma = v$, $S_v = S_\sigma + \langle -u \rangle_{\mathbb{N}}$; como $v(u) = 0$, si $\alpha \in S_v$ es tal que $v(\alpha) = 1$ entonces podemos suponer que $\alpha \in S_\sigma$.

Lema 3.2. *Si $\mathcal{P}_H$ es el primo homogeneo de altura uno dado por la hipercara $H = v^{\perp} \cap \sigma^{\vee}$ entonces $K[S]_{\mathcal{P}_H}$ es anillo de valoración discreta y es igual al anillo de valoración discreta $\mathcal{O}_v$ dado por la extensión natural de v a los invertibles del cuerpo de fraccciones de $K[S]$. Además todo anillo de valoración discreta de tal cuerpo que centre en un primo homogeneo de $K[S]$ es de ese tipo.*

Demostración:
Que $K[S]_{\mathcal{P}_H}$ es anillo de valoración discreta es claro. Para ver la igualdad del enunciado, consideramos $v : M \to \mathbb{Z}$ epiyectivo $\alpha \in S$ tal que

$$S \supseteq \langle \alpha \rangle_{\mathbb{N}} \bigoplus H \qquad v(\alpha) = 1 \qquad M \supseteq \langle \alpha \rangle \bigoplus H_{\mathbb{Z}}$$

Las contenciones son igualdades cuando $\mathcal{P}_H$ es principal.
Sea Σ^* los invertibles del cuerpo de fracciones de $K[S]$ y

$$v\left(\frac{\sum x^s}{\sum x^{s'}}\right) = min\{v(s)\} - min\{v(s')\}$$

de modo que si $\frac{\sum \lambda_s x^s}{\sum \lambda_h x^h} \in K[S]_{\mathcal{P}_H}$ entonces

$$v\left(\frac{\sum x^s}{\sum x^h}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{\sum x^{s \notin H}}{\sum x^h} \in \mathcal{P}_H . K[S]_{\mathcal{P}_H}$$

$$\text{luego} \qquad \mathcal{P}_v \cap K[S]_{\mathcal{P}_H} = P_H . K[S]_{\mathcal{P}_H} = (x^{\alpha})$$

por lo que $K[S]_{\mathcal{P}_H} \hookrightarrow \mathcal{O}_v$ es dominante y por tanto son iguales.
Recíprocamente,

$$K[S] \hookrightarrow \mathcal{O}_v \qquad v(S) \geq 0 \qquad \mathcal{P}_v = (x^{\alpha}) \text{ con } x^{\alpha} \in \Sigma^*$$

donde $\mathcal{P}_v$ denota al ideal maximal de $\mathcal{O}_v$.
Por hipótesis $\mathcal{P}_v \cap K[S]$ es un primo homogeneo y hemos visto que es de la forma $\mathcal{P}_H = K[S \setminus H]$ dado por una hipercara de S luego $v(x^h) = 0 \Rightarrow K[S]_{\mathcal{P}_H} \hookrightarrow \mathcal{O}_v$ es dominante y se tiene la igualdad.

□

Lema 3.3. *Sea $\mathcal{O}_v = K[S]_{\mathcal{P}_H}$ el anillo de valoración discreta de maximal $\mathcal{P}_v$ y que centra en el primo homogeneo $\mathcal{P}_H$ de $K[S]$. Entonces $\mathcal{O}_v \cap K[M] = K[S_v]$ donde $S_v = v^{\vee} \cap M$. En particular $\mathcal{P}_v \cap K[M] = K[S_v \setminus v^{\perp}]$*

Demostración:
Sea $u \in (v^{\perp} \cap \sigma^{\vee})^{\circ}$, de modo que

$$K[S_v] = K[S_\sigma]_{\{x^u\}} \subseteq K[S_\sigma]_{\{x^h : h \in (v^{\perp} \cap \sigma^{\vee})\}} \subseteq K[S_v]$$

luego todo son igualdades. Además la primera contención implica que $K[S_v] \subseteq K[S]_{\mathcal{P}_H} \cap K[M]$ y la otra contención es clara.

$\square$

Lema 3.4. *$K[M]$ es la intersección de todos los anillos de valoración discreta que contienen a $K[S]$ y que centran en los puntos no homogeneos de altura 1.*

Demostración:
Sabemos (puede verse en [15], Th. 11.5) que

$$K[M] = \bigcap_{h_t(\mathcal{Q})=1 \text{ y } \mathcal{Q} \in X_M} K[M]_{\mathcal{Q}}$$

En la Proposición 2.7 hemos visto que tales puntos $\mathcal{Q} \in X_M$ son los del enunciado. Por otro lado,

$$K[M]_{\mathcal{Q}} = \left(K[S]_{\{x^u, u \in S\}}\right)_{\mathcal{Q}}$$

y como $\mathcal{Q}$ es no homogeneo, (ó equivalentemente, no contiene elementos homogéneos, por ser $h_t(\mathcal{Q} = 1)$) el sistema multiplicativo $K[S] \setminus \mathcal{Q}$ contiene al sistema multiplicativo $\{x^u, u \in S\}$ de lo que se deduce

$$K[M]_{\mathcal{Q}} = \left(K[S]_{\{x^u, u \in S\}}\right)_{\mathcal{Q}} = K[S]_{\mathcal{Q}}$$

con lo que se acaba.

$\square$

Lema 3.5. *$K[S_\sigma]$ es la intersección en $K[M]$ de los anillos $\mathcal{O}_v$ cuando $v \subset \sigma$ es decir,*

$$K[S_\sigma] = \bigcap_{v \subset \sigma} K[S_v]$$

Demostración:
Sabemos que $K[S]$ descompone (ver Matsumura, Th,11,5)

$$K[S] = \bigcap_{h_t(\mathcal{Q})=1 \ \mathcal{Q} \text{ no homogeneo}} K[S]_{\mathcal{Q}} \cap \left(\bigcap_{h_t(\mathcal{P}_v)=1 \ \mathcal{P}_v \text{ homogeneo}} K[S]_{\mathcal{P}_v} \right)$$

Ahora aplicando los tres lemas anteriores tenemos

$$K[S_\sigma] = K[M] \cap \left(\bigcap_{v \subset \sigma} \mathcal{O}_v \right) = \bigcap_{v \subset \sigma} (K[M] \cap \mathcal{O}_v)$$

y eso es justo el enunciado, con lo que se acaba.

$\square$

En la demostración habría que incluir en la intersección los primos de altura uno que no contienen elementos homogéneos pero ya están contados pues es equivalente, para altura uno, ser homogéneo que tener algún elemento homogéneo no nulo.
Utilizando este resultado vamos a calcular las derivaciones de $K[S]$ para lo cual se calculará previamente las derivaciones de $K[M]$ y de los anillos $K[S_v]$ dados por las aristas de σ.

Proposición 3.6. *Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y para cada $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$, $x^u = x_1^{u_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{u_n}$ siendo $K[M] = K[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$. Entonces las derivaciones de $K[M]$ son el $K[M]-$módulo:*

$$Der_K\left(K[M]\right) = M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K[M]$$

donde para cada $w \in M^*$, D_w es la derivación $D_w(x^\beta) = w(\beta).x^\beta$.

Demostración:
Las derivaciones factorizan a través de la localización y $K[M]$ es el localizado del anillo de polinomios por las potencias de las variables luego tenemos la igualdad de $K[M]-$módulos

$$Der_K\left(K[M]\right) = Der_K\left(K[x_1, \ldots, x_n], K[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]\right)$$

y por tanto

$$Der_K\left(K[M]\right) = \langle x^{-u}.\partial_{x_i} \rangle_{K[x]} = \langle \partial_{x_i} \rangle_{K[M]}$$

y lo último coincide con $M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K[M]$ mediante la asignación $\partial_{x_i} \leftrightarrow w_i \otimes x_i^{-1}$ donde w_i consiste en la coordenada i.

$\square$

Corolario 3.7. *Si $v \subset \sigma$ es una arista del cono racional fuertemente convexo σ y $K[S_v]$ es la $K-$ álgebra correspondiente, se cumple:*

$$Der_K\left(K[S_v]\right) = \langle D_w \rangle_{K[S_v]} + \langle x^{-\alpha}.D_v \rangle_{K[S_v]} \text{ donde } w \in M^* : w(\alpha) = 0 \text{ y } v(\alpha) = 1$$

ó equivalentemente

$$Der_K\,(K[S_v]) = M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K[S_v] + \langle x^{-\alpha}.D_v\rangle_{K[S_v]}$$

estando tal suma dentro de las derivaciones de $K[M]$

Demostración:

Sea σ_v el cono generado por $v \in \mathrm{N}$ que por otra parte es morfismo epiyectivo $v : M \to \mathbb{Z}$ y sea $\alpha : v(\alpha) = 1$. El cono σ_v es fuertemente convexo y $S_v = v^{\vee} \cap M$ genera todo M por lo que

$$S_v = \langle Ker(v)\rangle_{\mathbb{Z}} \bigoplus \langle\alpha\rangle_{\mathbb{N}} \quad rg(Ker(v)) = n-1$$

Sea entonces $Ker(v) = \langle u_1, \ldots, u_{n-1}\rangle_{\mathbb{Z}}$ independientes $\Rightarrow$

$$K[S_v] = K[Y_1, Y_1^{-1}, \ldots, Y_{n-1}, Y_{n-1}^{-1}, Y = x^{\alpha}] \quad Y_j = x^{u_j}$$

Aplicamos de nuevo la factorización de las derivaciones a través de la localización,

$$Der_K K[S_v] = Der_K\left(K[Y_1, \ldots, Y_{n-1}, Y], K[Y_1, Y_1^{-1}, \ldots, Y_{n-1}^{-1}, Y\right) = \langle \mathcal{Y}^{-t}.\partial_{Y_i}, \partial_Y\rangle_{K[S_v]}$$

donde $t = (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ y $\mathcal{Y} = (Y_1, \ldots, Y_{n-1})$. Sean $w_j(u_i) = \delta_{ij}$ todas nulas sobre α, $\Rightarrow \partial_{Y_i} = Y_i^{-1}.D_{w_i}$ y es inmediato comprobar que $\partial_Y = x^{-\alpha}.D_v$ de donde se concluye la primera igualdad. Para la segunda es inmediato observar que $\{w_1, \ldots, w_{n-1}, v\}$ es base del módulo M^* y entonces dada $\omega \in M^*$, se puede escribir $\omega = p.v + \sum p_i.\omega_i$ con $\omega_1(\alpha) = 0$ $\Rightarrow$

$$D_\omega = (p.x^{\alpha}).(x^{-\alpha}.D_v) + \sum p_i.D_{\omega_i}$$

y se concluye.

$\square$

Nótese que el conjunto $\langle x^{-\alpha}.D_v\rangle$ puede sustituirse por los $x^m.D_v$ tales que $m \in M$ y $v(m) \geq -1 \Rightarrow$

$$Der_K K[S_v] = M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K[S_v] \bigoplus \langle\{x^m.D_{v_i} :\ m \in M,\, v(m) \geq -1\}\rangle_K \tag{1}$$

Teorema 3.8. *Las derivaciones del álgebra finito generada, íntegra y normal del semigrupo $S = \sigma^{\vee} \cap M$ asociado al cono $\sigma = \langle v_1, \ldots, v_d\rangle_{\mathbb{Q}^+}$ y que contiene al toro $T = K[M]$ como abierto denso y que extiende su operación como esquema en grupos a la operación de $G-$conjuntos sobre $K[S]$ son el $K[S]-$módulo $M-$graduado,*

$$Der_K K[S] =$$

$$(M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K[S]) + \sum_{i=1}^{d} \langle \{x^m.D_{v_i} : \ m \in M, \ v_i(m) \geq -1 \ y \ v_j(m) \geq 0 \ \forall \ j \neq i\} \rangle_K$$

Demostración:

Por el lema 3.5, $Der_K K[S] = \bigcap_{v_i} Der_K K[S_{v_i}]$ y aplicando ahora la igualdad 1 del corolario anterior se tiene que

$$Der_K K[S] = \bigcap_{v_i} (K[S_{v_i}] \otimes_K M^* + \langle \{x^m.D_{v_i} : v_i(m) \geq -1\} \rangle_K)$$

y por tanto $Der_K K[S]$ contiene a los elementos del enunciado.

Recíprocamente, si $x^m.D_{v_i}$ es además una derivación en $K[S_{v_j}]$ $\forall$ j, entonces tomando $\beta \in Ker(v_j) \setminus Ker(v_i)$ se tiene

$$x^m.D_{v_i}(x^\beta) = v_i(\beta).x^{m+\beta} \in K[S_{v_j}]$$

luego necesariamente $v_j(m) \geq 0$. Ahora bien, si $v_i(m) \geq 0 \Rightarrow$

$$x^m.D_{v_i} \in \bigcap_i K[S_{v_i}] \otimes_{\mathbb{Z}} M^* = K[S] \otimes_{\mathbb{Z}} M^*$$

y si $v_i(m) = -1 \Rightarrow$

$$x^m.D_{v_i} \in \{x^m.D_{v_i} : \ v_i(m) \geq -1 \text{ y } v_j(m) \geq 0 \ \forall \ j \neq i\}$$

Por tanto tenemos demostrada la igualdad del enunciado como espacios vectoriales. En cuanto a la estructura de $K[S]-$módulo $M-$graduado, una derivación D_α de grado $\alpha \in M$ en $K[S]$ es una derivación que transforma homogéneos de grado $s \in S$ en homogéneos de grado $\alpha + s$,

$$D_\alpha : K[S]_s \to K[S]_{\alpha+s}$$

Si $x^\beta \in K[S]$, entonces $(x^\beta.D_\alpha)(x^s) = x^\beta.D_\alpha(x^s)$ que tiene grado $\beta + \alpha + s$ y por tanto $x^\beta.D_\alpha$ es una derivación de grado $\beta + \alpha$. Lo que se ha probado es que los elementos homogénos en $Der_K K[S]$ son de la forma

$$D_\alpha = \lambda_\alpha x^\alpha D_w : \begin{cases} \alpha \in S \text{ y} \quad w \in M^* \\ \qquad\qquad \text{ó} \\ w = v_i, \quad v_i(\alpha) \geq -1 \text{ y } v_j(\alpha) \geq 0 \end{cases}$$

La operación como $K[S]-$módulo coincide porque $x^\beta.D_\alpha = \lambda_\alpha x^{(\beta+\alpha)}.D_w$ y por tanto se tiene la igualdad como $K[S]-$módulos $M-$graduados.

$\square$

Con estos resultados podemos concluir la **Demostración del Teorema 3.1:**

$$\Gamma\left(X,\mathcal{D}\right)=\bigcap_{\sigma\in\Delta}\mathcal{D}er\left(K[S_\sigma],K[S_\sigma]\right)$$

y las derivaciones en cada $K[S_\sigma]$ las conocemos por el teorema 3.8 por tanto es claro que toda derivación del enunciado es una sección global de las derivaciones y se tiene una contención.

Para la otra, obviamente podemos suponer que Δ tiene más de un cono. Sea D una sección global, luego $D\in Der(K[S_\sigma])$ y por el Teorema 3.8 descompone en una suma, de modo que basta ver que cada sumando es del tipo descrito en el enunciado:

- Sea $D=x^m.D_w\in M^*\otimes_K K[S_\sigma]$. Si $\forall\ \xi\in\Delta\ m(\xi)\geq 0$ entonces $D\in M^*\otimes_K K[S_\Delta]$ con lo que D estaría en el primer sumando del enunciado. De lo contrario, sea $\xi\in\Delta$ tal que $m\notin\xi^\vee$ y por tanto $\exists\ u\in\xi_1(arista)$ tal que $m(u)\leq -1$.
  Ahora bien, por hipótesis $D=x^m.D_w\in Der(K[S_\xi])$ luego $\forall\ t\in\xi^\vee$ se cumple $x^m.D_w(x^t)=w(t).x^{m+t}\in K[S_\xi]$ es decir, $(m+t)\in\xi^\vee$. En particular si $w(t)\neq 0$ entonces $m(u)+t(u)\geq 0$ con lo que $t(u)>0$ estricto y en definitiva se ha probado $u^\perp\cap\xi^\vee\subseteq w^\perp\cap\xi^\vee$ de donde, salvo el signo, $D_w=D_u$ y la situación ahora es

  $$D=x^m.D_u\in Der(K[S_\xi]):m(u)\leq -1,\,u\in\xi_1$$

  Elegimos entonces $t\in\xi^\vee\cap M:u(t)=1$ que existe como se ve en el Lema 3.2. Aplicando ahora $x^m.D_u(x^t)$ se deduce que necesariamente $m(u)=-1$ y sólo resta ver que m es no negativa sobre el resto de las aristas de ξ.
  Sea pues $v\in\xi$, $v\neq u$ y sea $t\in\left(v^\perp\cap\xi^\vee\right)\setminus\left(u^\perp\cap\xi^\vee\right)$ que existe porque cada hipercara de $\xi^\vee$ está determinada por una única arista y se ha supuesto $v\neq u$. Derivando se tiene

  $$x^m.D_u(x^t)=u(t).x^{m+t}\text{ con }m+t(v)=m(v)\geq 0$$

  luego D es del tipo descrito en el enunciado.

- Supongamos ahora que $D=x^m.D_e\in Der(K[S_\sigma])\setminus M^*\otimes_K K[S_\sigma]$. Entonces

  $$\begin{aligned}m(e)&=-1\\ m(v)&\geq 0\qquad\forall v\in\sigma_1\qquad v\neq e\end{aligned}$$

Por hipótesis $D \in Der(K[S_\xi])$ y hay que ver que para toda arista $u \in \xi_1$ con $u \neq e$, se tiene $u(m) \geq 0$. En efecto, dado $u \neq e$ arista de ξ, sea $t \in (u^\perp \cap \xi^\vee) \setminus (e^\perp \cap \xi^\vee)$ y basta aplicar la derivación a x^t que por ser una derivación en $K[S_\xi]$ se tendrá $e(t).x^{(m+t)} \in K[S_\xi]$ luego $m + t(u) = m(u) \geq 0$ con lo que se concluye.

□

Observación 3. *En el caso semicompleto, el semigrupo $S_\Delta = 0$ y el primer sumando de las derivaciones se reduce a $M^* \otimes_\mathbb{Z} K$. Si además se cumple que $\forall$ H hiperplano afín y $\forall$ $v \in \Delta_1$, $H \cap ((\Delta_1 \setminus v).\mathbb{Q}_+) \neq \emptyset$ es decir, todo hiperplano afín no vertorial corta al menos dos de las semirectas generadas por las aristas del abanico entonces*

$$\Gamma(X, \mathcal{D}) = M^* \otimes K$$

Pretendemos ahora encontrar una base o al menos sistema de generadores de las derivaciones que es un espacio vectorial de dimensión finita y que coincide con $dim_K (Gl(n+1)/K^*)$ que es $n^2 + 2n$ siendo n el rango del retículo. En el caso semicompleto, el primer sumando de las derivaciones es M^* de dimensión n luego el otro sumando tiene dimensión n^2+n.

Ejemplo 1. *Vamos a construir el plano proyectivo a partir de un abanico en $\mathbb{Z}^2$ que tiene rango 2 y por tanto tendremos una base del segundo sumando con seis derivaciones.*

Sea $\{e_2, e_3\}$ una base del $\mathbb{Z}-$módulo libre $\mathbb{Z}^2$, y del espacio vectorial $\mathrm{N}_\mathbb{Q}$, por ejemplo $e_2 = (1,0)$ y $e_3 = (0,1)$. Sea $\{m_2, m_3\}$ la base dual de modo que si denotamos $x = x^{m_2}$, $y = x^{m_3}$ tendremos el toro $K[M] = K[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$ que nos va a permitir calcular las derivaciones en coordenadas. Sea $e_1 = -(e_2 + e_3)$ y el abanico completo cuyos conos son:

$$\sigma_1 = \langle e_2, e_3 \rangle \qquad \sigma_2 = \langle e_1, e_3 \rangle \qquad \sigma_3 = \langle e_1, e_2 \rangle$$

y los duales:

$$\sigma_1^\vee = \langle m_2, m_3 \rangle \qquad \sigma_2^\vee = \langle -m_2, -m_2 + m_3 \rangle \qquad \sigma_3^\vee = \langle -m_3, -m_3 + m_2 \rangle$$

y las respectivas variedades tóricas afines cuyos anillos de funciones son:

$$K[x, y] \qquad K[x^{-1}, x^{-1}.y] \qquad K[y^{-1}, y^{-1}.x]$$

Las intersecciones son las variedades tóricas afines asociadas a las caras comunes entre los conos del abanico y se observa facilmente que el esquema obtenido es el plano proyectivo $X = \mathbb{P}_2$. Para calcular las secciones globales de las derivaciones aplicando el Teorema 3.1 y dar una base en las coordenadas x, y hay que observar la siguiente relación que se comprueba facilmente:

$$D_{e_2} = x.\partial_x \qquad D_{e_3} = y.\partial_y \qquad D_{e_1} = -x.\partial_x - y\partial_y \equiv x.\partial_x + y\partial_y$$

Teniendo en cuenta que $M = \langle m_2, m_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ y $M^* = \langle e_2, m_3 \rangle_{\mathbb{Z}}$, vamos a calcular los $x^m.D_{e_i}$ con las condiciones del teorema anterior.

Para D_{e_1} :

$$m = a.m_2 + b.m_3 : \begin{cases} m(e_1) & = -1 \\ m(e_2) & \geq 0 \\ m(e_3) & \geq 0 \end{cases}$$

de donde se deduce que necesariamente $a = 0$ y $b = 1$ ó bien $a = 1$ y $b = 0$ y por tanto se obtienen las derivaciones:

$$\langle x^{m_2}.D_{e_1}, x^{m_3}.D_{e_1} \rangle \equiv \langle x.(x\partial_x + y\partial_y), y.(x\partial_x + y\partial_y) \rangle = \langle x^2\partial_x + xy\partial_y, xy\partial_x + y^2\partial_y \rangle$$

Para D_{e_2} :

$$m = a.m_2 + b.m_3 : \begin{cases} m(e_2) & = -1 \\ m(e_1) & \geq 0 \\ m(e_3) & \geq 0 \end{cases}$$

de donde se deduce que necesariamente $a = -1$ y $b = 0$ ó bien $a = -1$ y $b = 1$ y por tanto se obtienen las derivaciones:

$$\langle x^{-m_2}.D_{e_2}, x^{-m_2+m_3}.D_{e_2} \rangle \equiv \langle \partial_x, y\partial_x \rangle$$

Para D_{e_3} :

$$m = a.m_2 + b.m_3 : \begin{cases} m(e_3) & = -1 \\ m(e_1) & \geq 0 \\ m(e_2) & \geq 0 \end{cases}$$

de donde se deduce que necesariamente $a = 0$ y $b = -1$ ó bien $a = 1$ y $b = -1$ y por tanto se obtienen las derivaciones:

$$\langle x^{-m_3}.D_{e_3}, x^{m_2-m_3}.D_{e_3} \rangle \equiv \langle \partial_y, x\partial_y \rangle$$

En definitiva se ha calculado las derivaciones del plano proyectivo:

$$\Gamma\left(\mathbb{P}_2, \mathcal{D}\right) = M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K \bigoplus \langle \partial_x, \partial_y, y\partial_x, x\partial_y, x^2\partial_x + x.y\partial_y, x.y\partial_x + y^2\partial_y \rangle_K$$

obteniendo además una base.

3.1. Derivaciones y raíces

Como hemos visto, las secciones globales de las derivaciones a las que simplemente nos referiremos como derivaciones (globales) y que denotaremos $Der_K(\mathcal{O}_X)$ son el subespacio vectorial de $Der_K(K[M]) = M^* \otimes_K K[M]$ y como tal $M-$ graduado:

$$Der_K(\mathcal{O}_X) = \bigoplus_{\alpha \in M} \mathcal{D}_\alpha$$

donde $\mathcal{D}_\alpha$ está generado por las derivaciones $x^\alpha D_v$ tales que $v(\alpha) = -1$ y $u(\alpha) \geq 0$ $\forall$ $v \neq u$ con u, $v \in \Delta_1$. Evidentemente $\mathcal{D}_\alpha$ es de dimensión uno ó cero.
Definición: Llamamos *raíces de X en M* a las $\alpha \in M$ tales que $\mathcal{D}_\alpha \neq 0$. Obsérvese que las opuestas de tales raíces coinciden con la definición de raíces de $Aut^\circ X$ respecto el toro maximal T dada por Demazure [5]
Sea $\Delta_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ el subconjunto semicompleto de todas las aristas de los conos del abanico Δ y sea Δ_1^* las aristas de Δ_1 que no dependen $\mathbb{R}_+ -$ linealmente de las otras aristas es decir,

$$\Delta_1^* = \{v \in \Delta_1 : v \notin \mathbb{Q}_+.(\Delta_1 \setminus v)\}$$

Podemos describir también las derivaciones mediante la suma

$$\Gamma\left(X, \mathcal{D}\right) = M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K \oplus \bigoplus_{v \in \Delta_1^*} \mathrm{D}(v)$$

donde

$$\mathrm{D}(v) = \langle \{x^m.D_v : m \in M, v(m) = -1 \text{ y } e(m) \geq 0 \forall v \neq e \in \Delta_1\} \rangle_K$$

que son espacios vectoriales si se incluye, en cada sumando, la derivación nula y claramente $D(v) = 0$ para $v \notin \Delta_1^*$. La dimesión de $D(v_i)$ es el número d_i de soluciones del sistema:

$$S_i = S(v_i) = \{\alpha \in M : v_i(\alpha) = -1, v_j(\alpha) \geq 0 \forall v_j \in (\Delta_1 \setminus \{v_i\})\}$$

de modo que, en el caso semicompleto, se tiene:

$$dim_K\left(\Gamma\left(X, \mathcal{D}\right)\right) = n + \sum_{i=1}^{r} d_i$$

En esta suma, si $v_i \notin \Delta_1^*$ entonces $d_i = 0$. De otra manera, si d_i' para cada $i : v_i \in \{v_1, \ldots, v_r\}$ es el número de soluciones del sistema $S_i' = \{\alpha \in M : v_i(\alpha) \geq -1, v_j(\alpha) \geq 0 \forall j \neq i\}$, luego $d_i' = d_i + 1$ y por tanto la dimensión de las derivaciones es $n + \sum_{i=1}^r d_i' - r$ que es la dimensión del retículo mas el número de raíces.
Definición: Decimos que $S(v)$ es el conjunto de *las raíces asociadas a* v para cada $v \in \Delta_1^*$.

Proposición 3.9. *Sean dos aristas* v, $u \in \Delta_1^*$ *y sean* $\alpha \in S(v)$ *y* $\beta \in S(u)$*. Si* $u(\alpha) > 0$ *y* $v(\beta) > 0$ *entonces* $\alpha = -\beta$ *y por tanto* $u(\alpha) = 1$ *y* $v(\beta) = 1$

Demostración:
Sea $m = \alpha + \beta$ de modo que por hipótesis $u(m) \geq 0$, $v(m) \geq 0$ y $e(m) \geq 0$ para todo $e \in \Delta_1$, luego $m \in S_\Delta = 0$ en caso semicompleto, con lo que se concluye.

□

Este resultado nos da una relación entre las derivaciones $x^\alpha D_u$ y $x^\beta D_v$, según la cual $\beta = -\alpha$ ó $v(\alpha) = 0$ ó $u(\beta) = 0$, lo que nos lleva a plantearnos cuál es la relación entre dos sistemas que comparten soluciones opuestas.

Observación 4. *Nótese que si* $\alpha \in M$ *es tal que* $\alpha \in S(v)$ *y* $\beta = -\alpha \in S(u)$*, entonces* $e(\alpha) = 0$ *para toda arista* $e \neq v, u$*. Si* $\alpha \in S(v)$ *y* $-\alpha \in S(u)$ *diremos que* $\alpha \in S(v) \cap S(-u)$ *es decir,* α *es solución del sistema de ecuaciones diofánticas:*

$$\{v = -1, u = 1 \ \text{y} \ e = 0 \ \forall \ e \in \Delta_1, \ e \neq v, u\}$$

Proposición 3.10. $S(v) \cap S(-u)$ *tiene a lo sumo un elemento*

Demostración:
Sea $\alpha \in S(v)$ y $\beta = -\alpha \in S(u)$. Sea $\alpha' \in S(v)$ y $\beta' = -\alpha' \in S(u)$ de manera que $x^{\beta=-\alpha} D_u$ y $x^{\alpha'} D_v$ son derivaciones tales que $u(\alpha') = 1 > 0$ y $v(\beta) = 1 > 0$. La proposición anterior afirma que necesariamente $\beta = -\alpha'$, es decir, $\alpha' = \alpha$ con lo que queda demostrado.

□

Definición: Si $S(v) \cap S(-u) \neq \emptyset$ entonces diremos que su único elemento α es una *raíz parejable respecto de* v, u y al resto de raíces en $S(v)$ las llamaremos *raíces no parejables*

y al subconjunto de $S(v)$ de tales raíces lo denotaremos $S^*(v)$.
En la sección 5 se hará un estudio detallado de la propiedades de las raíces que será determinante para el cálculo del grupo $Aut\, X$.

3.2. Algebra de Lie de una variedad tórica

Sean $\Gamma(X, \mathcal{D})$ las derivaciones globales y para cada $\alpha \in M$ sea $\mathcal{D}_\alpha$ el subespacio vectorial $\langle x^\alpha D_v \rangle_K$, que sólo será no nulo cuando $\alpha \in S(v)$ para algún $v \in \Delta_1^*$ necesariamente único. El grado cero está representado por $D_0 = M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K$ de modo que se tiene la $M-$graduación:

$$\Gamma(X, \mathcal{D}) = \bigoplus_{\alpha \in M} D_\alpha$$

Consideremos el paréntesis de Lie de dos derivaciones,

$$\left[x^\alpha D_v, x^\beta D_u\right] = x^\alpha D_v \circ x^\beta D_u - x^\beta D_u \circ x^\alpha D_v$$

y basta aplicarlo para ver que

$$\left[x^\alpha D_v, x^\beta D_u\right] = x^{\alpha+\beta}(v(\beta) D_u - u(\alpha) D_v)$$

Proposición 3.11. *El corchete de Lie de dos derivaciones es la siguiente derivación:*

$$\left[x^\alpha D_v, x^\beta D_u\right] = \begin{cases} D_{(u-v)} \in M^* & si\ v(\beta) > 0\ y\ u(\alpha) > 0 \\ -u(\alpha).x^{\alpha+\beta} D_v & si\ v(\beta) = 0\ y\ u(\alpha) > 0 \\ v(\beta).x^{\alpha+\beta} D_u & si\ u(\alpha) = 0\ y\ v(\beta) > 0 \\ 0 & si\ u(\alpha) = 0\ y\ v(\beta) = 0 \end{cases}$$

Demostración:
El primer caso es consecuencia del estudio que se hizo de los sistemas en la sección anterior, según el cual en tales condiciones $\alpha = -\beta$ y por tanto la derivación resultante es $D_u - D_v$ que es de grado $\alpha + \beta = 0$. El resto de los casos son evidentes, con lo que se acaba.

□

3.3. Derivaciones y divisores $T-$Weil

Como hemos visto en el teorema 2.8, si $\Delta_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ son las aristas de los conos del abanico Δ cuya variedad tórica es $(X, \mathcal{O}_X)$ entonces las hipersuperficies $H_1, \ldots, H_r$

son los divisores de Weil estables por la acción del toro $T = Spec\, K[M]$. Sea pues $v \in \Delta_1$ y H_v uno de ellos y $\mathcal{O}(H_v)$ el haz coherente asociado cuyas secciones globales son:

$$\Gamma\left(X_\sigma, \mathcal{O}(H_v)\right) = \{f \in \Sigma : (Div(f) + H_v)_{|X_\sigma} \geq 0\}$$

El que el divisor H_v sea invariante por el toro implica que tales secciones $f \in \Sigma$ son de hecho elementos de M, porque $\Gamma(X_\sigma, \mathcal{O}(H_v)) \subseteq \Gamma(T, \mathcal{O}(H_v))$ que son las secciones globales del toro y por tanto $K[M]$. Luego sea $f \in K[M]$ una sección y se tiene:

$$\begin{array}{ll} (Div(f) + H_v(\sigma))\,|_{X_{v_i}} & = v_i(f).H_{v_i}(\sigma) \\ (Div(f) + H_v(\sigma))\,|_{X_v} & = v(f).H_v(\sigma) + H_v(\sigma) \end{array}$$

de lo que se deduce que $v_i(f) \geq 0$ y $v(f) \geq -1$, por tanto, como para $f = \sum_{\alpha \in M} \lambda_\alpha x^\alpha$ es $v(f) = min\{v(\alpha) : \lambda_\alpha \neq 0\}$ se tiene:

$$\Gamma\left(X_\sigma, \mathcal{O}(H_v)\right) = \left\langle \left\{ x^{m \in M} : v(m) \geq -1, v_i(m) \geq 0\, \forall\, v_i \in \sigma \right\} \right\rangle_K =$$
$$= K[S_\sigma] + \left\langle \left\{ x^{m \in M} : v(m) = -1, v_i(m) \geq 0\, \forall\, v_i \in \sigma \right\} \right\rangle_K$$

Obviamente es un $\mathcal{O}_X-$ módulo $M-$graduado y en cada grado $m \in M \setminus S_\sigma$ coincide con las derivaciones.

Teorema 3.12. *Sean $\Delta_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ las aristas del abanico y Δ_1 semicompleto. La siguiente sucesión de haces es exacta:*

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_X \to_i M^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}(H_{v_i}) \to_p \mathcal{D}er_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \to 0$$

donde

$$\begin{array}{ll} i(f_1, \ldots, f_r) & = (f_1 v_1 + \cdots + f_r v_r, -f_1, \ldots, -f_r) \\ p(fw, f_1, \ldots, f_r) & = f D_w + f_1 D_{v_1} + \cdots + f_r D_{v_r} \end{array}$$

Además la sucesión es exacta al tomar secciones en cualquier abierto invariante por el grupo y también tomando secciones globales.

Demostración:

Para ver que es exacta de haces y que es exacta al tomar secciones en cada abierto invariante por el grupo, veamos que es exacta en los abiertos afines $Spec\, K[S_\sigma]$. Reordenando podemos suponer $\sigma = \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$ y $v_{s+1}, \ldots, v_r \notin \sigma$. La sucesión al tomar secciones en el abierto, teniendo en cuenta las secciones de los haces L_{v_i} que hemos visto es:

$$0 \to \sum_{i=1}^{s} K[S_\sigma] + \sum_{s+1}^{r} K[S_\sigma] \to M^* \otimes K[S_\sigma] +$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\left(\langle\left\{x^{\alpha\in M}: v_i(\alpha)=-1, v_j(\alpha)\geq 0\forall v_j\in\sigma\right\}\rangle + K[S_\sigma]\right) + \sum_{i=s+1}^{r} K[S_\sigma] \rightarrow$$

$$\rightarrow (M^*\otimes_{\mathbb{Z}} K[S_\sigma]) + \sum_{i=1}^{s}\langle\{x^\alpha D_{v_i}:\ v_i(\alpha)=-1, \text{ y } v_j(\alpha)\geq 0\ \forall\ j\neq i\}\rangle \rightarrow 0$$

y los morfismos:

$$i(g_1,\ldots,g_s,g_{s+1},\ldots,g_r) = \left(\sum_{i=1}^{r} g_i v_i, (0,-g_1),\ldots,(0,-g_s), -g_{s+1},\ldots,-g_r\right)$$

$$p\left(gw,(f_1,g_1),\ldots,(f_s,g_s),g_{s+1},\ldots,g_r\right) = gD_w + \sum_{i=1}^{r} g_i D_{v_i} + f_1 D_{v_1} + \cdots + f_s D_{v_s}$$

El último término de la sucesión que corresponde a las derivaciones, es una suma directa y es claro que la sucesión de $K[S_\sigma]-$módulos es exacta y además escinde. Los morfismos conservan la graduación y por tanto la sucesión es exacta como módulos $M-$graduados. Veamos la sucesión de $K[S_\Delta] = K-$espacios vectoriales que resulta al tomar secciones globales en el caso completo:

$$0\rightarrow\sum_{i=1}^{r} K \rightarrow M^*\otimes_{\mathbb{Z}} K + \sum_{i=1}^{r}\left(\langle\left\{x^{\alpha\in M}: v_i(\alpha)=-1, v_j(\alpha)\geq 0\forall j\neq i\right\}\rangle + K\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow (M^*\otimes_{\mathbb{Z}} K) + \sum_{i=1}^{r}\langle\{x^\alpha D_{v_i}: v_i(\alpha)=-1, v_j(\alpha)\geq 0\forall j\neq i\}\rangle\rightarrow 0$$

con los morfismos

$$\begin{array}{ll} i(\lambda_1,\ldots,\lambda_r) & = (\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i, (0,-\lambda_1),\ldots,(0,-\lambda_r)) \\ p\left(\lambda w,(f_1,\lambda_1),\ldots,(f_r,\lambda_r)\right) & = (\lambda D_w + \sum_{i=1}^r \lambda_1 D_{v_i}) + \sum_{i=1}^r f_i D_{v_i} \end{array}$$

que también es exacta.

□

Capítulo 4

4. Espacio tangente al grupo $Aut\,X$

Sabemos que las derivaciones del anillo (haz) $\mathcal{O}_X$ de la variedad tórica X es un subespacio vectorial de las derivaciones del anillo de su toro maximal, $Der_K(K[M]) = M^* \otimes_K K[M]$ y como tal subespacio vectorial es $M-$graduado:

$$Der_K(\mathcal{O}_X) = \oplus_{\alpha \in M} \mathcal{D}_\alpha$$

donde $\mathcal{D}_\alpha$ está generado por las derivaciones $x^\alpha D_v$ tales que $v(\alpha) = -1$ y $u(\alpha) \geq 0$ $\forall$ $v \neq u$ con $u, v \in \Delta_1$. Evidentemente $\mathcal{D}_\alpha$ es de dimensión uno ó cero. A las $\alpha \in M$ tales que $\mathcal{D}_\alpha \neq 0$ las llamamos raíces de X en M. Además tiene un paréntesis de Lie natural que ya hemos calculado luego es un álgebra de Lie sobre la que opera el toro $T = Spec\,K[M]$: Si $\lambda \in T^{\cdot}(K) = Hom_K(K[M], K)$ y $D \in \mathcal{D}_\alpha \Rightarrow \lambda.D = \lambda^\alpha D$ (donde λ^α denota $\lambda(\alpha)$) y por tanto $Der(\mathcal{O}_X)$ es un $T-$módulo $M-$graduado. El toro T es el siguiente subgrupo algebraico del grupo $G = Aut\,X$: Para cada punto racional $\lambda \in T$, τ_λ es el automorfismo $\tau_\lambda(x^s) = \lambda^s x^s$ de modo que las derivaciones de grado α coinciden con las derivaciones D tales que $\tau_\lambda \circ D \circ \tau_\lambda^{-1} = \lambda^\alpha D$. En general para los puntos $\lambda \in T^{\cdot}(B) = Hom_K(K[M], B)$ con valores en una $K-$álgebra B la operación es $\tau_\lambda(x^s) = x^s \otimes \lambda(s) \in \mathcal{O}_X \otimes_K B$.
Para estudiar el grupo $G = Aut\,X$ de haz de funciones $K[G]$ es muy útil conocer su espacio tangente en la identidad, $T_eG = Der_K(K[G], K)$ que nos permite calcular sus subgrupos normales. Como puede verse en 16.4 [12] $\mathcal{G} = T_eG$ es un $T-$módulo gracias a la representación adjunta Ad respecto la cual $H = Ad(T)$ es un subgrupo diagonalizable de $Gl(\mathcal{G})$ y se tiene $\mathcal{G} = \oplus_{\alpha \in \chi(H)} \mathcal{G}_\alpha$ donde $\chi(H)$ es el grupo de caracteres de H y donde T opera a través de la representación adjunta: $\lambda.D = Ad(\lambda)(D)$ y como la representación adjunta induce morfismo inyectivo $\chi(H) \to \chi(T)$ tenemos una $\chi(T) = M-$graduación en T_eG :

$$T_eG = \oplus_{\alpha \in M} \mathcal{G}_\alpha \text{ donde } \mathcal{G}_\alpha = \{D_e : \ Ad(\lambda)(D_e) = \lambda^\alpha D_e \ \forall \ \lambda \in T\}$$

Cada vector $D_e \in \mathcal{G}$ se identifica con una derivación $D \in Der_K(K[G], K[G])$ (9.1 [12]) de modo que el espacio vectorial $\mathcal{G}$ es isomorfo a cierto subespacio de tales derivaciones (las que conmutan con la traslación por la izquierda que luego veremos) y vía este isomorfismo se dota a $\mathcal{G}$ de estructura de álgebra de Lie tal que el isomorfismo de espacios vectoriales lo sea también de álgebras de Lie. Pretendemos ver la relación entre $Der_K(\mathcal{O}_X)$ y $\mathcal{G} = T_e(G)$ como álgebras de Lie $M-$ graduadas.

4.1. Funtor del grupo de automorfismos

Sea $X = X(N, \Delta)$ variedad tórica completa y el funtor para cada $K-$ esquema Z :

$$\mathcal{F}(Z) = Aut_Z(X \times Z) = \{\text{automorfismos del } Z\text{−esquema } X \times Z\}$$

que sabemos por [16], teorema 3.6, que es representable y su representante es el grupo algebraico que denotamos $G = Aut\, X$ y por tanto si $G^{\cdot}$ es su funtor de puntos entonces hay isomorfismo entre este funtor y $\mathcal{F}$. Para dar el isomorfismo $\widetilde{f} : G^{\cdot} \to \mathcal{F}$ hay que fijar el elemento universal $\widetilde{z}$ (ver [20]) que además define la estructura de $G-$esquema en X :

$$\widetilde{z} = \widetilde{f}(Id) \in \mathcal{F}(G) = Aut(X \times G)$$

En los puntos es

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{z}: & X \times G & \longrightarrow & X \times G \\ & p, \sigma & \rightsquigarrow & \sigma(p), \sigma \end{array}$$

En las funciones el automorfismo $\widetilde{z} : \mathcal{O}_X \otimes K[G] \to \mathcal{O}_X \otimes K[G]$ de $K[G]-$ álgebras viene dado por un morfismo $\widetilde{z} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X \otimes K[G]$ de $K-$ álgebras que en los puntos sea $\widetilde{z}(p, \sigma) = \sigma(p)$ luego

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{z}: & \mathcal{O}_X & \to & \mathcal{O}_X \otimes K[G] \\ & a & \rightsquigarrow & \sum f_a \end{array}$$

donde $f_a = b_a \otimes y_a$ (no únicos) tales que

$$\sum b_a(p).y_a(\sigma) = a(\sigma(p)) \ \forall\ p \in X,\ \sigma \in G$$

Tenemos entonces para cada esquema Y

$$G^{\cdot}(Y) \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathcal{F}(Y),\ \widetilde{f}(h) = \mathcal{F}(h)(\widetilde{z})$$

Vamos a estudiar con precisión el isomorfismo $\widetilde{f}$ viendo la relación entre las funciones de transición de los respectivos funtores. Denotaremos Id a la identidad en $K[G]$ y I a la identidad en $\mathcal{O}_X$. Sea $V : K[G] \to K$ un punto de G con valores en K (después lo veremos en general para puntos con valores en una $K-$ álgebra B) que denotaremos $V = V_\sigma \in G^{\cdot}(K)$ y sea $l = l_\sigma \in \mathcal{F}(K)$ el correspondiente por $\widetilde{f}$ de modo que $\widetilde{f}(V_\sigma) = l_\sigma$. Por tanto $l_\sigma = \mathcal{F}(V_\sigma)(\widetilde{z})$ es decir, $l_\sigma = I \otimes V_\sigma \circ \widetilde{z}$ y se tiene

$$\text{si } \widetilde{z}(a) = \sum b_a \otimes y_a \Rightarrow l_\sigma(a) = \sum b_a.V_\sigma(y_a) \tag{2}$$

En particular si $V_e = e$ es el neutro en $G^{\cdot}(K) \Rightarrow \widetilde{f}(e) = I$ de donde de la ecuación anterior se deduce

$$\text{si } \widetilde{z}(a) = \sum b_a \otimes y_a \Rightarrow a = \sum b_a.y_a(e) \ (y(e) \text{ denota } V_e(y)) \tag{3}$$

Si consideramos l_σ como automorfismo de $K[G]-$módulo de $\mathcal{O}_X \otimes_K K[G]$ operando en $K[G]$ por la identidad entonces $\widetilde{z} \circ l_\sigma \in \mathcal{F}(K[G])$ y llamamos *traslación por la izquierda* al correspondiente $L^*_\sigma \in G^{\cdot}(K[G])$ tal que $\widetilde{f}(L^*_\sigma) = \widetilde{z} \circ l_\sigma$ y por tanto

$$\text{si } \widetilde{z}(a) = \sum b_a \otimes y_a \Rightarrow \widetilde{z} \circ l_\sigma(a) = \sum b_a \otimes L^*_\sigma y_a \tag{4}$$

Dadas l_σ y $l_{\sigma'}$ en $\mathcal{F}(K) = Aut_K \mathcal{O}_X$ denotaremos $l_{\sigma\circ\sigma'} = l_{\sigma'} \circ l_\sigma$ y su correspondiente por $\widetilde{f}$ será $V_{\sigma\circ\sigma'}$ es decir, $\widetilde{f}(V_{\sigma\circ\sigma'}) = l_{\sigma\circ\sigma'} = l_{\sigma'} \circ l_\sigma$. Al inverso de l_σ lo denotaremos $l_\sigma^{-1} = l_{\sigma-1}$ y su correspondiente $\widetilde{f}(V_{\sigma^{-1}}) = l_{\sigma^{-1}}$ de modo que como $\widetilde{f}(V_e) = I$ se tiene $V_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = V_e$. Se cumple la igualdad:

$$V_{\sigma\circ\sigma'} = V_{\sigma'} \circ L^*_\sigma \ \forall \ V_\sigma, V_{\sigma'} \in G^{\cdot}(K) \tag{5}$$

En efecto, basta aplicar el isomorfismo $\widetilde{f}$ a ambas partes. A una parte es $\widetilde{f}(V_{\sigma\circ\sigma'}) = l_{\sigma'} \circ l_\sigma$. A la otra es

$$\widetilde{f}(V_{\sigma'} \circ L^*_\sigma) = \mathcal{F}(V_{\sigma'})(\widetilde{f}(L^*_\sigma)) = \mathcal{F}(V_{\sigma'})(\widetilde{z} \circ l_\sigma) = \widetilde{f}(V_{\sigma'}) \circ l_\sigma = l_{\sigma'} \circ l_\sigma$$

De igual modo vamos a definir *traslación por la derecha*: Si $l = l_\sigma \in \mathcal{F}(K)$ sea el automorfismo $l_{\sigma^{-1}} \otimes I \circ \widetilde{z} \in \mathcal{F}(K[G])$ donde

$$l_{\sigma^{-1}} \otimes I \circ \widetilde{z}(a) = \sum l_{\sigma^{-1}} b_a \otimes y_a$$

luego $\exists' \ R^*_\sigma \in G^{\cdot}(K[G])$ tal que

$$\widetilde{f}(R^*_\sigma) = l_{\sigma^{-1}} \otimes I \circ \widetilde{z} \tag{6}$$

y decimos que es la *traslación por la derecha* asociada a l_σ.
Sea $V_{\sigma'} : K[G] \to K$ para este morfismo sea el cuadro conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G^{\cdot}(K[G]) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathcal{F}(K[G]) \\ {\scriptstyle G(V_{\sigma'})} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathcal{F}(V_{\sigma'})} \\ G^{\cdot}(K) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathcal{F}(K) \end{array}$$

Aplicando el cuadro a $R^*_\sigma \in G^{\cdot}(K[G])$ vemos que se cumple $G(V_{\sigma'})(R^*_\sigma) = V_{\sigma\circ\sigma'}$ es decir se tiene la igualdad

$$V_{\sigma'} \circ {R_\sigma}^* = V_{\sigma'\circ\sigma^{-1}} \ \forall \ V_\sigma, V_{\sigma'} \in G^{\cdot}(K) \tag{7}$$

Para comprobarlo, aplicando $\widetilde{f}$ a la segunda parte obtenemos

$$\widetilde{f}(V_{\sigma'\circ\sigma^{-1}}) = l_{\sigma'\circ\sigma^{-1}} = l_{\sigma^{-1}} \circ l_{\sigma'}$$

y por la conmutatividad del cuadrado hay que ver que eso coincide con $\mathcal{F}(V_{\sigma'})(\widetilde{f}(R^*_\sigma))$. Aplicado a $a \in \mathcal{O}_X$ da:

$$\mathcal{F}(V_{\sigma'})(\widetilde{f}(R^*_\sigma))(a) = \mathcal{F}(V_{\sigma'})(l_{\sigma^{-1}} \otimes I \circ \widetilde{z})(a) = \mathcal{F}(V_{\sigma'})(\sum l_{\sigma^{-1}} b_a \otimes y_a) =$$

$$= \sum \sum l_{\sigma^{-1}} b_a . V_{\sigma'}(y_a)$$

y esto por la igualdad (2) es justamente $l_{\sigma^{-1}}(l_{\sigma'}(a))$ con lo que se concluye.
Sea ahora un punto p de la variedad tórica, $p : \mathcal{O}_X \to K$ y $V_\sigma : K[G] \to K$ un punto de G. Entonces $p \otimes V_\sigma(b \otimes y) = p(b).V_\sigma(y)$ define un punto $p \otimes V_\sigma : \mathcal{O}_X \otimes K[G] \to K$ de $X \times G \Rightarrow$

$$p \otimes V_\sigma \circ \widetilde{z}(a) = \sum p(b_a).V_\sigma(y_a)$$

Por otro lado por la ecuación (2) se tiene

$$(p \circ l_\sigma)(a) = p(\sum b_a.V_\sigma(y_a)) = \sum p(b_a).V_\sigma(y_a)$$

y se ha probado:

$$p \otimes V_\sigma \circ \widetilde{z} = p \circ l_\sigma \ \forall \ V_\sigma \in G^{\cdot}(K) \text{ y } p \in X \tag{8}$$

y como $\forall \ l_x$ se cumple

$$p \circ l_\sigma = (p \circ l_x)(l_{x^{-1}} \circ l_\sigma) = x(p) \circ l_{\sigma\circ x^{-1}}$$

donde $x(p) : \mathcal{O}_X \to K$ denota al punto $p \circ l_x : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X \to K$ se deduce

$$p \otimes V_\sigma \circ \widetilde{z} \overset{(8)}{=} p \circ l_\sigma = x(p) \circ l_{\sigma \circ x^{-1}} \overset{(8)}{=} x(p) \otimes V_{\sigma \circ x^{-1}} \circ \widetilde{z}$$

que por la ecuación 7 es $x(p) \otimes (V_\sigma \circ R_x^*) \circ \widetilde{z}$ de donde para $\widetilde{z}(a) = \sum b_a \otimes y_a$ se tiene aplicando ambas partes:

$$\sum p(b_a).V_\sigma(y_a) = \sum p(l_x(b_a)).V_\sigma(R_x^* y_a) \qquad \forall\ p,\, V_\sigma$$

$\Rightarrow$

$$p \otimes V_\sigma \left(\sum b_a \otimes y_a \right) = p \otimes V_\sigma \left(\sum l_x(b_a) \otimes R_x^* y_a \right) \qquad \forall\ p,\, V_\sigma$$

$\Rightarrow$

$$\widetilde{z}(a) = \sum b_a \otimes y_a = \sum l_x(b_a) \otimes R_x^* y_a \qquad \forall\ l_x \in \mathcal{F}(K) \tag{9}$$

Vamos a generalizar estos resultados para los todos los puntos. Sea pues B una $K-$álgebra que contiene a K y ahora el isomorfismo es $\widetilde{f} : G^{\cdot}(B) \to \mathcal{F}(B)$. Sea como antes $V = V_\sigma \in G^{\cdot}(B)$ y sea $l = l_\sigma \in \mathcal{F}(B)$ el correspondiente por $\widetilde{f}$ de modo que $\widetilde{f}(V_\sigma) = l_\sigma$. Por tanto $l_\sigma = \mathcal{F}(V_\sigma)(\widetilde{z})$ es decir, $l_\sigma = I \otimes V_\sigma \circ \widetilde{z}$ y se tiene para $\widetilde{z}(a) = \sum b_a \otimes y_a$ la igualdad:

$$l_\sigma(a) = \sum b_a \otimes V_\sigma(y_a) \qquad \text{(2) generalizada}$$

En particular si $V_e = e$ es el neutro en $G^{\cdot}(B)$, que es el neutro de $G^{\cdot}(K)$ por la composición

$$V_e : K[G] \to K \hookrightarrow B$$

$\Rightarrow \widetilde{f}(e) = I : \mathcal{O}_X \otimes_K B \to \mathcal{O}_X \otimes_K B$ de donde de la ecuación anterior se deduce

$$a \otimes 1 = \sum b_a \otimes V_e(y_a) \qquad \text{(3) generalizada}$$

Sea $\widetilde{x} \otimes 1_B : \mathcal{O}_X \otimes_K K[G] \otimes B \to \mathcal{O}_X \otimes_K K[G] \otimes B \Rightarrow \widetilde{z} \otimes 1_B \circ l_\sigma \in \mathcal{F}(K[G] \otimes_K B)$ y sea entonces $L_\sigma^* \in G^{\cdot}(K[G] \otimes_K B)$ tal que $\widetilde{f}(L_\sigma^*) = \widetilde{z} \otimes 1_B \circ l_\sigma$ y por tanto

$$\widetilde{z} \otimes 1_B \circ l_\sigma(a) = \sum b_a \otimes L_\sigma^* y_a \qquad \text{(4) generalizada}$$

Sea como antes $V_{\sigma \circ \sigma'}$ tal que $\widetilde{f}(V_{\sigma \circ \sigma'}) = l_{\sigma \circ \sigma'} = l_\sigma \circ l_{\sigma'}$ con $\widetilde{f}(V_\sigma) = l_\sigma$ y $\widetilde{f}(V_{\sigma'} = l_{\sigma'}$ y como

$$\widetilde{f}(V_{\sigma'} \circ L_\sigma^*) = \mathcal{F}(V_{\sigma'})(\widetilde{f}(L_\sigma^*)) = \mathcal{F}(V_{\sigma'})(\widetilde{z} \otimes 1_B \circ l_\sigma) =$$

$$= \widetilde{f}(V_{\sigma'}) \circ l_\sigma = l_{\sigma'} \circ l_\sigma$$

$\Rightarrow$

$$V_{\sigma\circ\sigma'} = V_{\sigma'} \circ L_\sigma^* \qquad \text{(5) generalizada}$$

La traslación por la derecha asociada a $l_\sigma \in \mathcal{F}(B)$ es $R_\sigma^* \in G^{\cdot}(K[G] \otimes_K B)$ tal que

$$\widetilde{f}(R_\sigma^*) = l_{\sigma^{-1}} \otimes I \circ \widetilde{z} \qquad \text{(6) generalizada}$$

Sea $V_{\sigma'} : K[G] \otimes_K B \to B$ y para este morfismo sea el cuadro conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G^{\cdot}(K[G] \otimes_K B) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathcal{F}(K[G] \otimes_K B) \\ {\scriptstyle G(V_{\sigma'})} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathcal{F}(V_{\sigma'})} \\ G^{\cdot}(B) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathcal{F}(B) \end{array}$$

Aplicando el cuadro a $R_\sigma^* \in G^{\cdot}(K[G])$ vemos que se cumple $G(V_{\sigma'})(R_\sigma^*) = V_{\sigma\circ\sigma'}$ y se comprueba como antes en el caso $B = K$ que $\mathcal{F}(V_{\sigma'})(\widetilde{f}(R_\sigma^*))$ y por tanto se tiene la igualdad

$$V_{\sigma'} \circ R_\sigma^* = V_{\sigma'\circ\sigma^{-1}} \qquad \text{(7) generalizada}$$

Sea ahora $p : \mathcal{O}_X \to B$ un punto de X con valores en $Spec\, B$ y $V_\sigma : K[G] \to B$. Entonces $p \otimes V_\sigma(b \otimes y) = p(b).V_\sigma(y)$ define un morfismo de $K-$álgebras

$$p \otimes V_\sigma : \mathcal{O}_X \otimes_K K[G] \to B$$

Si $\widetilde{z}(a) = \sum b_a \otimes y_a \Rightarrow$ por (2) generalizada $l_\sigma(a \otimes 1) = \sum b_a \otimes V_\sigma(y_a)$ y por tanto si denotamos $\sigma(p)$ al morfismo de $K-$álgebras $p \otimes 1 \circ l_\sigma$ se tiene $\sigma(p)(a) = \sum p(b_a) \otimes V_\sigma(y_a)$ y la igualdad:

$$p \otimes V_\sigma \circ \widetilde{z} = \sigma(p) \qquad \text{(8) generalizada}$$

y como

$$\sigma(p) = p \otimes 1 \circ l_\sigma = (p \otimes 1 \circ l_x) \circ (l_{x^{-1}} \circ l_\sigma) = x(p) \circ l_{\sigma\circ x^{-1}}$$

y aplicando (8) generalizada al punto $x(p)$ se deduce

$$x(p) \circ l_{\sigma\circ x^{-1}} = x(p) \otimes V_{\sigma\circ x^{-1}} \circ \widetilde{z}$$

luego

$$p \otimes V_\sigma \circ \widetilde{z} = x(p) \otimes V_{\sigma\circ x^{-1}} \circ \widetilde{z} \overset{(7)}{=} (V_\sigma \circ R_x^*) \otimes x(p) \circ \widetilde{z}$$

y aplicando la primera y última parte de estas igualdades a $\widetilde{z}(a) = \sum b_a \otimes y_a$ obtenemos

$$p \otimes V_\sigma \left(\sum b_a \otimes y_a\right) = \sum p(l_x(b_a)) V_\sigma(R_x^* y_a) = p \otimes V_\sigma \left(\sum l_x(b_a) \otimes R_x^* y_a\right) \ \forall\, p,\, V_\sigma$$

$\Rightarrow$

$$\widetilde{z}(a) = \sum b_a \otimes y_a = \sum l_x(b_a) \otimes R_x^* y_a \ \forall\, l_x \in \mathcal{F}(K) \qquad \text{(9) generalizada}$$

4.1.1. Algebra de Hopf

Como G es un grupo algebraico, debe tener estructura de álgebra de Hopf (ver [20]) luego debe tener un producto

$$\begin{array}{ccc} K[G] & \stackrel{\mu^*}{\to} & K[G]\otimes_K K[G] \\ y & \rightsquigarrow & \sum y_1\otimes y_2 \end{array}$$

tal que:

$$V_\sigma\otimes V_{\sigma'}\circ\mu^* = V_{\sigma\circ\sigma'}\ \forall\ V_\sigma,\, V_{\sigma'} \tag{10}$$

Este producto queda definido por $\widetilde{f}(\mu^*)$ para que sea compatible con la estructura de $G-$módulo en X y por tanto

$$\widetilde{f}(\mu^*) = \widetilde{z}\otimes Id\circ\widetilde{z}$$

Veamos que en efecto verifica (10). Como $\widetilde{f}(V_{\sigma\circ\sigma'}) = l_{\sigma'}\circ l_\sigma$ basta ver que también $\widetilde{f}(V_\sigma\otimes V_{\sigma'}\circ\mu^*) = l_{\sigma'}\circ l_\sigma$.

$$\widetilde{f}(V_\sigma\otimes V_{\sigma'}\circ\mu^*) = \mathcal{F}(V_\sigma\otimes V_{\sigma'})(\widetilde{f}(\mu^*)) = \mathcal{F}(V_\sigma\otimes V_{\sigma'})(\widetilde{z}\otimes Id\circ\widetilde{z}) =$$

$$= \mathcal{F}(V_\sigma)(\widetilde{z})\otimes V_{\sigma'}\circ\widetilde{z} = \widetilde{f}(V_\sigma)\otimes V_{\sigma'}\circ\widetilde{z} = (l_{\sigma'}\otimes l_\sigma)\circ\widetilde{z} = l_{\sigma'}\circ l_\sigma$$

El producto en G debe restringir a su toro maximal. Sea $T = Spec\,K[M]$ el toro de X representante del funtor $\mathcal{F}'$ definido por $Hom_K(K[M],B)$ que es el siguiente subfuntor de $\mathcal{F}(B) = Aut_B(\mathcal{O}_X\otimes_K B)$:

$$\text{si } \lambda\in Hom_K(K[M],B)\Rightarrow\tau_\lambda(x^s) = \lambda(x^s)(x^s\otimes 1)$$

En los puntos cerrados $\lambda\in Hom_K(K[M],K)$ denotaremos $\lambda(s) = \lambda(x^s)\Rightarrow\tau_\lambda(x^s) = \lambda(s)x^s$. Luego $T^\cdot$ es subfuntor de $G^\cdot$ y $T\subset G$ es subgrupo algebraico $\Rightarrow$ existe $\pi : K[G]\to K[M]\to 0$ tal que $\pi^* : T^\cdot\hookrightarrow G^\cdot$ define T como subgrupo de G y por tanto el producto μ^* debe extenderse a $K[M]$ a través de π con lo que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} K[G] & \stackrel{\mu^*}{\longrightarrow} & K[G]\otimes_K K[G] \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi\otimes\pi \\ K[M] & \stackrel{\mu^*}{\longrightarrow} & K[M]\otimes_K K[M] \end{array}$$

es conmutativo y como $T = Spec\,K[M]$ es un grupo multiplicativo $\Rightarrow$

$$\mu^*(x^\alpha) = x^\alpha\otimes x^\alpha\ \forall\ \alpha\in K[M]$$

Además, la estructura de $T-$ módulo en X debe ser conpatible a través de π con la de $G-$ módulo definida por $\widetilde{z}$, luego si denotamos $\widetilde{z}' = I \otimes \pi \circ \widetilde{z}$ a la composición:

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\widetilde{z}} \mathcal{O}_X \otimes_K K[G] \xrightarrow{I\otimes\pi} \mathcal{O}_X \otimes_K K[M]$$

entonces $\widetilde{z}'$ define la operación de T en X que como sabemos debe ser extensión de la operación de T sobre T lo que quiere decir que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\widetilde{z}'} & \mathcal{O}_X \otimes_K K[M] \\ \mathrm{i}\downarrow & & \downarrow \mathrm{i} \\ K[M] & \xrightarrow{\mu^*} & K[M] \otimes_K K[M] \end{array}$$

y por tanto como T es multiplicativo se cumple

$$\widetilde{z}'(x^s) = x^s \otimes x^s \;\forall\; x^s \in \mathcal{O}_X \overset{i}{\hookrightarrow} K[M] \tag{11}$$

Proposición 4.1. *Sea un punto $\lambda : K[M] \to K$. Si τ_λ denota al automorfismo en $\mathcal{O}_X$ definido por $\tau_\lambda(x^s) = \lambda(s)x^s$ y $V_\lambda = \lambda \circ \pi$ entonces $\widetilde{f}(V_\lambda) = \tau_\lambda$*

Demostración: Basta comprobarlo para cada $a = x^s$ homogéneo:

$$\widetilde{f}(V_\lambda)(x^s) = (I \otimes V_\lambda)(\widetilde{z}(x^s)) = I \otimes (\lambda \circ \pi) \circ \widetilde{z}(x^s) = I \otimes \lambda \circ I \otimes \pi \circ \widetilde{z}(x^s) =$$

$$= I \otimes \lambda \circ \widetilde{z}'(x^s) \overset{11}{=} I \otimes \lambda(x^s \otimes x^s) = x^s \lambda(x^s) = \tau_\lambda(x^s)$$

y se acaba

□

4.2. Espacio tangente y derivaciones

Veamos ahora que el isomorfismo funtorial $\widetilde{f}$ establece un isomorfismo (canónico) entre el espacio tantente T_eG y la derivaciones de $\mathcal{O}_X$. Sea A una $K-$ álgebra y $q \in SpecA$ un punto racional de morfismo $V : A \to K$ y por definición el espacio tangente a $Spec\,A$ en q es $T_qSpec\,A = Der_K(A, A/q \simeq K)$. Sea también la siguiente $K-$ álgebra :

$$K[\xi] = \{a + b\xi : a,\, b \in K\} \simeq K[x]/x^2$$

que es el anillo $K[\xi]$ tal que $\xi^2 = 0$ y sea $\xi_0 : K[\xi] \to K$ el morfismo (punto de $Spec\,K[\xi]$) que consiste en hacer $\xi = 0$ es decir $\xi_0(a + b\xi) = a$. Entonces $T_qSpec\,A$ se identifica con los morfismos de $K-$ álgebras $A \to K[\xi]$ que al componer con ξ_0 dan V y denotaremos $Hom_K^V(A, K[\xi])$ a tales morfismos. Efectivamente la identificación consiste en asignar a cada derivación $D : A \to K$ el morfismo $h_D : A \to A[\xi]$ dado por $h_D(y) = V(y) + D(y)\xi$ tal que $\xi_0 \circ h_D = V$. En el caso que nos ocupa $V = V_e : K[G] \to K$ es el neutro de $e \in G$ y tenemos

$$T_eG = Hom_K^e(K[G], K[\xi]) \hookrightarrow Hom_K(K[G], K[\xi]) = G^{\cdot}(K[\xi])$$

Por otro lado, las derivaciones $Der_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ se identifican con los morfismos $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X[\xi]$ que al componer con $I \otimes \xi_0 : \mathcal{O}_X \otimes_K K[\xi] \to \mathcal{O}_X$ dan la identidad en $\mathcal{O}_X$ y los denotaremos $Hom_K^I(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X[\xi])$ y de igual modo a los correspondientes automorfismos $Aut^I_{K[\xi]}(\mathcal{O}_X[\xi], \mathcal{O}_X[\xi])$: Cada derivación $\widetilde{D} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ se identifica con $h_{\widetilde{D}} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X[\xi]$ definido por $h_{\widetilde{D}}(a) = a + \widetilde{D}(a)\xi$ y por tanto tenemos

$$Der_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = Hom_K^I(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X[\xi]) = Aut^I_{K[\xi]}(\mathcal{O}_X[\xi], \mathcal{O}_X[\xi]) = \mathcal{F}^I(K[\xi])$$

Como $\widetilde{f}$ es una transformación natural de funtores de grupos, sea el cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G^{\cdot}(K[\xi]) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathcal{F}(K[\xi]) \\ {\scriptstyle G^{\cdot}(\xi_0)}\downarrow & & {\scriptstyle \mathcal{F}(\xi_0)}\downarrow \\ G^{\cdot}(K) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathcal{F}(K) = Aut\mathcal{O}_X \\ e & \rightsquigarrow & I \end{array} \tag{12}$$

luego $G^{\cdot}(\xi_0)(h) = e \Leftrightarrow \mathcal{F}(p)(\widetilde{f}(h)) = I$ y por tanto $\widetilde{f} : G^{\cdot}(K[\xi]) \to \mathcal{F}(K[\xi])$ restringe a $\widetilde{f} : Hom_K^e(K[G], K[\xi]) \to Hom_K^I(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X[\xi])$ de donde se deduce el isomorfismo $\widetilde{f} : T_eG \to Der_K\mathcal{O}_X$ definido por $\widetilde{f}(D_e) = \widetilde{D_e}$ que es la única derivación en $\mathcal{O}_X$ tal que $h_{\widetilde{D_e}} = \widetilde{f}(h_{D_e})$ es decir, $h_{\widetilde{f}(D_e)} = \mathcal{F}(h_{D_e})(\widetilde{z}) = (I \otimes h_{D_e}) \circ \widetilde{z}$ que según se ha definido antes es el siguiente morfismo de $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X[\xi]$

$$h_{\widetilde{f}(D_e)}(a) = (Id \otimes h_{D_e}) \left(\sum b_a \otimes y_a\right) = \sum b_a.(y_a(e) + D_e(y_a)\xi) =$$

$$= \sum V_e(y_a)b_a + \left(\sum b_a D_e(y_a)\right)\xi = a + \left(\sum b_a D_e(y_a)\right)\xi \in \mathcal{O}_X[\xi]$$

(la última igualdad está justificada por 2) y por tanto

$$\widetilde{f}(D_e)(a) = \sum b_a D_e(y_a) \text{ donde } \sum b_a(p) y_a(\sigma) = a(\sigma(p)) \ \forall\, p \in X,\, \sigma \in G \tag{13}$$

y obviamente $\widetilde{f}(q.D_e) = q.\widetilde{f}(D_e)\ \forall\, q \in K$.

Observación 5. *Nótese que se ha probado que*

$$h_{\widetilde{f}(D_e)} = I + \xi.\widetilde{f}(D_e) = \widetilde{f}(V_e + \xi.D_e)$$

Vamos a ver finalmente que $\widetilde{f}$ induce isomorfismo canónico entre espacio tantente a G y derivaciones que además conserva las representaciones adjuntas y por ende los paréntesis de Líe que como veremos se obtienen de tales representaciones.

Definición: Sea B una $K-$ álgebra que contiene a K y un punto $V = V_x \in G^{\cdot}(B)$. Sean las traslaciones por izquierda y derecha L_x^* y R_x^* y la composición $\varphi_x = R_x^* \circ L_x^*$ llamado *automorfismo interno.* Se llama *representación adjunta* en G del morfismo V_x a su morfismo diferencial, el automorfismo

$$Ad_G(V_x) = d\varphi_x^* : Der_B(K[G] \otimes_K B, B) \longrightarrow Der_B(K[G] \otimes_K B, B)$$

es decir

$$Ad_G(V_x)(D) = D' \text{ donde } D'(y \otimes 1) = D(y') \text{ para } y' = \varphi_x^*(y)$$

De igual modo, se define la *representación adjunta* en $\mathcal{F}$ del morfismo $l \in \mathcal{F}(B)$ al siguiente automorfismo en $Der_B(\mathcal{O}_X \otimes_K B)$:

$$Ad_{\mathcal{F}}(l)(\widetilde{D}) = l^{-1} \circ \widetilde{D} \circ l \qquad \text{para } \widetilde{D} \in Der_B(\mathcal{O}_X \otimes_K B)$$

Teorema 4.2. *$\widetilde{f} : G^{\cdot} \overset{\sim}{\to} \mathcal{F}$ induce isomorfismo canónico entre $Der_B(K[G] \otimes_K B, B)$ y $Der_B(\mathcal{O}_X \otimes_K B)$ tal que $\forall\ V = V_x \in G^{\cdot}(B)$ y $l = l_x = \widetilde{f}(V_x)$ se cumple*

$$\widetilde{f}\left(Ad_G\left(V\right)\left(D\right)\right) = Ad_{\mathcal{F}}\left(l\right)\left(\widetilde{f}\left(D\right)\right)$$

Demostración: Sea $e = V_e : K[G] \to K \hookrightarrow B$ el neutro en $G^{\cdot}(B)$ y $\widetilde{f}(e) = I$ la identidad en $\mathcal{O}_X \otimes_K B$. En primer lugar veamos que la restricción de $\widetilde{f}$ induce isomorfismo entre $G^{\cdot e}(B[\xi])$ y $\mathcal{F}^I(B[\xi])$ siendo:

$$G^{\cdot e}(B[\xi]) = Hom_K^e(K[G], B[\xi]) = \{h : K[G] \to B[\xi] :\ \xi_0 \circ h = e\}$$

y

$$\mathcal{F}^I(B[\xi]) = Hom_{B[\xi]}^I(\mathcal{O}_X \otimes_K B[\xi], \mathcal{O}_X \otimes_K B[\xi]) = \{g : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X \otimes_K B[\xi] :\ \xi_0 \circ g = I\}$$

En efecto, $\widetilde{f}$ restringe porque si $h \in G^{\cdot e}(B[\xi]) \Rightarrow h(y) = y(e) + p(\xi)$ ($y(e)$ denota $V_e(y)$) con $p(\xi) \in B[\xi] \Rightarrow$

$$\widetilde{f}(h)(a) = 1 \otimes h(\widetilde{z}(a)) = \sum b_a \otimes (y_a(e) + p_a(\xi)) =$$

$$= \sum b_a \otimes y_a(e) + \sum b_a \otimes p_a(\xi) = a + \sum b_a \otimes p_a(\xi)$$

donde la última igualdad está justificada por (3) generalizada. Para concluir la primera parte del teorema resta ver que:

$$G^{\cdot e}(B[\xi]) \simeq Der_B(K[G] \otimes_K B, B) \text{ y } \mathcal{F}^I(B[\xi]) \simeq Der_B(\mathcal{O}_X \otimes_K B)$$

En efecto, el primer isomorfismo viene dado por

$$h_D(y) = y(e) + D(y \otimes 1).\xi \text{ para } D \in Der_B(K[G] \otimes_K B, B)$$

y el segundo por

$$g_{\widetilde{D}}(a) = a + \widetilde{D}(a \otimes 1).\xi \text{ para } \widetilde{D} \in Der_B(\mathcal{O}_X \otimes_K B)$$

Veamos ahora que $\widetilde{f}$ conserva la representación adjunta. Sea $\widetilde{z}(a) = \sum b_a \otimes y_a$ y $l = \widetilde{f}(V)$ y R^* y L^* las traslaciones a derecha e izquierda asociadas. Queremos ver que $\widetilde{f}(Ad(V)(D)) = l^{-1} \circ \widetilde{f}(D) \circ l$. Para ello, por definición de $\widetilde{f}(D)$, para calcular $\widetilde{f}(D)(l(a))$ hay que calcular $\widetilde{z} \circ l(a)$ que por las igualdades (4) y (9) generalizadas es:

$$\widetilde{z} \circ l(a) = \sum b_a \otimes L^* y_a = \sum l(b_a) \otimes R^* L^* y_a$$

es decir $\widetilde{z}(l(a)) = \sum l(b_a) \otimes y'_a$ y entonces

$$\widetilde{f}(D)(l(a)) = \sum l(b_a).D(y'_a) = \sum l(b_a).D'(y_a)$$

para $D' = Ad(V)(D) \Rightarrow$

$$l^{-1} \circ \widetilde{f}(D) \circ l = \sum b_a.D'(y_a) = \widetilde{f}(D')(a)$$

con lo que se acaba.

$\square$

Sea $T = Spec\, K[M]$ el toro maximal en G y como definimos al final de la sección anterior, para cada punto del toro $\lambda : K[M] \to K$, l_λ denota al automorfismo en $\mathcal{O}_X$ τ_λ definido por $\tau_\lambda(x^s) = \lambda(s) x^s$ y $V_\lambda = \lambda \circ \pi$ donde $K[G] \xrightarrow{\pi} K[M]$ define T como subgrupo de G.

Corolario 4.3. *Para $\mathcal{G} = \oplus_{\alpha \in M} \mathcal{G}_\alpha$ y $Der_K(\mathcal{O}_X) = \oplus_{\alpha \in M} \mathcal{D}_\alpha$ se cumple $\widetilde{f}(\mathcal{G}_\alpha) = \mathcal{D}_{-\alpha}$*

Demostración:
Que son isomorfos lo acabamos de ver para $B = K$. Que $D_e \in \mathcal{G}_\alpha$ significa que $Ad(V_\lambda)(D_e) = D'_e = \lambda(\alpha)D_e$ para todo $\lambda \in T$. Para comprobar el grado de $\widetilde{f}(D_e)$ tendremos en cuenta que $D \in Der_K\mathcal{O}_X$ es de grado $\beta \in M$ cuando $\tau_\lambda \circ D \circ \tau_{\lambda^{-1}} = \lambda(\beta)D$. Por hipótesis, $D'_e = \lambda(\alpha)D \Rightarrow \widetilde{f}(D'_e) = \lambda(\alpha)\widetilde{f}(D_e)$. Por otro lado el teorema anterior demuestra que $\widetilde{f}(D'_e) = l^{-1} \circ \widetilde{f}(D_e) \circ l$ donde $l = \widetilde{f}(V_\lambda)$ y por tanto bastará probar que $\widetilde{f}(V_\lambda) = \tau_\lambda$ y esto es justo lo que afirma la proposición 4.1 con lo que se acaba.

□

Observación 6. *En el caso particular de $B = K$ y $V = V_e = e$ el neutro en $G^{\cdot}(K)$, el Teorema 9.1 [12] demuestra que hay un isomorfismo de $K-$espacios vectoriales entre $Der_K(K[G], K)$ y $Der^L_K(K[G])$ donde*

$$Der^L_K(K[G]) = \{D \in Der_K(K[G]) : \ L^*_x \circ D = D \circ L^*_x \ \forall \ V_x \in G^{\cdot}(K)\}$$

El isomorfismo viene definido por las condiciones $D_e = V_e \circ D$ y $V_\sigma \circ D = D_e \circ L^*_\sigma$ $\forall$ $V_\sigma \in G^{\cdot}(K)$, $D_e \in Der_K(K[G], K)$ y $D \in Der^L_K(K[G])$. Por tanto se tiene

$$(R^*_{x^{-1}} \circ D \circ R^*_x)_e = V_e \circ R^*_{x^{-1}} \circ D \circ R^*_x \overset{(7)}{=} V_x \circ D \circ R^*_x =$$

$$= D_e \circ L^*_x \circ R^a_x st \circ \varphi^* = d\varphi^*(D_e) = Ad(V_x)(D_e)$$

luego

$$Ad(V_x)(D_e) = (R^*_{x^{-1}} \circ D \circ R^*_x)_e \ \forall \ V_x \in G^{\cdot}(K)$$

Las igualdades utilizadas tanto para la demostración del citado teorema como para la iguldad anterior, son las ecuaciones 2...9 que hemos visto que son ciertas en general para $V_\sigma \in G^{\cdot}(B)$ de modo que se cumple:

Proposición 4.4. *Para $V_e : K[G] \to K \hookrightarrow B$ el neutro de $G^{\cdot}(B)$ existe isomorfismo*

$$Der_K(K[G] \otimes_K B, B) \simeq Der^L_K(K[G] \otimes_K B)$$

donde

$$Der^L_K(K[G] \otimes_K B) = \{D \in Der_K(K[G] \otimes_K B) : \ L^*_x \circ D = D \circ L^*_x \ \forall \ V_x \in G^{\cdot}(B)\}$$

dado por las condiciones

$$\begin{array}{rcll} D_e & = & V_e \circ D & V_e \text{ neutro de } G^{\cdot}(B) \\ V_\sigma \circ D & = & D_e \circ L_\sigma^* & \forall\ V_\sigma \in G^{\cdot}(B) \end{array} \tag{14}$$

y tal que

$$Ad(V_x)(D_e) = (R_{x^{-1}}^* \circ D \circ R_x^*)_e\ \forall\ V_x \in G^{\cdot}(B)$$

□

Teorema 4.5. *Sea* $\widetilde{f} : G^{\cdot e} \to \mathcal{F}^I(B[\xi])$ *y el correspondiente isomorfismo entre* $Der_B(K[B] \otimes_K B, B)$ *y* $Der_B(\mathcal{O}_X \otimes_K B)$ *según el teorema 4.2 y sea*

$$\overline{f} : Aut_B\left(Der_B(K[B] \otimes_K B, B)\right) \to Aut_B\left(Der_B(\mathcal{O}_X \otimes_K B)\right)$$

isomorfismo inducido de modo que $\overline{f}(\phi) = \widetilde{f} \circ \phi \circ \widetilde{f}^{-1}$. *Entonces el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} G^{\cdot}(B) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathcal{F}(B) \\ Ad_G \downarrow & & \downarrow Ad_{\mathcal{F}} \\ Aut_B\left(Der_B(K[G] \otimes_K B, B)\right) & \xrightarrow{\overline{f}} & Aut_B\left(Der_B(\mathcal{O}_X \otimes_K B)\right) \end{array}$$

Demostración:
Sea $V \in G^{\cdot}(B)$ y $D \in Der_B(K[B] \otimes_K B, B) \Rightarrow$

$$\overline{f}(Ad_G V(\widetilde{f}(D)) = \widetilde{f}(Ad_G V(\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{f}(D)))) = \widetilde{f}(Ad_G V(D))$$

y por el teorema 4.2 $\widetilde{f}(Ad_G V(D)) = Ad_{\mathcal{F}}(l = \widetilde{f}(V))(\widetilde{f}(D))$ con lo que se concluye.

□

Teorema 4.6. *Sea* $G = AutX$ *el grupo de automorfismos de la variedad tórica* X *y* $K[G]$ *su haz de funciones. Entonces el morfismo funtorial* $\widetilde{f} : G^{\cdot} \to \mathcal{F}$ *define un isomorfismo canónico entre los espacios vectoriales* $M-$ *graduados*

$$\mathcal{G} = Der_K(K[G], K) = \oplus_{\alpha \in M} \mathcal{G}_\alpha \overset{\widetilde{f}}{\simeq} Der_K(\mathcal{O}_X) = \oplus_{\alpha \in M} \mathcal{D}_\alpha$$

tal que $\widetilde{f}(\mathcal{G}_\alpha) = \mathcal{D}_{-\alpha}$ *y además conserva los paréntesis de Lie:*

$$\widetilde{f}[D, E] = [\widetilde{f}D, \widetilde{f}D]\ \forall\ D,\ E \in \mathcal{G}$$

Diremos por tanto que $\mathcal{G}$ *y* $Der_K(\mathcal{O}_X)$ *son álgebras de Lie* $M-$ *graduadas canónicamente isomorfas y las denotaremos* T_eG

Demostración:
Consideremos el diagrama conmutativo del teorema anterior para $B = K[\xi]$:

$$\begin{array}{ccc} G^{\cdot}(K[\xi]) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathcal{F}(K[\xi]) \\ Ad_G \downarrow & & \downarrow Ad_{\mathcal{F}} \\ Aut_{K[\xi]}\left(Der_{K[\xi]}(K[G][\xi], K[\xi])\right) & \xrightarrow{\overline{f}} & Aut_{K[\xi]}\left(Der_{K[\xi]}(\mathcal{O}_X[\xi])\right) \end{array}$$

La igualdad como espacios vectoriales $M-$ graduados ya se ha visto en teorema 4.2 para $B = K[\xi]$ y el corolario 4.3. Queda ver la cuestión referida a los paréntesis de Lie. Sea ξ_0 el morfismo ya definido que consiste en hacer $\xi = 0$ y sea V_e el neutro. Si $\mathcal{F}^I(K[\xi]) = Aut^I \mathcal{O}_X[\xi]$ denota los automorfismos que al componer con ξ_0 dan la identidad, es decir,

$$\mathcal{F}^I(K[\xi]) = I + \xi.Der(\mathcal{O}_X) \simeq Der(\mathcal{O}_X)$$

entonces $\mathcal{F}(K[\xi]) \supset \mathcal{F}^I(K[\xi])$ y

$$Ad_{\mathcal{F}}\left(\mathcal{F}^I\left(K[\xi]\right)\right) \subset Aut_{K[\xi]}\left(Der_{K[\xi]}\left(\mathcal{O}_X[\xi]\right)\right) = I + \xi.End_K\left(Der_K\left(\mathcal{O}_X\right)\right)$$

Por otro lado sea $G^{\cdot e}(K[\xi]) = V_e + \xi.Der_K(K[G], K)$ que por la proposición 4.4 es $G^{\cdot e}(K[\xi]) = V_e \circ (Id + \xi.Der_K^L(K[G]))$ donde la igualdad está determinada por las condiciones 14 de modo que si $D \in Der_K^L(K[G]) \Rightarrow h_D = V_e \circ (Id + \xi.D) = V_e + \xi.D_e$ con $D_e \in G^{\cdot e}(K[\xi])$. Si tomamos $V = h_D$ a la que denotaremos $V_D \Rightarrow l_D = \widetilde{f}(V_D) = I + \xi.\widetilde{f}D_e = h_{\widetilde{f}D}$ y como $l_D^{-1} = l_{-D} \Rightarrow V_{D^{-1}} = V_{-D}$ (notación explicada en la ecuación (5)). Si restringimos $Ad_{\mathcal{G}}$ a $G^{\cdot e}(K[\xi]) \subset G^{\cdot}(K[\xi])$ valorará en:

$$Aut_{K[\xi]}^{Id}\left(Der_{K[\xi]}(K[G][\xi], K[\xi])\right) \simeq Aut_{K[\xi]}^{Id}\left(Der_{K[\xi]}^L(K[G][\xi])\right) =$$

$$= I + \xi.End_K(Der_K^L(K[G])) \simeq End_K(Der_K^L(K[G]))$$

Luego $\widetilde{f}$ restringe a $G^{\cdot e}(K[\xi]) \to \mathcal{F}^I(K[\xi])$ y del diagrama conmutativo anterior se deduce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V_e \circ (Id + \xi.Der_K^L(K[G])) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & I + \xi.Der(\mathcal{O}_X) \\ Ad_G \downarrow & & \downarrow Ad_{\mathcal{F}} \\ I + \xi.End_K(Der_K^L(K[G])) & \xrightarrow{\overline{f}} & I + \xi.End_K\left(Der_K\left(\mathcal{O}_X\right)\right) \end{array}$$

Sea $\widetilde{D} \in Der(\mathcal{O}_X)$ y $l_{\widetilde{D}} = h_{\widetilde{D}} = I + \xi.\widetilde{D}$. Sea $\widetilde{E} \in Der(\mathcal{O}_X) \Rightarrow \widetilde{E} \otimes 1 \in Der_{K[\xi]}(\mathcal{O}_X[\xi])$ $\Rightarrow$

$$Ad_{\mathcal{F}}(l_{\widetilde{D}})(\widetilde{E} \otimes 1) = l_{\widetilde{D}} \circ \widetilde{E} \otimes 1 \circ l_{-\widetilde{D}} = (I + \xi.\widetilde{D}) \circ \widetilde{E} \otimes 1 \circ (I - \xi.\widetilde{D}) =$$

$$= (I + \xi.\widetilde{D}) \circ (\widetilde{E} - \xi.\widetilde{E} \circ \widetilde{D}) = \widetilde{E} - \xi.\widetilde{E} \circ \widetilde{D} + \xi.\widetilde{E} \circ \widetilde{E}$$

y por tanto

$$Ad_{\mathcal{F}}(l_{\widetilde{D}})(\widetilde{E} \otimes 1) = \widetilde{E} \otimes 1 + \xi.[\widetilde{D}, \widetilde{E}]$$

Sea $D \in Der_K^L(K[G])$ y $V \in G^{\cdot}(K[\xi])$ es $V = V_D = h_D = V_e \circ (Id + \xi.D)$ es decir $V_D = V_e + \xi.D_e$. Vamos a ver que la translación por la derecha asociada es $R_D^* = Id - \xi.D$. Para ello veamos que se cumple la ecuación (7) es decir, $\forall\ V_{\sigma'} \in G^{\cdot}(K[\xi])$ se cumple $V_{\sigma'} \circ R_D^* = V_{\sigma' \circ D}$ que por (5) es $V_{-D} \circ L_{\sigma'}^*$. En efecto,

$$V_{\sigma'} \circ (Id - \xi.D) = V_{\sigma'} - \xi.V_{\sigma'} \circ D \stackrel{(14)}{=} V_{\sigma'} - \xi.D_e \circ L_{\sigma'}^*$$

Por otro lado,

$$V_{-D} \circ L_{\sigma'}^* = (V_e - \xi.V_e \circ D) \circ L_{\sigma'}^* = V_e \circ L_{\sigma'}^* - \xi.V_e \circ D \circ L_{\sigma'}^*$$

y eso de nuevo por (5) es $V_{\sigma'} - \xi.D_e \circ L_{\sigma'}^*$ luego en efecto $R_D^* = Id - \xi.D$. Sea $E \in Der_K(K[G])$ y $E \otimes 1 \in Der_{K[\xi]}(K[G][\xi]) \Rightarrow$ por la proposición 4.4

$$Ad_G(V_D)(E \otimes 1) = R_{-D}^* \circ E \otimes 1 \circ R_D^* = (Id + \xi.D) \circ E \otimes 1 \circ (Id - \xi.D) =$$

$$= (Id + \xi.D) \circ (E - \xi.E \circ D) = E - \xi.E \circ D + \xi.D \circ E = E \otimes 1 + \xi.[D, E]$$

Para concluir, sea $\widetilde{D} = \widetilde{f}(D)$ y $\widetilde{E} = \widetilde{f}(E)$ y hemos visto en esta demostración que $\widetilde{f}(V_D) = l_{\widetilde{D}} = h_{\widetilde{D}} \Rightarrow$ por el teorema 4.5 tenemos:

$$\overline{f}\left(Ad_G\left(V_D\right)\right)(\widetilde{E}) = Ad_{\mathcal{F}}(l_{\widetilde{D}})(\widetilde{E}) = Ad_{\mathcal{F}}(l_{\widetilde{f}(D)})(\widetilde{f}(E))$$

que como acabamos de ver es $\widetilde{f}(E) + [\widetilde{f}(D), \widetilde{f}(E)]$ y como por definición de $\overline{f}$

$$\overline{f}\left(Ad_G\left(V_D\right)\right)(\widetilde{E}) = \left(\widetilde{f} \circ Ad_G\left(V_D\right) \circ \widetilde{f}^{-1}\right)(\widetilde{f}(E)) =$$

$$= \widetilde{f}\left(Ad_G\left(V_D\right)E\right) = \widetilde{f}\left(E + [D, E]\right) = \widetilde{f}(E) + \widetilde{f}[D, E]$$

se deduce que $\widetilde{f}[D, E] = [\widetilde{f}D, \widetilde{f}E]$ con lo que se acaba.

□

4.3. Espacio tangente al grupo de automorfismos graduados de una $K-$ álgebra

Sea Z un $\mathbb{Z}-$ módulo libre y $\widetilde{v} : Z \to \mathbb{Z}^r$ morfismo tal que $\langle\{\widetilde{v_i} = x_i \circ \widetilde{v}\}\rangle_{\mathbb{Q}_+}$ sea un cono racional y fuertemente convexo, donde $x_i : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ es $x_i((a_1, \ldots, a_r)) = a_i$. Sea en Z el subsemigrupo $S = \widetilde{v}^{-1}(\mathbb{N}^r)$ y $gr : Z \to J$ morfismo epiyectivo de Z en un $\mathbb{Z}-$ módulo J y supongamos el *caso completo* que significa que $Ker(gr) \cap S = 0$. Entonces $A = K[x^S]$ es el anillo de una variedad tórica afín de toro $Spec\, K[Z]$ y además es $J-$ graduado con la siguiente graduación:

$$grad(x^s) = gr(s)$$

En particular y por hipópesis en grado cero es $A_0 = K$.
Sea el grupo $Aut_K A$ representante del funtor $\mathcal{F}(B) = Aut_B(A \otimes_K B)$ y como hemos visto $T_e(Aut_K A) = Der_K A$ es el álgebra de Lie de $Aut_K A$, que es $Z-$graduada y opera el toro $Spec\, K[Z] \Rightarrow$

$$Der_K A = \bigoplus_{\alpha \in Z} \mathcal{D}_\alpha$$

Si consideramos sólo las derivaciones de grado cero, obtenemos el subespacio vectorial y subálgebra de Lie

$$\bigoplus_{\substack{\alpha \in Z \\ gr(\alpha)=0}} \mathcal{D}_\alpha$$

que denotaremos $Der_J A$ y consiste en las derivaciones graduadas de A. Como en la sección 4.2, tales derivaciones graduadas son las derivaciones asociadas al subfuntor $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ de los automorfismos $J-$ graduados :

$$\mathcal{F}'(B) = Aut_B^{grad}(A \otimes_K B)$$

donde la graduación de $A \otimes_K B$ es la inducida por la $J-$ graduación de A de modo que $grad(a \otimes b) = gr(a) \in J$. En efecto, en la igualdad:

$$Der_K(A, A) = Hom_K^I(A, A \otimes_K K[\xi]) = Hom_{K[\xi]}^I(A[\xi], A[\xi])$$

es inmediato observar que una derivación $D : A \to A$ es de grado cero cuando el morfismo correspondiente $h_D(a) = a + D(a)\xi = a \otimes 1 + D(a) \otimes \xi$ es $J-$graduado. Luego si $Aut_K^J A$ es el representante del funtor $\mathcal{F}'$ y subgrupo de $Aut_K A$ se tiene:

Teorema 4.7. *Si A es una $K -$ álgebra $J -$ graduada con las condiciones que acabamos de definir y en los términos del teorema 4.6 se cumple el siguiente isomorfismo canónico de álgebras de Lie:*

$$T_I(Aut_J A) = Der_J A$$

$\square$

Capítulo 5

5. $K-$ Algebras graduadas de Δ_1

Como en §1.2 sea N un $\mathbb{Z}-$módulo libre de rango n y consideremos el grupo

$$M = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathrm{N}, \mathbb{Z})$$

Sea un abanico Δ cuyas aristas están generados por los elementos del conjunto $\Delta_1 = \{v_1, \ldots, v_r\} \subset \mathrm{N}$ que supondremos *semicompleto*, lo que significa que $\Delta_1.\mathbb{R}_+ = \mathbb{Q}^n$ (esta condición es más débil que la de que Δ sea abanico semicompleto). Supondremos que v_i es *mínima* (ó fundamental) para todo i, es decir, $v_i \neq p.e$ para todo $p \in \mathbb{Z}$ y $e \in \mathrm{N}$. Un abanico Δ formado por conos cuyas aristas son Δ_1, generan, como ya es sabido, los abiertos afines de una variedad tórica X que contiene como abierto denso al toro

$$T = Spec_{rac}K[M] = Hom_K(K[M], K) = Hom_{grp}(M, K^*).$$

Como hemos visto en la sección 2, H_i son los divisores de Weil $T-invariantes$ asociados a las aristas v_i calculados en la sección 2.2. Consideremos el grupo A_{n-1} de los divisores de Weil módulo la equivalencia lineal, esto es, el cero es el divisor de una función ó divisor principal. Denotaremos por $[H_i]$ a la clase de H_i en $A_{n-1}(X)$ y $[H_1], \ldots, [H_r]$ es un sistema generador vía la sucesión exacta ([8])

$$0 \to M \to \mathbb{Z}^{\Delta_1} \to A_{n-1}(X) \to 0 \tag{15}$$

donde el morfismo $M \to \mathbb{Z}^{\Delta_1}$ está definido por

$$\alpha \mapsto Div(x^\alpha) = \Sigma_i v_i(\alpha) H_i$$

Se denotará por $Ef(X)$ al subsemigrupo de $A_{n-1}(X)$ de los divisores efectivos. La sucesión exacta implica que dos divisores $T-$estables son de la misma clase en $A_{n-1}(X)$ si difieren en un divisor principal del tipo $D(x^\alpha)$. Para cada $a = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$, aH es el divisor $\Sigma_i a_i H_i$ y $v(\alpha) = (v_1(\alpha), \ldots, v_r(\alpha))$. Denotaremos:

$$\Gamma(a) = \{\alpha \in M : aH + D(x^\alpha) \geq 0\} \qquad \text{es decir} \qquad a + v(\alpha) \geq 0$$

En el caso semicompleto en el que estamos, es obvio que $\Gamma(H_i)$ son las *raices* asociadas a v_i, es decir los $\alpha \in M$ para los cuales $x^\alpha D_{v_i}$ es una derivación, luego siguiendo la notación de las derivaciones se tiene la igualdad:

$$Kx^{\Gamma(H_i)}.D_{v_i} = D(v_i)$$

y además $Kx^{\Gamma(a)}$ es isomorfo a $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ para cualquier divisor de Weil equivalente a aH, luego es un espacio vectorial de dimensión finita.

5.1. Sistema generador mínimo de $A_{n-1}(X)$

Definición: Diremos que el divisor H_i es *irreducible* cuando su clase $[H_i]$ no es combinación $\mathbb{N}-$lineal del resto de clases $[H_j]$ diferentes de $[H_i]$. En el caso de $[H_i] = [H_j]$ que se corresponde con la existencia de una raiz parejable y en adelante diremos que H_i es parejable con H_j, obviamente H_i es irreducible si y sólo si lo es H_j. Como ya se ha visto, $[H_i] = [H_j]$ equivale a que $S(v_i) \cap S(-v_j) = \{\alpha\}$ para un único $\alpha \in M$ que es la raiz parejable. Nótese que irreducible equivale a decir que no tiene raices salvo a lo sumo parejables. Reordenando si es necesario, escribiremos $H_1, \ldots, H_s, H_{s+1}, \ldots, H_{s+k=r}$ donde $H_1, \ldots, H_s$ son irreducibles y el resto bien son reducibles o bien parejables con alguna $[H_1], \ldots, [H_s]$. Por ejemplo en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$, las tres hipersuperficies H_1, H_2 y H_3 son parejables de modo que $s = 1$, $k = 2$ y $r = 3$. La sucesión exacta 15 implica que $A_{n-1}(X) = \langle [H_1], \ldots, [H_r] \rangle_{\mathbb{Z}}$ y $Ef(X) = \langle [H_1], \ldots, [H_r] \rangle_{\mathbb{N}}$. Se comprueba con facilidad que en el caso semicompleto, si $[H_{s+1}]$ se escribe $\mathbb{N}-$linealmente dependiente del resto entre las que está $[H_{s+2}]$, entonces en toda combinación $\mathbb{N}-$lineal de $[H_{s+2}]$ no puede aparecer $[H_{s+1}]$; con este procedimiento y reordenando se consigue que $[H_{s+j}]$ no dependa de $[H_{s+1}], \ldots, [H_{s+j-1}]$ demostrando pues que $[H_{s+j}]$ depende $\mathbb{N}-$linealmente de $[H_1], \ldots, [H_s]$ y por tanto:

$$A_{n-1}(X) = \langle [H_1], \ldots, [H_s] \rangle_{\mathbb{Z}} \qquad Ef(X) = \langle [H_1], \ldots, [H_s] \rangle_{\mathbb{N}} \tag{16}$$

Consideremos por tanto la dependencia:

$$H_{s+j} = n_1^j H_1 + \cdots + n_s^j H_s + D(x^{-m_{s+j}})$$

con $m_{s+j} \in M$ tal que:

$$v_{s+j}(m_{s+j}) = -1 \qquad v_i(m_{s+j}) = n_i^j \geq 0$$

$$v_l(m_{s+l}) = 0 \ \forall \ l > s \qquad \text{con} \qquad l \neq j$$

Alguna de las m_{s+j} puede ser una raiz parejable, como ocurre en el espacio proyectivo que lo son todas. Consideremos la matriz resultante $N = (n_i^j)$ cuya columna j es $N^j = v'(m_{s+j})$ y donde v' denotará $(v_1, \ldots, v_s)$. También convendremos en denotar $\overline{v} = (v_{s+1}, \ldots, v_{s+k})$ y $\overline{m} = (m_{s+1}, \ldots, m_{s+k})$, de modo que $v = (v', \overline{v})$. También $H' = (H_1, \ldots, H_s)$. Dado el vector $p = (p_1, \ldots, p_k)$, $p.N$ denotará vector de s coordenadas correspondiente al producto matricial por el traspuesto de p, esto es, $N.p^t = p_1N^1 + \cdots + p_kN^k$= $(pN_1, \ldots, pN_s)$ y $p\overline{m}$ será $p_1m_{s+1} + \cdots + p_km_{s+k}$. Siguiendo esta notación, se tiene la siguente fórmula general que permite pasar de la dependencia de un divisor de $H_1, \ldots, H_r$ a depender de $H_1, \ldots, H_s$:

$$n_1H_1 + \ldots, n_sH_s + p_1H_{s+1} + \cdots + p_kH_{s+k} = (n + pN)H' + D(x^{-p\overline{m}})$$

y por tanto si $x^{n,p}$ denota al monomio $x_1^{n_1} \ldots . x_s^{n_s} . x_{s+1}^{p_1} \ldots . x_r^{p_k}$, tendremos:

$$x^{n,p} = x^{n+pN} . x^{v(-p\overline{m})} \tag{17}$$

con $n + p.N \in \mathbb{Z}^s$ y $-p\overline{m} \in \Gamma(n + p.N)$.

5.2. Descomposición del módulo M

Definición: Llamaremos *submódulo fundamental* de M al $\mathbb{Z}-$módulo de los ceros en M de $\overline{v}$, es decir: $B = \{\beta \in M : \overline{v}(\beta) = 0\}$ de modo que $\forall j = 1, \ldots, K$ se tiene $v_{s+j}(\beta) = 0$.
Sabemos que $v_{s+1}, \ldots, v_r$ son parte de una base del retículo, luego B es libre de rango $n - k = t$ y se tiene la descomposición:

$$M = B \oplus C \text{ donde } C = \langle m_{s+1}, \ldots, m_{r=s+k} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

De la propia definición de B y por estar en el caso semicompleto, se deduce que el morfismo de módulos $v' : B \to \mathbb{Z}^s$, $v'(\beta) = (v_1(\beta), \ldots, v_s(\beta))$ es inyectivo; sea J el conúcleo de modo que se tiene la sucesión exacta

$$0 \to B \to \mathbb{Z}^s \to J \to 0 \tag{18}$$

Por (16) es obvio que J es $A_{n-1}(X)$ siendo claro el morfismo final epiyectivo. Denotaremos $[n] = [n.H']$ para $[n] \in J$ y $[n.H'] \in A_{n-1}$.

5.2.1. Identidades necesarias

Como hemos visto tenemos la suma $M = B \bigoplus C$ de modo cada $\alpha \in M$ descompone $\alpha = \alpha_B + \alpha_C$. Sea entonces $l \in \mathbb{Z}^s$ y supongamos que $\alpha \in \Gamma(l)$. Es claro que

$$\alpha_C = -\overline{v}(\alpha_C)\overline{m} \tag{19}$$

Por otro lado de $\alpha = \alpha_B + \alpha_C \in \Gamma(l)$ se deduce inmediatamente

$$\overline{v}(\alpha_C) = \overline{v}(\alpha) \geq 0 \tag{20}$$

es decir, todas las coordenadas de α_C son negativas. Sea $p = \overline{v}(\alpha_C)$ de modo que sus coordenadas son todas positivas; como $v'(p\overline{m}) = p.N$ y N es matriz positiva, se deduce $v'(p\overline{m}) \geq 0$ y como $\alpha_C = -p\overline{m}$ se deduce

$$v'(\alpha_C) \leq 0 \qquad v'(\alpha_B) = v'(\alpha) + \overline{v}(\alpha).N \tag{21}$$

y por último como por hipótesis $l + v'(\alpha) = v'(\alpha_B) + v'(\alpha_C) \geq 0$, de la desigualdad anterior se deduce necesariamente

$$l + v'(\alpha_B) \geq 0 \tag{22}$$

5.3. Anillo de Cox. Anillos $\mathbb{Z}^s-$graduados

Definición (Anillo de Cox): Para cada arista v_i introducimos la variable x_i cuyo grado será $[H_i]$ de modo que se tiene el álgebra $A_{n-1}(X)-$graduada

$$A_C = K[x_1, \ldots, x_r] \text{ donde } grad(x^a = \prod_i x_i^{a_i}) = [aH] = [\sum_i a_i H_i]$$

De otro modo, para cada $[D] \in A_{n-1}(X)$ donde por la sucesión exacta (15) podemos elegir como representante un divisor $T-$estable $D = aH$ con $a \in \mathbb{Z}^r$, el anillo de Cox es

$$A_C = \bigoplus_{[D] \in A_{n-1}(X)} Kx^a.\{x^{v(\alpha)} : \alpha \in \Gamma(a)\}$$

Nótese que no importa el representante elegido ya que si $a' = a + v(\beta)$ entonces $\Gamma(a') = -\beta + \Gamma(a)$.

A continuación veremos que la expresión del anillo de Cox se puede simplificar. Los únicos sumandos no nulos corresponden a los divisores efectivos de modo que $a + v(\alpha) \in \mathbb{N}^r$ y

en este sentido $A_C = K[\mathbb{N}^r]$ con la graduación definida.
Entenderemos $\mathbb{Z}^r$ como $\mathbb{Z}^s \oplus \mathbb{Z}^k$ y sus elementos serán de la forma (n, p). Consideremos el morfismo de $\mathbb{Z}-$módulos $\mathbb{Z}^s \oplus M \to \mathbb{Z}^r$ definido por $(n, \alpha) \mapsto n + v(\alpha) = (n + v'(\alpha), \overline{v}(\alpha))$ que es epiyectivo gracias a (17).

Proposición 5.1. *El morfismo* $\mathbb{Z}^r \xrightarrow{h} \mathbb{Z}^s \oplus C$, $h((n,p)) = (n + p.N, -p\overline{m})$ *es un isomorfismo de* $\mathbb{Z}-$ *módulos y su inverso es* $h^{-1}((l, -p\overline{m})) = (l + v'(-p\overline{m}), \overline{v}(-p\overline{m}))$

Demostración:
Es obvio que h es morfismo de $\mathbb{Z}-$módulos y de (17) se deduce que $h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h = Id$ si tenemos en cuenta que $\overline{v}(-p\overline{m}) = p$ y que $v'(p\overline{m}) = p.N$.

$\square$

Sea
$$\Gamma(n) = \{\alpha \in M : \ n + v'(\alpha) \geq 0 \text{ y } \overline{v}(\alpha) \geq 0\}$$
Restringiendo h a $\mathbb{N}^r$, se tiene $A_C = K[\mathbb{N}^r] \simeq K[h(\mathbb{N}^r)]$ y por tanto
$$A_C \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^s} K.\{x^{(n,\alpha_C)} : \alpha_C \in \langle \overline{m} \rangle_{-\mathbb{N}^k} \cap \Gamma(n)\}$$
donde como álgebra graduada, si $n = n' + p.N$ y $\alpha_C = -p\overline{m}$ entonces
$$gr\left(x^{(n,\alpha_C)}\right) = gr\left(x^{(n',p)}\right) = [n'.H' + p.\overline{H}] \overset{(17)}{=} [(n' + p.N)H'] = [n]$$
con $[n] \in J$ definida en (18) y como $[n] = [n + v'(\beta)]$ se tiene que $gr\left(x^{(n,\alpha_C)}\right) = gr\left(x^{(n+v'(\beta),\gamma_C)}\right)$ para todo $\beta \in B$ y $\gamma_C \in C$ de modo que:

Definición simplificada(Anillo de Cox):
El Anillo de Cox es el álgebra $A_{n-1}(X)-$graduada:
$$A_C = \bigoplus_{[n] \in J \simeq A_{n-1}(X)} K.\{x^{(n,\alpha_C)} : \ n \in [n], \, \alpha_C \in \langle \overline{m} \rangle_{-\mathbb{N}^k} \cap \Gamma(n)\} \tag{23}$$
Nótese que la condición $\alpha_C \in \langle \overline{m} \rangle_{-\mathbb{N}^k} \cap \Gamma(n)$ implica necesariamente $n \in \mathbb{N}^s$. Los elementos de grado cero son $x^{(v'(\beta),\alpha_C)}$ tales que $\beta \in B$, $\alpha_C = -p\overline{m}$ con $p_i \geq 0 \ \forall \ i = 1, \ldots, K$ y $v(\beta) - p.N \geq 0$ luego $v'\beta) \geq 0$ lo que en caso semicompleto implica $\beta = 0$. En tal caso

$-p.N = 0$ y se tiene que los únicos elementos de grado cero son las constantes.

Definición (Anillo de Cox generalizado): Consideremos el semigrupo de $M \bigoplus \mathbb{Z}^s$ siguiente:

$$S' = \{(n, \alpha) \in \mathbb{Z}^s \bigoplus M : \ n + v'(\alpha) \geq 0 \text{ y } \overline{v}(\alpha) \geq 0\}$$

es decir $\alpha \in \Gamma(n)$.
$K[S']$ es $M \bigoplus \mathbb{Z}^s-$graduada y por tanto $\mathbb{Z}^s-$graduada. Lamaremos *Anillo de Cox generalizado* al álgebra $\mathbb{Z}^s-$graduada:

$$A' = K[S'] = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}^s} K A_n \text{ para } A_n = x^{\Gamma(n)}$$

Proposición 5.2. *A' es una k-álgebra de tipo finito.*

Demostración: S' es el conjunto de soluciones enteras de un sistema de inecuaciones. Sabemos que este espacio de soluciones es finito generado. Si $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_l, \beta_l)$ es un sistema mínimo de generadores, entonces $x^{\alpha_i} \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X(\beta_i H))$ y $A' = k[x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_l}]$. En efecto si $x^{\alpha} \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X(\beta H))$, entonces $(\alpha, \beta) = n_1(\alpha_1, \beta_1) + \cdots + n_s(\alpha_l, \beta_l)$. Luego $x^{\alpha} = (x^{\alpha_1})^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x^{\alpha_l})^{n_l}$.

A sus monomios de grado n se les denotará por $\lambda x^{(n,\alpha)}$. Vamos a ver la relación entre este anillo y el anillo de Cox.

Lema 5.3. *Si $\alpha = \alpha_B + \alpha_C \in \Gamma(l)$ para $l \in \mathbb{Z}^s$, entonces $\alpha_B \in \Gamma(l)$ y además $x^{(l+v'(\alpha_B), \alpha_C)} \in A'$*

Demostración:

Que $l + v'(\alpha_B) \in \mathbb{N}^s$ ya se vió en (22) y como $\overline{v}(\alpha_B) = 0$, ya se tiene la primera afirmación. Para la segunda, $l + v'(\alpha_B) + v'(\alpha_C) = l + v'(\alpha)$ que es ≥ 0 por hipótesis. Por último $\overline{v}(\alpha_C) \geq 0$ es la desigualdad (20).

$\square$

El morfismo de anillos $\pi' : A' \to A_C$ donde $\pi'\left(x^{(n,\alpha)}\right) = x^{(n+v'(\alpha_B), \alpha_C)}$ es epiyectivo y su núcleo es el ideal $I = \langle x^{(-v(\beta), \beta)} - 1 \rangle$ de modo que el anillo de Cox es el cociente del anillo A' :

$$A_C \simeq A'/I$$

Teorema 5.4. *1. El morfismo*

$$\mathbb{Z}^s \oplus M \xrightarrow{\phi} B \oplus (\mathbb{Z}^s \oplus C)$$

definido por

$$\phi\left((n,\alpha)\right) = (\alpha_B, (n + v'(\alpha_B), \alpha_C))$$

es isomorfismo

2. Si tal isomorfismo se restringe al subsemigrupo S' se tiene $S' \overset{\phi}{\simeq} B \oplus h(\mathbb{N}^r)$

Demostración:

Sea la sucesión exacta

$$0 \to B \xrightarrow{i} \mathbb{Z}^s \oplus M \xrightarrow{\pi'} \mathbb{Z}^s \oplus C \to 0 \tag{24}$$

donde

$$i(\beta) = (-v'(\beta), \beta) \qquad \pi'\left((n,\alpha)\right) = (n + v'(\alpha_B), \alpha_C)$$

La identidad es una sección para π' y el morfismo inverso de ϕ es

$$\phi^{-1}\left(\beta, (l, \alpha_C)\right) = i(\beta) + (l, \alpha_C) = (l - v'(\beta), \beta + \alpha_C)$$

Es inmediato comprobar que las composiciones con ϕ dan la identidad, con lo que se ha probado el primer enunciado.

Para el segundo, sea $\alpha = \alpha_B + \alpha_C$ y $\alpha_C = -p\overline{m}$.

$$\begin{aligned} \phi\left((n,\alpha)\right) &= (\alpha_B, (n + v'(\alpha_B), \alpha_C)) = \\ = \left(\alpha_B, h\left(h^{-1}\left((n + v'(\alpha_B), \alpha_C)\right)\right)\right) &= (\alpha_B, h\left((n + v'(\alpha), p)\right)) \end{aligned}$$

donde la última igualdad es por definición de h^{-1} y porque

$$n + v'(\alpha_B) - p.N = n + v'(\alpha_B) + v'(\alpha_C) = n + v'(\alpha).$$

Se concluye observando que $(n,\alpha) \in S' \Leftrightarrow (n + v'(\alpha), p) \in \mathbb{N}^r$

□

Observación 7. *Si se compone ϕ con el isomorfismo $(Id, h^{-1}) : B \oplus (\mathbb{Z}^s \oplus C) \to B \oplus \mathbb{Z}^r$ se tiene el isomorfismo $(Id, h^{-1}) \circ \phi : \mathbb{Z}^s \oplus M \to B \oplus \mathbb{Z}^r$ tal que $(n,\alpha) \mapsto (\alpha_B, n + v(\alpha))$ y el inverso es $(\beta, (n,p)) \mapsto (n + p\mathbb{N}, -p\overline{m}) + (-v'(\beta), \beta)$*

En el anillo de Cox todos sus monomios se escriben de modo único salvo costantes de la forma $x^{(n,\alpha_C)}$ y por tanto también es una álgebra $\mathbb{Z}^s-$graduada. También $A_C[B]$ es $\mathbb{Z}^s-$graduada siendo el grado de $x^{(n,\alpha_C)}x^\beta$ igual a $n-v'(\beta)\in\mathbb{Z}^s$. Considerados A', A_C y $A_C[B]$ como álgebras $\mathbb{Z}^s-$graduadas, denotaremos $Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$, $Aut_{\mathbb{Z}^s}A_C$ y $Aut_{\mathbb{Z}^s}A_C[B]$ a sus respectivos grupos de *automorfismos $\mathbb{Z}^s$-graduados* mientras que en el caso del anillo de Cox como álgebra $A_{n-1}-$graduada denotaremos Aut_gA_C al grupo de automorfismos $A_{n-1}-$graduados de A_C.

Corolario 5.5. *Considerando A' y $A_C[B]$ con la $\mathbb{Z}^s-$graduación se tiene:*

1. *$A'\simeq A_C[B]$ siendo el isomorfismo $K[S']\overset{\phi}{\to}K[h(\mathbb{N}^r)][B]$ definido por*

$$\phi\left(x^{(n,\alpha)}\right)=x^{(n+v'(\alpha_B),\alpha_C)}.x^{\alpha_B}$$

   y el inverso $\phi^{-1}\left(x^{(l,\alpha_C)}.x^\beta\right)=x^{(l-v'(\beta),\beta+\alpha_C)}$

2. *El isomorfismo anterior induce el isomorfismo*

$$Aut_{\mathbb{Z}^s}A'\overset{\overline{\phi}}{\to}Aut_{\mathbb{Z}^s}A_C[B]\quad\overline{\phi}(\sigma')=\phi\circ\sigma\circ\phi^{-1}$$

3. *El morfismo*

$$Aut_{\mathbb{Z}^s}A_C\overset{i}{\hookrightarrow}Aut_{\mathbb{Z}^s}A_C[B]\quad i(\sigma)(x^{n,\alpha_C}x^\beta)=\sigma(x^{n,\alpha_C})x^\beta$$

   es inyectivo y $H=\overline{\phi}^{-1}\left(i(Aut_{\mathbb{Z}^s}A_C)\right)$ son los automorfismos $\mathbb{Z}^s-$graduados de A' tales que sobre B son la identidad y además restringen a A_C, es decir:

$$H=\left\{\sigma'\in S:\ \forall\,\alpha_C\in C\ \sigma'\left(x^{(n,\alpha_C)}\right)=\sum_{\gamma_C\in C}x^{(n,\gamma_C)}.\lambda(n,\alpha_C,\gamma_C)\right\}$$

   siendo S el subgrupo de $Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$ definido por:

$$S=\left\{\sigma'\in Aut_{\mathbb{Z}^s}A':\ \sigma'\left(x^{(-v'(\beta),\beta)}\right)=x^{(-v'(\beta),\beta)}\right\}$$

Demostración:

El primer punto del enunciado es el Teorema 5.4 en términos de las respectivas $K-$ álgebras asociadas. El punto segundo se deduce del anterior y el tercero es una simple comprobación.

$\square$

5.4. Automorfismos graduados

Utilizaremos las siguientes **Notaciones:** $Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$, $Aut_{\mathbb{Z}^s}A_C$ y $Aut_{\mathbb{Z}^s}A_C[B]$ serán los grupos de *automorfismos* $\mathbb{Z}^s$*-graduados* de A', A_C y $A_C[B]$ mientras que en el caso del anillo de Cox como álgebra $A_{n-1}-$graduada denotaremos $Aut_g A_C$ al grupo de automorfismos $A_{n-1}-$graduados de A_C. Veremos que $Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$ es el producto semidirecto de $Aut_g A_C$ por el toro $K^{*t} = Hom(B, K^*)$.

Sea $\sigma' \in Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$ y sea $\alpha \in \Gamma(n)$. Como $x^{(n+v'(\beta),\alpha-\beta)} = x^{(n,\alpha)}.x^{(v'(\beta),-\beta)} \Rightarrow \forall\beta \in B$ se tiene

$$\sigma'\left(x^{(n+v'(\beta),\alpha-\beta)}\right) = \sigma'\left(x^{(n,\alpha)}\right).\sigma'\left(x^{(v'(\beta),-\beta)}\right)$$

En particular si elegimos $\beta = \alpha_B \Rightarrow \alpha_B \in \Gamma(n)$ (Lema anterior) y tendremos

$$\sigma'\left(x^{(n+v'(\beta),\alpha_C)}\right) = \sigma'\left(x^{(n,\alpha)}\right).\sigma'\left(x^{(v'(\alpha_B),-\alpha_B)}\right)$$

En el caso de que $\sigma \in Aut_{\mathbb{Z}^s}A$ sea la restricción de σ', si $n \in \mathbb{N}^s$, $\alpha \in \Gamma(n)$ y $\beta \in B \cap \Gamma(n)$ $\Rightarrow$

$$\sigma\left(x^{(n+v'(\beta),\alpha-\beta)}\right) = \sigma\left(x^{(n,\alpha)}\right).\sigma'\left(x^{(v'(\beta),-\beta)}\right) \tag{25}$$

Proposición 5.6. *Sean n y l en $\mathbb{N}^s$ y sean $u \in \Gamma(n)$, $e \in \Gamma(l)$ y $\beta \in B \cap \Gamma(n) \cap \Gamma(l)$. Se tiene la igualdad en A': (con abuso de notación)*

$$\frac{\sigma\left(x^{(n+v'(\beta),u-\beta)}\right)}{\sigma\left(x^{(n,u)}\right)} = \frac{\sigma\left(x^{(l+v'(\beta),e-\beta)}\right)}{\sigma\left(x^{(l,e)}\right)}$$

Demostración:

Hay que multiplicar en cruz y comprobar la igualdad. Para ello basta aplicar σ a las siguientes igualdades en A :

$$x^{(l+v'(\beta),e-\beta)}.x^{(n,u)} = x^{(n+l+v'(\beta),e+u-\beta)} = x^{(n+v'(\beta),u-\beta)}.x^{(l,e)}$$

$\square$

EL grupo $Hom(B, K^*) = K^{*t}$ opera en A' del siguiente modo: Dado $\lambda \in Hom(B, K^*)$ y denotando para cada $\beta \in B$, $\lambda^\beta = \lambda(\beta)$, se define la operación en A' a través del automorfismo graduado τ_λ :

$$\tau_\lambda\left(x^{(n,\alpha)}\right) = x^{(n,\alpha)}.\lambda^{\alpha_B}$$

Se ha definido el morfismo de grupos $Hom(B,K^*) \xrightarrow{\theta} Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$, $\theta(\lambda)=\tau_\lambda$ que claramente es inyectivo y por tanto $Hom(B,K^*)$ es un subgrupo de $Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$. A continuación veremos que los automorfismos $A_{n-1}-$graduados del anillo de Cox son un subgrupo de los automorfismos $\mathbb{Z}^s-$graduados de A'.

Lema 5.7. *Se cumple la siguiente relación entre $Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$ y Aut_gA_C :*

1. *Para todo $\sigma' \in Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$ y todo $\beta \in B$ existe un $\lambda(\beta) \in K^*$ tal que*
$$\sigma'\left(x^{(-v'(\beta),\beta)}\right) = \lambda(\beta).x^{(-v'(\beta),\beta)}$$

2. *Sea el subgrupo:*
$$S = \left\{\sigma' \in Aut_{\mathbb{Z}^s}A' : \sigma'\left(x^{(-v'(\beta),\beta)}\right) = x^{(-v'(\beta),\beta)}\right\}$$
entonces existe un isomorfismo $S \xrightarrow{\psi} Aut_gA_C$

3. *Si además en S se considera el subgrupo obtenido en el apartado 3 del Corolario 5, $H = \overline{\phi}^{-1}\left(i(Aut_{\mathbb{Z}^s}A_C)\right)$, es decir,*
$$H = \left\{\sigma' \in S :\ \forall \alpha_C \in C\ \sigma'\left(x^{(n,\alpha_C)}\right) = \sum_{\gamma_C \in C} x^{(n,\gamma_C)}.\lambda(n,\alpha_C,\gamma_C)\right\}$$
entonces
$$\psi(H)$$
$$=$$
$$\left\{\sigma \in Aut_gA_C :\ \forall \alpha_C \in C,\ \sigma\left(x^{(n,\alpha_C)}\right) = \sum_{\gamma_C \in C} x^{(n,\gamma_C)}.\lambda(n,\alpha_C,\gamma_C)\right\}$$
que además es la imagen de la inmersión natural de $Aut_{\mathbb{Z}^s}A_C$ en Aut_gA_C.

Demostración:

Para la primera parte, como σ' es graduado se tiene
$$\sigma'\left(x^{(-v'(\beta),\beta)}\right) = \sum_{\alpha \in M} \lambda_\alpha(\beta).x^{(-v'(\beta),\alpha)}$$

Hay que ver que $\alpha=\beta$. Por definición de A', $v'(-\beta)+v'(\alpha) \geq 0$ y $\overline{v}(\alpha) \geq 0$ y como $\overline{v}(\beta)=0$ se tiene que $v(\alpha-\beta) \geq 0$ lo en el caso semicompleto implica $\alpha=\beta$.

Para la segunda parte del enunciado, sea $\sigma' \in S$ y hay que definir $\psi(\sigma')$ para lo cual basta definirla sobre los monomios x^{n,α_C}. Como σ' es automorfismo $\mathbb{Z}^s-$graduado $\Rightarrow$

$$\sigma'(x^{(n,\alpha_C)}) = \sum_y x^{(n,y)}.\lambda(n,\alpha_C,y)$$

Entonces definimos $\psi(\sigma')$:

$$\psi(\sigma')\left(x^{(n,\alpha_C)}\right) = \sum_y x^{(n+v'(y_B),y_C)}.\lambda(n,\alpha_C,y)$$

Para mostrar claramente la relación entre σ' y $\psi(\sigma')$, sea el elemento e :

$$e = \sum_{y\in M} x^{(v'(y_B),-y_B)}$$

y

$$e^- = \sum_{y\in M} x^{(-v'(y_B),y_B)}$$

Para cada $h \in A'$ homogeneo de grado n, $h = \sum_{y\in M} x^{(n,y)}.\lambda(n,y)$ donde lógicamente si denotamos $\lambda_y(n) = \lambda(n,y) \Rightarrow \lambda_y = 0$ para toda $y \in M$ tal que $n + v(y) \ngeq 0$, definimos la operación:

$$h \centerdot e = \sum_{y\in M} x^{(n+v'(y_B),y-y_B)}.\lambda(n,y)$$

Por otro lado sea $u \in A_C$ homogeneo de grado $[n] \Rightarrow u = \sum_{y\in M} x^{(n+v'(y_B),y_C)}.\lambda(n,y)$ y definimos la operación:

$$u \centerdot_n e^- = \sum_{y\in M} x^{(n+v'(y_B)-v'(y_B),y_C+y_B)}.\lambda(n,y) = \sum_{y\in M} x^{(n,y)}.\lambda(n,y)$$

que depende del representante n elegido. Si elegimos otro representante $n' = n + v'(\beta) \Rightarrow u = \sum_{y\in M} x^{(n+v'(\beta)+v'(y_B),y_C)}.\lambda(n+v'(\beta),y)$ de modo que

$$u \centerdot_{n'=n+v'(\beta)} e^- = \sum_{y\in M} x^{(n+v'(\beta),y)}.\lambda(n+v'(\beta),y) = \sum_{y\in M} x^{(n+v'(\beta),y)}.\lambda(n,y+\beta) =$$

(denotando $\overline{y} = y + \beta$)

$$= \sum_{\overline{y}\in M} x^{n+v'(\beta),\overline{y}-\beta}.\lambda(n,\overline{y}) =$$

$$= \sum_{\overline{y}\in M} x^{n,\overline{y}}.x^{v'(\beta),-\beta}.\lambda(n,\overline{y}) = (u \centerdot_n e^-).x^{(v'(\beta),-\beta)}$$

y por tanto:

$$u \centerdot_{n'=n+v'(\beta)} e^- = (u \centerdot_n e^-).x^{(v'(\beta),-\beta)}$$

Con estas notaciones, la relación entre σ' y $\psi(\sigma')$ por **definición** viene dada por las identidades:

$$\begin{array}{rcl} \psi(\sigma')\left(x^{(n,\alpha_C)}\right) & = & \sigma'\left(x^{(n,\alpha_C)}\right) \centerdot e \\ \sigma'\left(x^{(n,\alpha_C)}\right) & = & \psi(\sigma')\left(x^{(n,\alpha_C)}\right) \centerdot_n e^- \end{array} \tag{26}$$

ψ está bien definido:

Si $\sigma' = Id$ entonces el único coeficiente no nulo de $\sigma'(x^{(n,\alpha_C)})$ es $\lambda(n,\alpha_C,\alpha_C) = 1$ luego por (26) tenemos

$$\psi(Id)(x^{(n,\alpha_C)}) = x^{(n+v'(0),\alpha_C)} = x^{(n,\alpha_C)}$$

Veamos ahora que $\psi(\sigma')$ es morfismo con el producto:

$$\begin{array}{rcl} \psi(\sigma')\left(x^{(n,\alpha_C)}.x^{(n',\alpha'_C)}\right) & = & \psi(\sigma')\left(x^{(n+n',\alpha_C+\alpha'_C)}\right) = \\ = \sigma'\left(x^{(n+n',\alpha_C+\alpha'_C)}\right) \centerdot e & = & \displaystyle\sum_{z\in M} x^{(n+n'+v'(z_B),z_C)}.\lambda(n+n',\alpha_C+\alpha'_C,z) \end{array}$$

donde

$$\sigma'\left(x^{(n,\alpha_C)}\right) = \sum_{y\in M} x^{(n,y)}.\lambda(n,\alpha_C,y)$$

y

$$\sigma'\left(x^{(n',\alpha'_C)}\right) = \sum_{y\in M} x^{(n',y)}.\lambda(n',\alpha'_C,y)$$

Por otro lado

$$\psi(\sigma')\left(x^{(n,\alpha_C)}\right).\psi(\sigma')\left(x^{(n',\alpha'_C)}\right) = \sigma'\left(x^{(n,\alpha_C)}\right) \centerdot e.\sigma'\left(x^{(n',\alpha'_C)}\right) \centerdot e =$$

$$= \sum_{y\in M} x^{(n+v'(y_B),y_C)}.\lambda(n,\alpha_C,y). \sum_{y'\in M} x^{(n'+v'(y'_B),y'_C)}.\lambda(n',\alpha'_C,y') =$$

$$= \sum_{y,y'} x^{(n+n'+v'(y_B+y'_B),y_C+y'_C)}.\lambda(n,\alpha_C,y).\lambda(n',\alpha'_C,y') =$$

$$= \sum_{z\in M} x^{(n+n'+v'(z_B),z_C)}. \sum_{y+y'=z} \lambda(n,\alpha_C,y).\lambda(n',\alpha'_C,y')$$

de modo que para probar que

$$\psi(\sigma')\left(x^{(n,\alpha_C)}.x^{(n',\alpha'_C)}\right)=\psi(\sigma')\left(x^{(n,\alpha_C)}\right).\psi(\sigma')\left(x^{(n',\alpha'_C)}\right)$$

basta ver que $\lambda(n+n',\alpha_C+\alpha'_C,z)=\sum_{y+y'=z}\lambda(n,\alpha_C,y).\lambda(n',\alpha'_C,y')$ para lo cual utilizaremos que σ' es morfismo y por tanto $\sigma'\left(x^{(n+n',\alpha_C+\alpha'_C)}\right)=\sigma'\left(x^{(n,\alpha_C)}\right).\sigma'\left(x^{(n',\alpha'_C)}\right)$; lo primero es

$$\sum_{z\in M}x^{(n+n',z)}.\lambda(n+n',\alpha_C+\alpha'_C,z)$$

y lo segundo es

$$\begin{aligned}&\sum_{y,y'}x^{(n+n',y+y')}.\lambda(n,\alpha_C,y).\lambda(n',\alpha'_C,y')=\\=&\sum_{y+y'=z}x^{(n+n',z)}.\lambda(n,\alpha_C,y).\lambda(n',\alpha'_C,y')=\\=&\sum_{z\in M}x^{(n+n',z)}.\left(\sum_{y+y'=z}\lambda(n,\alpha_C,y).\lambda(n',\alpha'_C,y')\right)\end{aligned}$$

y como $\sigma'\left(x^{(n+n',\alpha_C+\alpha'_C)}\right)=\sigma'\left(x^{(n,\alpha_C)}\right).\sigma'\left(x^{(n',\alpha'_C)}\right)$ se deduce que $\lambda(n+n',\alpha_C+\alpha'_C,z)=\sum_{y+y'=z}\lambda(n,\alpha_C,y).\lambda(n',\alpha'_C,y')$ con lo que en efecto $\psi(\sigma')$ es morfismo y obviamente graduado. Si vemos que $\psi(\sigma''\circ\sigma')=\psi(\sigma'')\circ\psi(\sigma')$ ya tendremos que ψ es morfismo de grupos y que $\psi(\sigma')$ es un automorfismo cuyo inverso es $\psi(\sigma'^{-1})$. Sea pues $\psi(\sigma')=\sigma_1$ y $\psi(\sigma'')=\sigma_2$ y vamos a utilizar la siguiente notación:

$$\lambda(n,y,z)\text{ es el coeficiente en }x^{(n+v'(y_B),z)}\text{ de }\sigma'\left(x^{(n+v'(y_B),y_C)}\right)$$

$$\mu(n,y,z)\text{ es el coeficiente en }x^{(n+v'(y_B),z)}\text{ de }\sigma''\left(x^{(n+v'(y_B),y_C)}\right)$$

luego que por definición de ψ se tiene:

$$\begin{aligned}\text{si }\sigma'\left(x^{(n,\alpha_C)}\right)&=\Sigma_y x^{(n,y)}.\lambda(n,\alpha_C,y)\Rightarrow\\ \sigma_1\left(x^{(n,\alpha_C)}\right)&=\sum_y x^{(n+v'(y_B),y_C)}.\lambda(n,\alpha_C,y)\\[2ex] \text{si }\sigma''\left(x^{(l,\gamma_C)}\right)&=\Sigma_z x^{(l,z)}.\mu(l,\gamma_C,z)\Rightarrow\\ \sigma_2\left(x^{(l,\gamma_C)}\right)&=\sum_z x^{(l+v'(z_B),z_C)}.\mu(l,\gamma_C,z)\end{aligned}\tag{27}$$

Vamos a calcular $\psi(\sigma''\circ\sigma')\left((n,\alpha_C)\right)$ para lo que necesitamos $(\sigma''\circ\sigma')\left((n,\alpha_C)\right)$:

$$(\sigma''\circ\sigma')\left((n,\alpha_C)\right)=\sigma''\left(\sum_y x^{(n,y)}.\lambda(n,\alpha_C,y)\right)=$$

$$=\sigma''\left(\sum_y x^{(n+v'(y_B),y_C)}.x^{(-v'(y_B),y_B)}.\lambda(n,\alpha_C,y)\right)\overset{\sigma''\in S}{=}$$

$$\overset{\sigma''\in S}{=}\sum_y \sigma''\left(x^{(n+v'(y_B),y_C)}\right).x^{(-v'(y_B),y_B)}.\lambda(n,\alpha_C,y)=$$

$$=\sum_y \lambda(n,\alpha_C,y).\sum_z x^{(n+v'(y_B),z)}.x^{(-v'(y_B),y_B)}.\mu(n+v'(y_B),y_C,z)=$$

$$=\sum_{y,z} x^{(n,z+y_B)}.\lambda(n,\alpha_C,y).\mu(n+v'(y_B),y_C,z)$$

Luego por la propia definición de ψ tenemos

$$\psi(\sigma''\circ\sigma')\left(x^{(n,\alpha_C)}\right)=\sum_{y,z} x^{(n+v'(z_B+y_B),z_C)}.\lambda(n,\alpha_C,y).\mu(n+v'(y_B),y_C,z)$$

Por otro lado

$$(\sigma_2\circ\sigma_1)\left(x^{(n,\alpha_C)}\right)=\sigma_2\left(\sum_y x^{(n+v'(y_B),y_C)}.\lambda(n,\alpha_C,y)\right)=$$

$$=\sum_y \lambda(n,\alpha_C,y).\sum_z x^{(n+v'(y_B)+v'(z_B),z_C)}.\mu(n+v'(y_B),y_C,z)$$

con lo que coinciden.

La inyectividad y epiyectividad de ψ se deducen directamente de (26); la inyectividad es clara y para demostrar que ψ es epiyectivo, dado $\sigma\in Aut_g A_C$ y teniendo en cuenta la segunda igualdad de en (26) hay que definir $\sigma'\in Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$ tal que sobre los elementos del tipo $x^{(-v'(\beta),\beta)}$ sea la identidad y sobre los elementos del tipo $x^{(n,\alpha_C)}$ debe cumplir (26) siendo $\psi(\sigma')=\sigma$, luego σ' queda necesaria y suficientemente definida como sigue:

$$\begin{aligned}
\sigma'\left(x^{(n,\alpha)}\right) &= \sigma'\left(x^{(n+v'(\alpha_B),\alpha_C)}.x^{(-v'(\alpha_B),\alpha_B)}\right)= \\
&= \sigma'\left(x^{(n+v'(\alpha_B),\alpha_C)}\right).x^{(-v'(\alpha_B),\alpha_B)}= \\
&= \sigma\left(x^{(n+v'(\alpha_B),\alpha_C)}\right)\bullet_{n+v'(\alpha_B)} e^-.x^{(-v'(\alpha_B),\alpha_B)}= \\
&= \sigma\left(x^{(n+v'(\alpha_B),\alpha_C)}\right)\bullet_n e^-.x^{(v'(\alpha_B),-\alpha_B)}.x^{(-v'(\alpha_B),\alpha_B)}= \\
&= \sigma\left(x^{(n+v'(\alpha_B),\alpha_C)}\right)\bullet_n e^-
\end{aligned}$$

es decir

$$\sigma'\left(x^{(n,\alpha)}\right) = \sigma\left(x^{(n+v'(\alpha_B),\alpha_C)}\right) \centerdot_n e^{-} \tag{28}$$

con lo que se ha demostrado el segundo enunciado. El tercero se deduce de la primera igualdad de (26), ya que si

$$\sigma'\left(x^{(n,\alpha_C)}\right) = \sum_{\gamma_C \in C} x^{(n,\gamma_C)}.\lambda(n,\alpha_C,\gamma_C)$$

entonces por definición se tiene

$$\psi(\sigma')\left(x^{(n,\alpha_C)}\right) = \sigma'\left(x^{(n,\alpha_C)}\right) \centerdot e = \sum_{\gamma_C \in C} x^{(n,\gamma_C)}.\lambda(n,\alpha_C,\gamma_C)$$

con lo que se acaba.

$\square$

Observación 8. *El primer enunciado del Lema afirma que* $\sigma'\left(x^{(-v'(\beta),\beta)}\right) = \lambda(\beta).x^{(-v'(\beta),\beta)}$. *Nótese que* $\lambda(\beta) = \lambda^{\beta}$ *para* $\lambda = (\lambda_i)$ *donde* $\sigma'\left(x^{(-v'(\beta_i),\beta_i)}\right) = \lambda_i.(-v'(\beta_i),\beta_i)$ *siendo* $\mathfrak{B} = \{\beta_1,\ldots,\beta_{t=n-K}\}$ *una base de* B.

Teorema 5.8. *El grupo* $Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$ *es el producto semidirecto* $AutgA_C \rtimes Hom(B,K^*)$ *y la sucesión exacta de grupos asociada es*

$$0 \to Aut_g A_C \simeq S \xrightarrow{i} Aut_{\mathbb{Z}^s}A' \xrightarrow{\varphi} Hom(B,K^*) \simeq K^{*t} \to 0$$

donde $\varphi(\sigma') = \lambda = (\lambda_i)$ *para* $\sigma'\left(x^{(-v'(\beta_i),\beta_i)}\right) = \lambda_i.x^{(-v'(\beta_i),\beta_i)}$ *y donde* θ *es una sección de* φ *tal que* $\theta(\lambda) = \tau_\lambda$ *que es el automorfismo* $\tau_\lambda\left(x^{(n,\alpha_B+\alpha_C)}\right) = \lambda^{\alpha_B}.x^{(n,\alpha)}$. *Además tal producto semidirecto será directo* $\Leftrightarrow Aut_g A_C \simeq Aut_{\mathbb{Z}^s}A_C$. *En particular en el caso trivial* $t=0$.

Demostración:

S es un subgrupo normal en $Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$ y K^{*t} opera en S por conjugación. Tenemos que comprobar que el siguiente morfismo asociado a la sucesión exacta es isomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} S \rtimes \mathbb{C}^{*t} & \longrightarrow & Aut_{\mathbb{Z}^s}A' \\ \sigma,\lambda & \mapsto & \sigma' = \sigma\circ\tau_\lambda \end{array}$$

Luego

$$\sigma'\left(x^{(-v'(\beta),\beta)}\right)=\lambda^{\beta}.x^{(-v'(\beta),\beta)} \text{ y } \sigma'\left(x^{(l,\alpha_C)}\right)=\sigma\left(x^{(l,\alpha_C)}\right)$$

es decir,

$$\begin{aligned}\sigma'\left(x^{(n,\alpha)}\right) &= \sigma'\left(x^{(n+v'(\alpha_B),\alpha_C)}.x^{(-v'(\beta),\beta)}\right)=\\ &= \sigma\left(x^{(n+v'(\alpha_B),\alpha_C)}\right).\lambda^{\beta}.x^{(-v'(\beta),\beta)}=\\ &= \sigma\left(x^{(n+v'(\alpha_B),\alpha_C)}\right).\lambda^{\beta}.\sigma\left(x^{(-v'(\beta),\beta)}\right)=\lambda^{\beta}.\sigma\left(x^{(n,\alpha)}\right)\end{aligned}$$

Dado ahora $\sigma'\in Aut_gA'$ se tiene $\sigma'=\sigma\circ\tau_\lambda$ eligiendo $\lambda=(\lambda_i)$ con

$$\lambda_i=\frac{\sigma'\left(x^{(-v'(\beta_i),\beta_i)}\right)}{x^{(-v'(\beta_i),\beta_i)}}$$

y $\sigma\left(x^{(n,\alpha)}\right)=\sigma'\left(x^{(n,\alpha)}\right).\lambda^{-\alpha_B}$ habiendo probado que el morfismo es isomorfismo y como obviamente $S\cap\mathbb{C}^{*t}=Id$ se acaba.

Para concluir, la condición de que el producto semidirecto sea directo equivale a que K^{*t} opere en S por la identidad lo cual equivale a que para todo $\sigma'\in S$ se cumpla:

$$\sigma'\left(x^{(n,\alpha)}\right)=\sum_y x^{(n,y)} \text{ con } y_B=\alpha_B$$

y utilizando la descomposición $x^{(n,\alpha)}=x^{(n+v'(\alpha_B),\alpha_C)}.x^{(-v'(\alpha_B),\alpha_B)}$ se comprueba inmediatamente que el conjunto de tales $\sigma'\in S$ es justamente H y por tanto el producto será directo si $H=S$ y como por el apartado 3 del Lema 5.7 $H\simeq Aut_{\mathbb{Z}^s}A_C$, se concluye que el producto es directo cuando $Aut_{\mathbb{Z}^s}A_C\simeq Aut_gA_C$.

□

5.4.1. Toros maximales como subgrupos de $Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$, Aut_gA_C y $AutX$

En general para un toro $Spec\,K[N]$ si $\lambda\in Spec\,K[N]$ es un punto (con valores en una $K-$ álgebra) escribiremos $\lambda(x^a)=\lambda(a)=\lambda^a$.

Los anillos A' y A_c son los anillos de variedades tóricas afines en las que operan, como ya hemos visto, sus respectivos toros $Spec\,K[\mathbb{Z}^s\oplus M]$ y $Spec\,K[\mathbb{Z}^s\oplus C]$:

$$\mu=(\mu',\lambda)\in Spec\,K[\mathbb{Z}^s\oplus M]\Rightarrow \mu.x^{(n,\alpha)}=\mu'^{n}.\lambda^{\alpha}x^{(n,\alpha)}$$

y

$$\mu = \mu', \overline{\mu} \in Spec\, K[\mathbb{Z}^s \oplus C] \Rightarrow \mu.x^{(n,\alpha_C)} = \mu'^n.\overline{\mu}^{\alpha_C} x^{(n,\alpha_C)}$$

A partir de estas operaciones vamos a ver como operan los toros $T(r) = Spec\, K[\mathbb{Z}^r]$ y $T(s) = Spec\, K[\mathbb{Z}^s]$ en A_C y deducir la necesaria operación en A' obligada por el teorema 5.8 y en concreto por la equación 28. Para ello, hemos visto que el toro $T(r)$ es isomorfo a $Spec\, K[\mathbb{Z}^s \oplus C]$ por el morfismo $h : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^s \oplus C$ donde $h(n = n', \overline{n}) = (n' + \overline{n}N, -\overline{nm})$ y $h^{-1}(n, \alpha_C) = (n + v'(\alpha_C), \overline{v}(\alpha_C))$. Además, si $\pi : \mathbb{Z}^s \oplus C \to \mathbb{Z}^s$ es la proyección natural $\Rightarrow T(s)$ a través de π es un subgrupo del toro $Spec\, K[\mathbb{Z}^s \oplus C]$ de modo que π y h definen $Spec\, K[\mathbb{Z}^s]$ como subgrupo de $Spec\, K[\mathbb{Z}^r]$ y el epimorfismo que los relaciona es

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^r & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}^s \\ (n', \bar{n}) & \rightsquigarrow & n' + \bar{n}N \end{array}$$

que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^s \oplus C & \xrightarrow{\widetilde{h^{-1}}} & \mathbb{Z}^r \\ \pi \downarrow & \swarrow \varphi & \\ \mathbb{Z}^s & & \end{array}$$

Por tanto la operación del toro $Spec\, K[\mathbb{Z}^r]$ en A_C es:

$$\text{si } \lambda \in Spec\, K[\mathbb{Z}^r] \text{ y } x^{(n,\alpha_C)} \in A_C \Longrightarrow \lambda.x^{(n,\alpha_C)} = \lambda^{h^{-1}(n,\alpha_C)} x^{(n,\alpha_C)}$$

y como $h^{-1}(n, \alpha_C) = (n + v'(\alpha_C), \overline{v}(\alpha_C)) = (n + v(\alpha_C))$ la operación es

$$\text{si } \lambda \in Spec\, K[\mathbb{Z}^r] \text{ y } x^{(n,\alpha_C)} \in A_C \Longrightarrow \lambda.x^{(n,\alpha_C)} = \lambda(n + v(\alpha_C)) x^{(n,\alpha_C)} \qquad (29)$$

La operación del toro $Spec\, K[\mathbb{Z}^s] \overset{\varphi^*}{\hookrightarrow} Spec\, K[\mathbb{Z}^r]$ teniendo en cuenta que

$$\varphi^*(\nu)(\varphi(h^{-1}(n, \alpha_C))) = \mu^n$$

es:

$$\mu.x^{(n,\alpha_C)} = \mu^{\pi(n,\alpha_C)} x^{(n,\alpha_C)} = \mu^n x^{(n,\alpha_C)} \qquad (30)$$

Con estas operaciones los toros $Spec[\mathbb{Z}^s] \overset{\varphi^*}{\hookrightarrow} Spec[\mathbb{Z}^r]$ son subgrupos de $Aut_g A_C$ que a su vez es subgrupo de $Aut_{\mathbb{Z}^s} A'$ (teorema 5.8) y la estructura de subgrupo viene determinada por el epimorfismo $\pi' : \mathbb{Z}^s \oplus M \to \mathbb{Z}^s \oplus C$, $\pi'(n, \alpha = \alpha_B + \alpha_C) = (n + v'(\alpha_B), \alpha_C)$. Por tanto para conservar la cadena de subgrupos

$$Spec\, K[\mathbb{Z}^s] \overset{\varphi^*}{\hookrightarrow} Spec\, K[\mathbb{Z}^r] \hookrightarrow Aut_g A_C \overset{\psi^{-1}}{\hookrightarrow} Aut_{\mathbb{Z}^s} A'$$

tal que $Spec\, K[\mathbb{Z}^r]$ (luego $Spec\, K[\mathbb{Z}^s]$) sea subgrupo de $Aut_{\mathbb{Z}^s} A'$ contenido en su toro maximal $Spec\, K[\mathbb{Z}^s \oplus M]$, las operaiones de $Spec\, K[\mathbb{Z}^r]$ y $Spec\, K[\mathbb{Z}^s]$ en A' vendrán definidas a través de los morfismos

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}^s \oplus M & \overset{\pi'}{\to} & \mathbb{Z}^s \oplus C & \overset{h^{-1}}{\to} & \mathbb{Z}^r & \overset{\varphi}{\to} & \mathbb{Z}^s \\ (n, \alpha) & \rightsquigarrow & (n + v'(\alpha_B), \alpha_C) & \rightsquigarrow & n + v(\alpha) & \rightsquigarrow & n + v'(\alpha_B) \end{array}$$

luego deben ser:

$$\text{si } \lambda \in Spec\, K[\mathbb{Z}^r] \text{ y } x^{(n,\alpha)} \in A' \Longrightarrow \lambda.x^{(n,\alpha)} = \lambda(n + v(\alpha))x^{(n,\alpha)} \tag{31}$$

$$\text{si } \lambda \in Spec\, K[\mathbb{Z}^s] \text{ y } x^{(n,\alpha)} \in A' \Longrightarrow \lambda.x^{(n,\alpha)} = \lambda(n + v'(\alpha_B))x^{(n,\alpha)} \tag{32}$$

Observación 9. *Con la operaciones definidas, los toros $Spec\, K[\mathbb{Z}^r]$ y $Spec\, K[\mathbb{Z}^s]$ son ejemplos de los subgrupos H de $Aut_{\mathbb{Z}^s} A'$ que consisten en los automorfismos que son la identidad sobre $x^{(-v'(-\beta),\beta)}$ y tales que restringen a A_C, de modo que sobre ellos ψ es la restricción a $A_C \subset A' = A_C[B]$; si τ_λ y τ_μ denotan respectivamente a los automorfismos en A' asociados a las operaciones de $\lambda \in Spec\, K[\mathbb{Z}^r]$ y $\mu \in Spec\, K[\mathbb{Z}^s]$ definidas en las ecuaciones (31) y (32) entonces $\psi(\tau_\lambda)$ y $\psi(\tau_\mu)$ son los automorfismos en A_C asociados a las operaciones definidas en las ecuaciones (29) y (30) y que además de ser $A_{n-1}-$ graduados lo son también $\mathbb{Z}^s -$ graduados.*

Para entender la operación de $Spec\, K[\mathbb{Z}^r]$ y $Spec\, K[\mathbb{Z}^s]$ en la variedad tórica X en la que opera el toro $Spec\, K[M]$ de la forma $\lambda.x^\alpha = \lambda^\alpha x^\alpha$, consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M & \overset{v=(v',\overline{v})}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}^r & \to & A_{n-1} & \to & 0 \\ & & \pi_B\downarrow & & \rho\downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & B & \overset{v'}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}^s & \to & A_{n-1} & \to & 0 \end{array} \tag{33}$$

donde los morfismos son:

$$\rho = h \circ \pi \qquad \text{es decir } \rho(n = (n', \overline{n})) = n' + \overline{n}.v'(\overline{m})$$

y $\pi_B(\alpha) = \alpha_B$ para $\alpha = \alpha_B + \alpha_C$.

En efecto es conmutativo porque

$$n = v(\alpha) \Longleftrightarrow \rho(n) = v'(\alpha_B)$$

con las relaciones

$$\alpha = \alpha_B + \alpha_C \text{ y } \alpha_C = -\bar{n}.\bar{m}$$

Aplicamos $Hom_{\mathbb{Z}}(, K^*)$ a la ecuación 33 y tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(A_{n-1}, K^*) & \longrightarrow & K^{*r} & \xrightarrow{v^*} & Hom_{\mathbb{Z}}(M, K^*) = T & \rightarrow & 0 \\ & & \| & & \rho^*\uparrow & & \pi^*\uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(A_{n-1}, K^*) & \longrightarrow & K^{*s} & \xrightarrow{v'^*} & Hom_{\mathbb{Z}}(B, K^*) = T(B) & \rightarrow & 0 \end{array} \tag{34}$$

con

$$v^*(\lambda)(\alpha) = \lambda^{v(\alpha)}$$

$$\rho^*(\mu) = (\mu, \mu^N) = (\mu, \mu^{v'(m_{s+1})}, \ldots, \mu^{v'(m_{s+k})})$$

$$\pi^*(\tau)(\alpha = \alpha_B + \alpha_C) = \tau(\alpha_B)$$

Es inmediato comprobar las igualdades

$$v^*\left(\rho^*\left(\mu\right)\right)(\alpha) = \mu^{v'(\alpha_B)} = \pi^*\left(v'^*\left(\mu\right)\right)(\alpha)$$

Además como $\forall\ a' = (a_1, \ldots, a_s) \in K^{*s}$ se cumple

$$(\rho^*(a'))^{v(\alpha)} = (a', a'^N)^{(v'(\alpha), \overline{v}(\alpha))} = a'^{v'(\alpha_B) + v'(\alpha_C)}.a'^{\overline{v}(\alpha)}.N$$

y como $\alpha_C = -\overline{v}(\alpha_C).\overline{m} \Rightarrow v'(\alpha_C) = -\overline{v}(\alpha_C).v'(\overline{m}) = -\overline{v}(\alpha_C).N$ luego lo anterior es

$$(\rho^*(a'))^{v(\alpha)} = a'^{v'(\alpha_B)} \tag{35}$$

con lo que se ha probado:

$$\begin{array}{rl} Hom_{\mathbb{Z}}(A_{n-1}, K^*) & \equiv \{a' \in K^{*s} :\ a^{v'(\beta)} = 1\ \forall\ \beta \in B\} \overset{\rho^*}{=} \\ & = \{a = (a', \overline{a}) \in K^{*r=s+k} :\ a^{v(\alpha)} = 1\ \forall\ \alpha \in M\} \end{array}$$

Las operaciones de K^{*r} y por tanto $K^{*s} \overset{\rho^*}{\hookrightarrow} K^{*r}$ en X estarán determinadas por la operación de $Hom_{\mathbb{Z}}(M, K^*) = T$ a través del diagrama conmutativo anterior, luego:

$$\lambda \in K^{*r} \Rightarrow \lambda.x^\alpha = v^*(\lambda).x^\alpha = \lambda^{v(\alpha)} x^\alpha$$

$$\mu \in K^{*s} \Rightarrow \mu.x^\alpha = v^*(\rho^*(\mu)).x^\alpha = \pi^*(v'^*(\mu)).x^\alpha = \mu^{v'(\alpha_B)}.x^\alpha$$

de donde se deduce que $Hom_{\mathbb{Z}}(A_{n-1}, K^*)$ opera en X por la identidad.
Por último, las proyecciones naturales $\mathbb{Z}^s \oplus M \to M = B + C \xrightarrow{\pi} B$ definen $Spec\, K[B]$ como subgrupo del toro $T = Spec\, K[M]$ y éste como subgrupo de $Spec\, K[\mathbb{Z}^s \oplus M]$ por tanto si $a \in Spec\, K[B] \Rightarrow$

$$a.x^\alpha = \pi^*(a)(\alpha).x^\alpha = a^{\alpha_B} x^\alpha$$

y

$$a.x^{(n,\alpha)} = a^{\alpha_B} x^{(n,\alpha)}$$

es la operación del toro $Spec\, K[B]$ en A' y en $A_C \subset A'$ opera entonces por la identidad.

5.4.2. Igualdad entre $Aut_{\mathbb{Z}^s} A'/T(s)$ y $Aut_g A_C/T_{A_{n-1}}$

Denotamos $T(s) = Spec\, K[\mathbb{Z}^s]$ y $T(B) = Spec\, K[B]$ y $T_{A_{n-1}}$ al grupo multiplicativo de puntos racionales $Hom_{\mathbb{Z}}(A_{n-1}, K^*)$. Ahora la segunda parte de la ecuación 34 es la sucesión exacta

$$0 \to T_{A_{n-1}} \longrightarrow T(s) \xrightarrow{v'^*} T(B) \to 0 \tag{36}$$

con

$$v'^*(\lambda)(\beta) = \lambda^{v'(\beta)}$$

Escribiremos abreviadamente $X^\beta = x^{(-v'(\beta),\beta)} \in A'$ para cada $\beta \in B$. Sean los morfismos

$$T(s) \underset{m}{\overset{t}{\rightrightarrows}} Aut_{\mathbb{Z}^s} A' \qquad \begin{array}{rcl} t(\lambda)(x^{(n,\alpha)}) & = & \lambda^n x^{(n,\alpha)} \\ m(\lambda)(x^{(n,\alpha)}) & = & \lambda^{n+v'(\alpha_B)} x^{(n,\alpha)} \end{array} \tag{37}$$

que definen las dos maneras de operar el toro $T(s)$ en A' y los dos corrspondientes subgrupos $t(T(s))$ y $m(T(s))$.
Como en el lema 5.7, sea el subgrupo

$$S = \{\sigma' \in Aut_{\mathbb{Z}^s} A' : \sigma'(X^\beta) = X^\beta\}$$

$\Rightarrow$

$$m(T(s)) \subset S$$

Por otro lado tenemos la sucesión exacta del teorema 5.8

$$0 \to S \to Aut_{\mathbb{Z}^s} A' = S \rtimes T(B) \xrightarrow{\varphi} T(B) \to 0$$

y la sección de φ es θ tal que

$$\theta(v'^*(\mu))(x^{(n,\alpha)}) = \mu^{v'(\alpha_\beta)}x^{(n,\alpha)}$$

$\Rightarrow t(\lambda) = m(\lambda) \circ \theta(v'^*(\lambda^{-1})) \Rightarrow t(\lambda) = (m(\lambda), v'^*(\lambda^{-1})) \in S \rtimes T(B)$ y por tanto

$$t(T(s)) \subset S \rtimes T(B)$$

Es evidente que t y m coinciden sobre $T_{A_{n-1}} \Rightarrow$

$$0 \to T_{A_{n-1}} \to T(s) \underset{m}{\overset{t}{\rightrightarrows}} Aut_{\mathbb{Z}^s}A' \qquad \text{es exacta}$$

Sea el morfismo

$$0 \to T(B) \xrightarrow{\bar{m}} S/T_{A_{n-1}}$$

tal que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & T_{A_{n-1}} & \to & T(s) & \xrightarrow{v'^*} & T(B) & \to & 0 \\
 & & \| & & m\downarrow & & \bar{m}\downarrow & & \\
0 & \to & T_{A_{n-1}} & \to & S & \to & S/T_{A_{n-1}} & \to & 0
\end{array} \tag{38}$$

$\Rightarrow \bar{m}(v'^*(\lambda.\varepsilon)) = [m(\lambda).m(\varepsilon)] = [m(\lambda)]\ \forall\ \varepsilon \in T_{A_{n-1}}$ y definimos el epimorfismo siguiente:

$$Aut_{\mathbb{Z}^s}A' = S \rtimes T(B) \xrightarrow{r} S/T_{A_{n-1}} \to 0 \qquad r(a,b) = [a].\bar{m}(b)$$

Corolario 5.9. *Con los datos anteriores se cumple:*

1. *La sucesión*

$$0 \to T(s) \xrightarrow{t} Aut_{\mathbb{Z}^s}A' = S \rtimes T(B) \xrightarrow{r} S/T_{A_{n-1}} \to 0$$

   es exacta

2.

$$Aut_g A_C/T_{A_{n-1}} \simeq Aut_{\mathbb{Z}^s}A'/t(T(s))$$

3.

$$Aut_g^\circ A_C/T_{A_{n-1}} \simeq Aut_{\mathbb{Z}^s}^\circ A'/t(T(s))$$

Demostración:

Veamos 1: Como $t(\lambda) = (m(\lambda), v'^*(\lambda^{-1})) \Rightarrow$

$$r(t(\lambda)) = r(m(\lambda), v'^*(\lambda^{-1})) = [m(\lambda).m(\lambda^{-1})] = 1$$

$\Rightarrow Im\, t \subseteq ker\, r$ y para ver la igualdad, sea $(a,b) \in S \rtimes T(B)$ tal que $r(a,b) = 1$. Como $b = v'^*(\mu) = v'^*(\mu.\varepsilon)\ \forall\ \varepsilon \in T_{A_{n-1}}$ y $\mu \in T(s)$ tal que $b(X^\beta) = \mu^{v'(\beta)}X^\beta$, si $r(a,b) = 1 \Rightarrow$ $[a.m(\mu)] = [m(j)]$ para un $j \in T_{A_{n-1}}$ y si tomo otro representante $\Rightarrow [a.m(\mu.\varepsilon)] = [m(j.\varepsilon)]$ y en todo caso debe existir un $j \in T_{A_{n-1}}$ tal que $a = m(\mu^{-1}.j) = m((\mu\varepsilon)^{-1}.j.\varepsilon) \Rightarrow$ sea $\lambda = \lambda(j) = \mu^{-1}.j$ y j queda determinada por la condición $a \circ b(x^{(n,\alpha_C)}) = (\mu^{-1}.j)(n)x^{(n,\alpha_C)}$ $\Rightarrow (a,b) = t(\lambda)$ y se acaba.

El enunciado 2 se deduce del anterior y del isomorfismo $S \simeq Aut_g^\circ A_C$ probado en el lema 5.7.

El enunciado 3 se deduce del anterior tomando componentes conexas y teniendo en cuenta que $T(s)$ es conexo.

□

5.4.3. Álgebra de Lie del grupo de automorfismos graduados $Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$ y $Aut_g A_C$

Para calcular $T_I(Aut_J A)$ cuando $A = A'$ y $J = \mathbb{Z}^s$ y cuando $A = A_C$ y $J = A_{n-1}(X)$ pretendemos utilizar el teorema 4.6 que identifica canónicamente el espacio tagente en la identidad al grupo de automorfismos graduados con las derivaciones graduadas, conservando el corchete de Lie y de este modo para calcular el álgebra de Lie sólo tendremos que calcular tales derivaciones y el corchete de Lie de ellas. Veamos entonces que $A = A'$ y $A = A_C$ son los anillos graduados de variedades tóricas afines, es decir, cumplen las condiciones de la sección 4.1 :

Para $A = A'$, sea $Z = \mathbb{Z}^s \oplus M$ y $\widetilde{v} : Z \to \mathbb{Z}^{r=s+k}$ es $\widetilde{v} = h^{-1} \circ \pi'$ con h y π' ya definidos en la sección 5.3, de modo que

$$\widetilde{v}\,((n,\alpha)) = n + v'(\alpha), \overline{v}(\alpha) \text{ y } A' = K[x^{\widetilde{v}^{-1}(\mathbb{N}^r)}]$$

El morfismo gr (notación sección 5.3) en este caso es $gr = \pi_1$:

$$\begin{array}{ccc} Z = \mathbb{Z}^s \oplus M & \longrightarrow & \mathbb{Z}^s \\ (n,\alpha) & \rightsquigarrow & n \end{array}$$

que da la $\mathbb{Z}^s -$ graduación. Hay que comprobar que $Ker(gr) \cap \widetilde{v}^{-1}(\mathbb{N}^r) = 0$. En efecto, si $\widetilde{v}((n,\alpha)) = n + v'(\alpha), \overline{v}(\alpha) \in \mathbb{N}^r$ y $n = 0 \Rightarrow v'(\alpha) \geq 0$ y $\overline{v}(\alpha) \geq 0$ y como $\overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\alpha_C)$

implica que $\alpha_C = -p\overline{m}$ con $p \in \mathbb{N}^n$ pero entonces $v'(\alpha_C) = -pN \leq 0$ y como $v'(\alpha) = v'(\alpha_B) + v'(\alpha_C) \geq 0 \Rightarrow v'(\alpha_B) \geq 0$ con $\overline{v}(\alpha_B) = 0 \Rightarrow$ en caso semicompleto $\alpha_B = 0 \Rightarrow v'(\alpha_C) = 0 \Rightarrow p = 0$ y $\alpha = 0$ con lo que se ha probado que $Ker(gr) \cap \widetilde{v}^{-1}(\mathbb{N}^r) = 0$ con lo que se puede afirmar que el álgebra de Lie de $Aut_{\mathbb{Z}^s} A'$ es:

$$T_I\left(Aut_{\mathbb{Z}^s} A'\right) = \mathcal{D}er_{\mathbb{Z}^s} A'$$

Para $A = A_C$, sea $Z = \mathbb{Z}^s \oplus C$ y $\widetilde{v} = h^{-1} : \mathbb{Z}^s \oplus C \to \mathbb{Z}^{r=s+k}$ de modo que como $\widetilde{v}^{-1} = h$ $\Rightarrow$

$$\widetilde{v}\left((n, \alpha_C)\right) = n + v'(\alpha_C), \overline{v}(\alpha_C) \text{ y } A_C = K[x^{h(\mathbb{N}^r)}]$$

El morfismo gr en este caso es

$$gr : Z = \mathbb{Z}^s \oplus C \overset{h^{-1}}{\to} \mathbb{Z}^r \to A_{n-1}(X) \to 0$$

o equivalentemente, por el diagrama conmutativo (33) :

$$gr : Z = \mathbb{Z}^s \oplus C \overset{h^{-1}}{\to} \mathbb{Z}^r \overset{\varphi}{\to} \mathbb{Z}^s \to A_{n-1}(X) \to 0$$

donde como hemos visto en la sección anterior $\varphi \circ h^{-1} = \pi_1$ y entonces $gr((n, \alpha_C)) = [n]$ luego $gr((n, \alpha_C)) = 0 \Leftrightarrow n = v'(\beta)$ para algún $\beta \in B$. Si $(n, \alpha_C) \in h(\mathbb{N}^r) \Rightarrow n \geq 0$, $\overline{v}(\alpha_C) \geq 0$ y $\alpha_C \in \Gamma(n)$. Si $n = v'(\beta)$, como $\overline{v}(\beta) = 0$ entonces en caso semicompleto necesariamente $\beta = 0 \Rightarrow n = 0$ y $\overline{v}(\alpha_C) \geq 0$ implica que $\alpha_C = -p\overline{m}$ con $p \in \mathbb{N}^n$ pero entonces $v'(\alpha_C) = -pN \leq 0$ de donde se deduce que $\alpha_C \in \Gamma(n = 0) \Leftrightarrow \alpha_C = 0$ con lo que se ha probado que $Ker(gr) \cap \widetilde{v}^{-1}(\mathbb{N}^r) = 0$. El álgebra de Lie de $Aut_g A_C$ es por tanto:

$$T_I\left(Aut_g A_C\right) = \mathcal{D}er_g A_C$$

Calculemos pues tales derivaciones.

Notaciones: Al subespacio vectorial de las derivaciones de $\mathcal{O}_X$ generado por las derivaciones asociadas a raíces, esto es, $x^r D_v$ tales que $r \in S(v)$ lo denotaremos $Der_K^{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_X)$. Luego por el teorema 3.1

$$Der_K^{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_X) \simeq Der_K(\mathcal{O}_X)/M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K$$

y

$$Der_K(\mathcal{O}_X) = M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K + Der_K^{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_X) \tag{39}$$

Teorema 5.10. *Sea $M = B \oplus C$ la descomposición ya descrita y A' y A_C las álgebras $\mathbb{Z}^s-$ graduadas y $A_{n-1}-$graduadas respectivamente.*

1. *El álgebra de Lie del grupo $Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$ es el álgebra $\mathbb{Z}^s \oplus C-$graduado*

$$T_e(Aut_{\mathbb{Z}^s}A') = (\mathbb{Z}^s \oplus M)^* \otimes_{\mathbb{Z}} K + Der_K^{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_X)$$

con el corchete de Lie natural en $Der_K(\mathcal{O}_X)$ calculado en la proposición 3.11

2. *El álgebra de Lie del grupo $Aut_g A_C$ es*

$$T_e(Aut_g A_C) = (\mathbb{Z}^s \oplus C)^* \otimes_{\mathbb{Z}} K + Der_K^{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_X)$$

con el corchete de Lie natural en $Der_K(\mathcal{O}_X)$ calculado en la proposición 3.11. Además la $\mathbb{Z}^s \oplus C-$graduación de la parte $Der_K^{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_X)$ coincide con la $M-$graduación por la inyección $M \hookrightarrow \mathbb{Z}^s \oplus C$.

Demostración:
Como se acaba de justificar, hay que calcular las derivaciones de grado cero en A' y A_C con la $\mathbb{Z}^s-$ graduación y la $A_{n-1}-$ graduación respectivamente.
Para 1, sea $\widetilde{v_i} : \mathbb{Z}^s \oplus M \to \mathbb{Z}$ definida por:

$$\begin{aligned} \widetilde{v_i}((n,\alpha)) &= n_i + v_i(\alpha) \text{ si } 1 \leq i \leq s \\ \widetilde{v_i}((n,\alpha)) &= v_i(\alpha) \text{ si } s+1 \leq i \leq s+k = r \end{aligned}$$

El semigrupo S' definido en la sección 5.3 es:

$$S' = \{(n,\alpha) : \ \widetilde{v_i}((n,\alpha)) \geq 0 \ \forall \ 0 \leq i \leq s+k = r\}$$

Luego $A' = K[S'] = K[\widetilde{v_i} \geq 0]$ que es álgebra $\mathbb{Z}^s-$graduada y por tanto según vimos en el capítulo de derivaciones se tiene

$$\begin{gathered} Der_K A' \\ \| \\ (\mathbb{Z}^s \oplus M)^* \otimes_{\mathbb{Z}} A' \bigoplus \left\langle \{x^{(n,\alpha)} D_{\widetilde{v_i}} : \ \widetilde{v_i}((n,\alpha)) = -1 \text{ y } \widetilde{v_l}((n,\alpha)) \geq 0 \ \forall \ l \neq i\} \right\rangle \end{gathered}$$

De estas hay que calcular las que sean $\mathbb{Z}^s-$graduadas es decir las de grado cero. Las del primer sumando son $f.D_w$ con $f \in A'$ tales que $f.D_w(x^{(n,\alpha)}) = f.w((n,\alpha)).x^{(n,\alpha)} \in A'_n$ luego $f \in A'_0 = K$ en caso semicompleto, de donde s las derivaciones graduadas correspondientes al primer sumando son $(\mathbb{Z}^s \oplus M) \otimes_{\mathbb{Z}} K$. Las del segundo sumando deben verificar $\forall\ (n', \gamma) \in \mathbb{Z}^s \oplus M$

$$x^{(n,\alpha)} D_{\widetilde{v_i}}(x^{(n',\gamma)}) = \widetilde{v_i}((n',\gamma)).x^{(n+n',\alpha+\gamma)}$$

$\Rightarrow n = 0 \Rightarrow \widetilde{v_i}((0,\alpha)) = v_i(\alpha) = -1$ y $\widetilde{v_l}((0,\alpha)) = v_l(\alpha) \geq 0 \Rightarrow \alpha \in S(v_i)$ es una raíz y por tanto la derivación graduada es

$$x^{(0,\alpha)} D_{\widetilde{v_i}} \equiv x^{\alpha} D_{v_i} \in Der_K(\mathcal{O}_X)/M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K$$

con lo que se demuestra 1.

Para 2, tenemos que calcular $Der_g(A_C)$. Para ello sea como antes $\widetilde{v_i} : \mathbb{Z}^s \oplus C \to \mathbb{Z}$ la restricción de $\widetilde{v_i}$ del apartado anterior a $\mathbb{Z}^s \oplus C \Rightarrow A_C = K[x^{\{v_i \geq 0\}}]$ en $\mathbb{Z}^s \oplus C$ y por tanto sabemos que

$$Der_K A_C$$
$$\|$$
$$(\mathbb{Z}^s \oplus C)^* \otimes_{\mathbb{Z}} A_C \bigoplus \left\langle \{x^{(n,\alpha_C)} D_{\widetilde{v_i}} :\ \widetilde{v_i}((n,\alpha_C)) = -1 \text{ y } \widetilde{v_l}((n,\alpha_C)) \geq 0\ \forall\ l \neq i\} \right\rangle$$

y hay que calcular las que son $A_{n-1}-$graduadas. El primer sumando es el espacio vectorial generado por las deriaciones $x^{(n,\alpha_C)} D_w$ con $x^{(n,\alpha_C)} \in A_C$ y que verifiquen que

$$x^{(n,\alpha_C)} D_w(x^{(n',\gamma_C)}) = w((n',\gamma_C)).x^{(n+n',\alpha_C+\gamma_C)} \text{ sea de grado } [n']$$

donde $[n'] = \{n' + v'(\beta \in B)\} \Rightarrow n = v'(\beta)$ para algún $\beta \in B$ y por tanto como $x^{(n=v'(\beta),\alpha_C)} \in A_C \Rightarrow v(\beta + \alpha_C) \geq 0$ lo que en caso semicompleto significa que $\beta = 0$ y $\alpha_C = 0$ de donde se deduce que las derivaciones graduadas correspondientes al primer sumando son

$$\langle \{D_w :\ w \in (\mathbb{Z}^s \oplus C)^*\} \rangle_K = (\mathbb{Z}^s \oplus C)^* \otimes_{\mathbb{Z}} K$$

El segundo sumando son las derivaciones $x^{(n,\alpha_C)} D_{\widetilde{v_i}}$ que además cumplan que

$$x^{(n,\alpha_C)} D_{\widetilde{v_i}}(x^{(n',\gamma_C)}) = \widetilde{v_i}((n',\gamma_C)).x^{(n+n',\alpha_C+\gamma_C)}$$

sea de grado $[n'] = \{n' + v'(\beta \in B)\}$ y por tanto $n = v'(\beta)$ y entonces por hipótesis se tendrán:

$$-1 = \widetilde{v_i}((n = v'(\beta), \alpha_C)) = v_i(\beta) + v_i(\alpha_C) = v_i(\beta + \alpha_C)$$

y

$$\widetilde{v_l}((n = v'(\beta), \alpha_C)) = v_l(\beta, \alpha_C) \geq 0 \;\forall\; l \neq i$$

Luego $\beta + \alpha_C$ es raíz respecto v_i de modo que como vimos en el capítulo de derivaciones $x^{\beta+\alpha_C} D_{v_i} \in Der_K(\mathcal{O}_X)/M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K$ y teniendo en cuenta además que $\forall\; \beta \in B\; v'(\beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ y por tanto que $B \simeq v'(B)$, se ha probado que la derivación graduada es

$$x^{(v'(\beta), \alpha_C)} D_{\widetilde{v_i}} \equiv x^{\beta+\alpha_C} D_{v_i} \in Der_K(\mathcal{O}_X)/M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K$$

$\square$

Observación 10. *Para demostrar* 2*, bastaría aplicar el teorema 5.8 que relaciona $Aut_g A_C$ con $Aut_{\mathbb{Z}^s} A'$ y la relación se basa en el isomorfismo del teorema 5.4 que haciendo cociente por $B \subset M$ es el morfismo epiyectivo*

$$\mathbb{Z}^s \oplus M \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^s \oplus C$$

definido por

$$\phi\left((n, \alpha)\right) = (n + v'(\alpha_B), \alpha_C)$$

y pasando al dual obtenemos la relación entre los tangentes a los respectivos toros maximales ya estudiada en la sección anterior. Estos tangentes son $(\mathbb{Z}^s \oplus C)^* \otimes_{\mathbb{Z}} K$ en $T_e(Aut_g A_C)$ y $(\mathbb{Z}^s \oplus M)^* \otimes_{\mathbb{Z}} K$ en $Aut_{\mathbb{Z}^s} A'$, y el morfismo inyectivo es el siguiente:

$$Si\; D_w \in (\mathbb{Z}^s \oplus C)^* \otimes_{\mathbb{Z}} K \Rightarrow D_w \in (\mathbb{Z}^s \oplus M)^* \otimes_{\mathbb{Z}} K$$

tal que

$$w(n, \alpha = \alpha_B + \alpha_C) = w(n + v'(\alpha_B), \alpha_C)$$

Capítulo 6

6. $Aut\ X$ como automorfismos de una $K-$ álgebra graduada

En esta sección vamos aver la relación entre los grupos $Aut\,X$ y $Aut_g A_C$ que va a ser fundamental para el cálculo del primero a través del segundo.

6.1. Divisores y haces de linea de una variedad tórica

Si Z es una variedad algebraica, denotaremos por $Cl(Z)$ al grupo de los divisores de Weil modulo la equivalencia lineal y $Pic(Z)$ el grupo de los divisores de Cartier modulo la equivalencia lineal o equivalentemente el grupo de los haces de linea modulo isomorfismos.

Sea X una variedad tórica completa de toro $T_M = Spec\,K[M]$ e hipersuperficies invariantes $H_1, \dots, H_r$. Como siempre, $T_M \simeq U_M = X \backslash (H_1 \cup \dots \cup H_r)$ y $[H_1], \dots, [H_s]$ el sistema mínimo de generadores de los divisores efectivos de $Cl(X)$.

Llamaremos V al abierto de puntos no singulares de X. Como X es normal V contiene todos los puntos de codimensión 1 de X y se tiene que $Pic(V) = Cl(V) = Cl(X)$ y que para cada divisor D de X, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) = \Gamma(V, \mathcal{O}_V(D))$. Llamaremos $L_i = \mathcal{O}_V(H_i)$.

Al cuerpo de fracciones de X o V o U_M lo llamaremos Σ y al cuerpo de fracciones de un esquema integro Z lo llamaremos Σ_Z.

Para cualquier K-esquema Z, llamaremos $\pi : V \times_{Spec\,K} Z \to V$ y $p : V \times_{Spec\,K} Z \to Z$ las respectivas proyecciones canónicas.

Teorema 6.1. *Supongamos que Z es una variedad algebraica lisa.*

a) El morfismo $Pic(V) \times Pic(Z) \to Pic(V \times_{Spec\,K} Z)$ dado por:
$(L_1, L_2) \to \pi^* L_1 \otimes_{\mathcal{O}_{V\times Z}} p^* L_2$ es isomorfismo.
b) $\mathcal{O}_{V\times Z}(V \times Z)^* = \mathcal{O}_Z(Z)^*$

Demostración:

a)

Veamos cuales son las valoraciones discretas de $\Sigma_{V\times Z}$ que centran en $V\times Z$ en codimensión 1: Sea H una hipersuperficie integra de $V\times Z$ que define el anillo de valoración discreta $\mathcal{O}_{v_H}$. Por cálculo de dimensión o bien $p(H)=Z$ o bien $p(H)=H'$ es una hipersuperficie de Z y entonces $H=p^{-1}(H')$. Es decir $\mathcal{O}_{V\times Z}(H)=p^*\mathcal{O}_Z(H')$.

Luego o bien v_H centra en $V\times_K Spec\,\Sigma_Z$ o bien $v_H=v_{p^{-1}H'}$ para alguna hipersuperficie $H'\subset Z$.

El morfismo es epiyectivo: Sea $H\neq p^{-1}H'$ una hipersuperficie integra de $V\times Z$. En la variedad tórica $V\times_{Spec\,K} Spec\,\Sigma_Z$ es $H-\sum_{i=1}^{r} n_i\bar{H}_i=D(f)$ porque $\mathcal{O}_{V\times Z}(H)$ es trivial en el abierto $\bar{U}_M$. Luego en $V\times Z$, $D(f)=H-\sum n_i\bar{H}_i+\sum m_j p^{-1}H'_j$. Por tanto $[H]=\sum n_i[\bar{H}_i]+\sum m_j[p^{-1}H'_j]$ y se concluye.

El morfismo es inyectivo. Si $\pi^*L_1\otimes p^*L_2\simeq\mathcal{O}_{V\times Z}$ restringiendo a $p^{-1}(z)=V\times\{z\}$ se tiene que $L_1\simeq\mathcal{O}_V$ y análogamente tomando un punto de V se tiene que $L_2\simeq\mathcal{O}_Z$.

b) $f\in\mathcal{O}_{V\times Z}(V\times Z)^*$ si y solo si $v_H(f)=0$ para todo hipersuperficie integra H de $V\times Z$. Luego $f\in\Sigma_Z[M]$ y ademas es invertible. Luego $f=\lambda x^\alpha$ donde $\lambda\in\Sigma_Z$. Como $v_{V\times H}(f)=v_H(\lambda)=0$ para todo hipersuperficie $H\subset Z$ se tiene que $\lambda\in\mathcal{O}_Z(Z)^*$. Como $v_{H_i\times Z}(f)=v_{H_i}(x^\alpha)=0$ para todo i se tiene que $x^\alpha\in\mathcal{O}_V(V)^*=K$ de donde se concluye.

□

Proposición 6.2. *Sea* $f:Y'\to Y$ *un morfismo de* K*-esquemas y* $\mathcal{N}$ *un* $\mathcal{O}_V$*-módulo coherente. Tenemos los diagramas conmutativos.*

$$\begin{array}{ccccc} V\times Y' & \xrightarrow{\bar f=Id\times f} & V\times Y & \xrightarrow{\pi} & V \\ p\downarrow & & p\downarrow & & \downarrow \\ Y' & \xrightarrow{f} & Y & \rightarrow & Spec\,k \end{array}$$

a) $\Gamma(V,\mathcal{N})\otimes_K\mathcal{O}_Y\simeq p_*\pi^*\mathcal{N}$.

b) El morfismo natural $f^*p_*\pi^*\mathcal{N}\to p_*\bar{f}^*\pi^*\mathcal{N}$ *es isomorfismo.*

Demostración:

a) Aplicamos el teorema del cambio de base al diagrama conmutativo de la derecha.

b) Como $\pi\circ\bar f=\pi$, se tiene que $p_*\bar{f}^*\pi^*\mathcal{N}=p_*\pi^*\mathcal{N}\simeq\Gamma(V,\mathcal{N})\otimes_K\mathcal{O}_{Y'}$ aplicando la parte a). Por otra parte $f^*p_*\pi^*\mathcal{N}\simeq f^*(\Gamma(V,\mathcal{N})\otimes_K\mathcal{O}_Y)=\Gamma(V,\mathcal{N})\otimes_K\mathcal{O}_{Y'}$

□

6.1.1. Automorfismos y haces de linea

Sea L un haz de linea en V. Denotaremos $Aut_L V$ al siguiente funtor: Para cada K-esquema Y, $Aut_L V\,(Y)$ es el el conjunto de parejas (τ,ϕ) donde $\tau \in Aut_Y(V\times Y)$ y $\phi : \tau^*\pi^*L \simeq \pi^*L$ es un isomorfismo. Si $f : Y' \to Y$, es un morfismo de esquemas, entonces tenemos que $f^*\tau = \bar\tau : V\times Y' \to V\times Y'$ es el automorfismo obtenido tomando $\times_Y Y'$ en $\tau : V\times Y \to V\times Y$ y $f^*\phi = \bar\phi : \bar\tau^*\pi^*L = \bar\tau^*\bar f^*\pi^*L = \bar f^*\tau^*\pi^*L \overset{\phi}{\simeq} \bar f^*\pi^*L = \pi^*L$ es el isomorfismo inducido por ϕ teniendo en cuenta que si $\bar f = Id\times f$, entonces $\pi\circ\bar f = \pi$ y que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V\times Y' & \overset{\bar\tau}{\to} & V\times Y' \\ \bar f\downarrow & & \downarrow\bar f \\ V\times Y & \overset{\tau}{\to} & V\times Y \end{array} \qquad (1)$$

Este funtor es un funtor de grupos : Si $(\tau_1,\phi_1),(\tau_2,\phi_2)\in Aut_L V\,(Y)$, entonces $(\tau_1,\phi_1)\circ(\tau_2,\phi_2) = (\tau_1\circ\tau_2,\phi_1\circ\phi_2)$ donde $\phi_1\circ\phi_2$ es la composición de los isomorfismos $\tau_2^*\tau_1^*\pi^*L \overset{\phi_1}{\simeq} \tau_2^*\pi^*L \overset{\phi_2}{\simeq} \pi^*L$.

Sea $E = \Gamma(V,L)$. Veamos que existe un morfismo de grupos entre los funtores $Aut_L V$ y $Aut_K E$. Para cada K-esquema Y, $Aut_K E\,(Y) = Aut_{\mathcal{O}_Y}(E\otimes_K \mathcal{O}_Y) = Aut_{\mathcal{O}_Y}(p_*\pi^*L)$.

Dado $(\tau,\phi)\in Aut_L V\,(Y)$ definimos $\tau_\phi : E\otimes_K\mathcal{O}_Y \to E\otimes_K\mathcal{O}_Y$ como la composición de los isomorfismos: $p_*\pi^*L \overset{\tau}{\simeq} p_*\tau_*\tau^*\pi^*L = p_*\tau^*\pi^*L \overset{\phi}{\simeq} p_*\pi^*L$.

Veamos cual es este morfismo cuando Y es un punto racional: Sea $\tau\in Aut_K V$ un automorfismo y un isomorfismo $\phi : \tau^*L \simeq L$.

LLamamos del mismo modo al haz constante Σ.

Si $L = \mathcal{O}_V(H)$, entonces $\tau^*L = \mathcal{O}_V(\tau^{-1}(H)$. Las secciones de estos haces son elementos del cuerpo de fracciones Σ y se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_V & \overset{\tau}{\to} & \tau_*\mathcal{O}_V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma & \overset{\tau}{\to} & \tau_*\Sigma = \Sigma \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_V(H) & \overset{\tau}{\to} & \tau_*\mathcal{O}_V(\tau^{-1}H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma & \overset{\tau}{\to} & \Sigma \end{array}$$

El isomorfismo $\phi : \tau^*L \simeq L$ induce un isomorfismo en el cuerpo de fracciones que es multiplicar por algún $0\neq f\in\Sigma$.

$$\begin{array}{ccccc} L & \overset{\tau}{\to} & \tau_*\tau^*L & \overset{\phi}{\simeq} & \tau_*L \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma & \overset{\tau}{\to} & \Sigma & \overset{\cdot f}{\simeq} & \Sigma \end{array}$$

Tomando secciones globales se tiene que si $a \in E$ se considera como un elemento de Σ, entonces $\tau_\phi(a) = \tau(a) \cdot f$.

Teorema 6.3. *a) La correspondencia* $(\tau, \phi) \to \tau_\phi$ *es funtorial. Es decir si* (τ, ϕ) *es como antes y* $f : Y' \to Y$ *es un morfismo, entonces* $f^*(\tau_\phi) = (f^*\tau)_{f^*\phi}$.

b) La correspondencia anterior es morfismo de grupos :

Si $\tau_1, \tau_2 \in Aut_Y(V \times Y)$ *y* $\phi_1 : \tau_1^*\pi^*L \to \pi^*L$, $\phi_2 : \tau_2^*\pi^*L \to \pi^*L$ *son isomorfismos, entonces* $(\tau_2 \circ \tau_1)_{\phi_2 \circ \phi_1} = \tau_{2\phi_2} \circ \tau_{1\phi_1}$.

Demostración:

a) Sea $\bar\tau = f^*\tau$, $\bar f = Id \times f$ (diagrama (1)) y $\bar\phi = f^*\phi$.

El morfismo $f^*\tau_\phi$ se obtiene tomando f^* en $p_*\pi^*L \overset{\tau}{\simeq} p_*\tau_*\tau^*\pi^*L = p_*\tau^*\pi^*L \overset{\phi}{\simeq} p_*\pi^*L$.

Se tiene que $p \circ \bar f = f \circ p$, $\pi \circ \bar f = \pi$, $\bar f \circ \bar\tau = \tau \circ \bar f$

$$\begin{array}{ccccccc}
E \otimes_K \mathcal{O}_{Y'} = & f^*p_*\pi^*L & \overset{\tau}{\simeq} & f^*p_*\tau^*\pi^*L & \overset{\phi}{\simeq} & f^*p_*\pi^*L & = E \otimes_K \mathcal{O}_{Y'} \\
 & {\scriptstyle \text{Prop } 1.2} \| & & \downarrow & & \| & \\
 & p_*\bar f^*\pi^*L & \overset{\tau}{\simeq} & p_*\bar f^*\tau^*\pi^*L & \overset{\phi}{\simeq} & p_*\bar f^*\pi^*L & \\
 & \| & & \| & & \| & \\
 & p_*\pi^*L & \overset{\tau}{\simeq} & p_*\bar\tau^*\bar f^*\pi^*L & \overset{\phi}{\simeq} & p_*\pi^*L & \\
 & \| & & \| & & \| & \\
E \otimes_K \mathcal{O}_{Y'} = & p_*\pi^*L & \overset{\bar\tau}{\simeq} & p_*\bar\tau^*\pi^*L & \overset{\bar\phi}{\simeq} & p_*\pi^*L & = E \otimes_K \mathcal{O}_{Y'}
\end{array}$$

b) Los cuadrados de arriba y abajo del 1^{er} diagrama son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc}
\tau_1^*\pi^*L & \overset{\tau_2}{\to} & \tau_{2*}\tau_2^*\tau_1^*\pi^*L \\
\downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_1 \\
\pi^*L & \overset{\tau_2}{\to} & \tau_{2*}\tau_2^*\pi^*L \\
\downarrow \tau_2 & & \downarrow \phi_2 \\
\tau_{2*}\tau_2^*\pi^*L & \overset{\phi_2}{\to} & \tau_{2*}\pi^*L
\end{array}
\quad \text{y tomando } \tau_{1*} \quad
\begin{array}{ccc}
\tau_{1*}\tau_1^*\pi^*L & \overset{\tau_2}{\to} & \tau_{1*}\tau_{2*}\tau_2^*\tau_1^*\pi^*L \\
\downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_1 \\
\tau_{1*}\pi^*L & & \tau_{1*}\tau_{2*}\tau_2^*\pi^*L \\
\downarrow \tau_2 & & \downarrow \phi_2 \\
\tau_{1*}\tau_{2*}\tau_2^*\pi^*L & \overset{\phi_2}{\to} & \tau_{1*}\tau_{2*}\pi^*L
\end{array}$$

Componiendo con $\pi^*L \overset{\tau_1}{\to} \tau_{1*}\tau_1^*\pi^*L$ y tomando p_* se concluye:

$$\begin{array}{ccccc}
p_*\pi^*L & \overset{\tau_1}{\to} & p_*\tau_1^*\pi^*L & \overset{\tau_2}{\to} & p_*\tau_2^*\tau_1^*\pi^*L \\
 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_1 \\
 & & p_*\pi^*L & & p_*\tau_2^*\pi^*L \\
 & & \downarrow \tau_2 & & \downarrow \phi_2 \\
 & & p_*\tau_2^*\pi^*L & \overset{\phi_2}{\to} & p_*\pi^*L
\end{array}$$

$$(\tau_2 \circ \tau_1)_{\bar\phi} = \phi_2 \circ \phi_1 \circ \tau_2 \circ \tau_1 \overset{\text{diagrama}}{==} \phi_2 \circ \tau_2 \circ \phi_1 \circ \tau_1 = \tau_{2\phi_2} \circ \tau_{1\phi_1}.$$

□

Corolario 6.4. *Sea Y liso. Si $\tau = \tau_1 = \tau_2$, entonces $\tau_{\phi_1} = \tau_{\phi_2} \circ h_\lambda$ donde h_λ es el morfismo multiplicar por $\lambda \in \mathcal{O}_Y(Y)^*$.*

Demostración:
$\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ es un automorfismo de $\pi^* L$. Luego viene dado por un h_λ donde $\lambda \in \mathcal{O}_{V \times Y}(V \times Y)^* = \mathcal{O}_Y(Y)^*$. Luego aplicando la parte a) a (τ, ϕ_2) y (Id, h_λ) se concluye.

□

6.2. Anillo de Cox generalizado

Sea $L_1, \ldots, L_s$ como siempre. Para cada $\alpha = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}^s$, llamaremos $L^\alpha = L_1^{n_1} \otimes_{\mathcal{O}_V} \cdots \otimes_{\mathcal{O}_V} L_s^{n_s}$, haz de anillos de Cox generalizado de X al haz de anillos en V dado por $\mathcal{A} = \bigoplus_{(n_1,\ldots,n_s) \in \mathbb{Z}^s} L^\alpha$ y la defición está justificada porque veremos que sus secciones globales son el anillo de Cox generalizado definido en la sección 5.3. Es decir:

$$\Gamma(V, \mathcal{A}) = \bigoplus_{(n_1,\ldots,n_s) \in \mathbb{Z}^s} \Gamma(V, \mathcal{O}_V(n_1 H_1 + \cdots + n_s H_s)) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^s} \Gamma(V, L^\alpha)$$

que es una K-álgebra $\mathbb{Z}^s$-graduada.

Observación: Los elementos de $\Gamma(V, \mathcal{A})$ se multiplican como elementos de Σ.

Teorema 6.5. $\Gamma(V, \mathcal{A})_0 = K$ *y* $\Gamma(V, \mathcal{A}) = A' = K[S']$ *donde*
$S' = \{((b_1, \ldots, b_s), \alpha) \in \mathbb{Z}^s \oplus M \ / \ v_i(\alpha) + b_i \geq 0 \ \forall i \leq s \ y \ v_j(\alpha) \geq 0 \ \forall j > s\}$. *Por tanto es una K-álgebra de tipo finito gracias a la proposición 5.2*

Demostración: Los elementos de grado cero son los elementos $(0, \alpha)$ tal que $v_i(\alpha) = 0$ para todo i. Luego $\alpha = 0$.

$\Gamma(V, \mathcal{O}_X(b_1 H_1 + \cdots + b_s H_s))$ esta generado por los elementos M-homogéneos.

Pero $x^\alpha \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X(\beta H))$ si y solo si $v_i(\alpha) + b_i \geq 0 \ \forall i \leq s$ y $v_j(\alpha) \geq 0 \ \forall j > s$.

Es decir $(\beta, \alpha) \in S'$.

□

Observación 11. *El cuerpo de fracciones de X se recupera con A' porque*
$\Sigma_X = \{\frac{p}{q} \ / \ p, q \in A'$ *homogéneos del mismo grado* $\}$.

En efecto: $S'-S'=\mathbb{Z}^s\oplus M$ (se prueba despues que $\mathbb{Z}^s\oplus M\simeq\mathbb{Z}^r\oplus B$ y via este isomorfismo es $S'\simeq\mathbb{N}^r\oplus B$). Luego si $m\in M$, entonces $m=s_1-s_2$ donde $s_1,s_2\in S'$. Es decir $x^m=\frac{x^{s_1}}{x^{s_2}}$. Como m es de grado 0, s_1 y s_2 tienen el mismo grado.

Reciprocamente: Si p,q son elementos de A' de grado $b\in\mathbb{Z}^s$, entonces

$$\frac{p}{q}=\frac{\sum\limits_{\alpha\in M}\lambda_{(\alpha,b)}x^{(b,\alpha)}}{\sum\limits_{\alpha\in M}\mu_{(b,\alpha)}x^{(b,\alpha)}}=\frac{\sum\limits_{\alpha\in M}\lambda_{(b,\alpha)}x^{(0,\alpha)}}{\sum\limits_{\alpha\in M}\mu_{(b,\alpha)}x^{(0,\alpha)}}\in\Sigma_X\ .$$

6.2.1. Grupo de automorfismos

Veamos cual es el funtor del grupo de automorfismos graduados de $A'=\underset{\beta\in\mathbb{Z}^s}{\oplus}A_\beta$.

Para cada esquema Z sobre K, llamaremos $Aut_{\mathcal{O}_Z-gr}(A\otimes_K\mathcal{O}_Z)$ a los automorfismos de $\mathcal{O}_Z$-álgebras $\tau:A\otimes_K\mathcal{O}_Z\to A\otimes_K\mathcal{O}_Z$ de modo que $\tau(A_\beta\otimes_K\mathcal{O}_Z)=A_\beta\otimes_K\mathcal{O}_Z$ para todo $\beta\in\mathbb{Z}^s$.

Llamaremos $Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$ al grupo de K-automorfismos graduados de A'; es decir al representante del funtor anterior. Este funtor se sabe que es representable por ser subgrupo de un producto grupos lineales.

El toro $T_{\mathbb{Z}^s}=T(s)$ es el grupo cuyo funtor de puntos es : $Z\ \rightsquigarrow\ \mathcal{O}_Z(Z)^{*s}$.

Por ser A' un álgebra $\mathbb{Z}^s$-graduada, se tiene que $T_{\mathbb{Z}^s}=Spec\,K[\mathbb{Z}^s]$ es un subgrupo de $Aut_{\mathbb{Z}^s}A$. Veámoslo:

Para cada $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_s)\in\mathcal{O}_Z(Z)^{*s}$ y $\beta=(n_1,\dots,n_s)\in\mathbb{Z}^s$, llamaremos $\lambda^\beta=\lambda_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_s^{n_s}$. El automorfismo $\mathcal{O}_Z$-graduado que produce es:

$h_\lambda:A'\otimes_K\mathcal{O}_Z\to A\otimes_K\mathcal{O}_Z$ dado por $h_\lambda(a_\beta)=\lambda^\beta\cdot a_\beta$ para cada $a_\beta\in A_\beta$.

Llamaremos $G=Aut_{\mathbb{Z}^s}A'/T(s)$. Para dar un morfismo $Z\to G$ basta dar un recubrimiento de $Z=\underset{i\in I}{\cup}U_i$ y para cada i, $[\tau_i]\in Aut_{\mathbb{Z}^s}(A'\otimes_K\mathcal{O}_{U_i})\ /\ \mathcal{O}_Z(U_i)^{*s}$ de modo que coincidan en las intersecciones; es decir $\tau_i\circ\tau_j^{-1}{}_{|U_i\cap U_j}=h_\lambda$ para algún $\lambda\in\mathcal{O}_Z(U_i\cap U_j)^{*s}$.

6.3. Morfismo entre $Aut^\circ X$ y $Aut_{\mathbb{Z}^s}A'/T(s)$

$Aut\,X$ es el representante del funtor de grupos dado por: $Y\ \rightsquigarrow\ Aut_Y(X\times Y)$.

Sea $\tau:V\times Y\to V\times Y$ un automorfismo sobre Y y para cada i, $\phi_i:\tau^*\pi^*L_i\simeq\pi^*L_i$ un isomorfismo. Estos isomorfismos producen para cada $\alpha=(n_1,\dots,n_s)\in\mathbb{Z}^s$, un isomorfismo $\phi_\alpha:\tau^*\pi^*L^\alpha\simeq\pi^*L^\alpha$ y por tanto tenemos un isomorfismo de algebras $\mathbb{Z}^s$ graduadas $\phi:\tau^*\pi^*\mathcal{A}\to\pi^*\mathcal{A}$. Esta pareja (τ,ϕ) produce un elemento

$\tau_\phi \in Aut_{\mathcal{O}_Y - \mathbb{Z}^s}(A' \otimes_K \mathcal{O}_Y)$ como ya hemos visto en la sección cap61. Por el teorema 6.3 se tiene:

Teorema 6.6. *a) La correspondencia* $(\tau, \phi) \to \tau_\phi$ *es funtorial. Es decir si* (τ, ϕ) *es como antes y* $f : Y' \to Y$ *es un morfismo, entonces* $f^*(\tau_\phi) = (f^*\tau)_{f^*\phi}$.

b) La correspondencia anterior es morfismo de grupos :

Sea $\tau_1, \tau_2 \in Aut_Y(V \times Y)$ *y* $\phi_1 : \tau_1^* \pi^* \mathcal{A} \to \pi^* \mathcal{A}$, $\phi_2 : \tau_2^* \pi^* \mathcal{A} \to \pi^* \mathcal{A}$ *isomorfismos* $\mathbb{Z}^s$ *graduado. Si* $\bar{\phi}$ *es la composición de los isomorfismos* $\tau_2^* \tau_1^* \pi^* \mathcal{A} \overset{\phi_1}{\simeq} \tau_2^* \pi^* \mathcal{A} \overset{\phi_2}{\simeq} \pi^* \mathcal{A}$, *entonces* $(\tau_2 \circ \tau_1)_{\bar{\phi}} = \tau_{2\phi_2} \circ \tau_{1\phi_1}$.

Del corolario 6.4 deducimos:

Corolario 6.7. *Sea* Y *liso. Si* $\tau = \tau_1 = \tau_2$, *entonces* $\tau_{\phi_1} = \tau_{\phi_2} \circ h_\lambda$ *donde* $\lambda \in \mathcal{O}_Y(Y)^{*s}$. *Por tanto,* $[\tau_{\phi_1}] = [\tau_{\phi_2}]$ *como elemento de* $G(Y)$.

Sea $Z = Aut^\circ X$ la componente conexa de $Aut_K X$ que por estar en caracteristica 0 sabemos que es lisa. El automorfismo Id da un punto racional $e \in Z$.

Si $\tau : X \times Z \to X \times Z$ es el automorfismo universal, induce un automorfismo sobre los puntos no singulares y por tanto un automorfismo $\tau : V \times Z \to V \times Z$. Sabemos que $\tau_{|V \times \{e\}} = Id$

Por el teorema 6.1 $\tau^* \pi^* L_i \simeq \pi^* L \otimes p^* L'_i$. Restringiendo a $V \times \{e\}$ se tiene que $\pi^* L_i \simeq \pi^* L$ y por tanto $\tau^* \pi^* L_i \simeq \pi^* L_i \otimes p^* L'_i$.

Existe un recubrimiento por abiertos afines $Z = \underset{l}{\cup} U_l$ de modo que para todo i y l, $L'_{i\ |U_l} \simeq \mathcal{O}_{U_l}$. Sea $f : R = \coprod_l U_l \to Z$ el recubrimiento. Denotaremos $f^*\tau = \tau$ pues nos es mas que restringir τ a cada abierto del recubrimiento. En $V \times R$, tenemos un isomorfismo $\phi_i : \tau^* \pi^* L_i \simeq \pi^* L_i$. Luego tenemos un isomorfismo $\phi : \tau^* \pi^* \mathcal{A} \simeq \pi^* \mathcal{A}$ y por tanto un automorfismo, $\tau_\phi : A \otimes_K \mathcal{O}_R \to A \otimes_K \mathcal{O}_R$.

Sea $p_1, p_2 : V \times R \times_Z R \rightrightarrows V \times R$ las dos proyecciones canónicas. Los isomorfismos ϕ_i dan isomorfismos $\phi_{1i} : p_1^* \tau^* \pi^* L_i \simeq \pi^* L_i$ y $\phi_{2i} : p_1^* \tau^* \pi^* L_i \simeq \pi^* L_i$. Luego $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ es un automorfismo de $\pi^* \mathcal{A}$ (en $V \times R \times_Z R$) y por tanto $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} = h_\lambda$ donde $\lambda \in \mathcal{O}_{R \times_Z R}(R \times_Z R)^{*s}$. Por el corolario 6.4, $\tau_{\phi_1} = \tau_{\phi_2} \circ h_\lambda$. Luego $[\tau_{\phi_1}] = [\tau_{\phi_2}]$ en $Aut(A' \otimes_K \mathcal{O}_{R \times_Z R}) / \mathcal{O}_{R \times_Z R}(R \times_Z R)^{*s}$.

Luego tenemos un elemento $\varphi = [\tau]$ de $G(Z)$.

El morfismo definido para cualquier K-esquema Y es: Si $g : Y \to Z$ es un morfismo; tenemos un recubrimiento de Y, $R_Y = R \times_Z Y \to Y$, y un morfismo $g' : R_Y \to R$. Luego

$g'^*\tau_\phi \in Aut_{\mathcal{O}_{R_Y}-\mathbb{Z}^s}(A' \otimes_K \mathcal{O}_{R_Y})$ que coinciden en las intersecciones y por eso produce un elemento de $G(Y)$.

Teorema 6.8. *Sea* $\varphi : Z = Aut^\circ X \to G$ *el morfismo construido.*

a) φ *no depende del recubrimiento* $R \to Z$ *ni del isomorfismo* $\phi : \tau^*\pi^*\mathcal{A} \simeq \pi^*\mathcal{A}$ *en* $V \times R$.

b) φ *es un morfismo de grupos.*

c) $\varphi : Z = Aut^\circ X \to G$ *es inyectivo.*

d) El morfismo inducido en los espacios tangentes $\varphi_* : T_e Aut^\circ X \to T_e G$ *es isomorfismo.*

Demostración:

a) Sea $f : R \to Z$ y $f' : R' \to Z$ recubrimientos de Z con isomorfismos $\phi : \tau^*\pi^*\mathcal{A} \to \pi^*\mathcal{A}$ en $V \times R$ y $\phi' : \tau^*\pi^*\mathcal{A} \to \pi^*\mathcal{A}$ en $V \times R'$. Sea $\bar{R} = R \times_Z R' \to Z$ el recubrimiento intersección y $p_1 : \bar{R} \to R$, $p_2 : \bar{R} \to R'$ las dos proyecciones canónicas. Tenemos que $p_1^*\phi$ y $p_2^*\phi'$ son isomorfismos de $\tau^*\pi^*\mathcal{A}$ en $\pi^*\mathcal{A}$ en $V \times \bar{R}$. Luego $p_1^*\phi = p_2^*\phi' \circ h_\lambda$ donde $\lambda \in \mathcal{O}_{\bar{R}}(\bar{R})^{*s}$.

Por tanto $\tau_{p_1^*\phi} = \tau_{p_2^*\phi'} \circ h_\lambda$ y se tiene que $p_1^*\tau_\phi \equiv p_2^*\tau_{\phi'} \mod T(s)(\bar{R})$. Luego $[\tau_\phi] = [\tau_{\phi'}]$ en $G(Z)$ como queriamos demostrar.

b) Si $\tau_1, \tau_2 \in Aut_Y X$, entonces hay sendos recubrimientos R_1 y R_2 de Y donde $\tau_1^*\pi^*\mathcal{A}$ y $\tau_2^*\pi^*\mathcal{A}$ son isomorfos respectivamente a $\pi^*\mathcal{A}$. Tomando el recubrimiento intersección $R = R_1 \times_Y R_2$, se tiene sendos isomorfismos en $V \times R$ de $\tau_1^*\pi^*\mathcal{A}$ y $\tau_2^*\pi^*\mathcal{A}$ en $\pi^*\mathcal{A}$ que producen sendos automorfismos de $A \otimes_K \mathcal{O}_R$. Por la parte b) del teorema 6.3 se concluye.

c) Basta probar que $Ker\,\varphi = 0$ y para ello basta probarlo sobre los puntos racionales. Esto se deduce de que el automorfismo en A' da el automorfismo inducido en el cuerpo de fracciones Σ (Observacion 11). Veamoslo: Por estar definida por un divisor, hay un morfismo inyectivo $L_i \to \Sigma$ que es isomorfismo en el punto generico. Luego hay un morfismo inyectivo $\mathbb{Z}^s$ graduado $\mathcal{A} \to \Sigma[x_1, \ldots, x_s]$ dado por $L^\alpha \to \Sigma \cdot x^\alpha$ que es isomorfismo en el punto generico.

Sabemos que el isomorfismo $\phi_i : \tau^* L_i \simeq L_i$ induce un isomorfismo en el cuerpo de fracciones que es multiplicar por algún $0 \neq f_i \in \Sigma$. Por tanto el isomorfismo $\phi_\alpha : \tau^* L^\alpha \simeq L^\alpha$ induce un isomorfismo en el cuerpo de fracciones que es multiplicar por $f^\alpha \in \Sigma$.

Luego tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\tau} & \tau_*\tau^*\mathcal{A} & \overset{\phi}{\simeq} & \tau_*\mathcal{A} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma[x_1,\ldots,x_s] & \xrightarrow{\tau} & \Sigma[x_1,\ldots,x_s] & \overset{h_f}{\simeq} & \Sigma[x_1,\ldots,x_s] \end{array}$$

Tomando secciones globales se tiene que si $a \in A_\alpha$ se considera como un elemento de Σ, entonces $\tau_\phi(a) = \tau(a)\cdot f^\alpha$. Por la observación 11, si $\frac{p}{q} \in \Sigma$ donde $p, q \in A$ son del mismo grado α, entonces $\tau_\phi(\frac{p}{q}) = \frac{\tau_\phi(p)}{\tau_\phi(q)} = \frac{\tau(p)\cdot f^\alpha}{\tau(q)\cdot f^\alpha} = \tau(\frac{p}{q})$. Si $\tau_\phi = h_\lambda$ para algun $\lambda \in K^{*s}$, entonces $\tau = Id$ en Σ.

d) Por la parte c) solo hay que probar que los espacios tangentes son de la misma dimensión.

□

Corolario 6.9. *Se cumple el isomorfismo de grupos:*

$$Aut^\circ X \simeq Aut_g^\circ A_C/T_{A_{n-1}}$$

y las respectiva raíces en el toro T coinciden

Demostración:

Basta aplicar el teorema anterior y el corolario 5.9. Que las raíces en T coinciden se ha visto en la sección 5.4.3 teniendo además en cuenta que $T_{A_{n-1}} \hookrightarrow T(r)$ y el cociente es T.

□

Capítulo 7

7. Cálculo del grupo $Aut_g A_C$ y $Aut_{\mathbb{Z}^s} A'$

Para calcular $Aut_g A_C$ (y por tanto $Aut_{\mathbb{Z}^s} A'$) basta conocer cómo valora el automorfismo en las variables $x_1, \ldots, x_r$. Si denotamos $g_i = (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$ las variables del anillo de Cox en la expresión (23) serán:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & x^{(g_1,0)} & \in & A_{[g_1]} & = & A_C(x_1) \\ \vdots & & & & & & \\ x_s & = & x^{(g_s,0)} & \in & A_{[g_s]} & = & A_C(x_s) \\ x_{s+1} & = & x^{(N^1,-m_{s+1})} & \in & A_{[N^1]} & = & A_C(x_{s+1}) \\ \vdots & & & & & & \\ x_{s+k} & = & x^{(N^k,-m_{s+k})} & \in & A_{[N^k]} & = & A_C(x_{s+k=r}) \end{array} \tag{40}$$

En el capítulo 5 hemos definido la $A_{n-1}-$ graduación del anillo de Cox por el morfismo $\mathbb{Z}^s \oplus C \to A_{n-1}$, $(n, \alpha_C) \rightsquigarrow [n]$ y $grad(x^{(n,\alpha_C)}) = [n]$ con $[n] = [n + \beta]$ $\forall\ \beta \in B$. Si pensamos A_C como $K[\mathbb{N}^r]$ el morfismo es:

$$\begin{array}{cccccc} gr: & \mathbb{Z}^r & \tilde{\to} & \mathbb{Z}^s \oplus C & \to & A_{n-1} \\ & (n', \bar{n}) & \rightsquigarrow & (n' + \bar{n}v'(\bar{m}), \bar{n}.\bar{m}) & \rightsquigarrow & [n' + \bar{n}v'(\bar{m})] \end{array}$$

Sea ahora el morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^r & \stackrel{\varepsilon}{\to} & \mathbb{Z} \\ a = (a_1, \ldots, a_r) & \rightsquigarrow \sum_i a_i & \end{array} \tag{41}$$

Al número $g_\varepsilon(x^a) = \varepsilon(a)$ lo llamaremos $\varepsilon -$ *grado* del monomio $x^a \in A_C$ que es su grado habitual como anillo de polinomios; de este modo, el $\varepsilon -$ *grado* de x_i es 1 para toda las variables del anillo de Cox.

Definición: Diremos que un automorfismo τ del anillo de Cox es $\varepsilon -$ *graduado* cuando $g_\varepsilon(x^a) = g_\varepsilon(\tau(x^a))$

Consideremos ahora el morfismo

$$\begin{array}{cccc} (gr, \varepsilon): & \mathbb{Z}^r & \to & A_{n-1} \oplus \mathbb{Z} \\ & (n', \bar{n}) & \rightsquigarrow & [n' + \bar{n}v'(\bar{m})], \varepsilon(n', \bar{n}) \end{array}$$

equivalentemente

$$\begin{array}{rccc} (gr,\varepsilon): & \mathbb{Z}^s \oplus C & \to & A_{n-1} \oplus \mathbb{Z} \\ & (n,\alpha_C) & \rightsquigarrow & [n], \varepsilon(n+v(\alpha_C)) \end{array}$$

entonces A_C es un álgebra $(gr,\varepsilon)-$graduada con $grad(x^{n,\alpha_C}) = [n], \varepsilon(n+v(\alpha_C))$

Notaciones: Denotaremos $Aut_{(g,\varepsilon)}A_C$ al subgrupo de Aut_gA_C de los automorfismos $\varepsilon-$graduados. Veremos que Aut_gA_C tiene una parte reductiva que es de hecho el subgrupo $Aut_{(g,\varepsilon)}A_C$.

Denotaremos $A_C(x_i)$ a los elementos de A_C de grado igual al grado de x_i con la $gr-$graduación.

Denotaremos $A_C^\varepsilon(x_i)$ a los elementos de A_C de grado igual al grado de x_i con la $(gr,\varepsilon)-$graduación.

Como en capítulos anteriores, $S(v_l)$ son las raíces de la variedad tórica X en M tales que $v_l = -1$.

Definición: Diremos que $r \in S(v_i)$ es una raíz parejable respecto v_i, v_j cuando $v_i(r) = -1$, $v_j(r) = 1$ y $v_l(r) = 0 \ \forall \ l \neq i,j$ y la denotaremos $r = \alpha_{ij}$; en tal caso diremos que v_i y v_j son de la misma clase y lo expresaremos con $[v_i] = [v_j]$ (ó también $[x_i] = [x_j]$). El conjunto de los representantes de la clase de v_i lo denotaremos F_{v_i} (ó también F_{x_i}.) Esta relación es de equivalencia si se considera $r = \alpha_{ii} = 0$ como *raíz parejable trivial*, para garantizar la propiedad reflexiva. La transitiva se cumple porque $\alpha_{ij} + \alpha_{jl} = \alpha_{il}$. Denotaremos $S^*(v_i)$ al subconjunto de las raíces no parejables. Obviamente en caso resoluble $S(v_i) = S^*(v_i)$ $\forall i$.

De la definición se deduce que las raíces parejables son aquellas raíces r en las que $\varepsilon(v(r)) = 0$ mientras que en las no parejables $\varepsilon(v(r)) \geq 1$.

Cuando hablemos de grado ó graduación en A_C nos referiremos siempre sólo a su $gr-$graduación.

Proposición 7.1. *Sean $x_i = x^{(g_i,0)}$ y $x_{s+j} = x^{(N^j,-m_{s+j})}$ las variables del anillo de Cox graduado.*

1. *Todo monomio de $A_C(x_{s+j})$ es, salvo escalares, $x^{\left(N^j+v'(r_B),r_C-m_{s+j}\right)}$ donde $r = r_B + r_C$ o bien es cero obteniendo la propia x_{s+j} o bien es una raíz $r \in S(v_{s+j})$. En el caso de que r sea parejable respecto v_{s+j}, v_l el monomio $x^{\left(N^j+v'(r_B),y_C=r_C-m_{s+j}\right)}$ será la variable x_l cuyo $\varepsilon-$grado es uno y en el caso de que r sea no parejable el monomio $x^{\left(N^j+v'(r_B),y_C=r_C-m_{s+j}\right)}$ será el producto $\prod_{i\neq j} x_i^{v_i(r)}$ cuyo $\varepsilon-$grado es > 1*

2. *Todo monomio de $A_C(x_i)$ es, salvo escalares, $x^{(g_i+v'(r_B),r_C)}$ donde $r = r_B + r_C$ ó bien es cero obteniendo la propia x_i o bien es una raíz parejable de $S(v_i)$*

3. *$\forall\ l = 1, \ldots, r$ se cumple $A^{\varepsilon}_C(x_l) = \{x_i : [x_i] = [x_l]\} = F_{x_l}$*

4. *Si denotamos $x = x_1, \ldots, x_r$ las variables de A_C, entonces para todo $a \in \mathbb{Z}^r$ la imagen de x^a por un automorfismo graduado de A_C es el producto de x^a por una suma de monomios, salvo constantes, del tipo $x^{v(c.r)}$ donde $c \in \mathbb{N}$ y r son las raíces*

Demostración:

Sabemos ya que todo monomio en $A_C(x_{s+j})$ es, con la notación simplificada, $(N^j + v'(x_B), y_C)$ siendo $y_C = -p\bar{m}$ y $p = (p_1, \ldots, p_k)$ con $p_i \in \mathbb{Z}^+$ tales que $N^j + v'(x_B) + v'(y_C) \geq 0$. Bastará ver que $r = x_B + y_C + m_{s+j}$ es raíz respecto v_{s+j}:

$$v'(r) = v'(m_{s+j}) + v'(x_B) + v'(y_C) = N^j + v'(x_B) + v'(y_C) \geq 0 \text{ por hipótesis.}$$

Además,

$$\begin{aligned} v_{s+i}(r) = v_{s+i}(y_C) &= p_i \geq 0 \\ v_{s+j}(r) &= p_j - 1 \geq -1 \end{aligned}$$

y como estamos en el caso semicompleto, sólo hay dos opciones; la primera es $p_j = 1$, $p_i = 0$, $v'(r) = 0$ en cuyo caso $r = 0$ y por tanto $x_B = 0$ y $y_C = -m_{s+j}$ de donde $(N^j + v'(x_B), y_C) = (N^j, -m_{s+j}) = x_{s+j}$. La otra opción es $p_j = 0$ y $v_{s+j}(r) = -1$ con lo que r es raíz no nula perteneciente a $S(v_{s+j})$. El monomio obtenido en tal caso y en términos de las variables $x_1, \ldots, x_r$ es

$$x^{\left(N^j + v'(y_B), y_C\right)} = x^{v(r)}.x_{s+j}$$

que es producto de las variables $x_1, \ldots, \hat{x_{s+j}}, \ldots, x_r$ y la potencia de x_i es $v_i(r)$ y por tanto si r es parejable respecto v_{s+j}, v_l entonces $v(r) = (0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ con -1 en lugar $(s+j)$ y 1 en lugar l de lo que se tiene que $x^{v(r)}.x_{s+j} = x_l$ y si r no es parejable $\Rightarrow v(r) = (p_1, \ldots, p_{s+j-1}, -1, p_{s+j+1}, \ldots, p_r)$ con la suma de los coedficientes $\gneq 1$.

En cuanto al segundo enunciado, sabemos que los monomios de $A_C(x_i)$ son $x^{(g_i+v'(\beta),y_C)}$ de modo que $y_c = -p\bar{m}$, $g_i + v'(\beta) + v'(y_c) \geq 0$ y $\bar{v}(\beta + y_C) = \bar{v}(y_C) = P \geq 0 \Rightarrow v_l(\beta + y_C) \geq 0\ \forall\ l \neq i$ luego en el caso semicompleto o bien $\beta + y_C = 0$ obteniendo la

propia x_i o bien $v_i(\beta + y_C) \leq 0$ en cuyo caso como $1 + v_i(\beta + y_C) \geq 0 \Rightarrow v_i(\beta + y_C) = -1$ con lo que $\beta + y_C \in S(v_i)$ es raíz parejable. El tercero se deduce de las anteriores y de la propia definición.
El último se deduce de las anteriores, ya que si τ es un automorfismo graduado se ha visto que $\tau(x_i)$ es suma de monomios del tipo $\lambda.x_i.x^{v(r)}$ y se concluye porque τ es morfismo de álgebras.

$\square$

7.1. Representación ordenada de las raíces

Definiciones: Diremos que una raíz $r \in S(v_i)$ es *semiparejable* respecto (v_i, v_j) cuando se cumple:

$$v_i(r) = -1 \qquad v_j(r) = p \geq 1 \qquad v_l(r) = 0 \ \forall \ l \neq i, j$$

Lo denotaremos con la expresión $r/(v_i, v_j)$ y el caso parejable se considerará un caso particular del semiparejable cuando $p = 1$.
En caso semiparejable se tendrá entonces $x^{v(r)}.x_i = x_j^p$.
Denotaremos $\Pi(x_i)$ ó $\Pi(v_i)$ al subconjunto de $A_C(x_i)$ de los monomios $\prod_{l \neq i} x_l^{p_l}$ tales que $\varepsilon(p) = \sum_l p_l > 1$. De la proposición 7.1 se deduce

$$\Pi(x_l) = \left\{ x^{v(r_l)}.x_l \ : \ r_l \in S^*(v_l) \right\}$$

que es nulo para $l = 1, \ldots, s$.
Siendo F_{x_i} al conjunto de las variables del anillo de Cox que son de la misma clase que x_i, de la proposición 7.1 se deduce:

$$\begin{array}{rclcl} A_C(x_l) & = & A_C^{\varepsilon}(x_l) & = & K.\{[x_l]\} \ \forall \ l = 1, \ldots, s \\ A_C(x_{s+j}) & = & K.F_{x_{s+j}} \oplus \langle \Pi(x_{s+j}) \rangle_K & = & A_C^{\varepsilon}(x_) \oplus \langle \Pi(x_{s+j}) \rangle_K \end{array} \tag{42}$$

y en caso de no existir raíces parejables será

$$A_C(x_l) = K.x_l \ \forall \ l = 1, \ldots, s \qquad A_C(x_{s+j}) = K.x_{s+j} \oplus \langle \Pi(x_{s+j}) \rangle_K$$

Endomorfismos graduados de A_C: Denotaremos $End_g A_C$ al $K-$espacio vectorial de los endomorfismos $g-$graduados de A_C. Por definición, la suma en $End_g(A_C)$ se define de modo que para f, g endomorfismos graduados, $(f + g)(x_i) = f(x_i) + g(x_i)$ y $(f + g)(x.y) = (f + g)(x).(f + g)(y)$.

Para cada raíz $r_j \in S(v_{s+j})$ sea el endomorfismo graduado $n_{r_j} \in End_g A_C$:

$$n_{r_j}(x_i) = 0 \ \forall \ i \neq s+j \qquad n_{r_j}(x_{s+j}) = x^{v(r_j)}.x_{s+j}$$

Como n_r es morfismo de anillos, si r no es parejable entonces valora en $\Pi(x_i)$ y por tanto $n_r \in \oplus_{i=1}^r Hom_K\left(A_C(x_i), \Pi(x_i)\right)$. Para cada pareja $r_i \in S(v_{s+i})$ y v_{s+j} sea la función

$$\delta(r_i, v_{s+j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } r_i/(v_{s+i}, v_{s+j}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sea para $r_i \in S(v_{s+i})$ y $r_j \in S(v_{s+j})$ el elemento de M : $\alpha(r_i, r_j) = r_i + v_{s+j}(r_i).r_j$. Nótese que por estar en el caso completo, $\alpha(r_i, r_j) \in S(v_{s+i}) \cup \{0\}$ y es cero si y solo si r_i es parejable respecto v_{s+i} y v_{s+j}, en cuyo caso $r_j = -r_i$.

Proposición 7.2. *Si $r_i \in S(v_{s+i})$ y $r_j \in S(v_{s+j})$ entonces*

$$n_{r_j} \circ n_{r_i} = \delta(r_i, v_{s+j}).n_{\alpha(r_i, r_j)}$$

Demostración:
Hay que probar la igualdad sobre cada variable. Es obvio que ambas expresiones son nulas sobre $x_l \ \forall \ l \neq s+i$. Veamos sobre x_{s+i} :

$$(n_{r_j} \circ n_{r_i})(x_{s+i}) = n_{r_j}(x^{v(r_i)}).x_{s+i} \neq 0 \Leftrightarrow x^{v(r_i)}.x_{s+i} = x_{s+j}^p \Leftrightarrow r/(v_{s+i}, v_{s+j})$$

con $p = v_j(r_i)$ es decir es no nulo si y solo si $\delta(r_i, v_{s+j}) = 1$ en cuyo caso tendremos

$$\begin{array}{rcl} n_{r_j}(x^{v(r_i)}.x_{s+i}) = n_{r_j}(x_j^{v_{s+j}(r_i)}) & = & n_{r_j}(x_j)^{v_{s+j}(r_i)} = \\ = x^{v(r_j).v_{s+j}(r_i)}.x_{s+j}^{v_{s+j}(r_i)} = x^{v(r_i + v_{s+j}(r_i).r_j)}.x_{s+i} & = & n_{\alpha(r_i, r_j)}(x_{s+i}) \end{array}$$

□

De capítulos anteriores conocemos las derivaciones de la variedad tórica X que en caso semicompleto es

$$Der_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K \oplus \bigoplus_{j=1}^{K} \mathcal{D}(v_{s+j})$$

de modo que toda derivación de $Der_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)/M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K$ es:

$$D = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{r_j \in S(v_{s+j})} \lambda_{r_j}.x^{r_j} D_{v_{s+j}} \right)$$

El conjunto de todas las raíces es $\mathcal{R} = S(v_1)\coprod \cdots \coprod S(v_r)$. Por simplicidad en la notación escribiremos $D = \sum_r \lambda_r.x^r D_{v_r}$ considerando que $v_r = v_j$ si $r \in S(v_j)$. Para cada raíz r se ha definido el morfismo n_r y ahora para cada derivación D se define el endomorfismo graduado n_D tal que:

$$n_D(x_{s+j}) = \sum_{r\in S(v_{s+j})} \lambda_r.x^{v(r_j)} x_{s+j}$$

$$n_D(x.y) = n_D(x).n_D(y)$$

Obviamente $n_r = n_{x^r D_{v_r}}$. Es importante observar que si $f = n_D$ y $g = n_E$ con D, E derivaciones, entonces $f + g = n_{D+E}$ y por tanto el conjunto

$$\{n_D :\ D \in Der_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)\}$$

es un subespacio vectorial de $End_g A_C$.
Los coeficientes de $n_D(x_j)$ son los coeficientes de las derivaciones $D \cap D(v_j)$ de donde se deduce que $n_D = n_{D'} \Leftrightarrow D = D'$.
Denotaremos $Der^u_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ al subespacio vectorial de $Der_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ de las derivaciones dadas por raíces no parejables y denotaremos $Der^s_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ al subespacio vectorial de $Der_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ de las derivaciones asociadas a las raíces parejables o semisimples de modo que, abreviando la notación,

$$Der_K(\mathcal{O}_X) = M^* \otimes_{\mathbb{Z}} K + Der^u_K(\mathcal{O}_X) + Der^s_K(\mathcal{O}_X) \tag{43}$$

y como en la página 80,

$$Der^{\mathcal{R}}_K(\mathcal{O}_X) = Der^u_K(\mathcal{O}_X) + Der^s_K(\mathcal{O}_X) \tag{44}$$

Por tanto,

$$D \in Der^u_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \Leftrightarrow D = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{r_j\in S^*(v_{s+j})} \lambda_{r_j}.x^{r_j} D_{v_{s+j}} \right)$$

Para tales derivaciones D se tiene

$$n_D \in \bigoplus_{i=1}^{r} Hom\,(Kx_i, \Pi(x_i)) \simeq \bigoplus_{j=1}^{k} \Pi(x_{s+j})$$

y evidentemente el conjunto

$$\mathcal{N} = \langle n_D :\ D \in Der^u_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)\rangle_K \subset End_g A_C$$

donde $n_0 = 0$ y $n_{D+D'} = n_D + n_{D'}$ es un subespacio vectorial de los endomorfismos graduados de A_C tal que $(n_{D+D'})(x_i) = n_D(x_i) + n_{D'}(x_i)$, es decir, $n_{D+D'} = n_D + n'_D$.

Como todo endomorfismo graduado de A_C está determinado por la imagen de las variables $x_i \Rightarrow \mathcal{N} \subset End_g(A_C)$ son los endomorfismos $\phi \in End_g(A_C)$ tales que $\phi(Kx_i) \subset \Pi(x_i)\ \forall i$ y como $\varphi(\Pi(x_i)) \subset \Pi(x_i)\ \forall\, \varphi \in End_g(A_C)$ se deduce que $(\mathcal{N}, +)$ es un subespacio de $(End_g(A_C), +)$ cerrado respecto la composición. Vamos a calcular la derivación de $Der^u_K(\mathcal{O}_X)$ asociada a $n_{D_1} \circ n_{D_2}$ a la que denotaremos $D_1 \diamond D_2$ de modo que $n_{D_1} \circ n_{D_2} = n_{D_1 \diamond D_2}$ y $\mathcal{N}$ será un semigrupo. Para ello veremos que existe un orden en el conjunto $\mathcal{R}$ de todas las raíces, lo que nos permitirá encontrar una fórmula más simplificada de $n_{D_1} \circ n_{D_2}$ y deducir que $(\mathcal{N}, \circ)$ es un semigrupo nilpotente.

Definición de Orden:

Diremos que $v_j < v_i$ cuando exista algúna raíz no parejable $r_j \in S^*(v_j)$ tal que $v_i(r_j) > 0$. Necesariamente $j > s$.

En caso de que $[v_i] = [v_j]$ es decir, existe una raíz parejable respecto v_i, v_j, tal raíz es necesariamente única y opuesta de la raíz parejable respecto v_j, v_i. Entonces las variables x_i, x_j tendrán el mismo grado y al menos uno de los índices i, j debe ser mayor que s.

Proposición 7.3. *La relación definida establece un orden parcial en el conjunto* $\{v_1, \ldots, v_r\}$ *es decir,*

1. *Si* $v_j < v_i \Rightarrow v_j(S(v_i)) = 0$ *y por tanto* $v_i \not< v_j$
2. *Si* $v_l < v_j < v_i \Rightarrow v_l < v_i$

Demostración:

Sea por hipótesis $r_j \in S^*(v_j) : v_i(r_j) > 0$ y sea $r_i \in S(v_i)$. Sea $\alpha = r_j + v_i(r_j) r_i$. Como $v_i(\alpha) = 0$ y $v_l(\alpha) \geq 0\ \forall\, l \neq i, j$ y $v_j(\alpha) \geq -1 \Rightarrow v_j(\alpha) = -1$ o bien $\alpha = 0$ ya que en el caso completo si $v(\alpha) \geq 0$ entonces $\alpha = 0$. Si $\alpha = 0 \Rightarrow r_j = -r_i$ sería raíz parejable, contra hipótesis, luego $v_j(\alpha) = -1$ y $v_j(r_i) = 0$ con lo que se concluye el primer enunciado. Para el segundo, sean $r_l \in S(v_l)$ y $r_j \in S(v_j)$ tales que $v_j(r_l) > 0$ y $v_i(r_j) > 0$ y es inmediato comprobar que $\alpha = r_l + v_j(r_l) r_j \in S^*(v_l)$ es una raíz que cumple el enunciado porque $v_i(\alpha) = v_i(r_l) + v_j(r_l).v_i(r_j) > 0$ con lo que se concluye.

$\square$

Teorema 7.4. *Siendo $M = B \oplus C$ la descomposición fundamental ya definida se cumple:*

1. $v_j < v_i \Leftrightarrow \exists\ \beta \in B : \alpha = \beta + m_j - m_i \in S^*(v_j)$ *con* $m_i = 0\ \forall\ i \leq s$

2. *Si* $[v_j] = [v_i]$ *entoces se cumple:*

   - *Si* $\alpha_{ij} \in S(v_i)$ *es la raíz parejable respecto* $v_i, v_j \Rightarrow S^*(v_i) = \alpha_{ij} + S^*(v_j)$
   - $v_i(S^*(v_j)) = 0$ *y* $v_j(S^*(v_i)) = 0$ *es decir,* $v_j \not< v_i$ *y* $v_i \not< v_j$
   - $v_j < v_l \Leftrightarrow v_i < v_l\ \forall\ 1 \leq l \leq r\ l \neq i\ l \neq j$
   - $v_l < v_i \Leftrightarrow v_l < v_j\ \forall\ 1 \leq l \leq r\ l \neq i\ l \neq j$
   - $\Pi(x_i) = \Pi(x_j)$
   - *Si* $i \leq s$ *y* $j = s + n_j > s \Rightarrow m_j$ *es la raíz parejable respecto* v_j, v_i
   - *Si* $i = s + n_i$ *y* $j = s + n_j \Rightarrow$ *se pueden elegir* m_{s+n_i} *y* m_{s+n_j} *tales que* $m_{s+n_i} - m_{s+n_j}$ *sea la raí z parejable respecto* v_i, v_j
   - *Todas la raíces parejables están en* C *y son del tipo* $m_l - m_j$ *para* $l,\ j > s$ *tales que* $[v_l] = [v_j]$ *y del tipo* $m_{l>s}$ *tales que* $[v_l] = [v_i]$ *y* $i \leq s$

Demostración:

Para la primera afirmación, la implicación $\Leftarrow$ es obvia. Para la otra, sea $r_j \in S^*(v_j)$ tal que $v_i(r_j) > 0$ y su descomposición en $M = B \oplus C$ $r_j = \beta + r_{j_C} \in S^*(v_j)$. Como $\forall\ i > s$ $v_i(r_{j_C}) = v_i(r_j) > 0 \Rightarrow r_{j_C} = m_j - \sum_{l \neq j} p_l.m_l$ tal que $p_i > 0 \Rightarrow$

$$0 \leq v'(\beta + r_{j_C}) = v'(\beta) + N^j - \sum p_l.N^l \leq v'(\beta) + N^j - p_i.N^i \leq v'(\beta) + N^j - N^i$$

donde alguna desigualdad es stricta, ya que r_j no es parejable. Por tanto $\alpha = \beta + m_j - m_i \in S^*(v_j)$ con lo que se concluye. En caso de $i \leq s$ es trivial que $\beta + m_j \in S^*(v_j)$.

Para la segunda afirmación, sea por hipótesis $\alpha_{ij} \in S(v_i)$ la raíz parejable respecto v_i, v_j y comprobemos que $r_j \in S^*(v_j) \Leftrightarrow r_i = \alpha_{ij} + r_j \in S^*(v_i)$. Si $r_j \in S^*(v_j)$ entonces $\forall\ l \neq i, j$ $v_l(r_i) = v_l(r_j) \geq 0$ y $v_j(r_i) = 1 - 1 = 0$ y $v_i(r_i) = -1 + v_i(r_j) \geq -1$ y como estamos en el caso completo hay dos opciones, o bien $r_i = 0$ con lo cual $r_j = -\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ que es parejable contradiciendo la hipótesis $r_j \in S^*(v_j)$, o bien $v_i(r_i) = -1$ y por tanto $r_i \in S^*(v_i)$ habiendo demostrado una implicación. La otra se deduce igual porque $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$. Además para $r_i = \alpha_{ij} + r_j \in S^*(v_i)$ es claro que $x^{v(r_i)}.x_i = x^{v(r_j)}.x_j$ con lo que se demuestra el primer punto. El segundo punto se deduce diréctamente del primero.

Para el tercer punto, $\forall\ r_j \in S^*(v_j)$ se tiene la igualdad $v_l(r_j) = v_l(\alpha_{ij} + r_j)$ y por tanto $v_l(r_j) > 0 \Rightarrow v_l(\alpha_{ij} + r_j) > 0$ y se concluye porque $S^*(v_i) = \alpha_{ij} + S^*(v_j)$. Para el cuarto punto, si $r_l \in S^*(v_l)$ es tal que $v_i(r_l) > 0$ entonces $(\alpha_{ij} + r_l) \in S^*(v_l)$ y $v_j\left((\alpha_{ij} + r_l)\right) = 1 + v_j(r_l) > 0$ con lo que se acaba. EL quinto punto se deduce del primero y del segundo teniendo en cuenta que $v(\alpha_{ij}) = 0\ \forall\ v \neq i, j$.
Para el punto sexto, como $S^*(v_i) = \emptyset$ entonces por el punto primero $S^*(v_j) = \emptyset$ luego sólo tiene parejables y necesariamente $H_j = H_i + Div(x^{-m_j})$.
El punto siete se deduce del quinto ya que fijado m_{s+n_i} si α es la parejable respecto v_i, v_j $\Rightarrow$ tomamos $m_{s+n_j} = m_{s+n_i} + \alpha$.
El último punto se deduce directamente de los anteriores

$\square$

Observación 12. *Este teorema muestra que el comportamiento de todos los representantes de $[v]$ es el mismo respecto al orden y respecto a los valores que sobre sus raices toman las $u \in \Delta_1$, lo que permite dar la siguiente definición en la que el orden dado es ampliable a los bloques $[v_i]$ pues no depende del representante elegido:*

Definición: Diremos que $[v_i] < [v_j]$ cuando $v_i < v_j$. Si $i \leq s$ entonces $S^*(v_i) = \emptyset$ y por tanto $[v_i] \nless [v_j]\ \forall\ 1 \leq j \leq r$ y en este sentido diremos que $[v_1], \ldots, [v_s]$ son maximales en Δ_1.

En base al orden definido, reordenamos los índices $s+1, \ldots, s+k$ de modo que la secuencia $v_{s+1}, \ldots, v_{s+k}$ esté ordenado de menor a mayor en el sentido de que $v_{s+i} \nless v_{s+j}$ $\forall\ i > j$ y por tanto $v_{s+j}\left(S^*(v_{s+i})\right) = 0$ de modo que se tiene:

$$\forall r_j \in S^*(v_{s+j}) \qquad {r_j}_C = m_{s+j} - \sum_{i>j} p_i.m_{s+i} \text{ con } p_i \in \mathbb{N} \tag{45}$$

La forma de reordenar los índices $s+1, \ldots, s+k$ tal que $v_{s+i} \nless v_{s+j}\ \forall\ i > j$, no es única ni es especialmente relevante; veremos de hecho varias maneras de hacerlo. Si $S^*(v) = \emptyset$ $\Rightarrow [v] = [v_{i \leq s}] \Rightarrow [v]$ también es maximal por ese motivo tales v deben estar al final de la secuencia $v_{s+1}, \ldots, v_{s+k}$. Para dar un **orden total en el conjunto** $\mathcal{R}^*$ de las raíces no parejables, en primer lugar damos un orden arbitrario a $v_1, \ldots, v_s$ y una vez dada una secuencia ordenada $s+1, \ldots, s+k$ tal que $v_{s+i} \nless v_{s+j}\ \forall\ i > j$, (veremos que existen) diremos simplemente que $r < r'$ cuando $r \in S^*(v_i)$ y $r' \in S^*(v_{j>i})$ lo que eqivale al respectivo orden de los números enteros de dígitos $\bar{v}(r), v'(r)$ y $\bar{v}(r'), v(r')$ es decir

$$v_{s+1}(r) \ldots v_{s+k}(r) v_1(r) \ldots v_s(r) < v_{s+1}(r') \ldots v_{s+k}(r') v_1(r') \ldots v_s(r')$$

y ahora sólo resta definir un orden vertical en cada conjunto $S^*(v_{s+j})$, que sí va a ser relevante porque permitirá entender los conjuntos $\Pi(v_{s+j})$ definido al inicio de esta sección como bases.

El orden en $S^*(v_{s+j})$ está basado en las coordenadas de cada raíz en C y en caso de empate dependerá de v' de modo que se sigue el criterio anterior: Para cada $j < i \in \{1, \dots, K\}$ M_i^j denota a las raíces de $S^*(v_{s+j})$ cuya primera coordenada negativa es la $i-$ésima es decir

$$M_i^j = \{r \in S^*(v_{s+j}) : \ r_C = m_{s+j} - \sum_{l=i}^{k} p_l . m_{s+l} \text{ con } p_i > 0\}$$

Luego $S^*(v_{s+j}) = \coprod_{i=j+1}^{k} M_i^j \coprod (\{B \oplus m_{s+j}\} \cap S^*(v_{s+j}))$ y dentro de este conjunto se define el siguiente orden: A cada $r_C = m_{s+j} - \sum_{i>j} p_i . m_{s+i}$ le asignamos el número entero de dígitos $\bar{v}(r), v'(r)$ que es

$$0 \dots 0 \ -1 \, p_{j+1} \dots p_k \, v_1(r) \dots v_s(r)$$

de modo que si $p_{j+1} \neq 0$ entonces

$$0 \ -1 \, p_{j+1} \dots p_k \dots < 0 \ -1 \, 0 \dots 0 \, q_l \dots q_k \dots \qquad \text{con } l > j+1 \tag{46}$$

y este es el orden asignado a las respectivas raíces asociadas, por tanto si $l > i \geq j+1$ y $r_i^j \in M_i^j$, $r_l^j \in M_l^j$ entonces $r_i^j < r_l^j$. Los elementos máximos de $S^*(v_{s+j})$ son los de $\{B \oplus m_{s+j}\} \cap S^*(v_{s+j})$ a los que denotaremos M_{k+1}^j (que sólo es vacío cuando $[v_{s+j}] = [v_i]$ para un $i \leq s$ y en tal caso toda la columna será vacía) y el orden de sus raíces depende sólo del valor en ellas de v'. Podemos entonces escribir $M_{j+1}^j < M_{j+2}^j < \cdots < M_{k+1}^j$. Nótese que $M_i^j \neq \emptyset \Leftrightarrow v_{s+j} < v_{s+i}$. Podemos representar $\mathcal{R}^*$ con el orden definido, matricialmente:

$$\mathcal{R}^* \equiv \begin{array}{ccccc} M_2^1 & \emptyset & \dots & \emptyset & \emptyset \\ \vdots & M_3^2 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_K^1 & M_K^2 & \dots & M_K^{K-1} & \emptyset \\ M_{k+1}^1 & M_{k+1}^2 & \dots & M_{k+1}^{K-1} & M_{k+1}^k \end{array}$$

Observación 13. *Cada columna de la matriz representa el conjunto* $S^*(v_{s+j})$ *y el orden vertical es estrictamente creciente. Horizontálmente el orden no es único ya que* v_{s+j} *puede no estar relacionado con* v_{s+i}*. Del teorema anterior se deduce que las columnas correspondientes a los conjuntos* $\{[v]\}$ *son consecutivas y todas ellas son vacías en las mismas filas.*

Cada derivación $D \in Der_K^u(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ y por tanto cada elemento de $\mathcal{N}$ lo escribiremos

$$\sum_{i>j\in\{1,\dots,k\}} \left(\sum_{r\in M_i^j} \mu_i^j(r).x^r D_{v_{s+j}} \right)$$

que matricialmente es la matriz triangular:

$$\mathcal{D} = \begin{matrix} \mu_2^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \mu_3^2 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_K^1 & \mu_K^2 & \dots & \mu_K^{K-1} & 0 \\ \mu_{k+1}^1 & \mu_{k+1}^2 & \dots & \mu_{k+1}^{K-1} & \mu_{k+1}^k \end{matrix} \tag{47}$$

que es una matriz en $\left((K^{d_2^1} \times \cdots \times K^{d_{k+1}^1}) \times \cdots \times (K^{d_{k+1}^k})\right)$ siendo d_i^j el número de elementos de M_i^j y μ_i^j un vector de $K^{d_i^j}$ pues el orden de sus coordenadas ha quedado definido. El número de raíces en $S^*(v_{s+j})$ será d_j de modo que $d_j = d_{j+1}^j + \cdots + d_{k+1}^j$. Para calcular $D_1 \diamond D_2$ tal que $n_{D_1} \circ n_{D_2} = n_{D_1 \diamond D_2}$, vamos a utilizar las siguientes **notaciones** que simplifican la expresión de los resultados. Para cada $l \in \{1, \dots, k\}$ denotaremos:

$$\begin{matrix} \lambda(l) & = & \lambda_1^l, \dots, \lambda_{d_l}^l \\ \lambda(l) & = & 0 \ \forall \ d_l = 0 \\ \lambda(l)x^{r^l} D_{v_{s+l}} & = & \lambda_1^l x^{r_1^l} D_{v_{s+l}} + \cdots + \lambda_{d_l}^l x^{r_{d_l}^l} D_{v_{s+l}} \\ \lambda(l)^{c^l} & = & (\lambda_1^l)^{c_1^l}. \dots .(\lambda_{d_l}^l)^{c_{d_l}^l} \\ c^l.r^l & = & c_1^l.r_1^l + \cdots + c_{d_l}^l.r_{d_l}^l \text{ y } 0^0 = 1 \\ c^l! & = & c_1^l!.\dots.c_{d_l}^l! \text{ y } \mid c^l \mid = c_1^l + \cdots + c_{d_l}^l \text{ con } 0! = 1 \\ r_i^l \in S^*(v_{s+l}) & & \end{matrix}$$

Teorema 7.5. ***(Fórmula general)*** *Sean dos derivaciones*

$$D_1 = \sum_{l=1}^{k} \lambda(l) x^{r^l} D_{v_{s+l}} \ \text{ y } D_2 = \sum_{i>j\in\{1,\dots,k\}} \left(\sum_{r\in M_i^j} \mu_i^j(r).x^r D_{v_{s+j}} \right)$$

con D_1 y $D_2 \in Der_K^u(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$.

Entonces la derivación $D_1 \diamond D_2$ tal que $n_{D_1} \circ n_{D_2} = n_{D_1 \diamond D_2}$ es la siguiente derivación perteneciente a $Der_K^u(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$:

$$D_1 \diamond D_2$$

$$=$$

$$0+\sum_{\substack{i>j\in\{1,\dots,k\}\\ r\in M_i^j\bigcap C'}} \mu_i{}^j(r).\prod_{l=i}^k v_{s+l}(r)!.\left(\sum_{\substack{|c^i|=v_{s+i}(r)\dots\\ \dots|c^k|=v_{s+k}(r)}}\left(\prod_{l=i}^k \frac{\lambda(l)^{c^l}}{c^l!}\right).x^{r+\sum_{l=i}^k c^l.r^l}D_{v_{s+j}}\right)$$

Demostración:
En primer lugar es inmediato comprobar que $n_D\circ(n_r+n_{r'}) = n_D\circ n_r+n_D\circ n_{r'}$, basta aplicar sobre las variables $x_{s+1},\dots,x_{s+k}$ porque en $x_1,\dots,x_s$ ambas son nulas. Luego vamos a demostrar la fórmula suponiendo $D_2=\mu(r).x^r D_{v_{s+j}}$ con $r\in M_i^j$. Además podemos suponer que $v'(r)=0$ porque en caso contrario la derivación de la fórmula es nula y también lo es $n_{D_1}\circ n_r$ porque es cero en $x_i\ \forall\ i\neq s+j$ y en x_{s+j} se tiene $n_{D_1}\circ n_r(x_{s+j})=n_{D_1}(x^{v'(r)}.x^{\bar v(r)}.x_{s+j})$ que es cero porque en tal producto aparece alguna variable x_i para $i=1,\dots,s$ y $n_{D_1}(x_i)=0$. Por tanto supondremos que $r\in C'$ siendo

$$C'=\{\alpha\in M:\ v'(\alpha)=0\}$$

Por otro lado es obvio que si $r\in S(v_{s+j})$ entonces $\alpha=r+\sum_{l=i}^k c^l.r^l\in S(v_{s+j})$ porque $v_i'(\alpha)\geq 0$, $v_{s+l}(\alpha)=0\ \forall\ l<j$, $v_{s+j}(\alpha)=v_{s+j}(r)=-1$ y por último $\forall\ l>j$ se tiene que

$$v_{s+l}(\alpha)=v_{s+l}(r)+p-\mid c^l\mid\geq v_{s+l}(r)-\mid c^l\mid$$

que es ≥ 0 por hipótesis. Por tanto $n_{D_1}\circ n_{D_2}$ y el n asociado a las derivación de la fórmula se anulan en todas las variables salvo x_{s+j}; veamos cuanto valen ambas expresiones en x_{s+j} :

$$n_{D_1}\circ n_{D_2}(x_{s+j})=n_{D_1}\left(\mu(r).x^{v(r)}.x_{s+j}\right)\stackrel{\dagger}{=}n_{D_1}\left(\mu(r).x_{s+i}^{v_{s+i}(r)}.\dots.x_{s+k}^{v_{s+k}(r)}\right)=$$

la última igualdad se debe a que $v'(r)=0$ y a que si $r\in M_i^j\Rightarrow v_l(r)=0\ \forall\ j\neq l<i$

$$=\mu(r).\left(n_{D_1}(x_{s+i})\right)^{v_{s+i}(r)}\dots.\left(n_{D_1}(x_{s+k})\right)^{v_{s+k}(r)}$$

Basta pues calcular $\left(n_{D_1}(x_{s+l})\right)^{v_{s+l}(r)}$ para $l\geq i>j$:

$$\left(n_{D_1}(x_{s+l})\right)^{v_{s+l}(r)}=\left(\lambda_1^l x^{v(r_1^l)}.x_{s+l}+\dots+\lambda_{d_l}^l x^{v(r_{d_l}^l)}.x_{s+l}\right)^{v_{s+l}(r)}=$$

$$=\left(\lambda_1^l x^{v(r_1^l)}+\dots+\lambda_{d_l}^l x^{v(r_{d_l}^l)}\right)^{v_{s+l}(r)}.x_{s+l}^{v_{s+l}(r)}=$$

$$=\sum_{|c^l|=v_{s+l}(r)}\lambda(l)^{c^l}.x^{v(c^l.r^l)}.x_{s+l}^{v_{s+l}(r)}.\frac{v_{s+l}(r)!}{c^l!}$$

y para concluir solo resta probar que

$$\prod_{l=i}^{k} x^{v(c^l.r^l)}.x_{s+l}^{v_{s+l}(r)} = x^{v(r+c^l.r^l)}.x_{s+j} \tag{48}$$

es decir hay que ver

$$\sum_{l=i}^{k} v(c^l.r^l) + v_{s+l}(r) = v(r + \sum_{l=i}^{k} c^l.r^l) + (0, \ldots, 0, 1_{s+j}, 0, \ldots, 0)$$

donde $v_{s+l}(r)$ denota $(0, \ldots, v_{s+l}(r), \ldots, 0)$ y como $v = (v', \bar{v})$ hay que ver que

$$\sum_{l=i}^{k} v'(c^l.r^l) + \bar{v}(c^l.r^l) + v_{s+l}(r) =$$

$$= v'(r) + \bar{v}(r) + \sum_{l=i}^{k} v'(c^l.r^l) + \bar{v}(c^l.r^l) + (0, \ldots, 0, 1_{s+j}, 0, \ldots, 0)$$

y como $v'(r) = 0$ hay que ver

$$\sum_{l=i}^{k} v_{s+l}(r) = \bar{v}(r) + (0, \ldots, 0, 1_{s+j}, 0, \ldots, 0)$$

Lo primero es $(0, \ldots, 0, v_{s+i}(r), \ldots, v_{s+k}(r))$ y para lo segundo, como $v_{s+1}(r) = \cdots = v_{s+i-1}(r) = 0$ y $v_{s+j}(r) = -1 \Rightarrow$

$$\bar{v}(r) = (0, \ldots, 0, -1_{s+j}, 0, \ldots, 0, v_{s+i}(r), \ldots, v_{s+k}(r))$$

y por tanto:

$$\bar{v}(r) + (0, \ldots, 0, 1_{s+j}, 0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0, v_{s+i}(r), \ldots, v_{s+k}(r))$$

con lo que se acaba. Por último es claro que las raíces $r + \sum_{l=i}^{k} c^l.r^l$ no son parejables si r no lo es; para ello basta aplicar el morfismo ε definido en la ecuación 41 $\Rightarrow \varepsilon(v(r + \sum_{l=i}^{k} c^l.r^l)) \geq \varepsilon(v(r))$ que es ≥ 1 si y sólo si r es no parejable.

$\square$

Observación 14. *En la demostración del teorema se ha visto que si* $v'(r) \neq 0 \Rightarrow n_D \circ n_r = 0 \ \forall \ D$ *luego si* $C' = \{\alpha \in M : \ v'(\alpha) = 0\}$ *y* D_2 *es una derivación podemos separar sus raíces de modo que*

$$D_2 = \sum_{r' \in C'} \lambda(r').x^{r'} D_{v'_r} + \sum_{r \notin C'} \lambda(r).x^r D_{v_r}$$

$\Rightarrow n_{D_1} \circ n_{D_2} = n_{D_1} \circ n_{\sum_{r \in C'} \lambda(r).x^r D_{v_r}}$ *y por tanto si* $C' \bigcap \mathcal{R} = 0$ *y* $D_1 \in Der^u_K(\mathcal{O}_X)$ *entonces* $n_{D_1} \circ n_{D_2} = 0$ *lo cual no ocurre necesariamente si* D_1 *contiene raíces parejables.*

Es importante observar que la misma demostración vale si D_1 *incluye también las raíces parejables. Por tanto la demostración vale para generalizar la fórmula al caso en que* D_1 *sea cualquier derivación, en cuyo caso la fórmula quedaría con las siguientes modificaciones:*

- *En el producto de la igualdad † habría que incluir* $x^{v'(r)} = v_1(r)$
- *Los índices utilizados en las notaciones previas descritas* $l \in \{1, \ldots, k\}$ *se amplían a* $l \in \{-s, \ldots, 0, 1, \ldots, k\}$ *y por tanto hay que considerar en* D_1 *los coeficientes correspondientes a las derivaciones* $x^r D_{v_{i \leq s}}$ *con* $r \in S(v_i)$
- *Por tanto si* $D_1 = \sum_{l=1}^{r} \lambda(l) x^{r^l} D_{v_l}$*, donde* $\lambda(l) x^{r^l} D_{v_l} = \sum_{i=1}^{d_l} \lambda_i^l x^{r_i^l} D_{v_l}$ *y* $r_i^l \in S(v_l)$*, la fórmula es:*

$$\sum_{\substack{i > j \in \{1,\ldots,k\} \\ r \in M_i^j}} \mu_i^j(r). \prod_{l=1}^{s+k} v_l(r)!. \left(\sum_{\substack{|c^l| = v_l(r) \ y \ |c^{s+j}| = 0 \\ l \in \{1,\ldots,\widehat{s+j},\ldots,r\}}} \left(\prod_{l=1}^{s+k} \frac{\lambda(l)^{c^l}}{c^l!} \right) .x^{r + \sum_{l=i}^{s+k} c^l.r^l} D_{v_{s+j}} \right) \tag{49}$$

considerando $-1! = 1$. Hemos ordenado las raíces según sus componentes en C para $M = B \bigoplus C$. Las raíces que intervienen en $n_{D_1} \circ n_{D_2}$ son $\alpha = r + \sum_{l=i}^{k} c^l.r^l$ y vamos a calcular α_C para ver la relación de orden entre r y α :

Lema 7.6. *Las raíces* $\alpha = r + \sum_{l=i}^{k} c^l.r^l$ *son tales que si* $r \in M_i^j$ *entonces*

$$\alpha \in M_{i+1}^j \coprod \cdots \coprod M_{k+1}^j$$

y por tanto $\alpha > r$

Demostración:

Sea $\alpha = r + \sum_{l=i}^{k} c^l.r^l$ con $\mid c^l \mid = v_{s+l}(r)$. Como sabemos, $\alpha_C = -(v_{s+1}(\alpha) m_{s+1} + \cdots +$

$v_{s+k}(\alpha)m_{s+k})$ y como $r \in M_i^j \Rightarrow v_{s+p}(r) = 0 \ \forall \ p \neq j, \ p < i$ y $v_{s+j}(r) = -1$. Por otro lado $v_{s+p}(r^l) = 0 \ \forall \ p < l \neq i$ luego si $p < i \Rightarrow v_{s+p}(\alpha) = v_{s+p}(r)$ y en particular $v_{s+j}(\alpha) = v_{s+j}(r)$. En definitiva:

$$\text{si } j \neq p < i \Rightarrow v_{s+p}(\alpha) = 0 \text{ y } v_{s+j}(\alpha) = -1$$

y queda por calcular $v_{s+i}(\alpha), \ldots, v_{s+k}(\alpha)$. Para ello, $v_{s+i}(\alpha) = v_{s+i}(r) + c^i.v_{s+i}(r^i) + 0$ y como

$$v_{s+i}(r^i) = (v_{s+i}(r_1^i), \ldots, v_{s+i}(r_{d_i}^i)) = (-1, \ldots, -1)$$

$\Rightarrow$

$$c^i.v_{s+i}(r^i) = -(c_1^i + \cdots + c_{d_i}^i) = -v_{s+i}(r)$$

luego $v_{s+i}(\alpha) = v_{s+i}(r) - v_{s+i}(r) = 0$.

$$\begin{aligned} v_{s+i+1}(\alpha) &= v_{s+i+1}(r) + c^i.v_{s+i+1}(r^i) + c^{i+1}.v_{s+i+1}(r^{i+1}) + 0 = \\ &= v_{s+i+1}(r) + c^i.v_{s+i+1}(r^i) + c^{i+1}.(-1, \ldots, -1_{d_{i+1}}) = \\ &= v_{s+i+1}(r) + c^i.v_{s+i+1}(r^i) - v_{s+i+1}(r) = c^i.v_{s+i+1}(r^i) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$v_{s+k}(\alpha) = c^i.v_{s+k}(r^i) + \cdots + c^{K-1}.v_{s+k}(r^{K-1}) \geq 0$$

con lo cual se tiene:

$$\alpha_C = m_{s+j} - c^i.v_{s+i+1}(r^i)m_{s+i+1} - \cdots - (c^i.v_{s+k}(r^i) + \cdots + c^{k-1}.v_{s+k}(r^{k-1}))m_{s+k}$$

por tanto $\alpha \in M_l^j$ con $l \geq i+1$ y será $l = i+1$ si $c^i > 0$ y $v_{s+i+1}(r^i) > 0$. En todo caso $\alpha > r$ con lo que se concluye.

□

Corolario 7.7. $(\mathcal{N}, \circ)$ *es un semigrupo nilpotente tal que* $\mathcal{N}^k = 0$

Demostración:
Del teorema y lema anterior se deduce que en $\mathcal{N}^{k-1}$ todas las raíces que definen sus derivaciones asociadas están en $M_{k+1}^1 = \{B + m_{s+1}\}$ y como $v'(b + m_{s+1}) \neq 0$ en caso completo, se concluye de la observación anterior que $\mathcal{N}^k = 0$.

□

7.2. Radical del grupo de automorfismos graduados

Sea como antes el subespacio vectorial $\mathcal{N} \subset End_g A_C$ y 1 denota la identidad, (que no es el neutro del espacio vectorial) entonces $1 + n_D \in End_g A_C$ es el endomorfismo en general ya definido:

$$1 + n_D(x_i) = x_i + n_D(x_i) \qquad 1 + n_D(x.y) = 1 + n_D(x)\,.\,1 + n_D(y)$$

Definición: Con la operación anterior, denotaremos $(1 + \mathcal{N},\, +)$ al subespacio vectorial de $End_g A_C$:

$$(1 + \mathcal{N},\, +) = \{1 + n_D :\, d \in Der^u_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)\}$$

Veremos que $1 + \mathcal{N}$ con la composición, es un subgrupo unipotente de $Aut^\circ_g A_C$ que de hecho es su radical unipotente al que denotaremos $(1{+}\mathcal{N},\, \circ)$ ó simplemente $1{+}\mathcal{N}$ cuando no haya confusión. Para ello se define la siguente operacioń en $Der^u_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$:

Definición: Sean las derivaciones

$$D_1 = \sum_{l=1}^{k} \lambda(l) x^{r^l} D_{v_{s+l}} \qquad D_2 = \sum_{i>j\in\{1,\ldots,k\}} \left(\sum_{r\in M_i^j} \mu_i^j(r).x^r D_{v_{s+j}} \right)$$

Entonces $D_1 \bullet D_2$ es la derivación (suponemos $0^0 = 1$)

$$D_1 + \sum_{\substack{i>j\in\{1,\ldots,k\} \\ r\in M_i^j \bigcap D_2}}$$

$$\mu_i^j(r).\prod_{l=i}^{k} v_{s+l}(r)!.\left(\sum_{\substack{|c^i|\le v_{s+i}(r)\ldots \\ \ldots|c^k|\le v_{s+k}(r)}} \left(\prod_{l=i}^{k} \frac{\lambda(l)^{c^l}}{c^l!.(v_{s+l}(r)- \mid c^l \mid)!} \right) .x^{r+\sum_{l=i}^{k} c^l.r^l} D_{v_{s+j}} \right)$$

que está en $Der^u_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ según se demuestra en el final de la demostración del teorema 7.5.

Teorema 7.8. *$D_1 \bullet D_2$ es la derivación tal que se tiene la igualdad de endomorfismos graduados*

$$(1 + n_{D_1}) \circ (1 + n_{D_2}) = 1 + n_{D_1 \bullet D_2}$$

Demostración:

Hay que ver que coinciden en cada variable x_i : Si $i = 1, \ldots, s$ es claro porque ambos automorfismos son la identidad sobre ellas. Luego resta probar la igualdad sobre $x_{s+1}, \ldots, x_{s+k}$ y para ello vamos a calcular $(1 + n_{D_1}) \circ (1 + n_{D_2})(x_{s+j})$:

$$(1 + n_{D_1}) \circ (1 + n_{D_2})(x_{s+j}) = (1 + n_{D_1}) \left(x_{s+j} + n_{D_2}(x_{s+j})\right) =$$

$$= x_{s+j} + n_{D_1}(x_{s+j}) + (1 + n_{D_1})(n_{D_2}(x_{s+j}))$$

Observemos que $x_{s+j} + n_{D_1}(x_{s+j})$ forma parte de $(1 + n_{D_1 \bullet D_2})(x_{s+j})$ y por tanto resta calcular $(1 + n_{D_1}) \left(n_{D_2}(x_{s+j})\right)$.

$$(1 + n_{D_1}) \left(n_{D_2}(x_{s+j})\right) = (1 + n_{D_1}) \left(\sum_{\substack{i > j \in \{1, \ldots, k\} \\ r \in M_i^j}} \mu(r).x^{v(r)}.x_{s+j} \right) =$$

$$= \sum_{\substack{i > j \in \{1, \ldots, k\} \\ r \in M_i^j}} (1 + n_{D_1}) \left(\mu(r).x^{v(r)}.x_{s+j}\right)$$

y cada sumando es, teniendo en cuenta que $v_{s+l}(r) = 0 \ \forall \ l < i, \, l \neq j$

$$(1 + n_{D_1}) \left(\mu(r).x^{v(r)}.x_{s+j}\right) = \mu(r).(1 + n_{D_1})(x_1^{v_1(r)}. \ldots .x_{s+k}^{v_{s+k}(r)}) =$$

$$= \mu(r).(x_1 + n_{D_1}(x_1))^{v_1(r)}. \ldots .(x_s + n_{D_1}(x_s))^{v_s(r)}.$$

$$.(x_{s+1} + n_{D_1}(x_{s+1}))^{v_{s+1}(r)}. \ldots .(x_{s+k} + n_{D_1}(x_{s+k}))^{v_{s+k}(r)}$$

y como $n_{D_1}(x_i) = 0 \ \forall \ i = 1, \ldots, s$ denotando $x^{v'(r)} = x_1^{v_1(r)}. \cdots .x_s^{v_s(r)}$ es

$$\mu(r).x^{v'(r)}. \left(\sum_{a_i + b_i = v_{s+i}(r)} x_{s+i}^{a_i}.n_{D_1}(x_{s+i}^{b_i}). \binom{v_{s+i}(r)}{a_i} \right).$$

$$\ldots \ .(\left(\sum_{a_k + b_k = v_{s+k}(r)} x_{s+k}^{a_k}.n_{D_1}(x_{s+k}^{b_K}). \binom{v_{s+k}(r)}{a_k} \right) =$$

y este producto da

$$\mu(r).x^{v'(r)}. \sum_{\substack{a_i \leq v_{s+i}(r) \ldots \\ \ldots a_k \leq v_{s+k}(r)}} \prod_{l=i}^{k} \binom{v_{s+i}(r)}{a_i} .x_{s+i}^{a_i}. \ldots .x_{s+k}^{a_k}.n_{D_1} \left(x_{s+i}^{v_{s+i}(r) - a_i}. \ldots .x_{s+k}^{v_{s+k}(r) - a_k}\right)$$

donde para calcular $n_{D_1}\left(x_{s+i}^{v_{s+i}(r)-a_i}.\ldots.x_{s+k}^{v_{s+k}(r)-a_k}\right)$ ya se ha probado en la demostración del Teorema 7.5 que

$$n_{D_1}\left(x_{s+l}^{v_{s+l}(r)-a_l}\right) = x_{s+l}^{v_{s+l}(r)-a_l}.\sum_{|c^l|=v_{s+l}(r)-a_l} \lambda(l)^{c^l}.x^{v(c^l.r^l)}.\frac{\mid c^l \mid}{c^l!}$$

y por tanto

$$n_{D_1}\left(x_{s+i}^{v_{s+i}(r)-a_i}.\ldots.x_{s+k}^{v_{s+k}(r)-a_K}\right) = \sum_{\substack{|c^i|=v_{s+i}(r)-a_i\cdots\\ \cdots|c^k|=v_{s+k}(r)-a_K}} \prod_{l=i}^{k} \frac{\lambda(l)^{c^l}}{c^l!}.\mid c^l \mid!.x^{v(c^l.r^l)}.x_{s+l}^{(v_{s+l}(r)-a_l)}$$

También como en la demostración del Teorema 7.5 en la igualdad 48 pero ahora $v'(r) \neq 0$ con lo que se multiplica $x^{v'(r)}$ en ambos lados de la igualdad se deduce

$$x^{v'(r)}.x_{s+i}^{a_i}.\ldots.x_{s+k}^{a_K}.\prod_{l=i}^{k}.x^{v(c^l.r^l)}.x_{s+l}^{(v_{s+l}(r)-a_l)} = x^{v(r+\sum_{l=i}^{k} c^l.r^l)}.x_{s+j}$$

con lo que se tiene

$$(1+n_{D_1})\left(\sum_{\substack{i>j\in\{1,\ldots,k\}\\ r\in M_i^j}} \mu(r).x^{v(r)}.x_{s+j}\right) = \sum_{\substack{i>j\in\{1,\ldots,k\}\\ r\in M_i^j}} \mu(r).$$

$$\left(\sum_{\substack{a_i\le v_{s+i}(r)\cdots\\ \cdots a_K\le v_{s+k}(r)}} \prod_{l=i}^{k}\binom{v_{s+l}(r)}{a_l}.\left(\sum_{\substack{|c^i|=v_{s+i}(r)-a_i\cdots\\ \cdots|c^k|=v_{s+k}(r)-a_K}} \prod_{l=i}^{k}\frac{\lambda(l)^{c^l}}{c^l!}.\mid c^l \mid!.x^{v(r+\sum_{l=i}^{k} c^l.r^l)}.x_{s+j}\right)\right)$$

y para concluir, por un lado obsérvese que las condiciones $a_l \le v_{s+l}(r)$, $\mid c^l \mid = v_{s+l}(r) - a_l$ equivalen a $\mid c^i \mid \le v_{s+l}(r)$ y por otro como

$$\binom{v_{s+l}(r)}{a_l}.\frac{\mid c^l \mid!}{c^l!} = \frac{v_{s+l}(r)!}{a_l!.\mid c^l \mid!}.\frac{\mid c^l \mid!}{c^l!} =$$

$$= \frac{v_{s+l}(r)!}{a_l!.c^l!} = \frac{v_{s+l}(r)!}{c_l!.(v_{s+l}(r) - \mid c^l \mid)!}$$

y por tanto

$$(1+n_{D_1})\left(\sum_{\substack{i>j\in\{1,\ldots,k\}\\ r\in M_i^j}} \mu(r).x^{v(r)}.x_{s+j}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{i>j\in\{1,\dots,k\}\\ r\in M_i^j}} \mu(r). \left(\sum_{\substack{|c^i|\leq v_{s+i}(r)\dots\\ \dots|c^k|\leq v_{s+k}(r)}} \prod_{l=i}^{k} \lambda(l)^{c^l} . \frac{v_{s+l}(r)!}{c_l!.(v_{s+l}(r)- \mid c^l \mid)!} .x^{v(r+\sum_{l=i}^{k} c^l.r^l)} .x_{s+j} \right)$$

con lo que se acaba la demostración.

□

Observación 15. *Es conveniente observar que* $D_1 \bullet D_2 = D_1 + D_2 + P(D_1, D_2)$ *donde las raíces de* $P(D_1, D_2)$ *son* $\alpha = r + \sum c^i.r^i$ *para* $r \in D_2$, $\mid c^i \mid\leq v_{s+i}(r)$ *y* $\mid c^h \mid> 0$ *para algún* h.

Lema 7.9. *Para toda derivación* D, *sea* $P_0 = D$ *y* $P_i = P(D, P_{i-1})$. *Entonces existe* $q \in \mathbb{N}$ *tal que* $P_q = 0$

Demostración:

Puesto que el conjunto de la raíces es acotado respecto al orden definido,basta ver que si r es una raíz de una derivación E entonces las raíces en $P(D, E)$ que resultan de ella son estrictamente mayores. Para ello, sea $r \in M_j^i$ raíz de E. Las raíces correspondientes en $P(D, E)$ son

$$\alpha = r + \sum_{l=i}^{k} c^l.r^l : 0 \leq\mid c^h \mid\leq v_{s+h}(r) \text{ con } \mid c^h \mid> 0 \text{ para algún } h$$

Es claro que $v_{s+j}(\alpha) = -1$ y para todo $l \geq i$,

$$v_{s+l}(\alpha) = v_{s+l}(r)- \mid c^l \mid + \sum_{i<l'<l} c^{l'}.v_{s+l}(r^{l'}) \geq 0$$

luego $\alpha \in S(v_{s+j})$. Según el orden definido r vendra representado por el número entero:

$$r \equiv -1, 0, \dots, 0, v_{s+i}(r), v_{s+i+1}(r), \dots, v_{s+k}(r)$$

Supongamos que $\mid c^i \mid=\mid c^{h-1} \mid= 0$ y $\mid c^h \mid> 0$ es el primero no nulo. Entonces α viene representado por el nmero entero

$$\alpha \equiv -1, 0, \dots, 0, v_{s+i}(r), \dots, v_{s+h-1}(r), v_{s+h}(r)- \mid c^h \mid,$$

$$, v_{s+h+1}(r)- \mid c^{h+1} \mid +c^h.v_{s+h+1}(r^h), \dots$$

y como por hipótesis $v_{s+h}(r)- \mid c^h \mid < v_{s+h}(r)$, se deduce que $\alpha > r$ con lo que se concluye que para un $q \in \mathbb{N}$ todas las raíces de P_{q-1} están en $M^1_{k+1} \coprod \cdots \coprod M^k_{k+1}$ y por tanto en el siguiente paso obtentremos $P_q = P(D, P_{q-1}) = 0$.

$\square$

Observación 16. *Se puede dar una fórmula exacta del valor de q en función de las condiciones iniciales $v_{s+i}(r^j)$. La fórmula se obtiene representando cada raíz $r \in D$ como un grafo cuyos nodos son las raíces que cumplen cierta condición respecto r.*

Teorema 7.10. *Sea el $1 + \mathcal{N} = (1 + \mathcal{N}, \circ)$ el grupo de endomorfismos graduados de A_C con la operación que acabamos de ver en el teorema anterior. Sea el subconjunto $\mathcal{U} = \{v_{s+1}, \ldots, v_{s+k}\} \subset \Delta_1$ con los índices ordenados de manera compatible con el orden definido en Δ_1 es decir tal que $v_i \not< v_j$ si $i > j$.*

1. *Todo elemento de $1 + \mathcal{N}$ es de la forma $\Phi^1 \circ \cdots \circ \Phi^k$ donde*

$$\Phi^j = 1 + n_{D^j} \textit{ para } D^j = \sum_{r^j \in S^*(v_{s+j})} \lambda(r^j).x^{r^j} D_{v_{s+j}}$$

- *Además si $S^*(v_{s+j}) = \{r^j_1, \ldots, r^j_{d_j}\} \Rightarrow$*

$$\Phi^j = \phi^j_1 \circ \cdots \circ \phi^j_{d_j} \qquad \phi^j_i = 1 + n_{\lambda(r^j_i).x^{r^j_i} D_{v_{s+j}}}$$

  y esta descomposición de Φ^j es conmutativa

- *Si para cada $\lambda \in K$ denotamos $\phi^j_i(\lambda) = 1 + n_{\lambda(r^j_i).x^{r^j_i} D_{v_{s+j}}}$ entonces*

$$\phi^j_i(\lambda) \circ \phi^j_i(\lambda') = \phi^j_i(\lambda + \lambda')$$

- *Si $v_{s+i} \not< v_{s+j}$ y $v_{s+j} \not< v_{s+i} \Rightarrow \Phi^i \circ \Phi^j = \Phi^j \circ \Phi^i$*

2. *$1 + \mathcal{N}$ es un subgrupo del grupo $Aut^\circ_g A_C$ en el que el morfismo inverso de $1 + n_D$ es $1 + n_{D^{-1}}$ para*

$$D^{-1} = -D + P_1 - P_2 + \cdots \pm P_{q-1} \textit{ con } P_q = 0$$

3. *$1 + \mathcal{N}$ es subgrupo cerrado conexo de $Aut^\circ_g A_C$*

Demostración:
Toda derivación $D \in Der_K^u(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ es

$$D = \sum_{1 \leq j \leq K} \sum_{r^j \in S^*(v_{s+j})} \lambda(r^j).x^{r^j} D_{v_{s+j}} = D^1 + \cdots + D^k$$

Como $v_{s+j}(S^*(v_{s+j+1}) \coprod \cdots \coprod S^*(v_{s+k})) = 0 \Rightarrow P(D^j, D^{j+1} + \cdots + D^k) = 0$ luego

$$D^j \bullet (D^{j+1} + \cdots + D^k) =$$

$$= D^j + D^{j+1} + \cdots + D^k + P(D^j, D^{j+1} + \cdots + D^k) = D^j + D^{j+1} + \cdots + D^k$$

y por tanto aplicando la fórmula del teorema anterior,

$$(1 + n_{D^j}) \circ (1 + n_{(D^{j+1} + \cdots + D^k)}) = 1 + n_{(D^j + D^{j+1} + \cdots + D^k)}$$

y procediendo por inducción $k-1$ veces se deduce $1 + n_{D^1 + \cdots + D^k} = 1 + n_{D^1} \circ \cdots \circ 1 + n_{D^k}$ es decir

$$1 + n_D = \Phi^1 \circ \cdot \circ \Phi^k$$

Además si $S^*(v_{s+j}) = \{r_1^j, \ldots, r_{d_j}^j\}$, como

$$P(\lambda(r_i^j).x^{r_i^j} D_{v_{s+j}}, \sum_{l \neq i} \lambda(r_l^j).x^{r_l^j} D_{v_{s+j}}) = 0$$

y

$$P(\sum_{l \neq i} \lambda(r_l^j).x^{r_l^j} D_{v_{s+j}}, \lambda(r_i^j).x^{r_i^j} D_{v_{s+j}}) = 0$$

se deduce

$$\Phi^j = (1 + n_{\lambda(r_i^j).x^{r_i^j} D_{v_{s+j}}}) \circ (1 + n_{\sum_{l \neq i} \lambda(r_l^j).x^{r_l^j} D_{v_{s+j}}})$$

siendo tal composición conmutativa luego se concluye por inducción, quedando demostrado el primer punto de 1. El segundo punto de este apartado se deduce due que $P(D, D) = 0$.
Para el tercer punto, de la hipótesis y la Observación 15 se tiene $P(D^j, D^i) = P(D^i, D^j) = 0 \Rightarrow D^i \bullet D^j = D^j \bullet D^i = D^i + D^j$.
Para 2, ya hemos visto que $1 + \mathcal{N}$ es cerrado respecto la composición. Veamos ahora que $\forall\ D \in Der_K^u(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ el endomorfismo graduado $1 + n_D$ es automorfismo. Para ello veamos que tiene morfismo graduado inverso en $1 + \mathcal{N}$. Como $1 + n_D = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_K$ bastará ver que ϕ_j son automorfismos graduados pues en tal caso ya tendremos $(1 + n_D)^{-1} =$

$(\phi_K)^{-1} \circ \cdots \circ (\phi_1)^{-1}$. Sea entonces $\phi_j = 1 + n_{D^j}$ y como $P(D^j, -D^j) = P(-D^j, D^j) = 0$ $\Rightarrow D^j \bullet (-D^j) = 0 \Rightarrow$

$$(1 + n_{D^j}) \circ (1 + n_{-D^j}) = (1 + n_{-D^j}) \circ (1 + n_{D^j}) = 1$$

Por tanto

$$(\phi_j)^{-1} = 1 + n_{-D^j} \text{ y } (1 + n_D)^{-1} = (1 + n_{-D^k}) \circ \cdots \circ (1 + n_{-D^1}) = 1 + n_{D^{-1}}$$

donde

$$D^{-1} = -D^k \bullet \left(-D^{k-1} \bullet \left(\ldots \left(-D^2 \bullet -D^1\right) \ldots\right)\right)$$

Veamos para concluir este segundo enunciado que $D^{-1} = -D + P_1 - P_2 + \cdots \pm P_{q-1}$ con $P_q = 0$:

$$D \bullet (-D + P_1 - P_2 + \cdots \pm P_{q-1}) =$$

$$= D + (-D + P_1 - P_2 + \cdots \pm P_{q-1}) + P(D, -D + P_1 - P_2 + \cdots \pm P_{q-1}) =$$

$$P_1 - P_2 + \cdots \pm P_{q-1} - P(D, D) + P(D, P_1) - \cdots \mp P(D, P_{q-2}) \pm 0 =$$

$$P_1 - P_2 + \cdots \pm P_{q-1} - P_1 + P_2 - \cdots \mp P_{q-1} = 0$$

$\Rightarrow (1 + n_D) \circ (1 + n_{-D+P_1-P_2+\cdots\pm P_{q-1}}) = 1$ y aplicando a esta igualdad $(1 + n_{D^{-1}})$ por la izquierda se acaba.

Para el enunciado 3, hemos visto que dar φ un endomorfismo graduado en A_C es dar los coeficientes respecto las raíces

$$\{\lambda(\alpha) : \ \alpha \in \mathcal{R} \ \}$$

y además otros r coeficientes $\mu_1, \ldots, \mu_r$ de modo que

$$\varphi(x_i) = \mu_i x_i + \sum_{\alpha \in S(v_i)} \lambda(\alpha).x^{v(\alpha)}.x_i$$

que será automorfismo cuando los coeficientes cumplan ciertas condiciones. En el caso de $\varphi \in 1 + \mathcal{N}$ las condiciones son:

$$\mu_i = 1 \ \forall \ 1 \leq i \leq s, \ \mu_{s+j} = 0 \ \forall \ 1 \leq j \leq K, \ \lambda(\alpha) = 0 \ \forall \ \alpha \text{ raíz parejable}$$

que es un ideal primo en el anillo de coordenadas $K[\mu, \lambda(\alpha)]$ y por tanto un cerrado conexo del grupo $Aut_g^{\circ} A_C$ con lo que se concluye.

$\square$

Definición de Grupo Uniparamétrico: Siguiendo la terminología de Demazure, Oda y Cox ([5], [18], [2]) y gracias al segundo punto del apartado 1 del teorema anterior, llamaremos *grupo uniparamétrico* asociado a la raíz $r \in S^*(v)$ al grupo

$$\{1 + n_{\lambda x^r D_v} \,\forall\, \lambda \in K\}$$

De la definición y del teorema se deduce:

Corolario 7.11. *El grupo* $(1+\mathcal{N}, \circ)$ *esá generado por el producto ordenado de los grupos uniparamétricos asociados a las raíces no parejables*

$\square$

Corolario 7.12. *Con la operación* $\bullet$ *definida en* $Der^u_K(\mathcal{O}_X)$ *se cumple que* $(Der^u_K(\mathcal{O}_X, \bullet)$ *es un grupo isomorfo al subgrupo* $(1+\mathcal{N}, \circ)$ *de* $Aut^\circ_g A_C$

Demostración:
El elemento neutro es la derivación nula $D = 0$ y el inverso de D es $D^{-1} = -D + P_1 - P_2 + \cdots \pm P_{q-1}$ con $P_q = 0$ y la operación definida en $Der^u_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ es la que hace que la aplicación $D \rightsquigarrow 1 + n_D$ sea isomorfismo.

$\square$

7.2.1. Resoluciones del grupo $(Der^u, \bullet)$

Abreviadamente escribiremos $(Der^u, \bullet)$ para referirnos al grupo $(Der^u_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X), \bullet)$.

En 7.1 hemos dado una expresión matricial $\mathcal{R}^*$ para representar las raíces no parejables, de las que depende el subgrupo $1+\mathcal{N}$. Cada columna corresponde a un conjunto $S^*(v_{s+j})$ que está ordenado si previamente hemos dado un orden (arbitrario) al conjunto $\{v_{i\leq s}\}$ y a los índices $s+1, \ldots, s+k$ tal que $v_{s+i} \not< v_{s+j} \;\forall\; i > j$. Vamos a concretar algunas maneras de ordenarlos.
Sea para cada v_{s+j} el conjunto

$$M(v_{s+j}) = \{v \in \Delta_1 : \; v_{s+j} < v \;\}$$

Es evidente que $v_{s+j} < v_{s+i} \Rightarrow$ el número de elementos $\chi(M(v_{s+j})) > \chi(M(v_{s+i}))$ y vamos a dar un orden a los índices $s+1, \ldots, s+k$ de modo que se cumplan los dos condiciones siguientes:

$$\text{si } i > j \;\Rightarrow \begin{cases} v_{s+i} & \not< v_{s+j} \\ \chi(M(v_{s+j})) & \geq \chi(M(v_{s+i})) \end{cases}$$

Sea ahora para cada natural n el conjunto

$$S(n) = \{S^*(v) : \ \chi\,(M(v)) \geq n\ \}$$

que consiste en la unión ordenada de las columnas de $\mathcal{R}^*$ comenzando por $S^*(v_{s+1})$. Obviamente $S(0) = \mathcal{R}^*$ y $S(r) = \emptyset$. También, si $v_{s+j} < v_{s+i}$ (necesariamente $i > j$) $\Rightarrow$

$$\chi(M(v_{s+j})) > \chi(M(v_{s+i}))$$

luego si $\chi(M(v_{s+i})) = n \Rightarrow$

$$S^*(v_{s+j}) \in S(n+1) \text{ y } S(v_{s+i}) \in S(n) \setminus S(n+1)$$

En particular si $u,\, v \in S(n) \setminus S(n+1) \Rightarrow u \not< v$ y $v \not< u$.

Denotaremos L_n al subgrupo de $(Der^u_K(\mathcal{O}_X), \bullet)$ de las derivaciones (automorfismos) asociadas a las raíces de $S(n)$. En particular $L_k = 0$ y L_0 es el grupo total. Abreviadamente escribiremos $v \in L_n$ para referirnos a los $S^*(v) \in S(n)$ y respecto de lo cual es importante tener en cuenta que en los términos de la Observación 13, si $[v] = [v']$ entonces $S^*(v) \in L_n$ $\Leftrightarrow S^*(v') \in L_n$. De la propia definición se deduce $L_i \subseteq L_{i-1}$ y a la cadena de todos los subgrupos L_n la **denotaremos** $\boldsymbol{\mathcal{L}}$.
Definición: Diremos que una derivación $a = \sum_{r_a \in \mathcal{R}^*} \lambda_a . x^{r_a} D_{v_{r_a}}$ cumple $a \cap S(v) \neq \emptyset$ cuando $\exists\ r_a \in S(v)$ tal que $\lambda_a \neq 0$
Definición: Diremos que una cadena

$$\mathcal{T} \equiv 0 = T_n \subseteq T_{A_{n-1}} \subseteq \cdots \subseteq T_0 \simeq (Der^u_K(\mathcal{O}_X), \bullet)$$

de subgrupos de $(Der^u_K(\mathcal{O}_X), \bullet)$ (equivalentemente de $1 + \mathcal{N}$ según Corolario 7.12) ***cumple la propiedad aditiva*** cuando cumpla la siguiente propiedad: Si T y $\overline{T}$ pertenecen a $\mathcal{T}$ con $T \subseteq \overline{T}$ y $a \in \overline{T}$ y $b \in T \Rightarrow P(a,b) \in T$ y $P(b,a) \in T'$ para algún $T' \in \mathcal{T}$ tal que $T' \subsetneq T$. En particular se deduce de la propia definición que si a y $b \in T$ para alguno de los subgrupos $T \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists\, T' \in \mathcal{T}$ con $T' \subsetneq T$ tal que $P(a,b) \in T'$ y $P(b,a) \in T'$.

Teorema 7.13. *Toda cadena $\mathcal{T}$ con la propiedad aditiva es una resolución normal de $(Der_K^u(\mathcal{O}_X), \bullet)$ es decir, $\forall\ i\ T_{i+1}$ es subgrupo normal de T_i y los cocientes sucesivos T_i/T_{i+1} son grupos aditivos. Además cada elemento T_{i+1} es normal en el total T_0.*

Demostración:
Que los cocientes T_i/T_{i+1} son grupos aditivos se deduce directamente de la propiedad aditiva de la cadena $\mathcal{T}$, ya que si a y b pertenecen a $T_i \Rightarrow P(a,b)$ y $P(b,a)$ pertenecen a T_{i+1} luego son nulos en el cociente T_i/T_{i+1} y como $a \bullet b = a+b+P(a,b)$ y $b \bullet a = b+a+P(b,a)$ se concluye que

$$a \bullet b = a+b = b+a = b \bullet a \qquad \text{en } T_i/T_{i+1}$$

Veamos ahora que T_{i+1} es normal en T_i. Para ello sean $b \in T_{i+1}$ y $a \in T_i \setminus T_{i+1}$ de modo que $P(a,b) \in T_{i+1}$ y $P(a^{-1},b) \in T_{i+1}$. Como

$$0 = a \bullet a^{-1} = a + a^{-1} + P(a, a^{-1})$$

$\Rightarrow P(a,a^{-1}) = -(a+a^{-1}) \Rightarrow a \bullet b \bullet a^{-1} = a \bullet (b + a^{-1} + P(b,a^{-1})) = a + b + a^{-1} + P(b,a^{-1}) + P(a,b) + P(a,a^{-1}) + P(a,P(b,a^{-1})) = (a+a^{-1}) + b + P(b,a^{-1}) + P(a,b) - (a+a^{-1}) + P(a,P(b,a^{-1})) = b + P(b,a^{-1}) + P(a,b) + P(a,P(b,a^{-1}))$ que pertenece a T_{i+1} porque a, a^{-1} pertenecen a T_i y $b \in T_{i+1}$ y $\mathcal{T}$ cumple la propiedad aditiva. Por último para ver que T_{i+1} es normal en el T_0 se procede como antes con $b \in T_{i+1}$ y $a \in T_0$ y aplicando la misma descomposición en $a \bullet b \bullet a^{-1}$, ahora como $b \in T_{i+1} \Rightarrow P(b,a^{-1}) \in T_{i+2} \subseteq T_{i+1}$, $P(a,b) \in T_{i+1}$ y $P(a,P(b,a^{-1})) \in T_{i+2} \subseteq T_{i+1}$ con lo que se acaba

$\square$

Definición: Diremos que una cadena

$$\mathcal{T} \equiv 0 = T_n \subseteq T_{A_{n-1}} \subseteq \cdots \subseteq T_0 \simeq (Der_K^u(\mathcal{O}_X), \bullet)$$

de subgrupos de $(Der_K^u(\mathcal{O}_X), \bullet)$ (equivalentemente de $1+\mathcal{N}$ según corolario 7.12) es *completa* cuando verifica las siguientes condiciones:

1. Cumple la propiedad aditiva

2. $\forall\ i$ se tiene, $v \in T_i \setminus T_{i+1} \Leftrightarrow [v] \subset T_i \setminus T_{i+1}$, equivalentemente, si $[v] = [v']$ con v y $v' \in T_i$ entonces los automorfismos asociados a las raíces de v son la identidad en el grupo cociente T_i/T_{i+1} si y sólo si los son los automorfismos asociados a las raíces de v'

3. Si $u, v \in T_i \setminus T_{i+1} \Rightarrow v \not< u$ y $u \not< v$

Observación 17. *Es fácil comprobar que la tercera condición de cadena completa ya implica que sea aditiva y por tanto se puede prescindir de la condición* 1 *en la definición de cadena completa.*

Definición: La *logitud* de una cadena $\mathcal{T}$ es el número de elementos T_i distintos y distintos de cero que contiene. El siguiente teorema prueba la existencia de cadenas completas. Más adelante veremos que además existe cadena de longitud mínima.

Teorema 7.14. *Sea la cadena antes definida*

$$\mathcal{L} \equiv 0 = L_K \subseteq L_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq L_0 \simeq (Der^u_K(\mathcal{O}_X), \bullet)$$

donde L_n *es el subgrupo de las derivaciones asociadas a las raíces de* $S(n)$*. Se cumple:*

1. *La cadena* $\mathcal{L}$ *es completa*
2. $1 + \mathcal{N}$ *es un subgrupo unipotente de* $Aut^\circ_g A_C$

Demostración:
Veamos que $\mathcal{L}$ cumple la propiedad aditiva. Sean pues $L \subseteq \overline{L}$ elementos de la cadena y $a \in \overline{L}$ y $b \in L$. Las raíces en $P(b,a)$ son del tipo

$$\alpha = r + \sum_{r_b \in b} c_b.r_b \quad r_b \in S^*(v_{s+l}) \cap b$$

donde $r \in a \cap S^*(v_{s+j})$ para algún j y $v_{s+l}(r) > 0$ y por tanto $j < l \leq q$ con $v_{s+j} < v_{s+l}$ $\Rightarrow \chi(M(v_{s+j})) > \chi(M(v_{s+q}))$ de donde necesariamente $\exists\ L(\alpha) \subsetneq L$ tal que $S^*(v_{s+l}) \in L/L(\alpha)$ y $r \in S^*(v_{s+j}) \in L(\alpha) \Rightarrow \alpha \in L(\alpha)$ para cada $\alpha \in P(b,a)$ y basta elegir L' el mayor de los respectivos $L(\alpha)$ encontrados de modo que $P(b,a) \in L'$. Que $P(a,b) \in L$ es trivial porque $b \in L$. Para la segunda condición de cadena completa, sean $[u] = [v] \Rightarrow$ por el teorema 7.4 en su último apartado $\prod(x_u) = \prod(x_v)$ y en particular se deduce que $u \in S(n) \Leftrightarrow v \in S(n)$ y por tanto $u \in L_n/L_{n+1} \Leftrightarrow v \in L_n/L_{n+1}$, con lo que se tiene la segunda condición. La tercera se deduce de que si $v < u \Rightarrow \chi(M(v)) > \chi(M(u))$ y entonces para algún i se tiene que $v \in L_{i+1}$ mientras $u \in L_i/L_{i+1}$.
La afirmación 2. se deduce directamente del corolario 7.12, el teorema 7.13 y el punto anterior que prueba que $1 + \mathcal{N}$ tiene resolución normal con cocientes aditivos.

□

Observación 18. *Otra demostración es utilizar el Corolario 7.7 y la demostración del teorema* $9 \cdot 12$ *de [20]. También vamos a dar una demostración directa determinando* $1+\mathcal{N}$ ***como subgrupo unipotente del grupo lineal****; para ello, sea* $V_{[x]}$ *el espacio vectorial* $A_C(x)$ *para* $x = x_j \in A_C$ *cualquier representante, pues no importa cuál gracias al punto 5 del teorema 7.4. Como todo elemento de* $1+\mathcal{N}$ *es un automorfismo graduado, opera en cada espacio vectorial* $V_{[x]} \Rightarrow 1+\mathcal{N} \subset \prod_{[x]} GL(V_{[x]})$ *y por tanto la matriz asociada* A *a un automorfismo* $\Phi = 1+n_D$ *queda definida en cada espacio* $V_{[x]}$*. Sea entonces la base de* $V_{[x]}$ *formada, en este orden, por* $\{[x_j]\}$ *y* $\Pi(x_j) = \{\Pi_r(x_j) : r \in S^*(v_j)\}$ *con* $\Pi_r(x_j) = x^{v(r)}.x_j$*. El orden de esta parte de la base viene determinado por el orden estricto definido en cada* $S^*(v_j)$ *en la página 102. Sobre la parte* $\{[x_j]\}$ *de esta base,* $\Phi = 1 + n_D$ *es la identidad mas una suma del tipo* $\sum_r b_r \Pi_r(x_j) \Rightarrow$ *en esta parte la matriz es*

$$\begin{pmatrix} I(j) \\ B(j) \end{pmatrix}$$

con $I(j)$ *la matriz identidad de orden el número de raíces parejables asociadas a* v_j*.*

Sobre cada $\Pi_r(x_j)$*, por ser* Φ *morfismo de álgebras, debe dar una combinación lineal de elementos de* $\Pi(x_j) \Rightarrow$ *en esa parte la matriz es*

$$\begin{pmatrix} O \\ P(j) \end{pmatrix}$$

Según el teorema 7.8, $\Phi(\Pi_r(x_j))$ *es una suma* $p_c \Pi_{r(c)}(x_j)$ *donde en el caso* $c = 0$ *da* $r(c = 0) = r$ *y* $p_{c=0} = 1$ *y en el resto de casos las raíces* $r(c)$ *son, como se ve en la demostración del lema 7.9, tales que* $r(c) > r \Rightarrow$

$$\Phi(\Pi_r(x_j)) = \Pi_r(x_j) + \sum p_c \Pi_{r(c)}(x_j)$$

con $\Pi_{r(c)}(x_j)$ *posteriores en la base al* $\Pi_r(x_j) \Rightarrow P(j)$ *es una matriz triangular inferior con 1 en la diagonal y la matriz de* Φ *en la base fijada de* $V_{[x_j]}$ *es*

$$A(j) = \begin{pmatrix} I(j) & O \\ B(j) & P(j) \end{pmatrix} \tag{50}$$

que es unipotente $\Rightarrow$ *la matriz* A *asociada a* Φ *es unipotente y se ha probado que* $1+\mathcal{N}$ *es subgrupo unipotente del grupo lineal* $\prod_{[x]} GL(V_{[x]})$*. Nótese además que tal subgrupo queda determinado por las matrices de la forma 50 que cumplan la condición de que* $P(j)$ *sea invertible (ya dada en [3]) y que además* $P(j)$ *dependa de* $B_{i>j}$ *en los términos del teorema 7.8, lo que garantiza que el automorfismo de espacios vectoriales lo sea también de* *álgebras. No obstante y este es a mi parecer un error en [3], habría que dar exactamente tal condición de dependencia de* $P(j)$ *y demostrar que el producto de las matrices correspondientes a sendos automorfismos del tipo* $1 + n_D$ *da una matriz en la que* $P(j).P'(j)$ *sigue verificando esa condición de dependencia de las matrices* $B(i) + P(i).B'(i)$ *para que la composición de endomorfismos lineales lo sea de álgebras y por tanto* $1 + \mathcal{N}$ *quedaría efectivamente definido como subgrupo unipotente del grupo lineal.*

7.2.2. Resoluciones mínimas y producto de grupos aditivos

Vamos a ver que existen cadenas completas, resolución de $1 + \mathcal{N}$, de longitud mínima cuyos cocientes da una descomposición del grupo R_u en producto de grupos aditivos, también de longitud mínima.
Si $\mathcal{T}$ es una cadena completa resolución de R_u, la condición tercera de la definición afirma que en los cocientes $T_i \setminus T_{i+1} \nexists\ u$ y v tales que $u < v$ ni $v < u$ lo que implica que la longitud de la cadena, $l(\mathcal{T})$, es mayor o igual a la mayor secuencia ordenada de elementos de Δ_1, de modo que si existe $v_{i_1} < \cdots < v_{i_l}$ con $v_{i_j} \in \Delta_1 \Rightarrow l(\mathcal{T}) \geq l - 1$, luego para ver que existen cadenas de longitud mínima bastará encontrar las que tiene longitud igual exáctamente a la de la mayor secuencia ordenada en Δ_1.
Consideremos pues el conjunto de todas las cadenas máximas $v_{i_1} < \cdots < v_{i_l}$ que son aquellas que verifican que $\nexists\ u \in \Delta_1 : u < v_{i_1}$ y $\nexists\ u \in \Delta_1 : v_{i_l} < u$ y $\nexists\ u \in \Delta_1 : v_{i_j} < u < v_{i_{j+1}}$. Nótese que si v_{i_l} es el mayor de una cadena máxima entonces $[v_{i_l}] = [u]$ para algún $u \in \{v_1, \ldots, v_s\}$ y en tal caso $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{l-1}}, u$ también es cadena máxima con lo que podemos suponer que todas ellas finalizan en un $u \in \{v_1, \ldots, v_s\}$.

Definición: Llamaremos *longitud* de $v \in \Delta_1$ al número $l(v)$ que v ocupa en la mayor secuencia ordenada con final en v. En caso de que v no sea mayor que ningún u se entenderá que $l(v) = 0$. Por ejemplo en el caso visto del plano proyectivo donde $\Delta_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ las longitudes de todos ellos es cero. Lamaremos *longitud* de Δ_1 al número:

$$l(\Delta_1) = \text{máx}\{l(v) : v \in \Delta_1\}$$

Sean los conjuntos $X_i = \{v \in \Delta_1 : \ l(v) = i\}$ para $i = 1, \ldots, q$ siendo $q - 1$ la mayor de las longitudes y sea $Z_i = X_0 \coprod \cdots \coprod X_i$ y R_i el subgrupo de $1 + \mathcal{N}$ generado por los automorfismos asociados a las raíces $S^*(v)$ tales que $v \in Z_{i-1}$ empezando por $R_0 = 0$.

Como es obvio de la propia definición, se cumplen las siguentes propiedades:

1. Si $v \in X_i \Rightarrow [v] \subset X_i$
2. Si $u, v \in X_i \Rightarrow u \nless v$ y $v \nless u$
3. $X_{q-1} \subseteq \{\{[v_1]\}, \ldots, \{[v_s]\}\}$, $X_q = \emptyset$ y $R_{q-1} = R_q = 1 + \mathcal{N}$
4. Si $v \in X_{i+1} \Rightarrow \exists\, u \in X_i : u < v$
5. Si $v \in X_i$ y $u \in X_j$ con $j > i \Rightarrow u \nless v$
6. Si $i < q \Rightarrow R_{i-1} \subsetneq R_i$

(51)

En el caso del plano proyectivo $q = 1$, $1 + \mathcal{N} = R_1 = R_0 = 0$ y la longitud máxima es $q - 1 = 0$.

Teorema 7.15. *Sea $1 + \mathcal{N}$ el subgrupo conexo unipotente de $Aut_g^\circ A_C$ y canónicamente isomorfo a $(Der_K^u(\mathcal{O}_X), \bullet)$ que abreviadamente denotaremos $(Der^u, \bullet)$. Se cumple:*

1. *$\boldsymbol{R} \equiv 0 = R_0 \subset R_1 \subset \cdots \subset R_q = R_{q-1} = 1 + \mathcal{N}$ es una cadena completa resolución de $(Der^u, \bullet)$ de longitud mínima igual a $q - 1$ en la que los grupos R_i son subgrupos normales de $1 + \mathcal{N}$ (veremos de hecho que son normales en todo $Aut_g^\circ A_C$) y los cocientes R_i/R_{i-1} son grupos aditivos. Además se cumple $Z(R_i) \subseteq R_{i-1}$ donde $Z(R_i)$ denota el centro del grupo R_i*
2. *$1 + \mathcal{N}$ es el producto semidirecto de grupos aditivos en cantidad mínima e igual a $l(\Delta_1)$ definida como la mayor de las longitudes de los elementos de Δ_1 y sólamente es abeliano si tal cantidad es uno, es decir, cuando es un grupo aditivo*

Demostración:

Probemos 1 : Que es completa se deduce de las propiedades 1 y 2 pues como ya observamos 2 implica la propiedad aditiva. Por el teorema 7.13 ya sabemos que la propiedad aditiva implica que los cocientes R_i/R_{i-1} son grupos aditivos y que R_i son subgrupos normales en $(Der^u, \bullet)$ De la propiedad 4 anterior se deduce por inducción que existe una secuencia ordenada máxima $u_0 < \cdots < u_{q-1}$ de longitud $q - 1$ y que no existe ninguna de longitud mayor (ya que $X_q = \emptyset$) luego en efecto $\mathbf{R}$ es resolución de $(Der^u, \bullet)$ de longitud

mínima igual a $q-1$.
Por último veamos que $Z(R_{i+1}) \subseteq R_i$. Sea $b \in Z(R_{i+1})$ y lo podemos escribir $b = \lambda_r x^r D_{v_r} + S$ para $v_r \in X_i$ y $S \subset Z_{i-1}$. Por la propiedad 4 anterior, sea $v_{r'} < v_r$ con $v_{r'} \in X_{i-1}$ y $v_r(r') > 0$. Sea entonces $a = x^{r'} D_{v_{r'}} \in R_i \setminus R_{i-1} \Rightarrow P(b,a) = \lambda_r x^{r'+v_r(r').r} D_{v_{r'}}$ en $R_i \setminus R_{i-1}$ mientras que $P(a,b) \in R_{i-1}$ y por tanto si $a \bullet b = b \bullet a \Rightarrow P(a,b) = P(b,a)$ $\Rightarrow \lambda_r = 0 \Rightarrow b \in R_i$ con lo que se acaba.
Probemos 2: Sea para cada i, $R_{i-1} \hookrightarrow R_i$ y el subgrupo aditivo de R_i generado por los automorfismos asociados a las raíces no parejables de X_{i-1} al que denotaremos $\bar{R}_i$ y que como hemos visto opera en R_{i-1} ya que este es normal en R_i. Por tanto existe el producto semidirecto de grupos $R_{i-1} \rtimes \bar{R}_i \subseteq R_i$ y son iguales porque la misma demostración del teorema 7.10 sirve para afirmar que si

$$\{v_{s+1}, \ldots, v_{s+k}\} \cap X_{i-1} = \{v_{s+l_{i-2}+1}, \ldots, v_{s+l_{i-1}}\}$$

$\Rightarrow R_i$ es el subgrupo de los productos ordenados $\Phi^1 \circ \cdots \circ \Phi^{l_{i-1}}$ y $\bar{R}_i$ es el subgrupo de los productos $\Phi^{l_{i-2}+1} \circ \cdots \circ \Phi^{l_{i-1}} \Rightarrow$

$$R_i = R_{i-1} \rtimes \bar{R}_i \qquad \bar{R}_i = R_i / R_{i-1}$$

y aplicándolo sucesivamente se tiene

$$R_{q-1} = R_{q-2} \rtimes \bar{R}_{q-1} = \cdots = \bar{R}_1 \rtimes \bar{R}_2 \rtimes \cdots \rtimes \bar{R}_{q-1} \qquad \text{con } \bar{R}_1 = R_1$$

Que el número de elementos del producto es mínimo se deduce de que la igualdad $R_i = R_{i-1} \rtimes \bar{R}_i$ con $\bar{R}_1 = R_1$ y $R_0 = 0$ permite reconstruir $0 = R_0 \subset R_1 \subset \cdots \subset R_q = R_{q-1} = 1 + \mathcal{N}$ que es de longitud mínima.

□

Observación 19. *Hemos visto que cada grupo aditivo* $\bar{R}_i$ *es producto (composición ordenada) de los automorfismos* Φ^j*, uno por cada arista* v *de* $l(v) = i$ *y por el teorema 7.10 cada uno de ellos es producto (ordenado) de automorfismos de los grupos uniparamétricos (definición dada en p. 115), tantos como raíces tiene* $S^*(v)$*, luego cada grupo aditivo* $\bar{R}_i$ *está generado por los subgrupos uniparamétricos asociados a las raíces* $\cup_{l(v)=i} S^*(v)$

Cabe plantearse la unicidad de las resoluciones mínimas de $1+\mathcal{N}$ y su correspondiente descomposición en producto semidirecto de grupos aditivos de la mayor dimensión posible para que la cantidad de ellos en cuyo producto semidirecto descomponga sea mínima.

Vamos a ver que la unicidad total no se cumple, aunque seguramente sí con ciertas condiciones.

En la cadena **R** que acabamos de definir, la propiedad 4. de la ecuación 51 permite construir una secuencia $u_{q-1} > \cdots > u_1 > u_0$ de longitud igual a la longitud de la cadena mínima **R** siendo $q - 1 = l(\Delta_1)$ la longitud máxima en Δ_1. Esta cadena se puede utilizar para ordenar $s + 1, \ldots, s + k$ para que $v_{s+1}, \ldots, v_{s+k}$ estén ordenados de menor a mayor; en primer lugar, las ubicamos por bloques;

$$\{v_{s+1}, \ldots, v_{s+i_0}\} \equiv X_0, \; \{v_{s+i_0+1}, \ldots, v_{s+i_1}\} \equiv X_1, \; \ldots$$

y dentro de cada bloque se ordenan de manera arbitraria por clases de equivalencia. La propiedad 5. de (51) siempre garantiza la condición $[v_{s+i}] \not< [v_{s+j}] \; \forall \; i > j$ pero plantea un poco relevante inconveniente en el sentido se que si $[v] = [v_{i \leq s}]$ entonces v es maximal y debería aparecer al final de la serie $v_{s+1}, \ldots, v_{s+k}$, mientras que con el criterio dado para la construcción de **R** puede ocurrir $l(v) = 0$ y entonces $v \in X_0$.

Vamos a construir una resolución mínima similar a la anterior y sin el inconveninete referido:

Definición: Llamaremos *anti-longitud* de $v \in \Delta_1$ a la mayor de las longitudes de todas las cadenas máximas estrictamente crecientes en Δ_1 con inicio en v. A tal número lo denotaremos $\curlywedge(v)$.

De la propia definición se observa que $[v]$ es maximal cuando $\curlywedge(v) = 0$ y también que

$$l(\Delta_1) = max\{\curlyvee(v) : \; v \in \Delta_1\} = \text{máx}\{l(v) : \; v \in \Delta_1\}$$

Sean ahora los conjuntos $Y_i = \{v \in \Delta_1 \; : \; \curlywedge(v) = i\}$ para $i = 1, \ldots, q$ siendo $q - 1$ la mayor de las longitudes y sea $W_i = Y_i \coprod \cdots \coprod Y_0$ y T_i el subgrupo de $1 + \mathcal{N}$ generado por los automorfismos asociados a las raíces $S^*(v)$ tales que $v \in W_i$. Por tanto $T_0 = 0$ porque $S^*(v) = \emptyset$ para todo $v \in \Delta_1$ maximal. Obtenemos entonces la cadena

$$0 = \mathbf{T} \equiv T_0 \subset \cdots \subset T_{q-1} = 1 + \mathcal{N}$$

y asignando los índices $s + 1, \ldots, s + k$ a Δ_1 de manera consecuente con los bloques $Y_{q-1}, \ldots, Y_0$ de modo que

$$Y_{q-1} = \{v_{s+1}, \ldots, v_{s+i_{q-1}}\}, \ldots, X_0 = \{\ldots, v_{s+k}\}$$

y ahora un orden arbitrario en cada bloque pero por clases, obtenemos un orden en Δ_1 con las condiciones pretendidas que además nos permiten dar un orden al conjunto total de las raíces.
La propiedades de esta cadena son similares a las de **R** vistas en la ecuación (51). Se cumplen las siguentes propiedades para **T** :

1. Si $v \in Y_i \Rightarrow [v] \subset Y_i$
2. Si $u, v \in Y_i \Rightarrow u \not< v$ y $v \not< u$
3. $Y_0 \subseteq \{\{[v_1]\}, \ldots, \{[v_s]\}\}$, $Y_q = \emptyset$ y $Y_{q-1} = Y_q = 1 + \mathcal{N}$
4. Si $v \in Y_{i+1} \Rightarrow \exists\, u \in Y_i : v < u$
5. Si $v \in Y_i$ y $u \in Y_j$ con $i > j \Rightarrow u \not< v$
6. Si $i < q \Rightarrow T_{i-1} \subsetneq T_i$

(52)

Luego el teorema 7.15 y los resultados que se deducen son igualmente válidos si se utiliza la cadena **T**. En tal caso la descomposición de $1 + \mathcal{N}$ en producto semidirecto de grupos aditivos contendrá la misma cantidad de ellos pero sus la distribución de sus dimensiones puede variar.

Como hemos visto en la sección 5.4.1 el toro $T(r) = Spec\, K[\mathbb{Z}^r]$ que cuando no de lugar a confusión denotaremos como puntos racionales K^{*r} opera en A_C de modo que cada punto μ define el siguiente automorfismo $\tau_\mu \in Aut_g^\circ A_C : \tau_\mu : A_C \to A_C$ es $\tau_\mu(x_i) = \mu_i x_i$ es decir, $\tau_\mu(x^{(n,\alpha_C)} = \mu^{n+v(\alpha_C)}.x^{(n,\alpha_C)}$. Es el toro maximal de $Aut_g^\circ A_C$ que lógicamente está contenido en el radical del grupo que denotamos $R(Aut_g^\circ A_C)$ y obviamente

$$T_e K^{*r} = (\mathbb{Z}^s \oplus C)^* \otimes_{\mathbb{Z}} K \subset T_e Aut_g^\circ A_C$$

Proposición 7.16. *EL radical y el radical unipotente de $Aut_g^\circ A_C$ no tienen raíces parejables*

Demostración:
Basta verlo para el radical unipotente ya que difieren en un toro y por tanto tienen las

mismas raíces. Como es un subgrupo normal, entonces por 10.4 [12] $T_e 1+\mathcal{N}$ es un ideal en $T_e(Aut_g^\circ A_C)$ de modo que si $D \in T_e 1+\mathcal{N}$ y $D' \in T_e(Aut_g^\circ A_C) \Rightarrow [D, D'] \in T_e 1+\mathcal{N}$. Pero si α es parejable respecto v, v' y $D = x^\alpha D_v \in T_e 1+\mathcal{N}$ entonces tomando $D' = x^{-\alpha} D_{v'}$ se tendría $[x^\alpha D_v, x^{-\alpha} D_{v'}] = D_{v-v'}$ que es derivación del toro $T = K[M]$ y por tanto $D_{v-v'} \in T_e(1+\mathcal{N} \cap T) = 0 \Rightarrow v = v'$ y $\alpha = 0$ con lo que no es parejable.

□

Lema 7.17. *Sea $Aut_{(g,\varepsilon)} A_C \subset Aut_g A_C$ el subgrupo de automorfismos $(gr, \varepsilon) - graduados$ definido en la página 93. Se cumple:*

1. $1 + \mathcal{N} \cap Aut_{(g,\varepsilon)} A_C = 1$

2. *El toro $T(r) = Spec\, K[\mathbb{Z}^r]$ como subgrupo de $Aut_g A_C$ definido en la sección 5.4.1 está contenido en $Aut_{(g,\varepsilon)} A_C$*

3. *EL toro $T(r) \subset Aut_g A_C$ opera en $Aut_g A_C$ por el automorfismo interno, como se define en general en la página 50 y que como se muestra en el teorema 4.5 la operación en los puntos $\mathcal{F}(B)$ a través de $\widetilde{f}$ es*

$$\mu \in T(r) \Rightarrow \varphi_\mu : Aut_g A_C \otimes_K B \to Aut_g A_C \otimes_K B,\, \varphi_\mu(\theta) = \tau_\mu \circ \theta \circ \tau_{\mu^{-1}}$$

y su morfismo diferencial por el diagrama conmutativo del teorema 4.5 da la representación adjunta que define la operación de $T(r)$ en $T_e A_C \simeq Der_g A_C$ y que es $Adj(\mu^{-1})(D) = \tau_\mu \circ D \circ \tau_{\mu^{-1}}$. Se cumple:

- *φ_μ restringe al subgrupo $1 + \mathcal{N}$ siendo*

$$\tau_\mu \circ 1 + n_D \circ \tau_{\mu^{-1}} = 1 + n_{\mu D}$$

donde

$$si\ D = \sum \lambda_r . x^r D_v \Rightarrow \mu \cdot D = \sum \mu^{v(r)} . \lambda_r . x^r D_v$$

- *Además*

$$\mu D = Adj(\mu^{-1})(D) \qquad y \qquad \mu.(D_1 \bullet D_2) = \mu.D_1 \bullet \mu.D_2$$

4. *Tangente al subgrupo de automorfismos $(gr, \varepsilon) - graduados$:*

$$T_e Aut_{(g,\varepsilon)} A_C = (\mathbb{Z}^s \oplus C)^* \otimes_{\mathbb{Z}} K + Der_K^s(\mathcal{O}_X)$$

como álgebras de Lie $\mathbb{Z}^r - graduadas$ ($Der_K^s(\mathcal{O}_X)$ está definido en la página 98)

5. *Con el corchete de Lie,* $Der^u_K(\mathcal{O}_X)$ *es subálgebra de Lie* $\mathbb{Z}^s \oplus C = \mathbb{Z}^r -$ *graduada y* $M -$ *graduada de* $T_e Aut_g A_C$ *y se cumple la igualdad*

$$T_e(1+\mathcal{N}) = Der^u_K \mathcal{O}_X$$

6. *Para todo* $\bar{R} \subset 1+\mathcal{N}$ *subgrupo, su espacio tangente* $T_e\bar{R}$ *está contenido en el subespacio vectorial de* $Der^u_K(\mathcal{O}_X)$ *generado por las derivaciones* $D \in Der^u_K(\mathcal{O}_X)$ *tales que* $1+n_D \in \bar{R}$*. En particular si* $\bar{R}$ *es aditivo* $\Rightarrow$

$$T_e\bar{R} = D \in Der^u_K(\mathcal{O}_X) : 1+n_D \in \bar{R}$$

y vía $(\bar{R},+) \subset 1+\mathcal{N} \simeq (Der^u, \bullet) \Rightarrow$

$$(\bar{R},+) = T_e\bar{R}$$

que además es subálgebra de Lie $\mathbb{Z}^s \oplus C = \mathbb{Z}^r -$ *graduada de* $Der_g A_C$

Demostración:

Veamos 1 : Sea $\tau \in 1+\mathcal{N} \Rightarrow$ por definición y la proposición 7.1 $\tau(x_i) \in \{x_i \cup \langle \Pi(x_i)\rangle_K\} \subset A_C(x_i)$ cuyos elementos de $\varepsilon -$ grado igual a $g_\varepsilon(x_i)$ que es 1 son $A^\varepsilon_C(x_i) = \langle F_{x_i}\rangle_K \Rightarrow$

$$A^\varepsilon_C(x_i) \cap \{x_i \cup \langle \Pi(x_i)\rangle_K\} = x_i$$

luego $\tau(x_i)$ tiene $\varepsilon -$ grado 1 $\Leftrightarrow \tau(x_i) = x_i \ \forall \ i.$

El enunciado 2 es trivial porque por definición si $\mu \in T(r) \Rightarrow \tau_\mu$ es el automorfismo $\tau_\mu(x_i) = \mu_i x_i$ que es $\varepsilon -$ graduado.

Veamos 3 : Comprobemos que en efecto $\tau_\mu \circ 1+n_D \circ \tau_{\mu^{-1}} = 1+n_{\mu\cdot D}$. Aplicamos sobre las variables del anillo de Cox x_i y x_{s+j} con $1 \le i \le s$ y $1 \le j \le K$ siendo trivial la igualdad sobre x_i y veamos sobre x_{s+j} : Por un lado

$$(1+n_{\mu D})(x_{s+j}) = x_{s+j} + \sum_{r \in S^*(v_{s+j})} \mu^{v(r)}\lambda_r.x^{v(r)}.x_{s+j}$$

por otra

$$\tau_\mu \circ 1+n_D \circ \tau_{\mu^{-1}}(x_{s+j}) = \tau_\mu \left(\mu_j^{-1}.x_{s+j} + \sum_{r \in S^*(v_{s+j})} \mu_j^{-1}.\lambda_r.x^{v(r)}.x_{s+j} \right)$$

y ambas cosas coinciden. Para ver que $\mu D = Adj(\mu^{-1})(D)$ se puede suponer que $D = \lambda_r x^r D_{v_j}$ con $r \in S(v_j) \Rightarrow$ ambos son nulos sobre $x_i \ \forall \ i \neq j$ y en x_j :

$$\tau_\mu \circ D \circ \tau_{\mu^{-1}}(x_j) = \tau_\mu(\mu_j^{-1}\lambda_r x^{v(r)}.x_j) = \lambda_r \mu^{v(r)} x^{v(r)}.x_j$$

y eso es justo $\mu D(x_j)$. Para finalizar este punto, veamos ahora la igualdad $\mu.(D_1 \bullet D_2) = \mu.D_1 \bullet \mu.D_2$; para ello aplicamos la fórmula del teorema 7.8 y podemos suponer que $D_2 = x^r D_v$ y

$$D_1 = \sum_{l=1}^{K} \lambda(r^l).x^{r^l} D_{v_{s+l}}$$

$\Rightarrow$

$$\mu.D_2 = \mu^{v(r)}.x^r D_v \qquad \mu.D_1 = \sum_{l=1}^{K} \lambda(l).\mu^{v(r^l)}.x^{r^l} D_{v_{s+l}}$$

$\Rightarrow$ los coeficientes de $\mu.D_1 \bullet \mu.D_2$ obviando los elementos factoriales que claramente coinciden, son:

$$\mu^{v(r)}.\prod_{l=1}^{K} \left(\lambda(l).\mu^{v(r^l)}\right)^{c^l} = \prod_{l=1}^{K} \lambda(l).\mu^{v(r)+\sum_{l=1}^{K} c^l.v(r^l)}$$

que es el coeficiente de $x^{\sum_{l=1}^{K} c^l.r^l} D_v$. Por otro lado el término $x^{\sum_{l=1}^{K} c^l.r^l} D_v$ en $D_1 \bullet D_2$ es, salvo factoriales,

$$\prod_{l=1}^{K} \lambda(l)^{c^l}.x^{\sum_{l=1}^{K} c^l.r^l} D_v$$

y por tanto el correspondiente coeficiente de $\mu.(D_1 \bullet D_2)$ es

$$\prod_{l=1}^{K} \lambda(l).\mu^{v(r+\sum_{l=1}^{K} c^l.r^l)}$$

y ambos coinciden.

Veamos 4 : En los términos del teorema 4.7, ahora J es el $\mathbb{Z}-$ módulo $A_{n-1} \oplus \mathbb{Z}$ y A_C es $J-$ graduada por el morfismo ya definido $(g_r, \varepsilon) : \mathbb{Z}^r \to J$ y por tanto aplicando el citado teorema se tiene

$$T_I Aut_{g,\varepsilon} A_C = Der_J A_C$$

donde $Der_J A_C$ son las derivaciones en A_C de grado cero con la $(gr, \varepsilon)-$graduación. Como son entonces de grado cero con la $gr-$ graduación hemos visto en el punto segundo del teorema 5.10 que están generadas, en su parte $Der_K^{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_X)$, por los vectores $x^\alpha D_v$ con $\alpha \in S(v)$ y $\alpha \in M$ en $\mathbb{Z}^r$ es

$$v(\alpha) = (a_1, \ldots, a_{l-1}, -1, a_{l+1}, \ldots, a_r) \text{ con } \mathrm{a}_i \geq 0 \ \forall\ i$$

Como por hipótesis además $\varepsilon(v(\alpha)) = 0 \Rightarrow a_i = 0$ y $v(\alpha) = (0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ $\Rightarrow \alpha$ es parejable. El resto de derivaciones son $(\mathbb{Z}^s \oplus C)^* \otimes_{\mathbb{Z}} K = T_e T(r)$.

Veamos 5 : Daremos dos demostraciones, una es la que sigue y la otra se dará en la demostración del enunciado 6. Como

$$T_I Aut_g A_C = (\mathbb{Z}^s \oplus C)^* \otimes_{\mathbb{Z}} K \oplus Der_K^u(\mathcal{O}_X) \oplus Der_K^s(\mathcal{O}_X)$$

$\Rightarrow$ de los apartados anteriore se deduce que necesariamente $T_e(1+\mathcal{N}) \subseteq Der_K^u(\mathcal{O}_X)$; para ver la igualdad veremos que tienen la misma dimensión. Sea la cadena normal y completa $\mathcal{L}$ del teorema 7.14

$$0 = L_K \subseteq L_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq L_0 = 1 + \mathcal{N}$$

donde hemos visto que la operación $\bullet$ en los cocientes $L_i \backslash L_{i-1}$ coincide con la suma de derivaciones como espacio vectorial, luego

$$dim_K T_e\left(L_i \backslash L_{i-1}\right) = dim_K \left\langle L_i \backslash L_{i-1} \right\rangle_K$$

Por otro lado como

$$T_e(L_0) = T_e(L_0 \backslash L_1) \oplus T_e(L_1) = T_e(L_0 \backslash L_1) \oplus T_e(L_1 \backslash L_2) \oplus T_e(L_2) = \ldots$$

y como $T_e L_k = 0$ se tiene

$$T_e(L_0) = T_e(L_0 \backslash L_1) \oplus \cdots \oplus T_e(L_0) = T_e(L_{k-1} \backslash L_K)$$

$\Rightarrow$

$$dim_K T_e(L_0) dim_K L_0 \backslash L_1 \oplus \cdots \oplus L_{k-1} \backslash L_K$$

que es el espacio vectorial generado por las derivaciones asociadas a las raíces no parejables con lo que se ha demostrado:

$$dim_K T_e\left(1 + \mathcal{N}\right) = dim_K Der_K^u(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$$

y por ende la igualdad. Que $Der^u_K(\mathcal{O}_X)$ es cerrado respecto al corchete de Lie se deduce del cálculo que se hace en la proposición 3.11 y sólo es distinto de cero en los grados $(v'(\alpha_B), \alpha_C) \in \mathbb{Z}^s \oplus C$ para $\alpha = \alpha_B + \alpha_C \in M \Rightarrow$ coinciden su $\mathbb{Z}^r -$ graduación y su $M -$ graduación.

Para demostrar el enunciado 6, en primer lugar vamos a calcular directamente $T_e(1 + \mathcal{N})$ sin utilizar como en el apartado anterior, los enunciados 4 y 1; de modo que de esta demostración se deduce el enunciado 4. Veremos:

$$D \in (Der^u, \bullet) \Leftrightarrow D \in T_e(1 + \mathcal{N}) \tag{53}$$

y que esa caracterización es funtorial de modo que se cumplirá para todo subgrupo $\bar{R}$ de $1 + \mathcal{N}$.

Denotaremos $G^{\cdot}$ al funtor de puntos del grupo $G = Aut_g A_C$ de haz de funciones $K[G]$ y $\mathcal{N}^{\cdot}$ denotará al funtor de puntos del subgrupo $1 + \mathcal{N}$ canónicamente isomorfo a $(Der^u, \bullet)$. Como en la sección 4.2 $G^{\cdot}$ es isomorfo por $\widetilde{f}$ al funtor que representa, $\mathcal{F}(B) = Aut_{g_B} A_C \otimes_K B$ y como hemos visto en la ecuación 12 el isomorfismo funtorial $\widetilde{f} : G^{\cdot} \to \mathcal{F}$ aplicado $B = K[\xi]$ restringe a los morfismos que al hacer $\xi = 0$ dan la identidad y tenemos el cuadro conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G^{\cdot e}(K[\xi]) = {Hom^e}_K(K[G], K[\xi]) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathcal{F}^I(K[\xi]) = Hom^I_{g_K}(A_C, A_C[\xi]) \\ \| & & \| \\ T_e G = Der_K(K[G], K) & & 1 + Der_K A_C.\xi \simeq Der_K A_C \end{array}$$

donde $Der_K A_C$ se refiere a las derivaciones de A_C que son de grado cero con la $gr -$ graduación ó $A_{n-1} -$ graduación y que como hemos visto es $(\mathbb{Z}^s \oplus C)^* \otimes_{\mathbb{Z}} K \oplus Der^{\mathcal{R}}(\mathcal{O}_X)$. En el cuadro, si $D \in Der_K(K[G], K) \Rightarrow h_D \in G^{\cdot}(K[\xi])$ es $h_D(y) = y(e) + D(y).\xi$ y $\widetilde{f}(h_D) = I + \widetilde{D}.\xi$ para un único $\widetilde{D} \in Der_K A_C$.

Por definición $1 + \mathcal{N}$ es para cada $K -$ álgebra B el subgrupo $\mathcal{N}^{\cdot}(B)$ tal que $\widetilde{f}(\mathcal{N}^{\cdot}(B))$ son los automorfismos de $B -$ álgebras $\varphi : A_C \otimes_K B \to A_C \otimes_K B$ tales que $\varphi = 1 + E$ para un $E \in Der^u_B(\mathcal{O}_X \otimes B)$. En el caso $B = K[\xi]$,

$$\varphi \in \mathcal{N}^{\cdot}(K[\xi]) \Leftrightarrow \varphi = 1 + E \text{ para un } E \in Der^u_{K[\xi}(\mathcal{O}_X \otimes K[\xi]) \tag{54}$$

Como $\mathcal{N}^{\cdot} \subset G \Rightarrow T_e\mathcal{N}^{\cdot} \subset T_e G$ y queremos calcular $\widetilde{f}(T_e\mathcal{N}^{\cdot})$ en $\mathcal{F}^I(K[\xi])$ y por tanto dentro de $Der_K A_C$ a través del cuadro conmutativo anterior. Aplicando el subfuntor tenemos

$$T_e(1 + \mathcal{N}) = Der_K(K[\mathcal{N}], K) = Hom^e(K[\mathcal{N}], K[\xi])$$

y como $Hom^e(K[\mathcal{N}], K[\xi]) \subset G^{\cdot e}(K[\xi]) \Rightarrow$

$$T_e(1+\mathcal{N}) = \mathcal{N}^{\cdot e}(K[\xi]) \subset G^{\cdot e}(K[\xi])$$

y restringiendo $\widetilde{f}$ en el cuadro anterior resulta el cuadro conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}^{\cdot e}(K[\xi]) = Hom^e_K(K[\mathcal{N}], K[\xi]) & \overset{\widetilde{f}}{\hookrightarrow} & Hom^I_K(A_C, A_C[\xi]) \\ \| & & \| \\ T_e(1+\mathcal{N}) = Der_K(K[\mathcal{N}], K) & \hookrightarrow & 1 + Der_K A_C.\xi \simeq Der_K A_C \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\widetilde{f}(\mathcal{N}^{\cdot e}(K[\xi])) = \{\varphi \in Aut_{K[\xi]} A_C[\xi] : \varphi = 1 + \widetilde{D}.\xi \text{ para un } \widetilde{D} \in Der_K A_C\}$$

Comparando esta condición con 54 $\Rightarrow$ se debe cumplir $\varphi = I + E = 1 + \widetilde{D}.\xi$ para un $E \in Der^u_{K[\xi]}(\mathcal{O}_X[\xi])$ y un $\widetilde{D} \in Der_K A_C \Rightarrow$

$$\varphi(a + b\xi) = a + b\xi + E(a) + E(b)(\xi) =$$

que separando $E = E_1 + E_2\xi$ es

$$= a + b\xi + E_1(a) + E_2(a)\xi + E_1(b)\xi = a + E_1(a) + (b + E_2(a) + E_1(b))\xi$$

y tiene que ser igual a

$$\varphi(a + b\xi) = 1 + \widetilde{D}.\xi(a) + \xi.(1 + \widetilde{D}.\xi)(b) = a + (\widetilde{D}(a) + b).\xi$$

$\Rightarrow E_1 = 0$ y $E_2 = D \Rightarrow E = D \otimes \xi$ y por tanto como $A_C[\xi]$ tiene la graduación de $A_C \Rightarrow$ E y D son del mismo grado con lo que $\widetilde{D} \in Der^u_K(\mathcal{O}_X) \Rightarrow T_e(Der^u, \bullet) \subseteq Der^u_K(\mathcal{O}_X)$ y se concluye como antes utilizando la cadena completa resolución de $(Der^u, \bullet) \simeq 1 + \mathcal{N}$ que son iguales por tener igual dimensión.
Si $\bar{R} \subset 1 + \mathcal{N}$ es un subgrupo algebraico, tendrá un subfuntor asociado tal que en $Aut_{K[\xi]} A_C[\xi]$ serán los automorfismos $\varphi = 1 + E$ para un $E \in Der^u_{K[\xi]}(A_C[\xi])$ que además cumpla cierta condición que caracterice a $\bar{R}$ y que es válida para $B = K[\xi]$ y en general para toda B luego para $B = K$, si $\widetilde{D} \in Der^u_K \mathcal{O}_X$ es tal que $\widetilde{D}.\xi = E$ cumple la condición entonces $\widetilde{D} \in Der^u_K(\mathcal{O}_X$ también la cumple y se tiene la contención del enunciado; en el caso de que además $\bar{R}$ sea aditivo es una igualdad porque $dim\, T_e \bar{R} = dim\, (\bar{R}, +)$.

□

Teorema 7.18. *El radical unipotente:*

1. $(1+\mathcal{N},\circ)$ *es el radical unipotente* R_u *de* $Aut_g^\circ A_C$ *y de* $Aut_{\mathbb{Z}^s}A'$ *y su álgebra de Lie es* $Der_K^u\mathcal{O}_X$

2. *Existe el producto semidirecto*

$$(1+\mathcal{N})\rtimes K^{*r}\simeq (Der^u,\bullet)\rtimes K^{*r}$$

donde la operación de K^{*r} *en* $(Der^u,\bullet)$ *es* $\mu.D$

3. *Inverso en* $Der^u\rtimes K^{*r}$:

$$(D,\mu)^{-1}=\left(\mu^{-1}.D^{-1},\mu^{-1}\right)$$

Demostración:
Veamos 1. Por comparación de sus espacios tangentes, por el Lema anterior $T_e(1+\mathcal{N})=Der_K^u(\mathcal{O}_X)$ mientras que de la proposición 7.16 se deduce

$$T_e\left(R\left(Aut_gA_C\right)\right)\subseteq\left(\mathbb{Z}^s\oplus C\right)^*\otimes_{\mathbb{Z}}K+Der_K^u(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$$

y

$$T_e\left(R_u\left(Aut_gA_C\right)\right)\subseteq Der_K^u(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$$

luego

$$T_e\left(R_u\left(Aut_gA_C\right)\right)\subseteq T_e\left(1+\mathcal{N}\right)$$

Por otro lado de los Teoremas 7.10 y 7.14 $1+\mathcal{N}$ es un subgrupo unipotente cerrado y conexo de $Aut_g^\circ A_C\Rightarrow$ bastará ver que es normal pues en tal caso $1+\mathcal{N}\subseteq R_u$ y se deduce por comparación de sus respectivos tangentes que coinciden efectivamente y en particular se deducirá que R_u contiene todas las raíces no parejables. Para ver que es normal, por 13.3 [12] equivale a probar que $T_e(1+\mathcal{N})$ es un ideal en $T_e(Aut_gA_C)$ con respecto al paréntesis de Lie. Para ello, hemos visto en el capítulo dedicado a derivaciones que

$$\left[x^\alpha D_v,x^\beta D_u\right]=\begin{cases} D_{(u-v)}\in M^* & \text{si } v(\beta)>0 \text{ y } u(\alpha)>0\\ -u(\alpha).x^{\alpha+\beta}D_v & \text{si } v(\beta)=0 \text{ y } u(\alpha)>0\\ v(\beta).x^{\alpha+\beta}D_u & \text{si } u(\alpha)=0 \text{ y } v(\beta)>0\\ 0 & \text{si } u(\alpha)=0 \text{ y } v(\beta)=0\end{cases}$$

El primer caso implicaría que las raíces son parejables lo cual es imposible si al menos una de las derivaciones está en $T_e(1+\mathcal{N})$ donde todas sus raíces son no parejables. El cuarto caso nada que decir. Si el resultado es el segundo ó tercer caso, si suponemos que $x^\alpha D_v \in T_e(1+\mathcal{N})$ y por tanto $\alpha \in S^*(v) \Rightarrow$ puede ocurrir $u(\alpha) > 0$ y puede ocurrir $u(\alpha) = 0$. Si $u(\alpha) > 0 \Rightarrow v(\beta) = 0$, $u(\beta) = -1$ y $w(\beta > 0)$ para algún $w \in \{v_1, \ldots, v_r\} \Rightarrow$ $\alpha + \beta \in S^*(v) \Rightarrow$

$$-u(\alpha).x^{\alpha+\beta} D_v \in T_e(1+\mathcal{N})$$

Si $u(\alpha) = 0$ entonces se trata del tercer caso es decir $v(\beta) > 0 \Rightarrow u(\alpha+\beta) = -1$ y $v(\alpha+\beta) \geq 0$ y como $\alpha \in S^*(v)$ se deduce ó bien existen w y w' estrictamente positivas sobre $\alpha+\beta$ o bien existe w tal que $w(\alpha+\beta) \geq 2$; en ambos casos se deduce que $\alpha+\beta$ es no parejable, $\alpha+\beta \in S^*(u)$ y por tanto que

$$v(\beta).x^{\alpha+\beta} D_u \in T_e(1+\mathcal{N})$$

con lo que se ha probado que $T_e(1+\mathcal{N}) \subset T_e(Aut_g A_C)$ es un ideal y por tanto el enunciado 1 del teorema.
El punto 2 se deduce del punto anterior y del Lema. Por último,sea

$$(E, \mu') = (D, \mu)^{-1}$$

es decir

$$(E, \mu') \,.\, (D, \mu) = (E \bullet \mu'.D, \mu'.\mu) = (0, 1)$$

$\Rightarrow \mu' = \mu^{-1}$ y si $E = \mu^{-1}.D^{-1}$ se tiene

$$E \bullet \mu'.D = \mu^{-1}.D^{-1} \bullet \mu^{-1}.D = \mu^{-1}.\left(D^{-1} \bullet D\right) = 0$$

y de igual modo se comprueba que es inverso por la derecha.

□

Teorema 7.19. ***Existencia de parte unipotente y parte reductiva:*** *El grupo $Aut_g^\circ A_C$ es el producto semidirecto del subgrupo $R_u = 1+\mathcal{N}$ que es su radical unipotente y el subgrupo $Aut_{g,\varepsilon} A_C$ que por tanto es reductivo, es decir,*

$$Aut_g^\circ A_C = 1+\mathcal{N} \rtimes Aut_{g,\varepsilon} A_C$$

Demostración:
El producto existe porque $R_u = 1+\mathcal{N}$ es subgrupo normal y la intersección es la identidad. La igualdad se deduce de la igualdes entre sus tangentes que ya hemos calculado.

□

Hemos visto que $Aut_g^\circ A_C$ (y por tanto $Aut^\circ X$) es producto semidirecto de grupos aditivos y de un subgrupo reductivo; para determinar totalmente este producto y por tanto $Aut^\circ X$ resta calculal tal parte reductiva y cómo esta opera sobre la parte unipotente y sobre cada subgrupo aditivo que la compone. Esto lo veremos en las dos secciones siguientes.

7.3. Parte reductiva del grupo de automorfismos graduados

Veremos que la parte reductiva es el producto directo de los grupos lineales asociados a los automorfismos de los espacios vectoriales $\langle F_{x_i}\rangle_K$. Sea el anillo de Cox

$$A_C = K\left[x_i = x^{(g_i,0)}, x_j = x^{(N^j,-m_j)}\right] \text{ para } i = 1,\dots,s \text{ y } j = s+1,\dots,j+k$$

$$\text{donde } g_i = (0,\dots,0,1_i,0,\dots,0) \text{ y } N^j = v'(m_j)$$

Vamos a distribuir las variables $x_1,\dots,x_r$ según las clases $[x_i]$ con la definición dada en 7.1 resultando:

$$\{x_1,\dots,x_r\} = \left\{x_{1(0)},\dots,x_{1(\kappa_1)}\right\} \coprod \dots \coprod \left\{x_{h(0)},\dots,x_{h(\kappa_h)}\right\}$$

con $h \geq s$, $[v_{i(p)}] = [v_{i(q)}]$ $\forall\ 1 \leq i \leq h$, $\forall\ p,q \leq \kappa_i$ y $\kappa_1 + \dots + \kappa_h + h = r$ y donde $v_{i(j)}$ es la arista asociada a la variable $x_{i(j)}$. A cada uno de estos h conjuntos lo escribiremos A_i, es decir $A_i = [x_i]$ y denotaremos de igual modo al anillo que generan. La Proposición 7.1 garantiza que en cada uno de los conjuntos disjuntos definidos están y sólo están todas las variables del anillo de Cox que tienen el mismo grado con la $A_{n-1}-$graduación y que son los generadores del espacio vectorial $A_C^\varepsilon(x_i)$ para cualquier representante x_i de su clase.
Denotaremos $\alpha_{0,p}^i$ a la raíz parejable respecto $v_{i(0)}, v_{i(p)}$. Se tiene entonces que

$$\alpha_{0,p}^i - \alpha_{0,q}^i = -(\alpha_{0,q}^i - \alpha_{0,p}^i) = -\alpha_{q,p}^i = \alpha_{p,q}^i$$

que es la raíz parejable respecto $v_{i(p)}, v_{i(q)}$.
El número total de raíces parejables en $S(v_{i(0)}) \coprod \cdots \coprod S(v_{i(\kappa_i)})$ es $\kappa_i.(\kappa_i+1) \Rightarrow$

$$\text{Número Total de raíces parejables} = \sum_{i=1}^{h} \kappa_i.(\kappa_i+1)$$

que es la dimensión del espacio vectorial $Der_K^s(\mathcal{O}_X) \Rightarrow$ por el teorema 7.17 **La dimensión del tangente en el neutro a la parte reductiva $Aut_{g,\varepsilon}A_C$ de $Aut_g^\circ A_C$ es:**

$$dim\, T_e(Aut_{g,\varepsilon}A_C) = (\sum_{i=1}^{h} \kappa_i.(\kappa_i+1) + dim T_e\left(K^{*r}\right) \tag{55}$$

y como $dimT_e\left(K^{*r}\right) = r$ y $r = h + \sum_{i=1}^{h} \kappa_i$ se tiene que tal número es

$$(\kappa_1 + 1)^2 + \cdots + (\kappa_h + 1)^2$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, h\}$ sea el anillo $A_i = K[x_{i(0)}, \ldots, x_{i(\kappa_i)}]$ que pueden ser de dos tipos:

$$\text{Tipo 1: Cuando } x_{i(0)} = x^{(g_{i_0}, 0)} \ i_0 \leq s$$

$$\text{Tipo 2: Cuando } x_{i(0)} = x^{(v'(m_{i(0)}), -m_{i(0)})} \text{ con } i(0) > s$$

y en ambos casos el resto de variables es $x_{i(j)} = x^{(v'(m_{i(j)}), -m_{i(j)})}$ con $i(j) > s$. En ambos casos el anillo A_i es $\mathbb{Z}-$graduado siendo $grad(x_{i(j)}) = 1 \ \forall \ 0 \geq j \geq \kappa_i$. Esta es la $\varepsilon -$ grduación definida al inicio de este capítulo $\Rightarrow Aut_{\mathbb{Z}}A_i = Aut_K^{\varepsilon}A_i$ que denota los automorfismos $\varepsilon -$ grduados del álgebra A_i y es subgrupo de $Aut_g^{\circ}A_C$ porque los anillos A_i se han elegido de modo que todos sus elementos de grado 1 tengan la misma $A_{n-1}-$graduación, lo cual se cumple gracias al punto 1 de la Proposición 7.1. Por tanto

$$Aut_{\mathbb{Z}}A_i \subset Aut_{g,\varepsilon}A_C \subset Aut_g^{\circ}A_C$$

Sea $E_i = \langle y_0 = x_{i(0)}, \ldots, y_{\kappa_i} = x_{i(\kappa_i}\rangle_K$ el espacio vectorial generado por los elementos de grado 1 de $A_i \Rightarrow Aut_K^{\varepsilon}A_i = Aut_K E_i$. Sea $G(\kappa_i + 1)$ el grupo lineal de orden $\kappa_i + 1$ que opera naturalmente en E_i : Si $\{w_0, \ldots, w_{\kappa_i}\}$ es la base dual de $\{y_0, \ldots, y_{\kappa_i}\}$ y $M = (y_{pq}) \in G(\kappa_i + 1) \Rightarrow \tau_M \in Aut_K E_i$ es $w_p(\tau_M(y_q)) = y_{pq}$ y $G(\kappa_i + 1) = Spec\, K[y_{pq}]_{det}$ es el representante del funtor $Aut_{B-alg}^{\varepsilon}(A_i \otimes B)$ y el isomorfismo funtorial, con las notaciones del capítulo 4 es:

$$\begin{array}{ccc} K[y_{pq}]^{\cdot}(B)) & \stackrel{\widetilde{f}}{\to} & Aut_B^{\varepsilon}(A_i \otimes B) \\ M = (b_{pq}) & \rightsquigarrow & \tau_M(y_q) = \sum_q b_{pq} y_q \end{array}$$

y el morfismo universal es $\tilde{z}(y_p) = \sum_j y_j \otimes y_{pj}$. En este sentido escribiremos $G(\kappa_i + 1) = Aut_K^{\varepsilon}A_i$.

Veamos cual es el **álgebra de Lie de la parte reductiva de** Aut_gA_C :

Teorema 7.20. *La parte reductiva de $Aut_g^{\circ}A_C$ es el producto directo de los h grupos lineales $G(\kappa_i + 1)$ donde h es el número de clases $[x]$ en el conjunto inicial Δ_i :*

$$Aut_{g,\varepsilon}A_C = G(\kappa_1 + 1) \times \cdots \times G(\kappa_h + 1)$$

Además el álgebra de Lie de cada subgrupo $G(\kappa_i + 1) = Aut_K^{\varepsilon}A_i$ de Aut_gA_C esá generada por las $(\kappa_i + 1)^2$ derivaciones $x^{(v'(\alpha_{p,q}^B), \alpha_{p,q}^C)} D_{\widetilde{v}_{i(p)}}$ donde $\alpha_{p,q} = \alpha_{p,q}^B, \alpha_{p,q}^C$ es la raíz parejable *respecto* $v_{i(p)}, v_{i(q)}$ $\forall$ $p \neq q$ *y* $\alpha_{jj} = 0$ *y donde* $\widetilde{v}_{i(p)}$ *es la aplicación sobre* $\mathbb{Z}^s \oplus C$ *definida en la sección 5.4.3, es decir*

$$\begin{aligned} \widetilde{v}_i((n,\alpha)) &= n_i + v_i(\alpha) \text{ } si \text{ } 1 \leq i \leq s \\ \widetilde{v}_i((n,\alpha)) &= \overline{v}_i(\alpha) = v_i(\alpha) \text{ } si \text{ } s+1 \leq i \leq s+k = r \end{aligned}$$

Como derivaciones en $\mathcal{O}_X$ son:

$$x^{(v'(\alpha^B_{p,q}),\alpha^C_{p,q})} D_{\widetilde{v}_{i(p)}} = x^{\alpha_{pq}} D_{v_{i(p)}}$$

Demostración:

Como $G(\kappa_i + 1) = Aut^{\varepsilon}_K A_i \Rightarrow G(\kappa_i + 1) \subset Aut_{g,\varepsilon} A_C \Rightarrow$

$$G(\kappa_1 + 1) \times \cdots \times G(\kappa_h + 1) \subseteq Aut_{g,\varepsilon} A_C$$

y se concluye porque como se ha visto en la igualdad 55 sus espacios tangentes coinciden al tener la misma dimensión siendo ambas partes grupos conexos.

Calculemos ahora el espacio tangente $T_e G(\kappa_i + 1)$: Simplificando la notación sea $A = A_i = K[y_0 = x_{i(0)}, \ldots, y_l = x_{i(l)}]$ y $E = E_i = \langle y_0 \ldots, y_l \rangle_K$. Como $T_e G(l+1) = Der_K(K[y_{pq}])$ que está generado por las derivadas parciales $\partial_{y_{pq}}$, las correspondientes derivaciones de A_i de $\varepsilon - grado$ cero serán $\widetilde{f}(\partial_{y_{pq}})$. Se cumple que tales derivaciones son:

$$\widetilde{f}(\partial_{y_{pq}}) = y_q \partial_{y_p}$$

Para comprobarlo aplicamos la ecuación 13, pg. 49 $\Rightarrow$

$$\widetilde{f}(\partial_{pq})(y_j) = \sum_n y_n . \partial_{y_{pq}}(y_{jn})$$

el único sumando no nulo es $n = q \Rightarrow$

$$\widetilde{f}(\partial_{pq})(y_j) = y_q . \partial_{y_{pq}}(y_{jq}) = \begin{cases} 0 & j \neq p \\ y_q & j = p \end{cases}$$

$\Rightarrow \widetilde{f}(\partial_{y_{pq}}) = y_q \partial_{y_p}$. Para concluir, hay que encontrar las derivaciones $Der_g A_C$ que en A_i coinciden con $y_q \partial_{y_p}$ y fuera son nulas; bastará comprobar que las del enunciado lo cumplen ya que por dimensión se acaba al haber exactamente $(l+1)^2$.

Sea pues $y_q \partial_{y_p} = x_{i(q)} \partial_{x_{i(p)}}$:

Si $A = A_i$ es del Tipo 2 : Todas la variables de A_i son $x_{i(j)} = x^{(v'(m_{i(j)}),-m_{i(j)})}$ con $i(j) > s \Rightarrow \widetilde{v}_{i(j)} = \bar{v}_{i(j)} \Rightarrow$

$$D_{\bar{v}_{i(j)}}\left(x^{(v'(m_{i(p)}),-m_{i(p)})}\right) = \bar{v}_{i(j)}(v'(m_{i(p)}), -m_{i(p)}).x^{(v'(m_{i(p)}),-m_{i(p)})}$$

y como

$$\bar{v}_{i(j)}(v'(m_{i(p)}), -m_{i(p)}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq j \\ 1 & \text{si } p = j \end{cases}$$

$\Rightarrow x_{i(j)}\partial_{x_{i(j)}} = D_{\bar{v}_{i(j)}}$ y veamos ahora que $x_{i(q)}\partial_{x_{i(p)}} = x^{(v'(\alpha^B_{p,q}),\alpha^C_{p,q})}D_{\bar{v}_{i(p)}}$ para α_{pq} la raíz parejable respecto $v_{i(p)}v_{i(q)}$. Para ello sea $s < j' \neq i(p)$:

$$x^{(v'(\alpha^B_{p,q}),\alpha^C_{p,q})}D_{\bar{v}_{i(p)}}(x_{j'}) = \bar{v}_{i(p)}\left((v'(m_{j'}), -m_{j'})\right).x^{\left(v'(\alpha^B_{p,q}+m_{j'}),\alpha^C_{p,q}-m_{j'}\right)} = 0$$

porque $\bar{v}_{i(p)}(v'(m_{j'}), -m_{j'})$ si $j', i(p) > s$ y $j' \neq i(p) \Rightarrow$ coinciden sobre $x_{j'\neq i(p)}$ y veamos que en $x_{i(p)}$ da justamente $x_{i(q)}$:

$$x^{(v'(\alpha^B_{p,q}),\alpha^C_{p,q})}D_{\bar{v}_{i(p)}}(x_{i(p)}) = \bar{v}_{i(p)}\left(\left(v'(m_{i(p)}), -m_{i(p)}\right)\right).x^{\left(v'(\alpha^B_{p,q}+m_{i(p)}),\alpha^C_{p,q}-m_{i(p)}\right)}$$

donde lo primero es

$$\bar{v}_{i(p)}\left(\left(v'(m_{i(p)}), -m_{i(p)}\right)\right) = 1$$

para lo segundo, como $v(\alpha_{p,q}) = (0, \ldots, 0, -1_{i(p)}, 0, \ldots, 0, 1_{i(q)}, 0, \ldots, 0) \Rightarrow$ por un lado $\alpha^C_{p,q} = m_{i(p)} - m_{i(q)}$ es decir $\alpha^C_{p,q} - m_{i(p)} = -m_{i(q)}$ y por otro $v'(\alpha_{p,q}) = 0 \Rightarrow v'(m_{i(p)} - m_{i(q)}) + v'(\alpha^B_{p,q}) = 0 \Rightarrow v'(\alpha^B_{p,q} + m_{i(p)}) = v'(m_{i(q)})$ y por tanto queda

$$1.x^{\left(v'(m_{i(q)}),-m_{i(q)}\right)} = x_{i(q)}$$

luego en efecto coinciden.

Veamos ahora en caso en que $A = A_i$ es del Tipo 1 : La única variable diferente a las del tipo anterior es $y_0 = x_{i(0)} = x^{(g_{i_0},0)}$ con $i_0 \leq s$, luego hay que comprobar las igualdades:

$$x_{i(0)}\partial_{x_{i(0)}} = D_{\bar{v}_{i(0)}}$$

$$x_{i(j)}\partial_{x_{i(0)}} = x^{(v'(\alpha^B_{0,j}),\alpha^C_{0,j})}D_{\bar{v}_{i(0)}}$$

$$x_{i(0)}\partial_{x_{i(j)}} = x^{(v'(\alpha^B_{j,0}),\alpha^C_{j,0})}D_{\bar{v}_{i(j)}}$$

La primera se comprueba como antes teniendo en cuenta

$$\bar{v}_{i(0)}\left((g_{i_0}, 0)\right) = 1 \qquad \bar{v}_{i(0)}\left(\left(v'(m_{i(j)}), -m_{i(j)}\right)\right) = 0$$

Para la segunda, sobre $x_{i(j')}$ con $j' \neq 0$ ambas expresiones a comparar son nulas. Veamos que en $x_{i(0)}$ da $x_{i(j)}$. Para ello,

$$x^{(v'(\alpha^B_{0,j}),\alpha^C_{0,j})} D_{\bar{v}_{i(0)}} \left(x^{(g_{i_0},0)} \right) = \underbrace{v_{i(0)} \left((g_{i_0}, 0) \right)}_{=1} .x^{(v'(\alpha^B_{0,j})+g_{i_0},\alpha^C_{0,j})}$$

y como $\alpha_{0,j}$ es la raíz parejable respecto $v_{i(0)}, v_{i(j)} \Rightarrow \alpha^C_{0,j}) = -m_{i(j)}$ y $v'(\alpha_{0,j}) = -g_{i_0}$, es decir, $v'(\alpha^B_{0,j}) + g_{i_0} = -v'(\alpha^C_{0,j}) \Rightarrow$ la expresión anterior queda

$$x^{(v'(\alpha^B_{0,j})+g_{i_0},\alpha^C_{0,j})} = x^{(-v'(\alpha^C_{0,j}),-m_{i(j)})} = x^{(-v'(-m_{i(j)}),-m_{i(j)})}$$

que es $x_{i(j)}$. Para la tercera igualdad, ambas partes son claramente nulas sobre $x_{i(0)}$. Sobre $x_{i(j')}$ con $0 \neq j' \neq j$ está comprobado que ambas son también nulas y resta ver que en $x_{i(j)}$ da $x_{i(0)}$.

$$x^{(v'(\alpha^B_{j,0}),\alpha^C_{j,0})} D_{v_{\bar{i(j)}}} \left(x^{(v'(m_{i(j)}),-m_{i(j)})} \right) = \underbrace{v_{i(j)} \left((v'(m_{i(j)}), -m_{i(j)}) \right)}_{=1} .x^{(v'(\alpha^B_{j,0}+m_{i(j)}),\alpha^C_{j,0}-m_{i(j)})}$$

y como $\alpha_{j,0}$ es la raíz parejable respecto $v_{i(j)}, v_{i(0)}$ siendo $i(0) \leq s \Rightarrow \alpha^C_{j,0} = m_{i(j)}$ y $v'(\alpha_{j,0}) = g_{i(0)} \Rightarrow$ lo anterior es

$$x^{(v'(\alpha^B_{j,0}+m_{i(j)}),\alpha^C_{j,0}-m_{i(j)})} = x^{(v'(\alpha^B_{j,0}+\alpha^C_{j,0}),\alpha^C_{j,0}-m_{i(j)})} =$$

$$= x^{(v'(\alpha_{j,0}),-m_{i(j)}-m_{i(j)})} = x^{(g_{i(0)},0)}$$

con lo que se acaba.

Nótese que como vimos en el teorema 5.10 y después en el teorema 7.17 las derivaciones correspondientes al $T_e Aut_{g,\varepsilon} A_C$ es la suma $(\mathbb{Z}^s \oplus C)^* \otimes_{\mathbb{Z}} K + Der^s_K(\mathcal{O}_X)$ de modo que $x^{(v'(\alpha^B_{p,q}),\alpha^C_{p,q})} D_{\widetilde{v}_{i(p)}}$ en el caso $p \neq q$ dan las derivaciones $x^{\alpha_{pq}} D_{v_{i(p)}} \in Der^s_K(\mathcal{O}_X)$ mientras que el resto son los generadores del espacio vectorial $(\mathbb{Z}^s \oplus C)^* \otimes_{\mathbb{Z}} K$.

□

Denotaremos $l_i = \kappa_i + 1 \ \forall \ i = 1, \ldots, h$

Corolario 7.21. *El grupo $Aut^\circ_g A_C$ es el producto semidirecto de grupos aditivos, que es su radical unipotente, y el producto de grupos lineales que es su parte reductiva:*

$$Aut^\circ_g A_C = \left(\bar{R}_1 \rtimes \cdots \rtimes \bar{R}_{l(\Delta_1)} \right) \rtimes (Gl(l_1) \times \cdots \times Gl(l_h))$$

donde:

1.

$$R_u = 1 + \mathcal{N} = \bar{R}_1 \rtimes \cdots \rtimes \bar{R}_{l(\Delta_1)}$$

es el radical unipotente del grupo y $\bar{R}_i$ son subgrupos aditivos. La operación como grupo es: Si $a = a_1, \ldots, a_j$ y $b = b_{j+1}, \ldots, b_\delta$ y

$$(a,b) = a_1, \ldots, a_j, b_{j+1}, \ldots, b_\delta \in \left(\prod_{i=1}^{\delta = l(\Delta_1)} \rtimes \mathbb{A}^{n_i}, \bullet \right)$$

de igual modo (c,d) con $(a+c)_i = a_i + c_i$ y lo mismo para $b+d \Rightarrow$

$$(a,b) \bullet (c,d) = (a + c + P(a,c) + P(b,c),\, b + d + P(b,d)$$

2. Si h es el número de clases $[x]$ en Δ_1 entonces

$$(Gl(l_1) \times \cdots \times Gl(l_h))$$

es la parte reductiva y $Gl(l_1)$ son grupos lineales

Demostración:

Se deduce directamente y por este orden de los teoremas 7.19, 7.18, 7.15, 7.20. En cuanto a la operación en $R_u = (Der^u, \bullet)$, cada a_i (respectivamente b_i etc) consiste en una suma de derivaciones asociadas a una o varias clases $[v]$ y se cumple que si $[v]$ y $[u]$ son dos de estas clases cuyas derivaciones asociadas están (combinación lineal de ellas) en a_i ó en b_i entonces $u \not< v$ y $v \not< u \Rightarrow$ por la observación 15 se cumple que $P(x_i, y_i) = 0$ para cualesquiera $x = a$ ó $x = b$ ó $y = a$ ó $y = b$ y si a_i (resp. b_i etc) es combinación lineal de derivaciones asociadas a $[v]$ y a_j (resp. b_j etc) lo es de derivaciones asociadas a $[u]$ y $i < j$ $\Rightarrow v \not< u$ y por la citada observación se cumple $P(x_i, y_j) = 0$ luego se puede resumir con la siguiente propiedad:

$$\text{Si } i \leq j \ \Rightarrow P(x_i, y_j) = 0$$

Aplicamos ahora la operación en $(Der^u, \bullet) \Rightarrow$

$$(a,b) \bullet (c,d) = (a,b) + (c,d) + P\left((a,b)\,,\,(c,d)\right)$$

y de la definición del operador P y la observación 15 se sigue

$$P\left((a,b)\,,\,(c,d)\right) = P\left((a,b)\,,\,c\right) + P\left((a,b)\,,\,d\right)$$

y ahora de la propiedad anterior (exactamente aplicada al caso $i < j$) se deduce que $P((a,b),d) = P(b,d)$. Finalmente se obtiene el enunciado porque las raíces de la derivación $P(x,y)$ están asociadas a las $v \in \Delta_1$ a las que estén asociadas las raíces de y con lo que se acaba. Nótese que $P((a,b),c) = P(a,c) + P(b,c)$ donde en realidad habría que denotar $P(a,c) = P((a,0),(c,0))$ y $P(b,c) = P((0,b),(c,0))$.

□

Corolario 7.22. *El radical de* $Aut_g^\circ A_C$ *es*

$$R(Aut_g^\circ A_C) = R_u \rtimes T(h)$$

donde $T(h)$ *es un toro contenido en* $\prod_{i=1}^h Gl(l_i)$ *que como subgrupo del toro* $T(r)$ *es*

$$p^*(T(h)) = \{\lambda \in T(r) :\ \lambda_i = \lambda_j \,\forall\, [v_i] = [v_j]\}$$

siendo p^* *el morfismo dual del morfismo de módulos* $\prod_{i=1}^h Gl(l_i) \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^h$ *y* $p = p_1 \times \cdots \times p_h$ *con* $p_i(n_1, \ldots, n_{l_i}) = n_1 + \ \ldots\ + n_{l_i}$

Demostración:

Como $Aut_g^\circ A_C = R_u \rtimes \prod_{i=1}^h Gl(l_i) \Rightarrow R(Aut_g^\circ A_C) = R_u \rtimes \prod_{i=1}^h R(Gl(l_i))$ y como $R(Gl(l_i) = T_{\mathbb{Z}} \Rightarrow \prod_{i=1}^h R(Gl(l_i)) = \prod_{i=1}^h T_{\mathbb{Z}}$ luego si $T(h)$ es $\prod_{i=1}^h T_{\mathbb{Z}}$ entonces

$$R(Aut_g^\circ A_C) = R_u \rtimes T(h)$$

Como $T_{\mathbb{Z}}$ en $Gl(l_i)$ consiste en las matrices diagonales constantes $\Rightarrow T(h)$ en $\prod_{i=1}^h Gl(l_i)$ en la expresión $G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B})$ son las matrices diagonales con la diagonal del tipo

$$a_1, \ldots, a_1, \ldots, a_{h'}, \ldots, a_{h'}, \mu_1, \ldots, \mu_1, \ldots, \mu_s, \ldots, \mu_s$$

que abreviaremos con la expresión, que tiene en cuenta el número de repeticiones:

$$a_1 \times l_1, \ldots a_{h'} \times l_{h'}, \mu_1 \times l_{h'+1}, \ldots, \mu_s \times l_{h'+s=h}$$

que, denotando $\mu' = \mu_1, \ldots, \mu_s$, corresponde al elemento del toro $T(r)$:

$$\mu'; a_1 \times l_1, \ldots a_{h'} \times l_{h'}, \mu_1 \times \kappa_{h'+1}, \ldots, \mu_s \times \kappa_{h'+s=h}$$

lo que define la inyección $p^* : T(h) \hookrightarrow T(r)$ que es

$$p^*(\mu'; a) = \mu'; a_1 \times l_1, \ldots a_{h'} \times l_{h'}, \mu_1 \times \kappa_{h'+1}, \ldots, \mu_s \times \kappa_{h'+s=h}$$

que obviamente es el dual del morfismos de módulos del enunciado.
Esta distribución ordenada y en bloques de los índices $1, \ldots, s; s+1, \ldots, s+k = r$ corresponde, en términos de $v_1, \ldots, v_s; v_{s+1}, \ldots, v_r$ a la secuencia

$$v_1, \ldots, v_s; A_1, \ldots, A_{h'}, A^*_{h'+1}, \ldots, A^*_h$$

donde los conjuntos A_j ya han sido definidos y consisten en los representantes de cada clase de equivalencia y $A^*_{h'+i} = A_{h'+i} \setminus v_i$ es la clase $[v_i]$ menos el v_i para todo $i \leq s$.
Se concluye observando que para toda raíz parejable α

$$v(\alpha) = (0, \ldots, 0, \pm 1, 0, \ldots, 0, \mp 1, 0 \ldots, 0)$$

y los $+1$ y -1 están ambos en los bloques $A_{j \leq h'}$ ó $A^*_{h'+i}$ ó bien es 1 en el lugar $i \leq s$ y -1 en el bloque $A^*_{h'+i}$

□

7.4. Producto semidirecto del radical unipotente y la parte reductiva

Una vez hemos calculado el radical unipotente R_u y la parte reductiva de $Aut^\circ_g A_C$ (equivalentemente de $Aut^\circ_{\mathbb{Z}^s} A'$) vamos a ver cómo opera la segunda sobre la primera, demostrando que lo hace operando sobre cada subgrupo $\bar{R}_i$.

Notaciones: Como en la sección anterior, vamos a descomponer el conjunto de las variables de A_C $\{x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+k=r}\}$ asociado a los datos iniciales en los subconjuntos A_i antes definidos, pero ahora de forma más detallada teniendo en cuenta si son del Tipo 1 ó Tipo 2 y teniendo en cuenta el Teorema 7.4 que nos va a permitir elegir los elementos de A_i de forma consecutiva en relación con las columnas de la matriz $\mathcal{R}$ de 7.1.
Sea pues

$$\{x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+k}\} = \mathcal{A} \coprod \mathcal{B}$$

$$\mathcal{A} = A_1 \coprod \cdots \coprod A_{h'} \qquad \mathcal{B} = B_1 \coprod \cdots \coprod B_s$$

donde A_j son del Tipo 2, $A_j = \{x_{j(1)}, \ldots, x_{j(l_j)}\}$ con $j(p) > s \ \forall\ 1 \leq p \leq l_j$ y caracterizado por la siguiente condición:

$$x_{j(p)}, x_{j(q)} \in A_j \Longleftrightarrow [v_{j(p)}] = [v_{j(q)}]$$

$S^*(v_{j(p)}) \neq \emptyset \ \forall \ j(p) > s$ de modo que todos los A_i contienen raíces no parejables pues en otro caso sus clases estarían en los conjuntos de la parte $\mathcal{B}$ que son los conjuntos B_i del Tipo 1,

$$B_i = A_{h'+i} = [x_i] = \{x_i\} \coprod \{x_{(h'+i)(1)}, \ldots, x_{(h'+i)(l_{h'+i})}\}$$

caracterizado también por la condición

$$x_{j>s} \in B_i \Longleftrightarrow [v_j] = [v_i]$$

Según hemos visto, la parte reductiva de $Aut^\circ_g A_C$ es el producto de los grupos:

$$G_j = Gl(l_j) \simeq Aut_{\mathbb{Z}} A_j \qquad G_{h'+i} = Gl(l_{h'+i} + 1) \simeq Aut_{\mathbb{Z}} B_j$$

Definición: Sea $\mathcal{T} \equiv \ 0 = L_0 \subseteq \cdots \subseteq L_n = R_u$ cualquier resolución del radical uniponente como las definidas en las secciones 7.2.1 y 7.2.2 en las que los subgrupos L_p dependen de algunas de las columnas $S^*(v)$ de la matriz $\mathcal{R}^*$. Dado $x_j \in \{x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+k}\}$ diremos que $x_j \in L_p$ (indistintamente $v_j \in L_p$, indistintamente $S^*(v_j) \in L_p$) cuando los automorfismos de la parte unipotente asociados a las raíces de la columna $S^*(v_j)$ estén en L_p.

Observación 20. *Es importante tener en cuenta que cada conjunto A_j definido consiste en $\{[x]\}$ que son todos los representantes de $[x]$ para $x \in \{x_{s+1}, \ldots, x_{s+k}\}$. Todos estos representantes son $x_{j(p)}$ y para todos ellos $S^*(v_{j(p)}) \neq \emptyset \ \forall \ j(p) > s$ de modo que todos los A_i contienen raíces no parejables pues en otro caso sus clases estarían en los conjuntos de la parte $\mathcal{B}$ que son los conjuntos B_i que consisten en $\{[x']\}$ con un único representante en $\{x_1, \ldots, x_s\}$ y el resto en $\{x_{s+1}, \ldots, x_{s+k}\}$ sin raíces no parejables. Por tanto* ***toda resolución $\mathcal{T}$ de Der^u completa tiene las diferencias sucesivas disjuntas $T_i \setminus T_{i-1}$ formadas por los conjuntos A_j.***

También sabemos por el teorema 7.4 que para cada A_j el número de elementos en $S^*(v_{j(p)})$ y el conjunto $\Pi(x_{j(p)})$ (notación de la sección 7.1) no dependen de la variable $x_{j(p)} \in A_j$ elegida, es decir, $\Pi(x_{j(p)}) = \Pi(x_{j(q)}) \ \forall \ 1 \leq p, q \leq l_j$ y se deduce:

$$\forall \ 0 \leq i \leq s \ A_C(x_i) = \langle B_i \rangle_K$$

$$\forall \ s < j \leq h' \text{ y } x_v \in A_j,\ A_C(x_v) = \langle A_j \rangle_K \coprod \langle \Pi(x_{j(1)}) \rangle_K$$

Al número de elementos en $S^*(v_{j(p)})$ lo llamaremos d_j pues no depende de p y como $\Pi(x_{j(p)}) = \Pi(x_{j(1)})\ \forall\ p$, tal conjunto lo denotaremos simplemente $\Pi(j)$. Si $S^*(v_{j(1)}) = \{r_1^{j(1)}, \ldots, r_{d_j}^{j(1)}\} \Rightarrow$

$$\Pi(j) = \Pi(x_{j(1)}) = \left\{ n_{r_1^{j(1)}}(x_{j(1)}), \ldots, n_{r_{d_j}^{j(1)}}(x_{j(1)}) \right\}$$

Denotaremos $n_{r_i^{j(1)}}(x_{j(1)}) = \Pi(j)_i$ y todos ellos dan un vector fila que también denotaremos $\Pi(j)$ es decir,

$$\Pi(j) = \big(\Pi(j)_1, \ldots, \Pi(j)_{d_j}\big)$$

y denotaremos $x(j) = (x_{j(1)}, \ldots, x_{j(l_j)})$.
Sea por otro lado la matriz de la parte reductiva $M \in M(\mathcal{A}) \times M(\mathcal{B})$ donde:

$$M = M(A_1) \times \cdots \times M(A_{h'}) \times M(B_1) \times \cdots \times M(B_s) \in G_1 \times \cdots \times G_{h'} \times G_{h'+1} \times \cdots \times G_{h'+s}$$

y $\tau_M \in Aut_g^\circ A_C$ es el correspondiente automorfismo de la parte reductiva. $M(A_j)^p$ denota la columna $p-$ésima de $M(A_j)$. Como $\tau_M(A_C(x_{j(p)})) = A_C(x_{j(p)})$ y $A_C(x_{j(p)}) = \langle A_j\rangle_K \coprod \langle \Pi(j)\rangle_K$ y $\tau_M(\langle A_j\rangle_K) = \langle A_j\rangle_K \Rightarrow$

$$\begin{cases} \tau_M\left(x_{j(p)}\right) = x(j).M(A_j)^p & \text{donde } p \in \{1, \ldots, l_j\} \\ \tau_M\left(\Pi(j)_i\right) = \Pi(j).\overline{M}(j)^i & \text{donde } i \in \{1, \ldots, d_j\} \end{cases}$$

y donde $\overline{M}(j)$ es una matriz cuadrada de orden d_j que, por ser τ_M morfismo de álgebras, dependerá de $M(B_1), \ldots, M(B_s)$ y las $M(A_{l>j})$ y puede calcularse explícitamente alpicando la fórmula del Teorema 7.5 en términos de los coeficientes de las matrices anteriores y las soluciones de un sistema de ecuaciones diofánticas en un politopo. Esto lo veremos después de ver cómo opera la parte reductiva del grupo $Aut_g^\circ A_C$ sobre su radical unipotente $R_u = 1+\mathcal{N}$. Es obvio y basta aplicarlos a las variables para deducir que $(\tau_M)^{-1} = \tau_{M^{-1}}$ y que $\overline{M^{-1}} = (\overline{M})^{-1}$.
Sea $D = Der_K^u(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ dada por las raíces no parejables $\Rightarrow$ la escribimos

$$D = \sum_{j=1}^{h'} D(j), \qquad D(j) = \sum_{p=1}^{l_j} \left(\sum_{q=1}^{d_j} \lambda_{D(j)}{}_q^p . x^{r_q^{j(p)}} D_{v_{j(p)}} \right) \tag{56}$$

luego $(\lambda_D(j))_j$ es la matriz de la derivación D y la columna $p-$ésima de $(\lambda_D(j))$ es $(\lambda_{D(j)})^p$ $\Rightarrow$

$$n_D(x_{j(p)}) = \Pi(j).(\lambda_D(j))^p \qquad n_D(x(j)) = \Pi(j).(\lambda_D(j))$$

En el siguiente teorema pretendemos dar la operación de la parte reductiva $\prod_{i=1}^{h=h'+s} Gl(l_i)$ sobre la parte unipotente R_u y de hecho veremos que lo hace operando en cada subgrupo de automorfismos de R_u asociados a las raíces de cada clase $[u] = [u_{j(1)}]$ que hemos denotado $1 + n_{D(j)}$. Por tanto tenemos que calcular

$$\tau_M \circ 1 + n_D \circ \tau_{M^{-1}} = 1 + n_E$$

tal que para cada j se cumpla:

$$\tau_M \circ 1 + n_{D(j)} \circ \tau_{M^{-1}} = 1 + n_{E(j)}$$

Por comodidad en las cuentas vamos a calcular $\tau_{M^{-1}} \circ 1 + n_D \circ \tau_M$ y se deduce de la menera obvia $\tau_M \circ 1 + n_D \circ \tau_{M^{-1}}$:

Teorema 7.23. *Con las notaciones anteriores, sea τ_M el automorfismo de la parte reductiva de $Aut_g^{\circ} A_C$ y $(1 + n_D) \in R_u$ y para cada $1 \leq j \leq h'$, $\overline{M}(j)$ denota la matriz tal que $\tau_M (\Pi(j)_i) = \Pi(j).\overline{M}(j)^i$. Entonces:*

$$\tau_{M^{-1}} \circ 1 + n_D \circ \tau_M = 1 + n_E$$

donde $E \in Der_K^u(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ es:

$$E = \sum_{j=1}^{h'} E(j), \qquad E(j) = \sum_{p=1}^{l_j} \left(\sum_{q=1}^{d_j} \lambda_E(j)_q^p . x^{r_q^{j(p)}} D_{v_{j(p)}} \right)$$

de coeficientes

$$\lambda_E(j) = \overline{M}^{-1}(j).\lambda_{D(j)}.M(A_j)$$

Demostración:

Hay que comprobar en cada variable. Como $\tau_M(\langle \mathcal{B} \rangle_K) = \langle \mathcal{B} \rangle_K$ y $1 + n_D$ es la identidad sobre $\langle \mathcal{B} \rangle_K$ para toda $D \in Der_K^u(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \Rightarrow$ en $\langle \mathcal{B} \rangle_K$

$$\tau_{M^{-1}} \circ 1 + n_D \circ \tau_M = \tau_{M-1} \circ \tau_M = Id$$

y coincide con $1 + n_E$ para cualquier $E \in Der_K^u(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. Resta comprobar la igualdad sobre $x_{j(p)}$ $\forall$ $1 \leq j \leq h'$ y $1 \leq p \leq l_j$:

$$\tau_{M^{-1}} \circ 1 + n_D \circ \tau_M(x_{j(p)}) = \tau_{M^{-1}} \left((1 + n_D) \left(x(j).M(A_j)^p \right) \right) =$$

$$= \tau_{M^{-1}}\left(\left(x(j) + n_D(x(j))\right).M(A_j)^p\right) = \tau_{M^{-1}}\left(x(j).M(A_j)^p + \Pi(j).\lambda_D(j).M(A_j)^p\right) =$$
$$= x(j).\left(M(A_j)^{-1}.M(A_j)\right)^p + \Pi(j).\overline{M^{-1}}(j).\lambda_D(j).M(A_j)^p =$$
$$= x_{j(p)} + \Pi(j).\left(\overline{M^{-1}}(j).\lambda_D(j).M(A_j)\right)^p = (1 + n_D)(x_{j(p)})$$

para $\lambda_E(j) = \overline{M^{-1}}(j).\lambda_D(j).M(A_j)$ con lo que se acaba.

□

Ahora, como $\overline{M^{-1}} = \overline{M}^{-1}$ se tiene:

Corolario 7.24. *En los términos del teorema, si $\tau_M \circ 1 + n_D \circ \tau_{M^{-1}} = 1 + n_E$ entonces E es tal que sus coeficientes son:*

$$\lambda_E(j) = \overline{M}(j).\lambda_{D(j)}.M(A_j)^{-1}$$

□

Corolario 7.25. *Con la notación de la ecuación 56, se cumple:*

1. *La parte reductiva opera en cada subgrupo del radical unipotente $(Der^u, \bullet)$ generado por las derivaciones $D(j)$, es decir, $\forall\ M \in M(\mathcal{A}) \times M(\mathcal{B})$*

$$\tau_{M^{-1}} \circ 1 + n_{D(j)} \circ \tau_M = 1 + n_{E(j)}$$

2. *La parte reductiva opera en cada subgrupo $\bar{R}_i$ de la descomposición*

$$(Der^u, \bullet) = \bar{R}_0 \rtimes \cdots \rtimes \bar{R}_{\Delta_1}$$

3. *La parte reductiva opera en cada elemento $R_i \in \mathcal{L}$ de una cadena completa $\mathcal{L}$ resolución del grupo unipotente $1 + \mathcal{N}$, es decir, si τ_μ es un automorfismo de la parte reductiva de $Aut^\circ_g A_C$ y $R_i \in \mathcal{L}$ donde $\mathcal{L}$ es una cadena completa resolución de su radical unipotente entonces*

$$\tau_{M^{-1}} \circ R_i \circ \tau_M = R_i$$

Demostración:
Lo primero se deduce directamente del teorema anterior, observando que los generadores del gupo del enunciado son los D tales que $\lambda_{D(j')} = 0 \; \forall \; j' \neq j$ y esto ocurre, en la notación del teorema, cuando $\lambda_{E(j')} = 0$
Para lo segundo, sea $\Phi_{D(j)} = 1 + n_{D(j)}$ y hemos visto que

$$\tau_M \circ \Phi_{D(j)} \circ \tau_{M^{-1}} = \Phi_{E(j)}$$

Por la primera propiedad en 51 y la demostración del teorema 7.15 todo elemento en $\bar{R}_i$ es una composición, en cualquier orden, de automorfismos $\Phi_{D(j_1)} \circ \cdots \circ \Phi_{D(j_n)} \Rightarrow$

$$\tau_M \circ \Phi_{D(j_1)} \circ \cdots \circ \Phi_{D(j_n)} \circ \tau_{M^{-1}} = \tau_M \circ \Phi_{D(j_1)} \tau_{M^{-1}} \circ \cdots \circ \tau_M \circ \Phi_{D(j_n)} \circ \tau_{M^{-1}}$$

que por el enunciado anterior es $\Phi_{E(j_1)} \circ \cdots \circ \Phi_{E(j_n)} \in \bar{R}_i$
El tercer apartado se deduce del anterior porque $R_i = \bar{R}_0 \rtimes \cdots \rtimes \bar{R}_i$

$\square$

Observación 21. *La fórmula que determina la operación de la parte reductiva en la unipotente no depende de su descomposición en producto semidirecto de grupos aditivos, sino de las clases $[v]$ que contienen los conjuntos asociados X_i ó Y_i de la sección 7.2.2 y por tanto no depende de si los subgrupos aditivos se obtienen con una ú otra resolución de R_u.*

Para el **cálculo de** $\overline{M}$, siguendo con la notación anterior, sean:

$$\begin{array}{lll} B_i = \left\{ x_{i=(h'+i)(0)}, x_{(h'+i)(1)}, \ldots, x_{(h'+i)(\kappa_{h'+i})} \right\} & A_j = \left\{ x_{j(1)}, \ldots, x_{j(l_j)} \right\} & i \leq s \\ x(i) = \left(x_i, x_{(h'+i)(1)}, \ldots, x_{(h'+i)(\kappa_{h'+i})} \right) & x(j) = \left(x_{j(1)}, \ldots, x_{j(l_j)} \right) & j(p) > s \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} M(B_i) = \left(\mu'(i)^p_q \right)^{0 \leq p \leq \kappa_{h'+i}}_{0 \leq q \leq \kappa_{h'+i}} & \tau_M(x_{(h'+i)(p)}) = x(i).M(B_i)^p = \sum_{q=0}^{\kappa_{h'+i}} \mu'(i)^p_q . x_{(h'+i)(q)} \\ M(A_j) = \left(\mu(j)^p_q \right)^{1 \leq p \leq l_j}_{1 \leq q \leq l_j} & \tau_M(x_{j(p)}) = x(j).M(A_j)^p = \sum_{q=1}^{l_j} \mu(j)^p_q . x_{j(q)} \end{array}$$

Denotaremos $D(M(B_i))$ y $D(M(A_j))$ a las derivaciones dadas por las raíces parejables en B_i y A_j, que son $\alpha^i_{p,q}$ parejable respecto $v_{(h'+i)(p)}, v_{(h'+i)(q)}$ y $\alpha(j)_{p,q}$ parejable respecto $v_{j(p)}, v_{j(q)}$ de modo que

$$D(M(B_i)) = \sum_{p=0,q=0}^{p=\kappa_{h'+i}, q=\kappa_{h'+i}} \mu'(i)^p_q . x^{\alpha^i_{p,q}} D_{v_{(h'+i)(p)}}$$

$$D(M(A_j)) = \sum_{p=1,q=1}^{p=l_j,q=l_j} \mu(j)^p_q . x^{\alpha(j)_{p,q}} D_{v_{j(p)}}$$

En el caso $p = q$, $\alpha(j)_{p,p} = 0$ no es raíz pero en todo caso verifica como el resto de casos, que para $v = (v', \bar{v})$ ya antes definida, como $v(\alpha(j)_{p,p}) = 0$ se cumple (lo mismo para α_{pp})

$$n_{\alpha(j)_{p,p}}(x_{j(p)}) = x^{v(\alpha(j)_{p,p})}.x_{j(p)} = x_{j(p)} \qquad n_{\alpha(j)_{p,p}}(x_{j(q)}) = 0 \ \forall \ i(q) \neq j(p)$$

Teniendo esto en cuenta, si

$$D(M) = \sum_{i=1}^{s} D(M(B_i)) + \sum_{j=1}^{h'} D(M(A_j)) \tag{57}$$

$\Rightarrow n_{D(M)} = \tau_M$ y $\forall \ D \in Der^u_K(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ podemos utilizar la fórmula del Teorema 7.5 teniendo en cuenta la Observación 14 para calcular

$$\tau_M \circ n_D = n_{D(M) \diamond D}$$

Para calcularlo, vamos a simplificar la notación y escribir $D(M)$ con la notación del Teorema 7.5. Utilizaremos la siguiente **Notación:**

$$\begin{array}{ll}
n_i & = \text{ número de raíces parejables } \alpha^i_{i(j)} \in S(v_i) \\
\alpha^i_{i(j)} & = \text{raíz parejable respecto } v_i, v_{i(j)} \text{ y } i(j) \neq i \\
\alpha(i) & = (\alpha^i_0, \alpha^i_{i(1)}, \ldots, \alpha^i_{i(n_i)}) \ \alpha^i_0 = 0 \\
\lambda(i) & = (\lambda^i_0, \lambda^i_{i(1)}, \ldots, \lambda^i_{i(n_i)}) \qquad c(i) = (c^i_0, c^i_{i(1)}, \ldots, c^i_{i(n_i)}) \\
\lambda(i).x^{\alpha(i)} D_{v_i} & = \lambda^i_0 x^{\alpha^i_0} D_{v_i} + \lambda^i_{i(1)} x^{\alpha^i_{i(1)}} D_{v_i} + \cdots + \lambda^i_{i(n_i)} x^{\alpha^i_{i(n_i)}} D_{v_i} \\
c(i).\alpha(i) & = c^i_0 . \alpha^i_0 + c^i_{i(1)} . \alpha^i_{i(1)} + \cdots + c^i_{i(n_i)} . \alpha_i(n_i)^i \\
\lambda(i)^{c(i)} & = (\lambda^i_0)^{c^i_0} . (\lambda^i_{i(1)})^{c^i_{i(1)}} . \ \ldots \ . (\lambda^i_{i(n_i)})^{c^i_{i(n_i)}} \qquad 0^0 = 1 \\
c(i)! & = c^i_0 ! . c^i_{i(1)} ! . \ \ldots \ . c^i_{i(n_i)} ! \qquad | \ c(i) \ | = c^i_0 + c^i_{i(1)} + \ \ldots \ + c^i_{i(n_i)}
\end{array}$$

Además $c^i_j \geq 0$, $0! = 1$ y $-1! = 1$.
Con esta notación $D(M)$ es

$$D(M) = \sum_{i=1}^{s+k} \lambda(i).x^{\alpha(i)} D_{v_i} \tag{58}$$

Observación 22. *En relación con la notación anterior expresada en la ecuación 57 se tiene que cada $\lambda(i)$ es una columna de $D(M(B_i))$ o $D(M(A_j))$ pero siguiendo el orden que consiste en **comenzar por la diagonal** resultando que*

$$\textit{para } i \leq s \ \lambda(i) = (\mu'(i)^0_q)_{q \leq n_i = \kappa_{h'+i}}$$

$$\lambda((h'+i)(q)) = (\mu'(i)^q_q, \mu'(i)^q_0, \ldots, \mu'(i)^q_{q-1}, \mu'(i)^q_{q-1}, \ldots, \mu'(i)^q_{\kappa_{h'+i}})$$

y para $[x_{j(p)}] \neq [x_{i<s}]$ *es*

$$\lambda(j(p)) = (\mu(j)^p_q)_{q \leq n_{j(p)=l_j-1}} = (\mu'(j)^p_p, \mu'(i)^p_0, \ldots, \mu'(i)^p_{p-1}, \mu'(i)^p_{p+1}, \ldots, \mu'(i)^p_{n_{j(p)}})$$

Aplicando la fórmula de la Observación 14, si $r \in S^*(v_{s+j}) \Rightarrow$

$$D(M) \diamond x^r D_{v_{s+j}} = v(r)!. \sum_{\substack{|c(i)|=v_i(r) \text{ y } |c(s+j)|=0 \\ i \in \{1,\ldots,\widehat{s+j},\ldots,r\}}} \frac{\prod_{i=1}^{s+k} \lambda(i)^{c(i)}}{\prod_{i=1}^{s+k} c(i)!} . x^{r+\sum_{i=1}^{s+k} c(i).\alpha(i)} D_{v_{s+j}} \tag{59}$$

La condición del sumatorio la simplificaremos con la notación $\mid c() \mid = v(r)$ y denotaremos también $c().\alpha() = \sum_{i=1}^{s+k} c(i).\alpha(i)$.

Proposición 7.26. *Sea* $S^*(v_{j(1)}) = \{r^{j(1)}_1, \ldots, r^{j(1)}_{d_j}\}$*. La matriz* $\overline{M}$ *asociada a* $M \in M(\mathcal{A}) \times M(\mathcal{B})$ *tal que* $\tau_M(\Pi(j)_p) = \Pi(j).\overline{M}(j)^p \ \forall\ 1 \leq j \leq h'$ *es*

$$\overline{M}(j) = \left(\overline{m}(j)^p_q\right)^{1 \leq p \leq d_j}_{1 \leq q \leq d_j}$$

donde si $r = r^{j(1)}_p \Rightarrow$

$$\bar{m}(j)^p_q = v(r)!. \sum_{\substack{\mid c() \mid \quad = v(r) \\ r + c().\alpha() \quad = r^{j(1)}_q \\ \mid c(s+j(1)) \mid \quad = 0}} \frac{\prod_{i=1}^{s+k} \lambda(i)^{c(i)}}{\prod_{i=1}^{s+k} c(i)!} \tag{60}$$

Demostración:

Sea el $K-$espacio vectorial de dimensión d_j de base $\{\Pi(j)_1, \ldots, \Pi(j)_{d_j}\}$ y $\{\omega_1, \ldots, \omega_{d_j}\}$ su base dual. Entonces

$$\bar{m}(j)^p_q = \omega_q\left(\tau_M\left(\Pi(j)_p\right)\right) = \omega_q\left(\left(n_{D(M)} \circ n_{x^r D_{v_{j(1)}}}\right)(x_{j(1)})\right) =$$

$$= \omega_q\left(n_{D(M) \diamond x^r D_{v_{j(1)}}}(x_{j(1)})\right)$$

y se concluye por la ecuación 59 en cuyas condiciones del sumatorio se ha tenido en cuenta que $\Pi(j)_q = n_{r^{j(1)}_q}(x_{j(1)})$ de modo que la condición $r + c().\alpha() = r^{j(1)}_q$ son los sumandos de tal ecuación tales que $r + \sum_{i=1}^{s+k} c(i).\alpha(i) = r_q^{j(1)}$ y donde ahora $v_{s+j} = v_{j(1)}$, con lo que se acaba.

□

Para cada matriz invertible M correspondiente a la parte reductiva de $Aut_g^{\circ} A_C$ que es $G_1 \times \cdots \times G_{h'} \times G_{h'+1} \times \cdots \times G_{h'+s}$ y que abreviadamente denotamos $G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B})$ hemos definido el automorfismo τ_M de modo que hemos definido el homomorfismo:

$$G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B}) \xrightarrow{\tau} Aut_g^{\circ} A_C \qquad \tau(M) = \tau_M$$

Para definir una sección de τ, sea para cada $0 \leq j \leq h'$ el $K-$espacio vectorial de dimensión l_j de base $\{x_{j(1)}, \ldots, x_{j(l_j)}\}$ y $\{\omega_{j(1)}, \ldots, \omega_{j(l_j)}\}$ su base dual. De igual modo, para cada $1 \leq i \leq s$ el $K-$espacio vectorial de dimensión $\kappa_{h'+i} + 1$ de base

$$\left(x_i, x_{(h'+i)(1)}, \ldots, x_{(h'+i)(\kappa_{h'+i})}\right)$$

y su base dual será

$$\left\{\omega_{(h'+i)(0)}, \omega_{(h'+i)(1)}, \ldots, \omega_{(h'+i)(\kappa_{h'+i})}\right\}$$

Entonces τ es una sección del homomorfismo

$$Aut_g^{\circ} A_C \xrightarrow{\omega} G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B}) \qquad \omega(\sigma) = M(\sigma)$$

donde

$$(M(\sigma)(j))_q^p = m_\sigma(j)_q^p = \omega_{j(q)}\left(\sigma\left(x_{j(p)}\right) \cap [x_{j(p)}]\right)$$

matriz de $G(\mathcal{A})$ y de igual modo

$$(M(\sigma)(i))_q^p = m_\sigma(i)_q^p = \omega_{(h'+i)(q)}\left(\sigma\left(x_{(h'+i)(p)}\right) \cap [x_{j(p)}]\right)$$

matriz de $G(\mathcal{B}) \Rightarrow$ de los resultados anteriores se sigue el siguiente teorema:

Teorema 7.27. *Sea el grupo $Aut_g^{\circ} A_C$ y los subgrupos $(Der^u, \bullet)$ y $G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B})$. Se cumple el isomorfismo:*

$$Aut_g^{\circ} A_C \simeq (Der^u, \bullet) \rtimes (G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B}))$$

y la sucesión exacta asociada es:

$$0 \longrightarrow (Der^u, \bullet) \xrightarrow{\iota} Aut_g^{\circ} A_C \underset{\tau}{\overset{\omega}{\rightleftarrows}} G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B}) \longrightarrow 0$$

donde $\iota(D) = 1 + n_D$ y $\tau(M) = \tau_M$ son los automorfismos en $Aut_g^{\circ} A_C$ ya definidos y donde τ es una sección de ω

□

Corolario 7.28. *Los elementos $L \in \mathcal{L}$ de una cadena completa $\mathcal{L}$ resolución de $R_u = (Der^u, \bullet)$ son subgrupos normales en todo el grupo $Aut_g^\circ A_C$. En particular lo son los subgrupos R_i de la resulución mínima*

Demostración:
Del teorema anterior se deduce que todo elemento de $Aut_g^\circ A_C$ es $1 + n_D \circ \tau_M$ y como

$$(1 + n_D \circ \tau_M)^{-1} \circ L \circ (1 + n_D \circ \tau_M) = \tau_{M^{-1}} \circ 1 + n_{D^{-1}} \circ L \circ 1 + n_D \circ \tau_M$$

se concluye por el teorema 7.13 que afirma que L es normal en R_u y por el teorema 7.23 y posterior corolario según el cual $\forall\ \tau_M \in G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B})$, $\tau_{M^{-1}} \circ L \circ \tau_M = L$.

□

Veamos cómo es el toro $Spec\, K[\mathbb{Z}^r]$ de puntos racionales K^{*r} y maximal en $Aut_g^\circ A_C$, como subgrupo de su parte reductiva y cómo opera en R_u. Para cada $\mu \in Spec\, K[\mathbb{Z}^r]$ se tiene el automorfismo $\tau_\mu(x^{(n,\alpha_C)}) = \mu^{n+v(\alpha_C)}.x^{(n,\alpha_C)}$ y vimos en el Teorema 7.18 que opera transitivamente en R_u del siguiente modo:

$$\mu \in K^{*r},\ \sum \lambda_r.x^r D_v \qquad \Rightarrow \qquad \mu.\sum \lambda_r.x^r D_v = \sum \mu^{v(r)}.\lambda_r.x^r D_v$$

Tenemos entonces el homomorfismo inyectivo de grupos algebraicos

$$\begin{array}{ccc} Spec\, K[\mathbb{Z}^r] & \xrightarrow{\varpi} & (G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B})) \\ \mu & \rightsquigarrow & \prod \left(M(j) = \left(\mu(j)_q^q\right)_{1 \le q \le l_j} \right) \times \prod \left(M(i) = \left(\mu'(i)_q^q\right)_{0 \le q \le \kappa_{h'+i}} \right) \end{array}$$

siendo

$$\mu(j)_q^q = \mu_{j(q)} \qquad \mu'(i)_q^q = \mu_{(h'+i)(q)}$$

La imagen son las matrices invertibles diagonales, en parte $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ respectivamente:

$$\varpi(\mu)(j) = \begin{pmatrix} \mu_{j(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{j(l_j)} \end{pmatrix} \qquad \varpi(\mu)(i) = \begin{pmatrix} \mu_{(h'+i)(0)} = \mu_i & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{(h'+i)(\kappa_{h'+i})} \end{pmatrix} \tag{61}$$

Esta matriz se puede obtener directamente aplicando τ_μ o en los términos de la ecuación (59) siendo ahora $\lambda(i = j(q)) = (\mu_{j(q)}, 0, \ldots, 0)\ \forall\ i \in \{1, \ldots, r\}$. Para obtener la matriz asociada $\overline{\varpi(\mu)}(j)$ utilizamos la ecuación 60 y observamos que los únicos sumandos son los $\mid c(i) \mid = c_0^i = v_i(r)$ que en la expresión $c(i).\alpha(i) = c_0^i.\alpha_0^i = 0$ de modo que se obtiene $r + \sum c(i).\alpha(i) = r$ cuando $r \in \{r_i^{j(1)}, \ldots, r_{d_j}^{j(1)}\}$. En este caso la matriz asociada $\overline{\varpi(\mu)}(j)$ también es diagonal:

$$\overline{\varpi(\mu)}(j) = \mu_{j(1)}. \begin{pmatrix} \mu^{v(r_1^{j(1)})} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu^{v(r_{d_j}^{j(1)})} \end{pmatrix} \tag{62}$$

y como no puede ser de otro modo se tiene:

Proposición 7.29. *El homomorfismo ϖ es compatible con la operación en R_u*

Demostración:

Si $D \in R_u = Der^u$ es

$$D = \sum_{j=1}^{h'} D(j) \qquad D(j) = \sum_{p=1}^{l_j} \left(\sum_{q=1}^{d_j} \lambda_{D(j)_q^p}.x^{r_q^{j(p)}} D_{v_{j(p)}} \right)$$

$\Rightarrow$

$$\mu.D = \sum_{j=1}^{h'} \mu.D(j) \qquad \mu.D(j) = \sum_{p=1}^{l_j} \left(\sum_{q=1}^{d_j} \mu^{v(r_q^{j(p)})}.\lambda_{D(j)_q^p}.x^{r_q^{j(p)}} D_{v_{j(p)}} \right)$$

Si $\lambda_{D(j)}$ y $\lambda_{\mu.D(j)}$ denotan respectivamente las matrices de coeficientes de $D(j)$ y $\mu.D(j)$, hay que comprobar, teniendo en cuenta que por el teorema 7.23 los coeficientes de $\tau_{\varpi(\mu)} \circ 1 + n_D \circ \tau_{\varpi(\mu)}^{-1} \in R_u$ son $\overline{\varpi(\mu)}(j).\lambda_{D(j)}.(\varpi(\mu)(j))^{-1}$, que se cumple la igualdad matricial:

$$\overline{\varpi(\mu)}(j).\lambda_{D(j)}.(\varpi(\mu)(j))^{-1} = \lambda_{\mu.D(j)}$$

Para ello, observermos que los coeficientes del producto de la primera parte de la igualdad a probar son

$$\mu_{j(1)}.\mu^{v(r_q^{j(1)})}.\lambda_{D(j)_q^p}.\mu_{j(p)}^{-1} = \lambda_{D(j)_q^p}.\mu^{v(r_q^{j(1)})}.\mu^{v(\alpha_{j(p)j(1)}^j)} = \lambda_{D(j)_q^p}.\mu^{v(r_q^{j(p)})}$$

y la última igualdad se debe a que si $\alpha_{j(p),j(1)}^j$ es la raíz parejable respecto $v_{j(p)}, v_{j(1)} \Rightarrow$

$$r_q^{j(1)} + \alpha_{j(p),j(1)}^j = r_q^{j(p)}$$

con lo que se acaba.

$\square$

Proposición 7.30. *El toro* $T(s)$ *como subgrupo* $m(T(s)$ *de* $G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B})$ *es el subgrupo de las matrices diagonales, para* $\mu' \in T(s)$, *con* $\mu' = \mu_1, \dots, \mu_s$, *del tipo*

$$\mu'^{v'(m_{s+j_1})}, \dots, \mu'^{v'(m_{s+j_1})}, \cdots, \mu'^{v'(m_{s+j_{h'}})}, \dots, \mu'^{v'(m_{s+j_{h'}})}, \mu_1, \dots, \mu_1, \cdots, \mu_s, \dots, \mu_s$$

donde el número de repeticiones coinciden respectivamente con los números de representantes de cada clase es decir con el número l_j *de elementos en los conjuntos* A_j *de* $\mathcal{A}$ *y* $l_{h'+i}$ *de los conjuntos* B_i *de* $\mathcal{B}$. *Además opera en el radical unipotente haciéndolo en cada cada subgrupo aditivo* $\bar{R}_i$ *del siguiente modo:*

$$\mu'.(\lambda x^{r^j} D_{v_j}) = \mu'^{v'(r_B^j)}.\lambda x^{r^j} D_{v_j}$$

Demostración:

Para lo primero, veamos la matriz en la parte $G(\mathcal{B})$: Como en la ecuación 61 hay que calcular la matriz $\varpi(\mu)(i)$ donde ahora $\mu = (\mu', \mu'^{v'(m_{s+1})}, \dots, \mu'^{v'(m_{s+k})})$. Como $\mu_{h'+i(0)} = \mu_i$ hay que calcular el resto, $\mu_{h'+i(q)}$. Como $\mu_{h'+i(q)} = \mu'^{v'(m_{h'+i(q)})}$ donde por definición $[x_{h'+i(q)}] = [x_{i<s}] \Rightarrow m_{h'+i(q)} = \alpha_{(h'+i)(q),v_i}$ es la raíz parejable $\Rightarrow$

$$v'(m_{h'+i(q)}) = (0 \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0) \text{ y } \mu'^{v'(m_{h'+i(q)})} = \mu_i$$

con lo que se tiene el enunciado en la parte $\mathcal{B}$. En la parte $\mathcal{A}$, calculamos como en la ecuación 61 $\mu'_{j(1)}$ y $\mu'_{j(q)}$ donde por definición $[x_{j(1)}] = [x_{j(q)}] \Rightarrow m_{j(1)} = m_{j(q)} + \alpha_{j(1),j(q)}$ $\Rightarrow v'(j(1)) = v'(j(q)$ $\mu_{j(q)} = \mu_{j(1)} = \mu'^{v'(m_{j(1)})}$ como afirma el enunciado. La segunda parte del enunciado se sigue directamente de la ecuación 35

□

Corolario 7.31. *El grupo* $T_{A_{n-1}}$ *es un subgrupo del toro* $Spec\,K[\mathbb{Z}^s]$ *que como subgrupo de* $G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B})$ *opera en* R_u *por la identidad.*

Demostración:

Consideremos el homomorfismo $Spec\,K[\mathbb{Z}^s] \overset{\rho^*}{\hookrightarrow} Spec\,K[\mathbb{Z}^r]$ donde según la ecuación 35 si $\mu = \rho^*(\mu') \Rightarrow \mu^{v(r)} = \mu'^{v'(r_B)}$ que es 1 si $\mu \in T_{A_{n-1}}$ y por otra parte el grupo $T_{A_{n-1}}$ en $G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B})$ es $\varpi(\rho^*(T_{A_{n-1}}))$ de modo que $\forall \mu \in T_{A_{n-1}}$ la matriz $\overline{\varpi(\mu)}$ es, por la ecuación 62, $\mu_{j(1)}.I \Rightarrow \tau_{\varpi(\mu)} \circ 1 + n_D \circ \tau^{-1}_{\varpi(\mu)} = 1 + n_E$ donde por el Teorema 7.23 E viene dado por el producto $\mu^{-1}_{j(1)}.\lambda(D).\mu_{j(1)} = \lambda(D)$ y por tanto $E = D$ con lo que se acaba.

□

Capítulo 8

8. El grupo $Aut\,X$

Sea $Aut^\circ(X)$ la componente conexa en la identidad de $Aut\,X$. En esta sección se da el buscado teorema de estructura de $Aut^\circ(X)$ y se calcula el grupo finito $Aut\,X/Aut^\circ(X)$. Para ello primero utilizamos los resultados de la sección 5.4.2 y 6.3 que nos permiten pasar de $Aut^\circ(X)$ a Aut_gA_C y ahora utilizamos los resultados para Aut_gA_C obtenidos en la sección anterior.

Como en secciones anteriores, $T_{A_{n-1}}$ es el grupo cuyos puntos racionales son $Hom_{\mathbb{Z}}(A_{n-1}, K^*)$ y los toros $T(s) = Spec\,K[\mathbb{Z}^s]$ y $T(r) = Spec\,K[\mathbb{Z}^r]$ y $T = T(M)$ y $T(B) = Spec\,K[B]$.

Teorema 8.1. *Si $Aut\,X$ es el grupo algebraico de los automorfismos de la variedad tórica completa $X = X(N,\Delta)$ y $Aut^\circ X$ es su componente conexa en la identidad se cumple:*

1.
$$Aut^\circ(X) = \left(\prod_{i=1}^{\delta=l(\Delta_1)} \rtimes\mathbb{A}^{n_i}, \bullet\right) \rtimes \prod_{j=1}^{h} Gl(l_j)/T_{A_{n-1}}$$

donde

a. $R_u = \prod_{i=1}^{\delta=l(\Delta_1)} \rtimes\mathbb{A}^{n_i}$ *es el radical unipotente de $Aut^\circ(X)$ y de Aut_gA_C*

b. *El radical de $Aut^\circ(X)$ es*

$$R(Aut^\circ(X)) = R_u \rtimes T(B \oplus \overline{C})$$

donde $T_{B\oplus\overline{C}}$ es el toro asociado al módulo $\overline{M} = B \oplus \overline{C}$ que es el cociente del módulo inicial M por el submódulo $C' \subseteq C$ generado por todas las raíces parejables. Este toro contiene al toro $T(B)$

c. $\mathbb{A}^{n_i}$ *son grupos aditivos de dimensión $n_i = \sum_{l(v)=i} \chi(S^*(v))$. El producto semi-directo de ellos es el espacio vectorial generado por las derivaciones asociadas a las raíces no parejables. La operación como grupo es: Si $a = a_1, \ldots, a_j$ y*

$b = b_{j+1}, \ldots, b_\delta$ *y*

$$(a,b) = a_1, \ldots, a_j, b_{j+1}, \ldots, b_\delta \in \left(\prod_{i=1}^{\delta = l(\Delta_1)} \rtimes \mathbb{A}^{n_i}, \bullet \right)$$

de igual modo (c,d) *con* $(a+c)_i = a_i + c_i$ *y lo mismo para* $b+d \Rightarrow$

$$(a,b)\bullet(c,d) = (a+c+P((a,0),(c,0)) + P((0,b),(c,0)),\ b+d+P((0,b),(0,d)))$$

donde $P(x,y)$ *se calcula en la fórmula del Teorema 7.8. Además la condición necesaria y suficiente para que tal producto sea abelano es que* $l(\Delta_1) \leq 1$.

d. *Cada subgrupo aditivo* $\mathbb{A}^{n_i}$ *del radical unipotente* R_u *está generados por el producto de los grupos uniparamétricos asociados al conjunto de raíces* $\cup_{l(v)=i} S^*(v)$. *En particular* R_u *está generado por los grupos uniparamétricos asociados a las raíces no parejables*

e. $\prod_{j=1}^{h} Gl(l_j)/T_{A_{n-1}}$ *es la parte reductiva de* $Aut^\circ(X)$. *La denotaremos* G_s *y se tiene*

$$Aut^\circ X = R_u \rtimes G_s$$

es el producto semidirecto de su parte unipotente y su parte reductiva

f. $Gl(l_j)$ *son grupos lineales de dimensión* l_j *que es el número de elementos de* $F_j = F_u$ *para cualquier* u *de su clase y* $h = s + h' \geq s$ *es el número de clases en* Δ_1

g. $T(s)$ *es el subgrupo de* $\prod Gl(l_j)$ *de las matrices diagonales, para* $\mu \in T(s)$, *con* $\mu = \mu_1, \ldots, \mu_s$, *del tipo*

$$\mu^{v'(m_{s+j_1})}, \ldots, \mu^{v'(m_{s+j_1})}, \cdots, \mu^{v'(m_{s+j_{h'}})}, \ldots, \mu^{v'(m_{s+j_{h'}})}, \mu_1, \ldots, \mu_1, \cdots, \mu_s, \ldots, \mu_s$$

donde el número de repeticiones coinciden respectivamente con los l_j.

h. $T_{A_{n-1}}$ *es el subgrupo de* $T(s)$ *y por tanto el correspondiente en* $\prod Gl(l_j)$, *de los* $\mu = \mu_1, \ldots, \mu_s \in T(s)$ *tales que*

$$\mu_1^{v_1(\beta)} . \cdots . \mu_s^{v_s(\beta)} = 1 \, \forall \, \beta \in B$$

i. $T_{A_{n-1}}$ *opera en el radical unipotente de* $Aut^\circ X$ *por la identidad*

2. *La parte reductiva G_s opera sobre la parte unipotente R_u haciéndolo* ***en cada subgrupo aditivo*** *A^{n_i} del siguiente modo: Sea $a \in R_u \Rightarrow$*

$$a = (a(1), \dots, a(l(\Delta_1))) \qquad a(i) = (a_{[u]}, a_{[v]}, \dots) \text{ tal que } l(v) = l(u) = i$$

Cada vector $a_{[u]}$ que en este caso denotaremos $a[j]$ es

$$a[j] = a_{[u]} = a_{v_1}, \dots, a_{v_{l_u}} \text{ donde } v_i \in \{[u]\}$$

y cada uno de tales a_{v_p} tiene a su vez d_u coordenadas en K correspondientes al número de raíces en $S^*(u)$. Sea entonces $u \in F_j$ para algún j y las $l_j,\ d_u = d_j-$uplas correspondientes las escribimos

$$a(j)_1^1, \dots a(j)_{d_j}^1, \dots, a(j)_1^{l_j}, \dots a(j)_{d_j}^{l_j}$$

y trasponiendo cada una de ellas obtenemos una columna $a[j]^{q=1,\dots,l_j}$ de la matriz

$$(a[j])_{p=1,\dots,d_j}^{q=1,\dots,l_j} \text{ con } a[j]_p^q = a(j)_p^q$$

Sea $[M] \in G_s$ la clase de M en el cociente módulo $T_{A_{n-1}}$ y como este opera en R_u por la identidad sea $M \in \prod_{j=1}^h Gl(l_j)$ cualquier representante y lo escribimos $M = \prod(M(j))$ tales que $M(j) \in Gl(l_j) \Rightarrow$ denotando de igual modo a los correspondientes automorfismos en $Aut\, X$ donde la operación $\centerdot$ correspondería a la composición, se tiene

$$M \centerdot a \centerdot M^{-1} = b \text{ donde } b[j] = \overline{M}(j).a[j].M(j)^{-1}$$

donde los coeficientes $\overline{m(j)}_q^p$ de la matriz $\overline{M}$ se calculan según la fórmula de la ecuación 60. Este producto matricial es de orden

$$(d_j \times d_j).(d_j \times l_j).(l_j \times l_j) = d_j \times l_j$$

a. *En particular el toro $T(s)$ cociente por el subgrupo $T_{A_{n-1}}$, como subgrupo de G_s, opera en el radical unipotente haciéndolo en cada cada subgrupo aditivo del siguiente modo: Si $a(j)_p^q$ es el coeficiente en K de un vector de un elemento de uno de los grupos aditivos de R_u y r^j es la raíz asociada, y $\mu' \in T(s)$ entonces:*

$$\mu'.a(j)_p^q = {\mu'}^{v'(r_B^j)} a(j)_p^q$$

3. El cociente de $Aut\,X$ por su componente conexa en el neutro es el grupo finito

$$Aut\,X/Aut^{\circ}X \simeq Aut_M\Delta/W$$

donde $Aut_M\Delta$ es el grupo finito de los automorfismos $\mathbb{Z}-$ lineales en $N = M^*$ que dejan invarante al abanico inicial Δ y W es el grupo de Weyl de $Aut^{\circ}X$ respecto el toro maximal de X T, y coincide con el grupo generado por las permutaciones entre los conos de dimensión uno Δ_1 de la misma clase, es decir, las aristas u, v tales que existe α_{uv} raíz parejable. En particular es un subgrupo del grupo finito de las permutaciones de r elementos, $\{v_1, \ldots, v_r\}$.

a. *Si suponemos que X es no singular, equivalentemente, el abanico Δ es regular, entonces el isomorfismo anterior se cumple aunque X no sea completa, pero sí semicompleta (Δ_1 completo) suponiendo que el grupo $Aut\,X$ existe.*

Demostración:

Veamos 1: Por el corolario 6.9 sabemos que

$$Aut^{\circ}X \simeq Aut^{\circ}_g A_C/T_{A_{n-1}}$$

y por tanto del corolario 7.21 se sigue:

$$Aut^{\circ}X \simeq \left(\left(\prod_{i=1}^{\delta=l(\Delta_1)} \rtimes \mathbb{A}^{n_i}, \bullet \right) \rtimes \prod_{j=1}^{h} Gl(l_j) \right) /T_{A_{n-1}}$$

Ahora por el corolario 7.31 sabemos que $T_{A_{n-1}}$ es subgrupo de $\prod_{j=1}^{h} Gl(l_j)$ que opera en $\prod_{i=1}^{\delta=l(\Delta_1)} \rtimes\mathbb{A}^{n_i}$ por la identidad con lo que se tiene el enunciado 1 y por tanto el 1.a
Para 1.b, de la igualdad $Aut^{\circ}X \simeq R_u \rtimes \prod_{i=1}^{h} Gl(l_i)/T_{A_{n-1}}$ y el corolario 7.22 se deduce que el radical es

$$R = R(Aut^{\circ}X) = R_u \rtimes T(h)/T_{A_{n-1}}$$

Con la notación del corolario 7.22 y gracias al teorema 7.4 en su último apartado, las raíces parejables generan un submódulo $C' \subseteq C$ y sus generadores son los $m - m'$ tales que m, $m' \in A_{j\leq h'}$ y los $m \in A^*_{h'+i}$. Sea entonces la sucesión exacta

$$0 \to C' \to M \to \overline{M} = B \oplus \overline{C} \to 0$$

y la dual de toros asociados

$$0 \to T(B \oplus \overline{C}) \to T(M) \to \ T(C') \to 0$$

$\Rightarrow$

$$T(\overline{M} = B \oplus \overline{C}) = \{t \in T(M) :\ t(\alpha) = 1 \forall \text{ parejable } \alpha\}$$

Por otro lado, para calcular el cociente $T(h)/T_{A_{n-1}}$, como todo está en $T(r)$ consideramos las sucesiones exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T_{A_{n-1}} & \longrightarrow & T(h) & \longrightarrow & T(h)/T_{A_{n-1}} & \to & 0 \\ & & \| & & p^{*}\downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & T_{A_{n-1}} & \longrightarrow & T(r) & \xrightarrow{v^{*}} & T(M) & \to & 0 \end{array} \tag{63}$$

con

$$v^{*}(\lambda)(\alpha) = \lambda^{v(\alpha)}$$

Hay que ver que $T(\overline{M})$ es la imagen de $v^{*} \circ p^{*}$. En efecto, por el corolario 7.22 se tiene

$$p^{*}(T(h)) = \{\lambda \in T(r) :\ \lambda_i = \lambda_j \ \forall\ [v_i] = [v_j]\}$$

y si α es la raíz parejable respecto v_i, v_j entonces $v^{*}(\lambda)(\alpha) = \lambda_i^{-1}.\lambda$ que es 1 $\Leftrightarrow \lambda_i = \lambda_j$ con lo que se acaba.

1.c se deduce de 1 y 1.a porque como el radical unipotente es $R(Aut^{\circ}X)_u = R_u$ que es el producto de grupos aditivos que afirma el enunciado, como demuestra el teorema 7.15 y el corolario 7.21 y teniendo en cuenta que $\mathbb{A}^{n_i} = \bar{R}_i$.

El apartado 1.d se ve en la observación 19 con $\mathbb{A}^{n_i} = \bar{R}_i$

El apartado 1.e se deduce de 1 y 1.a.

El apartado 1.f también se demuestra en el corolario 7.21 y el 1.g se demuestra en la proposición 7.30

El apartado 1.h se ha visto en la página 76

El apartado 1.i se deduce del corolario 7.31 y 1.a

Veamos 2: Como $T_{A_{n-1}}$ opera por la identidad en $R_u \Rightarrow G_s$ opera en R_u como lo hace $\prod_{j=1}^{h} Gl(l_j)$ y esto se ve en el teorema 7.23, el corolario 7.24, el corolario 7.25 y la proposición 7.26 teniendo en cuenta que los coeficientes $a[j]$ del enunciado consisten en los coeficientes $\lambda_{D(j)}$ de la derivación $D(j)$ que se define en la ecuación 56

El apartado 2.a se deduce como el anterior porque $T(s)/T_{A_{n-1}}$ opera como $T(s)$ y esto se muestra en la segunda parte de la proposición 7.30

El enunciado 3 se ve en la siguiente sección.

$\square$

8.1. El grupo finito $Aut\,X/Aut^{\circ}(X)$

Definición: Un *morfismo tórico* ó *morfismo equivariante* en la variedad tórica X, T es una pareja ϕ, h donde $\phi : X \to X$ es un morfismo de esquemas algebraicos y $h : T \to T$ es un homomorfismo tales que

$$\phi(\lambda x) = h(\lambda)\phi(x) \qquad \forall\ \lambda \in T \text{ y } x \in X$$

Si ϕ y h son automorfismos entonces se dice que la pareja (ϕ, h) es un automorfismo tórico ó automorfismo equivariante. Tales automorfismos son un subgrupo del grupo $Aut\,X$ y lo denotaremos $Aut_{to}X$.

De la definición se sigue que los automorfismos equivariantes llevan cerrados $T-$ invariantes en cerrados $T-$ invariantes y como $T = X \setminus \bigcup_{v\in\Delta_1} H_v \Rightarrow \phi(T) = T$. El homomorfismo h es único para cada ϕ ya que de la condición $\phi(\lambda x) = h(\lambda)\phi(x)$ para $x = e$ la unidad en T se deduce que $h = \tau_{\phi(e)^{-1}} \circ \phi_{|T}$.

Proposición 8.2. $\phi \in Aut_{to}\,X \Leftrightarrow \phi \circ T \circ \phi^{-1} = T$

Demostración:
Si ϕ es tórico $\Rightarrow \phi \circ \tau_\lambda = \tau_{h(\lambda)} \circ \phi \Rightarrow \phi \circ \tau_\lambda \circ \phi^{-1} = \tau_{h(\lambda)}$ y tenemos una implicación. Para la otra sea $\phi \circ \tau_\lambda \circ \phi^{-1} = \tau_\mu \Rightarrow \phi(\lambda x) = \mu\phi(x)$. En particular para $x = e$ se deduce $\mu = \frac{\phi(\lambda)}{\phi(e)} = h(\lambda)$ si definimos $h = \tau_{\phi(e)^{-1}} \circ \phi_{|T}$ y resta comprobar que es homomorfismo, $h(\lambda\mu) = h(\lambda)h(\mu)$ lo cual se deduce de la igualdad:

$$\phi \circ \tau_{\lambda\mu} \circ \phi^{-1} = \phi \circ \tau_\lambda \circ \tau_\mu \circ \phi^{-1} = \phi \circ \tau_\lambda \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \tau_\mu \circ \phi^{-1}$$

$\square$

Definición: Si $\phi \in Aut_{to}X$ y $h = \phi$, equivalentemente, $\phi(e) = e$, entonces decimos que ϕ es *automorfismo tórico especial* y al subgrupo de tales automorfismos lo denotaremos Aut_MX. De la proposición anterior se sigue:

$$\varphi \in Aut_MX \Leftrightarrow \varphi(\lambda x) = \varphi(\lambda)\varphi(x)$$

Teorema 8.3.

$$Aut_{to}X = T \rtimes Aut_MX$$

Demostración:

$T \cap Aut_M X = Id$ porque el único automorfismo del tipo τ_λ que es morfismo de grupos en el toro es $\tau_e = Id$. Por último, si $\phi \in Aut_{to} X \Rightarrow \tau_{\phi(e)^{-1}} \circ \phi = \varphi \in Aut_M X$ y por tanto el isomorfismo es $\phi \rightsquigarrow (\tau_{\phi(e)}, \tau_{\phi(e)^{-1}} \circ \phi)$ con lo que se acaba.

□

Definición: Sean (N, Δ) el dato inicial de una variedad tórica X formados por un lattice y un abanico y que como sabemos por el Teorema 4.1 [19] es único. Se llama *automorfismo de abanicos* a los automorfismos $\mathbb{Z}-$ lineales $h^* : N \to N$ tales que $\sigma \in \Delta \Leftrightarrow h^*(\sigma) \in \Delta$ para todo cono $\sigma \in \Delta$. Al grupo de tales automorfismos lo denotaremos $Aut_N \Delta$. En particular restringida a Δ_1 es una permutación. El morfismo $\mathbb{Z}-$lineal inducido $N \to N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ó equivalentemente el morfismo $\mathbb{Q}-$lineal $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ es único porque Δ_1 contiene una base del espacio vectorial $N_{\mathbb{Q}} \Rightarrow h^*$ queda determinado por la permutación y por tanto $Aut_N \Delta$ es un grupo finito.

Teorema 8.4. *$Aut_M X \overset{\Theta}{\simeq} Aut_N \Delta$ con lo que además $Aut_M X$ es un grupo finito.*

Demostración:

Ver Teorema 1.3 [18]

□

Corolario 8.5. *Denotemos $G = Aut\, X$, G° su componente conexa y $C_{G^\circ}(T)$ el conmutador del toro. Entonces $C_{G^\circ}(T) = T$*

Demostración:

Como G° es un grupo liso y conexo $\Rightarrow C_{G^\circ}(T)$ es un subgrupo liso y conexo (11.14 [20]) que contiene al toro T y como $C_{G^\circ}(T) \subset Aut_{to} X = T \rtimes Aut_M X$ y $Aut_M X$ es finito $\Rightarrow$ $C_{G^\circ}(T) = T \rtimes Id = T$ con lo que se acaba.

□

Teorema 8.6. *Sea $N_{G^\circ}(T)$ el normalizador de T. Se tiene el isomorfismo natural de grupos*

$$Aut_{to} X / N_{G^\circ}(T) \simeq Aut\, X / Aut^\circ\, X$$

Demostración:

Como $Aut\,X/Aut^\circ X$ es un grupo finito, basta verlo para los puntos racionales. El morfismo natural es $[\phi]_N \rightsquigarrow [\phi]_{G^\circ}$ que manda la clase en $N = N_{G^\circ}(T)$ a su clase en G° que obviamente es inyectivo por la caracterización dada de automorfismo tórico. Para definir el morfismo inverso, sea $[\varphi]_{G^\circ}$ con $\varphi \in Aut\,X$ y el automorfismo $I_\varphi : G^\circ \to G^\circ$ tal que $\varphi(g) = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ (está bien definido porque la componente conexa siempre es un subgrupo normal) $\Rightarrow I_\varphi(T)$ aunque no es necesariamente T, es un toro maximal y como todos son conjugados ([12]) $\Rightarrow$

$$\exists\ x \in G^\circ \text{ tal que } I_\varphi(T) = xTx^{-1}$$

es decir $\varphi T \varphi^{-1} = xTx^{-1} \Rightarrow$

$$(x^{-1}\varphi)T(x^{-1}\varphi)^{-1} = T$$

$\Rightarrow x^{-1}\varphi \in Aut_{to}X$; sea pues el morfismo inverso el que manda $[\varphi]_{G^\circ}$ a $[\phi]$ siendo $\phi = \Phi(x,\varphi) = x^{-1}\varphi$ y veamos que está bien definido.

En primer lugar, si $y \in G^\circ$ es tal que $I_\varphi(T) = yTy^{-1} \Rightarrow y^{-1}x \in G^\circ$ es tal que $(y^{-1}x)T(y^{-1}x)^{-1} = T \Rightarrow y^{-1}x \in N$ y $\Phi(y,\varphi) = y^{-1}x\Phi(y,\varphi)$ y por tanto $[\Phi(y,\varphi)]_N = [\Phi(x,\varphi)]_N$ con lo que no depende del x tal que $I_\varphi(T) = xTx^{-1}$.

Tampoco depende del representante φ de $[\varphi]_{G^\circ}$ elegido. En efecto, si $g \in G^\circ$ y $g\varphi$ es otro representante entonces $I_\varphi(T) = xTx^{-1} \Leftrightarrow (gx)T(gx)^{-1} = I_{g\varphi(T)}$ y como $x^{-1}\varphi = (gx)^{-1}g\varphi$ se tiene $\Phi(gx, g\varphi) = \Phi(x,\varphi)$ con lo que se acaba.

$\square$

Sea $W = W(G^\circ, T)$ el grupo de $Weyl$ de G° respecto el toro maximal T, $W = N_{G^\circ}(T)/C_{G^\circ}(T)$ y se cumple:

Corolario 8.7. *Se tiene el isomorfismo natural de grupos*

$$Aut_M\,X/W \ \simeq\ Aut\,X/Aut^\circ X$$

Demostración:

Basta hacer cociente por T en el isomorfismo natural del teorema anterior y aplicar el teorema 8.3 teniendo en cuenta que $C_{G^\circ}(T) = T$ tal como se ha probado en el corolario 8.5.

$\square$

Sea la descomposición $\Delta_1 = \coprod_{i=1}^{s+h'} \Delta_1(i)$ donde $\Delta_1(i)$ son las aristas asociadas a los conjuntos A_i, B_j definidos en &7 de modo que $v, u \in \Delta_1(i) \Leftrightarrow [u] = [v]$ es decir existe una raíz α parejable respecto u, v. Denotaremos $S(\Delta_1(i))$ al subgrupo de las permutaciones en $\Delta_1(i)$ y que dejan fijas al resto de aristas de Δ_1 y el subgrupo generado por ellas para todo i es $\prod_{i=1}^{s+h'} S(\Delta_1(i))$. Para simplificar la notación, sea $\Delta_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ y denotaremos $\prod_{i=1}^{s+h'} S(\Delta_1(i)) = S^s(\Delta_1)$ al subgrupo de $S(\Delta_1)$ de las permutaciones de r elementos de modo que $P \in S^s(\Delta_1) \Leftrightarrow P(v_i) = v_{P(i)}$ tales que $[v_i] = [v_{P(i)}]$ $\forall$ i. Sea $\alpha_{i,P(i)}$ la correspondiente raíz parejable y $P(v_i) = v_i$ cuando $\alpha_{i,P(i)} = \alpha_{i,i} = 0$. Si P' es otra permutación entre varibles de la misma clase y $\alpha_{p(i),P'(P(i))}$ es una raíz parejable $\Rightarrow$ $(P' \circ P)(v_i) = v_{P'(P(i))}$ y la raíz parejable es $\alpha_{i,P'(P(i))} = \alpha_{i,P(i)} + \alpha_{P(i),P'(P(i))}$ de modo que la raíz asociada a la composición es la correspondiente suma de raíces.

Vamos a ver que estas permutaciones definen automorfismos de abanicos y por tanto en virtud del teorema 8.4 son automorfismos tóricos especiales.

Teorema 8.8. *En el caso completo, es decir, Δ es un abanico completo, $S^s(\Delta_1)$ es isomorfo a un subgrupo de $Aut_N\Delta$ y el isomorfismo cumple: Si manda P al automorfismo $\mathbb{Z}-$lineal h_P^* $\Rightarrow$ $h_P^*(u) = P(u)$*

Demostración:

$S^s(\Delta_1)$ está generado por las trasposiciones $P(u) = v$, $P(v) = u$ y $P(w) = w$ $\forall$ $w \neq u, v$ con $[u] = [v]$. Vamos a ver que cada generador de este tipo define un automorfismo de abanicos.

En primer lugar vamos a definir el automorfismo $\mathbb{Z}-$lineal en M y el inducido en el dual $M^* = N$ asociado a P. Como en [5], prop. 11 ó [18], pág. 140,

$$h : M \to M \qquad h(m) = m - v(m)\alpha_{u,v} - u(m)\alpha_{v,u}$$

y

$$h : N \to N \qquad h^*(x) = x - x(\alpha_{v,u})(u - v)$$

Se observa fácilmente que $h^*(u) = v$, $h^*(v) = u$ y $h^*(w) = w$. Además $h^*(x)(h(m)) = x(m)$ y efectivamente h^* es el dual de h. El inverso de h es h $\Rightarrow$ la trasposición P define un automorfismo $\mathbb{Z}-$lineal que cumple las condiciones del enunciado y en general, si $P \in S^s(\Delta_1)$ y $\{\alpha_{i,P(i)}\}_{1\leq i\leq r}$ son las raíces parejables asociadas entonces el automorfismo

$\mathbb{Z}-$lineal que define en M y su dual en N son:

$$h_P : M \to M \quad \text{es} \quad h_P(m) = m - \sum_{i=1}^{r} v_{P(i)}(m).\alpha_{i,P(i)} \tag{64}$$

$$h_P^* : N \to N \quad \text{es} \quad h_P^*(x) = x - \sum_{i=1}^{r} x(\alpha_{P^{-1}(i),i}).(v_i - v_{P^{-1}(i)}) \tag{65}$$

Resta ver que h^* además de ser $\mathbb{Z}-$linel también conserva la estructura de abanicos; para ello veamos la siguente proposición:

Proposición 8.9. *Si* $X = X(N, \Delta)$ *es una variedad tórica completa, equivalentemente,* $\cup_{\sigma\in\Delta}\sigma = \mathbb{Q}^n$, *entonces toda trasposición en* Δ_1 *entre aristas de la misma clase (parejables) extiende a un automorfismo en el abanico* Δ

Demostración:
Sean u, v aristas de Δ_1 y $\alpha = \alpha_{vu}$ la raíz parejable correspondiente. Sea σ un cono del abanico Δ de aristas $\sigma(1)$ que contiene como cara a u es decir $u \in \sigma(1)$ y hay que demostrar que el cono que consiste en cambiar u por v en σ es un elemento de Δ, es decir, ver que $\langle v, \sigma(1)\backslash u\rangle_{\mathbb{Q}_+} \in \Delta$. Suponemos que $v \notin \sigma$ pues en caso contrario es trivial. En este caso, $\sigma_{\hat{u}} = \alpha^{\perp} \cap \sigma$ es cara de σ y por tanto $\sigma_{\hat{u}} \in \Delta$. Bajo este supuesto la demostración se hará en cuatro pasos:

1. Si $\sigma \in \Delta$ tal que $u \in \sigma(1)$ y $v \notin \sigma(1) \Rightarrow$ existe $\mathcal{K} \in \Delta$ tal que $\langle v\rangle$ y $\sigma_{\hat{u}}$ son caras de $\mathcal{K}$

2. Si $\sigma \in \Delta$, $v \notin \sigma(1)$ y $\alpha = \alpha_{uv}$ la raíz parejable respecto u, v. si σ y $\langle v\rangle$ son caras de un cono del tipo $\mathcal{K} = \langle v, \sigma^+\rangle$ con $\sigma^+ \subset \{\alpha = 0\} \Rightarrow \langle v, \sigma\rangle \in \Delta$ y es cara de $\langle v, \sigma^+\rangle$

3. Con las notaciones anteriores se cumple:

$$\langle u, \sigma^+\rangle \in \Delta \text{ y es cono maximal} \Leftrightarrow \langle v, \sigma^+\rangle \in \Delta \text{ y es cono maximal}$$

4. Sea $\sigma \in \Delta$ con $\sigma \subset \{\alpha = 0\}$. Entonces $\langle u, \sigma\rangle \in \Delta$ es un cono no maximal cara del cono maximal $\langle u, \sigma^+\rangle \in \Delta$ si y solo si $\langle v, \sigma\rangle \in \Delta$ es un cono no maximal cara del cono maximal $\langle v, \sigma^+\rangle \in \Delta$ para un cono $\sigma^+ \subset \{\alpha = 0\}$

En efecto, para la primera afirmación sea $p = v + \sum_{e\in\sigma_{\hat{u}(1)}} e$ y como el abanico es completo existe un único cono $\mathcal{K} \in \Delta$ tal que $p \in \mathcal{K}^\circ$ y como $\alpha(p) > 0 \Rightarrow v \in \mathcal{K}(1)$ y genera una cara. Además,

$$p = v + \sum_{e\in\sigma_{\hat{u}(1)}} e = kv + \sum_{e'\in\mathcal{K}(1)\backslash v} e' \text{ con } k \geq 1$$

$\Rightarrow$

$$p - v = \sum_{e\in\sigma_{\hat{u}(1)}} e = (k-1)v + \sum_{e'\in\mathcal{K}(1)\backslash v} a_{e'}e' \in \sigma_{\hat{u}}^\circ \cap \mathcal{K}$$

$\sigma_{\hat{u}}$ también es una cara de $\mathcal{K}$ con lo que se acaba.

Para la segunda afirmación, sea por hipótesis $y^\perp \cap \mathcal{K} = \sigma$, $y(\sigma^\perp \setminus \sigma) > 0$, $y(v) \geq 0 \Rightarrow$ $z = y - y(v)\alpha$ es tal que:

$$\begin{array}{lcll} z(v) & = & y(v) - y(v) & = 0 \\ z(\sigma) & = & y(\sigma) & = 0 \\ z(\sigma^+ \setminus \sigma) & = & y(\sigma^+ \setminus \sigma) & > 0 \end{array}$$

$\Rightarrow z^\perp \cap \mathcal{K} = \langle v, \sigma\rangle$ y $z(\mathcal{K}) \geq 0$ con lo que se acaba.

Para la tercera afirmación, basta ver la implicación $\rightarrow$: Sea, según hemos visto, $\mathcal{K} \in \Delta$ tal que $\langle v\rangle$ y σ^+ son caras de $\mathcal{K} \Rightarrow$ sea β tal que $\beta^\perp \cap \mathcal{K} = \sigma^+ \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \beta(\sigma^+) & = & 0 \\ \beta(v) & \geq & 0 \\ \beta(\mathcal{K}) & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Obviamente σ^+ es cara de $\langle u, \sigma^+\rangle \Rightarrow \sigma^+ \in \Delta$ y en el caso completo $dim\, \sigma^+ = n-1$ y como $\sigma^+ \in \{\beta = 0\} \cap \{\alpha = 0\} \Rightarrow \beta = \alpha$ y $\beta(\mathcal{K}) \geq 0 \Rightarrow u \notin \mathcal{K} \Rightarrow$

$$\mathcal{K} = \Big\langle v,\, \sigma^+,\, \{e \in \{\alpha = 0\}\}\Big\rangle$$

Si algunos de esos e es tal que $e \neq 0$, como $\alpha((\sigma^+, e)) = 0$ y $\alpha(v) > 0 \Rightarrow \langle \sigma^+, \rangle$ es cara de $\mathcal{K} \Rightarrow \langle \sigma^+, \rangle \in \Delta$ y contiene a la cara σ^+ que tiene la misma dimensión, luego coinciden y por tanto $e \in \sigma^+ \Rightarrow \mathcal{K} = \langle \sigma^+, \rangle$ que es cono maximal, como se anunciaba.

Por último para la cuarta afirmación, sea por hipótesis β tal que $\beta^\perp \cap \langle u, \sigma^+\rangle = \langle u, \sigma\rangle$ es decir $\beta(u, \sigma) = 0$ y $\beta(\sigma^+ \backslash \sigma) > 0$. Adems del apartado anterior sabemos que $\langle v, \sigma^+\rangle \in \Delta$ y que $\sigma^+ \in \Delta$ de dimensión $n-1$. Sea $\beta(v) = k$: Si $k = 0 \Rightarrow \beta(v, \sigma) = 0$ y $\beta(\langle v, \sigma^+\rangle \geq 0$ $\Rightarrow \langle v, \sigma\rangle$ seria cara de $\langle v, \sigma^+\rangle$ y por tanto $\langle v, \sigma\rangle \in \Delta$, con lo que se concluiría. Si $k > 0 \Rightarrow$ $y = \beta - \mid k \mid \alpha$ es tal que $y^\perp \cap \langle v, \sigma^+\rangle = \langle v, \sigma\rangle$ y por tanto $\langle v, \sigma\rangle \in \Delta$. Si $k < 0$ entonces $y = \beta + \mid k \mid \alpha$ cumple la condición anterior, con lo que se acaba.

$\square$

Observación 23. *La hipótesis de X completa se utiliza en la demostración de la proposicición anterior pero en el caso de que X sea regular, la hipótesis de completa no es necesaria ya que la proposición resulta trivial de la condición tercera de la definición de raíz que da Demazure en [5], pág. 572 y la nota posterior que afirma que en el caso regular la tercera condición es una propiedad pues se deduce de las dos condiciones anteriores que coinciden con la definición de raíz que se da y se utiliza en este trabajo.*

Teorema 8.10. *Sea W el subgrupo de Weyl antes definido contenido en $Aut^\circ X$ y consideremos el isomorfismo $Aut_M X \overset{\Theta}{\simeq} Aut_N \Delta$ del teorema 8.4. Denotaremos $S^s(\Delta_1)$ al subgrupo de $Aut_N \Delta$ que $S^s(\Delta_1)$ define según el teorema 8.8. Entonces*

$$\Theta(W) = S^s(\Delta_1)$$

Se deduce por tanto que la identidad es el único automorfismo tórico de la componente conexa que restringido al toro da la identidad.

Demostración:

Como Θ es morfismo de grupos, basta verificar la igualdad para los respectivos generadores. Hemos visto que la parte reductiva de G° es $G_s = G^\circ / R_u$ donde R_u es (isomorfo) el radical unipotente de $Aut_g^\circ A_C$ y por tanto las raíces de G_s en T son todas las parejables. El toro T no corta a R_u y por la proposición B, 24.1 de [12] se tiene $W = W(G^\circ, T) = N_{G_s}(T)/T$ y como G_s es liso, conexo y reductivo $\Rightarrow$ por el teorema 12.30 [20], W está generado por los automorfismos que en el toro, sobre su grupo de caracteres, son $h : M \to M$ tales que sobre una raíz parejable α es $h(\alpha) = -\alpha$ siendo el conjunto de tales raíces un *sistema abstracto de raíces*. Por otra parte sabemos (24.1, [12]) que el grupo de Weyl a través de la representación adjunta opera permutando los espacios de derivaciones $\mathcal{D}_\alpha$:

$$Ad\, w(\mathcal{D}_\alpha) = \mathcal{D}_{h(\alpha)}$$

Sea $f \in Aut_M X$ y $h : M \to M$ correspondiente a su restricción a T y $P = h^* : N, \Delta \to N, \Delta$ la permutación $P(v_i) = v_{p(i)}$ con $v_{p(i)}(m) = v_i(h(m))$ de modo que $m \in (P(\sigma))^\vee \Leftrightarrow h(m) \in \sigma^\vee\ \forall\ \sigma \in \Delta$.

Se cumple

$$Ad\, f(x^{h(\alpha)} D_{v_i}) = x^\alpha D_{v_{p_i}}$$

En efecto,

$$Ad\, f(x^{h(\alpha)} D_{v_i})(x^m) = f^{-1}(x^{h(\alpha)} D_{v_i} f(x^m)) = f^{-1}(v_i(h(m)).x^{h(\alpha+m)})$$

y esto es justo $x^\alpha D_{v_{p_i}}(x^m)$.

En el caso de $f = w \in W$ se deduce que $Ad\, w(x^{-\alpha}D_{v_i}) = x^\alpha D_{v_{p_i}}$ y por tanto $[v_i] = [v_{p_i}]$ con lo que se ha demostrado $\Theta(W) \subseteq S^s(\Delta_1)$. La otra contención es trivial porque según la ecuación 64 el homomorfismo asociado a la permutación $P(v_i) = v_{P(i)}$ con $[v_{P(i)}] = [v_i]$ es

$$h_P(m) = m - \sum_{i=1}^{r} v_{P(i)}(m).\alpha_{i,P(i)}$$

En particular si $m = \alpha_{i,P(i)} \Rightarrow$

$$h(m) = \alpha_{i,P(i)} - \alpha_{i,P(i)} + \alpha_{P(i),i} = -\alpha_{i,P(i)} = -m$$

y por tanto el automorfismo $f \in Aut_M X$ equivariante a través de h efectivamente pertenece a W con lo que se acaba.

$\square$

Capítulo 9

9. Ejemplos

En esta sección vamos a ver como los resultados anteriores sirven como algoritmos para calcular el grupo $Aut\,X$. En concreto vamos a calcular los grupos aditivos de su parte unipotente, la operación en el redical del grupo, la parte reductiva y las operación de la segunda en la primera, deduciendo si los subgrupos son o no abelianos. Enumeramos los parámetros que necesitamos calcular con las correspondientes referencias de los resultados teóricos de secciones anteriores en los que se basan:

1. Los abiertos afines
2. Las derivaciones y las raíces (§3)
3. Divisores y descomposición fundamental (§5)
4. Anillos de Cox y derivaciones en las coordenadas de A_C, en A' y en las coordenadas de X (Utilizaremos 40 p. 93) y el Corolario 5.5, p.65
5. Orden en Δ_1 y matrices $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{D} = (\mu_i^j)$ de coeficientes asociados a las raíces no parejables(§7.1)
6. Conjuntos X_i y grupos aditivos R_i de la parte unipotente $R_u \equiv (Der^u, \bullet)$ (§7.2.2)
7. Expresión de $D \in (Der^u, \bullet)$ en la forma de la ecuación 56, p. 142 y cálculo de $\lambda_{D(j)}$ en relación con la expresión matricial de la ecuación 47, p. 103
8. Expresión matricial $M \in M(\mathcal{A}) \times M(\mathcal{B})$ de la parte reductiva y cálculo de los términos $\lambda(i)$ de la ecuación 58, p. 146 relacionadas por la Observación 22
9. Cálculo de $\overline{M}$ según la fórmula de la ecuación 60 y deducción del automorfismo de la parte unipotente, $1 + n_E$, que define la operación del automorfismo de la parte reductiva M sobre el automorfismo de la parte unipotente $1 + n_D$ (Teorema 7.23)

10. El grupo $Aut\, X$ y $Aut^{\circ}\, X$ como cociente de $Aut_g A_C$ por el subgrupo $T_{A_{n-1}}$ de la parte reductiva, de los divisores de Weil efectivos módulo la equivalencia lineal. Veremos como opera un automorfismo en las variables de A_C y como se traduce en el correspondiente automorfismo en X. Para ello, tendremos en cuenta el isomorfismo entre los espacios tangentes en el neutro a $Aut_g A_C$ y $Aut\, X$ que según hemos visto viene dado por el morfismo inyectivo $M \to \mathbb{Z}^s \oplus C$ $m \rightsquigarrow (v'(m_B), m_C)$ de modo que el cuerpo de fracciones de X, $K(M)$, se mete en el cuerpo de fracciones de A_C. Las coordenadas de $(v'(m_B), m_C)$ respecto las parejas (n, α_C) generadoras del anillo de Cox son justamente $v(m)$ de modo que si $Y = y_1, \dots y_r$ denota las variables de A_C entonces la relación entre las coordenadas de X y las de A_C vienen dadas por $x^m \equiv Y^{v(m)}$. Las relaciones entre las variables de X, de A_C y de A' se resumen en los morfismos inyectivos:

$$\begin{array}{cccccc} K(M) & \to & K(A_C) & \to & K(A' \simeq A_C[X^B]) \\ x^m & \rightsquigarrow & (v'(m_B), m_C) = Y^{v(m)} & \rightsquigarrow & Y^{v(m)}.X^{m_B} \end{array}$$

donde X^{m_B} en A' es $x^{(-v'(m_B), m_B)}$ de modo que el morfismo $K(M) \to K(A')$ es $x^m \rightsquigarrow x^{(0,m)}$ como debe ser según el teorema 5.10.
El apartado tercero de la Proposición 7.1 permite concluir que si τ es un automorfismo graduado en A_C entonces

$$\tau(Y^{v(m)}) = Y^{v(m)}.\frac{\sum \lambda(p_r). \prod_r Y^{v(p_r.r)}}{\sum \lambda(q_r). \prod_r Y^{v(q_r.r)}}$$

que está en $K(M) \hookrightarrow K(Y)$ y por tanto

$$\tau(x^m) = x^m.\frac{\sum \lambda(p_r). \prod_r x^{p_r.r}}{\sum \lambda(q_r). \prod_r x^{q_r.r}}$$

y estos productos son potencias de los monomios que definen las derivaciones en $\mathcal{O}_X$.

Ejemplo 1 : **Superficies regladas (Hirzebruch)**
$dim\, M = 2$, base $\{e_1,\, e_2\}$ y $\{w_1,\, w_2\}$ base dual. Δ_1 es:

$$v_4 = w_1;\, v_3 = w_2;\, v_2 = -w_2;\, v_1 = -w_1 - nw_2\, (n > 0)$$

El abanico

$$\Delta = \{\sigma_1 = \langle v_3,\, v_4\rangle_+;\, \sigma_2 = \langle v_2,\, v_4\rangle_+;\, \sigma_3 = \langle v_1,\, v_3\rangle_+;\, \sigma_4 = \langle v_1,\, v_2\rangle_+\}$$

- **Los abiertos afines** tienen por anillos, para $x = x^{e_1}$, $y = x^{e_2}$

$$\sigma_1^\vee \Rrightarrow k[x,\, y];\, \sigma_2^\vee \Rrightarrow k[x,\, y^{-1}]$$

$$\sigma_3^\vee \Rrightarrow k[x^{-1},\, y.x^{-n}];\, \sigma_4^\vee \Rrightarrow k[x^{-1},\, x^n.y^{-1}]$$

  Como esquemas los abiertos U_{σ_1} y U_{σ_2} (también U_{σ_3} y U_{σ_4}) se "pegan" en la variedad $K \times \mathbb{P}_1$ que es reglada (ver cap. v.2, [11]) y los cuatro forman un $\mathbb{P}_1-$haz sobre $\mathbb{P}_1$ que es $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n)$ llamada **Superficie de Hirzebruch**

- **Las derivaciones y raíces:**

$$D(v_2) = 0 \text{ porque } nv_2 = v_1 + v_4 \;\Rightarrow\; S(v_2) = \emptyset$$

$$D(v_4) = \langle x^{-e_1} D_{v_4}\rangle \;\Rightarrow\; S^*(v_4) = \emptyset\, y\, S(v_4) = \{-e_1 = \alpha_{41}\}$$

$$D(v_1) = \langle x^{e_1} D_{v_1}\rangle \;\Rightarrow\; S^*(v_1) = \emptyset\, y\, S(v_1) = \{e_1 = \alpha_{14}\}$$

$$D(v_3) = \langle \{x^{pe_1 - e_2} D_{v_3} :\, 0 \le p \le n\}\rangle \;\Rightarrow\; S(v_3) = S^*(v_3)$$

  con $S^*(v_3) = \{r^3_{n-p} = p.e_1 - e_2 :\, 0 \le p \le n\}$ que son las únicas raíces no parejables.

- **Divisores y descomposición fundamental:** Como $[H_1] = [H_4]$, el semigrupo de los divisores de Weil efectivos es $Ef(X) = \langle H_1,\, H_2\rangle_+$ con las relaciones:

$$H_4 = H_1 + D(x^{\alpha_{14}}) \;\Rightarrow\; m_4 = \alpha_{41} \qquad v(m_4) = (1, 0, 0, -1)$$

$$H_3 = nH_1 + H_2 + D(x^{e_2}) \;\Rightarrow\; m_3 = -e_2 \qquad v(m_3) = (n, 1, -1, 0)$$

  luego $M = 0 \oplus C$ con $C = \langle m_3,\, m_4\rangle_{\mathbb{Z}}$ y $B = 0$.

- **Anillos de Cox:** En este caso $s = 2$ y $k = 2$ y la matriz N tiene columnas $v'(m_3)$ y $v'(m_4) \Rightarrow$ las variables son:

$$x_1 = x^{(1,0),0};\ x_2 = x^{(0,1),0};\ x_3 = x^{(n,1),-m_3=e_2};\ x_1 = x^{(1,0),-m_4=e_1}$$

y por tanto como $B = 0$ se tiene

$$A' = A_C = K[y_1 = x^{(1,0,0,0)},\ y_2 = x^{(0,1,0,0)},\ y_3 = x^{(n,1,0,1)},\ y_4 = x^{(1,0,1,0)}]$$

de grados respectivamente $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(n, 0)$, $(1, 0)$. También podemos definir $y_3 = x^{(n,1,-1,0)}$ e $y_4 = x^{(1,0,0,-1)}$ expresando respecto de la base $\{m_3,\, m_4\}$ de C en lugar que respecto de la base $\{e_1,\, e_2\}$ de M.

Las derivaciones en las coordenadas de $K(M)$ **y de** $K(Y = y_1, \ldots, y_r)$: Teniendo en cuenta que

$$v(\alpha_{14} = e_1) = (-1, 0, 0, 1) \qquad v(r^3_{n-p} = pe_1 - e_2) = (n - p, 1, -1, p)$$

las derivaciones están generadas por:

$$xD_{v_1} \equiv y_1^{-1}y_4D_{v_1};\ x^sy^{-1}D_{v_3} \equiv y_1^{n-p}y_2y_3^{-1}y_4^pD_{v_3};\ x^{-1}D_{v_4} \equiv y_1^{-1}y_4D_{v_1}$$

lo que da las relaciones $x \equiv y_1^{-1}y_4$, $y \equiv y_1^{-n}y_2^{-1}y_3$ que definen el morfismo inyectivo $K(M) \hookrightarrow k(y_1, \ldots, y_r)$ y que utilizaremos en el último punto para ver como un automorfismo graduado en A_C se traduce en uno en X.

- **Orden y matrices $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{D}$:** De los valores de v en las raíces no parejables asociadas a v_3 se tienen que $[v_3] < [v_4]$ y $[v_3] < [v_2]$ de modo que la longitud máxima es $l(v_4) = 1$ y por tanto la parte unipotente R_u **es un grupo aditivo** en el que opera el toro $T(4) \equiv K^{*4}$.
  Las matrices son

$$\mathcal{R}^* \equiv \begin{pmatrix} M_2^1 & \emptyset \\ M_3^1 & \emptyset \end{pmatrix}$$

donde $M_2^1 = \{m_3 - pm_4 :\ 1 \leq p \leq n\}$ y $M_3^1 = m_3$

$$\mathcal{D} \equiv \begin{pmatrix} \mu_2^1 & 0 \\ \mu_3^1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\mu_2^1 = (a_n,\, \ldots\, a_1) \in K^n$ y $\mu_3^1 = a_0 \in K$ y todo $D \in (Der^u, \bullet) = R_u$ será

$$D = \sum_{p=0}^{n} a_{n-p} x^{r_p^3 = m_3 - (n-p)m_4} D_{v_3}$$

- **Conjuntos X_i y R_i para el radical del grupo:** Los conjuntos son

$$X_0 = Y_1 = \{v_3\} \qquad X_1 = Y_0 = \{v_1,\, v_2,\, v_4\} \qquad X_{q=2} = \emptyset$$

y

$$R_0 = 0 \qquad R_1 \equiv S^*(v_3) \qquad R_2 = R_1$$

$\Rightarrow R_u = (Der^u, \bullet) = (\mathbb{A}^{n+1},\, +)$ y el radical del grupo es

$$R(Aut_g A_C) = (\mathbb{A}^{n+1},\, +) \rtimes T(h=3)$$

porque hay $h = 3$ clases de equivalencia. Vamos a ver que **no es abeliano** y para ello en lugar de $T(h)$ utilizamos $T(r=4)$ y aplicamos el Teorema 7.18, p. 130 y después utilizaremos la caracterización de $T(h)$ como sugrupo de $T(r)$ dada en el corolario 7.22. Sea $\mu \in K^{*4}$ y $D \equiv (\mu_{12};\, \mu_{13}) \in R_u$ y $v(r_p^3) = (p, 1, -1, n-p) \Rightarrow$

$$\tau_\mu \circ D \circ \tau_{\mu^{-1}} = (\mu^{(0,1,-1,n)} a_n, \ldots, \mu^{(n-1,1,-1,1)} a_1;\, \mu^{(n,1,-1,0)} a_0)$$

que abreviadamente denotaremos, para $r^3 = r_0^3, \ldots, r_{n-1}^3$ como

$$\tau_\mu \circ D \circ \tau_{\mu^{-1}} = \mu^{v(r^3)}.\mu_{12};\, \mu^{v(r_n^3)}.\mu_{13}$$

y por tanto la operación en $R_u \rtimes K^{*4}$ es:

$$\left((\mu_{12};\, \mu_{13})\,,\, \tau_\mu\right) \circ \left((\mu'_{12};\, \mu'_{13})\,,\, \tau'_\mu\right) = \left(\left(\mu_{12} + \left(\mu^{v(r^3)}.\mu'_{12}\right);\, \mu_{13} + \mu^{v(r_n^3)}.\mu'_{13}\right),\, \tau_{\mu\mu'}\right)$$

y ahora la condición de que $\mu \in T(h)$ es que sea de la forma $\mu = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_1$ que en todo caso no evita que el radical no sea un subgrupo abeliano mientras que el radical unipotente sí lo es.

- **Cálculo de $\lambda_{D(j)}$:** En este caso $D = D(j=1)$ como antes si $D \equiv (\mu_{12};\, \mu_{13}) \Rightarrow \lambda_{D(1)}$ es la columna

$$\lambda_{D(1)} = \begin{pmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{13} \end{pmatrix}$$

- **M y $\lambda(i)$:** La parte reductiva del grupo es $G(\mathcal{A})\times G(\mathcal{B})$ con $G(\mathcal{A})=Gl(1)$ determinado por v_3 y $G(\mathcal{B})=Gl(2)\times Gl(1)$ determinados respectivamente por $[v_1]=[v_4]$ y por v_2 siendo pues la matriz M que define un automorfismo de la parte reductiva:

$$M=\begin{pmatrix} M(A_1) & 0 & 0 \\ 0 & M(B_1) & 0 \\ 0 & 0 & M(B_2) \end{pmatrix}$$

con $M(A_1)=\lambda_0^3$ matriz de orden 1, $M(B_1)$ la matriz de orden 2

$$M(B_1)=\begin{pmatrix} \lambda_0^1 & \lambda_1^4 \\ \lambda_1^1 & \lambda_0^4 \end{pmatrix}$$

y $M(B_2)=\lambda_0^2$ matriz de orden 1 de modo que los $\lambda(i)$ son

$$\lambda(1)=(\lambda_0^1,\,\lambda_1^1) \qquad \lambda(2)=(\lambda_0^2) \qquad \lambda(3)=(\lambda_0^3) \qquad \lambda(4)=(\lambda_0^4,\,\lambda_1^4)$$

- **Cálculo de $\overline{M}$ y E:** Con los datos anteriores calculamos los coeficientes $\overline{m}(j=1)_q^p$ de la matriz $\overline{M}=\overline{M}(j=1)$ de orden $d_{j=1}=n+1$. Para ello, las raíces no parejables son el conjunto ordenado

$$S^*(v_3)=\{r_0^3,\,\ldots\, r_{n-1}^3,\, r_n^3\}$$

Para $\overline{m}(j=1)_q^p$ hay que calcular $\mid c() \mid = v(r_p^3)=(p,1,-1,n-p)$ donde $c()$ es $c(1)$, $c(2)$ y $c(4)$ tales que

$$\begin{array}{llll} \mid c(1)\mid = & p & \alpha(1)= & (0,\alpha_{14}) \\ \mid c(4)\mid = & n-p & \alpha(4)= & (0,\alpha_{41}) \\ \mid c(2)\mid = & 1 & \alpha(2)= & (0) \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{ll} c(1)= & (x,p-x) \\ c(4)= & (y,n-p-y) \\ c(2)= & 1 \end{array}$$

donde x, y son naturales que deben cumplir la relación

$$r_q^3=r_p^3+x.(0)+(p-x).(\alpha_{14}=-m_4)+y.(0)+(n-p-y).\alpha_{41}$$

de donde se obtiene

$$y=n-(p+q)+x \qquad x\leq p \qquad y\leq n-p \qquad 0\leq p\leq n$$

Vamos a suponer que $n = 1 \Rightarrow p = 0,\ 1$ $q = 0,\ 1$ y obtendremos una matriz de orden dos.

$\bar{m}_0^0$:

La única posibilidad es $x = 0,\ y = 1 \Rightarrow c(1) = (0,0)$ $c(4) = (1,0) \Rightarrow$

$$\bar{m}_0^0 = 1.\frac{(\lambda_0^1)^0.(\lambda_1^1)^0.(\lambda_0^2)^1.(\lambda_0^4)^1.(\lambda_1^4)^0}{1} = \lambda_0^2.\lambda_0^4$$

$\bar{m}_1^0$:

Las condiciones ahora son $y = 1-(0+1)+x$, $x \leq 0$ luego la única solución es $x = 0$ $y = 0 \Rightarrow c(1) = (0,0)$ $c(4) = (0,1) \Rightarrow$

$$\bar{m}_1^0 = \lambda_1^4.\lambda_0^2$$

$\bar{m}_0^1$:

Las condiciones ahora son $y = 1-(1+0)+x$, $x \leq 1$ luego las solucioes son $x = 0$ $y = 0$ ó bien $x = 1$ $y = 1 \Rightarrow c(1) = (0,1)$ $c(4) = (0,0)$ ó bien $c(1) = (1,0)$ $c(4) = (1,-1)$ que queda descartada por ser negativo $\Rightarrow$

$$\overline{m}_0^1 = \lambda_1^1.\lambda_0^2$$

$\overline{m}_1^1$:

Las condiciones ahora son $y = 1-(1+1)+x$, $x \leq 1$ luego la única solución válida es $x = 1$ $y = 0 \Rightarrow c(1) = (1,0)$ $c(4) = (0,0) \Rightarrow$

$$\overline{m}_1^0 = \lambda_0^2.\lambda_0^1$$

$\Rightarrow$

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2.\lambda_0^4 & \lambda_0^2.\lambda_1^4 \\ \lambda_0^2.\lambda_1^1 & \lambda_0^2.\lambda_0^1 \end{pmatrix}$$

En definitiva, si $D \equiv (\mu_{12} = a_1; \mu_{13} = a_0$ con $1 + n_D \in R_u$ el correspondiente automorfismo de la parte unipotente y τ_M es el automorfismo de la parte reductiva de matriz la matriz M antes definida entonces $E \in (Der^u, \bullet) = R_u$ tal que $1 + n_E = \tau_{M^{-1}} \circ 1 + n_D \circ \tau_M$ es, utilizando la fórmula del teorema 7.23, siendo $M(A_1) = \lambda_0^3$ y $\lambda_{D(1)}$ de coordenadas a_1, a_0 :

$$E \equiv \frac{\lambda_0^3}{\lambda_0^2.(\lambda_0^1\lambda_0^4 - \lambda_1^1\lambda_1^4)} \begin{pmatrix} \lambda_0^1 & -\lambda_1^4 \\ -\lambda_1^1 & \lambda_0^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

y si utilizamos ahora el corolario 7.24, si:

$$M = \begin{pmatrix} \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & b & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

y $D \equiv (a_1, a_0) \Rightarrow \tau_M \circ 1 + n_D \circ \tau_{M^{-1}} = 1 + n_E$ donde ahora E es:

$$E \equiv \begin{pmatrix} \lambda_0^1 & -\lambda_1^4 \\ -\lambda_1^1 & \lambda_0^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} .\mu_3^{-1}$$

Como comentamos en la introducción, se puede obtener E y por tanto la operación de la parte reductiva en la unipotente de manera más sencilla, operando en este caso particular y no utilizando la fórmula del teorema 7.23; vamos a verlo:

Sea como antes la matriz M formada en la diagonal por $M(A_1)$, $M(B_1)$ y $M(B_2)$ y como no estamos tan sujetos a la terminología de la teoría simplificamos su notación para mayor comodidad, de modo que $M(A_1) = a$ matriz de orden 1, $M(B_1) = B$ la matriz de orden 2

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & d_1 \\ b_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

y $M(B_2) = c$ matriz de orden 1 y si τ_M es el correspondiente automorfismo de la parte reductiva $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \tau_M(y_1) &= b_1 y_1 + b_4 y_4 \\ \tau_M(y_2) &= c y_2 \\ \tau_M(y_3) &= a y_3 \\ \tau_M(y_4) &= d_1 y_1 + d_4 y_4 \end{aligned}$$

y si $D \equiv (\lambda_1; \lambda_0)$ es decir, $D = \lambda_1 x^{r_0^3} D_{v_3} + \lambda_0 x^{r_1^3} D_{v_3}$ y como $v(r_0^3) = (0, 1, -1, 1)$ y $v(r_1^3) = (1, 1, -1,) \Rightarrow 1 + n_D(y_i) = y_i \;\forall\; i = 1, 2, 4$ y

$$1 + n_D(y_3) = y_3 + \lambda_1 y_3 . y^{(0,1,-1,1)} + \lambda_0 y_3 . y^{(1,1,-1,0)} = y_3 + \lambda_1 y_2 y_4 + \lambda_0 y_1 y_2$$

$\Rightarrow \tau_{M^{-1}} \circ 1 + n_D \circ \tau_M(y_i) = y_i \ \forall \ i = 1, 2, 4$ y

$$\begin{aligned}
\tau_{M^{-1}} \circ 1 + n_D \circ \tau_M(y_3) &= \tau_{M^{-1}}(ay_3 + a\lambda_1 y_3.y^{(0,1,-1,1)} + a\lambda_0 y_3.y^{(1,1,-1,0)}) \\
&= \tau_{M^{-1}}(ay_3 + a\lambda_1 y_2 y_4 + a\lambda_0 y_1 y_2) \\
&= y_3 + \frac{a\lambda_1}{c} y_2.\frac{-b_4 y_1 + b_1 y_4}{det(B)} + \frac{a\lambda_0}{c} y_2.\frac{d_4 y_1 - d_1 y_4}{det(B)} \\
&= y_3 + y_2 y_4.(\frac{a.(\lambda_1 b_1 - \lambda_0 d_1)}{c\, det(B)} + y_1 y_2.(\frac{a.(\lambda_0 d_4 - \lambda_1 b_4)}{c\, det(B)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\tau_{M^{-1}} \circ 1 + n_D \circ \tau_M \equiv \left(\frac{a.(\lambda_1 b_1 - \lambda_0 d_1)}{c\, det(B)}; \frac{a.(\lambda_0 d_4 - \lambda_1 b_4)}{c\, det(B)} \right)$$

que es como antes

$$E \equiv \frac{a}{c\, det(B)}.\begin{pmatrix} b_1 & -d_1 \\ -b_4 & d_4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_0 \end{pmatrix}$$

- **El grupo de automorfismos de la variedad tórica:**

  Del abanico se deduce que la única permutación en las aristas Δ_1 que conserva el abanico es la trasposición entre v_1 y v_4 que justo son tales que $[v_1] = [v_4]$ de modo que de la sección anterior se deduce que $Aut\, X$ coincide con su componente conexa en el origen y por tanto

$$Aut\, X = (\mathbb{A}^{n+1}, +) \rtimes (Gl(1) \times Gl(2) \times Gl(1)) / T_{A_1}$$

  donde $T_{A_1} \simeq Spec\, K[\mathbb{Z}^{s=2}]$ es el subgrupo de $G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B})$ de las matrices

$$g = \begin{pmatrix} (\mu_1, \mu_2)^{v'(m_3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mu_1, \mu_2)^{v'(m_4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

  que es la matriz

$$g = \begin{pmatrix} \mu_1^n.\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1.I & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

T_{A_1} opera en $G(\mathcal{A})\times G(\mathcal{B})$: Si

$$M=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$g.M=\begin{pmatrix} \mu_1^n.\mu_2.a & 0 & 0\\ 0 & \mu_1 B & 0\\ 0 & 0 & \mu_2.c\end{pmatrix}$$

Simplificando la notación escribirenos

$$g.M=(\mu_1^n.\mu_2,\, \mu_1 I,\, \mu_2)\,.\,(a,\, B,\, c)=(\mu_1^n.\mu_2.a,\, \mu_1 B,\, \mu_2.c)$$

luego si $[M]$ es su clase en $(Gl(1)\times Gl(2)\times Gl(1))\,/T_{A_1}$ se tiene:

$$[M]=[a,\, B,\, c]=[\mu_1{}^n\frac{a}{c},\, \mu_1 B,\, 1]\equiv[\mu_1{}^n\frac{a}{c},\, \mu_1 B]=$$

llamando $\lambda=\mu_1{}^n$ es

$$=[\lambda\frac{a}{c},\ \sqrt[n]{\lambda}B]=[1,\ \sqrt[n]{\frac{c}{a}}B]\equiv[\sqrt[n]{\frac{c}{a}}B]$$

por tanto tenemos la sucesión exacta de grupos, siendo $\mu_n(K)$ el subgrupo de las raíces $n-$ésimas de la unidad,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T_{A_1} & \to & Gl(1)\times Gl(2)\times Gl(1) & \to & Gl(2)/\mu_n(K) & \to & 0\\ & & & & M & \rightsquigarrow & [\sqrt[n]{\frac{c}{a}}B] & & \end{array}$$

luego se ha probado

$$Aut\, X=(\mathbb{A}^{n+1},\, +)\rtimes Gl(2)/\mu_n(K)$$

con las operaciones que se han descrito antes. El toro maximal de su radical es el toro $T(\langle m_3=e_2\rangle_{\mathbb{Z}})$ y el toro maximal de $Aut\, X$ es $T=T(M)$ que por el isomorfismo de $Aut\, X$ con $Aut_g A_C/T_{A_1}$ da $T(2)/\mu_n(K)$.

Veamos por último la operación de los automorfismo de la parte reductiva y de la parte unipotente en $K(M)$:

Automorfismos de la parte reductiva: Sea M la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & d_1 & 0 \\ 0 & b_4 & d_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

entonces

$$\tau_M(x) \equiv \tau_M(y_1^{-1}.y_4) = \frac{d_1y_1 + d_4y_4}{b_1y_1 + b_4y_4} =$$

$$= y_4y_1^{-1}.\frac{d_1y_1y_4^{-1} + d_4}{b_1 + b_4y_4y_1^{-1}} \equiv x.\frac{d_1x^{-1} + d_4}{b_1 + b_4x}$$

luego

$$\tau_M(x) = \frac{d_1 + d_4x}{b_1 + b_4x}$$

y por otro lado,

$$\tau_M(y) \equiv \tau_M(y_1^{-n}y_2^{-1}y_3) = \frac{ay_3}{cy_2.(b_1y_1 + b_4y_4)^n} =$$

$$= y_3y_2^{-1}y_1^{-n}.\frac{a}{c.(b_1 + b_4y_4y_1^{-1})^n}$$

luego

$$\tau_M(y) = y.\frac{a}{c.(b_1 + b_4x)^n}$$

y como es inmediato comprobar, el resultado es igual si se cambia M por la matriz equivalente

$$g.M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[n]{\frac{c}{a}}B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En definitiva, si $[B] \in Gl(2)/\mu_n(K)$ donde

$$B = \begin{pmatrix} u.b_{11} & u.b_{12} \\ u.b_{21} & u.b_{22} \end{pmatrix}$$

para cualquier u raíz $n-$ésimas de la unidad, entonces el automorfismo asociado en X es:

$$\tau_{[B]}(x) = \frac{b_{12} + b_{22}x}{b_{11} + b_{21}x}$$

$$\tau_{[B]}(y) = y.\frac{1}{(b_{11} + b_{21}x)^n}$$

Automorfismos de la parte unipotente: Como $T_{A_{n-1}}$ es subgrupo de la parte reductiva de $Aut_g A_C$, la parte unipotente de $Aut\, X$ y $Aut_g A_C$ coinciden.
Sea pues $\tau = 1 + n_D$ con $D = a_n x^{r_0^3} D_{v_3} + \cdots + a_0 x^{r_n^3} D_{v_3}$ y $v(r_p^3) = (p, 1, -1, n-p)$ $\Rightarrow$

$$\tau(y_1) = y_1 \qquad \tau(y_2) = y_2 \qquad \tau(y_4) = y_4$$

$$\tau(y_3) = y_3 + a_n y_3 y^{(0,1,-1,n)} + \cdots + a_0 y_3 y^{(n,1,-1,0)}$$

$\Rightarrow$

$$\tau(y_3) = y_3 + a_n y_2 y_4^n + \cdots + a_0 y_1^n y_2$$

En X, como $x = x^{e_1} \equiv Y^{v(e_1)} = y_1^{-1} y_4$ y $y = y^{e_2} \equiv Y^{v(e_2)} = y_1^n y_2^{-1} y_3 \Rightarrow$

$$\tau(x) \equiv \tau(y_1^{-1} y_4) = y_1^{-1} y_4 \equiv x \;\Rightarrow\; \tau(x) = x$$

$$\tau(y) \equiv \tau(y_1^{-n} y_2^{-1} y_3) = y_1^{-n} y_2^{-1} . (y_3 + a_n y_2 y_4^n + \cdots + a_1 y_4 y_1^{n-1} y_2 + a_0 y_1^n y_2)$$

$\Rightarrow$

$$\tau(y) = y + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

Ejemplo 2 : **Variedad tórica con grupo de automorfismos resoluble**
$dim\, M = 2$, base $\{e_1,\, e_2\}$ y $\{w_1,\, w_2\}$ base dual. Δ_1 es:

$$v_4 = w_1 - w_2;\; v_3 = -w_1;\; v_2 = w_2;\; v_1 = w_1 + 2w_2$$

El abanico

$$\Delta = \{\sigma_1 = \langle v_1,\, v_2\rangle_+;\; \sigma_2 = \langle v_3,\, v_4\rangle_+;\; \sigma_3 = \langle v_2,\, v_3\rangle_+;\; \sigma_4 = \langle v_1,\, v_4\rangle_+\}$$

- **Los abiertos afines** tienen por anillos, para $x = x^{e_1}$, $y = x^{e_2}$

$$\sigma_1^\vee \Rrightarrow k[x, y, x^{-1}];\; \sigma_2^\vee \Rrightarrow k[x, y, x^2y^{-1}]$$

$$\sigma_3^\vee \Rrightarrow k[y, x^{-1}];\; \sigma_4^\vee \Rrightarrow k[y^{-1}, x^{-1}y^{-1}]$$

- **Las derivaciones y raíces:**

$$D(v_1) = 0,\; D(v_2) = 0 \Rightarrow S(v_1) = S(v_2) = \emptyset$$

$$D(v_3) = \langle x^{e_1}D_{v_3}, x^{e_1+e_2}D_{v_3}\rangle \;\Rightarrow\; S(v_3) = S^*(v_3) = \{e_1, e_1 + e_2\}$$
$$D(v_4) = \langle x^{e_2}D_{v_4}\rangle \;\Rightarrow\; S(v_4) = S^*(v_4) = \{e_2\}$$

Las raíces son todas no parejables, no hay raíces semisimples (parejables) y por tanto el grupo es resoluble.

- **Divisores y descomposición fundamental:** El semigrupo de los divisores de Weil efectivos es $Ef(X) = \langle H_1,\, H_2\rangle_+$ con las relaciones:

$$H_3 = H_2 + 3H_1 + D(x^{-(e_1+e_2)}) \;\Rightarrow\; m_3 = e_1 + e_2 \qquad v(m_3) = (3, 1, -1, 0)$$

$$H_4 = 2H_1 + H_2 + D(x^{-e_2}) \;\Rightarrow\; m_4 = e_2 \qquad v(m_4) = (2, 1, 0, -1)$$

$B = \{v_3 = 0\} \cap \{v_4 = 0\} = 0$ luego $M = 0 \oplus C$ con $C = \langle m_3,\, m_4\rangle_{\mathbb{Z}}$ y $S^*(v_3) = \{r_1^3 = m_3 - m_4, r_2^3 = m_3\}$ y $S^*(v_4) = \{r_1^4 = m_4\}$, conjuntos ordenados conforme se describe en la teoría.

- **Anillos de Cox:** En este caso $s = 2$ $k = 2$ y la matriz N tiene columnas $N^1 = v'(m_3)$ y $N^2 = v'(m_4) \Rightarrow$ las variables son:

$$x_1 = x^{((1,0),0,0)};\; x_2 = x^{((0,1),0,0)};\; x_3 = x^{(N^1,-m_3)};\; x_1 = x^{(N^2,-m_4)}$$

y por tanto como $B=0$ se tiene

$$A' = A_C = K[x^{(1,0,0,0)},\, x^{(0,1,0,0)},\, x^{(3,1,-1,-1)},\, x^{(2,1,0,-1)}]$$

de grados respectivamente $(1,0)$, $(0,1)$, $(3,1)$, $(2,1)$. También se podrría definir $y_3 = x^{(n,1,-1,0)}$ e $y_4 = x^{(1,0,0,-1)}$ expresando respecto de la base $\{m_3,\, m_4\}$ de C en lugar de la base $\{e_1,\, e_2\}$ de M.
Las derivaciones en las coordenadas de $K(M)$ y de $K(Y = y_1, \ldots, y_r)$: Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} v(r_1^3 = e_1) &= (1,0,-1,1) \\ v(m_3 = e_1 + e_2) &= (3,1,-1,0) \\ v(m_4 = e_2) &= (2,1,0,-1) \end{aligned}$$

las derivaciones están generadas por:

$$xD_{v_3} \equiv y_1 y_3^{-1} y_4 D_{v_3};\; xyD_{v_3} \equiv y_1 y_2 y_3^{-1} D_{v_3};\; yD_{v_4} \equiv y_1^2 y_2 y_4^{-1} D_{v_4}$$

lo que da las relaciones $x \equiv y_1 y_3^{-1} y_4$, $y \equiv y_1^2 y_2 y_4^{-1}$ que definen el morfismo inyectivo $K(M) \hookrightarrow k(y_1, \ldots, y_r)$ y que utilizaremos en el último punto para ver como un automorfismo graduado en A_C se traduce en uno en X.

- **Orden y matrices $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{D}$:** De los valores de v en las raíces no parejables asociadas a v_3 se tienen que $[v_3] < [v_4]$ y $[v_4] < [v_2]$ de modo que la longitud máxima es $l(v_4) = 2$ y por tanto la parte unipotente seá el producto semidirecto de **dos grupos aditivos** en el que opera la parte reductiva que consiste en el toro $T(4) \equiv K^{*4}$.
  Las matrices son
  $$\mathcal{R}^* \equiv \begin{pmatrix} M_2^1 & \emptyset \\ M_3^1 & M_3^2 \end{pmatrix}$$
  donde $M_2^1 = \{r_1^3\}$, $M_3^1 = \{r_2^3\}$ y $M_3^2 = \{r_1^4\}$
  $$\mathcal{D} \equiv \begin{pmatrix} \mu_2^1 & 0 \\ \mu_3^1 & \mu_3^2 \end{pmatrix}$$
  donde $\mu_2^1 = a_1$ $\mu_3^1 = b_1 \in K$ y $\mu_3^2 = c_1$ y todo $D \in (Der^u, \bullet) = R_u$ será
  $$D = a_1 x^{r_1^3} D_{v_3} + b_1 x^{r_2^3} D_{v_3} + c_1 x^{r_1^4} D_{v_4}$$

- **Conjuntos X_i y R_i para el radical del grupo:** Los conjuntos son

$$X_0 = \{v_3\} \qquad X_1 = \{v_4\} \qquad X_2 = \{v_1, v_2\} \qquad X_{q=3} = \emptyset$$

y

$$R_0 = 0 \qquad R_1 \equiv S^*(v_3) \qquad R_2 \equiv \{S^*(v_3),\, S^*(v_4)\} \qquad R_3 = R_2$$

$\Rightarrow \overline{R}_1 = R_1/R_0 \equiv D(v_3)$ y $\overline{R}_2 = R_2/R_1 \equiv D(v_4) \Rightarrow$

$$R_u = (Der^u, \bullet) = (D(v_3), \bullet) \rtimes (D(v_4), \bullet) = (\mathbb{A}^2,\, +) \rtimes (\mathbb{A}^1,\, +)$$

producto de dos grupos aditivos y no menos, por tanto no es abeliano. El radical del grupo es

$$R(Aut_g A_C) = \left(\left(\mathbb{A}^2,\, + \right) \rtimes \left(\mathbb{A}^1,\, + \right) \right) \rtimes T(4)$$

En este ejemplo vamos a ver la operación en el radical unipotente R_u :
Para $D = (a_1 x^{r_1^3} D_{v_3} + b_1 x^{r_2^3} D_{v_3}) + c_1 x^{r_1^4} D_{v_4}$, sean $D_1 \equiv (a_1, b_1; c_1)$ y de igual modo $D_2 \equiv (a_2, b_2; c_2) \Rightarrow$

$$D_1 \bullet D_2 = D_1 + D_2 + P(D_1, D_2)$$

y como $v_4(r_1^3) = 1 \neq 0$ y $v_4(r_2^3) = 0$ queda

$$P(D_1, D_2) = P(c_1 x^{r_1^4} D_{v_4},\, a_2 x^{r_1^3} D_{v_3}) =$$

$$= a_1 1!. \frac{c_1^1}{0! \cdot 1!} . x^{(r_1^3 + 1 r_1^4) = r_2^3} D_{v_3} = a_2 . c_1 . x^{r_2^3} D_{v_3}$$

$\Rightarrow$

$$(a_1, b_1; c_1) \bullet (a_2, b_2; c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_2 c_1; c_1 + c_2)$$

con lo que se ve como ya se sabía que R_u no es abeliano.

- **El grupo de automorfismos de la variedad tórica:** En este caso la parte reductiva es el toro $T(4)$ y por tanto $Aut^\circ X$ es el grupo resoluble conexo

$$Aut^\circ X = \left(\left(\mathbb{A}^2,\, + \right) \rtimes \left(\mathbb{A}^1,\, + \right) \right) \rtimes (T(4)/T_{A_1})$$

que coincide con su radical y el cociente $Aut\, X / Aut^\circ X = 0$ porque es el subgrupo asociado a las permutaciones de 4 elementos generado por las trasposiciones $(2,4)$ y $(1,3)$ que conserva el abanico pero no es isomorfismo en M^{*2}.

Para calcular $(T(4)/T_{A_1})$ que debe dar el toro maximal $T = T(M)$, como $B = 0 \Rightarrow T_{A_1} \simeq Spec\, K[\mathbb{Z}^{s=2}]$ es el subgrupo de $T(4)$ de los elementos $\mu = (\mu_3, \mu_4, \mu_1, \mu_2)$ del tipo

$$g = \Big((a,b)^{v'(m_3)}, (a,b)^{v'(m_4)}, a, b\Big) = \big(a^3b^1,\ a^2b^1,\ a,\ b\big)$$

que opera en $T(4)$:

$$g.\mu = \big(a^3b^1\mu_3,\ a^2b^1\mu_4,\ a\mu_1,\ b\mu_2\big)$$

$\Rightarrow$ tomando clases se tiene $[(\mu_3, \mu_4, \mu_1, \mu_2)] = [(\mu_3\mu_1^{-3}\mu_2^{-1}, \mu_4\mu_1^{-2}\mu_2^{-1}, 1, 1)] \Rightarrow$ y tenemos la sucesión exacta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T_{A_1} & \to & T(4) & \to & Gm \times Gm & \to & 0 \\ & & & & \mu & \rightsquigarrow & (\frac{\mu_3}{\mu_1^3\mu_2}, \frac{\mu_4}{\mu_1^2\mu_2}) & & \end{array}$$

luego se ha probado

$$Aut\, X = \big((\mathbb{A}^2, +) \rtimes (\mathbb{A}^1, +)\big) \rtimes Gm \times Gm$$

con las operaciones que se han descrito antes y su toro maximal es ciertamente $T \simeq T(2)$ en $Gm \times Gm$. Veamos por último la operación de los automorfismo de la parte reductiva y de la parte unipotente en $K(M)$:

Automorfismos de la parte reductiva: Sea entonces $[\mu] = (p, q, 1, 1) \in Gm \times Gm$ y $\tau_\mu(y_1) = y_1$, $\tau_\mu(y_2) = y_2$, $\tau_\mu(y_3) = py_3$, $\tau_\mu(y_4) = qy_4$, $\Rightarrow$

$$\tau_\mu(x) \equiv \tau_m u(\frac{y_1y_4}{y_3}) = \frac{y_1qy_4}{py_3}$$

luego

$$\tau_\mu(x) = \frac{qx}{p}$$

y por otro lado,

$$\tau_\mu(y) \equiv \tau_\mu(\frac{y_1^2y_2}{y_4}) = \frac{y_1^2y_2}{qy_4}$$

luego

$$\tau_\mu(y) = \frac{y}{q}$$

Automorfismos de la parte unipotente: Como $T_{A_{n-1}}$ es subgrupo de la parte reductiva de $Aut_g A_C$, la parte unipotente de $Aut\,X$ y $Aut_g A_C$ coinciden.
Sea pues $\tau = 1 + n_D$ con $D \equiv (a, b; c)$ es decir

$$D = ay_1 y_3^{-1} y_4 D_{v_3} + by_1^3 y_2 y_3^{-1} D_{v_3} + cy_1^2 y_2 y_4^{-1} D_{v_4}$$

$\Rightarrow$

$$\tau(y_1) = y_1 \qquad \tau(y_2) = y_2$$

$$\tau(y_3) = y_+ ay_1 y_4 + by_1^3 y_2 \qquad \tau(y_4) = y_4 + cy_1^2 y_2$$

$\Rightarrow$ en X, como $x = x^{e_1} \equiv Y^{v(e_1)} = y_1 y_3^{-1} y_4$ y $y = y^{e_2} \equiv Y^{v(e_2)} = y_1^2 y_2 y_4^{-1} \Rightarrow$

$$\tau(x) \equiv \frac{y_1.(y_4 + cy_1^2 y_2)}{y_3 + ay_1 y_4 + by_1^3 y_2} = \frac{y_1 y_4.(1 + cy_1^2 y_2 y_4^{-1})}{y_3.(1 + ay_1 y_4 y_3^{-1} + by_1^3 y_2 y_3^{-1})}$$

$\Rightarrow$

$$\tau(x) = x.\frac{1 + cy}{1 + ax + bxy}$$

$$\tau(y) \equiv \frac{y_1^2 y_2}{y_4 + cy_1^2 y_2} = y_1^2 y_2 y_4^{-1}.\frac{1}{1 + cy_1^2 y_2 y_4^{-1}}$$

$\Rightarrow$

$$\tau(y) = \frac{y}{1 + cy}$$

Ejemplo 3 : **Variedad tórica con grupo de automorfismos reductivo**
$dim\, M = 2$, base $\{e_1,\, e_2\}$ y $\{w_1,\, w_2\}$ base dual. Δ_1 es:

$$v_1 = w_1;\; v_2 = w_2;\; v_3 = -w_1;\; v_4 = -w_2$$

El abanico

$$\Delta = \{\sigma_1 = \langle v_1,\, v_2\rangle_+;\; \sigma_2 = \langle v_3,\, v_2\rangle_+;\; \sigma_3 = \langle v_4,\, v_3\rangle_+;\; \sigma_4 = \langle v_1,\, v_4\rangle_+\}$$

- **Los abiertos afines** tienen por anillos, para $x = x^{e_1}$, $y = x^{e_2}$

  $$\sigma_1^\vee \Rrightarrow k[x, y];\; \sigma_2^\vee \Rrightarrow k[y^{-1}, y]$$

  $$\sigma_3^\vee \Rrightarrow k[x^{-1}, y^{-1}];\; \sigma_4^\vee \Rrightarrow k[x, y^{-1}]$$

  $\Rightarrow X = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$

- **Las derivaciones y raíces:** Las raíces son

  $$S(v_1) = \{\alpha_{13} = -e_1\};\; S(v_2) = \{\alpha_{24} = -e_2\};\; S(v_3) = \{e_1\};\; S(v_4) = \{e_2\}$$

  y las derivaciones asociadas a ellas. Las raíces son todas parejables, (semisimples) y por tanto el grupo de automorfismos es reductivo.

- **Divisores y descomposición fundamental:** El semigrupo de los divisores de Weil efectivos es $Ef(X) = \langle H_1,\, H_2\rangle_+$ con $[H_3] = [H_1]$ y $[H_2] = [H_4]$ y las relaciones:

  $$H_3 = H_1 + D(x^{-e_1}) \qquad H_4 = H_2 + D(x^{-e_2})$$

  luego

  $$m_3 = e_1;\; m_4 = e_2 \qquad v(m_3) = (1, 0, -1, 0);\; v(m_4) = (0, 1, 0, -1)$$

  $B = \{v_3 = 0\} \cap \{v_4 = 0\} = 0$ luego $M = 0 \oplus C$ con $C = \langle m_3,\, m_4\rangle_{\mathbb{Z}}$.

  Anillos de Cox: En este caso $s = 2$ $k = 2$ y la matriz N tiene columnas $N^1 = v'(m_3) = (1, 0)$ y $N^2 = v'(m_4) = (0, 1) \Rightarrow$ las variables son:

  $$y_1 = x^{((1,0),0,0)};\; y_2 = x^{((0,1),0,0)};\; y_3 = x^{(N^1, -m_3)};\; y_4 = x^{(N^2, -m_4}$$

  y por tanto como $B = 0$ se tiene

  $$A' = A_C = K[y_1 = x^{(1,0,0,0)},\, y_2 = x^{(0,1,0,0)},\, y_3 = x^{(1,0,-1,0)},\, y_4 = x^{(0,1,0,-1)}]$$

de grados respectivamente $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

Las derivaciones en las coordenadas de $K(M)$ y de $K(Y = y_1,\ldots,y_r)$: Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} v(\alpha_{13} = -e_1) &= (-1,0,1,0) \\ v(\alpha_{24} = -e_2) &= (0,-1,0,1) \\ v(m_3 = e_1) &= (1,0,-1,0) \\ v(m_4 = e_2) &= (0,1,0,-1) \end{aligned}$$

las derivaciones están generadas por:

$$x^{-1}D_{v_1} \equiv y_1^{-1}y_3D_{v_1};\ y^{-1}D_{v_2} \equiv y_2^{-1}y_4D_{v_2}$$

$$xD_{v_3} \equiv y_1y_3^{-1}D_{v_3};\ yD_{v_4} \equiv y_2y_4^{-1}D_{v_4}$$

lo que da las relaciones $x \equiv y_1y_3^{-1}$, $y \equiv y_2y_4^{-1}$ que definen el morfismo inyectivo $K(M) \hookrightarrow k(y_1,\ldots,y_r)$ y que utilizaremos en el último punto para ver como un automorfismo graduado en A_C se traduce en uno en X.

- **Orden y matrices $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{D}$:** Son nulas porque no hay raíces no parejables y por tanto el subgrupo unipotente es nulo. La longitud es cero y $q = 1$.

- **M y $\lambda(i)$:** La parte reductiva del grupo es $G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B})$ con $G(\mathcal{A}) = 0$ y $G(\mathcal{B}) = Gl(2) \times Gl(2)$ determinados respectivamente por $[v_1] = [v_3]$ y por $[v_2] = [v_4]$ siendo pues la matriz M que define un automorfismo de la parte reductiva:

$$M = \begin{pmatrix} M(B_1) & 0 \\ 0 & M(B_2) \end{pmatrix}$$

con $M(B_1)$ y $M(B_2)$ las matrices de orden 2

$$M(B_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \qquad M(B_2) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix}$$

de modo que los $\lambda(i)$ son

$$\lambda(1) = (a_1,\, a_3) \qquad \lambda(3) = (b_3,\, b_1) \qquad \lambda(2) = (a_2,\, a_4) \qquad \lambda(4) = (b_4,\, b_2)$$

- **Conjuntos X_i y R_i para el radical del grupo:** Son nulos y el radical se reduce al toro $T(h=2)$.

- **El grupo de automorfismos de la variedad tórica:** Las únicas permutaciones en Δ_1 que son isomorfismos lineales en el retículo y además conservan el abanico son las dadas por las trasposiciones entre aristas de la misma clase y por tanto el grupo $Aut\, X/Aut^{\circ}\, X = 0 \Rightarrow$

$$Aut\, X = \left(Gl(2) \times Gl(2)\right)/T_{A_1}$$

y vamos a calcular el cociente. Como $B=0$ entonces $T_{A_1} = m(Spec\, K[\mathbb{Z}^{s=2}]$ que son las matrices

$$g = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

y que operan en M

$$gM = \begin{pmatrix} \mu_1 M(B_1) & 0 \\ 0 & \mu_2 M(B_2) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ el cociente es

$$\left(Gl(2) \times Gl(2)\right)/T_{A_1} = GP_2 \times GP_2$$

producto de grupos lineales proyectivos cuyo radical es trivial como ya era sabido porque las raíces parejables generan todo M.

El automorfismo en X que define $[M] \in GP_2 \times GP_2$ es:

$$\tau_M(y_1) = a_1y_1 + a_3y_3 \qquad \tau_M(y_2) = a_2y_2 + a_4y_4$$

$$\tau_M(y_3) = b_3y_3 + b_1y_1 \qquad \tau_M(y_4) = b_4y_4 + b_2y_2$$

$\Rightarrow$

$$\tau_{[M]}(x) \equiv \frac{\tau_M(y_1)}{\tau_M(y_3)} = \frac{a_1y_1 + a_3y_3}{b_3y_3 + b_1y_1} = y_1y_3^{-1}.\frac{a_1 + a_3y_3y_1^{-1}}{b_3 + b_1y_1y_3^{-1}}$$

luego

$$\tau_{[M]}(x) = \frac{a_1x + a_3}{b_1x + b_3}$$

y de igual modo,

$$\tau_{[M]}(y) = \frac{a_2y + a_4}{b_2y + b_4}$$

Ejemplo 4 : **Variedad tórica con grupo de automorfismos resoluble y** $B \neq 0$ $dim\, M = 2$, base $\{e_1,\, e_2\}$ y $\{w_1,\, w_2\}$ base dual Δ_1 es:

$$v_3 = w_1;\; v_2 = -w_1 + 2w_2;\; v_1 = -2w_1 - 3w_2$$

El abanico

$$\Delta = \{\sigma_1 = \langle v_1,\, v_2\rangle_+;\; \sigma_2 = \langle v_2,\, v_3\rangle_+;\; \sigma_3 = \langle v_3,\, v_1\rangle_+\}$$

- **Los abiertos afines** tienen por anillos, para $x = x^{e_1}$, $y = x^{e_2}$

$$\sigma_1^\vee \Rrightarrow k[x^{-1}, x^{-3}y^2, x^{-2}y^{-1}, x^{-2}y];\; \sigma_2^\vee \Rrightarrow k[yx, y, x^2y^1]$$

$$\sigma_3^\vee \Rrightarrow k[y^{-1}, y^{-2}x, y^{-3}x^2]$$

- **Las derivaciones y raíces:**

$$D(v_1) = 0,\; D(v_2) = 0 \Rightarrow\; S(v_1) = S(v_2) = \emptyset$$

$$D(v_3) = \langle x^{-e_1} D_{v_3}\rangle \;\Rightarrow\; S(v_3) = S^*(v_3) = \{-e_1\}$$

  No hay raíces semisimples (parejables) y por tanto el grupo es resoluble.

- **Divisores y descomposición fundamental:** El semigrupo de los divisores de Weil efectivos es $Ef(X) = \langle H_1,\, H_2\rangle_+$ con las relaciones:

$$H_3 = H_2 + 2H_1 + D(x^{e_1}) \;\Rightarrow\; m_3 = -e_1 \qquad v(m_3) = (2, 1, -1)$$

  $B = \{v_3 = 0\} = \langle e_2\rangle_{\mathbb{Z}}$ luego $M = B \oplus C$ con $C = \langle m_3\rangle_{\mathbb{Z}}$ y $S^*(v_3) = \{r_1^3 = m_3\}$

- **Anillos de Cox:** En este caso $s = 2$ $k = 1$ y la matriz N tiene columna $N^1 = v'(m_3) = (2, 1) \Rightarrow$ las variables son:

$$y_1 = x^{((1,0),0,0)};\; y_2 = x^{((0,1),0,0)};\; y_3 = x^{(N^1, -m_3)}$$

  y por tanto

$$A_C = K[y_1 = x^{(1,0,0,0)},\; y_2 = x^{(0,1,0,0)},\; y_3 = x^{(2,1,1,0)}]$$

  de grados respectivamente, siendo $v'(e_2) = (-3, 2)$,

$$(1, 0)\, mod\, \mathbb{Z}(-3, 2) \qquad (0, 1)\, mod\, \mathbb{Z}(-3, 2) \qquad (2, 1)\, mod\, \mathbb{Z}(-3, 2)$$

Como debe ser, $grad(y_3) = grad(y_3.x^{v(r_1^3)}) = grad(x_1^2.x_2)$. El anillo de Cox generalizado se obtiene de $A' = A_C[B]$ dado por el Corolario 5.5 de modo que para $\beta = e_2 \in B$ el isomorfismo viene dado por $x^\beta \equiv x^{-v'(\beta),\beta} = x^{(3,-2,0,1)}$ y por tanto

$$A' = K[y_1 = x^{(1,0,0,0)}, y_2 = x^{(0,1,0,0)}, y_3 = x^{(2,1,1,0)}, y_4 = x^{(3,-2,0,1)}, y_5 = x^{-(3,-2,0,1)}]$$

de grados respectivamente $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,-1)$, y $\pm(3,-2)$.

Los generadores de las derivaciones: Teniendo en cuenta las relaciones

$$\begin{array}{ccccc} K(M) & \to & K(A_C) & \to & K(A' \simeq A_C[X^B]) \\ x^m & \rightsquigarrow & (v'(m_B), m_C) = Y^{v(m)} & \rightsquigarrow & (0,m) \equiv Y^{v(m)}.X^{m_B} \end{array}$$

Los generadores en $K(M)$ son

$$x^{-1}D_{v_3}$$

Los generadores en A_C son

$$y_1^2 y_2 y_3^{-1} D_{v_3}$$

Los generadores en A' son

$$y_1^2 y_2 y_3^{-1} D_{v_3}$$

y las relaciones entre las variables en X y en A_C es $x \equiv y_1^{-2} y_2^{-1} y_3$ y también $y \equiv y_1^{-3} y_2^2$ y con A' es $y \equiv y_1^{-3} y_2^2 y_4$ aunque en y_4 todo automorfismo de A_C como automorfismo de A' es la identidad, como prueba la teoría.

- **Orden y matrices $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{D}$:** De los valores de v en las raíces no parejables asociadas a v_3 se tienen que $[v_3] < [v_1]$ y $[v_3] < [v_2]$ de modo que la longitud máxima es $l(v_1) = 1 = q - 1$ y por tanto la parte unipotente será el producto semidirecto de **un grupo aditivo** en el que opera la parte reductiva que consiste en el toro $T(3) \equiv K^{*3}$.

  Las matrices son

  $$\mathcal{R}^* \equiv \left(M_2^1\right)$$

  donde $M_2^1 = \{r_1^3\}$.

  $$\mathcal{D} \equiv \left(\mu_2^1\right)$$

  donde $\mu_2^1 = \lambda$ y todo $D \in (Der^u, \bullet) = R_u$ será

  $$D = \lambda x^{r_1^3} D_{v_3}$$

- **Conjuntos X_i y R_i para el radical del grupo:** Los conjuntos son

$$X_0 = \{v_3\} \qquad X_1 = \{v_1, v_2\} \qquad X_{q=2} = \emptyset$$

y

$$R_0 = 0 \qquad R_1 \equiv S^*(v_3) \qquad R_1 = R_2$$

$\Rightarrow \overline{R}_1 = R_1/R_0 \equiv D(v_3)$ y $\Rightarrow$

$$R_u = (Der^u, \bullet) = (D(v_3), \bullet) = (\mathbb{A}^1, +)$$

por tanto es abeliano. El radical del grupo es

$$R(Aut_g A_C) = \left(\mathbb{A}^1, +\right) \rtimes T(3)$$

- **El grupo de automorfismos de la variedad tórica:** En este caso la parte reductiva es el toro $T(4)$ y por tanto $Aut^\circ X$ es el grupo resoluble

$$Aut^\circ X = \left(\mathbb{A}^1, +\right) \rtimes (T(3))/T_{A_1} = R(Aut^\circ X)$$

y el cociente $Aut\, X/Aut^\circ X$ es nulo porque las permutaciones generados por la trasposición $(1,3)$ que es la única que conserva el abanico no es isomorfismo lineal. Vamos aver que la operación en $Aut_g A_C$ consiste en el producto de matrices. Sea $D = \lambda x^{r_1^3} D_{v_3} \equiv (\lambda)$ y $\tau = \tau_{(\mu_1,\mu_2,\lambda_3)}$ tal que

$$\tau \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \mu_1 y_1 \\ \mu_2 y_2 \\ \lambda_3 y_3 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

$$(1+n_D)\circ\tau \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ (y_1)^2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \mu_1 y_1 \\ \mu_2 y_2 \\ \lambda_3 y_3 + \lambda.\lambda_3 (y_1)^2 y_2 \\ (\mu_1)^2.\mu_2 (y_1)^2 y_2 \end{matrix}$$

y la matriz asociada a $(1+n_D)\circ\tau$ en la base $\{y_1,\, y_2,\, y_3,\, (y_1)^2 y_2\}$ es

$$(1+n_D)\circ\tau \equiv \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda.\lambda_3 & (\mu_1)^2.\mu_2 \end{pmatrix}$$

y de igual modo el automorfismo $(1+n_{D'})\circ\tau'$ tiene matriz

$$(1+n_{D'})\circ\tau' \equiv \begin{pmatrix} \mu_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'.\lambda_3' & (\mu_1')^2.\mu_2' \end{pmatrix}$$

y la composición es

$$(1+n_D)\circ\tau\ \circ\ (1+n_{D'})\circ\tau' = (1+n_D)\circ(\tau\circ(1+n_{D'})\circ\tau^{-1})\circ\tau\circ\tau'$$

donde como se ha probado, $\tau\circ(1+n_{D'})\circ\tau^{-1} = 1+n_{\tau D'}$ siendo

$$\tau D' = \lambda'.(\mu_1,\mu_2,\lambda_3)^{v(r_1^3)}x^{r_1^3}D_{v_3} = \lambda'.(\mu_1)^2.\mu_2.(\lambda_3)^{-1}x^{r_1^3}D_{v_3}$$

$\Rightarrow$

$$(1+n_D)\circ(1+n_{\tau D'}) = 1+n_{D\bullet\tau D'} = 1+n_{D+\tau D'} = 1+n_{(\lambda+\lambda'.(\mu_1)^2.\mu_2.(\lambda_3)^{-1})x^{r_1^3}D_{v_3}}$$

de modo que la operación buscada queda:

$$(1+n_D)\circ\tau\ \circ\ (1+n_{D'})\circ\tau' = (1+n_{(\lambda+\lambda'.(\mu_1)^2.\mu_2.(\lambda_3)^{-1})x^{r_1^3}D_{v_3}})\circ\tau_{(\mu_1\mu_1',\mu_2\mu_2',\lambda_3\lambda_3')}$$

cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} \mu_1\mu_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2\mu_2' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\lambda_3' & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+\lambda'.(\mu_1)^2.\mu_2.(\lambda_3)^{-1}).\lambda_3\lambda_3' & (\mu_1')^2.\mu_2' \end{pmatrix}$$

que efectivamente es el producto de las matrices respectivas.

Para calcular $(T(3)/T_{A_1})$, como $B = e_2 \Rightarrow T_{A_1} \subset Spec\,K[\mathbb{Z}^{s=2}]$ es el subgrupo dado por $g = (\mu_1,\mu_2)$ tales que $g^{v'(e_2)} = 1$ luego $\mu_2 = \mu_1\sqrt{\mu_1}$ y por tanto T_{A_1} son en $T(3)$ los elementos del tipo

$$g = \left(\mu,\mu\sqrt{\mu},(\mu,\mu\sqrt{\mu})^{v'(m_3)}\right) = \left(\mu,\mu\sqrt{\mu},\mu^3\sqrt{\mu}\right)$$

que opera en $T(3)$ de modo que la clase de (a,b,c) es

$$[(a,b,c)] = [(1,p,q)] = [(1,up,uq)] \qquad u\in\mu_2(K)$$

$\Rightarrow$

$$Aut\, X = \left(\mathbb{A}^1, +\right) \rtimes (T(2)/\mu_2(K))$$

con las operaciones que se han descrito antes y $T(2)/\mu_2(K) \simeq T(M)$ que es su toro maximal. Veamos por último la operación de los automorfismo de la parte reductiva y de la parte unipotente en $K(M)$:

Automorfismos de la parte reductiva: Sea entonces $[\mu] = [(1, p, q)] \in T(2)/\mu_2(K)$ y $\tau_\mu(y_1) = y_1$, $\tau_\mu(y_2) = py_2$, $\tau_\mu(y_3) = yy_3 \Rightarrow$

$$\tau_\mu(x) \equiv \frac{qy_3}{y_1^2 py_2}$$

luego

$$\tau_\mu(x) = \frac{qx}{p}$$

y por otro lado,

$$\tau_\mu(y) \equiv \frac{p^2 y_2^2}{y_1^3}$$

luego

$$\tau_\mu(y) = p^2 y$$

Automorfismos de la parte unipotente: Como $T_{A_{n-1}}$ es subgrupo de la parte reductiva de $Aut_g A_C$, la parte unipotente de $Aut\, X$ y $Aut_g A_C$ coinciden.
Sea pues $\tau = 1 + n_D$ con

$$D = ax^{-1} D_{v_3} \equiv a y_1^2 y_2 y_3^{-1} D_{v_3}$$

$\Rightarrow$

$$\tau(y_1) = y_1 \qquad \tau(y_2) = y_2 \qquad \tau(y_3) = y_3 + a y_1^2 y_2$$

$\Rightarrow$

$$\tau(x) = x + a$$

$$\tau(y) = y$$

Siempre la parte unipotente es la identidad en x^B.

Ejemplo 5 : **El cono. Afirmación de Oda** ([18], (i) p. 140)
$dim\, M = 2$, base $\{e_1,\, e_2\}$ y $\{w_1,\, w_2\}$ base dual. Δ_1 es:

$$v_1 = 2w_1 + w_2;\; v_3 = w_2;\; v_2 = -w_1 - w_2$$

El abanico

$$\Delta = \{\sigma_1 = \langle v_1,\, v_3\rangle_+;\; \sigma_2 = \langle v_2,\, v_3\rangle_+;\; \sigma_3 = \langle v_1,\, v_2\rangle_+\}$$

- **Los abiertos afines** tienen por anillos, para $x = x^{e_1}$, $y = x^{e_2}$

$$\sigma_1^\vee \Rrightarrow k[x, y, x^{-1}y^2];\; \sigma_2^\vee \Rrightarrow k[y^{-1}x, x^{-1}];\; \sigma_3^\vee \Rrightarrow k[xy^{-1}, xy^{-2}]$$

- **Las derivaciones y raíces:**

$$D(v_1) = \langle x^{-e_1+e_2} D_{v_1}\rangle \;\Rightarrow\; S(v_1) = \{-e_1 + e_2\}$$
$$D(v_3) = \langle x^{e_1-e_2} D_{v_3}\rangle \;\Rightarrow\; S(v_3) = \{e_1 - e_2\}$$
$$D(v_2) = \langle\{x^{-e_1+2e_2} D_{v_2};\; x^{e_2} D_{v_3};\; x^{e_1} D_{v_3}\}\rangle \;\Rightarrow\; S(v_2) = \{-e_1 + 2e_2,\, e_2,\, e_1\}$$

con los valores $v(-e_1 + e_2) = (-1, 0, 1)$, $v(e_1 - e_2) = (1, 0, -1)$, $v(-e_1 + 2e_2) = (0, -1, 2)$, $v(e_2) = (1, -1, 1)$ y $v(e_1) = (2, -1, 0)$ de modo que son parejables las raíces:

$$S(v_1) = \{\alpha_{13} = -e_1 + e_2\}\, y\, S(v_3) = \{\alpha_{31} = e_1 - e_2\} \;\Rightarrow\; [H_1] = [H_3]$$

Son no parejables las raíces de los conjuntos ordenados:

$$S(v_2) = S^*(v_2) = \{r_1^2 = -e_1 + 2e_2;\; r_2^2 = e_2;\; r_3^2 = e_1\}$$

y los valores son $v(r_1^2) = (0, -1, 2)$, $v(r_2^2) = (1, -1, 1)$ y $v(r_3^2) = (2, -1, 0)$

- **Divisores y descomposición fundamental:** Como $[H_3] = [H_1]$ y $H_2 = 2H_1 + D(x^{-e_1})$ el semigrupo de los divisores de Weil efectivos es $Ef(X) = \langle H_1\rangle_+$ y además:

$$m_2 = e_1 = r_3^2 \qquad m_3 = e_1 - e_2 = \alpha_{31}$$

luego $B = 0$ y $M = 0 \oplus C$ con $C = \langle m_2,\, m_3\rangle_{\mathbb{Z}}$.

- **Anillos de Cox:** En este caso $s = 1$ $k = 2$ y la matriz N tiene columnas $v'(m_2) = (2)$ y $v'(m_3) = (1) \Rightarrow$ las variables son:

$$y_1 = x^{(1),0,0};\ y_2 = x^{(2),-m_2=-e_1};\ y_3 = x^{(1),-m_3=-e_1+e_2}$$

y por tanto como $B = 0$ se tiene

$$A' = A_C = K[y_1 = x^{(1,0,0)},\ y_2 = x^{(2,-1,0)},\ y_3 = x^{(1,-1,+1)}]$$

de grados respectivamente (1), (2), (1).

Las derivaciones en las coordenadas de $K(M)$ **y de** $K(Y = y_1, \ldots, y_r)$: En $K[M]$ están generadas por

$$x^{-1}yD_{v_1}$$
$$x^{-1}y^2D_{v_2};\ yD_{v_2};\ xD_{v_2}$$
$$xy^{-1}D_{v_3}$$

que en A_C son respectivamente

$$y_1^{-1}y_3D_{v_1}$$
$$y_2^{-1}y_3^2D_{v_2};\ y_1y_2^{-1}y_3D_{v_2};\ y_1^2y_2^{-1}D_{v_2}$$
$$y_1y_3^{-1}D_{v_3}$$

lo que da las relaciones $x \equiv y_1^2y_2^{-1}$, $y \equiv y_1y_2^{-1}y_3$ que definen el morfismo inyectivo $K(M) \hookrightarrow k(y_1, \ldots, y_r)$ y que utilizaremos en el último punto para ver como un automorfismo graduado en A_C se traduce en uno en X.

- **Orden y matrices $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{D}$:** De los valores de v en las raíces no parejables asociadas a v_2 se tienen que $[v_2] < [v_3]$ de modo que la longitud máxima es $l(v_2) = 1$ y por tanto la parte unipotente R_u **es un grupo aditivo** en el que opera el toro $T(3) \equiv K^{*3}$. Como hau dos clases de equivalencia $\Rightarrow h = 2$ de manera que $R = R_u \rtimes T(2)$ es el radical del grupo y veremos que **no es abeliano.** Las matrices son

$$\mathcal{R}^* \equiv \begin{pmatrix} M_2^1 & \emptyset \\ M_3^1 & \emptyset \end{pmatrix}$$

donde $M_2^1 = \{r_1^2, r_2^2\}$ y $M_3^1 = \{r_3^2 = m_2\}$

$$\mathcal{D} \equiv \begin{pmatrix} \mu_2^1 & 0 \\ \mu_3^1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\mu^1_2 = (a_1, a_2) \in K^2$ y $\mu^1_3 = b \in K$ y todo $D \in (Der^u, \bullet) = R_u$ será

$$D = a_1 x^{r^2_1} D_{v_2} + a_2 x^{r^2_2} D_{v_2} + b x^{r^2_3} D_{v_2} \equiv (a_1, a_2, b)$$

- **Conjuntos X_i y R_i para el radical del grupo:** Los conjuntos son

$$X_0 = \{v_2\} \qquad X_1 = \{v_1,\, v_3\} \qquad X_{q=2} = \emptyset$$

y

$$R_0 = 0 \qquad R_1 \equiv S^*(v_2) \qquad R_2 = R_1$$

$\Rightarrow R_u = (Der^u, \bullet) = (\mathbb{A}^3, +)$ y el radical del grupo es

$$R(Aut_g A_C) = (\mathbb{A}^3, +) \rtimes T(3)$$

- **Cálculo de $\lambda_{D(j)}$:** En este caso $D = D(j = 1)$ y si como antes si $D \equiv (\mu^1_2; \, \mu^1_3) \Rightarrow$ $\lambda_{D(1)}$ es la columna

$$\lambda_{D(1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{pmatrix}$$

- **M y $\lambda(i)$:** La parte reductiva del grupo es $G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B})$ con $G(\mathcal{A}) = Gl(1)$ determinado por v_2 y $G(\mathcal{B}) = Gl(2)$ determinado por $[v_1] = [v_3]$ siendo pues la matriz M que define un automorfismo de la parte reductiva:

$$M = \begin{pmatrix} M(A_1) & 0 \\ 0 & M(B_1) \end{pmatrix}$$

con $M(A_1) = (\mu(1)^1_1 = \mu)$ matriz de orden 1, $M(B_1)$ la matriz de orden 2

$$M(B_1) = \mu'(1) = \begin{pmatrix} p & z \\ q & t \end{pmatrix}$$

de modo que los $\lambda(i)$ son

$$\lambda(1) = (p, q) \qquad \lambda(2) = (\mu) \qquad \lambda(3) = (t, z)$$

- **Cálculo de $\overline{M}$ y E:** Con los datos anteriores calculamos los coeficientes $\overline{m}(j = 1)^p_q$ de la matriz $\overline{M} = \overline{M}(j = 1)$ de orden $d_{j=1} = 3$. Para ello, las raíces no parejables son el conjunto ordenado

$$S^*(v_2) = \{r^2_1,\, r^2_2,\, r^2_3\}$$

La primera columna $\overline{m}(j=1)^1_q$ se obtiene fijando la primera raíz r^2_1, donde hemos visto que $v(r^2_1)=(0,-1,2)$ y hay que calcular $\mid c() \mid = v(r^2_1)=(0,-1,2)$ donde $c()$ es $c(1)$ y $c(3)$ tales que

$$\begin{array}{rlrl} \mid c(1) \mid = & 0 & \qquad \alpha(1) = & (0,\alpha_{13}) \\ \mid c(3) \mid = & 2 & \qquad \alpha(3) = & (0,\alpha_{31}) \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$c(1)=(0,0) \qquad c(3)=\begin{cases} (0,2) \\ (1,1) \\ (2,0) \end{cases}$$

$\overline{m}^1_1$:

Se tiene que cumplir la condición

$$r^2_1 = r^2_1 + c(1)\alpha(1) + c(3)\alpha(3)$$

luego la única solución es $c(3)=(2,0) \Rightarrow$

$$\overline{m}^1_1 = 2!.\frac{(\lambda(3))^{c(3)}}{c(3)!} = t^2.z^0 = t^2$$

$\overline{m}^1_2$:

La condición ahora es

$$r^2_2 = r^2_1 + c(1)\alpha(1) + c(3)\alpha(3)$$

$\Rightarrow c(3)=(1,1) \Rightarrow$

$$\overline{m}^1_2 = 2!.\frac{(\lambda(3))^c(3)}{c(3)!} = 2.t.z$$

$\overline{m}^1_3$:

La condición ahora es

$$r^2_3 = r^2_1 + c(3)\alpha(3)$$

$\Rightarrow c(3)=(0,2) \Rightarrow$

$$\overline{m}^1_3 = 2!.\frac{z^2}{2!} = z^2$$

$\overline{m}_1^2$:
En este caso $r = r_2^2$ y como $v(r) = (1, -1, 1)$ se debe cumplir:

$$\begin{array}{llll} \mid c(1) \mid = & 1 & \alpha(1) = & (0, \alpha_{13}) \\ \mid c(3) \mid = & 1 & \alpha(3) = & (0, \alpha_{31}) \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$c(1) = \begin{cases} (1,0) \\ (0,1) \end{cases} \qquad c(3) = \begin{cases} (1,0) \\ (0,1) \end{cases}$$

y tales que

$$r_1^2 = r_2^2 + c(1)\alpha(1) + c(3)\alpha(3)$$

$\Rightarrow c(1) = (0, 1)$ y $c(3) = (1, 0) \Rightarrow$

$$\overline{m}_1^2 = q.t$$

$\overline{m}_2^2$:
La condición ahora es

$$r_2^2 = r_2^2 + c(1)\alpha(1) + c(3)\alpha(3)$$

$\Rightarrow$ hay dos posibilidades, una $c(1) = (1, 0)$, $c(3) = (1, 0)$ y la otra $c(1) = (0, 1)$, $c(3) = (0, 1) \Rightarrow$

$$\overline{m}_2^2 = 1.(\lambda(1)^{(1,0)}.\lambda(3)^{(1,0)} + \lambda(1)^{(0,1)}.\lambda(3)^{(0,1)} = x.t + y.z$$

$\overline{m}_3^2$:
La condición ahora es

$$r_3^2 = r_2^2 + c(1)\alpha(1) + c(3)\alpha(3)$$

$\Rightarrow c(1) = (1, 0)$, $c(3) = (0, 1) \Rightarrow$

$$\overline{m}_3^2 = x.z$$

$\overline{m}_1^3$:
En este caso $r = r_3^2$ y como $v(r) = (2, -1, 0)$ se debe cumplir:

$$\begin{array}{ll} \mid c(1) \mid = & 2 \\ \mid c(3) \mid = & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$c(3) = (0,0) \qquad c(1) = \begin{cases} (0,2) \\ (1,1) \\ (2,0) \end{cases}$$

y tales que

$$r_1^2 = r_3^2 + c(1)\alpha(1) + c(3)\alpha(3)$$

$\Rightarrow c(1) = (0,2)$ y $c(3) = (0,0) \Rightarrow \overline{m}_1^3 = q^2$ lo cual ya se sabía por ser $[v_1] = [v_3]$ lo que implica que $\overline{m}^3$ se obtiene de $\overline{m}^1$ sin más cálculos que intercambiar las columnas en $M(B_1)$ de modo que cambiamos p por z y q por $t \Rightarrow$

$$\overline{m}_2^3 = 2q.p$$

$$\overline{m}_3^3 = p^2$$

y la matriz buscada es

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} t^2 & qt & q^2 \\ 2tz & pt+qz & 2pq \\ z^2 & pz & p^2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, si $D \equiv (a_1, a_2, b)$ con $1 + n_D \in R_u$ el correspondiente automorfismo de la parte unipotente y τ_M es el automorfismo de la parte reductiva de matriz la matriz M antes definida, en la que $M(A_1) = (m)$, entonces $E \in (Der^u, \bullet) = R_u$ tal que $1 + n_E = \tau_M \circ 1 + n_D \circ \tau_M^{-1}$ es:

$$E \equiv \overline{M}. \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{pmatrix} .(\mu^{-1})$$

que muestra cómo opera la parte reductiva en la unipotente. EL toro $T(r = 3)$ es subgrupo de la parte reductiva representado por las matrices M_3 en las que $q = z = 0$ es decir $T(r)$ son las matrices del tipo

$$M_3 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

donde el automorfismo asociado es $\tau_M(y_1) = py_1$, $\tau_M(y_2) = \mu y_2$, $\tau_M(y_3) = ty_3$, $\Rightarrow$ la matriz asociada $\overline{M}$ es

$$\overline{M_3} = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & pt & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$E \equiv \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & (pt) & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{pmatrix} .(\mu^{-1})$$

es decir

$$E \equiv \begin{pmatrix} a_1.\mu^{-1}.t^2 \\ a_2.\mu^{-1}.(pt) \\ b.\mu^{-1}.p^2 \end{pmatrix}$$

con lo que se tiene la operación del toro en el radical unipotente y de lo que se deduce, como en el Ejemplo 1, que el radical no es un subgrupo abeliano.

- **El grupo de automorfismos de la variedad tórica:**

  Del abanico se deduce que la única permutación en las aristas Δ_1 asociada a un automorfismo $\mathbb{Z}-$lineal que conserva el abanico es la trasposición entre v_1 y v_3 que justo son tales que $[v_1] = [v_3]$ de modo que de la sección anterior se deduce que $Aut\, X$ coincide con su componente conexa en el origen y por tanto

  $$Aut\, X = (\mathbb{A}^3, +) \rtimes (Gl(1) \times Gl(2))\, /T_{A_1}$$

  con la operación vista en el apartado anterior que no se ve afectada por el cociente porque T_{A_1} opera en R_u por la identidad.
  Para calcular el cociente, como $B = 0$ entonces $T_{A_1} = m(Spec\, K[\mathbb{Z}^{s=1}])$ que en el toro $T(3)$ es

  $$(\mu_1; \mu_1^{v'(m_2)}, \mu_1^{v'(m_3)}) = (\mu_1; \mu_1^2, \mu_1)$$

  que como matriz en $Gl(\mathcal{A}) \times Gl(\mathcal{B})$ es

  $$g = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix}$$

  En relación con la operación del toro en R_u que acabamos de ver en el apartado anterior, sería $t = p = \mu_1$ y $\mu = p^2$ de modo que la derivación asociada al automorfismo de R_u resultante de la operación de T_{A_1} en R_u es

  $$E \equiv \begin{pmatrix} a_1.p^2.p^{-2} \\ a_2.p^2.p^{-1}.p^{-1} \\ b.p^2.p^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{pmatrix}$$

lo que muestra que en efecto T_{A_1} opera en R_u por la identidad.
T_{A_1} opera en $Gl(1)\times Gl(2)$: Sean

$$M=\begin{pmatrix}\mu & 0 & 0\\ 0 & p & z\\ 0 & q & t\end{pmatrix}\qquad g=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$g.M=\begin{pmatrix}\lambda^2\mu & 0\\ 0 & \lambda B\end{pmatrix}\qquad \text{con } B=\begin{pmatrix}p & z\\ q & t\end{pmatrix}$$

luego tomando $\lambda=\sqrt{\mu^{-1}}$ se tiene la sucesión exacta de grupos, siendo $\mu_2(K)$ el subgrupo de las raíces $2-$ésimas de la unidad,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T_{A_1} & \to & Gl(1)\times Gl(2) & \to & Gl(2)/\mu_2(K) & \to & 0\\ & & & & M & \rightsquigarrow & [\sqrt{\frac{1}{\mu}}B] & & \end{array}$$

luego se ha probado

$$Aut\,X=(\mathbb{A}^3,+)\rtimes Gl(2)/\mu_2(K)$$

con las operaciones que se han descrito antes. Su radical tiene toro maximal $T(\langle e_1\rangle_{\mathbb{Z}})$ porque $C=\langle e_1,e_1-e_2\rangle_{\mathbb{Z}}$ y e_1-e_2 es la raíz parejable. Veamos por último la operación de los automorfismo de la parte reductiva y de la parte unipotente en $K(M)$:
Automorfismos de la parte reductiva: Sea pues M la matriz de clase

$$[M]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & c\\ 0 & b & d\end{pmatrix}$$

entonces si $\tau=\tau_{[M]}$ se tiene

$$\tau(x)\equiv\frac{\tau(y_1^2)}{\tau(y_2)}=\frac{(ay_1+by_3)^2}{y_2}=\frac{y_1^2(a+by_3y_1^{-1})^2}{y_2}$$

luego

$$\tau(x)=\frac{(ax+by)^2}{x}$$

y por otro lado,

$$\tau(y)\equiv\frac{\tau(y_1y_3)}{\tau(y_2)}=\frac{(ay_1+by_3)(cy_1+dy_3)}{y_2}$$

que operando y sacando factor común da

$$y_2^{-1}y_1y_3.(acy_1y_3^{-1}+bdy_1^{-1}y_3+(ad+bc))$$

luego
$$\tau(y) = \frac{acx^2 + bdy2 + (ad+bc)xy}{x}$$

Automorfismos de la parte unipotente: Como $T_{A_{n-1}}$ es subgrupo de la parte reductiva de $Aut_g A_C$, la parte unipotente de $Aut\, X$ y $Aut_g A_C$ coinciden.
Sea pues $\tau = 1 + n_D$ con $D = a_1 x^{r_1^2} D_{v_2} + a_2 x^{r_2^2} D_{v_2} + b x^{r_3^2} D_{v_2}$ y sea $\tau = \tau_D = 1 + n_D$ $\Rightarrow$
$$\tau(y_1) = y_1 \qquad \tau(y_3) = y_3$$
$$\tau(y_2) = y_2 + a_1 y_3^2 + a_2 y_1 y_3 + b y_1^2$$
$\Rightarrow$
$$\tau(x) \equiv \tau(y_1^2 y_2^{-1}) = \frac{y_1^2}{y_2.(1 + a_1 y_3^2 y_2^{-1} + a_2 y_1 y_3 y_2^{-1} + b y_1^2 y_2^{-1})}$$
luego
$$\tau(x) = \frac{x^2}{x + a_1 y^2 + a_2 xy + bx^2}$$
por otro lado
$$\tau(y) \equiv \frac{y_1 y_3}{y_2.(1 + a_1 y_3^2 y_2^{-1} + a_2 y_1 y_3 y_2^{-1} + b y_1^2 y_2^{-1})}$$
$\Rightarrow$
$$\tau(y) = \frac{xy}{x + a_1 y^2 + a_2 xy + bx^2}$$
y se observa que $\tau(x.y^{-1}) = x.y^{-1}$

Afirmación de Oda Veremos que, como afirma T. Oda en [18], (i) p. 140 y D. Cox en [2], Prop. 4.5, los automorfismos de la parte reductiva pueden estar generados por el toro y los grupos uniparamétricos de las raíces parejables pero **no es en general cierto** que sea el producto de ellos. En efecto veamos en este caso qué matrices (clases) $[M]$ pueden obtenerse con tales productos.
Sea $\mu \in T(3)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ y el automorfismo asociado $\tau_\mu(y_i) = y_i$ y los automorfismos de los grupos uniparamétricos asociados a las raíces parejables $\alpha_{13} = -m_3$ y $\alpha_{31} = m_3$:
$$\tau_1 = 1 + n_{px^{\alpha_{13}} D_{v_1}} \qquad \tau_2 = 1 + n_{qx^{\alpha_{31}} D_{v_3}}$$
tales que $\tau_1(y_1) = y_1 + py_3$ y $\tau_3(y_3) = y_3 + qy_1$ y ambas respectivamente la identidad en el resto. Sea entonces el automorfismo de la parte reductiva $\tau = \tau_\mu \circ \tau_1 \circ \tau_3$ y aplicando a las variables da:
$$\tau(y_1) = \mu_1 y_1 + \mu_3 y_3 \qquad \tau(y_3) = \mu_1 q y_1 + \mu_3 (1+pq) y_3$$

de modo que las matrices (clases) obtenidas son del tipo:

$$[M] = \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & \mu_1 q \\ 0 & \mu_3 p & \mu_3(1+pq) \end{bmatrix}$$

y nunca saldrían las matrices del tipo:

$$[M] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6 : **Dimensión** 3 **y no simplicial y** $B \neq 0$
$dim\, M = 3$, base $\{e_1,\, e_2,\, e_3\}$ y $\{w_1,\, w_2,\, w_3\}$ base dual y Δ_1 es:

$$\begin{aligned} v_1 &= -w_1 + 2w_2 + w_3 \\ v_2 &= 2w_1 + w_2 + w_3 \\ v_3 &= w_1 - w_2 + w_3 \\ v_4 &= -w_1 - w_2 + w_3 \\ v_5 &= -w_3 \end{aligned}$$

El abanico Δ es

$$\sigma_1 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle_+ \qquad \sigma_2 = \langle v_1, v_2, v_5 \rangle_+$$

$$\sigma_3 = \langle v_2, v_3, v_5 \rangle_+ \qquad \sigma_4 = \langle v_3, v_4, v_5 \rangle_+ \qquad \sigma_5 = \langle v_1, v_4, v_5 \rangle_+$$

- **Los abiertos afines** tienen por anillos, para $x = x^{e_1}$, $y = x^{e_2}$, $z = x^{e_3}$

$$\sigma_1^\vee \Rrightarrow k[z, x^{-1}y^{-3}z^5, x^{-2}yz^3, yz, xz, y^{-1}z^2]$$

$$\sigma_2^\vee \Rrightarrow k[x^{-1}y^2, x^2y, xy^3z^{-5}, y, z^{-1}]$$

$$\sigma_3^\vee \Rrightarrow k[xy^{-2}, xy, x^2y^{-1}z^{-3}, z^{-1}, x]$$

$$\sigma_4^\vee \Rrightarrow k[x^{-1}y^{-1}, xy^{-1}, z^{-1}x, y^{-1}]$$

$$\sigma_5^\vee \Rrightarrow k[x^{-2}y^{-1}, x^{-1}y, z^{-1}x, x^{-1}]$$

- **Las derivaciones y raíces:** Planteamos los correspondientes sistemas de inecuaciones diofánticas y obtenemos $D(v_i) = 0\ \forall\ i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y veamos $D(v_5)$. Hay que resolver

$$\begin{array}{rcl} -a + 2b + 1 & \geq & 0 \\ 2a + b + 1 & \geq & 0 \\ a - b + 1 & \geq & 0 \\ -a - b + 1 & \geq & 0 \end{array}$$

con $c = 1$ y se traduce en $b \leq 1$ y $b - 1 \leq a \leq -b + 1$ lo que da como soluciones $(0, 1, 1) = e_2 + e_3$, $(0, 0, 1) = e_3$, $(1, 0, 1) = e_1 + e_3$ con los valores

$$\begin{array}{rcl} v(r_1^5 = e_2 + e_3) & = & (3, 2, 0, 0, -1) \\ v(r_2^5 = e_1 + e_3) & = & (0, 3, 2, 0, -1) \\ v(r_3^5 = m_5 = e_3) & = & (1, 1, 1, 1, -1) \end{array}$$

$\Rightarrow S(v_5) = S^*(v_5) = \{r_1^5,\, r_2^5,\, m_5\}$ son las únicas raíces. No hay raíces semisimples (parejables) y por tanto el grupo es resoluble.

- **Divisores y descomposición fundamental:** El semigrupo de los divisores de Weil efectivos es $Ef(X) = \langle H_1,\, H_2,\, H_3,\, H_4\rangle_+$ con las relaciones:

$$H_5 = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + D(x^{-e_3}) \Rightarrow m_5 = e_3 \qquad v(m_5) = (1,1,1,1;-1)$$

$B = \{v_5 = 0\} = \langle e_1,\, e_2\rangle_{\mathbb{Z}}$ luego $M = B \oplus C$ con $C = \langle m_5 = e_3\rangle_{\mathbb{Z}}$

- **Anillos de Cox:** En este caso $s = 4$ $k = 1$ y la matriz N tiene columna $N^1 = v'(m_5) = (1,1,1,1) \Rightarrow$ las variables son: $y_1 = x^{((1,0,0,0),0)}$; $y_2 = x^{((0,1,0,0),0)}$; $y_3 = x^{((0,0,1,0),0)}$; $y_4 = x^{((0,0,0,1),0)}$; $y_5 = x^{(1,1,1,1),0,0,-1}$ y por tanto

$$A_C = K[y_1, y_2, y_3, y_4, y_5]$$

de grados respectivamente $(1,0,0,0)$; $(0,1,0,0)$; $(0,0,1,0)$; $(0,0,0,1)$; $(1,1,1,1)$ módulo

$$\langle(-1,2,1,-1),(2,1,-1,-1)\rangle_{\mathbb{Z}}$$

siendo $v'(\beta_1 = e_1) = (-1,2,1,-1)$ y $v'(\beta_2 = e_2) = (2,1,-1,-1)$

El anillo de Cox generalizado se obtiene de $A' = A_C[B]$ dado por el Corolario 5.5 de modo que para $\beta \in B$ el isomorfismo viene dado por $x^{\beta} \equiv x^{-v'(\beta),\beta}$ y por tanto

$$A' = K[y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_6^{-1}, y_7, y_7^{-1}]$$

donde $y_6 = x^{(-v'(e_1),e_1)} = x^{((-1,2,1,-1),1,0,0)}$ y donde $y_7 = x^{(-v'(e_2),e_2)} = x^{((2,1,-1,-1),0,1,0)}$

Los generadores de las derivaciones: Teniendo en cuenta las relaciones

$$\begin{array}{ccccc} K(M) & \to & K(A_C) & \to & K(A' \simeq A_C[X^B]) \\ x^m & \rightsquigarrow & (v'(m_B), m_C) = Y^{v(m)} & \rightsquigarrow & Y^{v(m)}.X^{m_B} \end{array}$$

Los generadores en $K(M)$ son

$$yzD_{v_5};\ xzD_{v_5};\ zD_{v_5}$$

Los generadores en A_C son

$$y_1^3 y_2^2 y_5^{-1} D_{v_5};\ y_2^3 y_3^2 y_5^{-1} D_{v_5};\ y_1 y_2 y_3 y_4 y_5^{-1} D_{v_5}$$

Los generadores en A' son los mismos que en A_C. Las relaciones entre las variables de X y A_C son

$$x \equiv y_1^{-1} y_2^2 y_3 y_4^{-1},\; y \equiv y_1^2 y_2 y_3^{-1} y_4^{-1},\; z \equiv y_1 y_2 y_3 y_4 y_5^{-1}$$

y con las de A' son

$$x \equiv y_1^{-1} y_2^2 y_3 y_4^{-1} y_6,\; y \equiv y_1^2 y_2 y_3^{-1} y_4^{-1} y_7,\; z \equiv y_1 y_2 y_3 y_4 y_5^{-1}$$

- **Orden y matrices $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{D}$:** Como $v_5 < v_i$la longitud máxima es $l(v_i) = 1 = q - 1$ y por tanto la parte unipotente será el producto semidirecto de **un grupo aditivo** en el que opera la parte reductiva que consiste en el toro $T(5)$.
  Ahora $s = 4$ y $k = 1$ y las matrices son

$$\mathcal{R}^* \equiv \left(M_2^1\right)$$

  donde $M_2^1 = \{r_1^5, r_2^5, m_5\}$.

$$\mathcal{D} \equiv \left(\mu_2^1\right)$$

  donde $\mu_2^1 = (a, b, c) \in K^3$ y todo $D \in (Der^u, \bullet) = R_u$ será

$$D = ax^{r_1^5} D_{v_5} + bx^{r_2^5} D_{v_5} + cx^{m_5} D_{v_5}$$

- **Conjuntos X_i y R_i para el radical del grupo:** Los conjuntos son

$$X_0 = \{v_5\} \qquad X_1 = \{v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4\} \qquad X_{q=2} = \emptyset$$

  y

$$R_0 = 0 \qquad R_1 \equiv S^*(v_5) \qquad R_1 = R_2$$

  $\Rightarrow \overline{R}_1 = R_1/R_0 \equiv D(v_5)$ y $\Rightarrow$

$$R_u = (Der^u, \bullet) = (D(v_5), \bullet) = (\mathbb{A}^3,\, +)$$

  por tanto es abeliano. Como hay $h = 5$ clases de equivalencia el radical del grupo es

$$R(Aut_g A_C) = \left(\mathbb{A}^3,\, +\right) \rtimes T(5)$$

  con la operación del toro en R_u dada por $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ y $D \equiv (a, b, c) \in R_u$ $\Rightarrow \lambda.D = (\lambda^{v(r_1^5)}, \lambda^{v(r_2^5)}, \lambda^{v(m_5)})$.

- **El grupo de automorfismos de la variedad tórica:** En este caso la parte reductiva es el toro $T(5)$ y por tanto $Aut^{\circ}\, X$ es el grupo resoluble

$$Aut^{\circ}\, X = \left(\mathbb{A}^3, +\right) \rtimes \left(\left(T(5)\right)/T_{A_2}\right)$$

y el cociente $Aut\, X/Aut^{\circ}\, X$ es nulo.

Para calcular $(T(5)/T_{A_2})$, como $B = \{e_1, e_2\} \Rightarrow T_{A_2} \subset Spec\, K[\mathbb{Z}^{s=4}]$ es el subgrupo dado por $g = (x, y, z, t)$ tales que

$$g^{v'(e_1)} = 1;\ g^{v'(e_2)} = 1 \Rightarrow z = \frac{x^2}{\sqrt{xy}};\ t = y\sqrt{xy}$$

y como $m(Spec\, K[\mathbb{Z}^{s=4}])$ en $T(5)$ es $(x, y, z, t; x.y.z.t) \Rightarrow T_{A_2}$ son en $T(5)$ los elementos del tipo

$$g = \left(\lambda, \mu, \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda\mu}}, \mu\sqrt{\lambda\mu}; \lambda^3\mu^2\right)$$

que opera en $T(5)$ de modo que la clase de $(a, b, c, d; p)$ es

$$[(a, b, c, d; p)] = [(1, 1, \frac{u\sqrt{ab}c}{a^2}, \frac{d}{u\sqrt{ab}b}; \frac{p}{a^3b^2})]$$

$\Rightarrow$

$$Aut\, X = \left(\mathbb{A}^3, +\right) \rtimes \left(\left(\left(Gm \times Gm\right)/\mu_2(K)\right) \times Gm\right)$$

donde Gm denota el grupo multiplicativo y $u \in \mu_2(K)$ son las raíces cuadradas de la unidad. En este caso como no hay raíces parejables el toro maximal de su radical es el toro inicial $T(M)$ que por el isomorfismo de $Aut\, X$ con $Aut_g A_C/T_{A_2}$ da $\left(\left(Gm \times Gm\right)/\mu_2(K)\right) \times Gm$
Veamos por último la operación de los automorfismo de la parte reductiva y de la parte unipotente en $K(M)$:

Automorfismos de la parte reductiva: Sea entonces $[\mu] = [(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)]$ con $\tau_\mu(y_i) = \mu_i y_i \Rightarrow$ como

$$x \equiv y_1^{-1}y_2^2y_3y_4^{-1},\ y \equiv y_1^2y_2y_3^{-1}y_4^{-1},\ z \equiv y_1y_2y_3y_4y_5^{-1}$$

se tiene

$$\tau_\mu(x) = \frac{\mu_2^2\mu_3}{\mu_1\mu_4}x$$

$$\tau_\mu(y) = \frac{\mu_1^2\mu_2}{\mu_3\mu_4}y$$
$$\tau_\mu(z) = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{\mu_5}z$$
luego como $[\mu] = [(1, 1, [a, b], c)]$ en $((Gm \times Gm)\,/\mu_2(K)) \times Gm \Rightarrow$

$$\tau_{[\mu]}(x) = \frac{a}{b}x \qquad \tau_{[\mu]}(y) = \frac{1}{ab}y \qquad \tau_{[\mu]}(z) = \frac{ab}{c}z$$

Automorfismos de la parte unipotente: Como $T_{A_{n-1}}$ es subgrupo de la parte reductiva de $Aut_g A_C$, la parte unipotente de $Aut\, X$ y $Aut_g A_C$ coinciden.
Sea pues $\tau = 1 + n_D$ con

$$D = ax^{r_1^5} D_{v_5} + bx^{r_2^5} D_{v_5} + cx^{m_5} D_{v_5}$$

$\Rightarrow$ sabemos que $\tau(x) = x$ y también $\tau(y) = y$ porque $x = x^{e_1}$, $y = y^{e_2}$ y R_u siempre es la identidad sobre $K[B] \subset K[M]$. Sobre z es

$$\tau(z) \equiv \frac{y_1y_2y_3y_4}{y_5.(1 + ay_1^3y_2^2y_5^{-1} + by_2^3y_3^2y_5^{-1} + cy_1y_2y_3y_4y_5^{-1})}$$

$\Rightarrow$

$$\tau(z) = \frac{z}{1 + ayz + bxz + cz}$$

Ejemplo 7 : **Variedad tórica en dimensión** 3 **con grupo de automorfismos reductivo**

$dim\, M = 3$, base $\{e_1,\, e_2,\, e_3\}$ y $\{w_1,\, w_2,\, w_3\}$ base dual. Δ_1 es:

$$v_1 = -2w_1 + w_2;\; v_2 = 3w_1 + w_3;\; v_3 = -w_2;\; v_4 = -w_3$$

El abanico

$$\Delta = \{\sigma_1 = \langle v_1,\, v_2,\, v_4\rangle_+;\; \sigma_2 = \langle v_1,\, v_3,\, v_4\rangle_+;\; \sigma_3 = \langle v_2,\, v_3,\, v_4\rangle_+;\; \sigma_4 = \langle v_1,\, v_2,\, v_3\rangle_+\}$$

- **Los abiertos afines:** Si $x = x^{e_1}$, $y = x^{e_2}$, $z = x^{e_3}$ para calcular $\sigma_1^\vee$ hay encontrar los $x^{(a,b,c)}$ que cumplan el sistema de inecuaciones diofánticas

$$\begin{array}{lcl} c & \leq & 0 \\ -2a + b & \geq & 0 \\ 3a + c & \geq & 0 \end{array}$$

  que se traduce en $2a \leq b$, $\mid c \mid \leq 3a$ con $y \geq 0$ de modo que las soluciones son $(0,1,0)$, $(1,2,0)$, $(1,2,-1)$, $(1,2,-2)$, $(1,2,-3)$ y el resto dependen $\mathbb{N}-$linealmente de estas. De igual modo se calculan los otros tres abiertos afines resultando:

$$\sigma_1^\vee \Rrightarrow k[y, x, y^2, xy^2z^{-1}, xy^2z^{-2}, xy^2z^{-3}]$$

$$\sigma_2^\vee \Rrightarrow k[x^{-1}, z^{-1}, x^{-1}y^{-2}, x^{-1}y^{-1}z^{-1}]$$

$$\sigma_3^\vee \Rrightarrow k[x, y^{-1}, xy^{-3}, xz^{-1}]$$

$$\sigma_4^\vee \Rrightarrow k[z, x^{-1}z^3, x^{-1}y^{-2}z^3, x^{-1}y^{-1}z^3]$$

- **Las derivaciones y raíces:** Las raíces son

$$S(v_1) = \{\alpha_{13} = -e_2\};\; S(v_2) = \{\alpha_{24} = -e_3\};\; S(v_3) = \{e_2\};\; S(v_4) = \{e_3\}$$

  y las derivaciones asociadas a ellas. Las raíces son todas parejables, (semisimples) y por tanto el grupo de automorfismos es reductivo.

- **Divisores y descomposición fundamental:** El semigrupo de los divisores de Weil efectivos es $Ef(X) = \langle H_1,\, H_2\rangle_+$ con $[H_3] = [H_1]$ y $[H_2] = [H_4]$ y las relaciones:

$$H_3 = H_1 + D(x^{-e_2}) \qquad H_4 = H_2 + D(x^{-e_3})$$

luego

$$m_3 = e_2;\ m_4 = e_3 \qquad v(m_3) = (1, 0, -1, 0);\ v(m_4) = (0, 1, 0, -1)$$

$B = \{v_3 = 0\} \cap \{v_4 = 0\} = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{Z}}$ luego $M = B \oplus C$ con $C = \langle m_3,\, m_4 \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Anillos de Cox: En este caso $s = 2$ $k = 2$ y la matriz N tiene columnas $N^1 = v'(m_3) = (1, 0)$ y $N^2 = v'(m_4) = (0, 1) \Rightarrow$ las variables son:

$$y_1 = x^{((1,0),0,0)};\ y_2 = x^{((0,1),0,0)};\ y_3 = x^{(N^1,-m_3)};\ y_4 = x^{(N^2,-m_4}$$

y por tanto como $B = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{Z}}$ se tiene

$$A_C = K[y_1 = x^{(1,0,0,0,0)},\, y_2 = x^{(0,1,0,0,0)},\, y_3 = x^{(1,0,0,-1,0)},\, y_4 = x^{(0,1,0,0,-1)}]$$

de grados respectivamente $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. y

$$A' = K[y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4,\, y_5 = x^{(-v'(e_1),e_1)},\, y_6 = x^{-(-v'(e_1),e_1)}]$$

Las derivaciones en las coordenadas de $K(M)$ y de $K(Y = y_1, \ldots, y_r)$: Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} v(\alpha_{13} = -e_2) &= (-1, 0, 1, 0) \\ v(\alpha_{24} = -e_3) &= (0, -1, 0, 1) \\ v(m_3 = e_2) &= (1, 0, -1, 0) \\ v(m_4 = e_3) &= (0, 1, 0, -1) \end{aligned}$$

las derivaciones están generadas por:

$$y^{-1} D_{v_1} \equiv y_1^{-1} y_3 D_{v_1};\ z^{-1} D_{v_2} \equiv y_2^{-1} y_4 D_{v_2}$$

$$y D_{v_3} \equiv y_1 y_3^{-1} D_{v_3};\ z D_{v_4} \equiv y_2 y_4^{-1} D_{v_4}$$

lo que da las relaciones $y \equiv y_1 y_3^{-1}$, $z \equiv y_2 y_4^{-1}$ $x \equiv y_1^{-2} y_2^3$ que definen el morfismo inyectivo $K(M) \hookrightarrow k(y_1, \ldots, y_r)$ y que utilizaremos en el último punto para ver como un automorfismo graduado en A_C se traduce en uno en X.

- **Orden y matrices $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{D}$:** Son nulas porque no hay raíces no parejables y por tanto el subgrupo unipotente es nulo. La longitud es cero y $q = 1$.

- **M y $\lambda(i)$:** La parte reductiva del grupo es $G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B})$ con $G(\mathcal{A}) = 0$ y $G(\mathcal{B}) = Gl(2) \times Gl(2)$ determinados respectivamente por $[v_1] = [v_3]$ y por $[v_2] = [v_4]$ siendo pues la matriz M que define un automorfismo de la parte reductiva:

$$M = \begin{pmatrix} M(B_1) & 0 \\ 0 & M(B_2) \end{pmatrix}$$

  con $M(B_1)$ y $M(B_2)$ las matrices de orden 2

$$M(B_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \qquad M(B_2) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix}$$

  de modo que los $\lambda(i)$ son

$$\lambda(1) = (a_1, a_3) \qquad \lambda(3) = (b_3, b_1) \qquad \lambda(2) = (a_2, a_4) \qquad \lambda(4) = (b_4, b_2)$$

- **Conjuntos X_i y R_i para el radical del grupo:** Son nulos y el radical se reduce al toro $T(h = 2)$ donde 2 es el n'umero de clases en Δ_1.

- **El grupo de automorfismos de la variedad tórica:** Las únicas permutaciones en Δ_1 que son isomorfismos lineales en el retículo y además conservan el abanico son las dadas por las trasposiciones entre aristas de la misma clase y por tanto el grupo $Aut\, X / Aut^\circ\, X = 0 \Rightarrow$

$$Aut\, X = (Gl(2) \times Gl(2)) \,/ T_{A_2}$$

  y vamos a calcular el cociente. Como B está generado por e_1, entonces $T_{A_2} \subset m(Spec\, K[\mathbb{Z}^{s=2}])$ que son las matrices

$$g = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

  y que operan en M

$$gM = \begin{pmatrix} \mu_1 M(B_1) & 0 \\ 0 & \mu_2 M(B_2) \end{pmatrix}$$

tales que $(\mu_1,\mu_2)^{v'(e_1)}=1$ y como $v'(e_1)=(-2,4)\Rightarrow \mu_1=\mu_2\sqrt{\mu_2}\Rightarrow$ la operación de T_{A_2} en M es

$$gM=\begin{pmatrix} \mu\sqrt{\mu}M(B_1) & 0 \\ 0 & \mu M(B_2)\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ el cociente es

$$(Gl(2)\times Gl(2))\,/T_{A_2}=(Gl(2)/\mu_2(K))\times GP_2$$

producto de grupo lineal por grupo lineal proyectivo. El toro maximal $T=T(M)$ de $Aut\,X$ por el isomorfismo con $Aut_g A_C/T_{A_2}$ da $T(2)/\mu_2(K)\times T(1)$ y el toro maximal del radical $R(Aut\,X)$ es $T(B)=T(\langle e_1\rangle_{\mathbb{Z}})$ porque $M=B\oplus C$ y las raíces parejables generan todo C.

El automorfismo en X que define $[M]\in GP_2\times GP_2$ es:

$$\tau_M(y_1)=a_1y_1+a_3y_3 \qquad \tau_M(y_2)=a_2y_2+a_4y_4$$

$$\tau_M(y_3)=b_3y_3+b_1y_1 \qquad \tau_M(y_4)=b_4y_4+b_2y_2$$

$\Rightarrow$

$$\tau_{[M]}(y)\equiv\frac{\tau_M(y_1)}{\tau_M(y_3)}=\frac{a_1y_1+a_3y_3}{b_3y_3+b_1y_1}=y_1y_3^{-1}.\frac{a_1+a_3y_3y_1^{-1}}{b_3+b_1y_1y_3^{-1}}$$

luego

$$\tau_{[M]}(y)=\frac{a_1x+a_3}{b_1x+b_3}$$

y de igual modo,

$$\tau_{[M]}(z)=\frac{a_2y+a_4}{b_2y+b_4}$$

y por último,

$$\tau_{[M]}(x)\equiv\frac{\tau_M(y_2)^3}{\tau_M(y_1)^2}=\frac{(a_2y_2+a_4y_4)^3}{(a_1y_1+a_3y_3)^2}=y_2^3y_1^{-2}.\frac{(a_2+a_4y_4y_2^{-1})^3}{(a_1+a_3y_3y_1^{-1})^2}$$

luego

$$\tau_{[M]}(x)=\frac{xy^2}{z^3}.\frac{(a_2z+a_4)^3}{(a_1x+a_3)^2}$$

Ejemplo 8 : **Variedad tórica con auomorfismo que no está en la conponente conexa**

$dim\, M = 2$, base $\{e_1,\, e_2\}$ y $\{w_1,\, w_2\}$ base dual. Δ_1 es:

$$v_3 = w_1;\ v_4 = w_2;\ v_1 = -2w_1 - 3w_2;\ v_2 = -3w_1 - 2w_2$$

El abanico

$$\Delta = \{\sigma_1 = \langle v_3,\, v_4\rangle;\ \sigma_2 = \langle v_1,\, v_3\rangle;\ \sigma_3 = \langle v_2,\, v_4\rangle;\ \sigma_4 = \langle v_1,\, v_2\rangle\}$$

- **Los abiertos afines** tienen por anillos, para $x = x^{e_1}$, $y = x^{e_2}$

$$\sigma_1^{\vee} \Rrightarrow k[x, y];\ \sigma_2^{\vee} \Rrightarrow k[y^{-1}, x^3y^{-2}, xy^{-1}]$$

$$\sigma_3^{\vee} \Rrightarrow k[x^{-1}, y^3x^{-2}, yx^{-1}];\ \sigma_4^{\vee} \Rrightarrow k[yx^{-2}, x^{-1}, y^{-1}, xy^{-2}, x^2y^{-3}, y^2x^{-3}]$$

- **Las derivaciones y raíces:**

$$D(v_1) = 0,\ D(v_2) = 0 \Rightarrow\ S(v_1) = S(v_2) = \emptyset$$

$$D(v_3) = \langle x^{-e_1} D_{v_3}\rangle\ \Rightarrow\ S(v_3) = S^*(v_3) = \{r_1^3 = m_3 = -e_1\}$$

$$D(v_4) = \langle x^{-e_2} D_{v_4}\rangle\ \Rightarrow\ S(v_4) = S^*(v_4) = \{r_1^4 = m_4 = -e_2\}$$

  Las raíces son todas no parejables, no hay raíces semisimples (parejables) y por tanto el grupo es resoluble.

- **Divisores y descomposición fundamental:** El semigrupo de los divisores de Weil efectivos es $Ef(X) = \langle H_1,\, H_2\rangle_+$ con las relaciones:

$$H_3 = 2H_1 + 3H_2 + D(x^{e_1})\ \Rightarrow\ m_3 = -e_1 \qquad v(m_3) = (2, 3, -1, 0)$$

$$H_4 = 3H_1 + 2H_2 + D(x^{e_2})\ \Rightarrow\ m_4 = -e_2 \qquad v(m_4) = (3, 2, 0, -1)$$

  $B = \{v_3 = 0\} \cap \{v_4 = 0\} = 0$ luego $M = 0 \oplus C$ con $C = \langle m_3,\, m_4\rangle_{\mathbb{Z}}$ y $S^*(v_3) = \{r_1^3 = m_3\}$ y $S^*(v_4) = \{r_1^4 = m_4\}$.

- **Anillos de Cox:** En este caso $s = 2$ $k = 2$ y la matriz N tiene columnas $N^1 = v'(m_3) = (2, 3)$ y $N^2 = v'(m_4) = (3, 2) \Rightarrow$ las variables son:

$$y_1 = x^{((1,0),0,0)};\ y_2 = x^{((0,1),0,0)};\ y_3 = x^{(N^1, -m_3)};\ y_4 = x^{(N^2, -m_4)}$$

y por tanto como $B = 0$ se tiene

$$A' = A_C = K[y_1 = x^{(1,0,0,0)},\ y_2 = x^{(0,1,0,0)},\ y_3 = x^{(2,3,1,0)},\ y_4 = x^{(3,2,0,1)}]$$

de grados respectivamente $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$.

Las derivaciones en las coordenadas de $K(M)$ **y de** $K(Y = y_1, \ldots, y_r)$: Teniendo en cuenta que

$$\begin{array}{rcl} v(r_1^3 = -e_1) & = & (2,3,-1,0) \\ v(r_4 = -e_2) & = & (3,2,0,-1) \end{array}$$

las derivaciones están generadas por:

$$x^{-1}D_{v_3} \equiv y_1^2 y_2^3 y_3^{-1} D_{v_3};\ y^{-1}D_{v_4} \equiv y_1^3 y_2^2 y_4^{-1} D_{v_4}$$

lo que da las relaciones $x \equiv y_1^{-2} y_2^{-3} y_3$, $y \equiv y_1^{-3} y_2^2 y_4$ que definen el morfismo inyectivo $K(M) \hookrightarrow k(y_1, \ldots, y_4)$ y que utilizaremos en el último punto para ver como un automorfismo graduado en A_C se traduce en uno en X.

- **Orden y matrices $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{D}$:** De los valores de v en las raíces no parejables asociadas a v_3 se tienen que $v_3 < v_1$ y $v_4 < v_2$ de modo que la longitud máxima es 1 y por tanto el radical unipotente es **un grupo aditivo** en el que opera la parte reductiva que consiste en el toro $T(4) \equiv K^{*4}$.
  Las matrices son

$$\mathcal{R}^* \equiv \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset \\ M_3^1 & M_3^2 \end{pmatrix}$$

donde $M_3^1 = \{m_3\}$ y $M_3^2 = \{m_4\}$

$$\mathcal{D} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu_3^1 & \mu_3^2 \end{pmatrix}$$

donde $\mu_3^1 = a \in K$ y $\mu_3^2 = b$ y todo $D \in (Der^u, \bullet) = R_u$ será

$$D = ax^{m_3} D_{v_3} + bx^{m_4} D_{v_4} \equiv (a,b)$$

- **Conjuntos X_i y R_i para el radical del grupo:** Los conjuntos son

$$X_0 = \{v_3,\, v_4\} \qquad X_1 = \{v_1, v_2\} \qquad X_{q=2} = \emptyset$$

y

$$R_0 = 0 \qquad R_1 \equiv S^*(v_3),\, S^*(v_4)\} \qquad R_2 = R_1$$

$\Rightarrow \overline{R}_1 = R_1/R_0 \equiv \langle D(v_3),\, D(v_4)\rangle \Rightarrow$

$$R_u = (\mathbb{A}^2,\, +)$$

y por tanto es abeliano. El radical del grupo es

$$R(Aut_g A_C) = \big(\mathbb{A}^2,\, +\big) \rtimes T(4)$$

y el radical de $Aut\, X$ es

$$R(Aut\, X) = \big(\mathbb{A}^2,\, +\big) \rtimes T(4)/T_{A_1}$$

- **El grupo de automorfismos de la variedad tórica:** $Aut^\circ\, X$ es el grupo resoluble conexo

$$Aut^\circ\, X = \big(\mathbb{A}^2,\, +\big) \rtimes (T(4)/T_{A_1}) = R(Aut^\circ\, X)$$

cuya parte reductiva es el toro $T = T(M) \simeq T(4)/T_{A_1}$ y que opera en el radical unipotente del mismo modo que lo hace $T(4)$ porque como sabemos T_{A_1} opera en R_u por la identidad y la operación en este caso según el apartado segundo del punto tercero del lema 7.17 es:
Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ y $\tau_\lambda \in T(4)$ es el automorfismo asociado y $D \equiv (a, b) \in \mathbb{A}^2 \Rightarrow$

$$\tau_\lambda \circ (1 + n_D) \circ \tau_{\lambda^{-1}} = 1 + n_E \text{ con } E \equiv (a.\lambda_1^2\lambda_2^3\lambda_3^{-1}, b.\lambda_1^3\lambda_2^2\lambda_4^{-1})$$

Para calcular $(T(4)/T_{A_1})$, como $B = 0 \Rightarrow T_{A_1} \simeq Spec\, K[\mathbb{Z}^{s=2}]$ es el subgrupo de $T(4)$ de los elementos $g = (\lambda_1, \lambda_2, (\lambda_1, \lambda_2)^{v'(m_3)}, (\lambda_1, \lambda_2)^{v'(m_4)}) \Rightarrow$ son del tipo

$$g = \big(p, q, p^2q^3, p^3q^2\big)$$

que opera en $\mu \in T(4)$:

$$g.\mu = \big(p\mu_1,\, q\mu_2,\, p^2q^3\mu_3,\, p^3q^2\mu_4\big)$$

$\Rightarrow [\mu] = [(1,1,i,j)]$ para $i = \mu_3\mu_1^{-2}\mu_2^{-3}$ y $j = \mu_4\mu_1^{-3}\mu_2^{-2} \Rightarrow$

$$Aut^{\circ}X = \left(\mathbb{A}^2, +\right) \rtimes T(2)$$

con la operacione del toro en $\mathbb{A}^2$ que se ha descrito antes. Veamos la operación de los automorfismo de la parte reductiva y de la parte unipotente en $K(M)$:

Automorfismos de la parte reductiva: Sea entonces $[\mu] = [(1,1,i,j)]$ y $\tau_{[\mu]}(y_1) = y_1$, $\tau_{[\mu]}(y_2) = y_2$, $\tau_{[\mu]}(y_3) = iy_3$, $\tau_{\mu}(y_4) = jy_4$, $\Rightarrow$

$$\tau_{[\mu]}(x) \equiv \tau_{[\mu]}(\frac{y_3}{y_1^2y_2^3}) = \frac{iy_3}{y_1^2y_2^3}$$

luego

$$\tau_{[\mu]}(x) = ix$$

y de similar modo,

$$\tau_{[\mu]}(y) = jy$$

Automorfismos de la parte unipotente: Como sabemos, la parte unipotente de $Aut\,X$ y Aut_gA_C coinciden.
Sea pues $\tau = 1 + n_D$ con $D \equiv (a,b)$ es decir

$$D = ax^{m_3}D_{v_3} + bx^{m_4}D_{v_4}$$

$\Rightarrow$

$$\tau(y_1) = y_1 \qquad \tau(y_2) = y_2$$

$$\tau(y_3) = y_3 + ay_3Y^{v(m_3} = y_3 + ay_1^2y_2^3$$

análogamente

$$\tau(y_4) = y_4 + by_1^3y_2^2$$

$\Rightarrow$ en X, como $x = x^{e_1} \equiv Y^{v(e_1)} = y_3y_1^{-2}y_2^{-3} \Rightarrow$

$$\tau(x) = \tau(y_3y_1^{-2}y_2^{-3}) = (y_3 + ay_1^2y_2^3)y_1^{-2}y_2^{-3}$$

$\Rightarrow$

$$\tau(x) = x + a$$

y de igual modo se calcula:

$$\tau(y) = y + b$$

con lo que queda determinado con precisión el grupo $Aut^{\circ}X$. En este ejemplo el cociente $Aut\,X/Aut^{\circ}X$ es un grupo finito **no nulo** generado por el automorfismo $\tau(x) = y$ ($\tau^2 = Id$) que efectivamente es automorfismo porque procede del automorfismo $\mathbb{Z}-$lineal en M que es permutar e_1 con e_2 y que en Δ_1 es la permutación $v_1 \leftrightarrow v_2$ $v_3 \leftrightarrow v_4$ que evidentemente conserva el abanico.

Creo que este ejemplo muestra cómo determinar en general el grupo finito, al menos parte de él.

Ejemplo 9 : **Con raíces semiparejables y simplicial no regular**

$dim\, M = 2$, base $\{e_1,\, e_2\}$ y $\{w_1,\, w_2\}$ base dual. Δ_1 es:

$$v_1 = w_1 + 2w_2;\; v_2 = -w_2;\; v_3 = -w_1$$

El abanico

$$\Delta = \{\sigma_1 = \langle v_1,\, v_3\rangle;\; \sigma_2 = \langle v_2,\, v_3\rangle;\; \sigma_3 = \langle v_1,\, v_2\rangle\}$$

- **Los abiertos afines** tienen por anillos, para $x = x^{e_1}$, $y = x^{e_2}$

$$\sigma_1^\vee \Rrightarrow k[y, x^{-1}y, x^{-2}y];\; \sigma_2^\vee \Rrightarrow k[x^{-1}, y^{-1}];\; \sigma_3^\vee \Rrightarrow k[x, x^2y^{-1}]$$

- **Las derivaciones y raíces:**

  Son parejables las raíces:

$$S(v_1) = \{\alpha_{13} = -e_1\}\, y\, S(v_3) = \{\alpha_{31} = e_1 = m_3\} \;\Rightarrow\; [H_1] = [H_3]$$

  con los valores $v(e_1) = (-1, 0, 1)$ y $v(-e_1) = (1, 0, -1)$.

  Son no parejables las raíces del conjunto ordenado:

$$S(v_2) = S^*(v_2) = \{r_1^2 = -2e_1 + e_2;\; r_2^2 = -e_1 + e_2;\; r_3^2 = m_2 = e_2\}$$

  y los valores son $v(r_1^2) = (0, -1, 2)$, $v(r_2^2) = (1, -1, 1)$ y $v(r_3^2) = (2, -1, 0)$
  Las derivaciones en X están generadas por la base

$$\{x^{-2}yD_{v_2},\, x^{-1}yD_{v_2},\, yD_{v_2},\, x^{-1}D_{v_1},\, xD_{v_3}\}$$

- **Divisores y descomposición fundamental:** Como $[H_3] = [H_1]$ y $H_2 = 2H_1 + D(x^{-m_2})$ el semigrupo de los divisores de Weil efectivos es $Ef(X) = \langle H_1\rangle_+$ y además $B = 0$ y $M = 0 \oplus C$ con $C = \langle m_2,\, m_3\rangle_{\mathbb{Z}}$.

- **Anillos de Cox:** En este caso $s = 1$ $k = 2$ y la matriz N tiene columnas $v'(m_2) = (2)$ y $v'(m_3) = (1) \Rightarrow$ las variables son:

$$y_1 = x^{(1),0,0};\; y_2 = x^{(2),-m_2=-e_1};\; y_3 = x^{(1),-m_3=-e_2}$$

  y por tanto como $B = 0$ se tiene

$$A' = A_C = K[y_1 = x^{(1,0,0)},\, y_2 = x^{(2,-1,0)},\, y_3 = x^{(1,0,-1)}]$$

de grados respectivamente (1), (2), (1).

Las derivaciones en las coordenadas de $K(M)$ y de $K(Y = y_1, \ldots, y_r)$: En $K[M]$ están generadas por

$$x^{-1}D_{v_1},\, xD_{v_3},\, x^{-2}yD_{v_2},\, x^{-1}yD_{v_2},\, yD_{v_2}$$

que en A_C son respectivamente

$$y_1^{-1}y_3D_{v_1}\; y_1y_3^{-1}D_{v_3}\; y_2^{-1}y_3^2D_{v_2};\; y_1y_2^{-1}y_3D_{v_2};\; y_1^2y_2^{-1}D_{v_2}$$

lo que da las relaciones $x \equiv y_1^2y_3^{-1};\; y \equiv y_1^2y_2^{-1}$ que definen el morfismo inyectivo $K(M) \hookrightarrow k(y_1, \ldots, y_r)$ y que utilizaremos en el último punto para ver como un automorfismo graduado en A_C se traduce en uno en X.

- **Orden y matrices $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{D}$:** De los valores de v en las raíces no parejables asociadas a v_2 se tienen que $[v_2] < [v_3]$ de modo que la longitud máxima es $l(v_2) = 1$ y por tanto la parte unipotente R_u **es un grupo aditivo** en el que opera el toro $T(3) \equiv K^{*3}$ de manera que $R = R_u \rtimes T(3)$ es el radical del grupo Aut_gA_C. Las matrices son

$$\mathcal{R}^* \equiv \begin{pmatrix} M_2^1 & \emptyset \\ M_3^1 & \emptyset \end{pmatrix}$$

donde $M_2^1 = \{r_1^2, r_2^2\}$ y $M_3^1 = \{r_3^2 = m_2\}$

$$\mathcal{D} \equiv \begin{pmatrix} \mu_2^1 & 0 \\ \mu_3^1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\mu_2^1 = (a, b) \in K^2$ y $\mu_3^1 = c \in K$ y todo $D \in (Der^u, \bullet) = R_u$ será

$$D = ax^{r_1^2}D_{v_2} + bx^{r_2^2}D_{v_2} + cx^{m_2}D_{v_2} \equiv (a, b, c)$$

- **Conjuntos X_i y R_i para el radical del grupo:** Los conjuntos son

$$X_0 = \{v_2\} \qquad X_1 = \{v_1,\, v_3\} \qquad X_{q=2} = \emptyset$$

y

$$R_0 = 0 \qquad R_1 \equiv S^*(v_2) \qquad R_2 = R_1$$

$\Rightarrow R_u = (Der^u, \bullet) = (\mathbb{A}^3, +)$ y como hay $h = 2$ dos clases el radical del grupo es

$$R(Aut_gA_C) = (\mathbb{A}^3, +) \rtimes T(h = 2)$$

- **Cálculo de $\lambda_{D(j)}$:** En este caso $D = D(j=1)$ y si como antes si $D \equiv (\mu_2^1; \mu_3^1) \Rightarrow$ $\lambda_{D(1)}$ es la columna
$$\lambda_{D(1)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- **M y $\lambda(i)$:** La parte reductiva del grupo es $G(\mathcal{A}) \times G(\mathcal{B})$ con $G(\mathcal{A}) = Gl(1)$ determinado por v_2 y $G(\mathcal{B}) = Gl(2)$ determinado por $[v_1] = [v_3]$ siendo pues la matriz M que define un automorfismo de la parte reductiva:
$$M = \begin{pmatrix} M(A_1) & 0 \\ 0 & M(B_1) \end{pmatrix}$$
con $M(A_1) = (\mu(1)_1^1 = \mu)$ matriz de orden 1, $M(B_1)$ la matriz de orden 2
$$M(B_1) = \mu'(1) = \begin{pmatrix} p & z \\ q & t \end{pmatrix}$$
de modo que los $\lambda(i)$ son
$$\lambda(1) = (p, q) \qquad \lambda(2) = (\mu) \qquad \lambda(3) = (t, z)$$
y el automorfismo de la parte reductiva asociado a M es $\tau_M(y_1) = py_1 + qy_3$; $\tau_M(y_2) = \mu y_2$; $\tau_M(y_3) = ty_3 + zy_1$

- **Cálculo de $\overline{M}$ y E:** Para ver la operación de la parte reductiva en la unipotente, podemos proceder como en el ejemplo 5 ya que los datos son iguales y obtendremos la matriz:
$$\overline{M} = \begin{pmatrix} t^2 & qt & q^2 \\ 2tz & pt + qz & 2pq \\ z^2 & pz & p^2 \end{pmatrix}$$
Por tanto, si $D \equiv (a, b, c)$ con $1 + n_D \in R_u$ el correspondiente automorfismo de la parte unipotente y τ_M es el automorfismo de la parte reductiva de matriz la matriz M antes definida, entonces $E \in (Der^u, \bullet) = R_u$ tal que $1 + n_E = \tau_{M^{-1}} \circ 1 + n_D \circ \tau_M$ es:
$$E \equiv \overline{M}^{-1} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} .(\mu)$$
que muestra cómo opera la parte reductiva en la unipotente. En este caso y como en el ejemplo 1, lo vamos a calcular de manera sencilla, sin utilizar las fórmulas generales de la teoría:

Sea como antes la matriz M formada en la diagonal por $M(A_1)$, $M(B_1)$ de modo que $M(A_1)=\mu$ matriz de orden 1 y $M(B_1)=B$ la matriz de orden 2

$$B=\begin{pmatrix} p & z \\ q & t \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\tau_M(y_1) &= py_1+qy_3\\ \tau_M(y_2) &= \mu y_2\\ \tau_M(y_3) &= ty_3+zy_1\end{aligned}$$

y si $D\equiv(a,b,c)$ es decir,

$$D=ax^{r_1^2}D_{v_2}+bx^{r_2^2}D_{v_2}+cx^{m_2}D_{v_2}$$

y como $v(r_1^2)=(0,-1,2)$ y $v(r_2^2)=(1,-1,1,)$ y $v(m_2)=(2,-1,0)\Rightarrow 1{+}n_D(y_i)=y_i$ $\forall\ i=1,3$ y

$$1+n_D(y_2)=y_2+ay_2.y^{(0,-1,2)}+by_2.y^{(1,-1,1)}+cy_2.y^{(2,-1,0)}=y_2+ay_3^2+by_1y_3+cy_1^2$$

$\Rightarrow \tau_{M^{-1}}\circ 1+n_D\circ\tau_M(y_i)=y_i\ \forall\ i=1,3$ y

$$\tau_{M^{-1}}\circ 1+n_D\circ\tau_M(y_2)=\tau_{M^{-1}}(\mu y_2+\mu ay_3^2+\mu by_1y_3+\mu cy_1^2)=$$

$$=y_2+\frac{\mu a(-qy_1+py_3)^2}{(detB)^2}+\frac{\mu b(ty_1-zy_3).(-qy_1+py_3)}{(detB)^2}+\frac{\mu c(ty_1-zy_3)^2}{(detB)^2}$$

que desarrollando da

$$y_2{+}y_3^2\frac{\mu p^2a-\mu bzp+\mu cz^2}{(detB)^2}{+}y_1y_3\frac{-2\mu aqp+\mu b(tp+qz)-2\mu ctz}{(detB)^2}{+}y_1^2\frac{\mu aq^2-\mu btq+\mu ct^2}{(detB)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\tau_{M^{-1}}\circ 1+n_D\circ\tau_M$$

$$\equiv$$

$$\left(\frac{\mu p^2a-\mu bzp+\mu cz^2}{(detB)^2},\ \frac{-2\mu aqp+\mu b(tp+qz)-2\mu ctz}{(detB)^2},\ \frac{\mu aq^2-\mu btq+\mu ct^2}{(detB)^2}\right)$$

El toro $T(r=3)$ es subgrupo de la parte reductiva representado por las matrices M_3 en las que $q=z=0$ es decir $T(r)$ son las matrices del tipo

$$M_3 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

donde el automorfismo asociado es $\tau_{M_3}(y_1)=py_1$, $\tau_{M_3}(y_2)=\mu y_2$, $\tau_{M_3}(y_3)=ty_3$, $\Rightarrow$ la matriz asociada $\overline{M_3}$ es

$$\overline{M_3} = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & pt & 0 \\ 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$E \equiv \begin{pmatrix} t^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & (pt)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & p^{-2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} .(\mu)$$

es decir

$$E \equiv \begin{pmatrix} a.\mu.t^{-2} \\ b.\mu.(pt)^{-1} \\ c.\mu.p^{-2} \end{pmatrix}$$

con lo que se tiene la operación del toro en el radical unipotente y de lo que se deduce, como en el Ejemplo 1, que el radical no es un subgrupo abeliano.

- **El grupo de automorfismos de la variedad tórica:**

  Del abanico se deduce que la única permutación en las aristas Δ_1 que da un automorfismo $\mathbb{Z}-$ lineal y conserva el abanico es la trasposición entre v_1 y v_3 que justo son tales que $[v_1]=[v_3]$ de modo que de la sección anterior se deduce que $Aut\,X$ coincide con su componente conexa en el origen y por tanto

$$Aut\,X = (\mathbb{A}^3,+) \rtimes (Gl(1)\times Gl(2))\,/T_{A_1}$$

  con la operación vista en el apartado anterior que no se ve afectada por el cociente porque T_{A_1} opera en R_u por la identidad.
  Para calcular el cociente, como $B=0$ entonces $T_{A_1}=m(Spec\,K[\mathbb{Z}^{s=1}])$ que en el toro $T(3)$ es

$$(\mu_1;\mu_1^{v'(m_2)},\mu_1^{v'(m_3)}) = (\mu_1;\mu_1^2,\mu_1)$$

que como matriz en $Gl(\mathcal{A}) \times Gl(\mathcal{B})$ es

$$g = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix}$$

En relación con la operación del toro en R_u que acabamos de ver en el apartado anterior, sería $t = p = \mu_1$ y $\mu = p^2$ de modo que la derivación asociada al automorfismo de R_u resultante de la operación de T_{A_1} en R_u es

$$E \equiv \begin{pmatrix} a.p^2.p^{-2} \\ b.p^2.p^{-1}.p^{-1} \\ c.p^2.p^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

lo que muestra que en efecto T_{A_1} opera en R_u por la identidad.
T_{A_1} opera en $Gl(1) \times Gl(2)$: Sean

$$M = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & p & z \\ 0 & q & t \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$g.M = \begin{pmatrix} \lambda^2\mu & 0 \\ 0 & \lambda B \end{pmatrix} \qquad \text{con } B = \begin{pmatrix} p & z \\ q & t \end{pmatrix}$$

luego tomando $\lambda = \sqrt{\mu^{-1}}$ se tiene la sucesión exacta de grupos, siendo $\mu_2(K)$ el subgrupo de las raíces $2-$ésimas de la unidad,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T_{A_1} & \to & Gl(1) \times Gl(2) & \to & Gl(2)/\mu_2(K) & \to & 0 \\ & & & & M & \rightsquigarrow & [\sqrt{\frac{1}{\mu}}B] & & \end{array}$$

luego se ha probado

$$Aut\, X = (\mathbb{A}^3, +) \rtimes Gl(2)/\mu_2(K)$$

con las operaciones que se han descrito antes. El toro maximal de $Aut\, X$ es $T(M) \simeq T(M)/\mu_2(K)$ en $Gl(2)/\mu_2(K)$. Para el radical $R(Aut\, X)$, como $M = \langle e_1, e_2 \rangle$ y e_2 es raíz parejable $\Rightarrow$

$$R(Aut\, X) = (\mathbb{A}^3, +) \rtimes T(\langle e_1 \rangle)$$

Veamos por último la operación de los automorfismo de la parte reductiva y de la parte unipotente en $K(M)$:

Automorfismos de la parte reductiva: Sea pues M la matriz de clase

$$[M] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

entonces si $\tau = \tau_{[M]}$ se tiene

$$\tau(x) \equiv \frac{\tau(y_1)}{\tau(y_3)} = \frac{(ay_1 + by_3)^2}{cy_1 + dy_3} = \frac{y_1 y_3^{-1}(a + by_1^{-1})y_3}{cy_1 y_3^{-1} + d}$$

luego

$$\tau(x) = \frac{(ax + b)}{cx + d}$$

y de igual modo $\tau(y) \equiv \frac{\tau(y_1^2)}{\tau(y_2)} \Rightarrow$

$$\tau(y) = \frac{(ax + by)^2}{x}$$

Automorfismos de la parte unipotente: Como sabemos, los automorfismos de la parte unipotente de $Aut\, X$ y $Aut_g A_C$ coinciden.
Sea pues $\tau = 1 + n_D$ con $D = ax^{r_1^2} D_{v_2} + bx^{r_2^2} D_{v_2} + cx^{r_3^2} D_{v_2}$ y sea $\tau = \tau_D = 1 + n_D$ $\Rightarrow$

$$\tau(y_1) = y_1 \qquad \tau(y_3) = y_3$$

$$\tau(y_2) = y_2 + ay_3^2 + by_1 y_3 + cy_1^2$$

$\Rightarrow$

$$\tau(x) \equiv \tau(y_1 y_3^{-1})$$

luego

$$\tau(x) = x$$

por otro lado como $y \equiv y_1^2 y_2^{-1} \Rightarrow$

$$\tau(y) \equiv \frac{y_1^2}{y_2 + ay_3^2 + by_1 y_3 + cy_1^2} = \frac{y_1^2}{y_2(1 + ay_3^2 y_2^{-1} + by_1 y_3 y_2^{-1} + cy_1^2 y_2^{-1})}$$

$\Rightarrow$

$$\tau(y) = \frac{yx^2}{x^2 + ay + bxy + cyx^2}$$

Referencias

[1] Brian Conrad. *Reductive Group Schemes in Autour des Schémas en Groupes Vol. I, Panoramas et Synthèses Numero 42-43,* Société mathématique de France, (2014)

[2] D. A. Cox. *The Homogeneos Coordinate Ring of a Toric Variety,* J. Algebraic Geometry 4 (1995), 17-50

[3] D. A. Cox. *Erratum to "The Homogeneos Coordinate Ring of a Toric Variety",* J. Algebraic Geometry (2014)

[4] V. Danilov *The Geometry of toric varieties,* Russian Math. Surveys **33** (1978), 97-154.

[5] M. Demazure. *Sous-groupes algébriques de rang maximun du groupe de Cremona,* Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 3, n4 (1970), p. 507-588

[6] M. Demazure et P. Gabriel.

[7] M. Demazure and A. Grothendieck. *Schémas en groupes, (Propiétés générales des schémas en groupes).* Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Maire, (1962-1964), Documents Mathématiques, vol. 7, Soc. Math. France, Paris, 2011. *Groupes algébriques,* Masson-Norh Holland Pub. Cy, Paris, 1970

[8] W. Fulton. *Introduction to Toric Varieties,* Princeton University Press, 1993

[9] A. Grothendieck and J. Dieudonné. *Élément de géometrie algebrique,* Publ.Math.IHES, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 (1960-1967)

[10] R. Godement *Théorie des faiceaux,* Hermann, Paris, 1958

[11] Hartshorne R. *Algebraic Geometry,* Graduated Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, 1975.

[12] James E. Humphreys. *Linear Algebraic Groups,* Springer-Verlag, 1975.

[13] F. Hirzebruch. *Hilbert modular surface,* L'enseignement Math. 21 (1973), 183-282

[14] M. Hochter. *Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rungs generated by monomials, and polytopes,* Ann. of Math. 96 (1972), 318-337

[15] Hideyuki Matsumura. *Geometric Invariant Theory,* Cambridge University Press, 1986

[16] Hideyuki Matsumura and Frans Oort. *Representability of Group Functors, and Automorphisms of Algebraic Schemes,* Inventiones math, 4, 1-25, 1967

[17] D. Mumford and J. Fogarty *Commutative ring theory,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982

[18] Tadao Oda. *Convex Bodies and Algebraic Geometry,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988

[19] Tadao Oda. *Lectures on Torus Embeddings and Applications,* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1978

[20] Carlos Sancho de Salas, 2001. *Grupos Algebraicos y Teoría de Invariantes,* volume 16 of Aportaciones Matemticas: Textos. Sociedad Matemática Mexicana, México

[21] H. Sumihiro. *Equivariant completion, I-II,* J. Math. Kyoto Univ. 14 (1974), 1-28 and 15 (1975), 573-605