

# **KOSMICKÁ GEODÉZIE**

Prof. Ing. Jan Kostecký, DrSc.  
doc. Ing. Jaroslav Klokočník, DrSc.  
Ing. Jakub Kostecký, Ph.D.

2008  
České vysoké učení technické v Praze  
Nakladatelství ČVUT

<b>Úvod</b> .....	3
<b>1 Souřadnicové systémy v kosmické geodézii</b> .....	4
1.1 Konvenční referenční systémy .....	4
1.2 Praktická realizace konvenčního inerciálního systému .....	12
1.3 Praktická realizace konvenčního terestrického systému CTRS – terestrický geocentrický souřadnicový systém ITRSxx .....	16
1.4 Souřadnicový systém ETRS89 – realizace v Evropě .....	28
1.5 Souřadnicový systém WGS 84 .....	36
<b>2 Pohyb umělých družic Země v reálném silovém poli</b> .....	39
2.1 Nástin odvození Lagrangeových planetárních rovnic .....	41
2.2 Nástin odvození Gaussových planetárních rovnic .....	43
2.3 Vliv gravitačního pole Země na dráhu umělé družice Země .....	47
2.4 Gravitační vliv Slunce a Měsíce na dráhu umělé družice Země .....	56
2.5 Další gravitační poruchy .....	61
2.6 Poruchy dráhy, působené nekonzervativními silami .....	61
2.7 Poruchy dráhových elementů vlivem rušících sil – dominantní efekty .....	67
<b>3 Metody pozorování kosmické geodézie</b> .....	69
3.1 Přehled pozorovacích přístrojů a metod .....	69
3.2 Radar .....	72
3.3 Fotografická pozorování .....	75
3.4 Fázový dálkoměr .....	75
3.5 Jednosměrný dálkoměr .....	75
3.6 Dopplerovská pozorování .....	76
3.7 Laserový družicový dálkoměr .....	80
3.8 Radiometrie s velmi dlouhými základnami .....	85
3.9 Družicová altimetrie .....	91
3.10 Sledování družice z družice .....	101
3.11 Úvod do družicové gradientometrie .....	103
3.12 Kombinace jednosměrného dálkoměru s fázovým dálkoměrem – technologie Globálních Navigačních družicových (Satelitních) Systémů .....	106
<b>4 Družice a družicové systémy</b> .....	112
4.1 Úvod .....	112
4.2 Geodetické a geodynamické družice .....	113
4.3 Altimetrické družice .....	118
4.4 Družicové systémy .....	121
<b>5 Řešení obrácených úloh družicové geodézie</b> .....	129
5.1 Určování vybraných Stokesových parametrů charakterizujících gravitační pole Země z analýzy dráhových elementů družice .....	131
5.2 Základní model dynamické metody družicové geodézie .....	132
5.3 Kinematické určení parametrů gravitačního pole Země .....	136
<b>6 Modely gravitačního pole</b> .....	139
6.1 Definice a základní informace .....	139
6.2 Historie a současnost modelů gravitačního pole Země .....	141

---

6.3 Testování přesnosti modelů gravitačního pole Země .....	142
<b>7 Vybrané aplikace kosmické geodézie .....</b>	<b>147</b>
7.1 Určení detailní struktury gravitačního pole kombinací družicových a pozemních dat .....	147
7.2 Určení průběhu plochy globálního geoidu .....	148
7.3 Aplikace dráhových rezonancí UDZ v geodézii a oceánografii .....	152
<b>8 Mezinárodní služba rotace Země a souřadnicových systémů IERS .....</b>	<b>158</b>
8.1 Technique Centres .....	158
8.2 Product Centres .....	158
8.3 Analysis Coordinator, Central Bureau a Directing Board .....	159
8.4 Hlavní produkty služby .....	159
<b>Dodatky</b>	
D2.3 – Transformace poruchové funkce do systému dráhových elementů .....	160
D2.3.3 – Případ rezonance .....	164
D3.9 – Družicová altimetrie .....	182
D3.11 – Družicová gradientometrie .....	211
<b>Literatura .....</b>	<b>222</b>

## Úvod

Předložené skriptum *Kosmická geodézie* navazuje a místy věcně doplňuje skriptum *Geodetická astronomie 10* autorů Kabeláč, Kostecký (Nakladatelství ČVUT, 1998) a je především určeno studentům magisterského studia oboru geodézie a kartografie na Stavební fakultě ČVUT v Praze. Předpokládá se, že bude hlavně využito v magisterském studiu studijního oboru *geodézie a kartografie* v základních předmětech *Vyšší geodézie 2*, *Kosmická geodézie* a volitelném předmětu *Kosmická geodézie T1*.

Zabývá se globálními souřadnicovými systémy, teorií pohybu umělých družic Země, metodami pozorování kosmické geodézie, družicemi zaměřenými na využití při řešení geodetických úloh, základními metodami zpracování pozorování a odvozením hledaných parametrů – gravitačního pole Země, určování souřadnic pozorovacích stanic a parametrů orientace Země v prostoru.

Čtenář zde však nenalezne detailní popis využití technologie globálních navigačních družicových systémů (Global Navigation Satellite System – GNSS) – tato látka je na oboru geodézie a kartografie na Stavební fakultě ČVUT obsahem předmětů *Elektronické metody* a *Vyšší geodézie 1*.

Snahou autorů bylo podat problematiku co nejjednodušším a pokud možno nejpřehlednějším způsobem. Některé části však vyžadovaly detailního rozpracování – to je obsahem několika dodatků k příslušným kapitolám, resp. odstavcům.

Vzhledem k tomu, že skripta jsou určena pro předměty, z nichž dva jsou základní a další rozšiřuje poznatky, jsou kapitoly určené pro první účel psány pokud možno velmi stručně, na druhé straně kapitoly určené pro druhý účel jsou psány podrobněji. Autoři jsou si vědomi, že z tohoto důvodu může text působit poněkud nehomogenním dojmem.

Autoři chtějí na tomto místě poděkovat především lektorovi Ing. Georgiji Karskému, CSc. za cenné připomínky, které přispěly ke zlepšení obsahu skript, dále pak Ing. Josefu Seberovi za řadu připomínek a paní Daniele Poláškové za vyhotovení řady tabulek a přepsání části textu.

V Praze v lednu 2008

autoři



## 1. Souřadnicové systémy v kosmické geodezii

### 1.1 Konvenční referenční systémy

#### 1.1.1 Definice konvenčních referenčních systémů

V kosmické geodezii se používá řada různých souřadnicových systémů, my zde nastíníme pouze ty nejdůležitější, mající význam při zpracování geodetických měření. V dalším budeme rozlišovat mezi **referenčním systémem** a **referenčním rámcem**.

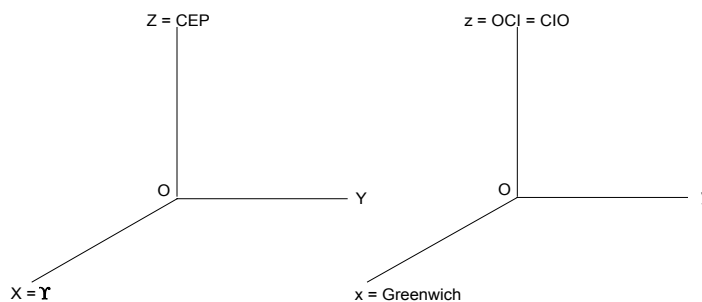
*Definice: (referenční systém) = (soubor konstant, algoritmů, technologie, ...) + (referenční rámec).*

Souborem konstant a algoritmů rozumíme množinu dohodnutých parametrů (např. rychlost světla, hodnota zploštění Země, velikost hlavní poloosy referenčního elipsoidu, apod.) a způsobů výpočtů dalších parametrů (výpočet precese, nutace, apod.), mezinárodně přijatou. Technologiemi rozumíme různé pozorovací techniky a jejich konkrétní použití podle dohodnutého způsobu. Referenční rámec je pak soubor objektů (kvazarů, hvězd, nebo v terénu fyzicky realizovaných bodů - stabilizace), kterým jsou přiřazeny souřadnice a změny těchto souřadnic v čase.

V dalším se budeme věnovat dvěma základním systémům, které se principiálně od sebe odlišují. Prvním je **konvenční inerciální referenční systém**, jehož praktická realizace se nazývá **ICRS (International Celestial Reference System - mezinárodní nebeský referenční systém)**. Podle definice dále platí

$$\text{ICRS} = (\text{konstanty, algoritmy, technologie}) + \text{ICRF},$$

kde ICRF znamená International Celestial Reference Frame - mezinárodní nebeský referenční rámec. Systém je (přibližně, upřesnění je dáno konkrétní realizací) definován následovně: počátek souřadnicového rámce umístíme do barycentra sluneční soustavy, osu  $Z$  ztotožníme s konvenčním efemeridovým pólem CEP (celestial ephemeris pole) v epoše J2000.0 (CEP leží v blízkosti středního rotačního pólu - viz GA10, kapitola 5) a osa  $X$  směřuje do jarního bodu této epochy. Osa  $Y$  doplňuje systém na pravoúhlý pravotočivý - viz obr. 1.1. Referenční rámec je pak definován souřadnicemi nebeských objektů (primárně radiových zdrojů) v soustavě  $S_{r2}$  (rektascenze a deklinace).



Obrázek 1.1: Definice konvenčních systémů

Druhým systémem je **konvenční terestrický systém (CTRS)**, jehož praktickou realizací je **ITRS<sub>xx</sub> (International Terrestrial Reference System - mezinárodní terestrický referenční systém)**, xx je dvojčíslí roku, související s aktuální realizací (viz dále). Opět platí:

$$\text{ITRS}_{xx} = (\text{konstanty, algoritmy, technologie}) + \text{ITRF}_{xx},$$

kde ITRF znamená International Terrestrial Reference Frame - mezinárodní terestrický referenční rámec. Systém má počátek ve hmotném středu Země, osa  $z$  je ztotožněna s konvenčním mezinárodním počátkem CIO (Conventional International Origin - jde o střední polohu vektoru rotace Země v letech 1900-1905 - viz GA10, kap. 5), osa  $x$  leží v rovině greenwichského poledníku a osa  $y$  doplňuje systém na pravoúhlý pravotočivý - viz obr. 1.1. Referenční rámec je definován souborem stanic, fyzicky realizovaných na zemském povrchu stabilizacemi, s přiřazenými souřadnicemi a jejich časovými změnami. Primárními souřadnicemi jsou pravoúhlé prostorové souřadnice  $x, y, z$ , odvozenými souřadnicemi jsou elipsoidické souřadnice  $B$  - geodetická zeměpisná šířka,  $L$  - geodetická zeměpisná délka a  $H$  je elipsoidická výška. (Pro vzájemný jednoznačný převod mezi  $xyz$  a  $BLH$  existují známé vztahy - viz Vyšší geodezie). Exaktnější definice je uvedena ve spojitosti s konkrétní realizací v odstavci 1.3.1.

Z geodetického hlediska bude pro nás dále důležité definovat transformační vztahy mezi oběma systémy. K tomu využijeme poznatků z geodetické astronomie - viz GA10, kapitoly 4 a 5. Dříve, než se budeme věnovat této transformaci, je třeba se zmínit o jevu, který způsobuje časovou změnu souřadnic, vázaných k terestrickému systému TRS.

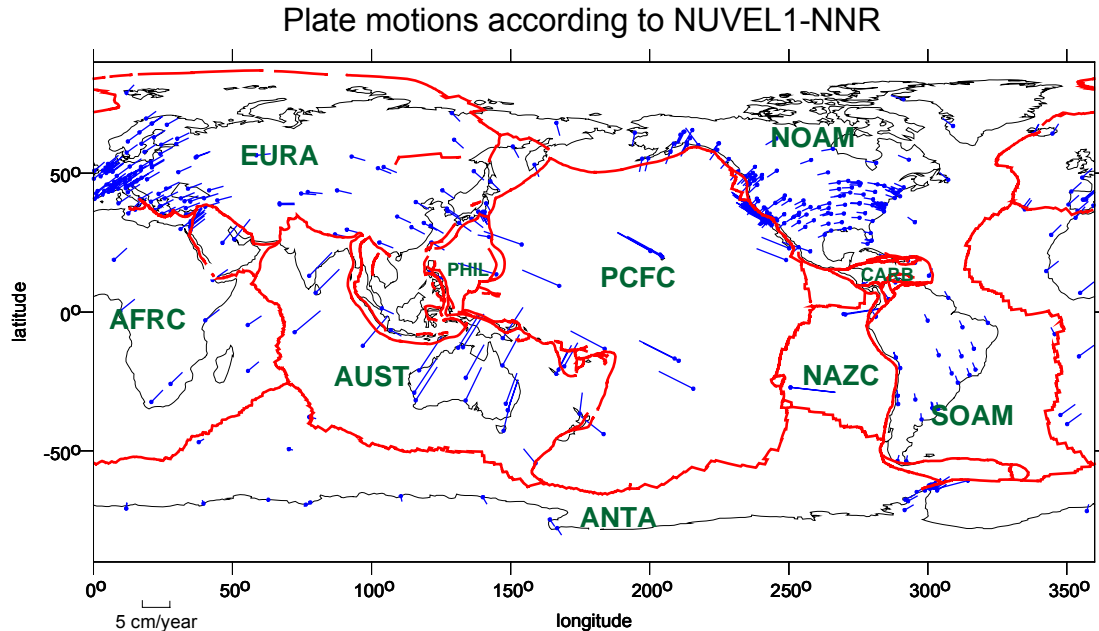
### 1.1.2 Pohyby kontinentů - tektonika desek

Vlivem tektonických sil a geologické stavby Země je možné rozdělit zemskou kůru na řadu bloků (11-14), které se vůči sobě vzájemně pohybují - viz obr 1.2. Rychlost tohoto pohybu je možné popsat matematicky pomocí rotačního vektoru  $\omega_k$ . Podle obrázku 1.3 lze tento vektor definovat na základě výrazu pro časovou změnu polohy stanice  $B$ , ležící na  $k$ -té tektonické desce:

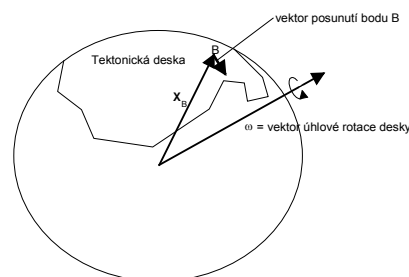
$$\mathbf{X}_B = \frac{d\mathbf{X}_B}{dt} = \omega_k \times \mathbf{X}_B = (v \cdot \mathbf{e}_\omega) \times \mathbf{X}_B ,$$

kde  $\mathbf{X}_B$  je vektor stanice,  $\mathbf{e}_\omega$  je jednotkový vektor - nositel příslušného rotačního vektoru  $\omega_k$  a  $v$  je velikost úhlové rychlosti. Velikosti rotačních vektorů jsou odvozeny na základě geofyzikálních pozorování a charakterizují **globální horizontální pohyb** tektonických ker. Horizontální z toho důvodu, že se doposud nepodařilo potvrdit hypotézu o rozpínání nebo naopak smršťování Země; vektor  $\omega$  je proto určován tak, aby byl globální vertikální pohyb nulový. Vzájemný pohyb tektonických desek ztěžuje definici souřadnicové soustavy „pevně vázané“ k zemskému tělesu. Prakticky by bylo možné zvolit jednu z desek jako referenční s nulovým pohybem a vázat počátek souřadnicové soustavy vůči této desce. Z hlediska teorie rotace reálné Země se však ukazuje daleko opodstatněnější **definovat souřadnicový systém tak, aby integrální střední hodnota pohybu tektonických desek byla nulová**, tedy jinými slovy, aby nedocházelo k rotaci sítě jako celku - podmínka „no net rotation - NNR“. Nejpoužívanějšími globálními geofyzikálními modely jsou AMO2 a v poslední době

NUVEL1-NNR. Tyto modely jsou v současné době ověřovány a korigovány pomocí geodetického měření. *Poznámka: Na jednotlivých tektonických deskách může samozřejmě docházet k dalším časovým změnám stanic - posunům bodů. Zjišťování jak globálních, tak i regionálních, případně lokálních posunů, je náplní oboru geodynamika.*



**Obrázek 1.2:** Rozložení tektonických desek, pohyb stanic, na kterých je pozorováno technologií kosmické geodézie podle geodynamického modelu NUVEL1-NNR



**Obrázek 1.3:** Definice vektoru rotace tektonických desek

### 1.1.3 Transformace mezi ICRF a ITRF

Nechť  $\mathbf{x}(t_{UTC})$  je vektor v terestrickém systému (ITRF), vázaný k epoše  $t$  vyjádřené v ve světovém koordinovaném čase UTC a  $\mathbf{X}$  je vektor v inerciálním systému (ICRF) vázaný podle definice k epoše J2000.0. Zanedbejme na okamžik pohyb pólu a změnu rychlosti rotace Země. Pracujme nyní v souřadnicové soustavě  $S_{r2}$ . Tuto soustavu ztotožníme s ICRF v epoše J2000.0. Osa  $Z$  tedy směřuje k CEP, který je z hlediska zavedení  $S_{r2}$  středním pólem  $\bar{P}_n$ . Zavedme nyní pomocný souřadnicový systém ICRF', který můžeme ztotožnit se soustavou  $S_{r2}$  pro epochu pozorování  $t$ . Osa  $z$  pak směřuje k pravému pólu  $P_n$ . Nyní lze psát

$$(1.1.1) \quad \mathbf{X}_{ICRF'} = \mathbf{N} \mathbf{P} \mathbf{X}_{ICRF},$$

kde  $\mathbf{P}$  je precesní transformační matice, která zavádí precesi pro časový interval

$$(1.1.2) \quad T = t_{UTC} + \Delta TDB - J2000.0,$$

měřený v barycentrickém dynamickém čase  $TDB$ , ( $\Delta TDB$  je tedy korekce z  $UTC$  na  $TDB$ ). Z GA víme, že

$$(1.1.3) \quad \mathbf{P} = \mathbf{Z}(-z) \mathbf{Y}(\vartheta) \mathbf{Z}(-\zeta),$$

kde  $\mathbf{Z}(\cdot)$ ,  $\mathbf{Y}(\cdot)$  jsou elementární transformační matice - viz GA10, kapitola 1 - a precesní úhly  $z$ ,  $\zeta$ ,  $\vartheta$  jsou vyjádřeny polynomickými řadami s argumentem  $T$ .  $\mathbf{N}$  je nutační transformační matice

$$(1.1.4) \quad \mathbf{N} = \mathbf{X}(-\varepsilon - \Delta\varepsilon) \mathbf{Z}(-\Delta\psi) \mathbf{X}(\varepsilon),$$

kde  $\mathbf{X}(\cdot)$  je elementární transformační matice,  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\varepsilon$  je nutace v ekliptikální délce a ve sklonu ekliptiky počítaná pro čas  $T$ ,  $\varepsilon$  je pak střední sklon ekliptiky.

Nyní potřebujeme přejít ze soustavy  $S_{r2}$ , která je spojena s inerciální soustavou do soustavy spojené se Zemí. Kandidátem je soustava  $S_{r1}$ , která se od  $S_{r2}$  liší pootočením o místní hvězdný čas, v našem případě půjde o světový (greenwichský) hvězdný čas, protože osa  $x$  terestrické soustavy TRS leží podle definice v rovině greenwichského poledníku. Zavedeme-li další pomocný systém ITRF', můžeme psát:

$$(1.1.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_{ITRF'} &= \mathbf{R}^S \mathbf{X}_{ICRF'}, \\ \mathbf{R}^S &= \mathbf{Z}(S[t_{UT1}]), \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{Z}(\cdot)$  je opět elementární rotační matice a  $S$  je světový (greenwichský) hvězdný čas počítaný k epoše pozorování, vyjádřený tentokrát v rotačním čase, tedy  $t_{UT1} = t_{UTC} + DUT1$ .  $DUT1 = UT1 - UTC$ , viz GA10, str. 75.

Pomocí transformace (1.1.5) jsme se již dostali do systému, který je „pevně“ spojen se Zemí, zatím vztaženému k okamžitému rotačnímu pólu (pro jeho polohu jsme s dostačující přesností schopni spočítat precesi a nutaci) a okamžité poloze rovníku. Pro přechod k pólu CIO a ke střednímu rovníku, s nímž podle definice ztotožňujeme ITRF, musíme ještě provést pootočení závislé na **souřadnicích pólu**. Tedy

$$(1.1.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_{ITRF} &= \mathbf{R}^M \mathbf{x}_{ITRF'}, \\ \mathbf{R}^M &= \mathbf{Y}(-x_p) \mathbf{X}(-y_p), \end{aligned}$$

jak plyne z výrazu (4.2.11) z GA10, str. 68. Úhrnem tedy dostáváme

$$(1.1.7) \quad \mathbf{x}_{ITRF} = \mathbf{R}^M \mathbf{R}^S \mathbf{N} \mathbf{P} \mathbf{X}_{ICRF}.$$

Pro obrácenou transformaci pak platí

$$(1.1.8) \quad \mathbf{X}_{ICRF} = \mathbf{P}'\mathbf{N}'\mathbf{R}'^S\mathbf{R}'^M\mathbf{X}_{ITRF},$$

kde

$$\mathbf{P}' = \mathbf{Z}(\zeta)\mathbf{Y}(-\vartheta)\mathbf{Z}(z), \quad \mathbf{N}' = \mathbf{X}(-\varepsilon)\mathbf{Z}(\Delta\psi)\mathbf{X}(\varepsilon + \Delta\varepsilon),$$

$$\mathbf{R}'^S = \mathbf{Z}(-S[t_{UT1}]), \quad \mathbf{R}'^M = \mathbf{X}(y_p)\mathbf{Y}(x_p),$$

*Poznámka: Z výrazů (1.1.1) až (1.1.7) je patrné, že platí*

$$\mathbf{x}_{ITRF} = f(\Delta\psi, \Delta\varepsilon, DUT1, x_p, y_p)\mathbf{x}_{ICRF},$$

*kde  $f$  je transformační funkce. Pokud tedy známe nějaké vektory v ICRF i v ITRF jsme naopak schopni určovat některé z pěti parametrů charakterizujících nutaci, rozdíl mezi UT1 a UTC, resp. pohyb pólu (parametry charakterizující precesi se neopravují, precese je známa s dostatečnou přesností). V dalších kapitolách uvidíme, že tomu tak skutečně je a že metody kosmické geodezie umožňují určovat právě tyto parametry.*

#### **1.1.4 Transformace mezi ICRF a ITRF od roku 2003**

Vzhledem k neustále se zvyšujícím požadavkům na přesnost geodetických pozorování a vzhledem k reálným možnostem observačních technik kosmické geodézie rozhodla v roce 2000 Mezinárodní astronomická unie (IAU) zpřesnit model transformace mezi nebeským systémem CRF a terestrickým systémem TRF. IAU vydala ve svých doporučeních následující konstatování a definice:

- Mezinárodní nebeský referenční systém (ICRS) a rámec (ICRF) – viz GA10, kap.7, str. 157 - jsou od 1.1.1998 definovány prostřednictvím přijatých poloh (katalogem) mimogalaktických objektů, vyzařujících v radiových vlnových délkách. V současnosti je jich celkem 212 definujících, 294 kandidátských a 102 dalších. Přestože jsou jejich vlastní pohyby zanedbatelné, mají tyto objekty různé tvary, které se často mění s časem. Proto je nutné tyto systémy a rámce pravidelně udržovat.
- Katalog Hipparcos – viz GA10, kap. 6, str. 151 – je primární realizací ICRS v optické oblasti. Přesto dochází k postupnému posuvu mezi tímto katalogem a ICRF. Některé hvězdy však vykonávají nelineární vlastní pohyb, který se těžko monitoruje. Proto se zřizuje nebeský referenční rámec Hipparcos (Hipparcos Celestial Reference System – HCRF), z jehož realizace jsou tyto hvězdy vyloučeny.
- Neustálé zvyšování přesnosti pozorování vede k tomu, že použití obecné teorie relativity nabývá na důležitosti. Díky tomu se rozšiřuje definice základní nebeské referenční soustavy – pro sluneční soustavu se zavádí Barycentrický nebeský referenční systém (BCRS) a pro Zemi Geocentrický nebeský referenční systém (GCRS). Vzájemný vztah obou systémů je realizován post-Newtonovskou transformací obecné teorie relativity.
- Je nově – přesněji – definován vztah mezi Barycentrickým souřadnicovým časem (TCB) a Geocentrickým souřadnicovým časem (TCG) – o těchto časech viz GA10, kap. 4, str. 81.
- Náhradou za dosud platný model nutace IERS 1996 (= IAU 1980) – viz GA10, kap. 5, str. 101 – se zavádějí nové modely IAU 2000A (model s plnou přesností cca 0.0002“) a

„kratší“ model IAU 2000B (méně členů, přesnost cca 0.001“). Modely zohledňují vnější síly od planet (ne pouze od Měsíce a Slunce), elasticnost Země, elektromagnetické působení na rozhraních vnějšího tekutého jádra s pláštěm a vnitřním pevným jádrem, roční atmosférické slapy, geodetickou nutaci (projev obecné teorie relativity) a vliv oceánských slapů. Model je konstruován tak, aby popisoval pohyb *Celestial Intermediate Pole* (CIP) (místo dřívějšího *Celestial Ephemeris Pole* CEP).

- **Definice *Celestial Intermediate Pole* (CIP).** I když k popisu vzájemné orientace mezi terestrickou (TRS) a nebeskou (CRS) soustavou postačují jen tři parametry (např. Eulerovy úhly) existuje zřejmá potřeba dvou dalších, popisujících pohyb konvencionálně zvolené mezilehlé osy. Tato osa musí být zvolena tak, aby byla blízká okamžité ose rotace a aby její pohyb v terestrické soustavě (zvaný *pohyb pólu*) a v nebeské soustavě (zvaný *precese a nutace*) byl oddělitelný. Tuto roli hrál doposud CEP, jehož definice byla založena na požadavku, aby nevykonával rychlý téměř jednodenní pohyb ani v jedné z obou referenčních soustav. Tato definice se však stala zastaralou a nerealizovatelnou vzhledem k malým vysokofrekvenčním (periody jeden den a kratší) pohybům okamžité osy rotace vůči oběma soustavám. Proto se zavádí ***Celestial Intermediate Pole* (CIP)** definovaný tak, že jeho periodický pohyb v nebeském systému (*nutace*) obsahuje pouze členy o periodách delších než dva dny, všechny ostatní pohyby se interpretují jako terestrický *pohyb pólu*.
- Transformace mezi CRS a TRS se nově obejde bez roviny ekliptiky (kterou nelze prakticky realizovat s dostatečnou přesností). Oficiální konvenční nebeský systém ICRS již tak není založen na ekliptice a ekvinokciu (= jarním bodu. V definici je psáno, že počátek odečtu rektascenzí leží v blízkosti jarního bodu).
- Místo jarního bodu jsou na okamžitém rovníku (odpovídajícímu CIP) definovány dva nové počátky. ***Celestial Ephemeris Origin* (CEO)** (nebeský efemeridový počátek) nahrazuje jarní bod (= polohu osy  $X$  nebeské soustavy) a ***Terrestrial Ephemeris Origin* (TEO)** (zemský efemeridový počátek) definuje průsečík konvenčního Greenwichského poledníku s rovníkem (= polohu osy  $x$  terestrické soustavy). CEO leží v blízkosti jarního bodu. Oba leží na rovníku odpovídajícímu CIP. *Poznámka:* V roce 2006 bylo IAU doporučeno používat místo CEO název **CIO** (***Celestial Intermediate Origin***) a místo TEO název **TIO** (***Terrestrial Intermediate Origin***), poněvadž tyto názvy lépe vystihují skutečnost, že jde o veličiny, pomocí nichž se uskutečňuje přechod od jedné soustavy ke druhé.
- Vzájemnou polohy CEO a TEO zprostředkovává *Earth Rotation Angle* (úhel rotace Země) neboli *Stelar Angle* (SA) (**hvězdný (stelární) úhel**), který nahrazuje dosavadní *greenwichský (světový) hvězdný čas*. Výhodou SA je, že je definován tak, na rozdíl od světového hvězdného času, aby byl pouze **lineární** funkcí času  $UT1$ .
- Transformace mezi terestrickým systémem ITRS a nebeským geocentrickým systémem GCRS (~ ICRF) je pak dána polohou CIP v GCRS, polohou CIP v ITRS a úhlem rotace Země (SA).

Na základě výše uvedených definic můžeme psát místo (1.1.8)

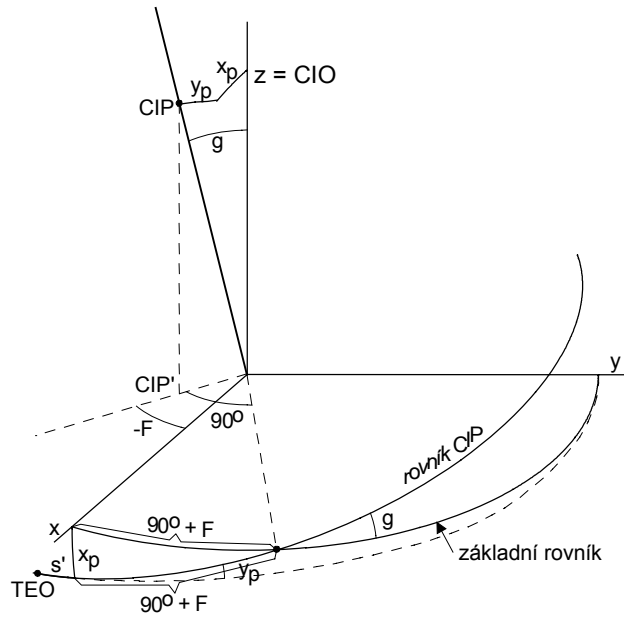
$$(1.1.9) \quad \mathbf{X}_{ICRF} = \mathbf{P}\mathbf{N}^s\mathbf{R}^s\mathbf{R}^M\mathbf{X}_{ITRF},$$

kde

$$(1.1.10) \quad \mathbf{R}^M = \mathbf{Z}(-s')\mathbf{X}(y_p)\mathbf{Y}(x_p)$$

a  $x_p$  a  $y_p$  jsou souřadnice pólu CIP vůči terestrické soustavě, význam úhlu  $s'$  je patrný z obrázku 1.4. Úhel  $s'$  nabývá za 100 let hodnot menších než  $0.0004''$ . Z obrázku 1.4 ještě máme

$$(1.1.11) \quad x_p = \sin g \cos F, \quad y_p = -\sin g \sin F, \quad s' = \int_{t_1}^t (\cos g - 1) F dt$$



obr. .1.1.4

**Obrázek 1.4:** Vztah mezi CIO a CIP

Dále platí

$$(1.1.12) \quad \mathbf{R}^{nS} = \mathbf{Z}(-SA[t_{UT1}]),$$

kde  $SA$  je hvězdný (stelární) úhel, (obr. 1.5) který je lineární funkcí času  $UT1$  a je definován výrazem

$$(1.1.13) \quad SA = 2\pi (0.7790572732640 + 1.00273781191135448 \cdot t_{UT1}),$$

$$t_{UT1} = JD(UT1) - 2451545.0.$$

Precese a nutace jsou v novém pojetí sloučeny (byla vyloučena ekliptika). Proto platí

$$(1.1.14) \quad \mathbf{PN}''(t) = \mathbf{Z}(-E) \mathbf{Y}(-d) \mathbf{Z}(E) \mathbf{Z}(s) = \mathbf{Z}(-[90^\circ + E]) \mathbf{X}(-d) \mathbf{Z}(90^\circ + E) \mathbf{Z}(s),$$

kde  $-$  podle obrázku 1.5 – jsou  $E$ ,  $d$  poziční úhly CIP v nebeské soustavě a  $s$  je malý úhel, dosahující v epoše J2000.0 hodnoty  $0''$  a v epoše J2100.0 hodnoty  $0.07''$ . Pro směrové kosiny  $(X, Y, Z)$  pólu CIP v nebeské soustavě pak z obrázku 1.5 platí





$$X = -0.016617'' + 2004.191743'' t - 0.4272190'' t^2 - \\ - 0.1986205'' t^3 - 0.0000460'' t^4 + 0.0000060'' t^5 + \textit{periodické členy}$$

(1.1.19)

$$Y = -0.006951'' - 0.025376'' t - 22.4072510'' t^2 + \\ + 0.00184235'' t^3 - 0.0011131'' t^4 + 0.0000099'' t^5 + \textit{periodické členy}$$

Prvních 6 členů v každém výrazu vyjadřuje vliv precese, periodické členy vyjadřují pak vliv nutace – srovnej s (5.2.29) v GA10. Argumentem periodických členů je zde kromě pěti základních argumentů  $F$  – viz GA10, kap. 5 – ještě dalších devět argumentů, zahrnujících vliv planet (Merkur, Venuše, Země, Mars, Jupiter, Saturn, Uran, Neptun) a generální precese v délce. Celkem se jedná o zhruba 1400 členů.

Obrácenou transformaci – z ICRS do ITRS – popíšeme pak standardně pomocí inverzních matic.

## **1.2 Praktická realizace konvenčního inerciálního referenčního systému - systém ICRS**

Jak již bylo řečeno výše, praktickou realizací konvenčního inerciálního systému je systém ICRS. Obecně je možné říci, že **ICRS - International Celestial Reference System** (Mezinárodní nebeský referenční systém) se skládá z

- algoritmů, konstant a observační technologie, doporučených k použití při jeho realizaci,
- referenčního rámce **ICRF** - International Celestial Reference Frame.

V roce 1991 vznesla Mezinárodní astronomická unie (IAU) požadavek, aby příští referenční systém byl budován na kinematickém základě, použitím souřadnic vzdálených mimogalaktických zdrojů (kvazarů a aktivních jader galaxií). Dřívější definice totiž upřednostňovala systém založený na dynamickém pohybu Země v prostoru, souřadnice byly tedy vztaženy k dynamicky definovanému rovníku a jarnímu bodu v nějaké referenční epoše (Besselově - B1950, nebo juliánské - J2000.0 = 1. ledna 2000 ve 12<sup>h</sup>). Z důvodu zachování kontinuity jsou dřívější konvenční směry v základní epoše J2000.0 zachovány i v novém systému a to takovým způsobem, že jsou s maximální možnou přesností ztotožněny se základními směry definovanými katalogem  $FK5$ , který je nejpřesněji definovaným souřadnicovým systémem, vázaným na nebeskou sféru pomocí metod klasické astrometrie - viz GA10, kap. 6.

### **1.2.1 Počátek souřadnicové soustavy**

Na základě doporučení IAU leží počátek pravoúhlé souřadnicové soustavy  $X, Y, Z$  souřadnicového systému ICRF v **barycentru sluneční soustavy**. Aby tato podmínka mohla být dodržena, je nutno všechna pozorování pojímat v relativistickém čtyřrozměrném časoprostoru a zavádět příslušné korekce. Osa  $X$  míří k jarnímu bodu (= průsečík rovníku a ekliptiky), osa  $Z$  ke střednímu pólu, rovina  $XY$  je rovinou rovníku v rovníkové souřadnicové soustavě.

### **1.2.2 Základní rovina**

Na základě doporučení Mezinárodní IAU leží základní rovina ICRS v **blízkosti středního rovníku v epoše J2000.0, definovaného IERS** (International Earth Rotation Service

- Mezinárodní služba rotace Země). Základní roviny a směry v epoše J2000.0 jsou doposud definovány přijatými hodnotami precesních konstant (r. 1976) a teorií nutace (r. 1980). Zpracování pozorování technologie VLBI však prokázalo, že hodnoty souřadnic objektů, určených pomocí precesní a nutační teorie se liší od hodnot, určených na základě pozorování. Tento rozdíl činí několik tisícín obloukové vteřiny (mas - miliarsecond). Na základě vypočtených korekcí platí, že poloha středního nebeského pólu (osa  $Z$  systému ICRS) je posunuta vůči téže ose v systému realizovaném IERS o  $17.0 \pm 0.1$  mas ve směru osy  $-X$  a o  $5.0 \pm 0.1$  mas ve směru osy  $-Y$ . Podle jiného zdroje jsou tyto hodnoty  $17.5 \pm 1.0$  a  $4.7 \pm 1.0$  mas. Porovnáním těchto výsledků je možno konstatovat, že při záměně středního nebeského pólu ICRS se středním pólem J2000.0 IERS se dopustíme chyby 20 mas. **Poznámka:** Záměnou rozumíme, že pracujeme s pólem ICRS a předpokládáme, že jde o pól IERS a naopak.

IAU dále požaduje, aby směr nového konvenčního středního nebeského pólu byl konsistentní s obdobným pólem katalogu  $FK5$ . Na základě nejistot v určení precesních konstant a jejich promítnutí do vlastních pohybů hvězd je možné konstatovat, že nejistota koincidence pólu  $FK5$  vůči pólu IERS je v rozmezí  $\pm 50$  mas.

### 1.2.3 Počátek odečtu rektascenzí

Rezoluce IAU požaduje, aby počátek odečtu rektascenzí (poloha osy  $X$ ) ležel v blízkosti dynamického středního jarního bodu epochy J2000.0.

Dynamický střední jarní bod koinciduje s přesností 10 mas s polohou středního jarního bodu IERS, jak bylo zjištěno srovnávacími studii. Osa  $X$  nebeského systému IERS je implicitně realizována přijetím rektascenzí 23 mimogalaktických zdrojů z katalogů určených třemi americkými institucemi nezávisle (GSFC - Goddard Space Flight Center, JPL - Jet Propulsion Laboratory a NGS - National Geodetic Survey). Tyto katalogy byly sestaveny fixováním hodnoty rektascenze zdroje 3C273B v katalogu  $FK5$  ( $\alpha = 12^{\text{h}} 29^{\text{m}} 06.6997^{\text{s}}$  v epoše J2000.0). Na základě různých výzkumů bylo zjištěno, že nejistota realizace polohy středního jarního bodu katalogu  $FK5$  je zhruba  $\pm 80$  mas vůči jarnímu bodu IERS. Na této úrovni nepřesnosti koinciduje i poloha středního jarního bodu ICRS s polohou téhož bodu v systému  $FK5$ .

### 1.2.4 Realizace ICRF

Realizace referenčního rámce ICRF, který je součástí ICRS, byla provedena výhradně použitím technologie **interferometrie s velmi dlouhými základnami (VLBI)**. Popis této metody je uveden v kapitole 3.8. Podstata spočívá v určování časového posunu  $\Delta t$  (a změny tohoto časového posunu v čase  $d\Delta t/dt$ ) příchodu stejné vlny radiového záření pocházejícího z mimogalaktických zdrojů na antény alespoň dvou přijímačů (radioteleskopů) na pozorovacích stanicích. Z měřených veličin  $\Delta t$  a  $d\Delta t/dt$  je pak možno určovat řadu parametrů, jak je uvedeno dále.

Realizací rámce byla pověřena skupina v Goddard Space Flight Center (GSFC) v USA. Tato skupina měla dobrý přístup k datovým souborům pořízenými dalšími institucemi provozujícími nákladné observace pomocí technologie VLBI a měla dobře propracovanou metodiku zpracování dat.

Zpracování pozorování VLBI je nutno z hlediska určovaných parametrů rozdělit do dvou skupin. Do první skupiny náležejí vnitřní parametry, které jsou určovány pro každou

observační seanci zvlášť a jsou závislé na lokálních podmínkách na jednotlivých stanicích, do druhé skupiny patří vnější parametry, nezávislé na místě pozorovatele a použitém přístroji, společné pro všechny pozorovací stanice.

Hledané neznámé byly určovány metodou nejmenších čtverců s možností eliminace vnitřních neznámých (obdoba Helmertovy eliminační metody). Pro každou observační seanci byly určovány následující parametry:

- souřadnice referenčního objektu příslušejícího k dané seanci (jde o opravu počátku, VLBI, na rozdíl od teodolitu, měří úhly a nikoliv směry!),
- dva nutační parametry (oprava stávajícího modelu nutace),
- souřadnice stanic jednotlivých přístrojů (antén),
- variace rotačního času  $UT1$  vůči apriorně zadané hodnotě,
- troposférické parametry, jedna skupina pro jednu hodinu pozorování,
- gradient troposférických parametrů, lineární v čase,
- parametry kvadratického polynomu přibližně aproximujícího chování staničních hodin,
- parametry změn chodu hodin v intervalu jedné hodiny,
- další nutné parametry jako jsou skoky v chodu hodin, vzájemný rozdíl údajů hodin na jednotlivých základnách (offset).

Mezi vnější parametry, společnými pro více seancí, náležely:

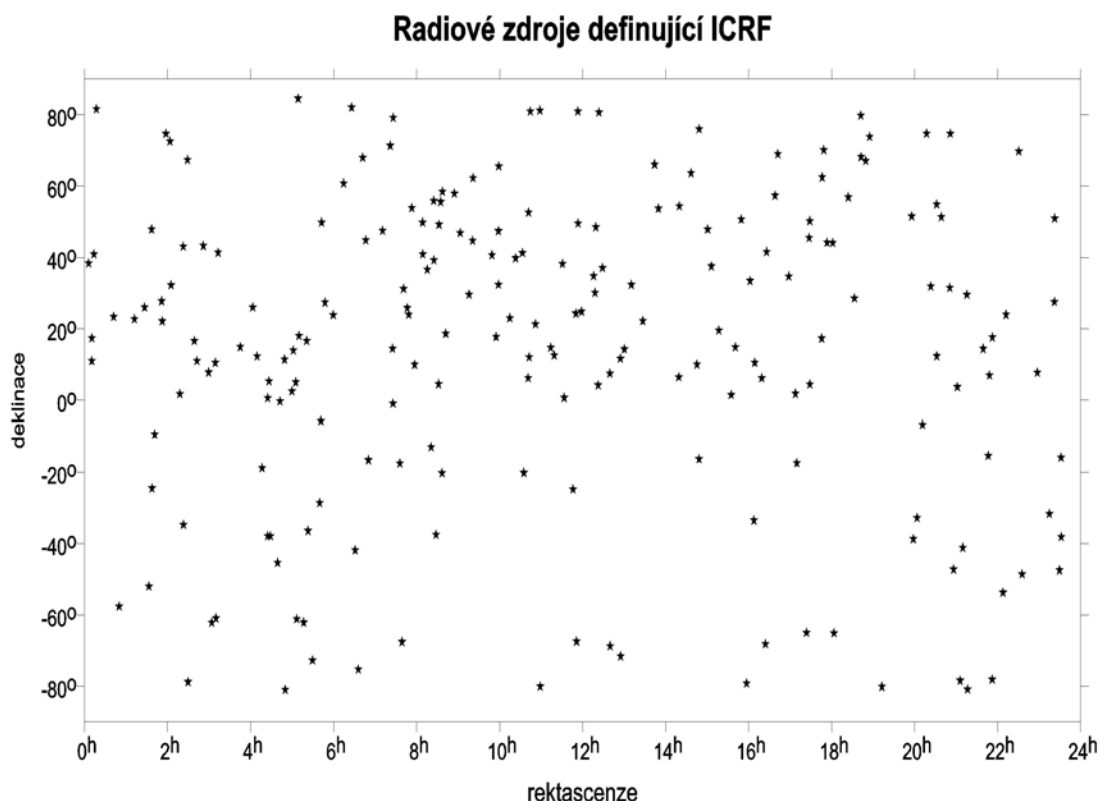
- relativní souřadnice radiových zdrojů,
- centrační parametry VLBI antén,
- 252 parametrů, charakterizujících variaci v rotaci Země (rozdíl  $UT1$  vůči  $UTC$ ) způsobenou denními a polodenními oceánskými slapy (přílivy a odlivy).

Do závěrečného vyrovnání vstupovalo 1.6 milionu párů měření časového posunu  $\Delta t$  a jeho změny  $d\Delta t/dt$  určených vždy mezi dvěma stanicemi, v časovém intervalu od srpna 1979 do července 1995. Odhadováno bylo 1305 globálních parametrů, cca 650000 vnitřních parametrů, jednotková střední chyba činila 32.6 ps pro časový posun a 0.1 ps/s pro změnu  $d\Delta t/dt$ .

Jednou z mála nevýhod definice souřadnicového systému pomocí mimogalaktických radiových zdrojů je ta skutečnost, že některé zdroje mění svoji strukturu. Tuto strukturu je možno ve většině případů detekovat též pomocí VLBI, změna polohy "radiového centra" však znehodnocuje využití takového zdroje pro realizaci souřadnicového systému. Z tohoto a dalších důvodů byla aplikována následující vylučovací kritéria:

- formální střední chyba v poloze v rámci jedné seance byla větší než 1 mas,
- zdroj byl observován méně než dvacetkrát,
- zdroj byl observován po dobu kratší než dva roky,
- velký rozptyl v poloze, větší než 3 násobek jednotkové střední chyby,
- nepravidelná, měnící se struktura zdroje,
- velký vlastní pohyb zdroje,
- zdroj je výchozím bodem seance (má funkci počátku).

Těmito přísnými kritérii prošlo **212 radiových zdrojů, které tak definují rámec ICRF**, 294 zdrojů bylo vyloučeno alespoň podle jednoho kritéria, 102 dalších zdrojů mění značně svou strukturu. Rozložení radiových zdrojů na obloze je znázorněno na obrázku 1.6



**Obrázek 1.6:** Ukázka rozložení radiových zdrojů na obloze (zobrazeny radiové zdroje definující systém)

Vzhledem k tomu, že metoda zpracování popsaná výše poskytuje pouze relativní pozice radiových zdrojů, bylo nutno přistoupit k poslednímu kroku realizace ICRS, a to provedení rotace celého systému do rámce ICRS, realizovaného IERS. Pro transformaci bylo použito poslední dostupné realizace ICRS v IERS, souboru označeného RSC(IERS) 95 C 02. Transformační parametry byly vypočteny pomocí 133 identických zdrojů, které obsahovaly oba soubory. Zbytkové chyby po transformaci nepřevyšují hodnotu 0.01 mas.

Výsledné souřadnice mimogalaktických zdrojů ICRS jsou publikovány v katalogu ICRS - ukázku viz GA10, kap. 7. Katalog obsahuje polohy zdrojů v souřadnicové soustavě  $S_{r2}$  (rektascenze a deklinace v epoše J2000.0) a jejich chyby, korelace mezi rektascenzí a deklinací, statistické údaje, identifikační čísla a další astrofyzikální údaje. Dále je v katalogu označeno, zda jde o zdroj, který též září ve viditelném světle a bylo ho tedy možné použít k navázání optického katalogu pořízeného družicí Hipparcos na systém ICRS. Střední polohové chyby v rektascenzi dosahují hodnoty 0.0004" a v deklinaci 0.0005", jde tedy o nejpřesnější současný souřadnicový systém.

### **1.3 Praktická realizace konvenčního terestrického rámce CTRS - terestrický geocentrický souřadnicový systém ITRSxx**

Pro řešení praktických úloh navigace, geodezie, geodynamiky, geofyziky a dalších odvětví je nutné pracovat se souřadnicovými systémy, které jsou nějakým způsobem "pevně" spojeny se zemským tělesem. Je tedy nutné definovat terestrický geocentrický systém, který by umožňoval řešení různých typů úloh (i při nejvyšších nárocích na přesnost) v globálním, celozemském rozměru.

#### **1.3.1 Konvenční souřadnicový terestrický systém - přesnější definice**

Podle doporučení Mezinárodní geodetické asociace (IAG) na základě rezoluce č. 2 ze zasedání ve Vídni v roce 1991 je **konvenční terestrický referenční systém** (CTRS - Conventional Terrestrial Reference System) definován následujícím způsobem:

1) CTRS je lokální souřadnicový systém v relativistickém smyslu a je platný pro Zemi a její okolí na hladině relativní přesnosti  $10^{-10}$ .

2) CTRS je kvazikartézský rotující systém, definovaný z geocentrického nerotujícího systému prostorovou rotací. (Geocentrický nerotující systém je definován doporučeními Mezinárodní astronomické unie (IAU)).

3) Souřadnicový čas je geocentrický souřadnicový čas (TCG) - viz GA10, str. 81. Metrický tenzor definující čtyřrozměrný časoprostor má složky:

$$(1.3.1) \quad g_{00} = 1 - 2\frac{V}{c^2} + (4), \quad g_{ij} = \left(1 + 2\frac{V}{c^2}\right)\delta_{ij} + (4), \quad g_{03} = (4)$$

kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta,  $i, j = 0, 1, 2, 3$ ,  $c$  je rychlost světla a  $V$  je gravitační potenciál Země včetně atmosféry. Údaj  $n$  v závorce označuje členy  $n$ -tého řádu.

4) Čas, příslušející souřadnicovým změnám, je identický s TCG. To znamená, že všechny běžně používané časy (TT - terestrický čas, TAI - mezinárodní atomový čas, UTC - mezinárodní koordinovaný čas, TDT - terestrický dynamický čas) se odvozují transformací - viz GA10, kap. 4.

5) Počátek systému je geocentrum, tj. těžiště všech hmot planety Země včetně oceánů a atmosféry.

6) Systém nemá žádné globální reziduální rotace vzhledem k zemské kůře.

7) Přiřadíme-li systému kartézský referenční rámec, osa  $z$  směřuje do "IERS reference pole" - referenčního pólu, který je identický s mezinárodním konvencionálním počátkem CIO (Conventional International Origin - je definován jako střední poloha rotačního pólu v letech 1900 - 1905), tak jak byl realizován v roce 1987. Osy  $xz$  tvoří počáteční poledník, který je

identický s realizací téhož poledníku Mezinárodní časovou službou (BIH - Bureau International de l'Heure) v roce 1984.0.

CTRS je realizován:

- systémem algoritmů a konstant spjatých s geometrickými a fyzikálními vlastnostmi souřadnicového systému, neúplný výčet je v Tabulce 1.1, úplný viz např. v publikacích IERS,
- terestrickým referenčním rámcem TRF.

**Tabulka 1.1:** Vybrané konstanty, definující CTRS - (IERS standardy)

Označení	Hodnota	Význam
$c$	$299792458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$	rychlost světla
$W_0$	$62636856.85 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$	potenciál geoidu
$a_E$	$6378136.49 \text{ m}$	rovníkový poloměr Země <sup>*)</sup>
$J_2 (= -C_{2,0} \sqrt{5})$	$1082.6359 \cdot 10^{-6}$	"dynamické" zploštění Země
$GM$	$3.986004418 \cdot 10^{14} \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-2}$	geocentrická gravitační konstanta
$\omega$	$7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$	střední úhlová rychlost rotace Země
$R_0=GM/W_0$	$6363672.461 \text{ m}$	délkový rozměrový koeficient

<sup>\*)</sup> rovníkový poloměr Země nemusí být nutně shodný s prakticky používaným elipsoidem, pro realizaci CTRS prostřednictvím ITRS je naopak doporučeno užívat elipsoid GRS80 s parametry:  $a_E = 6378137.0 \text{ m}$ ,  $e^2 = 0.00669438003$ .

**TRF** (terestrický referenční rámec) je tvořen konečným počtem bodů na zemském povrchu, které mají přiřazené souřadnice  $\mathbf{X}(t)$ , tyto souřadnice jsou funkcemi času. Na reálné Zemi jsou  $\mathbf{X}(t)$  ovlivněny tektonickými pohyby, pohybem souvisejícím s odledněním (např. Skandinávie), slapy zemského tělesa, nepřímým vlivem oceánských slapů, polárními slapy (deformace způsobená změnou polohy vektoru rotace vůči zemskému tělesu), vlivem zatížení atmosférou, vlivem změny hladiny podzemních vod, lokálními nestabilitami, seismickými a vulkanickými efekty a variací geocentra. Pro souřadnice v epoše  $t$  je tedy možné psát:

$$(1.3.2) \quad \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \frac{d\mathbf{X}_0}{dt}(t - t_0) + \sum_x \Delta\mathbf{X}_x(t)$$

kde  $\Delta\mathbf{X}_x$  jsou korekce souřadnic o výše uvedené efekty. Abychom dosáhli relativní přesnosti  $10^{-10}$  podle doporučení uvedeného výše, je třeba znát korekce s přesností 1 mm. Rychlost  $d\mathbf{X}_0/dt$  může být vyjádřena:

$$(1.3.3) \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V}_{plate} + \mathbf{V}_{ice} + \mathbf{V}_r,$$

kde  $\mathbf{V}_{plate}$  je horizontální rychlost pohybů tektonických desek (viz odstavec 1.1.2),  $\mathbf{V}_{ice}$  je vertikální rychlost působená pohyby po odlednění a  $\mathbf{V}_r$  je residuální rychlost.  $\mathbf{X}_0$  a  $\mathbf{V}_r$  jsou produktem analýzy a určování při zpracování měření.

Praktická realizace závisí na konkrétních použitých observačních technikách a metodologii ve zpracovatelských centrech. Zde je nutné si uvědomit, že TRS může být - díky svému globálnímu charakteru - realizován výhradně technologiemi kosmické geodézie. V současnosti jde o technologie:

a) Interferometrie s velmi dlouhými základnami (Very Long Baseline Interferometry - **VLBI**) - metoda, která je popsána v odstavci 3.8, slouží primárně k realizaci ICRS (střední kvadratická chyba určení vzdálenosti dvou stanic systému ITRS je 2 - 3 cm),

b) Laserová lokace družic (Satellite Laser Ranging - **SLR**) - jde o měření vzdáleností pozemní stanice - družice pomocí pulsního laseru (střední kvadratická chyba určení dráhy družice i souřadnic stanic je 2 - 3 cm). Pro účely definice ITRF se používají pozorování na tzv. geodynamické družice - viz odstavec 4.2. Jsou to pasivní, malé (průměr 30 až 60 cm) a velmi hmotné kulové objekty (až 450 kg), nesoucí na svém povrchu koutové odražeče (nutné pro laserová pozorování). Pro tyto družice lze tedy velmi dobře eliminovat neregulační poruchy. Řešením orbitální úlohy se určují opravy počátečních podmínek dráhy družic v ICRF, souřadnice stanic v ITRF, variace v rychlosti rotace Země a souřadnice pólu  $x_p, y_p$  - viz GA10, kap. 5 a odstavec 1.4.

c) Technologie Globálního polohového systému (Global Positioning System - **GPS**), viz odstavec 4.5.3 - jde o stálá pozorování družic družicového systému NAVSTAR pomocí aparatur umístěných na stanicích zapojených v mezinárodní službě GNSS (IGS) nebo v regionálních stálých pozorovacích sítích. Pro určování souřadnic drah družic v ICRF a souřadnic stanic v ITRF se využívá kódových a fázových měření (střední kvadr. chyba určení dráhy činí 5 cm, relativních souřadnic 1 - 2 cm), jde tedy v podstatě o fázový dálkoměr, pracující v pásmu velmi krátkých radiových vln. Řešením orbitální úlohy se určují opravy počátečních podmínek drah družic, souřadnice pozorovacích stanic, krátkoperiodické variace v rychlosti rotace Země a souřadnice pólu  $x_p, y_p$ .

d) Technologie **DORIS** - jde o dopplerovské měření změn radiální vzdálenosti mezi pozemní stanicí a družicí (přesnost určení změny vzdálenosti je charakterizována střední kvadratickou chybou 0.4 mm/s). Na základě měření je možné určovat polohu družice v ICRF a stanice v ITRF. Družice musí být vybavena speciálním přijímacím zařízením, pozorování se děje pomocí speciálních pozemních vysílačů. Výhodou systému je, že veškerá měřená data jsou přenášena do zpracovatelského centra přes družici (která je pozorována), odpadají tedy problémy s přenosem dat na velké vzdálenosti. Proto je možné vysílací aparatury rozmístit na méně přístupných místech, odlehlých od civilizace a docílit rovnoměrného pokrytí celé Země vysílacími aparaturami. Řešením orbitální úlohy se určují opravy počátečních podmínek dráhy příslušné družice a souřadnice pozorovacích stanic.

Technologie laserového měření vzdálenosti mezi Zemí a Měsícem (Lunar Laser Ranging - **LLR**), která je principiálně shodná s technologií SLR nebyla pro realizaci ICRS ani ITRS-96 použita.

Přitom se musí dbát na následující zásady:

1) Geocentrické pozice jsou schopny určit pouze "dynamické" techniky SLR, LLR a s jistými výhradami i GPS a DORIS. VLBI musí být na geocentrum připojena výbranými souřadnicemi (alespoň) jedné stanice.

2) Rozměr (měřítko) je určen přes přijatý relativistický model, viz rovnici (1.3.1).

3) Orientace je definována orientačními parametry v referenční epoše, tedy technologie SLR, GPS a DORIS musí v tomto případě při zpracování obsahovat dodatečnou podmínku pro počátek zeměpisných délek.

4) Časová změna orientace je vázána podmínkou "no-net-rotation" (žádná globální rotace celé sítě) pro horizontální posuny přes celou Zemi.

Pro zajištění homogenity, kompatibility a komparability jsou publikovány standardy. Praktická realizace systému na úrovni dnešní cm přesnosti započala s nástupem výše zmíněných kosmických technik (doplňených ještě v minulém období dopplerovským systémem TRANSIT). Výrazný nástup těchto technik umožnil v roce 1983 uspořádat celosvětovou intenzivní observační kampaň MERIT/COTES za účelem zhodnocení klasických a moderních metod určování orientačních parametrů Země (poloha pólu, rychlost rotace) a definice souřadnicového systému. (V kampani bylo pozorováno kromě moderních metod i klasickými astronomickými metodami). Na základě této kampaně byl definován **BTS** (BIH terrestrial system). Tento souřadnicový systém je vytvořen na základě společného zpracování t.zv. **SSC** (Set of Stations Coordinates, souborů souřadnic stanic), tak jak je publikovala jednotlivá zpracovatelská centra. Počátek systému byl definován technikami SLR a LLR, měřítko bylo vzato z pozorování SLR. Definitivní orientace byla definována rotací individuálních řešení o úhly určené porovnáním individuálních řešení parametrů rotace Země s parametry určenými BIH.

BTS pak obsahuje:

- SSC - soubor souřadnic stanic,
- množinu parametrů 7 prvkové transformace pro každé individuální řešení,
- sadu parametrů, určujících orientaci Země (souřadnice pólu a rozdíl UT1 - UTC) v intervalu 0.05 roku.

Celkem byly realizovány **BTS84, 85, 86, 87**, od BTS 86 se užíval pro tektonické pohyby desek geofyzikální model AM0-2.

Od roku 1988 je realizací geocentrického systému pověřena nově vytvořená **IERS** (International Earth Rotation Service - Mezinárodní služba rotace Země, se sídlem v Paříži). Tato služba se zabývá realizací **ITRS** (International Terrestrial Reference System) na základě společného zpracování výsledků určení souřadnic stanic a parametrů orientace Země různými technikami, publikovaných různými zpracovatelskými centry.

**ITRS** tak obsahuje:

- **soubor konstant a algoritmů** - identických s výše zmíněným CTRS, publikovaných v IERS Technical Note.
- **soubor souřadnic stanic a jejich časových změn** - **ITRF** (International Terrestrial Reference Frame - Mezinárodní terestrický referenční rámec), rovněž publikovaný v IERS Technical Note. Časové změny jsou buď určovány, nebo převzaty z geofyzikálního modelu NNR-NUVEL-1A.



ITRF tak vzniká redukcí individuálních SSC ke společné epoše s použitím modelů pohybu tektonických desek a sedmiprvkovou transformací individuálních řešení do společného systému tak, aby byly zaručeny výše uvedené podmínky pro jeho definici. Nejdůležitější roli zde hrají "kolokační" stanice, na kterých je observováno s více než jednou observační technikou. Důležitou roli zde též hraje určování vah jednotlivých řešení. V Tabulce 1.2 je uvedena geneze souřadnicových rámců ITRF, od jejich počátků až do r. 2006. Zkratka SLR(SSC(CSR)) značí soubor souřadnic, určených na základě laserových pozorování geodynamických družic v analytickém centru Centre of Space Research v Texas University, Austin, Texas, NNR znamená "no-net-rotation" (nulová rotace celé sítě). Co se týče změn souřadnic, působených hlavně globálními tektonickými pohyby, byl v prvních modelech (až do ITRF91) uvažován ve většině případů geofyzikální model (AMO-2 nebo NNR-NUVEL1). ITRF94 však již obsahuje řadu stanic s rychlostmi, určenými na základě pozorování, ITRF96 a ITRF97 pak přidává další. Roční časové změny souřadnic činí pro euroazijskou desku cca 2.5 cm, tato skutečnost je nepříjemná, pokud chceme pro praktickou potřebu definovat geocentrický systém, jehož souřadnice by byly alespoň po jistou dobu neměnné. Z tohoto důvodu byl zaveden systém **ETRS89**.

**Tabulka 1.2:** Geneze vzniku ITRFxx

Název	k definici počátku použito	k definici měřítka použito	k orientaci použito
ITRF0	BTS87	BTS87	BTS87
ITRF88	ITRF0	ITRF0	ITRF0
ITRF89	SLR(SSC(CSR))	SLR(SSC(CSR))	NNR vůči ITRF88
ITRF90	SLR(SSC(CSR))	SLR(SSC(CSR))	NNR vůči ITRF89
ITRF91	SLR(SSC(CSR))	SLR(SSC(CSR))	NNR vůči ITRF90
ITRF92	SLR(SSC(CSR))	SLR(SSC(CSR))	NNR vůči ITRF91
ITRF93	výjimka, později kritizovaná		
ITRF94	SLR + GPS	SLR + GPS + VLBI	NNR vůči ITRF92
ITRF96	SLR + GPS	SLR + GPS + VLBI	NNR vůči ITRF94
ITRF97	SLR + GPS	SLR + GPS + VLBI	NNR vůči ITRF96
ITRF2000	SLR	VLBI + SLR	NNR vůči NNR- NUVEL1A
ITRF2005	SLR	VLBI	NNR vůči ITRF2000

Vzhledem k tomu, že primárním typem souřadnic jsou kartézské geocentrické souřadnice, může být referenčnímu rámci přiřazen jakýkoliv geocentrický elipsoid, zpravidla je mu však přiřazován elipsoid, definovaný v systému GRS80.

V Tabulce 1.3 jsou uvedeny transformační parametry do systému ITRS89 ze systémů následných. Transformační parametry je nutné přiřadit transformačnímu schématu, převzatému z IERS. Pro transformaci ze systému  $(x,y,z)$  do systému  $(x_s,y_s,z_s)$  platí

$$(1.3.4) \quad \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & -R3 & R2 \\ R3 & D & -R1 \\ -R2 & R1 & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

kde  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  popisují translace,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  rotace a  $D$  je měřítkový koeficient. Vzhledem k odlišnému způsobu tvorby ITRF93 a ITRF2000 je nutné při převodu do tohoto systému zavádět časové změny ("/r" v Tabulce 1.3 znamená "za rok", "mas" (miliarcsecond) jsou tisíce obloukové vteřiny, "ppb" znamená par per bilion  $\sim 1/10^9$ ).

**Tabulka 1.3 Transformace z ITRF<sub>xx</sub> do ITRF89**

Souřadnicový rámec	T1 cm	T2 cm	T3 cm	D ppb	R1 mas	R2 mas	R3 mas	Epocha rok
ITRF90	0.5	2.4	-3.8	0.34	0.0	0.0	0.0	1988.0
ITRF91	0.6	2.0	-5.4	0.37	0.0	0.0	0.0	1988.0
ITRF92	1.7	3.4	-6.0	0.51	0.0	0.0	0.0	1988.0
ITRF93	1.9 +0.29/r	4.1 -0.04/r	-5.3 -0.08/r	0.39	0.39 +0.11/r	-0.80 +0.19/r	0.96 -0.05/r	1988.0
ITRF94	2.3	3.6	-6.8	0.43	0.0	0.0	0.0	1988.0
ITRF96	2.3	3.6	-6.8	0.43	0.0	0.0	0.0	1988.0
ITRF97	2.3	3.6	-6.8	0.43	0.0	0.0	0.0	1988.0
ITRF2000	2.97 +0.0/r	4.21 -0.06/r	-8.65 -0.14/r	0.585	0.0 -0.001/r	0.0 +0.004/r	0.0 +0.019/r	1997.0

### 1.3.2 Příklad realizace CTRS - referenční rámce ITRF 2000 a ITRF 2005

Jako příklad realizace konvenčního referenčního systému uvedeme postup realizací souřadnicových rámců ITRF2000 a ITRF2005 – viz [ALTAMIMI ET AL., 2002, ALTAMIMI, 2006].

#### **ITRF 2000**

Tento souřadnicový rámec začal být užíván v lednu 2002 pro zpracování pozorování metod kosmické geodézie. Systém je realizován výhradně metodami kosmické geodézie: VLBI, SLR, LLR, GPS a DORIS, dále byly do výsledků zařazeny i některá kombinovaná řešení s dalšími metodami (např. PRARE). Základním principem tvorby je transformace jednotlivých řešení do společného rámce, při poměrně komplikovaném stanovení vah jednotlivých řešení a stanovení dodatečných podmínek „constraints“ (z důvodů numerické stability výsledku).

Souřadnicový rámec vznikl kombinací řešení, uvedených v Tabulce 1.4.

**Tabulka 1.4:** ITRF2000: submitted TRF solutions

Technique	AC	Data Span	Station	Constraints	
Analysis Center(AC)	SSC		Number		
<u>VLBI</u>					
Geodetic Institute of Bonn University	(GIUB) 00 R 01	84-99	51	Loose	*
Goddard Space Flight Center	(GSFC) 00 R 01	79-99	130	Loose	*
Shanghai Astronomical Observatory	(SHA) 00 R 01	79-99	127	Loose	*
<u>LLR</u>					

Kapitola 1 - Souřadnicové systémy v kosmické geodezii

Forschungseinrichtung Satellitengeodaesie	(FSG) 00 M 01	77-00	3	Loose	*
University of Texas, McDonald Observatory	(UTXMO)00 M 01	70-00	5	Tight	
<u>SLR</u>					
Australian Surveying and Land Information Group	(AUS) 00 L 01	92-00	55	Loose	*
Centro Geodesia Spaziale, Matera	(CGS) 00 L 01	84-99	94	Loose	*
Central Laboratory for Geodesy, Sofia	(CLG) 00 L 01	84-00	68	Tight	
Communications Research Laboratory	(CRL) 00 L 02	90-00	60	Loose	*
Center for Space Research	(CSR) 00 L 01	76-00	139	Loose	
Center for Space Research	(CSR) 00 L 04	76-00	139	Loose	*
Delft Ins. Earth Oriented Space Research	(DEOS) 00 L 01	83-99	91	Loose	*
Deutsches Geodaetisches Forschungsinstitut	(DGFI) 00 L 01	90-00	43	Removable	*
Goddard Space Flight Center	(GSFC) 00 L 01	86-00	36	Unclear	
Joint Center for Earth System Technology, GSFC	(JCET) 00 L 05	93-00	48	Loose	*
<u>GPS</u>					
Center for Orbit Determination in Europe	(CODE) 00 P 03	93-00	160	Minimum	*
GeoForschungsZentrum Potsdam	(GFZ) 00 P 01	93-00	98	Minimum	*
International GPS Service					
by Natural Resources Canada	(IGS) 00 P 46	96-00	179	Minimum	*
Jet Propulsion Laboratory	(JPL) 00 P 01	91-99	112	Minimum	*
Univ of Newcastle upon Tyne	(NCL) 00 P 01	95-99	90	Minimum	*
NOAA, National Geodetic Survey	(NOAA) 00 P 01	94-00	165	Removable	*
<u>DORIS</u>					
Australian Surveying and Land Information Group	(AUS) 00 D 01	98-99 (231 D)	55	Loose	
Groupe de Recherche de Geodesie Spatiale	(GRGS) 00 D 01	93-00	66	Loose	*
Institut Géographique National	(IGN) 00 D 09	92-00	80	Minimum	*
<u>Multi-technique (SLR + DORIS + PRARE)</u>					
GRIM5 project (GRGS+GFZ)	(GRIM) 00 C 01	85-99	183	Loose	*
CSR: SLR + DORIS on TOPEX	(CSR) 00 C 01	-	147	Loose	*
<u>GPS Densification</u>					
South America Network					
by Deutsches Geodaetisches Forschungsinstitut	(DGFI) 00 P 01	96-00	31	Loose	*
IAG Subcommission for Europe (EUREF),					
by Bundesamt fuer Kartographie und Geodaesie	(EUR) 00 P 03	96-00	81	Minimum	*
European Vertical Reference Network					
by CODE	(EUVN) 00 P 01	(1 W in 97)	217	Removable	
Geophysical Institute, University of Alaska	(GIA) 00 P 01	96-99	20	Minimum	
Institut Géographique National	(IGN) 00 P 01	98-00	28	Minimum	*
Jet Propulsion Laboratory	(JPL) 00 P 02	91-99	28	Minimum	*
Antartica network,					
by Institut Géographique National	(IGN) 00 P 02	95-00	17	Minimum	*
NIMA GPS Monitor Network	(NIMA) 00 P 01	95-99	11	Unclear	
CORS Network by NOAA	(CORS) 00 P 01	94-99	80	Removable	*
REGAL Network, France	(REGAL) 00 P 03	96-00	29	Minimum	*
Antartica SCAR network,					
by Institut fuer Planetare Geodaesie, TU Dresden	(SCAR) 00 P 02	95-99	66	Removable	*
Turkey GPS Network	(TURK) 00 P 01	(2 W in 97)	10	Removable	

---



---

\* Solution included in the analysis

---



---

Z Tabulky 1.4 je patrné, že kromě již dříve vyjmenovaných technik kosmické geodézie bylo do řešení zařazeno řešení, využívající kombinaci SLR+DORIS+PRARE – jde o množinu souřadnic stanic, vzniklou na základě tvorby modelu tíhového pole GRIM5 (spolupráce GeoForschungsZentrum Potsdam, Německo a Groupe Recherche Geodesie Spaciale, Toulouse, Francie) a dále kombinované řešení, využívající sledování družice TOPEX/Poseidon pomocí technologie SLR+DORIS, prováděná CSR Texas. V položce „GPS Densification“ jsou dále uvedena řešení regionálních GPS kampaní, prováděná různými institucemi. Některá z těchto řešení budou zařazena dodatečně, nepodílejí se tedy na primárním řešení. Tabulka zobrazuje přehled dat, která byla k dispozici pro řešení. Na základě jejich chybové analýzy byla pak do výsledného řešení zařazena data, označená hvězdičkou.

Analýza dat probíhala podle následujícího modelu:

Předpokládejme, že pro každé individuální řešení  $s$  a každou stanicí  $i$  známe její souřadnice  $\mathbf{X}_s^i$  v epoše  $t_s^i$  a rychlosti  $\dot{\mathbf{X}}_s^i$  vyjádřené v  $k$ -tém řešení Kombinací jednotlivých SSC určíme:

- vektor souřadnic jednotlivých stanic  $\mathbf{X}_{ITRF}^i$  v dané epoše  $t_0$  a vektor  $\dot{\mathbf{X}}_{ITRF}^i$  rychlostí v ITRS
- transformační parametry  $\mathbf{T}_k$ ,  $\mathbf{R}_k$ ,  $D_k$  v epoše  $t_k$  a jejich časové změny  $\dot{\mathbf{T}}_k, \dot{\mathbf{R}}_k, \dot{D}_k$  vyjadřující vztah ITRF vůči jednotlivým individuálním řešením  $k$ .

Obecný fyzikální model je pak vyjádřen výrazem

$$(1.3.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_s^i &= \mathbf{X}_{ITRF}^i + (t_s^i - t_0) \dot{\mathbf{X}}_{ITRF}^i + \mathbf{T}_k + D_k \mathbf{X}_{ITRF}^i + \mathbf{R}_k \dot{\mathbf{X}}_{ITRF}^i + \\ &+ (t_s^i - t_0) [\dot{\mathbf{T}}_k + D_k \dot{\mathbf{X}}_{ITRF}^i + \dot{\mathbf{R}}_k \dot{\mathbf{X}}_{ITRF}^i] , \\ \dot{\mathbf{X}}_s^i &= \dot{\mathbf{X}}_{ITRF}^i + \dot{\mathbf{T}}_k + D_k \dot{\mathbf{X}}_{ITRF}^i + \dot{\mathbf{R}}_k \dot{\mathbf{X}}_{ITRF}^i \end{aligned}$$

kde pro každý individuální rámeček  $k$  je  $D_k$  rozměrový koeficient a pro  $\mathbf{T}$  a  $\mathbf{R}$  platí

$$(1.3.6) \quad \mathbf{T}_k = \begin{vmatrix} T1_k \\ T2_k \\ T3_k \end{vmatrix}, \mathbf{R}_k = \begin{vmatrix} 0 & -R3_k & R2_k \\ R3_k & 0 & -R1_k \\ -R2_k & R1_k & 0 \end{vmatrix}$$

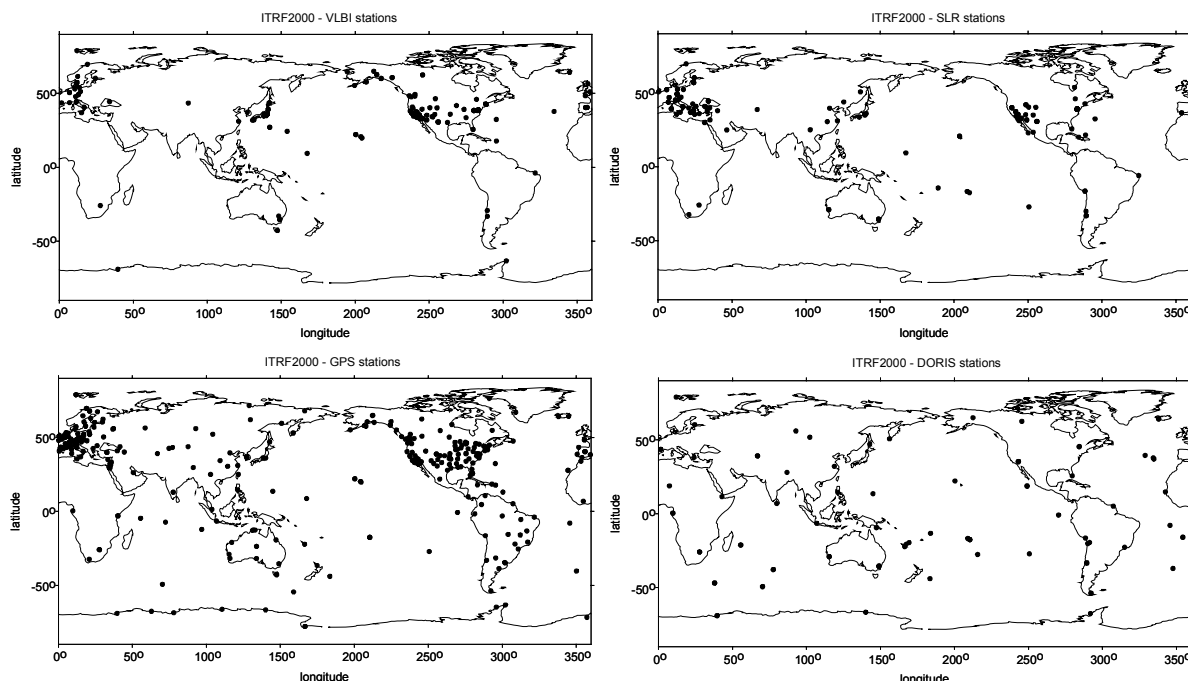
a podobně pro výrazy s tečkou, značící časové změny parametrů. Neznámé parametry se pak určují aplikací MNC, váhování jednotlivých datových souborů vychází ze známé variančně-kovarianční matice.

Referenční rámeček ITRF2000 je definován následujícím způsobem (zkratky jsou dekodovány v Tabulce 3.7.4):

- měřítko a jeho změna – váhovaný průměr řešení VLBI (GIUB, GSFC, SHA) a SLR (CGS, CRL, CSR, DGFI, JCET)
- počátek souřadnicové soustavy – váhovaný průměr řešení SLR (CGS, CRL, CSR, DGFI, JCET)
- orientace – rotace jednotlivých desek přebrány z řešení ITRF97 v epoše 1997.0, změny rotací z podmínky „no net rotation“ vzhledem ke geofyzikálnímu modelu NNR-NUVEL1A. K určení změn rotace bylo vybráno pouze 50 stanic, které vyhovovaly následujícím podmínkám: 1) pozorování na těchto stanicích bylo prováděno po dobu nejméně 3 let, 2) leží na stabilní části jednotlivých desek, 3) vnitřní střední chyba určení rychlostí změn souřadnic  $< 3$  mm/rok, 4) výsledky určení rychlostí z jednotlivých analytických center se liší méně než 3 mm/rok.

Rozložení stanic referenčního rámce ITRF2000 je patrné z obrázku 1.7.

### ITRF2000



Obrázek 1.7 – Rozložení stanic referenčního rámce ITRF 2000

Reálná přesnost geocentrických souřadnic charakterizovaná střední kvadratickou chybou je odhadována na 2 až 3 cm v každé souřadnici.

### ITRF 2005

Tento souřadnicový rámec, příslušející systému ITRS 2005 byl zaveden do používání v listopadu 2006. Až do tvorby souřadnicového systému ITRS 2000 včetně byly souřadnice stanic určovány z jednotlivých pozorovacích technik nezávisle na parametrech orientace Země. Přitom ale všechny používané kosmické techniky nějakým způsobem zprostředkovávají vztah mezi nebeským systémem (ICRS) a terestrickým systémem (ITRS), takže parametry orientace Země (EOP) nelze obejít. Tento principiální nedostatek je odstraněn v ITRS 2005. Data pro tvorbu tohoto systému poskytly služby, které obhospodařují

jednotlivé pozorovací techniky v rámci Mezinárodní služby rotace Země a souřadnicových systémů IERS (více viz kap. 8). Jsou to:

- IVS – International VLBI Service – mezinárodní služba pro využití technologie dlouhozákladnové interferometrie VLBI
- ILRS – International Laser Ranging Service – mezinárodní služba pro využití technologie laserového měření vzdáleností ke družicím SLR
- IGS – International GNSS Service – mezinárodní služba pro využití technologie globálních navigačních družicových systémů GNSS
- IDS – International DORIS Service – mezinárodní služba pro využití technologie měření změn vzdáleností stanice-družice, založeném na využití Dopplerova jevu DORIS

Tyto služby zpracovávají data z různých datových a analytických center pro příslušnou technologii. Pro potřeby tvorby ITRS 2005 poskytly data ve formě normálních rovnic, resp. kovariančních matic.

### Vstupní data:

Vstupními daty jsou normální rovnice nebo kovarianční matice (což jsou inverzní matice vzhledem k normálním rovnicím) obsahující parametry pro provedení:

- týdenního řešení (nazvěme je zkratkou TRF – terrestrial reference frame) pro souřadnice stanic  $X(t)$
- denního řešení pro EOP (parametry orientace Země) – souřadnice pólu  $x_p, y_p, \Delta UT1$  (rozdíl rotačního času  $UT1$  a atomového času UTC), resp. délku dne ( $LOD$  – lengths of day).

Typ dat a jejich časový rozsah je patrný z Tabulky 1.5.

**Tabulka 1.5:** Data pro ITRF 2005

Datové centrum	časový rozsah dat	Typ dat
IVS	1980.0 - 2006.0	Normální rovnice, denní řešení
ILRS	1992.9 - 2005.9	Kovarianční matice, týdenní řešení
IGS	1996.0 - 2006.0	Kovarianční matice, týdenní řešení
IDS-IGN-JPL	1993.0 - 2006.0	Kovarianční matice, týdenní řešení
IDS-LCA	1993.0 - 2005.8	Kovarianční matice, týdenní řešení

### Definice souřadnicové soustavy referenčního rámce ITRF 2005

- Počátek je definován tak, aby posun mezi počátkem TRF a jeho časovou změnou, určenými z dat IRLS SLR byl v epoše 2000.0 nulový.
- Měřítko je definováno tak, že měřítko ITRF 2005 a jeho časová změna jsou v epoše 2000.0 identické s měřítkem určeným z IVS VLBI.
- Orientace rámce je definována tak, že rotace ITRF 2005 a její časová změna vůči ITRF 2000 je v epoše 2000.0 nulová.

### Metodika zpracování dat:

Analýza dat probíhala podle následujícího modelu:

Předpokládáme, že pro každé individuální řešení  $s$  a každou stanicí  $i$  určujeme její souřadnice  $\mathbf{X}_s^i$  v epoše  $t_s^i$  a rychlosti  $\dot{\mathbf{X}}_s^i$  vyjádřené v  $k$ -tém řešení. Dále máme k dispozici normální rovnice (nebo kovarianční matice) pro

- souřadnice pólu  $x_s^p, y_s^p$  a jejich změny v čase  $\dot{x}_s^p, \dot{y}_s^p$
- $\Delta UT1_s$ , případně pozorovanou délku dne  $LOD_s$ .

Kombinací jednotlivých TRF určujeme:

- vektor souřadnic jednotlivých stanic  $\mathbf{X}_{ITRF}^i$  v dané epoše  $t_0$  a vektor rychlostí  $\dot{\mathbf{X}}_{ITRF}^i$  v ITRS
- transformační parametry  $\mathbf{T}_k, \mathbf{R}_k, D_k$  v epoše  $t_k$  a jejich časové změny  $\dot{\mathbf{T}}_k, \dot{\mathbf{R}}_k, \dot{D}_k$  vyjadřující vztah ITRF vůči jednotlivým individuálním řešením  $k$
- souřadnice pólu  $x^p, y^p$ , korekci času  $\Delta UT1$  (resp.  $LOD$  – délku dne) a jejich časové změny

Obecný fyzikální model je pak vyjádřen výrazem

$$(1.3.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_s^i &= \mathbf{X}_{ITRF}^i + (t_s^i - t_0) \dot{\mathbf{X}}_{ITRF}^i + \mathbf{T}_k + D_k \mathbf{X}_{ITRF}^i + \mathbf{R}_k \mathbf{X}_{ITRF}^i + \\ &+ (t_s^i - t_0) [\dot{\mathbf{T}}_k + \dot{D}_k \mathbf{X}_{ITRF}^i + \dot{\mathbf{R}}_k \mathbf{X}_{ITRF}^i], \\ \dot{\mathbf{X}}_s^i &= \dot{\mathbf{X}}_{ITRF}^i + \dot{\mathbf{T}}_k + \dot{D}_k \mathbf{X}_{ITRF}^i + \dot{\mathbf{R}}_k \mathbf{X}_{ITRF}^i, \end{aligned}$$

kde pro každý individuální rámec  $k$  je  $D_k$  rozměrový koeficient a pro  $\mathbf{T}$  a  $\mathbf{R}$  platí

$$(1.3.8) \quad \mathbf{T}_k = \begin{vmatrix} T1_k \\ T2_k \\ T3_k \end{vmatrix}, \mathbf{R}_k = \begin{vmatrix} 0 & -R3_k & R2_k \\ R3_k & 0 & -R1_k \\ -R2_k & R1_k & 0 \end{vmatrix}$$

a podobně pro výrazy s tečkou, značící časové změny parametrů. Dále, na rozdíl od ITRF 2000, jsou přidány další rovnice, související s určováním EOP:

$$(1.3.9) \quad \begin{aligned} x_s^p &= x^p + R2_k, \\ y_s^p &= y^p + R1_k, \\ \Delta UT1_s &= \Delta UT1 - \frac{1}{f} R3_k, \\ \dot{x}_s^p &= \dot{x}^p + \dot{R}2_k, \\ \dot{y}_s^p &= \dot{y}^p + \dot{R}1_k, \\ LOD_s &= LOD - \frac{\Lambda_0}{f} R3_k, \end{aligned}$$

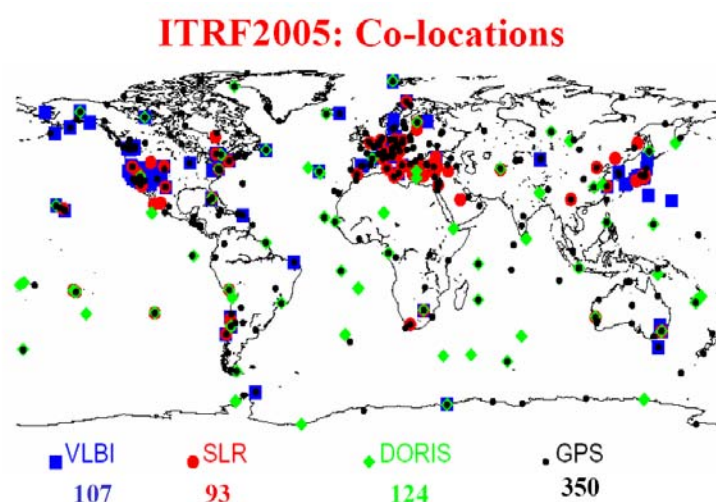
kde  $f$ ,  $\Lambda_0$  zohledňují vztah mezi rotačními úhly a časovými veličinami, charakterizujícími rotaci.

Neznámé parametry se pak určují aplikací MNČ. Jelikož jde z podstaty problému o singulární matici, provádí se regularizace pomocí výrazu

$$(1.3.10) \quad (A^T A)^{-1} A^T (X_{RS} - X_C) = 0,$$

což je podmínka vyjadřující minimální změnu čtverců přírůstků souřadnic vybraných referenčních stanic, kde  $X_{RS}$  je předem vybraná množina referenčních stanic a  $A$  je matice plánu řešené soustavy.

Pro provedení kombinací různých pozorovacích technik jsou použitelné pouze tzv. kolokační stanice, tj. stanice, na kterých se pozoruje alespoň dvěma pozorovacími technikami. Rozložení stanic je patrné z obrázku 1.8.



**Obrázek 1.8:** Rozložení pozorovacích stanic referenčního rámce ITRF 2005

Výstupem řešení je tzv. Long Term Solution (LTS) obsahující:

- souřadnice stanic  $X(t_0)$  ve výchozí epoše  $t_0$
- časové změny souřadnic stanic
- denní řešení pro EOP
- časové řady transformačních parametrů mezi výsledným řešením LTS a týdenním řešením

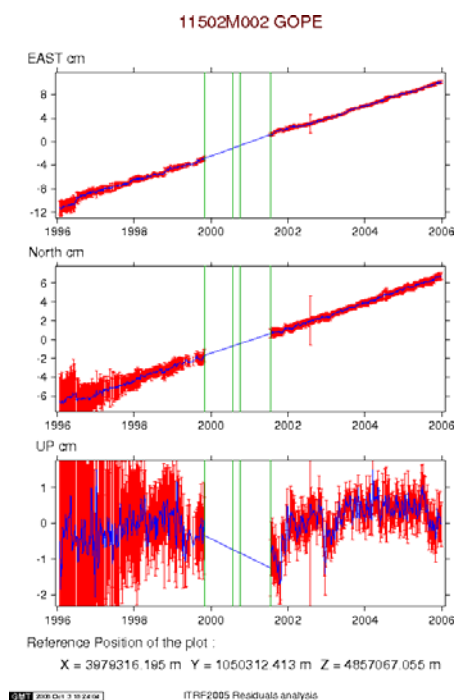
Ukázka výsledné časové řady souřadnic stanice je na obrázku 1.7. Jde o stanici GOPE – Geodetickou observatoř Pecný v Ondřejově u Prahy, zatím jedinou českou stanicí, která má souřadnice a rychlosti určené v ITRF 2005 přímo tvůrci systému. Z vývoje souřadnic je patrný severovýchodní roční trend posunu evropských stanic, který je v relativně dobré shodě s globálním trendem z geofyzikálního modelu, znázorněném na obrázku 1.2.

Transformační parametry z referenčního rámce ITRF 2005 do rámce ITRF 2000 jsou uvedeny v Tabulce 1.6. Z tabulky je patrné, že rozdíly mezi systémy jsou v současné době na úrovni jednotek milimetrů.



**Tabulka 1.6:** Transformační parametry z ITRF 2005 do ITRF 2000

T1 mm mm/rok	T2 mm mm/rok	T3 mm mm/rok	měřítko ppb ppb/rok
$0.1 \pm 0.3$	$-0.8 \pm 0.3$	$-5.8 \pm 0.3$	$0.40 \pm 0.05$
$-0.2 \pm 0.3$	$0.1 \pm 0.3$	$-1.8 \pm 0.3$	$0.08 \pm 0.05$



**Obrázek 1.9:** Časový vývoj souřadnic stanice GOPE v ITRF 2005

#### **1.4 Souřadnicový systém ETRS89 - realizace v Evropě**

Na základě návrhu podkomise EUREF (European Reference Frame) – viz [EUREF, 2006], která je podkomisí X. komise "Kontinentální síť" Mezinárodní geodetické asociace (International Association of Geodesy, IAG), je doporučeno používat jako uživatelský geocentrický souřadnicový systém ETRS89 (European Terrestrial Reference System), jehož souřadnicový rámec byl odvozen z rámce ITRF Mezinárodní službou rotace Země a souřadnicových systémů (IERS). Výhodou tohoto souřadnicového rámce je, že je, na rozdíl od ITRF, spojen s euroazijskou kontinentální deskou; díky tomu jsou roční časové změny souřadnic nejméně o řád menší (mm), než je tomu v případě ITRF (cm).

Stejně jako celosvětový ITRS je i kontinentální ETRS tvořen referenčním rámcem (ETRF - European Terrestrial Reference Frame - Evropský terestrický referenční rámec) a příslušnými konstantami a algoritmy.

V roce 1987 podkomise EUREF rozhodla definovat European Terrestrial Reference System 89 (ETRS89) s využitím výsledků mezinárodní kampaně EUREF89, jejímž cílem bylo definovat na základě ITRS evropský geocentrický systém. V této pozorovací kampani bylo využito kromě techniky laserové lokace družic (SLR) a interferometrie s velmi dlouhými základnami (VLBI) hlavně metod GPS.

Vzhledem k tomu, že od poloviny roku 1993 byly k dispozici výsledky kampaně EUREF-CS/H-91 (první GPS kampaň na území ČR, organizovaná a sponzorovaná ústavem aplikované geodézie ve Frankfurtu n/M, známější pod starším názvem EUREF-EAST-91), získané na základě předběžného zpracování dat v IfAG Frankfurt n/M - v systému EUREF89, bylo rozhodnuto zpracovávat výsledky všech GPS kampaní (určených pro přesné geodetické a geodynamické účely) v České republice v systému odvozenému z EUREF89 a tím je právě ETRS89.

Systém ETRS89 je definován:

- a) ETRF89, který je realizován evropskými stanicemi referenčního rámce ITRF89 technik SLR a VLBI, vztahenými k epoše 1989.0,
- b) ETRF90, který je tvořen souřadnicemi evropských stanic ITRF90 vztahenými k epoše 1989.0 a vztahnými vektory (centračními veličinami) mezi GPS stanicemi a stanicemi technik SLR a VLBI na bodech, zařazených do kampaně EUREF89, neobsahuje tedy body, na kterých bylo použito pouze techniky GPS,
- c) EUREF89, který zahrnuje IERS stanice v Evropě a všechny stanice GPS kampaně EUREF89. Souřadnicový systém je realizován tím způsobem, že všechny body pozorovací sítě IERS jsou brány jako body definiční (s fixovanými souřadnicemi).

Připomeňme ještě, že (až na výjimky) družice systému GPS NAVSTAR, nejsou určeny pro pozorování technikou laserové lokace družic (SLR). Aby bylo možné připojit relativně určené vektory, které produkuje technika GPS, k souřadnicovému systému tvořenému stanicemi užívajícími technologie SLR nebo VLBI, je třeba na těchto stanicích provádět pozorování aparaturami GPS simultánně s pozorováními na určovaných stanicích a provést geodetické připojení (centrace, zpravidla klasickým způsobem) všech použitých technik v rámci jedné tzv. kolokační "stanice".

Data z kampaně předzpracovalo 12 zpracovatelských center, výsledné řešení bylo provedeno smíšenou pracovní skupinou odborníků z University v Bernu, Institute Géographique National (St. Mandé, Francie), Bavorské komise pro mezinárodní měření Země (Mnichov, Německo) a Institutu aplikované geodézie (IfAG), Frankfurt a/M, (Německo).

Přesnost (charakterizovaná střední kvadratickou chybou) výsledků pro body, obser-  
vované technikami SLR a VLBI je v rozsahu 13 - 23 mm v každé souřadnici, pro body  
zaměřené pouze technikou GPS je přesnost (v roce 1996) v horizontálním směru 10 - 20 mm (v  
jednotlivé složce souřadnic) a 15 - 30 mm ve svislé složce.

Terestrický referenční systém, realizovaný stanicemi kampaně EUREF89 je průběžně  
doplňován dalšími body.

V následujícím přehledu - Tabulka 1.7 - jsou uvedeny některé návazné kampaně, probíhající v dalších letech, kterými byl systém dále rozšířen:

**Tabulka 1.7:** Kampaně EUREF (do r. 1999)

No	Name	Time interval	No of stations	Country
0	ITRF		42	
1	GPS EUREF 89	May 89	93	Europe
2	Mobile VLBI 89	June-Sept. 89	6	Europe
3	EUREF NW 90	July-Aug. 90	39	North West
4	<b>EUREF CS/H 91</b>	<b>Oct.-Nov. 91</b>	<b>22</b>	<b>Czechoslovakia, Hungary</b>
5	Mobile VLBI 92	May-Aug. 92	8	Europe
6	EUREF POL 92	July 92	30	Poland
7	EUREF BAL 92	Aug.-Sept.92	24	Baltic
8	EUREF BUL 92	October 92	14	Bulgaria
9	EUREF GB 92	October 92	31	G. Britain
10	EUREF CYP 93	January 93	11	Cyprus
11	EUREF D93	May 93	27	Germany, Netherlands
12	EUREF F93 (RRF93)	March-April 93	23	France
13	EUREF LUX BD94	March 94	19	Luxemburg, Belgium, Germany
14	EUREF SLO/CRO 94	May-June 94	22	Croatia, Slovenia
15	EUREF DK 94	Aug.-Sept. 94	12	Denmark
16	EUREF Ukraina 94	Jun 94	14	Ukraina
17	EUREF ROM 94	Sept. 94	17	Romania
18	EUREF NOR 94/95	Sep-Oct 94, Aug-Oct 95	87 70	Norway
19	EUREF A 94/95	Oct 94/95	17	Austria
20	EUREF EIR/GB 95	April 95	24	Ireland, GB
21	EUREF Iberia 95	May 95	43	Spain, Portugal
22	EUREF Iceland 95	July 95	191	Iceland
23	EUREF FYROM 96	Aug 96	10	Macedonia
24	EUREF Malta 96	Oct-Nov 96	13	Malta
25	EUREF Balear 98	April 98	6	Baleares
26	EUREF Alb., BH, Yug.	Sept. 98	29	Albania, Bosnia-Herz., Yugoslavia
27	EUREF Moldova	May 99	5	Moldova

Ve všech těchto kampaních bylo pozorováno technikou GPS nejen na určených bodech, ale zároveň na řadě bodů kolokačních (stanice s více než jednou kosmickou technikou), případně na bodech zaměřených v předchozích kampaních. Od roku 2000 probíhají další kampaně, neuvedené v této tabulce, které se však zpravidla týkají zpřesnění systému na území příslušných států.

Systém ETRF89 je dále zpřesňován novými observacemi, hlavně na základě permanentních pozorování technologie GNSS v rámci EUREF – EPN (Evropská síť permanentních stanic) – viz [EUREF-EPN, 2006]. Vzhledem k jeho úzké návaznosti na systém ITRS existují exaktní transformační vztahy mezi ETRF a ITRF – viz [Boucher, Altamimi, 1995]. Díky nim existují ETRF90 až ETRF 2005 (podobně jako ITRF), které jsou pouze zpřesněnou realizací ETRF89.

### **1.4.1 Realizace ETRS89 v České republice**

Při výsledné realizaci referenčního rámce ETRF89 systému ETRS89 na území ČR byla využita posloupnost observačních kampaní, provedených technologií GPS. Výchozí kampaní byla kampaň EUREF-CS/H-91 (viz předchozí přehled), kdy bylo na území bývalého Československa (viz obr. 1.10) zaměřeno 6 bodů - Pecný, Přední příčka, Klet' v ČR a Velká Rača, Kvetoslavov a Šaňkovský grůň na Slovensku. Tato síť šesti bodů byla dále zhuštěna na síť 18 bodů tzv. nultého řádu a zaměřena v kampani CS-NULRAD-92. Síť NULRAD byla na území České republiky dále zhuštěna na síť DOPNUL, která obsahuje 176 bodů, rovnoměrně rozložených na území státu. Tato síť byla zaměřena v devíti observačních kampaních v letech 1993 až 1994. Mimoto byla v roce 1993 realizována kampaň CS-BRD-93, určená k propojení sítě NULRAD s německou sítí DREF.

Vzhledem k tomu, že od roku 1991, kdy bylo provedeno na území ČR první systematické GPS měření připojené na celoevropský systém, byla na bodech sítě nultého řádu provedena řada kvalitních měření, jevílo se velmi účelným využít tato měření k novému vyrovnání sítě nultého řádu na území ČR. Kromě samozřejmého využití pozorování v kampani DOPNUL jde zejména o výsledky kampaně CS-BRD-93, kdy bylo na území ČR observováno na bodech Smrk, Velká Deštná, Skapce, GOPE (bod GPS služby na Geodetické observatoři Pecný v Ondřejově), Medvědí skála, Klet'.

Protože data z následných kampaní (CS-NULRAD-92, CS-BRD-93, DOPNUL) provedená na bodech sítě nultého řádu jsou kvalitnější, než z kampaně EUREF-CS/H-91 (v následných kampaních bylo observováno delší dobu, pro zpracování bylo vesměs využito přesných efemerid (CODE, IGS)), bylo použito při zpracování následujícího postupu:

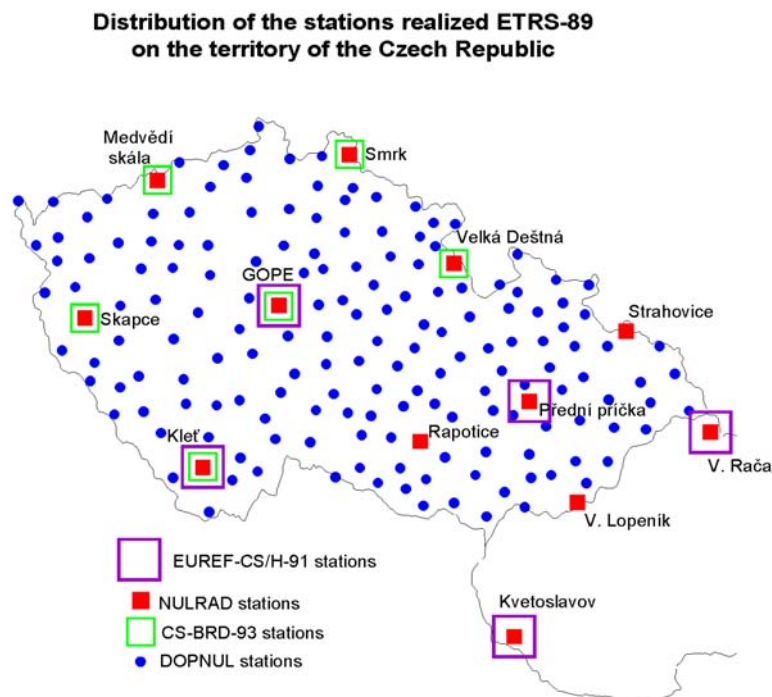
a) Kampaň CS-NULRAD-92 byla znovu zpracována softwarem BERNESE (verze 3.5) – viz [BERNESE 3.5, 1993], přičemž definitivně určené souřadnice 6 bodů kampaně EUREF-CS/H-91 v systému ETRS89, byly při řešení fixovány.

b) Pro další zpracování bylo použito výpočetního programu VUGNET – viz [Kostelecký, Karský, 1994], pro vyrovnání prostorových GPS sítí. V první fázi byly znovu určeny souřadnice bodů identických s českými body kampaně NULRAD. Pro určení výsledných souřadnic bylo použito výsledků zpracování kampaně CS-BRD-93 a DOPNUL. Zpracování bylo provedeno po jednotlivých seancích. Z výše zmíněných důvodů byly souřadnice určené v rámci zpracování kampaně CS-NULRAD-92 voleny jako opěrné.

Vstupní data pro vyrovnání tvořily výsledky zpracování jednotlivých seancí softwarem BERNESE, konkrétně výsledné geocentrické souřadnice bodů sítě NULRAD, na kterých bylo v té které seanci měřeno (souřadnice ostatních bodů nebyly v této fázi výpočtu použity) v epoše měření.

Pro váhování jednotlivých seancí bylo proto použito průměrných hodnot, které vyšly z vyrovnání programem BERNESE. Na základě provedených experimentů je výsledné řešení vůči volbě vah "robustní" (na rozdíl od volby počtu určovaných parametrů, kde je citlivost značná).

Program VUGNET umožňuje provést vyrovnání prostorové sítě, kdy je kromě hledaných výsledných souřadnic možné, teoreticky pro každou seanci, určovat "dodatečné parametry": změnu měřítka, prostorové rotace a posuny.



**Obrázek 1.10:** Kampaně GPS na území České republiky, pomocí nichž je definován ETRF89

Celkem bylo provedeno sedm variant vyrovnání, při různé volbě dodatečných parametrů (změn měřítka, rotací, posunů). Nejstabilnější řešení (s nejmenšími formálními chybami výsledných souřadnic) poskytovala varianta, při které byly určovány pouze posuny, vždy stejné pro skupinu seancí. Souřadnice byly převedeny na stejnou epochu 1989.0 pomocí teoretických hodnot rychlostí posunů vůči ITRF, určených na základě geofyzikálního modelu NNR-NUVEL1.

c) Výsledné souřadnice určených bodů, které nejsou identické s body kampaně NULRAD, byly určeny sedmiprvkovou podobnostní transformací pomocí programu PROTRA4. Identickými body jsou body určené vyrovnáním pomocí programu VUGNET v předchozím kole (viz bod b)). Průměrné zbytkové odchylky po podobnostní transformaci jsou kolem 3 mm v každé souřadnici, maximální zbytková odchylka v polohové souřadnici je 10 mm, ve výšce 29 mm. Střední hodnota změny měřítka je 0.02 ppm, maximální změna 0.1 ppm.

Hodnocení výsledné přesnosti bylo ztíženo tou skutečností, že formální střední chyby výsledných souřadnic, produkované programem BERNESE, jsou silně nadhodnocené. Na základě rozptylu výsledků na bodech, kde se provádělo vícedenní opakované měření (a které byly zpracovány programem VUGNET) vychází střední chyba výsledných souřadnic bodu, zaměřeného v jedné seanci (a to jsou všechny určené body, vyjma bodů NULRAD) v rozmezí

$$\begin{aligned} 0.008 < m(X) < 0.028 \text{ [m]}, \\ 0.002 < m(Y) < 0.008 \text{ [m]}, \\ 0.008 < m(Z) < 0.028 \text{ [m]}. \end{aligned}$$

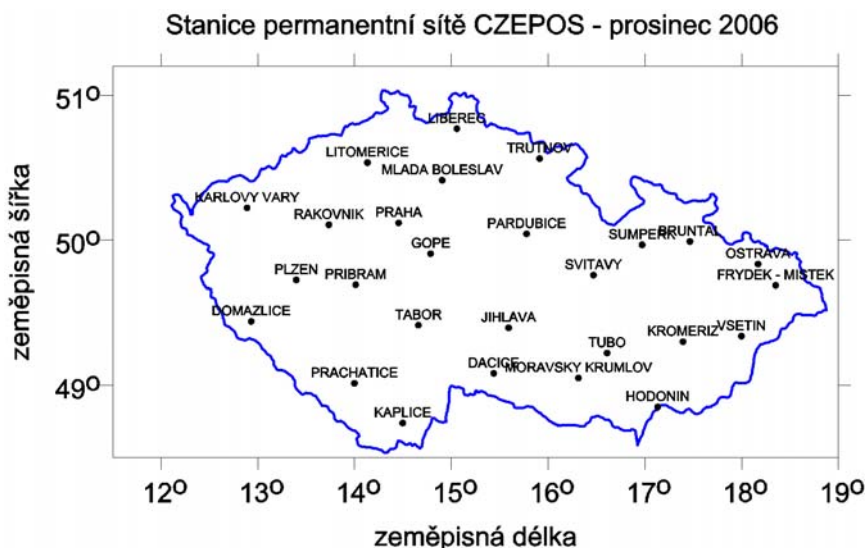
I v tomto případě však jde o "formální" chybu z vyrovnání, realita bývá ze zkušenosti poněkud horší. Odhadovaná přesnost, charakterizovaná střední kvadratickou chybou, je 2 cm v polohových souřadnicích a 4 cm ve výšce.

V letech 1995 a 1996 byl proveden ve spolupráci civilní a vojenské složky převod veškerých trigonometrických bodů do systému ETRS89. Detaily výše naznačeného postupu jsou uvedeny v [Karský et al., 1993] a [Kolektiv autorů, 1998].

#### **1.4.2 Realizace souřadnicového systému ETRS89 pomocí sítě permanentních stanic technologie GNSS – síť CZEPOS**

Koncepce rozvoje geodetických základů České republiky předpokládá realizaci polohového souřadnicového systému pomocí a) **sítě permanentních stanic družicové technologie (síť CZEPOS)** (GPS NAVSTAR, GLONASS, GALILEO), b) řídké sítě trigonometrických bodů (produkt výběrové údržby ZÚ), c) sítě zhušťovacích bodů (produkt projektu zhušťování, prováděným KÚ I) – detaily viz [Černohorský et al., 2004].

**Síť permanentních stanic CZEPOS (Česká polohová síť) – je nejdůležitější částí systému,** protože zajistí v budoucnu realizaci a konzervaci souřadnicového systému při předpokládaném úbytku trvale stabilizovaných bodů jejich zničením.



**Obrázek 1.11:** Rozmístění bodů sítě CZEPOS

**Účel:** Síť permanentních stanic slouží:

- jako **provozní síť** pro konzervaci a rekonstrukci souřadnicového systému a pro určování souřadnic statickou metodou GNSS v režimu postprocesingu,
- pro **poskytování korekcí** RTCM a pro RTK (aplikace technologie DGPS, cm měření v reálném čase),
- jako **vědecká síť** pro účely GPS meteorologie a případných dalších vědeckých projektů.

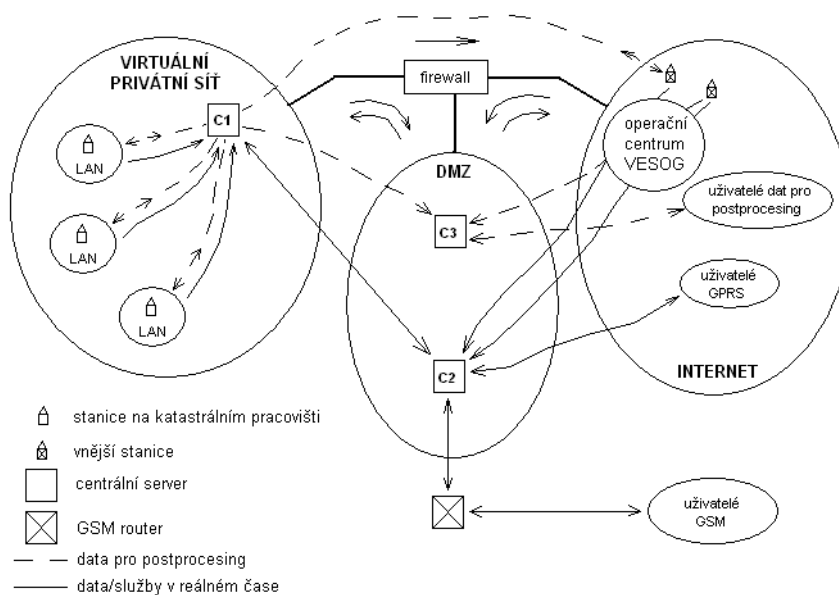
#### **Vybavení a konfigurace sítě**

Síť pod názvem CZEPOS obsahuje 27 permanentních stanic – obr. 1.11. Z toho je 23 stanic základní sítě a 4 stanice jsou vnější (někdy též nazývány externí). Vzájemná vzdálenost stanic je průměrně 60 km. Síť pokrývá celé území ČR.

## Hardware stanic

Stanice základní sítě jsou umístěny na budovách katastrálních úřadů resp. katastrálních pracovišť. Hardware stanice se (r. 2006) skládá z antény Leica AT504 Dorne Margolin Choke Ring, přijímače GRX1200 Pro a příslušenství. Anténa je umístěna nad střechou budovy v místě, kde je dobrý rozhled, kde ji lze připevnit k pevné části stavby a kde je možný přístup. Přijímač je umístěn uvnitř budovy – obvykle v serverovně pracoviště, pokud délka kabelu mezi přijímačem a anténou nepřekročí 30 m. Přijímač je přímo napojen do lokální počítačové sítě pracoviště a odtud do virtuální privátní sítě ČÚZK, (sloužící v první řadě pro přenos dat katastru) – viz obr. 1.12. V budoucnu se předpokládá, že hardware stanic bude periodicky obnovován, zvláště po zprovoznění GNSS systému GALILEO.

Vnější stanice jsou v síti zařazeny zejména pro pokrytí nejzákladnějších služeb v případě výpadku centrální části sítě. Tyto stanice jsou umístěny na vědeckých a akademických pracovištích (Vysoké škole báňské – Technické universitě Ostrava, Vysokém učení technickém v Brně, VÚGTK (Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický), Geodetické observatoři Pecný a Západočeské universitě v Plzni). Provoz těchto stanic zajišťuje příslušné pracoviště ve spolupráci s operačním centrem umístěným na Geodetické observatoři Pecný VÚGTK v rámci výzkumné a experimentální sítě pro observace s GNSS. Na vnějších stanicích není použit jednotný hardware. Spojení mezi vnějšími stanicemi a centrálními servery je realizováno přes internet a operační centrum.



**Obrázek 1.12:** Rozmístění komponent CZEPOS a komunikace v počítačové síti (DMZ znamená „demilitarizovanou zónu“, přístupnou vnějším uživatelům)

## Poskytovaná data a služby

Síť CZEPOS poskytuje dva základní výstupy:  
 - data pro zpracování geodetických a navigačních měření po jejich doměření – tzv. postprocessing,

- služby pro aplikace v (prakticky) reálném čase.

Data pro postprocessing jsou k dispozici registrovaným uživatelům přes webové rozhraní v podobě souborů ve formátu RINEX (Receiver INdependent EXchange format) s volitelným rozsahem a obsahem.

Služby v reálném čase jsou tři:

- pro diferenční GPS (DGPS),
- pro kinematiku v reálném čase (RTK) ve formě virtuálních referenčních stanic,
- pro kinematiku v reálném čase (RTK) ve formě plošných korekcí.

Služby v reálném čase jsou k dispozici registrovaným uživatelům buď přes internet (a GPRS připojení) nebo přes GSM. Formát předávaných dat je RTCM (formát Radio-Technical Commission for Maritime services), v případě distribuce přes internet v obálce NTRIP (Networked Transport of RTCM via Internet Protocol).

### **Realizace CZEPOS**

Realizací a provozem sítě CZEPOS byl pověřen Zeměměřický úřad (ZÚ) Praha z pozice správce geodetických základů České republiky ve spolupráci s Výzkumným ústavem geodetickým, topografickým a kartografickým ve Zdíbech u Prahy (VÚGTK, v.v.i.).

Předběžné geocentrické souřadnice stanic v systému ETRF89 byly určeny na základě kampaní, realizovaných průběžně ZÚ Praha a VÚGTK. Body sítě byly připojeny technologií GPS na nejbližší body sítě DOPNUL, dále bylo měřeno na nejbližších trigonometrických bodech za účelem určení souřadnic v S-JTSK.

Dalším určením souřadnic je globální zpracování dat v rámci analytického centra GOP-LAC (GO Pecný – lokální analytické centrum) sítě EUREF-EPN. Zde jsou souřadnice určovány „připojením“ na vybrané stanice evropské sítě EUREF-EPN, k dispozici jsou hodnoty tzv. týdenních řešení, počínaje GPS týdnem 1320 (začátek 24. 4. 2005).

Úplné informace o síti CZEPOS jsou uvedeny na adrese <http://czepos.cuzk.cz> (stav v r. 2006).

### **1.4.3 Transformace mezi ITRF2000 a ETRF89 na území ČR**

Vzhledem k tomu, že referenční rámec ITRF2000 obsahuje z území České republiky pouze jeden bod, a to bod GOPE (Geodetická observatoř Pecný Výzkumného ústavu geodetického, topografického a kartografického, Ondřejov u Prahy), na kterém jsou provozována stálá pozorování technologií GPS v rámci mezinárodní GPS služby (IGS), je možné transformaci charakterizovat pouze složkami posunutí.

Pro převod souřadnic bodů určených v ETRF89 na území ČR v systému, realizovaném kampaněmi DOPNUL (a bodů na DOPNUL připojených) je pak možné psát

$$\begin{aligned}X_{ITRF2000}(T) &= X_{ETRF89}(1989.0) - 0.174 - 0.01695(T - 1997.0), \\Y_{ITRF2000}(T) &= Y_{ETRF89}(1989.0) + 0.088 + 0.0170(T - 1997.0), \\Z_{ITRF2000}(T) &= Z_{ETRF89}(1989.0) + 0.132 + 0.0083(T - 1997.0),\end{aligned}$$



kde hodnoty souřadnic jsou uvedeny v metrech, hodnoty časových změn v m/rok a  $T$  je epocha v letech.

Uvedený vzorec platí pro bod GOPE, ale vzhledem k velmi malým hodnotám změn rychlostí se změnou polohy, lze vzorec používat i pro ostatní body na území ČR. Přesnost adičních konstant je charakterizována střední kvadratickou chybou 0.015 m, přesnost časových změn veličinou 0.0004 m/rok.

## **1.5 Souřadnicový systém WGS84**

### **1.5.1 Definice systému**

WGS84 (World Geodetic System 1984, Světový geodetický systém 1984) je geodetický geocentrický systém armády USA, ve kterém pracuje globální systém určování polohy GPS a který je zároveň standardizovaným geodetickým systémem armád NATO (*STANAG 2211-IGEO, ed.5 - Geodetic Datums, Ellipsoids, Drids and Grid References, 1991*).

WGS84 je konvenční terestrický systém (CTRS), realizovaný na základě modifikace Námořního navigačního družicového systému (Navy Navigation Satellite System, NNSS). Modifikace spočívá v posunu počátku souřadnicové soustavy, rotaci a změny měřítka dopplerovského systému NSWG 9Z-2 tak, aby systém byl geocentrický a referenční nultý poledník byl identický se základním poledníkem definovaným Bureau International de l'Heure (BIH).

Počátek souřadnicové soustavy a směry souřadnicových os systému WGS84 jsou definovány následujícím způsobem:

Počátek: těžiště Země

osa Z: směr ke konvečnímu terestrickému pólu (Conventional Terrestrial Pole, CTP, identický s CIO) definovanému BIH na základě souřadnic stanic definujících systém BIH.

osa X: průsečnice referenčního poledníku WGS84 a roviny rovníku vztaženého k CTP, referenční poledník je nultý poledník definovaný BIH.

osa Y: doplňuje systém na pravotočivý pravoúhlý souřadnicový systém, směr kladné části osy je 90° východně vzhledem k ose X.

WGS84 je globální geocentrický geodetický referenční systém, pevně spojený se zemským tělesem. Systém je definován primárními a sekundárními parametry. **Primární parametry** definují rozměry referenčního elipsoidu přiřazeného systému, jeho úhlovou rychlost rotace vůči nebeskému referenčnímu systému a součin gravitační konstanty a hmoty Země soustředěné v referenčním elipsoidu. Definiční parametry jsou uvedeny v Tabulce 1.8.

**Sekundární parametry** definují model detailní struktury zemského gravitačního pole (Earth Gravity Model, EGM - viz kapitola 6) definovaný pomocí rozvoje geopotenciálu do sférických harmonických funkcí do stupně a řádu 360. Model gravitačního pole WGS84 EGM96

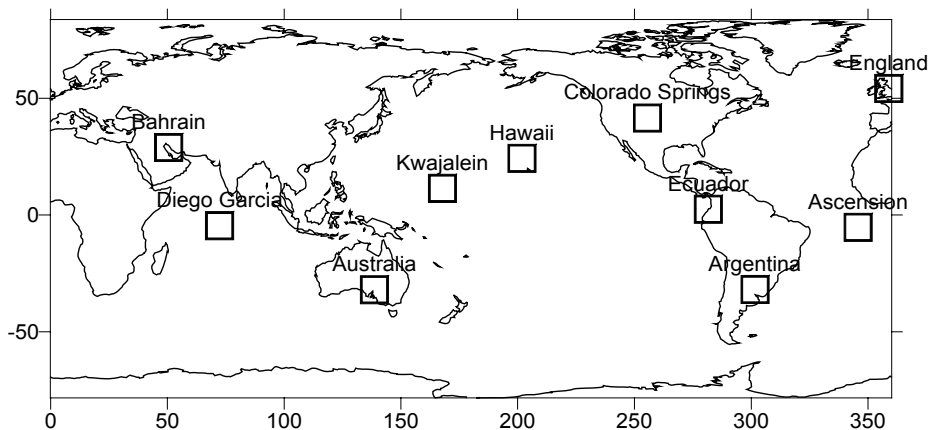
je možné využít pro výpočet průběhu plochy geoidu WGS84, tížnicových odchylek, středních hodnot tíhových anomálií v síti 10' x 15'.

**Tabulka 1.8:** Primární parametry systému WGS84

Parametr	označení	WGS84
velká poloosa refer. elipsoidu	a	6378137 m
zploštění	f	1/298.257223563
úhlová rychlost rotace Země	$\omega$	$7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$
geocentrická gravitační konstanta (včetně atmosféry)	GM	$398600.4418 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2} *$
normovaný zonální harmonický koeficient geopotenciálu 2. stupně	$\bar{C}_{20}$	$-484.16685 \times 10^{-6}$

\*) Původní hodnota  $GM = 398600.5 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$  byla nahrazena tabelovanou, aby se dosáhlo shody v definici se standardy IERS.

Počátek a orientace souřadnicových os jsou prakticky realizovány souřadnicemi X, Y, Z dvanácti stanic, které monitorují dráhy GPS družic, viz obr 1.13. Souřadnice těchto monitorovacích stanic byly (do roku 1994) určeny na základě dopplerovských měření systému TRANSIT na základě zpracování časově dlouhodobých "absolutních" observačních kampaní.



**Obrázek 1.13:** Stanice, definující WGS84 v roce 2000

Od 1. 1. 1994 jsou WGS84 souřadnice 10 sledovacích stanic GPS zpřesněny na WGS 84 (G730) a připojeny přesným relativním měřením pomocí technologie GPS k systému ITRF-91, později byl systém rozšířen na 12 stanic v dále zpřesněném systému WGS84 (G873). **Od počátku roku 1994 je tedy systém WGS84 ztotožněn - podle definice - se systémem ITRS.** (Poznámka: Vzhledem k tomu, že požadovaná přesnost realizace WGS84 je několik dm a jednotlivé realizace ITRSxx jsou v rámci této přesnosti identické, jsou v současné době oba systémy kompatibilní, ITRS má pouze vyšší nároky na přesnost realizace).

V únoru 2001 byla uspořádána 15ti denní GPS kampaň, zaměřená na zpřesnění definice WGS84 a byla definována nová množina stanic definujících systém. Stanice jsou pod správou NIMA (National Imaginery and Mapping Agency) a US Air Force. Během kampaně bylo využito kromě vlastních měření na stávajících a nově určovaných stanicích i observací z některých permanentních stanic sítě IGS (International GPS Service). Vznikla tak realizace WGS84 (G1150), která obsahuje 26 stanic, rozložených po celém světě, připojených na systém ITRS 2000 se střední chybou 1 cm v každé souřadnici.

Přesnost geocentrických souřadnic bodů přímo určených v systému WGS84 na základě technologie GPS, s použitím odpovídajících palubních efemerid a relativního měření ve statickém módu, je tedy srovnatelná s přesností měření prováděným v ITRS 2000. Praktické zkušenosti ukazují, že přesnost (charakterizovaná střední kvadratickou chybou) navigačních měření prováděných pomocí kódových měření jednofrekvenčními ručními aparaturami dosahuje na pro území ČR 2 – 3 m v poloze a 5 m ve výšce při dvou až pětiminutových observacích na bodě, přesnost geodetických měření (kódová a fázová měření) je pak závislá na výběru metody a dosahuje řádu jednotek milimetrů.

Na území bývalého Československa bylo započato s realizací systému WGS84 na základě kampaně VGSN'92, organizované DMA (Defense Mapping Agency - mapovací agentura Ministerstva obrany USA, nyní NIMA - National Imaginery and Mapping Agency) a Topografické služby armády ČR.

Od 1. 1. 1998 je WGS84 zaveden ve vojenském a civilním letectvu a v AČR je běžně používán v rámci kooperace s armádami NATO a v rámci standardizace v geodézii a kartografii.

Důležitost WGS84 v praktické geodezii vyplývá ze skutečnosti, že v tomto systému jsou vysílány palubní efemeridy (broadcast ephemeris) družic systému GPS NAVSTAR. Přesnost těchto efemerid je charakterizována střední kvadratickou chybou 1.6 m (v roce 2007).

## 2. Pohyb umělých družic Země v reálném silovém poli

V této kapitole se budeme zabývat pohybem umělých družic Země (UDZ) v silových polích, která působí na družice, pohybující se v blízkém okolí Země.

Silová pole je možné obecně rozdělit na pole se silami

- **konzervativními** - to je silami, které *mají* potenciál; mezi ně patří například silové působení gravitačního pole Země, Slunce a Měsíce, respektive planet, tyto síly se díky tomu také nazývají **gravitační síly**,
- **nekonzervativními** - to je silami, které *nemají* potenciál; mezi ně například patří tlak slunečního záření a odpor atmosféry, jde analogicky k předchozímu o síly **negravitační**.

Předpokládejme, že pracujeme v euklidovském prostoru  $E_3$  a že všechny používané skalární i vektorové funkce jsou prvky prostoru spojitých,  $n$ -krát diferencovatelných funkcí. Věnujme se nejdříve vlivu gravitačního pole Země. Pohyb družic může být z matematického hlediska popsán různým způsobem, matematická fyzika poskytuje dostatečně různorodý aparát. My se zde přidržíme nejelementárnějšího popisu, vycházejícího z **Newtonova gravitačního zákona**, který platí v inerciální souřadnicové soustavě (vliv negravitačních sil zatím nebudeme uvažovat). Vyjdeme tedy z formulace tohoto zákona, tak, jak je použit při řešení problému dvou těles, kdy se menší těleso o hmotnosti  $m$  pohybuje kolem většího tělesa o hmotnosti  $M$ . Podle GA10 výrazu (3.1.5) a (3.1.6) pak platí

$$(2.1) \quad \ddot{\mathbf{r}} + G(M + m) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0,$$

kde  $\mathbf{r}$  je vektor průvodič tělesa o hmotnosti  $m$ , vztažený k počátku souřadnicové soustavy, který volíme v těžišti tělesa o hmotnosti  $M$ . Dvěma tečkami značíme druhou derivaci podle času,  $G$  je gravitační konstanta,  $r$  je velikost vektoru  $\mathbf{r}$ .

Z fyzikální geodézie víme, že druhý člen je složkou síly, kterou vyvolává **potenciál**  $V$ :

$$(2.2) \quad V = -\frac{G(M + m)}{r} \cong -\frac{GM}{r},$$

který se nazývá **gravitační potenciál**. Druhá rovnost platí přibližně pokud je  $m \ll M$ , (v případě UZD platí přesně rovnost, protože družice byla vypuštěna ze Země, na Zemi tak ubylo hmoty). Z fyzikální geodézie je také známo, že potenciál ve tvaru (2.2) představuje vnější potenciál hmotného bodu o hmotnosti  $M$  nebo homogenní koule o hmotnosti  $M$  nebo koule složené z homogenních kulových vrstev o celkové hmotnosti  $M$ . V případě **reálné** Země je však nutné tento potenciál doplnit o tzv. **poruchový potenciál**  $R$  (víme, že Zemi lze aproximovat koulí jen velmi přibližně), tedy místo (2.2) budeme psát pro potenciál **gravitačního pole reálné Země**:

$$(2.3) \quad V = -\left(\frac{GM}{r} + R\right).$$

Napišme nyní Newtonův gravitační zákon a předpokládejme, že působí jak gravitační tak negravitační síly. Pak lze psát:

$$(2.4) \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} + \Delta \mathbf{F},$$

kde vliv konzervativních (gravitačních) sil je vyjádřen potenciálem  $V$  a vliv nekonzervativních sil vektorem  $\Delta \mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$ , kde  $F$  jsou složky vektoru  $\Delta \mathbf{F}$ .

Výraz (2.4) představuje soustavu **tří diferenciálních rovnic druhého řádu**. Soustavu by tedy bylo možné numericky integrovat - při znalosti počátečních podmínek (polohy a rychlosti, tzv. **state vektoru**)

$$(2.5) \quad \mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0)$$

v čase  $t_0$  a problém by byl vyřešen. Na tomto místě je nutné podotknout, že při zpracování velmi přesných pozorování se tomu skutečně tak děje a výraz (2.4) s počátečními podmínkami (2.5) slouží k **numerické integraci dráhy**, to znamená k získání poloh a rychlostí družice v libovolných časových okamžicích  $t$ . Z výrazu (2.4) však nejsme schopni získat jakoukoliv představu o tvaru a charakteru dráhy družice. V následujícím výkladu se budeme zabývat názornějším, byť méně přesným přístupem.

Z Keplerových zákonů víme, že pokud je možné vyjádřit gravitační působení hmotnějšího tělesa potenciálem hmotného bodu (Keplerovský pohyb je pohybem dvou hmotných bodů), je výslednou drahou družice keplerovská elipsa. Tomuto pohybu budeme v dalším říkat **nerušený (keplerovský) pohyb**. Víme také - viz GA10, kapitola 3 - že tento pohyb je možné v prostoru popsat pomocí pěti **konstantních** Keplerových elementů:  $a$  - velkou polosou dráhy,  $e$  - excentricitou,  $i$  - sklonem roviny dráhy,  $\Omega$  - rektascenzí výstupního uzlu,  $\omega$  - argumentem perigea a šestým elementem - **lineárně se s časem měnící střední anomálií**  $M$ .

Keplerovský pohyb byl odvozen z vyjádření silové funkce ve tvaru (2.2). Vezmeme-li v úvahu poruchový potenciál ve tvaru (2.3) nebo (2.4), **musíme připustit časovou změnu Keplerových elementů**, tedy

$$a(t), e(t), i(t), \omega(t), \Omega(t), M_0(t),$$

kde  $M_0$  je hodnota střední anomálie v čase  $t_0$ , jsou tak závislé na čase. Naším úkolem je najít rovnice, které tuto časovou závislost vyjadřují.

Diferenciálních rovnic, které popisují změnu Keplerových elementů v závislosti na čase je celá řada, my uvedeme

- **Lagrangeovy planetární rovnice**, které se používají pro zahrnutí vlivu konzervativních sil a
- **Gaussovy (Newtonovy, Eulerovy) planetární rovnice**, které se používají pro zahrnutí vlivu konzervativních i nekonzervativních sil.

## 2.1 Nástin odvození Lagrangeových planetárních rovnic

Vyjdeme z výrazu pro potenciál (2.3) a z Newtonova gravitačního zákona (2.4), kde zanedbáme složku nekonzervativních sil, tedy

$$(2.1.1) \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}.$$

Jak jsme se již zmínili výše, jelikož pracujeme v  $E_3$ , jde o soustavu tří diferenciálních rovnic druhého řádu. Ta je ekvivalentní se soustavou šesti diferenciálních rovnic prvního řádu

$$(2.1.2) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}.$$

Označme - v souladu s Lagrangeovým označením - Keplerovy elementy vektorem  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{s} = (s_1 = a, s_2 = e, \dots, s_6 = M_0)$$

Ze studia keplerovského pohybu víme, že poloha a rychlost družice je funkcí Keplerových elementů a naopak, tedy platí

$$(2.1.3) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{s}), \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{s}) \quad \text{resp.} \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

Dosaďme do (2.1.2) a derivujme jako složenou funkci. Pak dostaneme

$$\sum_{k=1}^6 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_k} \frac{ds_k}{dt} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \sum_{k=1}^6 \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial s_k} \frac{ds_k}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}.$$

První vektorová rovnice představuje ve skutečnosti tři rovnice ve složkách, stejně tak i druhá rovnice. Vynásobme první vektorovou rovnici výrazem  $-\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial s_l}$  a druhou vektorovou rovnici

výrazem  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_l}$  ( $l = 1, \dots, 6$ ) a sečtěme je. Dostaneme

$$(2.1.4) \quad \sum_{k=1}^6 \left[ -\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial s_l} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_k} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_l} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial s_k} \right] \frac{ds_k}{dt} = \left[ -\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial s_l} \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_l} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \right].$$

Výrazu

$$(2.1.5) \quad \left[ -\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial s_l} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_k} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_l} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial s_k} \right] = [s_l, s_k]$$

se říká Lagrangeova závorka. Objasněme si dále význam členů na pravé straně (2.1.4). Z fyziky víme, že kinetickou energii  $T$  je možné vyjádřit ve tvaru

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

Derivujme tento výraz podle elementu  $s_l$ . Dostáváme

$$(2.1.6) \quad \frac{\partial T}{\partial s_l} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial s_l} \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial s_l} \right) = \dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial s_l}.$$

Druhý člen na pravé straně (2.1.4) je možné podle pravidel pro výpočet derivace složené funkce přepsat na tvar

$$(2.1.7) \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_l} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial V}{\partial s_l}.$$

Definujme nyní **Lagrangeovu funkci**  $F$  výrazem

$$(2.1.8) \quad F = -(T - V),$$

kde  $T$  je kinetická a  $V$  potenciální energie. Dosadíme-li do (2.1.4) z (2.1.5) až (2.1.8) vyjde

$$(2.1.9) \quad \sum_{k=1}^6 [s_l, s_k] \frac{ds_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial s_l}, \quad l = 1, \dots, 6.$$

To je soustava **šesti lineárních** (obyčejných, ne diferenciálních!) **rovníc** pro neznámé  $\frac{ds_k}{dt}$ .

Bez důkazu uvedeme vlastnosti Lagrangeových závorek. Platí

$$(2.1.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} [s_l, s_k] = 0, \quad [s_l, s_l] = 0, \quad [s_l, s_k] = -[s_k, s_l],$$

Lagrangeovy závorky jsou tedy podle (2.1.4) funkcemi keplerových elementů, podle (2.1.10) jsou nezávislé na čase, antisymetrické; v důsledku druhé podmínky jsou diagonální členy soustavy (2.1.9) rovny nule. Díky vlastnostem (2.1.10) a po provedení vlastního výpočtu (z výrazů pro keplerovský pohyb) je ze 36 možných závorek pouze 12 nenulových a z toho, díky antisymetrii jen 6 nezávislých. I přesto je konkrétní dosazení do soustavy rovnic (2.1.9) za Lagrangeovy závorky pracné, stejně tak jako vlastní řešení soustavy. Z tohoto důvodu uvedeme jen výsledek. Nejdříve ještě dosadíme za Lagrangeovu funkci  $F$ . Podle (2.3), definice kinetické energie a integrálu živé síly - viz GA10, výraz (3.1.26) platí

$$(2.1.11) \quad \begin{aligned} F = -(T - V) &= -\left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{GM}{r} - R \right) = -\left( \frac{1}{2} GM \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right] - \frac{GM}{r} - R \right) = \\ &= \frac{GM}{2a} + R. \end{aligned}$$

Z posledního výrazu je patrné, že v Lagrangeových rovnicích bude vystupovat pouze poruchový potenciál  $R$ .

Řešením soustavy obyčejných lineárních rovnic (2.1.9) dostáváme soustavu diferenciálních **Lagrangeových planetárních rovnic**

$$(2.1.12) \quad \begin{pmatrix} da/dt \\ de/dt \\ di/dt \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \partial R / \partial M_0 \\ \partial R / \partial \Omega \\ \partial R / \partial \omega \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} dM_0/dt \\ d\Omega/dt \\ d\omega/dt \end{pmatrix} = \mathbf{L}^T \begin{pmatrix} \partial R / \partial a \\ \partial R / \partial e \\ \partial R / \partial i \end{pmatrix},$$

kde matice  $\mathbf{L}$  má tvar

$$(2.1.13) \quad \mathbf{L} = \frac{1}{\sqrt{GM[a(1-e)^2]}} \begin{pmatrix} 2a\sqrt{1-e^2} & 0 & 0 \\ (1-e^2)^{3/2} & 0 & -\frac{1-e^2}{e} \\ e & -\frac{1}{\sin i} & \frac{\cos i}{\sin i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z (2.1.12) a (2.1.13) je patrné, že Lagrangeovy planetární rovnice (LPR) jsou diferenciálními rovnicemi pro změnu Keplerových elementů v čase, že jsou funkcí pouze těchto elementů, geocentrické gravitační konstanty  $GM$  a derivací poruchového potenciálu  $R$  podle Keplerových elementů. Dále je patrné, že LPR jsou singulární v případě, že  $e = 0$  a  $i = 0$ .

Integrací LPR můžeme tedy vypočítat hodnotu Keplerových elementů v libovolném časovém okamžiku  $t$  a z nich aplikací vzorců keplerovského pohybu - viz např. GA10, kapitola 3 - určit polohu a rychlost družice, jak je to symbolicky naznačeno ve výrazu (2.1.3). I když tedy v případě rušeného pohybu není dráha keplerovská (vytváří obecnou prostorovou křivku, na rozdíl od elipsy keplerovského pohybu), lze ji podle LPR v každém okamžiku aproximovat Keplerovými elementy, nyní již proměnnými v čase. Tyto časově proměnné elementy se nazývají **oskulační elementy** dráhy. Existence oskulačních elementů využijeme k další úvaze.

Předpokládejme, že družice se nachází v čase  $t_0$  v místě s polohovým vektorem  $\mathbf{r}(t_0)$  a rychlostí  $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ . Tento polohový vektor i rychlost odpovídá pro okamžik  $t_0$  (ale pouze pro tento okamžik) rušenému i nerušenému pohybu. Kdyby totiž v tento okamžik přestala působit poruchová síla, družice se bude pohybovat po keplerovské elipse, jejíž parametry jsou dány oskulačními elementy. Ve skutečnosti se však pohybuje po prostorové křivce, kterou je však možno v čase  $t_0+dt$  aproximovat novými oskulačními elementy. Této skutečnosti využijeme při odvození Gaussových planetárních rovnic.

## 2.2 Nástin odvození Gaussových planetárních rovnic

Předpokládejme, že skutečnou dráhu družice máme vyjádřenou časovou posloupností Keplerových elementů. Necht'  $s \in \mathbf{s}$  je jedním z Keplerových elementů. Podle (2.1.3) lze psát



$$(2.2.1) \quad \dot{s} = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial s}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \ddot{\mathbf{r}}.$$

Podle (2.3) a (2.4) je možno dále dosadit za  $\ddot{\mathbf{r}}$ , tedy

$$(2.2.2) \quad \dot{s} = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial s}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \left( \frac{GM}{r^3} \mathbf{r} + \Delta \mathbf{F} \right),$$

tento výraz platí v případě *rušeného* pohybu v časovém okamžiku  $t_0$ . V případě *nerušeného* pohybu uvažovaném v okamžiku  $t_0$  bude především  $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , ale i Keplerovy elementy budou konstantní, tedy  $\dot{s} = 0$ . Dosadíme-li do posledního výrazu podmínky nerušeného pohybu, vyjde

$$(2.2.3) \quad \dot{s} = 0 = \frac{\partial s}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial s}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \left( \frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \right).$$

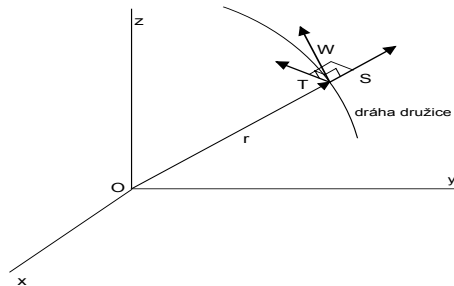
Dosadíme-li (2.2.3) do (2.2.2) dostáváme pro oskulační elementy v čase  $t_0$ :

$$(2.2.4) \quad \dot{s} = \frac{\partial s}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \Delta \mathbf{F}.$$

To je šest diferenciálních rovnic prvního řádu pro změnu Keplerových elementů s počátečními podmínkami

$$(2.2.5) \quad s(t_0) = s(\mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0)).$$

Soustava rovnic (2.2.4) povede už přímo ke Gaussovým planetárním rovnicím (GPR). K výpočtu parciálních derivací ve (2.2.4) se používá výrazů známých z keplerovského pohybu, jde však o poměrně komplikované výpočty. Dříve než Gaussovy rovnice uvedeme, upravíme ještě výraz pro silovou funkci (poruchové zrychlení)  $\Delta \mathbf{F}$ .



**Obrázek 2.1:** Definice složek poruchové síly  $S$ ,  $T$ ,  $W$

V mnoha případech bývá užitečné rozložit vektor silové funkce (poruchového zrychlení)  $\Delta \mathbf{F}$  do složek, majících souvislost s dráhou družice. Jde o složky poruchového zrychlení (viz Obrázek 2.1)

- $S$  - v radiálním směru ve směru průvodiče družice (radial),
- $T$  - ve směru kolmém na průvodič, ležící v rovině dráhy (along-track),
- $W$  - ve směru kolmém k rovině dráhy (out-of-plane, normal).

Lze tedy psát

$$(2.2.6) \quad \Delta \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix},$$

kde  $\alpha, \dots, \gamma''$  jsou koeficienty příslušné transformační matice, které je nutno v konkrétních případech vypočítat. Zajímavější vyjádření je však pro složky  $S$  a  $T$  v návaznosti na složky rychlosti v radiálním a kolmém směru  $V_r$  a  $V_n$ . Z definice složek platí

$$S = \dot{V}_r, \quad T = \dot{V}_n;$$

podle GA10, rovnice (3.2.17) a (3.2.18) připomínáme výraz pro  $V_r$  a  $V_n$ :

$$(2.2.7) \quad V_r = \frac{pe \sin v}{(1 + e \cos v)^2} = \frac{r^2 e \sin v}{p}, \quad V_n = \frac{c}{p}, \quad c = \sqrt{GMp}, \quad p = a(1 - e^2),$$

kde  $v$  je pravá anomálie.

Jak již bylo řečeno výše, je odvození Gaussových planetárních rovnic z (2.2.4) náročnou početní záležitostí. Jako příklad zde proto uvedeme odvození **GPR** pouze **pro změnu velké poloosy  $a$** .

*Příklad: Odvození GPR pro  $da/dt$ :*

Vydeme z výrazu pro integrál živé síly (energie)

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Z něj platí pro  $a$

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{GM}}$$

Nyní již snadno vypočteme příslušnou derivaci

$$(2.2.8) \quad \frac{\partial a}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = a^2 \frac{2\dot{\mathbf{r}}}{GM}.$$

Po dosazení do (2.2.4) dostáváme

$$(2.2.9) \quad \dot{a} = \frac{2a^2}{GM} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \Delta \mathbf{F}).$$

Abychom mohli vypočítat skalární součin na pravé straně, musíme oba vektory vyjádřit ve stejné souřadnicové soustavě. Nejvýhodnější je v našem případě soustava  $S$ ,  $T$ ,  $W$ . V této soustavě platí podle (2.2.6) - viz též obrázek 2.2

$$(2.2.10) \quad \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} V_r \\ V_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix}.$$

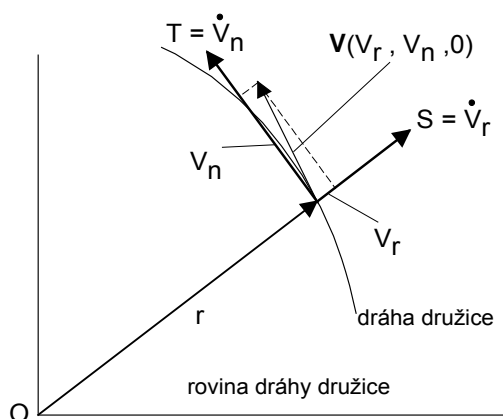
Dosadíme-li nyní do (2.2.9) z (2.2.10) dostáváme

$$(2.2.11) \quad \frac{da}{dt} = \dot{a} = \frac{2a^2}{GM} (V_r S + V_n T).$$

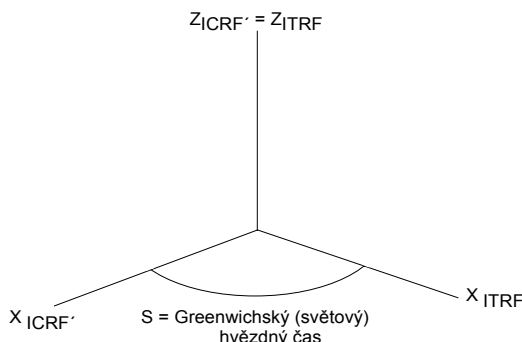
Dalším dosazením z (2.2.7) bychom dostali výsledný tvar GPR pro změnu velké poloosy dráhy. Uvedeme ho spolu s ostatními GPR, které nebudeme odvozovat. Rovnice

$$(2.2.12) \quad \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left( e \sin v S + \frac{p}{r} T \right), \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [\sin v S + (\cos v + \cos E) T], \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos(\omega + v)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r \sin(\omega + v)}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} W, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena} \left[ -\cos v S + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin v T \right] - \cos i \frac{d\Omega}{dt}, \\ \frac{dM}{dt} &= \frac{1-e^2}{ena} \left[ \left( \cos v - 2e \frac{r}{p} \right) S - \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin v T \right] + \frac{3n}{2a} (t - t_0) \dot{a} \end{aligned}$$

se nazývají **Gaussovy planetární rovnice** pro Keplerovy elementy. Z výrazu je patrné, že kromě závislosti na Keplerových elementech a složkách poruchového zrychlení  $S$ ,  $T$ ,  $W$ , jsou rovnice závislé na středním denním pohybu  $n = \sqrt{GM/a^3}$ , excentrické anomálii  $E$ , pravé anomálii  $v$  a průvodiči  $r$ . Tato nekompaktnost je nevýhodou proti Lagrangeovým planetárním rovnicím, výhodou naopak je, že GPR se dají použít pro studium pohybu družice, který je způsoben vlivem **nekonzervativních i konzervativních sil** (pomocí potenciálu jsme schopni vypočítat složky poruchového zrychlení  $S$ ,  $T$ ,  $W$ ). Povšimněme si dále, že změna velké poloosy  $a$ , excentricity  $e$  a pravé anomálie závisí pouze na radiální a podélné složce ( $S$ ,  $T$ ) poruchového zrychlení, naopak sklon a rektascenze výstupního uzlu jsou ovlivněny pouze složkou poruchového zrychlení, kolmou k rovině dráhy  $W$ . Podobně jako LPR, ani GPR nelze použít v případě, kdy  $e = 0$  a  $i = 0$ . Integrací GPR opět získáme oskulační elementy.



Obrázek 2.2: Vztah  $V_r$ ,  $V_n$  a  $S$ ,  $T$



Obrázek 2.3: Volba soustavy ICRF'

### 2.3 Vliv gravitačního pole Země na dráhu umělé družice Země

V tomto odstavci se budeme zabývat vlivem gravitačního pole Země na dráhu umělé družice. Z geodetického hlediska jde o vliv nejpodstatnější, protože řešením obrácené úlohy, kdy naopak máme polohu družice určenou z pozorování, můžeme určovat parametry, charakterizující gravitační pole. Pohybový zákon vyjádříme z (2.3) a (2.1.1). Pak lze, po provedení derivace, psát

$$(2.3.1) \quad \ddot{\mathbf{r}}_{ICRF} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}_{ICRF} + \text{grad } R_{ICRF}.$$

Význam všech veličin byl již vysvětlen dříve, index „ICRF“ píšeme proto, že tato diferenciální rovnice platí pouze v **inerciálním systému**. Poruchový potenciál  $R$  tedy musíme převést z terestrického systému do systému inerciálního. Z fyzikální geodezie víme, že poruchový potenciál gravitačního pole Země  $R_{ITRF}$  je možné vyjádřit řadou sférických funkcí:

$$(2.3.2) \quad R_{ITRF} = \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{a_e}{r} \right)^l P_{lm}(\sin \Phi) (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda),$$

kde  $r$ ,  $\phi$ ,  $\lambda$  jsou sférické souřadnice,  $r$  je průvodič,  $\phi$  je geocentrická šířka (na rozdíl od elipsoidické),  $\lambda$  je greenwickská zeměpisná délka,  $a_e$  je v podstatě libovolný délkový faktor, zpravidla se za něj volí velká poloosa referenčního elipsoidu Země,  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ ,  $l \in \langle 2, \infty \rangle$ ,  $m \in \langle 0, l \rangle$ , jsou Stokesovy parametry a  $P_{lm}$  je Legendreova přidružená funkce. Připomeňme ještě, že **Stokesovy parametry** (zvané též harmonické nebo geopotenciální harmonické koeficienty) rozčleňujeme do tří skupin na **zonální** ( $m = 0$ ), **teserální** ( $l \neq m$ ,  $m \neq 0$ ) a **sektorální** ( $l = m$ ,  $m \neq 0$ ). Jde o bezrozměrné parametry. Hodnotou největší je zonální parametr  $C_{20} = -484.17 \times 10^{-6}$  (jde o normovanou hodnotu), který souvisí s **pólovým zploštěním Země**. Ostatní normované Stokesovy parametry jsou o **dva řády menší**. Derivací  $R_{ITRF}$  v příslušném směru určíme gradient  $\text{grad } R_{ITRF}$ .

Na základě výsledků první kapitoly lze pro transformaci  $grad R_{ITRF}$  do inerciálního systému psát

$$(2.3.3) \quad grad R_{ICRF} = \mathbf{P}(t)\mathbf{N}(t)\mathbf{Z}(-S)\mathbf{X}(y_P)\mathbf{Y}(x_P) grad R_{ITRF},$$

kde transformace zprava doleva zahrnuje vliv pohybu pólu, otočení o světový (greenwichský) hvězdný čas  $S$ , nutace a precese (z epochy  $t$  na epochu J2000.0). Hodnotu  $grad R_{ITRF}$  určíme z (2.3.2) prostým derivováním

$$(2.3.4) \quad grad R_{ITRF} = \frac{\partial R_{ITRF}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial R_{ITRF}}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial R_{ITRF}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}},$$

kde derivace  $\frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{r}}$  vypočteme z transformačních vztahů mezi pravoúhlými a sférickými souřadnicemi.

Rovnici (2.3.1) je po dosazení možno rozepsat do složek a integrovat numericky (analytické řešení vzhledem ke komplikovanosti vztahů nepřipadá v úvahu) nebo polonumericky při znalosti počátečních podmínek  $\mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0)$ , integrací získáme pro libovolný časový okamžik  $t$  polohu a rychlost  $\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)$ . Rovnice (2.3.1) nám však po numerické integraci nic neříkají o charakteru dráhy v případě působení poruchových sil. K tomu je lepší využít Lagrangeových planetárních rovnic (LPR) (2.1.12). V LPR je však nutno derivovat poruchový potenciál  $R$  podle Keplerových elementů a z předchozích úvah víme, že je nutné poruchový potenciál transformovat z terestrické do inerciální souřadnicové soustavy. Vzhledem k tomu, že nebudujeme přesnou analytickou teorii, zavedeme následující zjednodušení:

- místo ICRF budeme pracovat v inerciálním systému ICRF' v epoše  $t$ , který vznikne z ICRF otočením o vliv precese a nutace z epochy J2000.0 do epochy  $t$ ,
- zanedbáme vliv pohybu pólu  $x_P, y_P$ .

Místo (2.3.3) pak budeme psát

$$(2.3.5) \quad grad R_{ICRF'} = \mathbf{Z}(-S) grad R_{ITRF}.$$

Připomeňme, že transformace v (2.3.5) je identická s transformací mezi  $S_{r1}$  a  $S_{r2}$  - rovníkovou soustavou prvního a druhého druhu. Této skutečnosti dále využijeme. Sférické souřadnice, ve kterých je vyjádřen poruchový potenciál (2.3.2), ztotožníme se soustavou  $S_{r1}$ , v soustavě  $S_{r2}$  zavedeme standardní souřadnice - rektascenzi  $\alpha$ , deklinaci  $\delta$ . Podle obrázku 2.3 platí

$$r = r, \quad \Phi = \delta, \quad \lambda = \alpha - S,$$

kde  $S$  je světový (greenwichský) hvězdný čas. Poruchový potenciál pak přepíšeme na tvar

$$(2.3.6) \quad R_{ICRF}(r, \delta, \alpha) = \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a_e}{r}\right)^l P_{lm}(\sin \delta) [C_{lm} \cos m(\alpha - S) + S_{lm} \sin m(\alpha - S)] .$$

Dalším krokem, který umožní využití LPR, je transformace  $R_{ICRF}$  do Keplerových elementů. Tato transformace je popsána v D2.3 - využívá se při ní transformačních grup z teoretické fyziky – zde pouze naznačíme formální výsledek. Transformujeme-li (2.3.6) do Keplerových elementů vyjde

$$(2.3.7) \quad R(a, e, i, \omega, \Omega, M) = GM \sum_{l,m,p,q} f(a, e, i)_{lmpq} [C_{lm} \cos \psi_{lmpq} + S_{lm} \sin \psi_{lmpq}] ,$$

kde  $f$  je funkce vnitřních elementů  $a, e, i$  a  $\psi$  je funkcí vnějších elementů a greenwichského hvězdného času  $S$ :

$$(2.3.8) \quad \psi = (l - 2p)\omega + (l - 2p + q)M + m(\Omega - S) .$$

Sumační indexy  $l, m$  nabývají známých hodnot, index  $p \in \langle 0, l \rangle$ ,  $q \in (-\infty, \infty)$ . Všimněme si, že (2.3.7) vyjadřuje poruchový potenciál gravitačního pole Země formou periodické funkce Stokesových parametrů  $C_{lm}, S_{lm}$ , případně jako konstantu, pokud  $\psi$  identicky vymizí. Pak totiž platí

$$\cos \psi = \cos 0 = 1, \quad \sin \psi = \sin 0 = 0$$

a z  $R$  se stává konstanta.

Dosadíme-li nyní za  $R$  do LPR, musíme na pravé straně derivovat poruchový potenciál podle Keplerových elementů. Vzhledem ke struktuře (2.3.7) a (2.3.8) se periodický, resp. konstantní charakter této derivace neztratí (z kosinu se derivací stává sinus a ze sinu kosinus). Obecně se tedy dá říci, že LPR jsou tvořeny sumou kosinusovek/sinusovek o různých amplitudách a různých periodách. LPR tedy můžeme symbolicky zapsat

$$(2.3.9) \quad \frac{ds_i}{dt} = \sum_{lmpq} A_{lmpq}^{s_i}(a, e, i) \left[ C_{lm} \cos \left( \psi_{lmpq} + j_{s_i} \frac{\pi}{2} \right) + S_{lm} \sin \left( \psi_{lmpq} + j_{s_i} \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

$i = 1, \dots, 6$ ,  $A_{lmpq}$  je amplituda (pro každý Keplerův element  $s_i$  je různá) a  $j$  nabývá hodnot  $+1, 0, -1$  v závislosti na Keplerových elementech  $s_i$ . *Poznámka: Pro zjednodušení zápisu budeme označovat Keplerovy elementy jak písmenem  $s_i$ , tak i obvyklým značením  $a, e, i, \dots$*

Integrujme nyní tuto soustavu za dalších zjednodušujících podmínek:

- elementy  $a, e, i$  budeme považovat za konstanty,
- funkce  $\psi$  bude mít s časem lineární průběh,
- zanedbáme vzájemnou interakci mezi neznámými - rovnice pro jednotlivá  $s_i$  budeme integrovat odděleně.

Za těchto podmínek opět symbolicky platí, když si uvědomíme, že na čase závisí pouze  $\psi$ ,

(2.3.10)

$$\Delta s_i = \int_{t_0}^{t_1} \frac{ds_i}{dt} dt = \left[ \sum_{lmpq} \frac{A_{lmpq}^{S_i}(a, e, i)}{\psi_{lmpq}} \left[ C_{lm} \sin\left(\psi_{lmpq} + j_{s_i} \frac{\pi}{2}\right) - S_{lm} \cos\left(\psi_{lmpq} + j_{s_i} \frac{\pi}{2}\right) \right] \right]_{t_0}^{t_1},$$

kde

$$(2.3.11) \quad \dot{\psi} = (l - 2p)\dot{\omega} + (l - 2p + q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{S}).$$

Právě uvedenému postupu se říká **integrace LPR podle teorie prvního řádu**. Dá se dokázat, že tato integrace konverguje ke skutečnému řešení i to, že nekonečná řada (2.3.9) stejnoměrně konverguje a že splňuje podmínky pro integraci člen po členu.

Výsledek (2.3.10) nám nyní umožní rozdělit poruchy na několik skupin. Než to učiníme, bude účelné vyšetřit, jakým způsobem ovlivňuje změnu Keplerových elementů Stokesův parametr  $C_{2,0}$ , který je největší a bude tedy mít dominantní vliv.

### 2.3.1 Sekulární vliv parametru $C_{20}$ na Keplerovy elementy

Vraťme se k výrazu (2.3.8) a hledejme, za jakých podmínek vymizí identicky  $\psi$ . K tomu dojde, když

$$(2.3.12) \quad l - 2p = 0, \quad l - 2p + q = 0, \quad m = 0.$$

Vzhledem k tomu, že  $l = 2$ ,  $m = 0$ , budou podmínky (2.3.12) splněny pro  $p = 1$ ,  $q = 0$  a (2.3.9) pak přepíšeme na tvar

$$(2.3.13) \quad \frac{ds_i}{dt} = A_{2010}^{S_i}(a, e, i) \left[ C_{20} \cos\left(0 + j_{s_i} \frac{\pi}{2}\right) \right].$$

Z tohoto výrazu je okamžitě patrné, že pro  $j_{s_i} = 0$  platí

$$(2.3.14) \quad \frac{ds_i}{dt} = A_{2010}^{S_i}(a, e, i) C_{20} = konst.$$

a pro  $j_{s_i} = -1, 1$  vyjde

$$(2.3.15) \quad \frac{ds_i}{dt} = 0,$$

tedy po integraci budou Keplerovy elementy buď lineární funkcí času - případ (2.3.14), takovýmto změnám říkáme **sekulární**, nebo budou konstanty - případ (2.3.15). Dosadíme-li nyní do LPR příslušné hodnoty za amplitudu  $A$  dostáváme následující soustavu Lagrangeových planetárních rovnic **pro vyjádření sekulární změny Keplerových elementů vlivem  $C_{20}$** :

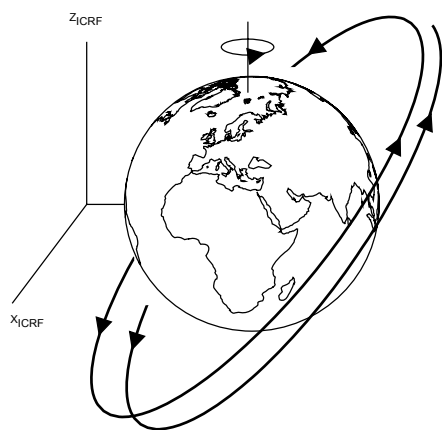
$$(2.3.16) \quad \frac{da}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3\sqrt{5}n}{4} \frac{C_{20}}{(1-e^2)^2} \frac{a_e^2}{a^2} (1-5\cos^2 i)$$

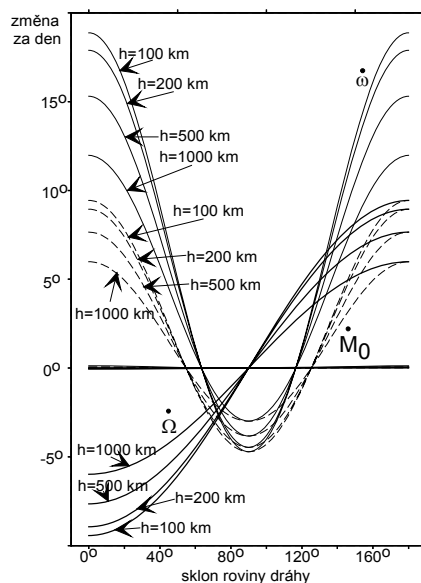
$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3\sqrt{5}n}{2} \frac{C_{20}}{(1-e^2)^2} \frac{a_e^2}{a^2} \cos i$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{3\sqrt{5}n}{4} \frac{C_{20}}{(1-e^2)^{3/2}} \frac{a_e^2}{a^2} (3\cos^2 i - 1)$$

kde  $n$  je střední denní pohyb ( $n^2 a^3 = GM = 398600.4405 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ),  $a_e = 6378137$  m je poloměr referenčního elipsoidu,  $C_{20} = -484.17 \times 10^{-6}$  (normovaná hodnota). Z těchto výrazů je patrné, že sekulární vliv zploštění Země **nemění tvar dráhy** (velká poloosa i excentricita jsou konstantní) a **nemění sklon roviny dráhy** vůči rovníku. Naopak sekulární změně podléhají argument perigea, rektascenze výstupního uzlu a střední anomálie. **Dráha se tedy vůči inerciální soustavě stáčí** - viz obrázek 2.4 - stáčí se i perigeum, družice se pohybuje v jakési spirále. Velikost těchto změn je závislá podle (2.3.16) na velké poloose dráhy  $a$ , sklonu dráhy  $i$  a excentricitě  $e$  (závislost na excentricitě je však u družic s malou excentricitou - a to jsou v podstatě všechny, které budeme uvažovat - minimální). Tuto závislost vyjadřuje Obrázek 2.5.



Obrázek 2.4: Stáčení dráhy družice vlivem  $C_{20}$



Obrázek 2.5: Změna argumentu perigea, rektascenze výstupního uzlu a střední anomálie vlivem  $C_{20}$

Pro změny  $\omega$  a  $\Omega$  lze tedy pro typické dráhy psát

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \in (-5^\circ / \text{den} \div 16^\circ / \text{den}), \quad \frac{d\Omega}{dt} = \dot{\Omega} \in (-10^\circ / \text{den} \div 10^\circ / \text{den}).$$

Bez důkazu zde nyní uvedeme tvrzení, že **sekulární poruchy elementů, působené zploštěním Země jsou největšími poruchami, které na vývoj dráhy UDZ působí.**



### 2.3.2 Rozdělení poruch - sekulární, dlouhoperiodické a krátkoperiodické poruchy dráhy

Vraťme se nyní k výrazu (2.3.10) a (2.3.11). Zavedeme následující rozdělení:

- **sekulární poruchy** jsou neperiodické poruchy,
- **dlouhoperiodické poruchy** jsou poruchy, mající periodu delší než jeden hvězdný den,
- **krátkoperiodické poruchy** jsou poruchy s periodou kratší, nebo rovnou jednomu hvězdnému dni. (Toto dělení není zcela v souladu s obvyklým dělením v nebeské mechanice),
- **$m$ -denní, které mohou být dlouho- i krátkoperiodické.**

Vzhledem k tomu, že velikost periody  $P$  počítáme z výrazu

$$P = \frac{2\pi}{\dot{\psi}} = \frac{360^\circ}{\dot{\psi}}$$

bude o velikosti periody rozhodovat výraz (2.3.11)

$$(2.3.17) \quad \dot{\psi} = (l - 2p)\dot{\omega} + (l - 2p + q)\dot{M} + m(\dot{\Omega} - \dot{S}).$$

Dosaďme sem za denní změny jednotlivých elementů pro **typické dráhy družic**, kterými pro nás budou družice na výškách od 100 km nad Zemí do výšek 36000 km (stacionární dráha). Podle třetího Keplerova zákona odpovídá těmto výškám střední denní pohyb v rozsahu 16.5 oběhů za den až pokles na 1 oběh za den. Tedy

$$\dot{M} \approx n \in (1, 16.5) \text{ oběhů / den},$$

kde  $n$  je střední denní pohyb. Využijeme-li (2.3.17) vidíme, že perioda změny elementů  $\omega, \Omega$  je mnohem delší než jeden hvězdný den (změna je pouze několik stupňů za den, což je podstatně méně než  $360^\circ$  za den), světový hvězdný čas  $S$  má pochopitelně periodu přesně jeden hvězdný den a naopak  $M$  má pro námi vymezený rozsah drah periodu vždy menší, nebo rovnu, jednomu hvězdnému dni (jde o násobek oběhů). Z toho tedy plynou následující **nutné** podmínky pro koeficienty ve  $\dot{\psi}$ :

- **sekulární poruchy:**  $(l - 2p) = 0$ ,  $(l - 2p + q) = 0$ ,  $m = 0$ ,
- **dlouhoperiodické poruchy:**  $(l - 2p) \neq 0$ ,  $(l - 2p + q) = 0$ ,  $m = 0$ ,
- **krátkoperiodické poruchy:**  $(l - 2p + q) \neq 0$  nebo  $m \neq 0$ .

Z těchto podmínek plyne - vzhledem k tomu, že  $l, m, p, q$  jsou celá čísla - pro **sekulární poruchy**

$l = 2p$ ,  $l$  tedy musí být sudé,  $m = 0$ , **sekulární poruchy jsou způsobeny sudými zonálními Stokesovými parametry**. Bez důkazu uvádíme, že se tomu tak děje pouze pro

elementy  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $M$ , na zbylé elementy nemá gravitační pole Země sekulární vliv. Lze tedy například psát

$$(2.3.18) \quad \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{\text{sekul}} = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^{\omega}(a, e, i) C_{2k,0}, \quad \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_{\text{sekul}} = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^{\Omega}(a, e, i) C_{2k,0},$$

kde  $Q$  jsou koeficienty, závisující na  $a$ ,  $e$ ,  $i$ . (Analýza  $\frac{dM}{dt}$  se v praxi neprovádí, vzhledem k tomu, že  $M$  je silně rušeno dalšími vlivy). Výraz (2.3.18) je nekonečnou konvergentní řadou pro vyjádření vlivu sudých zonálních Stokesových parametrů na časovou změnu elementů dráhy družice. Velký význam bude mít při řešení obrácené úlohy - určování Stokesových parametrů ze známých časových změn Keplerových elementů.

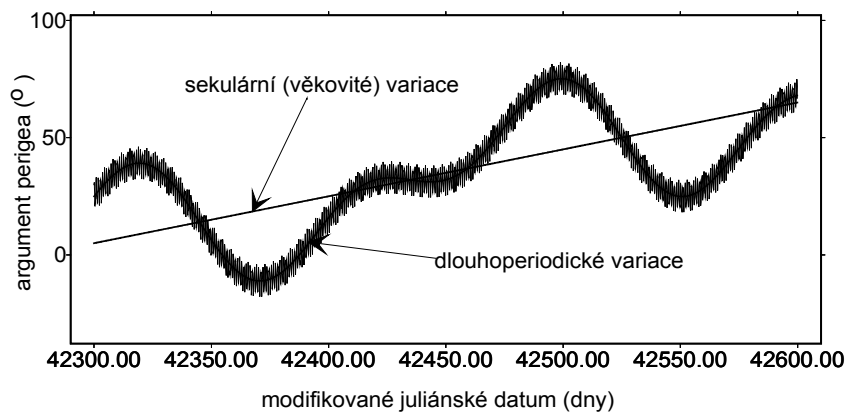
Pro **dlohoperiodické poruchy** dostáváme:

$l - 2p = 1$ , tedy  $l$  musí být liché, argument u  $\omega$  bude pak roven 1, při  $l - 2p = 2$  bude  $l$  naopak sudé a argument u  $\omega$  bude 2 atd. LPR pro dlohoperiodické změny elementů mají pak symbolický tvar

$$(2.3.19) \quad \frac{ds_i}{dt} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} Q_{2k+1}^{s_i} C_{2k+1,0} \right) \cos\left(\omega + j_{s_i} \frac{\pi}{2}\right) + \left( \sum_{k=1}^{\infty} Q_{2k}^{s_i} C_{2k,0} \right) \cos\left(2\omega + j_{s_i} \frac{\pi}{2}\right) + \dots$$

kde  $Q$  jsou opět koeficienty, závisující na  $a$ ,  $e$ ,  $i$ , v první závorce je lineární kombinace lichých zonálních koeficientů s periodou  $\omega$ , ve druhé závorce je lineární kombinace sudých zonálních parametrů s periodou  $2\omega$  atd. Vzhledem k tomu, že v nebeské mechanice platí zásada, že čím je větší perioda, tím je větší amplituda, bude mít největší význam první člen (2.3.19); můžeme formulovat závěr, že **dominantní dlohoperiodické poruchy Keplerových elementů jsou působeny lichými zonálními koeficienty**.

Pro **krátkoperiodické poruchy** máme podle výše uvedené nutné podmínky široký výběr koeficientů  $l$ ,  $m$ ,  $p$ ,  $q$ , celkově lze říci, že **krátkoperiodické poruchy Keplerových elementů jsou působeny všemi Stokesovými parametry**.



**Obrázek 2.6:** Schematické znázornění sekulární, dlohoperiodické a krátkoperiodické změny elementů dráhy UDZ

*Příklad: Uvažujme změnu argumentu perigea  $\omega$ , působenou  $C_{20}$ . Pak tento Stokesův parametr ovlivňuje  $\omega$  sekulárně, dlouhoperiodicky s periodou  $2\omega$ ,  $4\omega$ , ... a krátkoperiodicky s různými periodami, které jsou násobky period  $\omega$  a  $M$  a násobky jejich lineárních kombinací.*

Ukázka změny Keplerova elementu vlivem sekulárních, dlouhoperiodických a krátkoperiodických vlivů je znázorněna na obrázku 2.6.

### **2.3.3 Příklad rezonance.**

#### **2.3.3.1 Dráhové rezonance umělých družic Země – úvod a definice**

Jev *rezonance* je v přírodě běžný a je užíván ve vědě a technice. Rezonanci lze charakterizovat jako stav souměřitelnosti mezi frekvencemi oscilujících či vibrujících systémů. Mějme jev (1) s frekvencí  $f_1$  a jev (2) s frekvencí  $f_2$ . Řekněme, že  $f_1$  je přirozená frekvence nějakého systému a  $f_2$  frekvence z vnějšku dodaná, vtištěná. Jsou-li  $f_1$  a  $f_2$  v poměru celých čísel, pak jsou (1) a (2) v rezonanci, kterou si můžeme označit jako  $f_1/f_2$ . Amplitudy kmitů v „normálním stavu“ malé se v rezonanci zesílí.

Ani v kosmickém prostoru nejsou rezonance výjimkou. Hrají důležitou roli v uspořádání a ve vývoji galaxií i naší Sluneční soustavy. V té je celá řada *dráhových, rotačních, dráhově-rotačních* a dalších rezonančních stavů. Podrobnější informace čtenář nalezne v Dodatku D2.3.3.

*Definice.* K rezonanci  $\beta/\alpha$  ve dráze umělé družice Země (UDZ) dochází, když UDZ uskuteční  $\beta$  nodálních (neboli drakonických) obletů (oběhů kolem) Země (počítáno od vzestupného či sestupného uzlu dráhy družice opět k uzlu téhož typu), zatímco se Země otočí  $\alpha$ -krát kolem své osy vzhledem ke hvězdám (čili za  $\alpha$  hvězdných (siderických) dnů). Přitom  $\alpha$  a  $\beta$  jsou čísla kladná, celá, nesoudělná (prime integers), jejich poměr je neredukovatelný; např. 15/1 či 31/2 nebo 502/35, nikoli však třeba 30/2.

Definice tedy bere v úvahu precesi dráhové elipsy družice, tj. otáčení uzlové přímky a apsidové čáry v prostoru a změnu střední anomálie ve dráze, vše v linearizovaném případě, kdy na  $\omega$ ,  $\Omega$  a  $M_0$  působí jen člen  $C_{2,0}$ , úměrný pólovému zploštění zemského tělesa. (To je logická aproximace, neboť zonální harmonický koeficient  $C_{2,0}$  je ze všech harmonických geopotenciálních koeficientů  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  zdaleka ten největší). Změny dráhových elementů v čase popisují známé Lagrangeovy (planetární) rovnice (LPR). Pro sekulární změny elementů  $\omega$ ,  $\Omega$  a  $M_0$  vlivem jen  $C_{2,0}$  mají jednoduchý tvar (2.3.16).

#### **2.3.3.2 Matematický, fyzikální a geometrický význam rezonančního jevu**

O periodách poruch dráhy rozhoduje proměnná  $\psi_{lmpq}$  v LPR (2.3.8). V okamžiku *exaktní rezonance* je časová derivace  $d\psi_{lmpq}/dt$  rovna nule, tj.  $\psi_{lmpq}$  je konstantní. Pak dochází teoreticky k sekulárním poruchám dráhy. V exaktní rezonanci  $\beta/\alpha$  se ovšem neanuluje  $d\psi_{lmpq}/dt$  pro všechny indexy  $(l,m,p,q)$ , ale jen pro kombinace indexů dané rezonanci adekvátní. Z rov. (2.3.17) a podmínky  $d\psi_{lmpq}/dt = 0$  máme

$$(2.3.3.1) \quad (l - 2p)\omega + (l - 2p + q)M = m(\dot{S} - \Omega).$$

Zvolme

$$(2.3.3.2) \quad (l - 2p + q) = \alpha \cdot \gamma, \quad m = \beta \cdot \gamma.$$

Pak (2.3.3.1) přejde na

$$(2.3.3.3) \quad (\alpha \cdot \gamma)(\omega + M) - q \cdot \omega = \beta \cdot \gamma (\dot{S} - \Omega).$$

Uvažme ještě, že  $\dot{M}(C_{2,0}) = \dot{M}_0(C_{2,0}) + n$ , kde  $n$  je nerušený střední denní pohyb družice (pro UDZ je to obvykle v rozmezí 1-16 ot/den), a že  $\dot{S}$  je derivace hvězdného času podle času čili úhlová rychlost rotace Země ( $= 1.003$  ot / 24 hod). Je zřejmé, že

$$\dot{\omega}(C_{20}), \dot{\Omega}(C_{20}), \dot{M}_0(C_{20})$$

jsou řádově menší než  $n$  či  $\dot{S}$ . Proto z rovnice (2.3.3.1) – po zanedbání menších členů – dostaneme rovnici

$$(2.3.3.4) \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{n}{\dot{S}} = \frac{n_2}{n_1},$$

kteřá názorně popisuje fyzikální a geometrický význam dráhové rezonance UDZ. Jde o souměřitelnost dvou frekvencí, konkrétně oběžné doby družice kolem Země a doby rotace Země kolem své osy. Po  $\beta$  (nodálních) obězích se za  $\alpha$  (siderických) dnů družice vrací přesně na totéž místo nad zemským povrchem. Pak je zřejmé, že se vybrané poruchy, působené gravitačním polem, mohou hromadit a mohou být značné, dokud „rezonanční stav“ trvá. To je v praxi výhoda, neboť informaci o gravitačním poli lze „vytěžit“ i z málo přesných pozorování, která by malé krátkoperiodické změny „nerезonanční“ dráhy jinak nezaznamenala.

Zavedme proměnnou  $\Phi_{\alpha,\beta}$ :

$$(2.3.3.5) \quad \Phi_{\alpha,\beta} = \alpha(\omega + M) + \beta(\Omega - \dot{S}),$$

kteřá se poblíž rezonance  $\beta/\alpha$  bude pomalu měnit a jejíž časová derivace tam bude blízká nule. Tuto proměnnou nazveme rezonanční úhel. Ta a její časová derivace vhodným způsobem popisují vývoj rezonance v reálném případě UDZ za přítomnosti atmosféry Země.

Zjevně platí 
$$\psi_{[l,m,p,q]-rez.} = [\gamma(\Phi_{\alpha,\beta} - \beta\lambda_{[l,m]-rez.})] - q\omega.$$

V reálném případě UDZ existují významné negravitační poruchy dráhy. Pro dráhy s výškou letu pod 500 km dominuje odpor atmosféry, který omezuje a určuje životnost družice ve dráze, v závislosti na excentricitě dráhy a na sluneční činnosti (kteřá „řídí“ variace hustoty atmosféry s časem). „Odpor atmosféry“ a „gravitační pole“ lze chápat jako spolu „soupeřící“ faktory, přičemž atmosféra (pro blízké družice) nakonec vždy zvítězí. Negravitační poruchy dráhy narušují dosaženou rezonanční dráhu a pokud družice není aktivní (nemá korekční motorky), dříve či později rezonanční dráhu opustí. V praxi proto hovoříme o „přechodu exaktní rezonancí“. Podstatné je, jak dlouho se družice ve stavu blízkém exaktní rezonanci

dokáže udržet a kolik měření za tu dobu získáme k určení dráhových elementů její dráhy a k případnému provedení inverzní úlohy k určení parametrů gravitačního pole Země.

Rezonanční jevy ve drahách UDZ mají aplikace ve studiu gravitačního pole Země i v oceánografii (viz odst. 7.3). Podrobnější pojednání o teorii i aplikacích rezonancí je v Dodatku D2.3.3, kam odkazujeme i na obrázky předvádějící průběh vybrané dráhové rezonance ve sklonu dráhy družic.

### **2.3.3.3 Rezonanční indexy (l, m, p) v pohybových rovnicích**

Vyberme rezonanční indexy pro zvolenou rezonanci  $\beta/\alpha$ , „rezonanční úroveň“ (overtone)  $\gamma$ , a index  $q$ , který se vztahuje k excentricitě dráhy (v praxi připadají v úvahu většinou jen  $q = 0$  a  $q = +1, -1$ ). Tyto výsledky použijeme k napsání „rezonančního“ tvaru Lagrangeových planetárních rovnic (LPR) a k definici lumped koeficientů (t.j. jistých lineárních kombinací harmonických geopotenciálních koeficientů).

Odlišíme případy s  $[(\beta - \alpha) \cdot \gamma]$  sudými a lichými. Rozdíl  $(l - m)$  lze pomocí (2.3.3.2) napsat jako  $2p - [(\beta - \alpha) \cdot \gamma + q]$ . Je-li  $(l - m)$  sudé (liché), pak  $[(\beta - \alpha) \cdot \gamma + q]$  musí být také sudé (liché), neboť  $2p$  je vždy sudé ( $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ ). Pro  $(l - m) = 0, 2, 4, \dots$  je  $p = (\beta - \alpha) \cdot \gamma + q$ ;  $(\beta - \alpha) \cdot \gamma + q + 1$ ;  $(\beta - \alpha) \cdot \gamma + q + 2$ , atd. a  $l = \beta \cdot \gamma$ ;  $\beta \cdot \gamma + 2$ ;  $\beta \cdot \gamma + 4$ , atd. Obecně tedy pro  $(\beta - \alpha) \cdot \gamma + q$  sudé, máme

$$(2.3.3.6) \quad \begin{aligned} l_i &= \beta \gamma + 2i; \\ m_i &= \beta \gamma; \\ p_i &= \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \cdot \gamma + q + i. \end{aligned}$$

$$\text{Pro } (\beta - \alpha) \cdot \gamma + q \text{ liché} \quad \begin{aligned} l_i &= \beta \gamma + (2i+1); \\ m_i &= \beta \gamma; \\ p_i &= \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \cdot \gamma + q + i, \end{aligned}$$

kde index  $i$  je 0, 1, 2, ...

V Dodatku D2.3.3 je tabulka s konkrétními příklady rezonančních indexů pro vybrané rezonance  $\beta/\alpha$  a zvolené parametry  $\gamma, q$ .

## **2.4 Gravitační vliv Slunce a Měsíce na dráhu umělé družice Země**

Gravitační působení Slunce a Měsíce na dráhu umělé družice Země (UDZ) je možné rozdělit na vliv

- **přímý**, který je působen gravitačními silami Slunce a Měsíce,
- **nepřímý**, který je působen zemskými a oceánickými slapy (přilivy a odlivy).

Nejdříve se budeme zabývat **přímým vlivem**. Vyjdeme opět z Newtonova gravitačního zákona, kde silovou funkci (potenciál) z výrazu (2.3) zobecníme. Vyjdeme z předpokladu, že Země, Slunce, Měsíc a družice jsou sféricky symetrická tělesa, jejichž silová pole lze charakterizovat potenciálem hmotného bodu. Silovou funkci (potenciál)  $V$  těchto čtyř těles vyjádříme pomocí výrazu

$$(2.4.1) \quad V = \frac{GmM_z}{\rho_{zd}} + \frac{GmM_s}{\rho_{sd}} + \frac{GmM_m}{\rho_{md}} + \frac{GM_m M_z}{\rho_{mz}} + \frac{GM_s M_z}{\rho_{sz}} + \frac{GM_m M_s}{\rho_{ms}},$$

kde indexy  $z$  označujeme Zemi,  $s$  - Slunce,  $m$  - Měsíc a  $d$  - družici,  $M_z$  je hmotnost Země,  $M_s$  hmotnost Slunce,  $M_m$  je hmotnost Měsíce a  $m$  je hmotnost družice,  $G$  je univerzální gravitační konstanta a  $\rho$  značí vzájemnou vzdálenost těles.

Zvolme nyní obecnou inerciální souřadnicovou soustavu, jejíž počátek leží mimo tato tělesa. Pak definujeme vektory - průvodiče  $\mathbf{r}_z, \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_m, \mathbf{r}_d$ . Z definice skalárního součinu platí

$$(2.4.2) \quad \rho_{zd}^2 = (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_z) \cdot (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_z)$$

a podobně pro ostatní tělesa. V takto zvolené souřadnicové soustavě píšeme Newtonovu pohybovou rovnici družice

$$(2.4.3) \quad m\ddot{\mathbf{r}}_d = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_d}.$$

Pro další postup bude užitečné připomenout, že platí

$$(2.4.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2} = \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}}{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{1/2}} = \frac{\mathbf{r}}{\rho}.$$

Dosaďme nyní do (2.4.3) z (2.4.2) a provedme naznačené derivace. Tak například

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_d} \left( \frac{GmM_z}{\rho_{zd}} \right) = -\frac{GmM_z}{\rho_{zd}^2} \frac{\partial \rho_{zd}}{\partial (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_z)} \frac{\partial (\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_z)}{\partial \mathbf{r}_d} = -\frac{GmM_z}{\rho_{zd}^2} \frac{\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_z}{\rho_{zd}}$$

a

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_d} \left( \frac{GM_z M_m}{\rho_{zm}} \right) = 0.$$

Dosaďme-li nyní do (2.4.3) píšeme

$$(2.4.5) \quad m\ddot{\mathbf{r}}_d = -Gm \left( M_z \frac{\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_z}{\rho_{zd}^3} + M_s \frac{\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_s}{\rho_{sd}^3} + M_m \frac{\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_m}{\rho_{md}^3} \right).$$

Vzhledem k tomu, že nás zajímá pohyb družice v inerciální soustavě, jejíž počátek je posunut do středu Země, provedeme příslušnou translaci. Pro libovolný vektor  $\mathbf{r}$  pak platí

$$\bar{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_z.$$

Když si ještě uvědomíme, že i pro Zemi platí  $M\ddot{\mathbf{r}}_z = \partial V / \partial \mathbf{r}_z$ , můžeme přepsat pohybový zákon na tvar

$$(2.4.6) \quad m\ddot{\rho}_d = m\mathbf{r}_d - m\mathbf{r}_z = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_s} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_z} \frac{m}{M_z}.$$

První člen na pravé straně vyjadřuje (2.4.5), spočítejme druhý člen

$$(2.4.7) \quad \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_z} \frac{m}{M_z} = -G \frac{M_s}{\rho_{zs}^2} \frac{\mathbf{r}_z - \mathbf{r}_s}{\rho_{zs}} - G \frac{M_m}{\rho_{zm}^2} \frac{\mathbf{r}_z - \mathbf{r}_m}{\rho_{zm}} = G \frac{M_s}{\rho_{zs}^3} \vec{\rho}_s + G \frac{M_m}{\rho_{zm}^3} \vec{\rho}_m.$$

Spojením (2.4.6) a (2.4.7), když ještě využijeme (2.4.5) a vektory  $\mathbf{r}$  redukuje ke středu Země, dostáváme

$$(2.4.8) \quad m\ddot{\rho}_d = -Gm \left[ M_z \frac{\vec{\rho}_d}{\rho_{zd}^3} + M_s \left( \frac{\vec{\rho}_d - \vec{\rho}_s}{\rho_{ds}^3} + \frac{\vec{\rho}_s}{\rho_{zs}^3} \right) + M_m \left( \frac{\vec{\rho}_d - \vec{\rho}_m}{\rho_{dm}^3} + \frac{\vec{\rho}_m}{\rho_{zm}^3} \right) \right].$$

První člen v (2.4.8) vyjadřuje pohyb družice kolem Země (zde reprezentované hmotným bodem), tímto případem jsme se již zabývali výše, další dva členy pak vyjadřují vliv Slunce a Měsíce. Pokusme se zpětně ke druhému a třetímu členu na pravé straně „odhadnout“ potenciál, abychom mohli pohybovou rovnici (2.4.8) - v níž ponecháme členy, zahrnující pouze vliv Slunce a Měsíce - formálně přepsat na tvar

$$(2.4.9) \quad m\ddot{\rho}_d = \frac{\partial V_{sm}}{\partial \vec{\rho}_d}.$$

Zpětným výpočtem bychom se přesvědčili, že tomu vyhovuje potenciál:

$$(2.4.10) \quad V_{sm} = Gm \left[ M_s \left( \frac{1}{\rho_{ds}} - \frac{\vec{\rho}_s \cdot \vec{\rho}_d}{\rho_{zs}^3} \right) + M_m \left( \frac{1}{\rho_{dm}} - \frac{\vec{\rho}_m \cdot \vec{\rho}_d}{\rho_{zm}^3} \right) \right].$$

### Vliv lunisolárních poruch na dráhu družice:

a) V případě, že použijeme numerickou integraci rovnic (2.4.3), lze poruchový potenciál doplnit o člen  $V_{sm}$  a rovnici integrovat.

b) V případě použití LPR lze opět poruchový potenciál (2.4.10) transformovat do Keplerových elementů, v tomto případě používáme Keplerových elementů pro vyjádření pohybu nejen družice, ale i Slunce a Měsíce. LPR lze pak formálně přepsat na tvar podobný (2.3.9):

$$(2.4.11) \quad \left. \frac{ds_i}{dt} \right|_s = GM_s \sum_{lmpq'q'} A_{lmpq'q'}^{s_i} (a, e, i, a_s, e_s, i_s) \cos \left( \psi_{lmpq} - \psi_{lmp'q'} + j_{s_i} \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\psi_{lmpq} = (l - 2p) \omega + (l - 2p + q)M + m\Omega,$$

$$\psi_{lmp'q'} = (l - 2p') \omega_s + (l - 2p' + q')M_s + m\Omega_s,$$

kde  $a_s, e_s, i_s, \omega_s, \Omega_s, M_s$  jsou střední Keplerovy elementy Slunce (předpokládáme tedy v tomto případě, že se Slunce pohybuje kolem Země - z hlediska teorie relativity jsou všechny souřadnicové soustavy rovnocenné, my v této chvíli používáme výhodnější geocentrickou),  $s_i$  a  $a, e, i, \dots$  jsou již zavedené Keplerovy elementy družice,  $M_s$  je hmotnost Slunce. Výraz (2.4.11) platí pro zahrnutí gravitačního vlivu Slunce, obdobný výraz je možné psát pro zahrnutí gravitačního vlivu Měsíce - index  $u$  elementů  $s$  nahradíme indexem  $m$  a místo  $M_s$  píšeme  $M_m$ .

Spokojíme-li se dále s přesností integrace prvního řádu, vidíme z (2.4.11), že pohyb družice je možné - podobně jako v případě vlivu gravitačního pole Země - vyjádřit součtem periodických funkcí. I zde může dojít k situaci, kdy argument kosinu je roven nule - pak dochází k sekulárním poruchám. Obecně je možné formulovat závěr, že **přímé lunisolární poruchy působí periodické změny všech Keplerových elementů dráhy a sekulární poruchy argumentu perigea  $\omega$ , rektascenze výstupního uzlu  $\Omega$  a střední anomálie  $M$ .**

**Nepřímý** vliv Slunce a Měsíce je působen zemskými a oceánickými slapy (přílivem a odlivem). Z fyzikální geodezie je známo, že zemské a oceánské slapy vznikají působením gravitačních sil Slunce a Měsíce na elastickou Zemi, resp. vodní masy oceánů a moří. Toto působení vyvolává deformaci Země, resp. oceánů, tato deformace pak působí změnu gravitačního potenciálu Země a má ve svém důsledku vliv na pohyb družice. Změnu gravitačního pole, působenou slapovou deformací můžeme vyjádřit pomocí dodatkového potenciálu

$$(2.4.12) \quad \Delta V_{sm}^{slap} = k V_{sm}^{slap},$$

kde  $V_{sm}^{slap}$  je slapový potenciál (viz Fyzikální geodezie) a koeficient  $k$  je **Loveho elastický parametr**, který vyjadřuje poměr dodatkového a slapového potenciálu a je mírou elasticity Země (v případě, že  $k = 0$  je Země dokonale tuhá, nedeformuje se, dodatkový potenciál nevzniká, naopak v případě  $k = 1$  je Země ideální kapalina, veškeré slapové působení spotřebuje na deformaci, pro reálnou Zemi platí  $k = 0.3$ ). K vyjádření vlivu slapových deformací na pohyb družice je opět možné použít obdoby (2.4.11), lze dokázat, že platí: **nepřímé lunisolární (slapové) poruchy působí periodické změny všech Keplerových elementů dráhy a sekulární poruchy argumentu perigea  $\omega$ , rektascenze výstupního uzlu  $\Omega$  a střední anomálie  $M$** , přičemž v případě vlivu Slunce platí

$$(2.4.13) \quad \begin{aligned} \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_s^{slap} &= k \left( \frac{a_e}{a_s} \right)^2 \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_s, \\ \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_s^{slap} &= k \left( \frac{a_e}{a_s} \right)^2 \left. \frac{d\Omega}{dt} \right|_s, \\ \left. \frac{dM}{dt} \right|_s^{slap} &= 3k \left( \frac{a_e}{a_s} \right)^2 (1 + 4e^2) \left. \frac{dM}{dt} \right|_s \end{aligned}$$

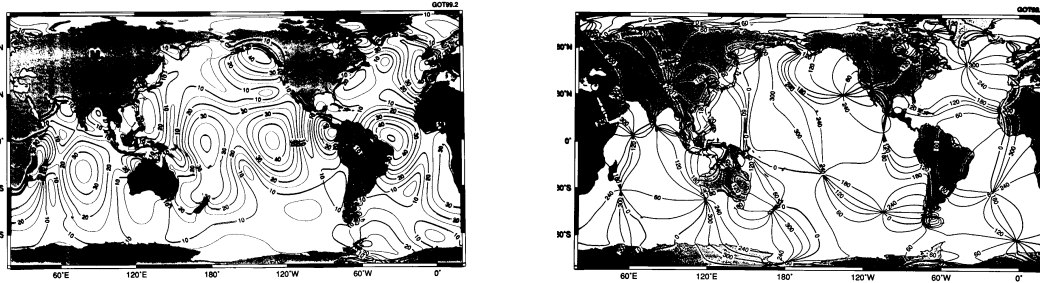
a v případě vlivu Měsíce zaměníme pouze  $s$  za  $m$ . Výrazy  $\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_s$  atd. vyjadřují přímý lunisolární efekt. Přestože nejvýraznější slapové změny tvaru Země (a tím i gravitačního pole) mají periodu blízkou jednomu dnu a polovině dne, projevuje se slapový efekt dominantně



dlohoperiodickými (podle naší definice vícedenními) a sekulárními poruchami - to je v důsledku rozdílu funkcí  $\psi_{lmpq} - \psi_{lmp'q'}$  ve „slapové“ období (2.4.11) při vhodně vybrané kombinaci indexů  $l, m, p, q, p', q'$ . *Poznámka: To, že se původně krátkoperiodický slapový jev mění na dlohoperiodický vliv ve změně elementů dráhy umožňuje určovat z analýzy dominantních poruch Keplerových elementů elastický parametr  $k$ .*

Přesuny vodních hmot ve světových oceánech a mořích, způsobené vlivem **oceánských slapů (přílivů a odlivů)**, resp. přesuny atmosféry, způsobené **atmosférickými slapy** mění gravitační potenciál Země. Tato změna gravitačního potenciálu ovlivňuje dráhy družic. Slapový vliv oceánů, resp. atmosféry je možné zahrnout do Stokesových parametrů, které se pak stávají rychle časově proměnnými parametry. Reálný (měřitelný) význam má v tomto případě pouze „globální“ vliv, vyjádřitelný Stokesovými parametry 2. až 6. stupně. Amplitudy slapových zdvihů oceánů této globální aproximace jsou řádu jednotek cm (největší polodenní slapová změna působená Měsícem je pouze 3.2 cm), přestože lokální oceánské slapy dosahují daleko vyšších hodnot (60 cm na volném moři, desítku metrů u pobřeží). Důvodem rozdílu je právě *globální aproximace*, která vlastně „rozprostírá“ slapový vliv na celou Zemi, přestože k němu dochází pouze na oceánech. Bez odvození zde uvedeme výraz pro změnu Stokesových parametrů  $\Delta C_{lm}, \Delta S_{lm}$ , působenou oceánskými slapy

$$(2.4.14) \quad \begin{matrix} \Delta C_{lm} \\ \Delta S_{lm} \end{matrix} = \sum_s A_s \begin{Bmatrix} C_{slm} \cos \\ -S_{slm} \sin \end{Bmatrix} \Theta_s$$



**Obrázek 2.7:** Ukázka kotidální mapy, vlevo amplitudy v mm, vpravo fáze ve stupních

kde  $A_s$  je násobný koeficient závislý na hustotě mořské vody a gravitační konstantě,  $\Theta_s$  je lineární kombinace elementů Slunce a Měsíce (podobná nutační - viz GA10), tato lineární kombinace definuje *slapovou vlnu  $s$*  a  $C_{slm}, S_{slm}$  jsou příslušné amplitudy slapových vln, odvozené z tzv. kotidálních map. (Kotidální mapy - viz obr. 2.7 - jsou mapy zobrazující amplitudy a fáze oceánských slapových vln v závislosti na greenwichském hodinovém úhlu Slunce nebo Měsíce. Pro každou slapovou vlnu je konstruována jedna mapa. Na obrázku 2.9 je znázorněn průběh amplitud a fází „zatěžovacích“ mořských slapů, polodenní vlny, působené vlivem Měsíce  $M_2$ . Nejdůležitější slapové vlny jsou polodenní a celodenní působené jak Sluncem, tak Měsícem). Amplituda slapů atmosféry je cca 0.6 cm.

K integraci pohybových rovnic můžeme pak použít (2.3.1) nebo (2.3.9). Jiným přístupem je transformace poruchového potenciálu do Keplerových elementů a využití výrazů

obdobných (2.4.11). Lze ukázat, že periody změn Keplerových elementů, působené oceánskými slapy jsou identické s periodami slapů elastické Země - tyto vlivy nelze tedy při zpětné analýze elementů jednoduše oddělit. Vliv oceánských slapů dosahuje asi 10 - 30% vlivu slapů elastické Země. **Oceánské a atmosférické slapy působí periodické změny všech Keplerových elementů dráhy a sekulární poruchy argumentu perigea  $\omega$ , rektascenze výstupního uzlu  $\Omega$  a střední anomálie  $M$ .**

## **2.5 Další gravitační poruchy**

Mezi další gravitační poruchy patří

- **gravitační vliv rotačních deformací zemského tělesa** způsobený změnou odstředivé síly elastické Země. Vzhledem k pohybu pólu, který chápeme jako změnu polohy osy rotace Země vůči fixované souřadnicové soustavě, se mění i velikost odstředivé síly, působící na jednotlivé body zemského tělesa, elastická Země se deformuje, deformace opět vyvolává dodatkový potenciál a ten působí na dráhu družice,
- **vliv precese a nutace** - působí pouze v případě, kdy transformujeme potenciál z terestrické soustavy do inerciální soustavy „přibližným“ způsobem - jak to bylo provedeno např. v (2.3.5), pokud provedeme transformaci přesně, pak je vliv nulový,
- **poruchy od planet Sluneční soustavy** - pro družice na nízkých drahách a pro „geodetické“ a „geodynamické“ družice (viz kapitola 4) je zanedbatelný.

## **2.6 Poruchy dráhy, působené nekonzervativními silami**

V tomto odstavci se budeme zabývat poruchami dráhy, působenými nekonzervativními silami. Podle definice konzervativních a nekonzervativních sil, uvedené na začátku kapitoly, půjde o síly **negravitačního původu**. Rozhodující vliv na změnu dráhy má

- **tlak slunečního záření** a to jak přímého, tak odraženého a
- **odpor atmosféry**

Malým vlivem - vyplývajícím převážně z fyzikálních poměrů na družici - působí

- **Yarkovského efekt** (vliv většího vyzařování teplejší části osvětlené strany rotující družice),
- **Poyntingův-Robertsonův efekt** (vliv většího počtu slunečních fotonů dopadajících na čelní, než na zadní stranu pohybujícího se tělesa),
- **Schachův efekt** (obdoba Yarkovského efektu pro nerotující družice),
- **tlak meziplanetárního prachu** a
- **termální záření** - vliv tepelného vyzařování Země a jeho změn

V dalším se budeme věnovat rozhodujícím vlivům, malé vlivy zcela pomineme.

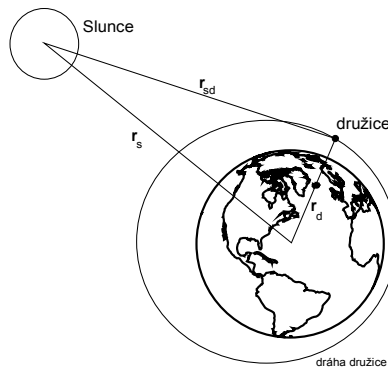
## 2.6.1 Vliv tlaku slunečního záření

### 2.6.1.1 Vliv přímého tlaku slunečního záření

Poruchové zrychlení (síla)  $\mathbf{F}$  družice, způsobené tlakem slunečního záření je možné vyjádřit experimentálně odvozeným vztahem

$$(2.6.1) \quad \mathbf{F} = \tilde{k} \left( \frac{1}{r_{sd}} \right)^2 C_R \frac{A}{m} \cdot \frac{\mathbf{r}_{sd}}{r_{sd}},$$

kde  $\tilde{k} = 4.5605 \times 10^{-6} \text{ Nm}^{-2}$  je tlak slunečního záření, působící na plochu  $1 \text{ m}^2$  ve vzdálenosti 1 AU (AU = astronomická jednotka, střední vzdálenost Země - Slunce),  $\mathbf{r}_{sd}$  je heliocentrický vektor družice - viz obrázek 2.8 -  $C_R$  je koeficient odrazivosti ( $C_R = 1$  pro případ dokonalého pohlcování i pro dokonalý odraz, max  $C_R = 1.44$  při dokonalém rozptylu),  $A$  je plocha příčného průřezu družice,  $m$  je hmotnost družice a  $\mathbf{r}_{sd}/r_{sd}$  je jednotkový vektor směru působení síly  $\mathbf{F}$ .



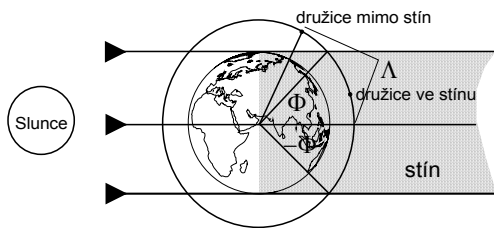
**Obr. 2.8:** Vliv tlaku slunečního záření

Vliv na dráhu družice je pak možné vyjádřit buď přímo dosazením rušivé síly do Newtonova pohybového zákona (2.4), nebo pomocí *Gaussových planetárních rovnic* (GPR). Složky poruchové síly  $\mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$  je však nejdříve nutné transformovat na složky  $S, T, W$ . GPR je pak možné integrovat numericky nebo polonumericky, analytické řešení (obdoba teorie prvního řádu, jak ji známe z gravitačních poruch) je příliš komplikované.

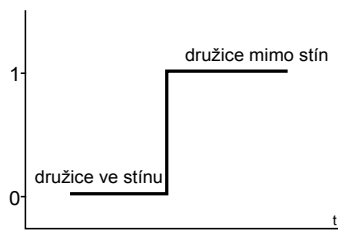
Vzhledem k tomu, že tlak slunečního záření může působit na družici pouze když je osvětlena Sluncem, tedy nalézá se mimo zemský stín, vstupuje do hry **funkce stínu**  $\psi$ . Podle obrázku 2.9 lze psát

$$(2.6.2) \quad \begin{aligned} \psi &= 0 & \text{pro } \Lambda \in \langle -\Phi, \Phi \rangle, \\ \psi &= 1 & \text{pro } -\pi < \Lambda < \Phi, \quad \Phi < \Lambda < \pi \end{aligned}$$

kde  $\Lambda$  je poziční úhel, měřený od spojnice Slunce-Země a  $\Phi$  je středový úhel hranice stínu.



Obrázek 2.9: K definici funkce stínu



Obrázek 2.10: Vyjádření funkce stínu

Funkce stínu je pak skokovou funkcí - viz obrázek 2.10, ve skutečnosti je však přechod ze stínu na světlo plynulý, funkce stínu se tedy mění spojitě a ne skokově, stále však v rámci intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ . Uvažujeme-li funkci stínu, musíme pak výraz (2.6.1) nahradit výrazem

$$(2.6.3) \quad \mathbf{F}_{\text{tlak sl. zář}} = \mathbf{F} \cdot \psi,$$

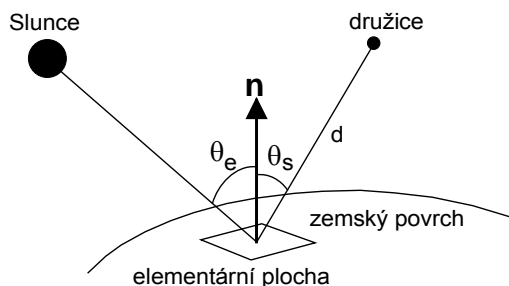
kde  $\psi$  je funkce stínu.

### 2.6.1.2 Vliv tlaku odraženého slunečního záření

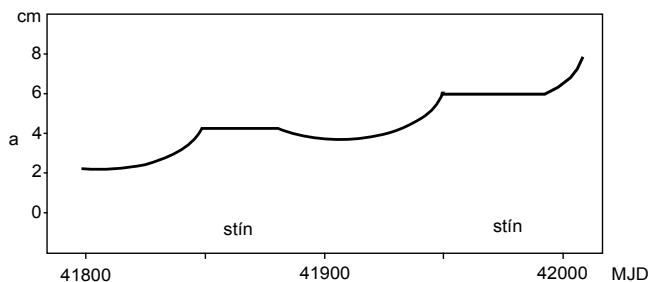
Podle obrázku 2.11 je možné vyjádřit diferenciální tok záření  $d\varphi$  dopadajícího na družici výrazem

$$(2.6.3) \quad d\varphi = A(\Phi, \Lambda) \frac{1}{\pi d^2} E_0 \cos \Theta_d \cos \Theta_s dS,$$

kde  $A(\Phi, \Lambda)$  je tzv. **albedo** (odrazivost) plošky  $dS$  o zeměpisných souřadnicích  $\Phi, \Lambda$ ;  $E_0$  je sluneční konstanta. Význam úhlů  $\Theta$  je patrný z obrázku. Elementární tok je pak možné převést na energii a tu na povrchovou sílu  $\mathbf{F}$ . Albedo je možné rozvinout do sférických funkcí a celou úlohu řešit polonumericky.



Obrázek 2.11: Působení tlaku odraženého záření



Obrázek 2.12: Pseudosekulární změny velké poloosy, působené průchodem družice stínem

**Vliv tlaku slunečního záření na Keplerovy elementy dráhy družice.** Všechny poruchy mají charakter dlouhoperiodických a krátkoperiodických poruch ve všech elementech. Dlouhoperiodické poruchy jsou působeny kombinací efektu tlaku záření a poruch

působených zploštěním Země (vliv  $C_{20}$ ). Dále dochází k pseudosekulárním poruchám způsobeným vlivem stínu, jak je to naznačeno na obrázku 2.12.

### **2.6.2 Vliv odporu atmosféry**

Na rozdíl od tlaku slunečního záření je matematické podchycení odporu atmosféry složitější v důsledku špatné znalosti průběhu hustoty atmosféry.

Složky poruchové síly (poruchového zrychlení)  $\mathbf{F}$  je možné psát v inerciální soustavě s rovníkovými souřadnicemi  $S_{r2}$  ve tvaru

$$(2.6.4) \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho \begin{pmatrix} \dot{x} & -y \\ \dot{y} & x \\ \dot{z} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -V \\ \omega_a^2 \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix},$$

kde  $A$  je příčný průřez a  $m$  je hmotnost družice,  $C_D$  je aerodynamický koeficient odporu atmosféry,  $\rho$  je hustota atmosféry ve sledovaném bodě,  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  jsou složky vektoru polohy a rychlosti družice v rovníkové soustavě  $S_{r2}$ ,  $V$  je rychlost družice a  $\omega_a$  je rychlost rotace atmosféry vůči  $S_{r2}$ . Hodnota  $\omega_a$  se vyjadřuje pomocí rychlosti v otočkách za den  $\Lambda$ , takže platí:

$$\omega_a (\text{rad s}^{-1}) = 2\pi \Lambda (\text{ot.den}^{-1}) / 86400.$$

Pro  $\Lambda=1$  je rychlost pohybu atmosféry vůči Zemi nulová, reálná hodnota  $\Lambda = 1.0 - 1.2$  je způsobena zonálními větry (vanoucími podél rovnoběžek).

Největším problémem je určení reálné hustoty atmosféry. Většinou jsme nuceni v důsledku nedostatku aktuálních informací případ zjednodušit. Z výsledků experimentů je známo, že hustota atmosféry klesá exponenciálně s výškou. Nejjednodušší vzorec zní

$$(2.6.5) \quad \rho = \rho_0 \exp(-kh),$$

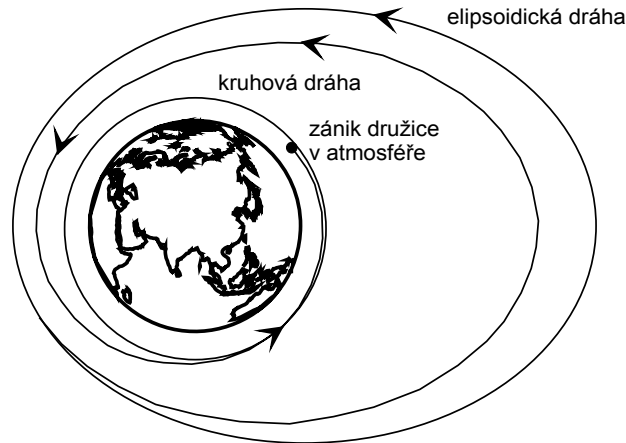
kde  $\rho_0$  je hustota ve výšce  $h = 0$  km a  $k = 0.1082$ . Přesnější vzorec zní

$$(2.6.6) \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{h-h_0}{H}\right),$$

kde  $\rho_0$  odpovídá výšce  $h_0$  a  $H$  je škála výšek (výškový rozdíl, odpovídající  $e$  násobné změně hustoty atmosféry). Kromě závislosti na výšce závisí hustota atmosféry  $\rho$  také na poloze a činnosti Slunce. Nejpresnější vzorce uvažují i změny hustoty atmosféry, která má denní, dvacetisedmidenní, půlroční a jedenáctiletou periodu, související se sluneční aktivitou. Odchyłky od průměru dosahují však až 200% hodnoty!

**Vliv odporu atmosféry na Keplerovy elementy dráhy družice.** Pro integraci dráhy je možné použít přímo Newtonova zákona (2.4) a numerické integrace, nebo je možné transformovat  $F_x, F_y, F_z$  na složky  $S, T, W$  a použít GPR. Integraci je možno provádět buď

přibližně analyticky, poloanalyticky, nebo numericky - to záleží na stupni zjednodušení úlohy. **Dominantním efektem je sekulární změna velké poloosy a excentricity dráhy** - viz obrázek 2.13 a následující odstavec 2.6.2.1. Dráha družice se v důsledku odporu atmosféry snižuje a excentricita klesá k nule, dráha se stává kruhovou. Malé sekulární změny  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  jsou způsobeny rotací atmosféry pro družice na drahách o výšce 200 - 500 km. Dále způsobuje vliv odporu atmosféry malé krátkoperiodické poruchy ve všech elementech.



**Obrázek 2.13:** Sekulární změna velké poloosy a excentricity dráhy družice, působená odporem atmosféry

### 2.6.2.1 Sekulární změna velké poloosy a excentricity dráhy, působená vlivem odporu atmosféry

V tomto odstavci naznačíme - ve značně zjednodušeném případě - ovození sekulární (věkovité) změny velké poloosy  $a$  a excentricity  $e$  keplerovské dráhy družice. Vyjdeme z empirií potvrzeného výrazu (2.6.4). Jelikož při pohybu družice v atmosféře působí odpor atmosféry proti směru vektoru rychlosti družice  $\mathbf{v}$ , lze pro složku poruchové síly, mající nositelku totožnou s vektorem rychlosti, s využitím (2.6.4) psát

$$(2.6.7) \quad \mathbf{F}_v = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho v^2 \cdot \frac{\mathbf{v}}{v},$$

kde  $\mathbf{v}/v$  je jednotkový vektor ve směru rychlosti pohybu družice (vektor  $\mathbf{v}$  je vektor rychlosti družice a  $v$  je jeho velikost). Pro řadu případů je možné předpokládat

$$(2.6.8) \quad C_D \frac{A}{m} = D = konst.$$

Pro použití GPR je nutné rozložit vektor  $\mathbf{F}_v$  na složku ve směrech  $S$  a  $T$  (složku  $W$  nebudeme v našem případě potřebovat). Označíme-li složku vektoru rychlosti  $\mathbf{v}$  v radiálním směru  $S$  jako  $\mathbf{v}_S$  a složku ve příčném směru  $T$  jako  $\mathbf{v}_T$ . Ze známých výrazů analytické geometrie je známo, že pro velikosti  $S$  a  $T$  platí

$$(2.6.9) \quad T = F_v \frac{v_T}{v}, S = F_v \frac{v_S}{v}$$

$$v_T = |\mathbf{v}_T|, v_S = |\mathbf{v}_S|, v = |\mathbf{v}|$$

Z Keplerova zákona jsme pro  $v_T$  a  $v_S$  odvodili - viz GA10, odstavec 3.2.3 a předchozí -

$$(2.6.10) \quad v_T = \frac{GM}{h}(1 + e \cos \tilde{\nu}), \quad v_S = \frac{GM}{h} e \sin \tilde{\nu}, \quad h = \sqrt{GMa(1 - e^2)}$$

když jsme ještě pro označení pravé anomálie použili  $\tilde{\nu}$ . Dosadíme-li nyní z (2.6.10) do (2.6.9) dostáváme

$$(2.6.11) \quad T = F_v \frac{GM}{hv}(1 + \cos \tilde{\nu}), \quad S = F_v \frac{GM}{hv} e \sin \tilde{\nu}.$$

Dosadíme-li nyní do GPR pro  $da/dt$  a  $de/dt$  z (2.6.7), (2.6.8) a (2.6.11) dostáváme

$$(2.6.12) \quad \frac{da}{dt} = F_v \frac{2a^2 v}{GM} = -D\rho \frac{v^3 a^2}{GM}, \quad \frac{de}{dt} = F_v \frac{2(e + \cos \tilde{\nu})}{v} = -vD\rho(e + \cos \tilde{\nu}).$$

Pro určení sekulárních poruch ještě rovnice (2.6.12) upravíme. Vyjdeme z integrálu energie, který lze z třetího Keplerova zákona a z rovnic keplerovského pohybu (viz GA10, kapitola 3) přepsat na tvar

$$(2.6.13) \quad v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = n^2 a^3 \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}.$$

Z Keplerovy rovnice - GA10, výraz (3.2.16) - dále platí

$$(2.6.14) \quad \frac{dE}{dt} = \dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E},$$

kde  $E$  je excentrická anomálie a  $n$  střední denní pohyb družice. Z keplerovského pohybu dále víme, že  $E$  je rostoucí funkce na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  a lze tedy definovat inverzní funkci  $t = t(E)$ . Pro derivaci inverzní funkce platí

$$(2.6.15) \quad \frac{dt}{dE} = \frac{1}{\frac{dE}{dt}} = \frac{1 - e \cos E}{n}.$$

Hledejme nyní derivaci  $a$  resp.  $e$  podle  $E$ , pro hledání sekulárních poruch to bude výhodnější. Pomocí pravidla pro derivaci složené funkce, (2.6.14) a (2.6.15) lze psát

$$(2.6.16) \quad \frac{da}{dE} = \frac{da}{dt} \frac{dt}{dE} = \frac{da}{dt} \frac{1 - e \cos E}{n}, \quad \frac{de}{dE} = \frac{de}{dt} \frac{dt}{dE} = \frac{de}{dt} \frac{1 - e \cos E}{n}.$$

Dosadíme-li nyní do (2.6.16) z (2.6.12) a (2.6.13) a provedeme delší úpravy, dostáváme

$$(2.6.17) \quad \frac{da}{dE} = -Da^2 \rho \sqrt{\frac{(1+e \cos E)^3}{1-e \cos E}}, \quad \frac{de}{dE} = -Da \rho (1-e^2) \sqrt{\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}} \cos E.$$

Vzhledem k tomu, že předpokládáme, že  $e \ll 1$ , lze aplikovat na výrazy s  $e$  binomickou větu. Zanedbáme-li členy 2. a vyšších řádů v  $e$  a integrujeme-li přes jeden oblet (tj. přes  $E$  od 0 do  $2\pi$ ) lze poslední výraz přepsat na tvar

$$(2.6.18) \quad \begin{aligned} \Delta a|_{ob^h} &= -Da^2 \int_0^{2\pi} (1+2e \cos E) \rho dE, \\ \Delta e|_{ob^h} &= -Da(1-e^2) \int_0^{2\pi} (1+e \cos E) \rho \cos E dE. \end{aligned}$$

Předpokládejme ještě, že  $\rho$  je během obletu konstantní. Z posledního výrazu je ihned patrné, že v obou případech se po integraci objeví na pravé straně neperiodický člen záporného znaménka, tedy za jeden oběh se velká polosa  $a$  zmenší a zmenší se i excentricita  $e$  dráhy. Dochází tak k **sekulárnímu zmenšování velké polosy a excentricity** (dráha se stává kruhovou), což jsme měli ukázat.

## 2.7 Poruchy dráhových elementů vlivem rušících sil - dominantní efekty

V našem případě nás z pochopitelných důvodů zajímají nejvíce družice, využitelné pro geodézii a geodynamiku. Protože geodety zajímá v první řadě struktura gravitačního pole, zatímco negravitační efekty jsou „nežádoucí“ přítěží, je zřejmé, že geodetické družice budou respektovat tuto skutečnost.

Přehled vlivu **dominantních poruch** na Keplerovy elementy je uveden v Tabulce 2.1.

**Tabulka 2.1:** Dominantní poruchy Keplerových elementů

Typ síly	Rušící vlivy		Druh poruch	
			sekulární	dlohoperiodický
konzervativní	gravitační pole Země	zploštění $C_{20}$	$\omega, \Omega, M_0$	
		sudé zonální $C_{2n,0}$	$\omega, \Omega, M_0$	2)
		liché zonální $C_{2n+1,0}$		$e, i, \omega, \Omega, M_0$
		rezonanční		$a, e, i, \omega, \Omega, M_0$
	gravitační pole Slunce a Měsíce	přímý vliv	$\omega, \Omega, M_0$	$e, i, \omega, \Omega, M_0$
		slapový vliv	$\omega, \Omega, M_0$	$e, i, \omega, \Omega, M_0$
nekonzervativní	tlak slunečního záření		1)	$a, e, i, \omega, \Omega, M_0$
	odpor atmosféry		$a, e, i, M_0$	$a, e, i, \omega, \Omega, M_0$

1) vlivem stínu vznikají pseudosekulární poruchy všech elementů 2) vliv na  $e, i, \omega, \Omega, M_0$  s poloviční periodou než liché

Hlavní charakteristiky poruch souvisejí s výškou družice nad zemským povrchem  $h$ ,

$$h = r - R_z,$$

kde  $r$  je průvodič a  $R_z$  je poloměr Země. Z předchozích odvození lze vysledovat následující skutečnosti:



- vliv gravitačního pole se zmenšuje s  $(R_z/r)^l$ , kde  $l$  je stupeň Stokesových parametrů  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ ,
- vliv odporu atmosféry ubývá exponenciálně s výškou družice  $h$ ,
- vliv přímých lunisolárních poruch se zvyšuje s velikostí průvodiče družice  $r$ ,
- vliv tlaku slunečního záření se mírně zvětšuje s rostoucím  $r$ , na geostacionární dráze ( $a = 42000$  km) je řádově shodný s vlivem detailního gravitačního pole (ne s  $C_{2,0}$ !).

Pokud bychom považovali za rozhodující pouze **sekulární změny**, lze říci, že **gravitační pole** ovlivňuje pouze argument perigea  $\omega$ , rektascenzi výstupního uzlu  $\Omega$  a střední anomálii  $M_0$ , tedy **nemění se velikost a tvar dráhy a sklon roviny dráhy k rovníku**, zatímco **odpor atmosféry** naopak mění velkou poloosu dráhy  $a$ , excentricitu  $e$  a sklon roviny dráhy k rovníku  $i$ , tedy **mění velikost a tvar dráhy i její polohu vůči rovníku**. *Poznámka: V případě vlivu odporu atmosféry musíme mít na paměti, že jeho vliv klesá exponenciálně se zvětšující se výškou družice, tedy na družice na vyšších drahách (od 1500 km) již sekulárně prakticky nepůsobí.*

V tabulce 2.2 jsou uvedeny velikosti jednotlivých poruch na příkladu několika konkrétních družic.

**Tabulka 2.2:** Zrychlení, udělovaná některým družicím

Zdroj	Zrychlení [ $\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$ ]				
	družice NAVSTAR GPS $a = 26500$ km	geostacionární družice $a = 42160$ km $A/m = 0.1$ $\text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$	LAGEOS $a = 12200$ km $A/m = 0.007$ $\text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$	Starlette $a = 7300$ km $A/m = 0.01 \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$	SEASAT $a = 7100$ km $A/m = 0.2 \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$
Země (jako hmotný bod)	$6 \times 10^1$	$2.2 \times 10^1$	$2.8 \times 10^2$	$7.5 \times 10^2$	$7.9 \times 10^2$
Zploštění Země $C_{20}$	$5 \times 10^{-3}$	$7.4 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-1}$	$8.3 \times 10^{-1}$	$9.3 \times 10^{-1}$
Stokesovy parametry do $l, m=2, 2$		$4.3 \times 10^{-6}$	$6.0 \times 10^{-4}$	$4.8 \times 10^{-3}$	$5.4 \times 10^{-3}$
Stokesovy parametry do $l, m=6, 6$	$3 \times 10^{-9}$	$4.5 \times 10^{-10}$	$8.8 \times 10^{-6}$	$6.6 \times 10^{-4}$	$7.0 \times 10^{-4}$
Stokesovy parametry do $l, m=18, 18$		$1.3 \times 10^{-20}$	$6.9 \times 10^{-10}$	$2.2 \times 10^{-5}$	$3.9 \times 10^{-5}$
Vliv Měsíce	$5 \times 10^{-4}$	$7.3 \times 10^{-4}$	$2.1 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-4}$
Vliv Slunce	$2 \times 10^{-4}$	$3.3 \times 10^{-4}$	$9.6 \times 10^{-5}$	$5.7 \times 10^{-5}$	$5.6 \times 10^{-5}$
Vliv ostatních planet		$4.3 \times 10^{-8}$	$1.3 \times 10^{-8}$	$7.5 \times 10^{-9}$	$7.3 \times 10^{-9}$
Nepřímý efekt zploštění Země		$1.4 \times 10^{-9}$	$1.4 \times 10^{-9}$	$1.4 \times 10^{-9}$	$1.4 \times 10^{-9}$
Efekty obecné relativity		$2.3 \times 10^{-9}$	$9.5 \times 10^{-8}$	$4.5 \times 10^{-7}$	$4.9 \times 10^{-7}$
Odpor atmosféry	0	0.0	$3.0 \times 10^{-10}$	$7.0 \times 10^{-8}$	$2.0 \times 10^{-5}$
Tlak slunečního záření	$9 \times 10^{-6}$	$4.6 \times 10^{-6}$	$3.2 \times 10^{-7}$	$4.6 \times 10^{-7}$	$9.2 \times 10^{-6}$
Tlak odraženého slunečního záření		$4.2 \times 10^{-8}$	$3.4 \times 10^{-8}$	$1.4 \times 10^{-7}$	$3.0 \times 10^{-6}$
Tepelné vyzářování družic		$9.5 \times 10^{-8}$	$1.9 \times 10^{-10}$	$2.7 \times 10^{-10}$	$1.9 \times 10^{-7}$

### 3. Metody pozorování kosmické geodézie

#### 3.1 Přehled pozorovacích přístrojů a metod

Umělé družice země (UDZ) při pozorování ze zemského povrchu se většinou jeví jako málo jasné objekty s velkými úhlovými rychlostmi (až  $1^\circ/\text{s}$ ), radiálními rychlostmi (3.5 km/s) a dráhovými geocentrickými rychlostmi (7.6 km/s). Z tohoto plynou základní požadavky na pozorovací metody a přístroje.

Dalším požadavkem je nutnost mít (s různou přesností) pro časy pozorování směry a přibližné vzdálenosti tzv. efemeridy vypočtené pro pozorovací místo. Efemeridy se počítají pomocí přibližných elementů dráhy a jejich časových změn.

#### Základní rozdělení metod:

*Rozdělení metod podle umístění observační technologie:*

Definujeme si pasivní a aktivní zařízení: pasivní zařízení je takové, které ke svému využití nepotřebuje na kosmickém objektu elektrický proud (povrch družice, odrazný hranol, přirozený zdroj záření, ...), u aktivního zařízení je tomu naopak.

- přístroj je na zemském povrchu, na družici nebo přirozeném tělese je pouze pasivní zařízení – dřívější metody: vizuální pozorování, fotografické metody, dnešní: laserový družicový dálkoměr (SLR), radar, radiointerferometrie z velmi dlouhých základen (VLBI),
- přístroj na zemském povrchu, na družici aktivní zařízení – z dřívějších metod: fotografická pozorování zábleskových družic, dopplerovská pozorování TRANSIT, dnešní: jednosměrný dálkoměr (GPS NAVSTAR, GLONASS), dopplerovská pozorování DORIS, PRARE,
- družice vysílá signál, který se odráží od zemského povrchu, (Země hraje „pasivní“ úlohu) – altimetr
- pozorování mezi družicemi – satellite-to-satellite tracking,
- pozorovací systémy na družicích, které jsou nezávislé na zemském povrchu a ostatních družicích (akcelerometr, gradientometr).

*Rozdělení metod podle používaného pásma elektromagnetického záření:*

1) Optické metody – jsou závislé na počasí. Obvykle se nevyžadují složitá zařízení na družici – buď je tam pouze pasivní zařízení, nebo jednoduché aktivní zařízení.

2) Radiotechnické metody – na počasí prakticky nezávisí, přístroje se snáze miniaturizují pro transportovatelné verze. Vyjma dvou metod (radar, VLBI) vyžadují speciální vybavení na družicích, buď vysílače kódu (tj. signály určité struktury) nebo přijímače kódu nebo spojení obou – transpondery, které přijímají signály ze Země a po případné úpravě jej vysílají zpět. Jejich nevýhodou je, že oproti optickým metodám jejich měření jsou ovlivněna obsahem volných nabitých částic – elektronů a iontů – v atmosféře.

Radiotechnické metody můžeme dále dělit na:

- a) pasivní metody - využívají signálů vysílaných družicí, ale nevyžadují vysílání z pozemních stanic,
- b) aktivní metody – vyžadují vysílání z pozemní stanice.

U měření vysoké přesnosti nebo u velkých antén je třeba znát též místo, k němuž se vztahují geometrické veličiny odvozené z přijímaného signálu – „fázové centrum“ antény.

Měření konaná na družicích vyžadují telemetrické spojení pro přenos naměřených dat do pozemního centra. Pro všechny družice s aktivním zařízením je samozřejmostí též povelový spoj z tohoto centra.

Radiotechnické metody, které vyžadují více družic současně (většina s výjimkou radaru a VLBI), pracují jako komplexy speciálně upravených družic (nebo i jedné družice) to je tzv. „kosmický segment“, komplexy pozemních řídicích stanic – „řídicí segment“ a systém pozorovacích stanic – „pozemní segment“ (příklad TRANSIT (doppler), GPS).

**Dále budeme hovořit o metodách využívajících přístroje na zemském povrchu** – ostatní metody budou zmíněny později.

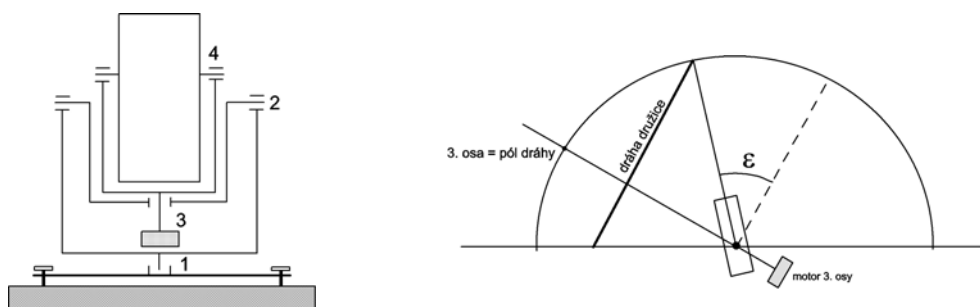
*Rozdělení metod orientace přístroje při měření*

- všesměrové – zejména některé radiotechnické metody – anténa přístroje přijímá nebo vysílá signál bez nutnosti zacílení,
- pointované – vysílací nebo přijímací zařízení musí být při měření zacíleno – používá se zejména u vysoce přesných metod, které pracují se slabými signály.

Pro zacílení slouží montáž. Známe několik druhů montáží. Dříve byly montáže konstruované pro zjednodušení sledování pohybujícího se objektu. Dráha objektu po obloze byla aproximována hlavní nebo vedlejší kružnicí, pohyb montáže podél aproximace dráhy byl prováděn rotací podél jedné z os montáže. Rychlost rotace bylo možno měnit.

Pro pozorování nebeských těles (hvězd, Měsíce) byly používány astronomické montáže. Dalekohled se otáčí tzv. hodinové osy, která je rovnoběžná s osou rotace Země, rychlostí, která eliminuje zdánlivou rotaci nebeské sféry.

Pro pozorování družic byly používány 3osé a 4osé montáže, které aproximují dráhu hlavní nebo vedlejší kružnicí.

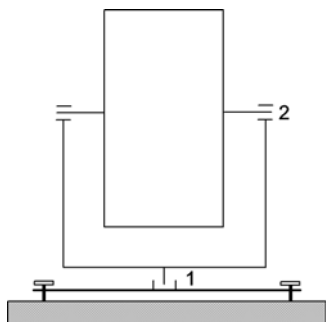


**Obrázek 3.1:** Čtyřosá montáž a nastavení os pro sledování družice

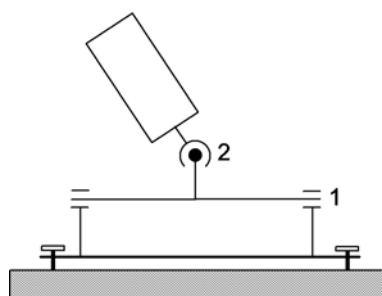
Osu, okolo které se během pozorování otáčí přístroj – obvykle 3. osa, je nutno nastavit do pólu dráhy – k tomu slouží první a druhá osa.

Na 4. ose se nastaví úhel  $\varepsilon$ . Kolem 3. osy se komorou otáčí motorem tak, že sleduje družici.

S rozvojem počítačové technologie a rychlých přesných regulátorů se začaly používat dvě montáže – nejčastější je azimutální montáž – obr. 3.2.



Obrázek 3.2: Azimutální montáž



Obrázek 3.3: XY montáž

Druhou (podstatně méně používanou) montáží je XY montáž – obr. 3.3 (obě osy jsou vodorovné, obvykle mimoběžné, navzájem kolmé).



Obrázek 3.4: – Lasarový družicový dálkoměr s azimutální montáží

#### *Rozdělení metod podle přesnosti*

(od nejméně přesných až po nejpřesnější, přesností se v tomto odstavci rozumí standardní odchylka)

- radar (rádiová) - určuje směry a vzdálenosti ke družicích pomocí rádiových impulsů, přesnost směrů je v úhlových minutách, délek v desítkách metrů,
- fotografická pozorování (optická) – dnes historická metoda – určuje směry k družici (hodinový úhel  $t$ , resp. rektascenzi  $\alpha$  a deklinaci  $\delta$ ) navázáním na hvězdy, přesnost směrů je  $2''$  až  $6''$ ,
- fázový dálkoměr (rádiová) – určuje vzdálenost z rozdílu modulace vysílaného a přijímaného signálu, upraveného transponderem – dnes je využit ve spojení s jednosměrným dálkoměrem, přesnost v jednotkách cm,
- jednosměrný dálkoměr (rádiová) – určuje vzdálenosti z rozdílu časů – radiotechnický systém, založený na pseudonáhodné modulaci, která přenáší informaci o okamžiku vysílání signálu z družice, přesnost v jednotkách cm,
- dopplerovská metoda (rádiová) – využívá změny kmitočtu, ke které dochází, když se mění vzdálenost vysílače a přijímače. Přesnost měření časové změny vzdálenosti pozorovatel – družice je 0.4 mm/sec.

- f) laserový družicový dálkoměr (optická) – princip měření vzdáleností je založen na využití impulsního laseru. V současné době jedna ze dvou nejpřesnějších technik: lasery III. generace určují vzdálenosti s přesností 1-3 cm, je snaha o dosažení 0.5 cm.
- g) radiointerferometrie z velmi dlouhých základen (rádiová) – pro tuto metodu je podstatné použití nejméně dvou stejných přijímacích zařízení. Porovnáním zachycených signálů se získá informace pro určení prostorových vztahů mezi anténami a pozorovaným objektem, který vysílá rádiové záření. Odvozené úhlové veličiny mají přesnost 0.0002“, odvozené vzdálenosti stanic mají přesnost 2 až 3 cm a to i na vzdálenost mnoho tisíců km.

Nyní probereme jednotlivé metody.

### 3.2 Radar

(Radio Detection and Ranging = rádiové zjišťování a měření vzdáleností) slouží ke kontrole startů družic a průběžnému sledování velkého počtu objektů.



**Obrázek 3.5:** *Princip radaru*

Měří vzdálenosti dobou šíření signálu (impulsu) k objektu a zpět, směry určuje méně přesně podle orientace antény

$$(3.1) \quad D = \frac{1}{2}v(t_p - t_v),$$

kde  $D$  je vzdálenost,  $v$  rychlost šíření signálu,  $t_p$  čas příjmu a  $t_v$  čas vyslání signálu. Využívá se zejména pro zjištění předběžných efemerid družic. Přesnost směrů je v úhlových minutách, délek v desítkách metrů.

### 3.3 Fotografická pozorování

Směry k UDZ je možné určovat s poměrně vysokou přesností (kolem 2“ až 6“)

Kapitola 3 – Metody pozorování kosmické geodézie

Metody a přístroje		Měřené veličiny						Vybavení družice ■ nutné □ možné					
		směry	délek	rozd. délek	rad. rychl.	negrav. zrych	deriv. grav. pot.	aktivní				pasivní	
								vys. kódu	transponder	telemetrie	záblesky	záření odráží	
												povrch	hranoli
optické	vizuálně odhadové	■										■	
	teodolity, kinoteodolity	■										■	
	fotografické	■									□	■	□ <sub>1</sub>
	televizní, CCD	■									□ <sub>2</sub>	■	□ <sub>1,2</sub>
	laserový dálkoměr		■										■
radiotech.	radar		■						□			■	
	fázový dálkoměr		■						■				
	jednosměrný dálkoměr		■					■					
	Doppler			■ <sup>3</sup>	■			■ <sup>4</sup>	■ <sup>5</sup>				
	interferometrie	■		■ <sup>6</sup>				■					
na druž.	akcelerometr					■				■			
	gravitační gradientometr						■			■			
	radiová měření mezi družicemi		■		■			□	■	■			
	altimetr		■							■			

Poznámky: 1 - Použitelné jen při osvětlení laserem

2 - Záleží na délce záblesku (impulsu laseru)

3 - Stanice a dvě polohy družice

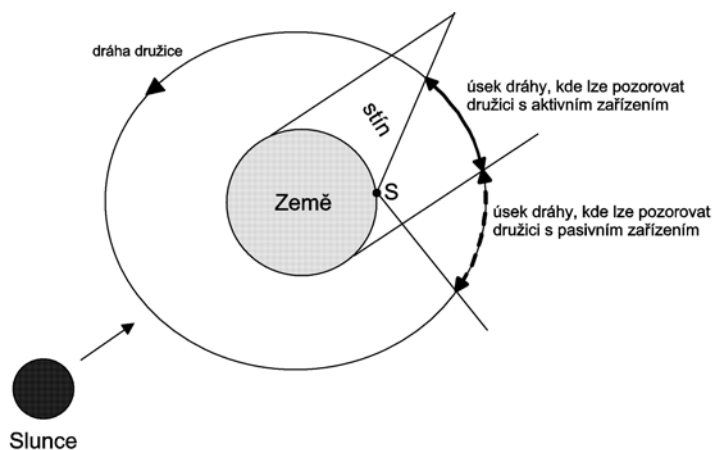
4 - Pasivní doppler

5 - Aktivní doppler

6 - Dvě stanice a družice

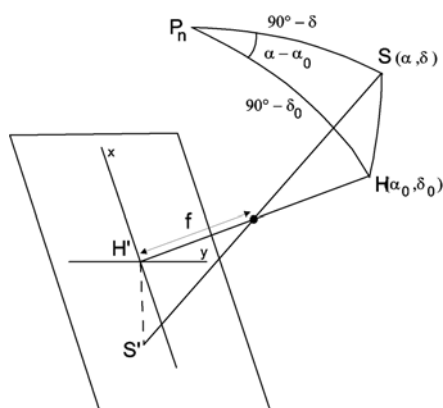
speciálně upravenými komorami fotografické astrometrie navázáním na směry ke hvězdám, jejichž souřadnice jsou ve velkém počtu obsaženy ve hvězdných katalozích.

Fotografické metody jsou univerzální, stačí aby jakákoliv družice byla osvětlena sluncem a stanice byly v nočním stínu – viz obr 3.6.



**Obrázek 3.6:** Podmínky fotografického pozorování družic (čáry vycházející z S vyznačují použitelné zenitové vzdálenosti)

Některé z metod jsou schopné pozorovat i nespecializované družice. Jiné potřebují družice s aktivním zařízením, které vytváří záblesky. Díky tomu, že je družice v konečnu, je poloha družice na snímku ovlivněna paralaktickou refrakcí.



**Obrázek 3.7:** Ke zpracování fotografických nebo CDD pozorování

K výpočtu polohy družice mezi hvězdami se používá metod klasické fotografické astrometrie – viz obr. 3.7.

Přepokládejme, že známe dosti přesné prvky vnitřní orientace – tj. bod H, ohniskovou vzdálenost a distorzi objektivu. Dále musíme zavádět opravy z deformace snímku, natočení os snímku vůči ideální soustavě, chyby měřitek použitých při proměřování snímku. Z proměřených snímkových souřadnic se postupy převzatými z fotogrammetrie a geodetické astronomie určí směr ke družici v daném čase.

Místo fotografické desky je možno použít televizní snímací elektronku (TV) nebo CCD maticový prvek (charge-coupled device), metoda se v principu zpracování neliší od fotografické metody.

Výsledkem jsou směrové veličiny s vnitřní přesností 2“-6“. V kosmické geodézii se tyto metody v současnosti již nepoužívají.

### **3.4 Fázový dálkoměr**

Určuje vzdálenost z rozdílu fáze modulace vysílaného ( $\varphi_v$ ) a přijímaného ( $\varphi_p$ ) signálu, vráceného transponderem.

$$(3.2) \quad D = \frac{\lambda}{2} \left( N + \frac{\varphi_v - \varphi_p}{2\pi} \right),$$

kde  $D$  je vzdálenost,  $\lambda$  je vlnová délka modulační vlny,  $N$  je neznámý celistvý počet půlvln  $\lambda/2$ .  $N$  je neurčitost (tzv. *ambiguita*), která se určuje měřením na několika modulačních kmitočtech nebo se eliminuje početně (GPS). Fázové dálkoměry v této klasické podobě se dnes uplatňují málo, měření fáze signálu je využíváno u mikrovlnných technik (GPS NAVSTAR apod.). Přesnost je v jednotkách až desítkách mm.

### **3.5 Jednosměrný dálkoměr**

Máme dán čas  $t_T$  vysílání signálu z družice podle palubních hodin a čas  $t_R$  jeho příjmu podle staničních hodin. „Elektromagnetická“ vzdálenost je pak rovna

$$(3.3) \quad D = c(t_R - t_T) + c(\Delta t_R - \Delta t_T) = c\tau + c\Delta\tau,$$

kde  $\Delta t_T$ ,  $\Delta t_R$  jsou opravy palubních a pozemních hodin na společný systémový čas dané soustavy družic.

V mnoha případech lze  $\Delta\tau$  po dobu měření považovat za konstantní. Rozdíl  $\tau = t_R - t_T$  je sám funkcí času vzhledem k tomu, že se družice i stanice pohybuje – tj.  $\tau = \tau(t_R)$ . Délka

$$(3.4) \quad D_0 = c\tau$$

se nazývá „pseudovzdálenost“.

Vzdálenosti  $D$ ,  $D_0$  se opravují o atmosférické vlivy:

$$(3.5) \quad R = \bar{R} = D + \Delta D_k + \Delta D_t + \Delta D_i + \Delta D_2 + \Delta D_a,$$

kde  $\Delta D_k$  je oprava z vlivu poloh fázových center – spojení centrace z místa příjmu signálu – fázového centra – do místa stabilizace a centrace mezi těžištěm družice a fázovým centrem vysílací antény na družici.



Opravy  $\Delta D_t$  a  $\Delta D_i$  jsou oprava ze změn rychlosti šíření signálu atmosférou. První je troposférická oprava  $\Delta D_t$ , která závisí na fyzicky neutrální části atmosféry, zejména na obsahu vodní páry. Troposférická oprava je

$$(3.6) \quad \Delta D_t = f(t, b, R_H, z).$$

Závisí na teplotě  $t$ , atmosférickém tlaku  $b$ , relativní vlhkosti  $R_H$  a zenitovém úhlu  $z$ .

Uveďme si **příklad**:

Pro zenitový úhel  $z = 80^\circ$ , teplotu  $t = 30^\circ \text{ C}$ , tlak  $b = 1013.25 \text{ hPa}$  je oprava  $\Delta D_t = 15.2 \text{ m}$  při relativní vlhkosti 80% a  $\Delta D_t = 13.3 \text{ m}$  při relativní vlhkosti blízké 0%.

Druhá oprava je ionosférická oprava  $\Delta D_i$ , která závisí na této elektricky nabitě části atmosféry. Platí

$$(3.7) \quad \Delta D_i = f(I_v, f, z).$$

Je funkcí počtu volných elektronů v atmosféře  $I_v$ , (který silně závisí na intenzitě sluneční činnosti), frekvence nosné vlny  $f$  a zenitového úhlu  $z$ . Opět ukažme velikost opravy na **příkladu GPS**:

Frekvence první nosné vlny  $f$  je  $L_1 = 1575 \text{ MHz}$  a pro zenitový úhel  $z = 0^\circ$  může oprava  $\Delta D_i$  dosáhnout až  $-154 \text{ m}$ , pro zenitový úhel  $z = 80^\circ$  až  $-421 \text{ m}$ . Pro odstranění nejistot, které sebou přináší modelování ionosférické opravy, zejména obsah volných elektronů v atmosféře se mění v závislosti na slunečním svitu a ročním období, je využíváno měření na dvou různých nosných frekvencích, které umožňuje výrazné snížení tohoto vlivu.

Oprava  $\Delta D_2$  je oprava ze zakřivení rádiového paprsku vlivem refrakce a oprava  $\Delta D_a$  zahrnuje vliv družicové aberace, tedy vliv toho, že družice se vzhledem k zemi pohybuje a je na jiném místě v prostoru při vysílání signálu než při jeho přijetí přijímači. V zájmu podstatného zvýšení počtu měření, zlepšení poměru signálu ku šumu, omezení rušivých šumů a použití malých všesměrových antén se užívá pro měření „pseudonáhodných“ signálů, které se navzájem korelují a z korelace se zjistí vzájemný časový rozdíl.

Jednosměrný dálkoměr je využíván v kódových měřeních u systému GPS – viz odstavec 3.12. Přesnost metody je v jednotkách mm až cm.

### **3.6 Dopplerovská pozorování**

Vycházejí ze známého Dopplerova jevu příjmu jiného kmitočtu  $f_R$  než byl vysílaný  $f_T$  pohybující-li se zdroj a přijímač vzájemnou rychlostí  $v$ .

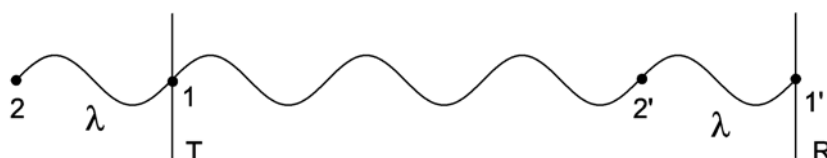
Představme si vlnění – viz obr. 3.8, v místě T budeme mít vysílač, v místě R přijímač:

Dále zopakujeme základní vztahy mezi dráhou  $s$ , časem  $t$  a rychlostí  $c$

$$(3.8) \quad s = ct$$

a vlnovou délkou  $\lambda$ , frekvencí  $f$  a časovým intervalem  $\Delta t$

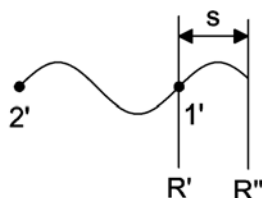
$$(3.9) \quad \lambda = c\Delta t = \frac{c}{f}.$$



**Obrázek 3.8:** Princip dopplerovských pozorování

Bod 2 vlny projde bodem T za dobu  $\Delta t_T$  a bod 2' projde bodem R za dobu  $\Delta t_R$ . Pokud se bod T vůči bodu R nepohybuje jsou časové intervaly stejné  $\Delta t_T = \Delta t_R$ .

Nechť se nyní bod R pohybuje vůči bodu T rychlostí  $v$  – pro zavedení znaménkové konvence uvažujeme, že bod R se vzdaluje od bodu T. Pak bod 2' projde bodem R později – v pozici R'' – viz obr. 3.9



**Obrázek 3.9:** Dopplerovské zpoždění

Časový interval je tedy

$$(3.10) \quad \Delta t_R = \Delta t_T + \Delta t_{z \text{ pohybu}} = \Delta t_T + \frac{s}{c} = \Delta t_T + \frac{v \cdot \Delta t_T}{c},$$

a z toho

$$(3.11) \quad \Delta t_R = \Delta t_T \left( 1 + \frac{v}{c} \right).$$

Pro frekvenci pak platí

$$(3.12) \quad f_R = f_T \left( 1 + \frac{v}{c} \right)^{-1}.$$

Ve vakuu tedy máme

$$(3.13) \quad f_R = \frac{f_T}{1 + \frac{v}{c}} \approx f_T \left( 1 - \frac{v}{c} + \{2\} \right).$$

Kvadratické členy  $\{2\}$  lze zanedbat i pro rychlosti družic. Z (3.13) máme pro  $v$

$$(3.14) \quad v = \frac{c}{f_T} (f_T - f_R) .$$

Známe-li  $f_T$  a změříme  $f_R$ , můžeme určit  $v$  tj. radiální rychlost. Z důvodů minimalizace ztrát signálu v ionosféře se pro  $f_T$  používá kmitočtu větších jak 100 MHz, takže nelze snadno měřit Dopplerovsky posunutý kmitočet  $f_R$ . Proto se při měření užívá v přijímači směšování s kmitočtem pomocného generátoru  $f_G$  a měří se rozdílový kmitočet

$$(3.15) \quad f_D = f_G - f_R .$$

Pak lze psát pro (3.14)

$$(3.16) \quad v = \frac{c}{f_T} (f_T - f_G - f_R + f_G) = \frac{c}{f_T} f_D + \frac{c}{f_T} (f_T - f_G)$$

Kmitočet  $f_D$  se měří čítačem během nejvýše jednotek sekund. Při praktické realizaci je nutné volit  $f_G > f_T$ , nebo  $f_G < f_T$  tak aby v rozmezí  $v_{min} < v < v_{max}$  se nezměnilo znaménko.

Pokud počítáme periody kmitočtu  $f_D$  po delší dobu (10 sekund – DORIS – až 2 minuty - TRANSIT) dojdeme k integrální Dopplerovské metodě. Rozdíl radiálních vzdáleností ke družici je s použitím vztahu (3.16)

$$(3.17) \quad D_2 - D_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt = \frac{c}{f_T} \int_{t_1}^{t_2} f_D dt + \frac{c}{f_T} (f_T - f_G) \int_{t_1}^{t_2} dt .$$

Čas  $t_1$  volíme a čas  $t_2$  určíme tak, aby integrál z  $f_D$  podle  $dt$  bylo celé číslo  $N$ , pak

$$(3.18) \quad D_2 - D_1 = \frac{c}{f_T} N + \frac{c}{f_T} (f_T - f_G) (t_2 - t_1) ,$$

kde  $D_2 - D_1$  je určený rozdíl vzdáleností k družici v časech  $t_2$  a  $t_1$  a  $N$  je počet period mezi těmito časy.

Změřené hodnoty  $v$  nebo  $D_2 - D_1$  se musí redukovat o přístrojové opravy, vlivy troposféry a ionosféry a o družicovou aberaci.

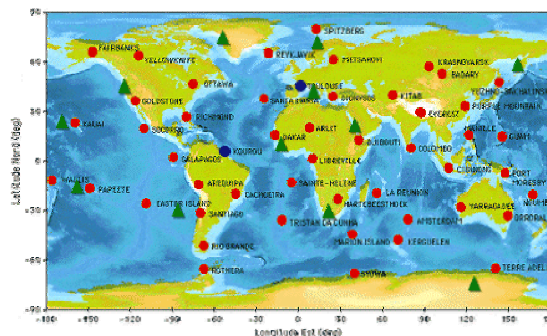
Dosažitelná teoretická přesnost metody je asi  $0.4 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$  v rychlosti a 1 až 5 cm v rozdílu vzdáleností u integrální metody. Skutečná přesnost je o něco horší, což je dáno vlivem nejistot v redukcích a šumem v aparatuře.

### 3.6.1 DORIS

Dopplerovská metoda je v současnosti základem techniky DORIS – (Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite). Je to systém vyvinutý Francií ve spolupráci se Spojenými státy americkými. Primárním cílem systému je určování přesných

drah nízko letících družic (100 – 1000 km nad zemí). Dalším produktem jsou souřadnice pozemních stanic.

Na zemi je umístěna síť vysílačů, které vysílají na dvou frekvencích 2036.24 MHz a 401.25 MHz pro odstranění vlivu ionosféry. Na družici, jejíž dráha se má určit, pracuje přijímač signálu, který využívá pro určení polohy Dopplerovské metody.

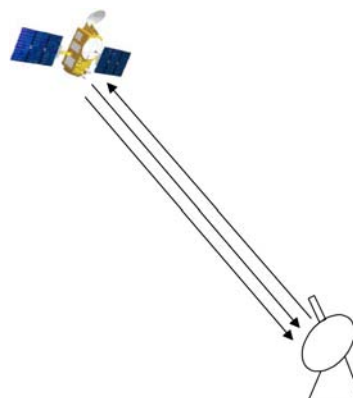


**Obrázek 3.10:** Vysílač systému DORIS a rozložení permanentních stanic technologie DORIS

Pozemní stanice vyžadují pouze zdroj elektrické energie – není nutné připojení k internetu pro přenos dat do datových center, takže jejich rozložení může být rovnoměrné po celém světě. O umístění stanice rozhoduje řídicí centrum ve Francii.

### 3.6.2 PRARE

Technika PRARE (Precise Range And Range-rate Equipment) využívá obousměrné komunikace mezi družicí, která vysílá a přijímá, a pozemní stanicí, kde je transponder. Byl vyvinut v Německu pro družice řady ERS.



**Obrázek 3.11:** Stanice PRARE a princip komunikace PRARE s družicí

Družice vysílá kódovaný signál na dvou frekvencích: S – 2248 MHz a X – 8489 MHz. Pozemní stanice měří fázový rozdíl přijaté vlny na frekvencích S a X pro eliminaci vlivu ionosféry. Přijatý kód na X frekvenci zamění za jiný, do kterého zakóduje naměřená data a odešle na družici na frekvenci X – 7225.296 MHz. Na družici se ze zpoždění mezi vyslanou a přijatou vlnou na X frekvenci určuje vzdálenost, a dále se z Dopplerova jevu na přijímané frekvenci X určuje změna vzdálenosti stanice - družice. Data jsou shromažďována přes družici, takže provoz stanic není závislý na připojení k Internetu.

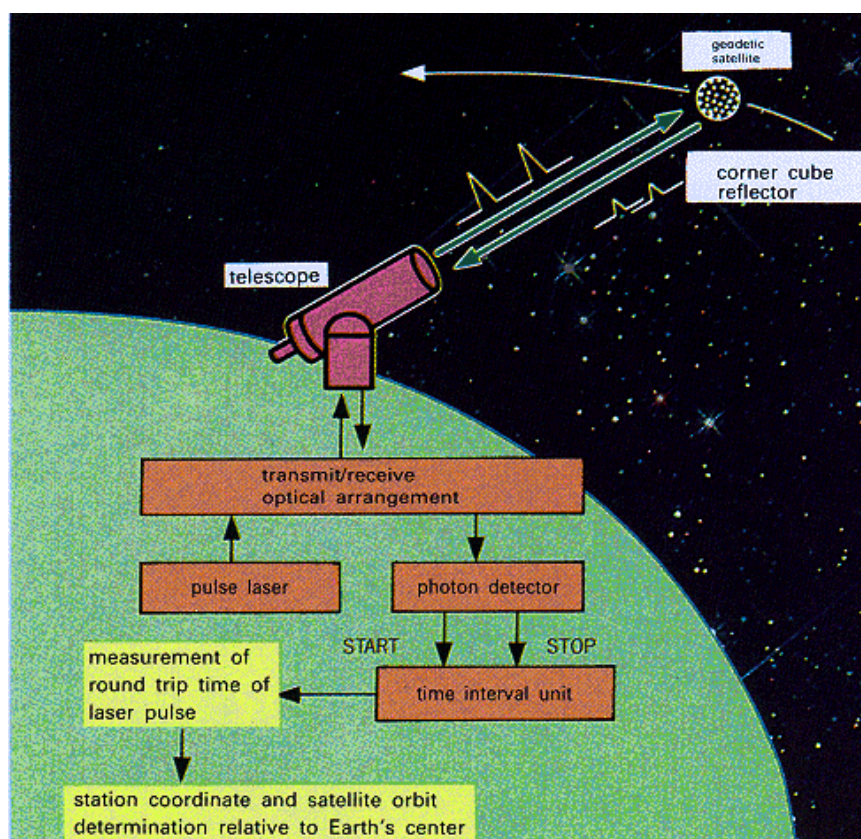
Nevýhodou systému je, že zpracovávané signály jsou velmi slabé a je nutno použít pointovanou parabolickou anténu. To omezuje počet současně sledovaných družic na jedinou.

### 3.7 Laserový družicový dálkoměr

Laserový družicový dálkoměr (LDD) často označovaný anglickým názvem metody SLR (Satellite Laser Ranging) měří vzdálenost zjišťováním doby šíření signálu od přístroje ke družici a zpět a užívá laseru jako zdroje tohoto signálu.

Laser umožňuje získat krátký impuls v úzkém kmitočtovém pásmu, čímž se snižuje jeho „rozmazání“ v atmosféře. Další výhodou je nízká rozbíhavost a velká intenzita impulsu.

*Poznámka: Nejde tedy o klasické fázové měření vzdáleností jako u elektronických dálkoměrů. Princip na obrázku 3.12, kde jsou hlavní konstrukční prvky.*



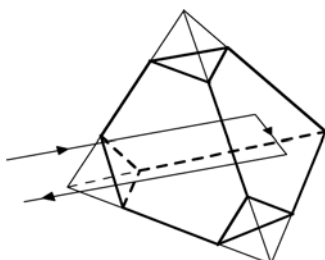
**Obrázek 3.12:** *Princip SLR*

Moderní LDD je řízen mikropočítačem, kterým se podle programu měření a efemerid:

- řídí pohyb montáže,
- spouští laser,
- otvírá hradlo v čase přepokládaného příchodu signálu od družice pro zastavení čítače tranzitního času, čímž se snižuje možnost chybného měření,
- organizuje pohyb metrické informace.

Záblesk laseru je vyslán ke družici a jeho malá část je přivedena na vstup fotoelektrického detektoru k odvození signálu pro start čítače, který začíná měřit interval (dobu šíření)  $\Delta T$ ; zároveň se odečte čas pro pozorování  $t$ .

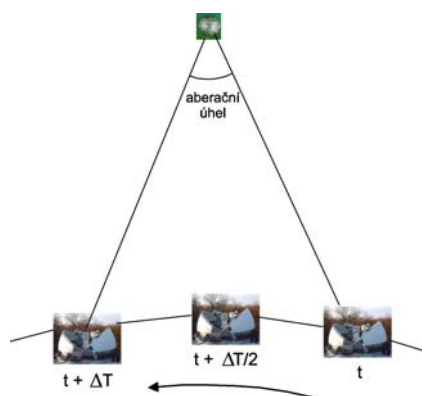
Družice je vybavena odraznými hranoly – koutovými odražeči – viz obr. 3.13. Podobné se používají v geodézii u elektrooptických dálkoměrů a totálních stanic.



**Obrázek 3.13:** Odrazný hranol, používaný na družicích při použití metody SLR

Jde o čtyřboký jehlan, podstavu tvoří rovnostranný trojúhelník, úhel mezi stěnami u čtvrtého vrcholu je  $90^\circ$ . Paprsky se po lomech a odrazech vracejí zpět rovnoběžně s původním směrem dopadu. Toto platí bez ohledu na to, jak je osa hranolu natočena k pozorovateli.

Záblesk vráceného světla dopadající na přijímací optiku LDD je zpracován fotoelektrickým detektorem a vede k zastavení čítače a odečtu intervalu  $\Delta T$ . Vraccí se záblesk je velmi slabý – pro zlepšení poměru signál/šum je clona, která zajišťuje, že na detektor dopadá pouze záření přicházející ze družice a ne z jiných směrů. Ideální odraz koutových odražečů, přesně rovnoběžný se směrem dopadu není žádoucí. Paprsek by díky vzájemnému pohybu Země a družice nedopadal na optiku – dochází k „družicové“ aberaci, podobné aberaci planetární, která byla přednášena v geodetické astronomii. Aberace – obr. 3.14 – způsobuje, že se objekt jeví jako posunutý k apexu – odpovídá směru pohybu stanice.



**Obrázek 3.14:** Družicová aberace v případě laserových pozorování

Proto se plochy odrážeců vybrušují tak, aby se z rovnoběžného svazku vytvořil svazek rozbíhavý o vrcholovém úhlu asi 20 až 25'' (závisí to výšce družice nad Zemí).

Z důvodů neznalosti přesných efemerid jsou prováděna některá opatření k získání odrazu od družice:

- ve starších systémech byl paprsek rozptylován do úzkého kužele,

- u novějších systémů je na začátku sledování družice provedeno její vyhledání rozptýlením svazku do širšího kužele a po nalezení místa s nejvyšším množstvím navracených odrazů je paprsek zúžen.

Měřená „elektromagnetická“ vzdálenost družice (tj. délka trajektorie ve vakuu)  $D$  je

$$(3.19) \quad D = \frac{c\Delta T}{2},$$

kde  $c$  je rychlost světla ve vakuu  $\Delta T$  je doba šíření. Abychom zjistili skutečnou vzdálenost družice  $R \equiv |\mathbf{R}|$ , bude platit

$$(3.20) \quad R \equiv |\mathbf{R}| = D + \Delta D_k + \Delta D_1 + \Delta D_2 + \Delta D_a,$$

kde  $\Delta D_K$  je kalibrační oprava – souhrn technických vlivů (různá zpoždění v aparatuře, šíření světla v optice, v geometrii laserového družicového dálkoměru i v umístění hranolů na družici) – je to oprava obdobná součtové konstantě u fázových elektrooptických dálkoměrů. Oprava koriguje měření na vzdálenost mezi těžištěm družice a referenčním bodem, kterým je obvykle průsečík (prvních dvou) os montáže.

Oprava  $\Delta D_1$  je oprava ze změn rychlosti  $a$  světla v atmosféře. Oprava závisí na aktuálním stavu atmosféry a počítá se obvykle z meteorologických parametrů (teploty  $T$ , tlaku vzduchu  $b$  a vlhkosti  $R_H$ ) v místě pozorování. Dále závisí na vlnové délce použitého světla  $\lambda$  a na směru ke družici (zdánlivém zenitovém úhlu družice  $z$ ). Po družici v zenitu je oprava přibližně  $-2.4$  m, pro družici  $10^\circ$  nad obzorem je  $-13.3$  m. Je to oprava, která v současnosti omezuje přesnost metody a lze ji symbolicky zapsat:

$$\Delta D_1 = f(T, b, R_H, \lambda, z).$$

Oprava  $\Delta D_2$  je oprava ze zakřivení světelného paprsku vlivem refrakce. Závisí na měřené vzdálenosti  $D$  a na zenitovém úhlu družice  $z$ . Je o několik řádů menší než oprava  $\Delta D_1$  – pro družici  $10^\circ$  nad obzorem je oprava menší než 1 cm. Lze ji zapsat jako

$$\Delta D_2 = f(D, z)$$

Oprava  $\Delta D_a$  zahrnuje vliv družicové aberace.

Je možno ukázat, že pro většinu zkonstruovaných laserových družicových dálkoměrů je poměr přijatého signálu ku vyslanému řádu  $10^{-13}$  až  $10^{-14}$ . Z toho plyne, že z jednoho vyslaného impulsu se vrací obvykle jeden foton (u nízko letících družic několik málo fotonů) Nelze tedy identifikovat, jestli navracený foton pochází z počátku nebo konce vyslaného impulsu. Délka impulsu tedy přímo souvisí s vnitřní přesností jednoho měření. Záměrně je zdůrazněna vnitřní přesnost, protože nejsou zohledněny systematické vlivy – zejména oprava ze změny rychlosti světla v atmosféře.

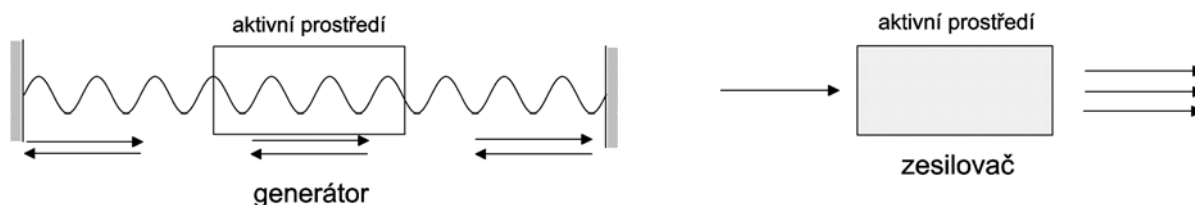


Při uvážení rychlosti světla ve vakuu můžeme říct, že přesnost 1cm ve výsledné vzdálenosti odpovídá přesnosti 66 ps v měření časového intervalu. Snahou konstruktérů přístroje je:

- zvyšovat účinnost detektorů pro zaznamenání jednotlivých fotonů (spolu se zvyšováním přesnosti přiřazení času příchodu fotonu do detektoru),
- zkracovat délku vyslaného impulsu,
- zpřesňovat způsob měření časového intervalu  $\Delta T$ .

### 3.7.1 K výrobě krátkých laserových impulsů

Základem laserů je aktivní prostředí, ve kterém můžeme energetickým zásahem dosáhnout toho, že většina atomů aktivního prostředí je ve vybuzeném stavu (jejich elektrony jsou na vyšších energetických hladinách, než když je atom v základním stavu). Při stimulované emisi dojde k tomu, že pokud atom ve vybuzeném stavu zasáhne paprsek fotonů o určité frekvenci, atom přejde do základního stavu a předá svou energii ve formě fotonů do paprsku fotonů. Důležitou vlastností je, že paprsek fotonů má vlastnosti monochromatické koherentní polarizované vlny.



Obrázek 3.15: Princip družicového laseru

Pokud umístíme – viz obr. 3.15 – aktivní prostředí mezi dvojici rovnoběžných zrcadel – tzv. rezonátor, jejichž vzdálenost odpovídá celistvému počtu půlvln monochromatického zařízení atomů, dojde po každém průchodu paprsku fotonů aktivním prostředím k odrazu od jednoho ze zrcadel a návratu paprsku do aktivního prostředí. V aktivním prostředí přidají do paprsku svou energii další atomy ve vybuzeném stavu. Získání dostatečně silného paprsku fotonů je podmíněno vzdáleností zrcadel rezonátoru, které podmiňuje vytvoření stojatého vlnění uvnitř rezonátoru, při kterém dochází k zesílení záření.

Zesílení impulsu lze dosáhnout i pomocí zesilovače záření, což je aktivní prostředí (bez zrcadel), do kterého přivedeme zesilovaný impuls (paprsek fotonů). Vybuzené atomy zasažené paprskem fotonů předávají svou energii (foton) do paprsku, a tak dojde k zesílení.

Tvorba krátkého impulsu je velmi náročná. Aktivní prostředí musí mít rozměr ve směru spojnice zrcadel blízký prostorové délce impulsu  $d$  ( $d = c t$ , kde  $c$  je rychlost světla a  $t$  délka impulsu v čase). Mezi zrcadly rezonátoru, jejichž vzdálenost je nejméně o řád větší než rozměr aktivního prostředí, je umístěno zařízení (obvykle Q-switch), které znemožňuje průchod paprsku dříve než je v aktivním prostředí maximum vybuzených atomů. Pokud pak dojde k vytváření paprsku fotonů vzniká řada impulsů – časová šířka každého impulsu je dána rozměrem aktivního prostředí a časová odlehlost impulsů je rovna dvojnásobku vzdálenosti zrcadel. Amplituda impulsů nejprve roste a pak klesá.

Pro měření se z rezonátoru vypustí nejvhodnější impuls. Vypuštění se provádí tak, že jedno ze zrcadel rezonátoru nemá absolutní odrazivost, takže část paprsku se odrazí a část



projde. Pak následuje selekce impulsu nejčastěji dvojicí hradel – první se před průchodem vybraného impulsu otevře a druhé se po průchodu vybraného impulsu zavře. Potom vybraný impuls projde několika zesilovači, aby jeho energie byla dostatečně veliká.

Pokud jsou měřeny družice, které jsou velmi daleko a pravděpodobnost návratu alespoň jednoho fotonu by byla velmi malá, je dvojicí hradel propuštěno několik impulsů (největší impuls a několik následujících). Protože známe odlehlost impulsů (je dána vzdáleností zrcadel rezonátorů) je možno při prvotním zpracování měřených dob šíření rozlišit, zda je to interval odpovídající hlavnímu impulsu nebo některému z následujících.

### **3.7.2 Některé technické parametry laserových družicových dálkoměrů**

Nominální přesnost nejnovějších laserových družicových dálkoměrů je v současnosti v jednotkách centimetrů. Je věnována velká pozornost zpřesnění oprav. Pro zpřesnění opravy ze změny rychlosti světla v atmosféře jsou konstruovány laserové družicové dálkoměry, které provádí měření doby šíření na více vlnových délkách (dvoubarevné lasery). Z rozdílu dob šíření určíme okamžitou disperzi a střední index lomu ovzduší.



**Obrázek 3.16:** *Laserový družicový dálkoměr*

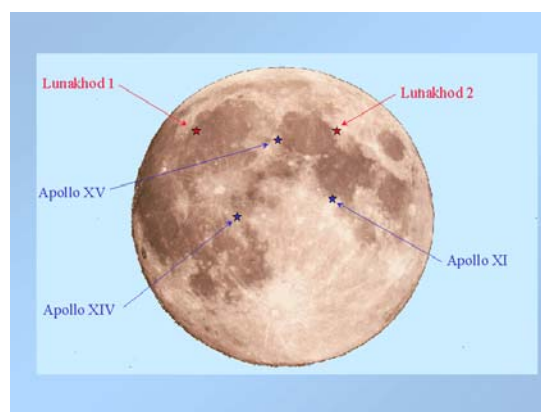
Typický laserový družicový dálkoměr je originální výrobek. Některé základní parametry mají moderní systémy podobné. Jsou to:

- materiál aktivního prostředí: Nd:YAG (atomy neodymu v mřížce yttrium aluminium granátu),
- charakteristická vlnová délka aktivního prostředí je 1064 nm – infračervená; pro měření se používá harmonická vlnová délka vytvářená po vygenerování silného krátkého impulsu nejčastěji pomocí krystalem KPT – je to vlnová délka 532 nm – zelená. Někdy se pro určení opravy měří i na základní vlnové délce.
- posledním „výkřikem“ techniky je aktivní prostředí z Ti:Saphir (atomy titanu safíru), základní vlnová délka je 846 nm, měří se na ní a na harmonické vlnové délce 423 nm – modrá.
- šířka impulsu je obvykle od 30 ps do 250 ns (extrémy 20 ps a 10 ns),
- frekvence opakování měření 10 Hz, některé systémy pracují s frekvencí 5 Hz anebo 20 Hz, vyvíjí se systém s frekvencí opakování 2kHz,
- divergence paprsku 1“ – 420“,
- primární časový standard pro určení času měření: cesiové atomové hodiny, rubidiové atomové hodiny, termostatovaný křemenný oscilátor, GPS,
- požadovaná přesnost predikace dráhy družice 50 m až 2 km.

Československo byla čtvrtá země na světě za USA, Japonskem s Francií, které se podařilo sestavit laserový družicový dálkoměr. Bylo to v roce 1969. Dnes na území ČR není jediný laserový družicový systém. Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT – konstruktér čs. laseru – provozuje laserový družicový dálkoměr v Helwanu v Egyptě.

### **3.7.3 Laserový měsíční dálkoměr**

Měření vzdáleností k Měsíci (Lunar Laser Ranging LLR) je principiálně stejné jako u družic. Na Měsíci je umístěno 5 koutových odražečů – obr. 3.17 – z expedic Amerických a Sovětských.



**Obrázek 3.17:** „Měsíční“ laser a rozložení koutových odražečů na Měsíci

Samo měření je energeticky velmi náročné – vysílá se řada impulsů, používá se více zesilovačů – vracejí pouze jednotlivé fotony. Statistické zpracování výsledků je nutným předpokladem.

### **3.8 Radiointerferometrie z velmi dlouhých základů**

VLBI (Very Long Baseline Interferometry)

Je to jediná metoda kosmické geodézie, která nevyužívá družice. Zdrojem rádiového záření jsou mimogalaktické zdroje (kvazary), které vysílají náhodný šum.

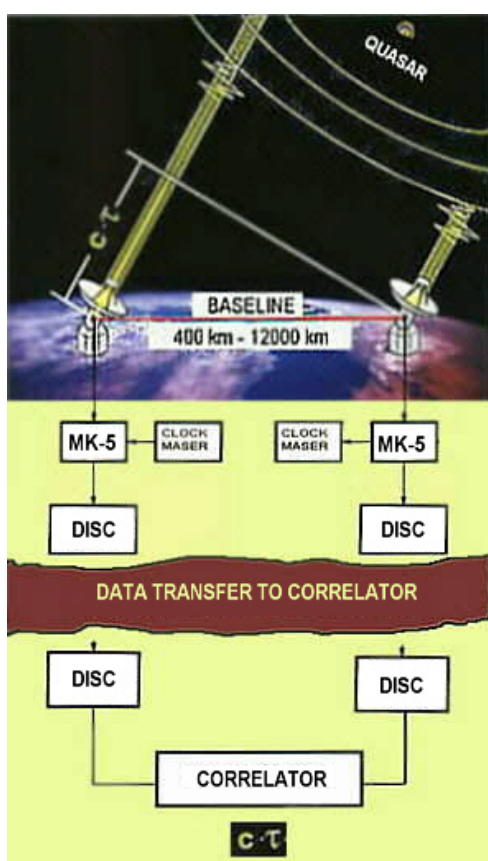
Radiointerferometr, pevně spojen s povrchem rotující Země, nutně odráží ve svých pozorováních svoji časově proměnnou orientaci vzhledem k pozorovaným rádiovým zdrojům. Přesná měření umožňují určit prostorový vektor spojnice obou antén interferometru s přesností mnohem vyšší než konvenčními geodetickými metodami (přesnost délky je několik centimetrů na 10 000 km a přesnost směru mezi spojnicí interferometru a zdrojem 0.002“).

Princip: Kosmické rádiové vyzařují signál, který má podobu Gaussovského náhodného šumu. Ten může být popsán v místě příjmu jako řada velmi krátkých náhodných impulsů, kombinujících se do vlny, jejíž amplituda má Gaussovo náhodné rozdělení. Signál z téhož zdroje je zachycen minimálně dvěma anténami umístěnými na různých místech zemského povrchu. Vzhledem k tomu, že antény mají různou vzdálenost od zdroje záření a signál se šíří konečnou rychlostí, dopadne stejné místo záření na každou z antén v jiný časový okamžik. Primárním cílem metody je zjistit velikost tohoto časového zpoždění.

Spojité záření je takové, jehož výkonové spektrum se jenom málo mění s frekvencí. Dále přistupuje záření v některých spektrálních čarách (zde má základní význam čára neutrálního atomárního vodíku – asi 1.4 GHz).

Mimogalaktické zdroje (kvazary) mají zpravidla malé úhlové rozměry ( $\sim 0.001''$ ) a složité struktury, které se mění s časem. Signál přicházející od kvazarů je na zemi velmi slabý. Příjem signálů se provádí pomocí antény (zpravidla reflektorového typu) umístěné na vhodné montáži.

**Obrázek 3.18:** Princip VLBI



Základem interferometru jsou dvě antény.

Signál dopadající na anténu je upraven (rozložen na jednotlivá frekvenční pásma a digitalizován) a zaznamenáván na magnetickou pásku spolu s časovými údaji z hodin. V korelátoru jsou signály z obou přijímačů vynásobeny, z výsledků je odstraněna vysokofrekvenční složka. Je-li časové zpoždění – časový rozdíl dopadu čela téže vlny –  $\tau$ , signál  $S_1(t)$  je signál z první antény a signál  $S_2(t)$  je signál z druhé antény, bude výstup z korelátoru úměrný výrazu

$$(3.21) \quad r(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T S_2(t) S_1(t - \tau) dt,$$

Kde  $2T$  je časová konstanta integrátoru, který hraje roli frekvenčního filtru (sečítá výstup násobiče po dobu  $2T$  a pak se vynuluje). Funkce  $r(\tau)$  je maximální pro případ, kdy  $S_2(t) = S_1(t - \tau)$  – tedy, když jsou to shodné signály posunutě o  $\tau$ .

Je dobré připomenout, že obrázek 3.18 zobrazuje situaci v jednom časovém okamžiku. Vzhledem k rotaci Země se časové zpoždění  $\tau$  neustále mění.

Pro geodetické aplikace je možné na výstupu korelátoru měřit:

- časové zpoždění  $\tau$  a jeho změnu v čase  $d\tau/dt$ ,
- frekvence interferenčních proužků  $F$

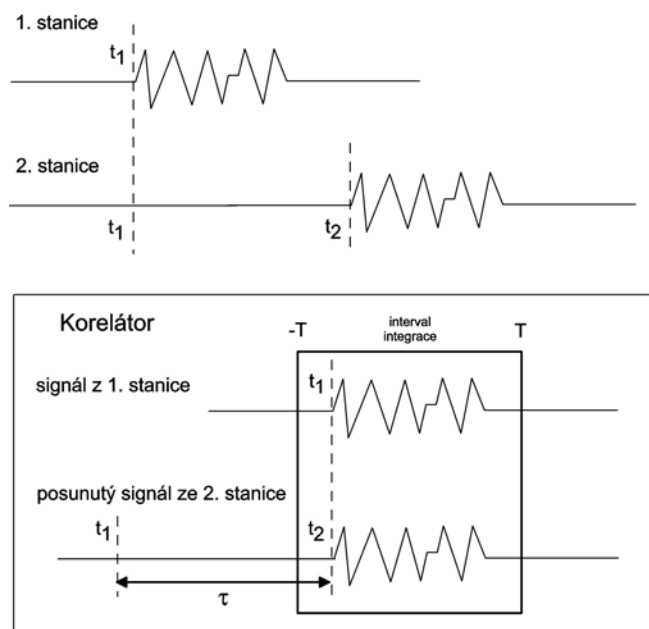
$$(3.22) \quad F = f_0 \frac{d\tau}{dt},$$

kde  $f_0$  je střední frekvence pásma, ve kterém je signál přijímán,

- fázové posunutí – fáze časového zpoždění.

### 3.8.1 Zpracování širokopásmového šumu

Měřené veličiny – časové zpoždění  $\tau$  a frekvence interferenčních proužků  $F = f_0 dt/dt$ .



**Obrázek 3.19:** Princip zpracování dat v korelátoru

Stejně „místo“ pseudonáhodného šumu je na 1. stanici přijato v čase  $t_1$  a na 2. stanici v čase  $t_2$ . V korelátoru je záznam zkusmo posouván a je počítána vzájemná korelace obou signálů podle vzorce (3.21) v integračním intervalu  $\langle -T, T \rangle$ . Po dosažení maximální hodnoty korelačního koeficientu  $r$  je hledané časové zpoždění  $\tau = t_2 - t_1$ .

Podle obrázku 3.20 definujeme časové zpoždění  $\tau$

$$(3.23) \quad \tau = \tau_c + \frac{D}{c} \sin \theta,$$

kde  $D$  je délka základny – vzdálenost mezi anténami a  $\tau_c$  je rozdíl synchronizace hodin na stanicích A a B promítnutý do časového zpoždění. Vyjádříme si funkci  $\sin \theta$ . Zvolme v bodě A jednotkovou sféru, na které máme definován zemský pól, směr ke kvazaru H a směr základny k anténě B – viz obr 3.21.

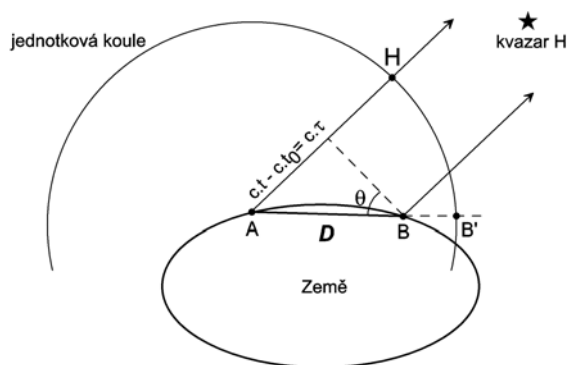
Použitím kosinové věty máme:

$$(3.24) \quad \sin \theta = \sin \delta_B \sin \delta_H + \cos \delta_B \cos \delta_H \cos(t_b - t_H).$$

Dále si připomeňme z geodetické astronomie, že hodinový úhel kvazaru  $t_H$  je rozdíl greenwichského hvězdného času  $S_{gr}$  a rektascenze kvazaru  $\alpha_H$ :

$$(3.25) \quad t_H = S_{gr} - \alpha_H \approx \Omega t - \alpha_H$$

Greenwichský hvězdný čas můžeme aproximovat součinem rychlosti rotace a času.



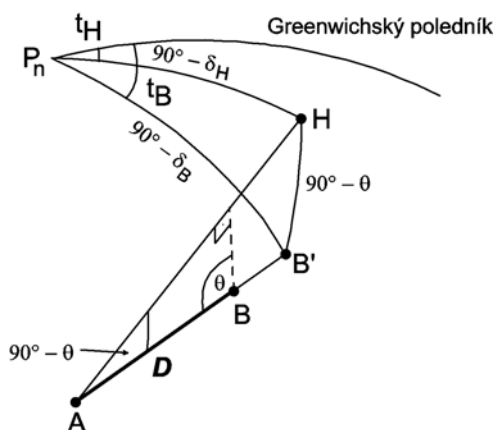
Obrázek 3.20: K definici časového zpoždění signálu

Dosažením do (3.23) máme

$$(3.26) \quad \tau = \tau_c + \frac{D}{c} [\sin \delta_B \sin \delta_H + \cos \delta_B \cos \delta_H \cos(t_B - \Omega t + \alpha_H)] .$$

Podle (3.22) pro frekvenci interferenčních proužků platí (při uvážení, že „hodinový úhel“  $t_B$  je vůči času konstantní, protože se jedná o směr spojený se Zemí stejně jako je s ní spojen Greenwichský poledník)

$$(3.27) \quad F = f_0 \frac{d\tau}{dt} = f_0 \left[ \frac{d\tau_c}{dt} + \frac{D\Omega}{c} \cos \delta_B + \cos \delta_H \sin(t_B - \Omega t + \alpha_H) \right] .$$



Obrázek 3.21: VLBI, základní vztahy

Předpokládejme, že  $\tau_c$  má pouze lineární chod, tedy můžeme psát

$$(3.28) \quad \tau_c = A_1 + A_2 t .$$

Rovnice (3.26) a (3.27) pak obsahují neznámé:

- synchronizaci hodin  $A_1, A_2$ ,

- polohu základny  $D, t_B, \delta_B,$
- polohu zdroje  $\alpha_H, \delta_H,$

tj. celkem 7 neznámých.

Z pozorování ve 4 různých časech získáme 8 rovnic pro 7 neznámých – lze řešit vyrovnaním. Měření časového zpoždění a frekvence interferenčních proužků má některá podstatná omezení:

- a) polární složka základny (Z souřadnice v pravoúhlém prostorovém souřadnicovém systému) nemůže být určena vůbec, protože časové zpoždění a frekvence interferenčních proužků je ovlivněno rotací země a měřený kvazar je prakticky nekonečnu – základnou lze libovolně posouvat v prostoru podél osy rotace a časové zpoždění i frekvence proužků se nebude měnit,
- b) nízké deklinace zdroje, nebo základny jsou určeny nespolehlivě – v rovnicích se vyskytuje  $\cos$  deklinací, který je pro malé úhly „plochý“ – změna kosinu úhlu je pro úhel blízko nuly velmi malá,
- c) základna  $D$  a poloha zdroje nemohou být určeny současně, protože v takovém případě je úloha neurčitá – člen  $f_0 \frac{d\tau_c}{dt} = f_0 A_2$  neobsahuje geometrickou informaci ani o zdroji ani o základně.

Využití interferometrické metody je dále komplikováno, pokud zdroj není bodový.

Ve skutečnosti se provádí mnohem více měření na více kvazarů, je více určovaných parametrů – viz např. GA10, kap 7. Vzhledem k tomu, že metoda VLBI „měří“ na zdroje nebeského referenčního systému ze stanic vázaných na terestrický referenční systém, je schopna určovat – zpřesňovat parametry, které spojují oba systémy (nutace  $\Delta\psi, \Delta\varepsilon$ , oprava rotačního času DUT1 a poloha pólu  $x_p, y_p$ ).

### **3.8.2 Technické informace o VLBI**

VLBI pozoruje slabé vzdálené zdroje rádiového záření ve vlnových pásmech S a X – dvě vlnová pásma jsou zejména pro eliminování vlivu ionosféry:

- S pásmo 2170 – 3000 MHz, průměrná vlnová délka 13cm,
- X pásmo 8200 – 8466 MHz, průměrná vlnová délka 3.5cm.

Prvotní zpracování na stanici spočívá v příjmu signálu, jeho digitalizaci a zaznamenání ve stanoveném formátu na nosiče, kterými donedávna byly výhradně magnetické pásky. Podle typu zapisovače pásky a formátu záznamu rozlišujeme několik způsobů: Mark IV, VLBA, K4, S2 a další. Posledním „výkřikem“ techniky je Mark 5A – zavádí záznam (až 1Gbps) na výměnné harddisky – v jedné kazetě systému je osm disků – každý má v současnosti 120GB, což je na 2 hodiny měření. Předpokládá se vzhledem k rostoucím kapacitám disků, že bude v blízké budoucnosti možno zvýšit kapacitu kazety až na celých 24 hodin (1 kampaň). Systém bude implementován na většině stanic IVS.

Korelátoři musí mít shodné zařízení pro čtení záznamového zařízení, jako je na stanicích.

Měření je postaveno na znalosti přesné frekvence a přesného času – jsou používány nejpresnější standardy:

- pro frekvenci vodíkové masery,
- pro čas cesiové atomové hodiny srovnávané s ostatními hodinami ve světě pomocí časových GPS přijímačů.

Popis systému, skládajícího se z antény a korelátoru:

Anténa:

Zachycuje maximální množství signálu a směřuje ho do ohniska, kde je umístěn přijímač. Antény jsou umístěny na azimutálních montážích. Referenční bod je definován jako průsečík svislé točné osy a vodorovné točné osy. Osa antény i v ideálním případě prochází referenčním bodem.



**Obrázek 3.22:** – Radioteleskopy technologie VLBI – vlevo mobilní 6 m teleskop soupravy TIGO, vpravo 20 m radioteleskop stanice Wettzell (SRN)

První stupněm přijímače je předzesilovač, který pro snížení vlastního šumu musí být chlazen – obvykle na teplotu kapalného dusíku. Další součástí přijímače je násobič frekvence, který frekvenci dodanou z vodíkového maseru (obvykle 10 MHz) vynásobí na frekvenci rovnou spodní hranici pásma přijímaného signálu. Přijímaný signál jde do mixeru, kde se složí s vynásobenou frekvencí. Vznikne signál, který má maximální frekvenci rovnou šířce pásma (max. 900 MHz) a který lze bez velkých ztrát přenést kabely do záznamového zařízení.

Korelátor:

Elektronické zařízení, které provádí korelaci binárních řetězců – viz výše. Výstupní korelační funkce se předává k analýze. Zpracování zabere 2 x až 5 x více času než pořízení dat.

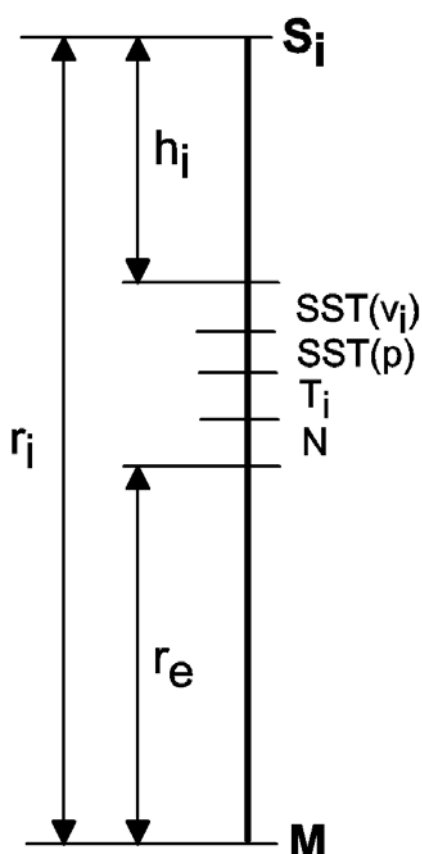
VLBI se využívá kromě určení vektoru spojnice mezi dvěma body (anténami) k určení parametrů orientace Země, nejvýznamnější roli zde hraje určení korekce času  $DUT_1 = UT_1 - UTC$ . Je to v podstatě jediná metoda kosmické geodézie, která je schopna tuto veličinu určit.



### 3.9 Družicová altimetrie

#### 3.9.1. Úvod, princip a fundamentální rovnice družicové altimetrie

Družicová altimetrie se stala za posledních dvacet let dominantním zdrojem informací o gravitačním poli Země. Přispívá různým geovědním oborům, nejenom geodézii. Posunula znalosti geofyziky a zejména oceánografie a je aplikována i v klimatologii. Podrobnější informace než v tomto základním textu čtenář nalezne v Dodatku 3.9 a v pracích tam citovaných.



Měří se výška letu družice nad hladinou oceánu nebo jiným bodem povrchu planety radiolokačním (radarovým) nebo laserovým výškoměrem – čili altimetrem, orientovaným (pasivně tj. gravitační stabilizací či "vynuceně" aktivní orientací družice) k nadiru, tj. ve směru místní vertikály (obr. 3.23). V okamžiku  $t_i$  v bodě  $S_i$  vyšle altimetr kratičkový signál k nadiru, signál se odrazí od mořské hladiny (nebo jiného místa na povrchu) a vrátí zpět na palubu. Z transitního času (jak dlouho letěl signál z paluby dolů a zpět na družici) se určí "hrubá" výška,  $h'_i$ , která po řadě korekcí (přístrojových, ze šíření signálu atmosférou a podle stavu hladiny, od které se signál odráží) dá korigovanou výšku  $h_i$ .

Na obr. 3.23 je geocentrický průvodič družice v okamžiku měření  $t_i$  označen  $r_i$ , průvodič referenčního elipsoidu  $r_e$ , symbol  $N$  znamená převýšení geoidu nad referenčním elipsoidem a  $T$  označuje oceánské slapové vlivy; složky topografie moře - sea surface topography  $SST$  (proměnná a konstantní) jsou označeny  $SST(v_i)$  a  $SST(p)$ . Topografie moří a oceánů je definována jako odchylka jejich střední hladiny (zbavená vlnění a vlivu tlaku atmosféry na hladinu oceánu) od geoidu, daná oceánskými proudy, různou salinitou (slaností) a teplotou vody a dalšími vlivy.

**Obrázek 3.23:** - Princip družicové altimetrie

- S ..... hmotný střed družice nesoucí výškoměr,
- h ..... měřená výška po patřičných korekcích,
- $r_e$  ..... průvodič náhradního (referenčního) elipsoidu,
- N ..... převýšení geoidu nad referenčním elipsoidem,
- SST ... topografie mořské hladiny (variabilní a permanentní složka),
- T ..... oceánské slapy.

Podle obr. 3.23 platí

$$(3.9.1) \quad r_i = h_i + SST(v_i) + SST(p) + T_i + N + r_e,$$

což je *fundamentální rovnice družicové altimetrie*.



Převýšení geoidu  $N$  nad referenčním elipsoidem je řádově desítky metrů oproti řádově decimetrům (až 1.5 m) u  $SST$  a  $T$ . Z toho lze soudit, že první aplikace družicové altimetrie se týkaly zpřesnění oceánské části geoidu. Jak se postupně zpřesňovalo určení dráhy v radiálním směru díky stále přesnějším měřickým metodám a důkladnějšímu modelování poruch dráhy došlo i na určení topografie moří a zpřesnění oceánských slapů. Co se týče  $r_i$ , volí se 7100 až 7700 km (více v kap. o výběru dráhy – odstavec 3.9.3).

Průběh oceánské části geoidu je v nejnovějších modelech gravitačního pole Země znám s přesností 20-30 cm, na pevninách stále s chybou kolem  $\pm 1$  m. Vlastní výškoměrné měření  $h_i$  má dnes ohromující přesnost 1-2 cm (v závislosti na vlnění oceánu). Zavádění korekcí je stále problém, žádná není známa dokonale a vede tudíž k residuální chybě v  $h_i$  na úrovni až jednotlivých centimetrů. Veličiny  $T$  a  $SST$  jsou známy s přesností na jednotlivé decimetry. Kritická byla *radiální chyba* dráhy  $r_i$  družice, vyvolaná nepřesnou znalostí parametrů gravitačního pole. Dnes už tento problém pominul. Z obr. 3.23 je jasné, že každá chyba dráhy ve směru měření (tj. v radiálním směru, ve směru radius-vektoru) se přímo přenesou do určovaných veličin. Navíc - a to už z obrázku nevyčteme - je část radiální chyby dráhy geograficky korelovaná (blíže o tom v odstavci D3.9.7.3).

Definujme vzestupný (sestupný) oblouk dráhy družice. Vzestupným (*ascending*) obloukem je ta část dráhy družice, kdy průmět dráhy na zemském povrchu vytváří křivku se zvětšující se zeměpisnou šířkou (a naopak pro sestupný (*descending*) oblouk). Nebudeme-li usilovat o určení  $N$  z altimetrie, lze například  $SST(v)$  nebo  $T$  nebo relativní změny výšek určovat z rozdílu  $r$  nad tímž subsatelitním bodem (průmět dráhy na zemský povrch) mezi vzestupným a sestupným obloukem dráhy. Uvažujme alespoň dvě měření  $h_i$  a označme je  $h_a$  pro vzestupný a  $h_d$  pro sestupný oblouk. Pak máme rovnici (3.9.1) dvakrát a můžeme napsat rozdíl

$$(3.9.2) \quad x \equiv r_a - r_d = h_a - h_d + SST(v_a) - SST(v_d) + T_a - T_d,$$

což je *fundamentální rovnice družicové „diferenciální“ altimetrie (cross-over altimetry)*.

Všechny veličiny, které lze za interval  $(t_2 - t_1)$  uplynulý mezi měřeními  $h_a(t_1)$  a  $h_d(t_2)$  považovat za neměnné v rov. (3.9.1), se už v rovnici (3.9.2) neobjeví. Tím také chyby těchto veličin neovlivní rozdíl průvodičů (crossover difference).

Mezi vzestupnými a sestupnými oblouky jedné konkrétní dráhy existuje samozřejmě jeden typ křížících se bodů. Pokud rozdíl  $r_a - r_d$  nahradíme rozdílem  $r_d - r_a$ , změní se jen znaménko. Pro jednu dráhu máme *single satellite crossovers* (SSC). Pro dvě dráhy (rozumí se s různým sklonem a hlavní poloosou) existují **právě čtyři** typy *dual satellite crossovers* (DSC), a to AA, AD, DA a DD. Označili jsme prvním/druhým písmenkem A vzestupný nebo D sestupný oblouk. (Pro SSC by pak bylo  $AD = -DA$ .) Více o SSC a DSC v Dodatku 3.9.

### **3.9.2 Altimetrická měření a jejich korekce**

Radar „vidí“ v jiných vlnových délkách než lidské oko. Hladina moře pro něj má vysokou odrazivost. Optimální pro altimetrii je část mikrovlnného spektra. Musí se ještě zvážit vliv pohlcování signálu atmosférickými vodními parami nebo kyslíkem na vybraných frekvencích, navíc různý pro různé zeměpisné šířky. Družicové altimetry pracují na frekvencích 2-20 GHz (připomeňme, že 1 GigaHertz =  $10^9 \text{s}^{-1}$ ). Rozlišují se pásma (bands)

$S$  (1.6-4.2 GHz),  $L$  (4.2-5.8 GHz),  $X$  (5.8-10.9 GHz) a  $K_u$  (10.9-20 GHz).

Signál vyslaný altimetrem musí být co nejkratší. Požadavku přesnosti měření  $\pm 1$  cm by odpovídal signál dlouhý jen 30 pikosekund ( $1 \text{ psec} = 10^{-12} \text{ sec}$ ). K tomu by m.j. byla potřeba velká anténa a obrovský výkon radaru. Proto se používá lineárně frekvenčně modulovaný puls (*chirp*). Altimetr je schopen generovat až tisíce pulsů za sekundu. Pro přesné určení tranzitního času a tím i výšky je třeba provést průměrování z více měření.

Altimetr není v těžišti družice; referenční bod, ke kterému se mají vztahovat korigované výšky vypočtené z tranzitního času, je v prostoru altimetrické antény. Konstrukteři musí příslušnou vzdálenost zjistit s přesností několika milimetrů.

Signál z družice letí směrem k oceánu, odráží se od hladiny a vrací se zpět a je ovlivňován (zpoždován a ohýbán) atmosférou (a to v obou směrech). *Ionosférická* korekce je způsobena přítomností volných elektronů ve vysoké atmosféře. Závisí na zeměpisné šířce. Má amplitudu kolem 10 cm a lze ji určit přesněji než na  $\pm 1$  cm. *Troposférická* korekce má dvě složky. *Suchá* je vyvolána plynovými složkami atmosféry a je funkcí tlaku atmosféry a její teploty. Amplituda stálé složky je cca dva metry, chyba v určení je asi 1 cm. *Mokrá* část zahrnuje vliv vodních par vody z mraků, je menší (20 cm), ale variabilní a známa snad na  $\pm 1$  cm. *Sea state bias*, též *electromagnetic bias* (EM), je systematická odchylka v měřené výšce pramenící z faktu, že radar neprůměruje výšku vln na střední geometrickou hodnotu, jak by to „viděly naše oči“, ale na jinou hodnotu. Vršky a důlky vln na moři odrážejí různě a radarové měření je tím ovlivněno.

### **3.9.3. Výběr drah altimetrických družic (hlavní poloosa, sklon a excentricita)**

#### **3.9.3.1. Obecné poznámky**

Nejdůležitější je výběr *hlavní poloosy dráhové elipsy*  $a$  či výšky letu  $H = a - R$  (kde  $R$  je referenční poloměr Země), *sklonu*  $I$  *roviny oběžné dráhy* družice k rovině zemského rovníku a *excentricity* dráhy  $e$ .

Dráha nesmí být "příliš" nízká ani "příliš" vysoká. Dráha s výškou perigea pod 500 km by byla příliš bržděna odporem atmosféry a museli bychom ji často korigovat raketovými motorky. Příliš vysoká dráha, nad 2000 km, by kladla velké nároky na přístrojové vybavení na palubě a blížila by se Van Allenovým pásům nabitých částic obklopujících Zemi. Volí se proto výšky zhruba 800 - 1300 km.

Dráha je *rovníková*, má-li sklon  $I = 0^\circ$  nebo  $180^\circ$ , *přímá* (prográdní) pro  $0^\circ < I < 90^\circ$ , *polární* pro  $I = 90^\circ$  a *nepřímá* (proti směru rotace Země, retrográdní) pro  $90^\circ < I < 180^\circ$ . Pokud by byl sklon dráhy příliš „malý“ (dráha blízká rovníkové), rozsah zeměpisných šířek pokrytých pozorováními by nemusel stačit cíli experimentu. Pokud by byla dráha blízká polární, nedefinovaly by se dobře crossovers. Proto se volí sklon „velký“, ať už na přímé či retrográdní dráze, např.  $66^\circ$  nebo  $98.5^\circ$ ,  $108^\circ$  atp. Vyvarovat bychom se měli i sklonů, kde dochází k aliasingu se slapovými vlivy.

Excentricitu volíme malou, čili dráhy altimetrických družic jsou skoro kruhové. Pro eliptické dráhy bychom měli výrazně jiné podmínky na funkci přístrojů na palubě kolem perigea a apogea. K volbě dráhy se zamrzlým perigeem, která vede k výběru specifické, malé

excentricity, se ještě vrátíme.

### **3.9.3.2. Některé podrobnosti k výběru drah**

Pojem *dráhové rezonance* je pro volbu altimetrických drah velmi důležitý, takže čtenář by si měl připomenout kap. 2.3.3.

Teoreticky je v každém okamžiku dráha se svou aktuální výškou letu v některé z dráhových *rezonancí*  $\beta/\alpha$ , kdy družice uskuteční  $\beta$  nodálních oběhů za  $\alpha$  hvězdných dnů a dráha družice se tak vůči pozemskému pozorovateli přesně opakuje po  $\alpha$  dnech. V oceánografii se hovoří o „repeat orbits“ a Exact Repeat Missions (ERM). Dráha se stále musí upravovat tak, aby požadovaná rezonanční podmínka byla splňována (úpravy dráhy raketovými motorky, frekvence úprav závisí především na hustotě atmosféry v daném prostoru a čase). Na rozdíl od ERM máme nekorigované dráhy pro geodetické aplikace (Geodetic Mission, GM). Jedna a táž družice může v průběhu své mise „pobývat“ třeba v několika režimech ERM a GM, dle dohody uživatelské komunity. Mezi režimy musí změnit dráhu pomocí raketových motorků. Každý typ dráhy se hodí pro jiné účely – (viz též odst. 7.3.3).

Z rovnice (7.3.4) jsme pro dané střední  $I$ , za předpokladu efektivně kruhové dráhy a pro vybraný rozsah  $H$  (nebo  $a$ ) spočetli ta  $H$  (nebo  $a$ ), která odpovídají rezonancím  $\beta/\alpha$ . Pro altimetrickou družici s  $I = 98.5^\circ$  je ukázka na obrázku v Dodatku D2.3.3 o rezonancích. ERS 1 byla vypuštěna na dráhu v rezonanci  $\beta/\alpha = 43/3$  (tomu odpovídá střední  $a = 7154$  km, posléze byla přesunuta na  $\beta/\alpha = 501/35$  ( $a = 7159$  km), čímž splnila oceánografické úkoly a pak byla ponechána jako GM k mapování oceánského geoidu. Také SEASAT měnil dráhu, ze 43/3 na 244/17. GEOSAT byl na 244/17, pak GM. TOPEX/Poseidon (T/P) i JASON jsou na vyšších drahách, kolem 1300 km s  $\beta/\alpha = 127/10$ .

Pro dálkový průzkum bývá požadováno dlouhodobě konstantní osvětlení přístrojů Sluncem. Dráha splňující podmínku konstantního osvětlení je *heliosynchronní* (*sun-synchronous*). Nalezneme sklon heliosynchronní dráhy. Víme, že pro otáčení uzlu dráhy díky  $C_{2,0}$  platí Lagrangeovy rovnice (2.3.16). Přímá dráha „couvá“, polární je teoreticky stabilní, u retrográdní dráhy uzel „prograduje“. Požadujeme, aby změna astronomické délky Slunce byla stejná jako změna uzlu dráhy. Berme délku fiktivního středního Slunce pohybujícího se rovnoměrně po rovníku a ne po ekliptice. Pro jeho konstantní denní změnu  $L$  platí

$$L = 2\pi/365.2422 \cong 0.9856 \text{ stupně za den,}$$

kde 365.2422 dní je délka tropického roku. Chceme, aby  $\Omega$  byla stejně veliká. Platí

$$(3.9.3) \quad \Omega \approx - (GM)^{1/2} C_{20} R^2 a^{-7/2} (1-e^2)^2 \cos I.$$

Výsledek (3.9.3) závisí především na sklonu dráhy. Vidíme, že jen retrográdní dráha může (viz  $-\cos I$ ) být heliosynchronní. Pro výšky letu kolem 800 km vychází sklon pro heliosynchronní dráhu kolem 98.5 stupně.

Družici lze umístit na dráhu s efektivně konstantním  $\omega$ , tj. s téměř neměnnou vzdáleností perigea od výstupného uzlu (*frozen perigee, dráha se zamrzlým perigeem*).

Vezměme Langrangeovy planetární rovnice pro  $e$  alespoň s prvním lichým zonálním členem  $C_{3,0}$  a pro  $\omega$  s  $C_{2,0}$ . Vykompenzování jejich vlivu vede k rovnici

$$(3.9.4) \quad \dot{\omega} = \dot{\omega}_{2,0} - \dot{\omega}_{2,0} \sin \omega$$

a ta se anuluje buď pro  $\dot{\omega}_{2,0} = 0$ , tj pro tzv. kritický sklon (odst. 2.3.1) anebo pro  $\omega = 90^\circ$  pro libovolný sklon.

### **3.9.4 Historie družicové altimetrie**

Družicová altimetrie se za posledních dvacet let stala největším přínosem pro určení parametrů gravitačního pole Země a detailního oceánského geoidu a pro příslušné geofyzikální interpretace. Stalo se však mnohem více. Díky postupně se zvyšující přesnosti až na nynější přesnost centimetrovou (v radiálním směru, tj. ve směru altimetrických měření) altimetrie přispívá oceánografům ve studiu topografie oceánu a časových variací topografie včetně zajímavých anomálních jevů jako je El Niño. Altimetrie poskytuje data pro test globálního oteplování.

První, technologické experimenty družicového altimetru proběhly na amerických kosmických lodích *Skylab* III a IV (1973-4). Od družice *GEOS 3* (vypuštěna v r. 1975), mající poprvé praktické geodetické použití tj. určení  $N$  se submetrovou chybou, jsme se přes americké družice *SEASAT* (1978) a *GEOSAT* (1985-1990) a americko-francouzský *TOPEX/Poseidon* (TOPographic Experiment, NASA+francouzský CNES, 1992-2004), dále *T/P*, a evropskou *ERS 1* (European Remote Sensing satellite ESA, 1991-2000) dostali až k dnešním altimetrickým družicím *ERS 2* (ESA, 1995-dosud), *GFO* (Geosat Follow-On, USA 1998-), *JASON* (Joint Altimetry Satellite Oceanography Network, NASA+CNES 2001-) a *ENVISAT* (ESA, 2002-). Dnes jsou altimetrická měření alespoň z jedné družice kontinuálně k dispozici.

*Výběr dráhy.* Dráhy všech zmíněných družic až na *T/P* a *JASON* jsou ve výšce kolem 800 km, *T/P* a *JASON* kolem 1300 km. Všechny až na *T/P* a *JASON* mají retrográdní dráhy, série *ERS 1, 2* a *ENVISAT* mají dráhu navíc heliosynchronní. *T/P* a *JASON* jsou na stejných prográdních drahách s  $I = 66^\circ$ . Všechny dráhy bez výjimky jsou téměř kruhové. Všechny měly za svůj aktivní život fázi alespoň jedné „repeat orbit“. *SEASAT* fungoval jen asi čtvrt roku, jinak družice jako *ERS 1* či *T/P* předčily svou výdrží očekávání.

*Určení dráhy.* Prostředky k určení dráhy se dnes kombinují s cílem určení „centimetrové dráhy“ v každém okamžiku. Používají se koutové odražeče pro SLR, antény pro high-low SST z GPS, i vlastní altimetrický radar. Vedle toho jsou družice vybaveny anténami pro spojení se systémem PRARE či DORIS (ten nyní převládá). Starší družice jako *GEOS* či *SEASAT* SST neumožňovaly, *GEOSAT* neměl koutové odražeče. PRARE na *ERS 1* selhal, takže dráha závisela jen na SLR. Nyní je PRARE aktivní na *ERS 2*, ostatní nové altimetrické družice mají DORIS. Systémy PRARE a DORIS nejsou tak přesné jako SLR, ale mohou měřit kontinuálně bez ohledu na počasí, takže pokrytí dráhy měřeními je optimální.

Zatím všechny zmíněné družice měly či mají radarové výškoměry, ale existují i výškoměry laserové. Nejprve se zkoušely mimo planetu Zemi, v rámci tzv. "Hvězdných válek" na oběžné dráze kolem Měsíce (mise Clementine), kolem Marsu (Mars Global Surveyor) a dokonce kolem planetky Eros (sonda NEAR). Poté došlo i na Zemi. Družice od r. 2003

rutinně pozorující hlavně Grónsko a Antarktidu se jmenuje *ICESat* (Ice, Cloud and land Elevation Satellite), vypustila ji NASA na dráhu s výškou  $H = 600$  km a sklonem  $I = 94^\circ$ . Má být schopna „zmapovat“ změny výšky ledové pokrývky pouhých 1.5 cm za rok s rozlišením 100 x 100 km.

### **3.9.5. Radiální chyba dráhy**

#### **3.9.5.1 Obecné poznámky**

Chceme-li odvozovat fyzikální veličiny uvedené v rovnici (3.9.1) s přesností například na jednotlivé centimetry, pak musíme znát  $r$  družice v okamžiku měření s ještě větší přesností. Znat polohu (a rychlost) znamená znát dráhu čili *dráhové parametry* (elementy). Požadavek centimetrové přesnosti alespoň v radiálním směru (kde jej dosáhnout je z jistých důvodů přece jen snazší než například ve směru podél dráhy, tj. ve směru vektoru rychlosti) byl obrovskou výzvou pro *dráhovou dynamiku umělých družic Země*, což je obor na pomezí astronomie (aplikované nebeské mechaniky), teorie potenciálu, geofyziky a geodézie. Dnes se cílí – centimetrové radiální chybě – blížíme v případě drah družic T/P, JASON a ENVISAT.

Družice se pohybuje kolem Země v poli rušivých zrychlení gravitačního i negravitačního původu (vliv gravitačního pole Země samotné, přímý i nepřímý (slapový) vliv Měsíce, Slunce, popř. planet; odpor atmosféry, tlak slunečního záření přímého i odraženého od Země v různých vlnových délkách, aj.). Nyní jde o to, jak je dráhová dynamika schopna jednotlivé vlivy přesně určit.

V minulosti dominovaly v radiální chybě dráhy příspěvky od nepřesně známých parametrů statického gravitačního pole Země (harmonických geopotenciálních koeficientů), a to pro dráhy všech altimetrických družic. Radiální chyba GEOSu 3 byla asi metrová, pro GEOSAT již submetrová, s tehdy existujícími modely Země (jako GEM 9). Studovat fenomény s amplitudami decimetrovými přirozeně ještě nešlo. V současnosti pro T/P a JASON jsou chyby gravitačního původu již na úrovni  $\pm 1$  cm, tedy srovnatelné nebo menší než chyby korekcí altimetrických měření. Pro GEOSAT, ERS 1 a 2 s modely gravitačního pole jako byl EGM 96 nebo GRIM 5 (1996-2000) byla radiální chyba decimetrová. Pro nejnovější modely Země, vyhotovené s příspěvkem dat z družic CHAMP a GRACE, lze již věřit, že v radiálním směru pro altimetrické družice nezpůsobují více než centimetrovou chybu.

#### **3.9.5.2 Radiální chyba jako funkce sklonu roviny dráhy altimetrické družice**

Geocentrický průvodič družice  $r$  lze napsat

$$(3.9.5) \quad r = a(1 - e \cos E),$$

kde  $a$ ,  $I$ ,  $e$ ,  $E$  jsou postupně hlavní poloosa dráhové elipsy, sklon a excentricita dráhy a excentrická anomálie. Totální diferenciál (3.9.5) je

$$(3.9.6) \quad \Delta r = (1 - e \cos M) \Delta a + a(e - \cos M - e \cos 2M) \Delta e + a e \sin M \Delta M.$$

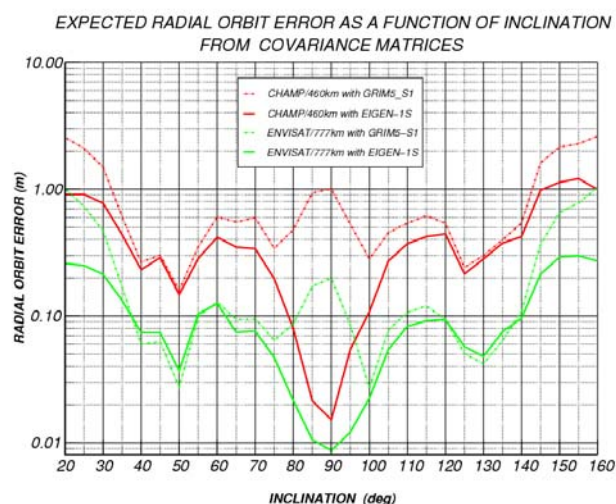
K převodu  $E$  na střední anomálii  $M$  použijeme Besselovy funkce (viz např. Rosborough,

1986) a odvodíme, že

$$(3.9.7) \quad \Delta r_{lmp}^0 = na \left( \frac{R}{a} \right)^l F_{lmp}(I) \left[ \frac{2(l-2p)}{\psi_{lmp0}} + \frac{4p-3l-1}{2\psi_{lmp1}} + \frac{4p-l+1}{2\psi_{lmp(-1)}} \right] \cdot S_{lmp0} = \\ = D_{lmp} \cdot S_{lmp0} ,$$

kde  $n$  je střední denní pohyb družice,  $F_{lmp}(I)$  jsou funkce sklonu (kap. D2.3) a  $\psi$  jsou časové derivace úhlu  $\psi_{lmpq}$  (viz rov. 2.3.8). Ve výrazu  $S_{lmpq}$  jsou obsaženy  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  takto:  $S_{lmpq} = C_{lm} \cos \psi_{lmpq} + S_{lm} \sin \psi_{lmpq}$ . Výraz (3.9.7) je výraz pro poruchu v radiálním směru (zde v určitém zjednodušení), která tu je díky existenci gravitačního pole Země. Ještě musíme učinit jeden krok, abychom se dostali k *radiální chybě* působené nepřesnou znalostí parametrů gravitačního pole  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  a to je, že na rovnici (3.9.7) musíme aplikovat zákon o přenosu středních kvadratických chyb. Ve výsledném vzorci místo  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  budou „chyby“  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ , tj. členy příslušné variančně-kovariační matice (COVAR  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ ).

Na obr. 3.24 vidíme ukázkou vývoje radiální chyby. Na ose  $x$  je sklon, na ose  $y$  v logaritmické stupnici je radiální chyba v metrech. Pro model GRIM5S1 vidíme typický stav před zahrnutím dat z družic CHAMP a GRACE do modelů Země. Radiální chyba má lokální maximum u polárních drah (kde bylo méně dobrých dat). Model Eigen-1S s daty z družice CHAMP ukazuje výrazné zlepšení. Samozřejmě také platí, že radiální chyba nižší dráhy družice CHAMP je větší než radiální chyba dráhy družice ENVISAT. Nejnovější modely vykazují miniaturní hodnotu radiální chyby (pod  $\pm 1$  cm), "plochou" přes "všechny" sklony.



**Obrázek 3.24:** Radiální chyba ve dráze jako funkce sklonu a plné variančně-kovarianční matice harmonických geopotenciálních koeficientů uvedených modelů gravitačního pole Země.

### 3.9.5.3 Radiální chyba jako funkce zeměpisné šířky a délky subsatelitního bodu

Je potřebné znát radiální chybu jako funkci sklonu a mít možnost přímého porovnání mezi modely Země a drahami družic, jako na obr. 3.24. Ten nám však nic neprozradí o případných variacích radiální chyby se zeměpisnou šířkou  $\varphi$  a délkou  $\lambda$ . Pro tento podrobnější „vhled“ potřebujeme přetransformovat (3.9.7) tak, aby v ní vystupovaly  $\varphi$  a  $\lambda$ . Podrobný popis

odvození vybočuje z rámce této informace, více viz D3.9.7.3. Výsledný vzorec pro radiální poruchu dráhy pak vypadá takto:

$$(3.9.8) \quad \Delta r = \sum_{l=2}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l D_{lmp} \tilde{\Phi}_{lmp}^c (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) \pm \sum_{l=2}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l D_{lmp} \tilde{\Phi}_{lmp}^s (C_{lm} \cos m\lambda - S_{lm} \sin m\lambda) ,$$

kde  $D_{lmp}$  závisí na sklonu a hlavní poloose a  $\tilde{\Phi}_{lmp}^{c,s}$  jsou funkcemi sklonu a šířky. Zavádí se

$$(3.9.9) \quad Q_{lm}^{c(s)} = \sum_{p=0}^l D_{lmp} \tilde{\Phi}_{lmp}^{c(s)}$$

a (3.9.8) lze přepsat takto

$$(3.9.10) \quad \Delta r = \Delta\gamma + \Delta\delta,$$

kde

$$(3.9.11a) \quad \Delta\gamma = \sum_{l=2}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l Q_{lm}^c (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda)$$

$$(3.9.11b) \quad \Delta\delta = \sum_{l=2}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l Q_{lm}^s (C_{lm} \cos m\lambda - S_{lm} \sin m\lambda).$$

Abychom se dostali k *radiální chybě* musíme aplikovat zákon přenosu středních chyb. Ve výsledném vzorci pro chybu v radiální složce dráhy budou místo  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  členy (COVAR  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ ). Radiální chyba dráhy způsobená gravitačním polem Země, vyjádřená jako funkce zeměpisné šířky a délky, má dvě složky. Jedna část je *geograficky korelovaná* (odpovídá rovnici D.3.9.13a) a je stejná pro  $r_a$  i  $r_d$ , kdežto druhá část je proměnná kolem geograficky korelované složky, tzv. složka *variabilní* či *antikorelovaná* (odpovídá rovnici D.3.9.13b); ta má pro  $r_a$  i  $r_d$  stejnou velikost, ale opačné znaménko. Pro SSC komponenta korelovaná vymizí a variabilní se objeví v dvojnásobku. Obě složky jsou komplikovanými funkcemi sklonu roviny dráhy k rovníku, hlavní poloosy dráhové elipsy, zeměpisné šířky a řádu  $m$  harmonických geopotenciálních koeficientů. Příklad chyb SSC je na obr. 3.25.

### **3.9.6 Poznámky k aplikacím družicové altimetrie**

Výška povrchu oceánu (sea surface height, *SSH*) nad referenčním elipsoidem je podle fundamentální rovnice  $SST(v_i) + SST(p) + T_i + N$ . Tuto veličinu a ne samotné  $N$  často dříve publikovali jako výsledek altimetrie, jelikož  $SST$  i  $T$  nebyly dostatečně dobře známy a byly sotva oddělitelné od  $N$ . Za všechny staré práce uvádíme Rappův altimetrický atlas z Ohio State University, Columbus, publikovaný v r. 1982, založený na měřeních z Geosu 3 a Seasatu (viz obr. D.3.14a v D3). Dnes jsou výsledky z Francie, USA, Dánska a Německa využívající data z družic ERS 1,2, GEOSAT, GFO a ENVISAT. Na detailních mapách  $N$  nebo odvozených tíhových anomálií pro Atlantický, Tichý a Indický oceán jsou zřetelné geofyzikální fenomény jako hřbety a zlomové linie.

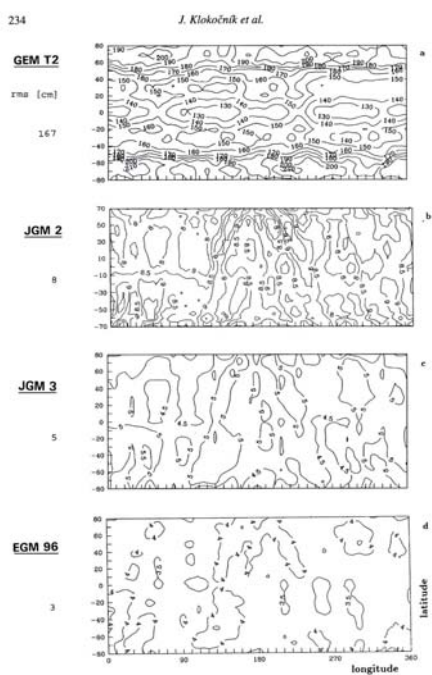


FIGURE 9 Evolution of single-satellite crossover error, for ERS 1 (501/35-orbit), with GEM T2, JGM 2, JGM 3, and EGM96 (4-day cut of orbit perturbations).

**Obrázek 3.25:** Chyba SSC pro dráhu typu ERS (ERM 501/35) jako funkce šířky a délky pro kalibrované kovarianční matice různých modelů Země, od starého GEM T2 k novějšímu EGM 96. RMS chyb jsou uvedeny u každého grafu vlevo. Vidíme markantní zmenšení chyb, které je produktem razantního zlepšování modelů gravitačního pole v období 1985-2000. Čím modernější model, tím nejen menší amplituda chyby, ale také výrazně menší její variabilita s geografickou polohou. Pro soudobé modely Země jako je Eigen-GL05C (2007) - m.j. s daty z družice GRACE - je radiální a SSC chyba již subcentimetrová a téměř neměnná se zeměpisnou délkou, jako kdybychom ignorovali off-diagonální členy kovarianční matice.

Cílem prací jsou geofyzikální interpretace (stáří litosféry, objevy nových tektonických struktur dříve nerozlišitelných, podmořských hor, atd.). V NOAA (USA) vytvořili nový postup použití altimetrických dat pro studium detailního regionálního oceánského geoidu. Nepracují přímo s výškami, ale s náklonem geoidu podél trasy měření altimetru. Z měřených  $N$  zkonstruují tížnicové odchylky orientované ve směru letu altimetru a kolmo k němu. Pak je transformují na "běžné" tížnicové odchylky. Následuje transformace na tíhové anomálie (tzv. inverzní Vening-Meineszova transformace). Konečnou fází je grafické zobrazení tíhových anomálií a jejich geofyzikální interpretace (viz obr. D3.9.14b v D3.9 vykazující oproti Rappovu atlasu řada detailů předtím netušených).

Altimetrie přispívá především ke zpřesnění harmonických geopotenciálních koeficientů  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  „vyšších  $(l,m)$ “ a k určení „vysokých  $(l,m)$ “, do 360, 360. Poprvé se altimetrická data objevila v roli *testovacích dat* přesnosti modelů Země ještě na modelech gravitačního pole nezávislá. Do modelů vlastních začala pronikat v letech 1977-1980. Významně ovlivnila modely GEM 10C, JGM 2 a 3, GRIM 4C4 (a další v této evropské sérii), EGM 96 a dalších.



Topografie povrchu moří a oceánů (Sea Surface Topography, SST, neplést se *satellite-to-satellite tracking*, odst. 3.10) se liší od geoidu v rámci decimetrů až 1.5m. Popisujeme ji nejčastěji rozvojem v řadu kulových funkcí s harmonickými „topografickými“ koeficienty  $C_{lm}^T, S_{lm}^T$ . Klasická je práce Shum et al 1993, viz obr. D.3.9.15a-c. Ze tří různých družic se spočtená SST příliš neliší. SST má časové variace, zejména sezónní, patrně i sekulární trend a krátkoperiodické změny, což vše lze do matematického modelu zahrnout. Vyjma periodických existují i aperiodické změny (viz níže). Detaily SST poskytují výsledky z T/P, JASONu či ENVISATu téměř v reálném čase (<http://sealevel.jpl.nasa.gov/gallery/videos-ssh-movies.html>).

SST je úzce svázána s oceánskými proudy. Z SST lze vypočítat složky rychlosti oceánských proudů ve směru východ/západ a sever/jih. Příklad z r. 1994 je na obr. D.3.9.16. a, b v D3.9. Jsou podchyceny všechny mořské proudy známé ze školního atlasu (např. Kuroshio, Golfský, Agulhas, Cirkumpolární proud, zvaný též Západní příhon, a další). Největší nestability jsou v rovníkové oblasti. Dnes lze studovat regionální oceánské proudění (eddies - víry).

Nyní k aperiodickým změnám SST. *El Niño* (ze španělštiny Dítě, Ježíšek, Jezulátko) je rekurentní, aperiodické, nízkofrekvenční, meziroční ohřívání tropické zóny Tichého oceánu (dostavující se jednou za 2-10 let), které probíhá souběžně se změnami tlaku vzduchu při hladině mezi východní a západní částí Tichého oceánu. El Niño lze chápat jako výsledek nestabilních oscilací v systému atmosféra-oceán, jako přirozenou součást interakce atmosféry a oceánu, vyplývající z odlišných fyzikálních vlastností obou. Jedna definice praví, že Jezulátko nastává, když v přesně vymezené rovníkové oblasti Tichého oceánu stoupne povrchová teplota vody aspoň o 0.6°C po dobu alespoň půl roku. Pro altimetrii je El Niño aperiodická, velkoplošná variace SST s amplitudou do 20 cm, což lze zjistit a monitorovat.

Jednotlivá epizoda El Niña začne (z nejasných příčin) oslabením pasátů (trade winds), větrů vanoucích od Jižní Ameriky k Indonésii v rovníkovém pásu Tichého oceánu. V důsledku toho se velké množství tepla a srážek nedostane tam, kam má (Austrálie, Indonésie, Indie, Afrika), ale je odneseno jinam i daleko na sever a jih od rovníku (jih Severní Ameriky, Mexiko, Kanada, Brazílie). Současně vznikne teplá mořská vlna v rovníkové části Pacifiku (projevující se jako regionální a dočasné zvýšení SST), dá na postup podél rovníku přes Tichý oceán na východ k Jižní Americe, kde zatlačí Humboldtův studený proud postupující normálně od jihu. Oceán se při hladině ohřeje, ryby pomřou, zkolabuje rybářství v Peru a Ekvádoru; na pevnině (na poušti) se vše zazelená a je "rok hojnosti". Obvyklé období dešťů (u nich v prosinci až únoru) bude intenzivnější a vytrvalejší, což způsobí další ohromné škody. Pokud se deště vrátí v průběhu následujícího roku k normálu, je vše v pořádku; pokud ne, je rok El Niña, období katastrof. Důsledky El Niña bývají globální, dlouhodobé (několikaleté) a katastrofální, např. velké deště a následné záplavy na jihu USA, v Mexiku a střední Americe, posunutí a nedostatečnost monzunů a tím velká sucha, neúroda a možnost následných požárů v Africe, Indii, Indonésii a Austrálii. Nejsilnější El Niño v minulém století bylo patrně v r. 1925 a v 1997-1998 (již dokumentované z altimetrických družic). Na obr. D3.9.17 v D3.9 je kompozice výsledků z T/P v období „normálu“ 1996, následného El Niña a jeho opačné fáze La Niña.

Z delší série měření (zejména družice T/P) a dalších dat lze odvodit sekulární trend v SST, který může souviset i s *globálním oteplováním*. Uvádí se +2.4±0.1 mm/rok, ale hodnota se liší podle jednotlivých autorů. Slovo „sekulární“ musíme brát s rezervou, neboť řady alti-

metrických měření jsou nejvýše asi dvacet let dlouhé (data ze slapových bójí asi 150 let, ale někdy jsou sporná).

Původně sloužila altimetrie výhradně nad oceány a moři. Dnes existují postupy vylepšující a lépe interpretující přijímaný signál (retracking). Pak lze altimetrii použít s trochu nižší přesností i na pevnině. Existuje řada příkladů sledování relativních změn výšek hladin jezer a řek (viz obr. D3.9.18 v D3.9). O aplikaci laserového altimetru na družici ICESAT jsme se již zmínili. Altimetrie má ale další teoretická i zcela praktická využití. Může sloužit k určení geopotenciálního měřítkového faktoru stejně jako k určení relativního posunu mezi systémy určování drah jednotlivých altimetrických družic nebo k navigaci střel s plochou dráhou letu a ponorek nebo pro rybolov (díky znalosti regionálního oceánského proudění a jeho dynamiky).

Poslední poznámka je o konceptu *bistatické altimetrie*, kdy jedna družice (např. ze systému GPS) na vysoké dráze signál vysílá a druhá na nízké dráze (CHAMP, SAC-C) signál přijímá, ale dvojí cestou: přímo z družice na družici a ještě odrazem od hladiny moře. K tomu musejí být přijímací družice vybavené další speciální směrovanou anténou. Měřenou veličinou je zpoždění signálu mezi přímou cestou a cestou s odrazem od moře. Hledá se pozice odrazového "bodu" na reálné ploše reprezentující Zemi, když state vektory obou družic a bistatická měření jsou dána. Výhodou bistatické altimetrie by bylo především množství měření, neboť k nadírovým měřením přibude řada off-nadírových bez vážné ztráty přesnosti výsledku. Bistatická měření se zkoušela na Zemi, na letadlech a krátkodobě na oběžných dráhách na družicích CHAMP a SAC-C. Specializovaná družice zatím vypuštěna nebyla (stav v r. 2007).

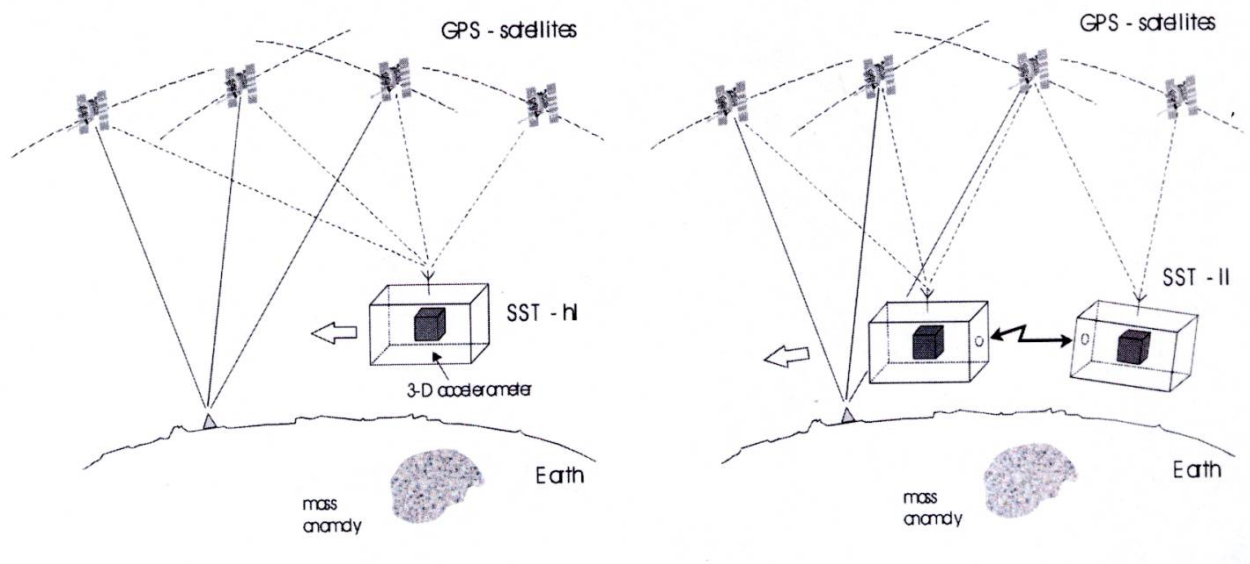
### **3.10 Sledování družice z družice (SST)**

Zatím jsme uvažovali měření se Země ke družicím (např. SLR), resp z družic k Zemi (altimetrie). V kap. 3.11 se seznámíme s gradiometrií/gradientometrií, kde dochází k měřením *in situ* – přímo v kosmickém prostoru. Další možností je, že se nejméně dvě družice na oběžné dráze sledují navzájem a jedna z nich měření předává na Zemi. Hovoříme o *sledování družice z družice* – satellite-to-satellite tracking, SST (neplést s akronymem *SST* používaným pro *sea surface topography*, topografii moří, viz např. kap. 3.9).

Existují dvě základní konfigurace SST (obr. 3.10.1), a to sledování družice na nízké dráze z družic(e) na vysoké/vysokých dráze/drahách, high-low SST a sledování družice na nízké dráze z družice na jiné nízké dráze, low-low SST (zde jsou obě dráhy stejné, nízké, kruhové a družice letí „jedna za druhou“). Obě metody byly prakticky vyzkoušeny a běžně se používají jednak k určení dráhy (hlavně high-low mode), jednak k určení parametrů gravitačního pole a jejich časových změn (hlavně low-low režim). Prakticky všechny altimetrické družice jsou dnes vybaveny pro high-low SST s družicemi NAVSAR GPS. Low-low SST mezi GRACE A a B pomáhá k určení časových variací potenciálu. Je zřejmé, že low-low SST je citlivější k určení diferenciálních hodnot (časových variací) než high-low postup. V případě družic GRACE A a B je prostorové rozlišení již pod 1000 km (promítnuto na zemský povrch). Pak je šance na zjištění variací převýšení geoidu  $N$  např. v důsledku hydrologických změn v oblasti Amazonie.

Snadno si představíme jak dvojice družic na oběžné kruhové polární dráze řekněme ve výšce 400 km vzdálených od sebe cca 200 km obíhají Zemi a reagují, změnami vzdálenosti

mezi sebou, na tíhové anomálie „pod sebou“ (obr. 3.26). Tyto změny vzdálenosti je třeba velmi přesně a vytrvale měřit (dopplerovský princip). Z nich lze následně zpřesnit parametry gra-vitačního pole, popř. určit variace pole.



**Obrázek 3.26:** Princip sledování družice z družice, koncepty high-low (vlevo) a low-low (vpravo).

Měříme relativní rychlost na spojnici obou družic, řekněme  $\rho$ . Ta je dána rozdílem

$$(3.10.1) \quad \rho = |\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1|$$

geocentrických rychlostí obou družic. Ty můžeme nalézt integrací pohybových rovnic. Veličina  $\rho$  je přímo úměrná rozdílu geopotenciálu mezi oběma družicemi. Pro poruchu  $\Delta\rho$  lze odvodit

$$(3.10.2) \quad \Delta\rho_0 = \frac{\rho(t_0)}{|\rho(t_0)|} \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^2 [(-1)^i \mathbf{A}_i \Delta T_i + \dot{f}_i] d\tau,$$

kde  $\mathbf{A}$  značí matici rotace mezi souřadnými systémy,  $\Delta T$  je poruchový potenciál, ve kterém se skrývají parametry  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ , které chceme určit,  $\dot{f}$  závisí na určení drah zúčastněných družic, index  $i$  je pro dvě družice a  $t_0$  je čas počátečních podmínek. Linearizací této rovnice sestavíme rovnici oprav pro neznámé gravitační parametry a pro opravu počátečních podmínek integrace dráhy.

V literatuře je řada variant postupů, jak z SST získat  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ . V rámci této prvotní informace se jimi nelze podrobně zabývat. Zmiňme jen nový přístup, ve kterém jsou odvozeny opravy složek podél dráhy, napříč dráhy v normálním směru a v radiálním (vertikálním) směru jako funkce parametrů drah dotýčných družic a  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  popř. jejich lineárních kombinací. Vždy lze postup určení parametrů gravitačního pole z měření variací vzdálenosti mezi družicemi považovat za „přímější“ než „komplikovaně zprostředkovaná“

pozorování družic se Země.

Družicových projektů SST byla celá řada, ale mnohé se nerealizovaly. NASA připravovala GRAVSAT, pak GRM (Geopotential Research Mission), kde se počítalo s low-low SST s cílovou přesností 3mgal a vzdáleností mezi družicemi 200 km. Obě družice by obíhaly po nízkých kruhových drahách, umístěny „za sebou“. V Evropě se uvažovalo o subdružici k Spacelabu (projekt DIABOLO, low-low SST, s interferometrickým postupem měření vzdálenosti) a o družici POPSAT vybavené pro high-low SST z dráhy ve výšce 7000 km ke drahám altimetrických družic (800-1300 km).

Mezi pionýrské experimenty verze high-low SST patří sledování kosmických lodí Apollo-Sojuz (výška 230km) z geostacionární družice ATS 6 (výška 36 000 km) a družice GEOS C či Nimbus 6 (výška cca 800 km) z ATS 6. Měření přispěla k vylepšení tehdejšího modelu gravitačního pole Země NASA GEM10B díky datům v oblastech, kde předtím byla slabá (Afrika). Také se tím vyzkoušel způsob k určení drah družic na nízkých drahách. Dnes je běžné, že altimetrické družice (jako je TOPEX/Poseidon, JASON, ENVISAT nebo GFO) a družice cílené pro detailní výzkum gravitačního pole Země a jeho časových variací (jako jsou CHAMP a GRACE a bude GOCE) používají k určení dráhy jako jeden z prostředků také high-low SST (konkrétně z družic NAVSTAR GPS). K měření a následnému potlačení negravitačních poruch mají družice CHAMP a GRACE na palubě mikroakcelerometry.

### **3.11. Úvod do družicové gradientometrie**

#### **3.11.1 Motiv pro nástup družicové gradientometrie**

V této kapitole je jen úvod do problematiky, více se zájemce dozví, včetně obrázků a citací literatury v dodatku D3.11.

Všechny typy družicových měření dosud uvedené řeší úkol diferenciálního zpřesňování dráhy umělé družice Země (UDZ) a určování geodetických a dalších parametrů zemského tělesa (Earth gravity models, EGM) zprostředkovaně pomocí LPR. Lze však měřit přímo v prostoru poruchová zrychlení či změny poruchových zrychlení. K tomu je určen *družicový mikroakcelerometr* a *gradiometer/gradientometr*. Jelikož jsou zrychlení (resp. jejich časové změny) prvními (resp. druhými) derivacemi gravitačního (tíhového) potenciálu, lze harmonické geopotenciální koeficienty odvodit přímo z těchto derivací. [Ani tato 'přímá' metoda se ovšem bez běžného určení dráhy s patřičnou přesností neobejde, abychom věděli, kdy a kde měření proběhlo].

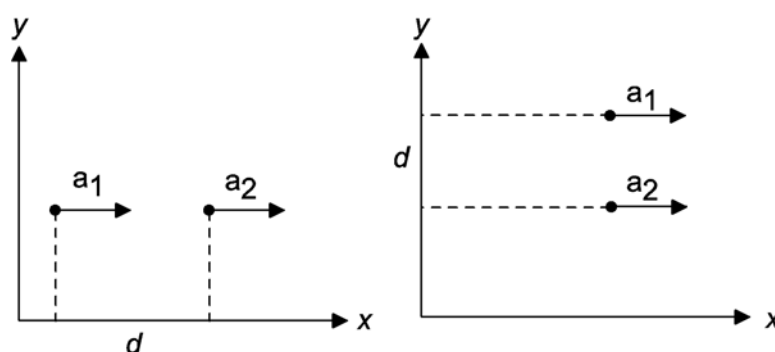
Dnešní přesnost a rozlišovací schopnost určení parametrů gravitačního pole nestačí pro řadu geoaplikací. Také je třeba chápat gravitační pole jako nestatické, časově proměnné. Tradiční kosmické metody používané k určování parametrů gravitačního pole dávají věrohodně hodnoty harmonických geopotenciálních koeficientů  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  spíše těch nižších stupňů a řádů. S příspěvkem altimetrických měření a terestrických gravimetrických dat jsou dnešní EM (tj. soubory  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  a dalších veličin) známy až do (2160, 2160) Pro jednotlivé koeficienty je však obtížné něco zodpovědného říci o jejich skutečné přesnosti. Bude to právě gradientometrie, která zkontroluje stávající určení  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  nižších  $(l,m)$  a přispěje ke zpřesnění a odhadu těch vyšších. Její přínos je hlavně ve zpřesnění popisu "jemné struktury" statického gravitačního pole, čímž se též zlepšují možnosti studia časových variací gravitačního pole.

### 3.11.2 Elementární úvahy o mikroakcelerometrii a gradientometrii

Představme si 'kouli v kouli', kuličku v dutině (a v prostoru mezi nimi vakuum). Nechť je na počátku myšleného experimentu vnitřní kulička přesně centrována uvnitř dutiny. Sestava nechť obíhá kolem Země. Pak na vnější obálku působí gravitační  $g$  a negravitační síly  $n$ , kdežto na vnitřní jen ty gravitační  $g$ , neboť vnější slupka brání projevu odporu atmosféry a dalších negravitačních vlivů na vnitřní kouli. Tím mezi působením rušivých zrychlení na vnější a vnitřní kouli vzniká rozdíl  $g-n$ . Ten naruší původní centrickou polohu vnitřní koule, až tato narazí do stěny dutiny (a experiment nutno opakovat). Opakovaným zapínáním korekčních motorků družice můžeme centrální polohu kuličky s určitou přesností udržovat. Celá družice se pak pohybuje po 'geodetické dráze' jakoby jen pod vlivem gravitačních poruch. Cesta aktivní 'eliminace' negravitačních poruch vede k tzv. 'drag-free' systému. Druhou možností je do ztráty centricity vnitřní koule (dočasně) nezasahovat, ale měřit nějakým způsobem velikost a směr rušivých zrychlení. To je *mikroakcelerometr*.

Mikroakcelerometr "měří" miniaturní zrychlení. Představme si dvojici nespojených mikroakcelerometrů vzdálených třeba 1 m ve společném 'obalu', orientovaných například ve vertikálním směru. Na 'horní' a 'dolní' mikroakcelerometr působí různě velká gravitační zrychlení, zatímco zrychlení negravitačního původu jsou prakticky stejně velká. Zařídíme, abychom mohli číst rozdíly zrychlení mezi oběma akcelerometry; pak dostaneme druhé derivace gravitačního potenciálu. Jelikož jsme ve volném prostoru a nerotujeme, tak prozatím nemluvíme o tíhovém potenciálu. Gradienty zrychlení se udávají v jednotkách [E], Eötvös či EU [Eötvös Unit]. Platí, že  $1 \text{ E} = 10^{-9} \text{ ms}^2 / 1 \text{ m} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ .

Obr. 3.27 ukazuje princip gradientometru jako diferenciálního mikroakcelerometru. Rozdíly v měření dvojice mikroakcelerometrů v jednom směru umožňují vypočítat druhé derivace potenciálu v tomto směru. Jiný přístup považuje gradientometry za modifikaci Eötvösových či Cavendishových (též Coulombových) torzních vah. Klasické Eötvösovy váhy měří rozdíly tíhových zrychlení působících na dvě různé hmoty zavěšené na tenkém torzním vlákně.



**Obrázek 3.27:** Gradientometr jako diferenciální mikroakcelerometr. Na obr. vlevo je 'citlivou osou' osa  $x$  a gradientometr zaznamenává rozdíl  $\Gamma_{xx} = (a_2 - a_1) / d$  zrychlení  $a_1$  a  $a_2$  měřených ve směru osy  $x$  dvěma mikroakcelerometry ve vzdálenosti  $d$  jejich těžišť. V případě vpravo se měří  $\Gamma_{yy} = (a_2 - a_1) / d$ . Převzato z ESA SP-1196, 1996.

Co ve skutečnosti měří mikroakcelerometr jako přístroj? Není to přímo zrychlení. Měřit lze napětí  $U$  potřebné k udržení vnitřní koule či krychle v geometrickém středu dutiny mikroakcelerometru (tj. soustavy elektrod). Převod z  $U$  na zrychlení je dán empirickým koeficientem. Například krychlový mikroakcelerometr MACEK české provenience na družici MIMOSA byl připraven tak, aby detekoval pohyb vnitřní testovací krychle (posun a natočení) jako změnu kapacity mezi stěnami krychle a elektrodami. Italský pružinový mikroakcelerometr SAGE měl měřit změnu napětí v důsledku změny kapacity způsobené pohybem pružiny v důsledku rozdílového vektoru  $g-n$ . Také družicový gradientometr by přímo neměřil druhé derivace gravitačního potenciálu, ale například rozdíl čtení napětí mezi dvojicí mikroakcelerometrů nebo 'velikost torse' v důsledku gradientů zrychlení podél citlivých os.

### **3.11.3 Cíl gradiometrických měření**

Cílem gradientometru je určit opravy stávajících hodnot harmonických geopotenciálních koeficientů  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  prostřednictvím měření druhých derivací gravitačního potenciálu, tj. složek tenzoru

$$\Gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \Gamma_{xx} & \Gamma_{xy} & \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{yx} & \Gamma_{yy} & \Gamma_{yz} \\ \Gamma_{zx} & \Gamma_{zy} & \Gamma_{zz} \end{pmatrix},$$

zde v lokálním souřadném systému, kde osa  $x$  má směr shodný s vektorem rychlosti družice, osa  $z$  míří k nadiru a  $y$ -ová osa doplňuje pravoúhlý systém v 'normálovém' směru.

Matice je symetrická díky konzervativnímu charakteru gravitačního pole a součet členů na hlavní diagonále je nula, neboť ve vnějším prostoru platí Laplaceova rovnice:  $\Gamma_{xx} + \Gamma_{yy} + \Gamma_{zz} = 0$ . Z toho plyne, že musíme v každém okamžiku měřit právě pět (nikoli nutně všech devět) složek uvedeného tenzoru, aby měření v daném okamžiku a místě bylo kompletní. K tomu zjevně nestačí jedna dvojice mikroakcelerometrů. Ideální by byl kanonický gradientometr se šesti mikroakcelerometry poskytující i nadbytečná měření (pro určení systematických přístrojových chyb a orientace gradientometru v prostoru).

Měřeními jsme získali druhé derivace odpovídající poruchovému potenciálu, tj. opravy  $\Delta\Gamma_{ij}$ . Lze nalézt vztahy mezi nimi a opravami geopotenciálních koeficientů  $\Delta C_{lm}$ ,  $\Delta S_{lm}$ , které pak určíme metodou nejmenších čtverců nebo kolokacemi. Explicitní forma lineárního systému rovnic oprav je uvedena v Dodatku D3.11.

### **3.11.4 Projekty**

Projektů družicových mikroakcelerometrů, drag-free systémů a gradientometrů byla celá řada, ale realizováno je dosud minimum. Některé nápady byly opravdu zvláštní; většina nebyla uskutečněna z finančních důvodů nebo pro enormní technologické nároky (na svou dobu). Podrobnosti jsou v Dodatku k 3.11, zejména v jeho Tab. 3.11.1.

Ve snaze přiblížit měřickou aparaturu (gradientometr) ke zdroji poruch (co nejbliže k Zemi), byla navržena subdružice vlečená na dlouhém laně "pod" raketoplánem. Projekt byl nazván *SKYHOOK* neboli "kosmická udička". Subdružice by byla vynesena raketoplánem a pomocí navijáku by ji drát 100 km (!) dlouhý dostal od něj až do výšky asi jen 100 km nad zemským povrchem. Tak nízko se žádná samostatná družice neudrží více než několik oběhů kolem planety - díky enormnímu brzdění o atmosféru, ale na druhou stranu tak vysoko se nedostanou letadla ani balony. Autoři projektu sice tvrdili, že se kevlarový drát ani nezauzlí ani nepřetrhne, ale pozdější experiment (NASA+Italové) se subdružicí bez gradientometru na drátě dlouhém "jen" 20 km předvedl pravý opak.

Francouzi vyvinuli a vypustili mikroakcelerometr *CACTUS* (Capteur Accelero-metriques Capacitifs Triaxiaux Ultra Sensible) a zkonstruovali gradientometr *GRADIO* a supercitlivý akcelerometr *SUPERCACTUS*. Český mikroakcelerometr *MACEK* byl vypuštěn na družici *MIMOSA*, ale bohužel nefungoval.

Po družici *CHAMP* (CHALLENGING Minisatellite Payload, viz např. [www.gfz-potsdam.de](http://www.gfz-potsdam.de), projekty, položka CHAMP) určené pro studium gravitačního a magnetického pole Země (vypuštěna v r. 2000) a dvojici družic *GRACE* A a B (Gravity Recovery And Climate Experiment, viz např. [www.gfz-potsdam.de](http://www.gfz-potsdam.de), projekty, položka GRACE, z r.2002), vzájemně se sledujícími (low-low SST) pro studium variací gravitačního pole, bude vypuštěna r. 2008 družice *GOCE* (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer), v rámci ESA. Na palubách *CHAMP* a *GRACE* jsou mikroakcelerometry ke zjištění a početní eliminaci negravitačních poruch drah. Na palubě *GOCE* bude tříosý gradientometr, typ diferenciální mikroakcelerometr. Vnitřní přesnost měření 3 miliE v každé ose. Současně má být družice vybavena pro high-low satellite-to-satellite tracking s družicemi systému GPS. Dráha má být heliosynchronní a velmi nízká (výška letu asi 250 km); negravitační vlivy budou známy z mikroakcelerometrických složek gradientometru a aktivně korigovány (drag-free koncept zde nazývaný Drag-Free Control System).

### **3.12 – Kombinace jednosměrného dálkoměru s fázovým dálkoměrem – technologie Globálního Navigačního družicového (Satelitního) Systému (GNSS)**

Jako příklad praktického využití kombinace jednosměrného dálkoměru s fázovým dálkoměrem zde ve stručnosti popíšeme funkci systému, který je v praktické geodézii nejvíce využíván a tím je systém GPS – NAVSTAR. Detaily této metody jsou obsahem speciálního předmětu, proto zde budou uvedeny jen hlavní zásady a informace technického rázu.

#### **3.12.1 Systém GPS NAVSTAR**

Systém GPS NAVSTAR (Globální polohový systém NAVSTAR) je tvořen třemi segmenty: řídicím, kosmickým a uživatelským. Řídicí segment tvoří monitorovací stanice, rozmístěné po celé Zemi a hlavní řídicí stanice, která zpracovává telemetrické informace a výsledky sledování pohybu družic systému monitorovacími stanicemi a přes vysílače předává na družice informace pro vysílání s povely pro řízení provozního režimu. Kosmický segment je tvořen 24 družicemi, rovnoměrně rozmístěnými na šesti drahách – detaily jsou předmětem kapitoly 4. Uživatelský segment tvoří přijímací aparatury různých typů, doplněné nezbytným softwarem pro zpracování dat. V dalším výkladu se nebudeme zabývat detaily popisu jednotlivých segmentů, uvedeme jen základní charakteristiku geodetického využití této technologie.

### 3.12.1.1 Vysílaný a přijímaný signál

Systém je založen na využití velmi přesných kmitočtových a časových informací, vysílaných družicemi v podobě složitějšího signálu, tvořeného řadou koherentních kmitočtů. Všechny jsou odvozeny ze základního kmitočtu  $f_0 = 10.23$  MHz, který je udržován soustavou palubních oscilátorů s relativní přesností lepší než  $10^{-13}$ . Jsou z něho odvozeny tři modulační kódy pro vysílání.

Data o celkové délce 1500 bitů se vysílají s taktovou frekvencí 50 Hz, tedy s délkou periody (opakování) 30 s. Obsahují dráhové elementy dané družice a jejich korekce, údaje o stavu palubních hodin, stavu družice a postupně vyměňované údaje o drahách ostatních družic. Podstatnou složkou signálu GPS jsou dva pseudonáhodné (šumové) signály C/A a P – kódu. Jsou prostředníkem pro přibližné nebo předběžné (C/A) a přesné (P) určení pseudovzdálenosti na principu jednosměrného dálkoměru, což je hlavní (negeodetický) projektovaný způsob využití systému.

Pseudonáhodný C/A kód (Clear Access nebo Coarse Acquisition, tj. „volný přístup“ nebo „sběr hrubých dat“) je sled 0 a 1 s taktovou frekvencí 1.023 MHz. Délka kódu, zvaného též Goldův, je 1023 prvků, jeho opakovací perioda 1 ms. Pro odlišení družic je k dispozici 32 variant C/A kódu.

Pseudonáhodný P kód (Protected nebo Precise, tj. „chráněný“ nebo „přesný“) je vytvářen podobně, ale složitěji pomocí dvacetimístných čítačů a na rozdíl od C/A kódu není schéma jeho generování (vytvářející polynom) zveřejněno. Taktová frekvence P – kódu je 10.23 MHz, z celkové délky cca 267 dní je vybráno 32 variant kódu, trvajících přesně 7 dnů a vracejících se do výchozího stavu v noci ze soboty na neděli v 0 h GPS času.

Pro vyloučení vlivu ionosféry na výsledky měření vysílají družice GPS na dvou nosných kmitočtech  $f_1 = 154 \times f_0 = 1575.42$  MHz a  $f_2 = 120 \times f_0 = 1227.60$  MHz, označovaných též  $L_1$  a  $L_2$ . Na  $L_1$  se vysílají data a oba pseudonáhodné kódy, na  $L_2$  pouze data a P kód. Okamžité hodnoty všech tří kódů jsou funkcí systémového času a pro vysílání se transformují tak, že 0/1 v binárním kódu dat, C/A a P kódu odpovídá +1/-1 ve funkcích  $D(t)$ ,  $C(t)$  a  $P(t)$ , s nimiž můžeme úplný vysílaný a přijímaný signál popsat takto:

$$(3.12.1) \quad \begin{aligned} S_k(t_k) = & A_{jk} P_j(t_j) D_j(t_j) \cos(\omega_{1k} t_j + \varphi_{1jk}) + \\ & + B_{jk} C_j(t_j) D_j(t_j) \sin(\omega_{1k} t_j + \varphi_{1jk}) + \\ & + A_{jk} P_j(t_j) D_j(t_j) \cos(\omega_{2k} t_j + \varphi_{2jk}) \end{aligned}$$

Zde je  $t_j$  systémový čas na  $j$ -té družici,  $\omega_i = 2\pi f_i$  kruhová frekvence, indexy  $i$  rozlišují nosný kmitočet,  $j$  družici a  $k$  vysílání ( $k = t$ ) a příjem ( $k = r$ ),  $A$ ,  $B$  jsou amplitudy a  $\varphi$  počáteční fáze.

Pro vysílaný signál  $S_t$  je  $t_t = t_j$ ,  $\omega_{it} = \omega_i$ ,  $\varphi_{it} = \varphi_i$ . Pro relativní amplitudy platí  $B_t \sim 2A_t$ . Zde popsaná modulace se realizuje fázovou manipulací (skokovou změnou fáze). Výraz pro přijímaný signál  $S_r$  na anténě dostaneme, zapíšeme-li v 3.12.1



$$(3.12.2) \quad t_r = t_i + T_{ij}, \quad \omega_{ir} = \omega_i - 2\pi \tilde{f}_{ij}, \quad \varphi_{ijr} = \varphi_{ij} - \omega_i T_{ij}.$$

Zde je  $T_{ij}$  doba šíření signálu,  $\tilde{f}_{ij}$  dopplerovská změna kmitočtu, která může dosáhnout až 4 až 5 kHz. Doba šíření  $T_{ij}$  je dána integrálem elementárního intervalu  $dT_{ij}$  podél trajektorie signálu  $l$  od družice ( $l_j$ ) ke stanici ( $l_r$ )

$$(3.12.3) \quad T_{ij} = \int_{l_j}^{l_r} \frac{dl}{v_i(l)} = \frac{r_j}{c} - \frac{\Delta D_i}{c},$$

kde  $v_i(l)$  je skupinová (grupová) rychlost šíření signálu,  $c$  je rychlost světla ve vakuu,  $r$  vzdálenost družice od přijímače a  $\Delta D$  je součet troposférické a ionosférické opravy vzdálenosti.

Ze zápisu signálu  $S_r$  je patrné, že jeho příjem a zpracování v pozemní aparatuře je velice složitým technickým problémem. Je třeba vyhledat nenápadný šumový signál určité družice z několika (nejméně čtyř), které jsou nad obzorem, identifikovat ho podle varianty kódu  $C_j$  nebo  $P_j$ , sledovat družici s kompenzací Dopplerova jevu, dekodovat data  $D_j$  a vyčlenit měřickou informaci, kterou podle zvolené metody může nést např.  $T_{ij}$ ,  $\omega_{ir}$ ,  $\tilde{f}_{ij}$  a  $\varphi_{ijr}$ . Přitom kromě  $\omega_i$  a  $\varphi_{ij}$  jsou všechny veličiny vstupující do  $S_r$  proměnné v čase.

Z řady možných metod měření se dále věnujeme jen dvěma základním, které vyložíme ve zjednodušené podobě a za předpokladu, že se měření koná mimo atmosféru. V uváděných výrazech budeme pro jednoduchost vypouštět rozlišení nosných kmitočtů  $i$  a družic  $j$ , pokud nebudou nutná.

### **3.12.1.2 Měření pseudovzdáleností (jednosměrný dálkoměr)**

V koherentním signálu  $S(t)$  odpovídá každému vyslanému elementu kódu C/A, P i dat přesný čas podle palubních hodin  $t_T$ . Známe-li čas jeho příjmu podle hodin pozemní aparatury  $t_R$ , můžeme zapsat elektromagnetickou vzdálenost ve vakuu podle (3.3):

$$(3.12.4) = (3.3) \quad D = c(t_R - t_T) + c(\Delta t_R - \Delta t_T) = c\tau + c\Delta\tau,$$

kde  $\Delta t_R, \Delta t_T$  jsou opravy pozemních a palubních hodin na společný etalonový čas,  $c$  je rychlost světla ve vakuu,  $\tau$  rozdíl „odečtených“ časů vyslání a příjmu,  $\Delta\tau$  rozdíl korekcí. Kromě  $c$  jsou všechny veličiny v (3.12.4) funkcí času, přičemž  $\Delta t_R, \Delta t_T$  se mění velmi pomalu. Veličiny

$$(3.12.5) \quad D_0 = c\tau$$

se nazývají pseudovzdálenosti.

Přijímaný signál  $S_r(t)$  se demoduluje a zjišťují se binární hodnoty přijatého kódu  $x_r(t_R)$  v okamžicích  $t_R$  s časovým rozlišením (vzorkovací periodou  $\kappa = 1/(p\nu)$ ), kde  $p$  je počet odečtů stavu  $x_r$  za jeden takt (krok) kódu,  $\nu$  je jeho taktová frekvence. Dvojkové hodnoty kódu

$x_r$  (odečtené v krocích  $\kappa$ ) se porovnávají s hodnotami kódu  $x_g$  vytvářeného v generátoru přijímacího zařízení. Rozdíl časů  $t_R - t_T$  se zjišťuje zkusem jako taková funkce  $\tau(t_R)$ , která dává maximum korelační funkce (viz souvislost s VLBI – odst. 3.8)

$$(3.12.6) \quad k(\tau) = \sum_{n=1}^N \left\{ x_g [t_{R_n}] \approx x_r [t_{R_n} + \tau(t_{R_n}) + \nu] \right\}$$

pro  $N$  porovnávaných bitů. Zde je  $n$  pořadové číslo srovnávaných bitů,  $t_R$  časy jejich příjmu,  $\nu$  zpoždění přijímače a „ $\approx$ “ je zde znak pro operaci ekvivalence. Součin  $N \cdot \kappa$  bývá řádu sekund, takže  $\tau(t_R)$  lze považovat za lineární funkci, nebo konstantu. Korelátoři pro určení maximálního  $k(\tau)$  mohou být analogové i číslicové a vždy zkoušejí různá  $\tau(t_R)$  na různých úsecích kódu  $x_g$ ; při délce periody kódu  $P$  a požadované přesnosti se pro vyhledání aktuálního pracovního kódu využívá informace obsažené v datech a přibližné polohy stanice, určené pomocí kódu C/A. Využití korelační funkce  $k(\tau)$  dává vlastně  $N$  porovnání časů  $t_R, t_T$  a zároveň tlumí vliv náhodných fluktuací v signálu  $S$ . Pro určení pseudovzdálenosti platí ve vakuu

$$(3.12.7) \quad D_0 = r - c(\Delta t_R - \Delta t_T) .$$

Určíme-li současně čtyři pseudovzdálenosti ke čtyřem družicím, jejichž polohy známe z vysílaných efemerid, můžeme určit polohu stanice a  $\Delta t_R$ , neboť údaje pro stanovení  $\Delta t_T$  jsou rovněž družicemi vysílány.

Nominální přesnost určení pseudovzdálenosti je dána vzorkovací periodou a rovná se  $c\kappa = c/(pv)$ . Pro digitální korelátoři bývá  $p$  až 64, což dává pro C/A kód přesnost 4.6 m a pro P kód 0.46 m. Kód dat je pro tento způsob měření příliš pomalý.

### **3.12.1.3 Fázová měření**

Oddělíme-li od přijímaného signálu  $S_r(t)$  nosný kmitočet  $f_r$ , můžeme zjistit jeho fázi  $\varphi_r$  (zpoždění) za stejným kmitočtem  $f_g$ , generovaným v přijímači. Vztah  $\varphi_r = \varphi - \omega T$  z definice signálu  $S$ , opravíme o korekce času družice  $\Delta t_T$ , i přijímače  $\Delta t_R$  na systémový čas a dobu šíření  $T$  nahradíme  $\tau = r/c$ . Pro změřenou fázi, vyjádřenou v radiánech, tak dostaneme

$$(3.12.8) \quad \varphi_r = -\frac{\omega}{c} r - \omega (\Delta t_R - \Delta t_T) + \varphi - 2\pi N ,$$

což je obdoba (3.2), kde  $N$  je neznámý celý počet period a  $\varphi$  je počáteční fáze, která se vyloučí technikou příjmu. Veličiny  $\varphi$ ,  $r$  a  $N$  se mění s časem. Vyjádříme-li z (3.12.8) vzdálenost družice  $r$

$$(3.12.9) \quad r = -\frac{c}{\omega} \varphi_r - c (\Delta t_R - \Delta t_T) - \lambda N$$

můžeme odhadnout přesnost určení vzdálenosti za předpokladu, že známe  $N$ ,  $\Delta t_R$ ,  $\Delta t_T$  a měříme  $\varphi_r$  s běžnou přesností 1%. Pro GPS frekvence dostaneme chybu do 2 mm. Problémem

je určení  $N$  při malé vlnové délce (19 cm, resp. 24 cm). Pro určování  $N$  byla vyvinuta řada velmi sofistikovaných metod, jejich detailní výklad je předmětem speciálního předmětu o globálních navigačních systémech.

Ani při aplikaci postupu na taktové frekvenci kódů C/A nebo P není situace příznivější. Proto se v běžné geodetické praxi užívá fázových měření v diferenciálním režimu. Jedna z diferenciálních metod je založena na plynulém sledování fáze  $\varphi_r$  při pozorování jedné družice mezi dvěma okamžiky  $t_1$  a  $t_2$ , ve kterých se odečtou fáze  $\varphi_{r_1}$  a  $\varphi_{r_2}$ . Rozdíl výrazů (3.12.8) pro tyto časy dá

$$(3.12.10) \quad \delta\varphi = \varphi_{r_2} - \varphi_{r_1} = -\frac{\omega}{c}(r_2 - r_1) - \omega(\Delta t_{R_2} - \Delta t_{R_1}) - 2\pi(N_2 - N_1),$$

kde jsme zanedbali změnu  $\Delta t_T$ . Rozdíl korekcí  $\Delta t_R$  lze snadno zjistit při zpracování řady měření (např. s využitím pseudonáhodných kódů),  $N_2 - N_1$  se rovná počtu celých period (průchodů) fáze určitou hodnotou – dají se tedy spočítat. Rozdíl vzdáleností  $r_2 - r_1$  pak můžeme určit s vysokou nominální přesností 3 mm.

### **3.12.2 Určení polohy stanice a opravy staničních hodin z pseudovzdáleností (kódových měření) při pozorování čtyř družic**

Jako příklad použití technologie GPS naznačíme „navigační“ určení polohy přijímače z měření pseudovzdáleností. Využití fázových měření je podstatně komplikovanější a je mu věnován samostatný předmět.

Znáмыми hodnotami jsou:

- měřené pseudovzdálenosti  $P_k^i$  mezi  $k$ -tou stanicí a  $i$ -tou družicí
- souřadnice družic (vypočtou se z navigační zprávy z Keplerových elementů, ale až poté, co je známa oprava staničních hodin)  $x_1^i, x_2^i, x_3^i$
- opravy družicových hodin  $\delta^i$  (z navigační zprávy)
- ionosférická oprava  $I_k^i$  (z modelu, nebo se zanedbá, nebo se určí z druhé frekvence)
- troposférická oprava  $\Delta\rho_k^i$  (z modelu, nebo se zanedbá)

Výchozí rovnice je (v čase  $t$ )

$$(3.12.11) \quad \begin{aligned} P_k^i &= \rho_k^i + c\delta_k - c\delta^i + I_k^i + \Delta\rho_k^i = \\ &= \sqrt{(x_{1k} - x_1^i)^2 + (x_{2k} - x_2^i)^2 + (x_{3k} - x_3^i)^2} + \\ &+ c\delta_k - c\delta^i + I_k^i + \Delta\rho_k^i \end{aligned}$$

kde  $\rho_k^i$  je geometrická vzdálenost mezi stanicí a družicí. Konkrétně pak pro 4 družice

$$\begin{aligned}
 P_k^1 &= \sqrt{(x_{1k} - x_1^1)^2 + (x_{2k} - x_2^1)^2 + (x_{3k} - x_3^1)^2} + \\
 &+ c\delta_k - c\delta^1 + I_k^1 + \Delta\rho_k^1 \\
 P_k^2 &= \sqrt{(x_{1k} - x_1^2)^2 + (x_{2k} - x_2^2)^2 + (x_{3k} - x_3^2)^2} + \\
 &+ c\delta_k - c\delta^2 + I_k^2 + \Delta\rho_k^2 \\
 P_k^3 &= \sqrt{(x_{1k} - x_1^3)^2 + (x_{2k} - x_2^3)^2 + (x_{3k} - x_3^3)^2} + \\
 &+ c\delta_k - c\delta^3 + I_k^3 + \Delta\rho_k^3 \\
 P_k^4 &= \sqrt{(x_{1k} - x_1^4)^2 + (x_{2k} - x_2^4)^2 + (x_{3k} - x_3^4)^2} + \\
 &+ c\delta_k - c\delta^4 + I_k^4 + \Delta\rho_k^4
 \end{aligned}
 \tag{3.12.12}$$

Neznámými jsou souřadnice stanic a oprava staničních hodin

$$x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \delta_k$$

Řešení:

- Z lineární rovnice (3.12.11) se určí  $\delta_k$  při eliminaci  $\rho_k^i$
- Pomocí nyní již známých korekcí hodin a měřených pseudovzdáleností se určí čas vyslání signálu z družic, pro tento čas se vypočtou z efemerid polohy družic
- Kvadratické rovnice (3.12.12) pro souřadnice se řeší iteracemi.

## 4. Družice a družicové systémy

### 4.1 Úvod

Družice, použitelné pro družicovou geodézii, můžeme dělit podle několika hledisek. Jedním z dělení je na

1. specializované
2. nespecializované

*Specializované* družice jsou vypuštěny buď úplně, nebo částečně za účelem řešení geodetických úloh. Splňují požadavky geodézie – např. malý průřez vs. velká hmotnost kvůli eliminaci odporu atmosféry a tlaku slunečního záření.

*Nespecializované* družice jsou jakékoliv družice, které lze využít k řešení některých geodetických úloh, např. určování parametrů gravitačního pole Země, souřadnic stanic a nejsou pro tuto úlohu primárně určeny. Příkladem mohou být první dvě družice Sputnik I a Sputnik II, z analýzy jejichž dráhy (viz kap. 2 a 5) bylo určeno prof. Bucharem zploštění Země.

Další dělení může být na

1. pasivní
2. aktivní

*Pasivní* družice nejsou vybaveny žádnou “aktivní” aparaturou, nebo mají aparatury z hlediska geodézie nevyužitelné (příkladem byla např. balonová družice PAGEOS – koule, odražející sluneční záření o průměru přes 40 m, sloužící pro určování rozdílů souřadnic stanic v rámci tzv. kosmické triangulace; **geodynamické** družice – malé hmotné koule, vybavené pouze koutovými odražeči pro měření délek laserem, příkladem je geodynamická družice LAGEOS).

*Aktivní* družice jsou vybaveny aktivním elektronickým zařízením, umožňujícím nějaký typ měření (příkladem je “záblesková” družice ANNA (viz níže), dále většina geodetických družic současnosti).

V dalším se budeme zabývat převážně *specializovanými* družicemi. V našem oboru pracujeme s velmi specifickými umělými družicemi Země (UDZ). Tak například družice altimetrické lze chápat jako družice pro dálkový průzkum, kde hlavním přístrojem je radiolokační výškoměr (altimetr), měřící výšku letu nad “terénem” (mořskou hladinou) ve směru nadiru. Tyto družice musejí mít další vybavení už jen kvůli určování dráhy (například koutové odražeče pro sledování laserovými dálkoměry, antény pro sledování ze Země nebo z jiných družic, jmenovitě NAVSTAR GPS) a samozřejmě sluneční panely dodávající celému komplexu energii. **Geodynamické** družice jsou naproti tomu zcela pasivní, mají jen koutové odražeče (popřípadě zrcadlové plošky), žádné aktivní prvky. Družice cílené pro výzkum gravitačního pole jako jsou CHAMP, GRACE a GOCE (*Challenging minisatellite payload for geoscience and application, Gravity Recovery and Climate Experiment, Gravity and Ocean Circulation Experiment*) jsou velmi kompaktní objekty komplexně vybavené pro ultrapřesné určení dráhy, popřípadě pro sledování změn vzdálenosti mezi dvěma objekty

(GRACE A a B) nebo nesoucí speciální přístroje, jako je gradiometr (gradientometr) k měření druhých derivací gravitačního potenciálu (v rámci mise GOCE).

Tabulka shrnuje základní parametry vybraných družic uvedených kategorií bez nároku na úplnost, hlavně označení družice (zavedeno organizací COSPAR), ve kterém je zahrnut rok vypuštění, sklon roviny její dráhy k rovině zemského rovníku  $I$  a hlavní poloosa dráhové elipsy  $a$  (nominální orientační hodnoty). V případě nízkých drah, které díky odporu atmosféry rychle klesají, je uvedena počáteční poloosa dráhy. Označením “geodézie” se rozumí kosmická geodézie. Důraz v této kapitole je kladen na obrázky a jejich stručný popis.

**Tabulka 4.1:** Družice použitelné pro řešení geodetických úloh

<i>jméno</i>	<i>COSPAR ID</i>	$I^\circ$	$a$ [km]	<i>primární určení</i>	<i>poznámky</i>
ANNA	1962-060A	(50)	(7500)	geodézie	selhala
BEACON C	1965-032A	41		geodézie, ionosféra	
PAGEOS	1966-056A	65	10630	geodézie, balón	rozpad ve dráze 1975
GEOS A	1965-089A	59	8080	geodézie	
GEOS B	1968-002A	106	7700	geodézie	
GEOS C	1975-027A	115	7220	geodézie, oceánografie	altimetr
STARLETTE	1975-001A	50	7180	geodézie, geodynamika, slapy	
LAGEOS 1	1976-039A	110	12240	geodézie, geodynamika, nebeská mech.	
AJISAI	1986-061A	50	7870	geodézie, geodynamika	
ETALON 1	1989-001C	65	25500	geodézie, geodynamika	v rámci GLONASS
ETALON 2	1989-039B	65	25500	geodézie, geodynamika	v rámci GLONASS
LAGEOS 2	1992-070B	53	12000	geodézie, geodynamika, nebeská mech.	
STELLA	1993-061B	99	7170	geodézie, geodynamika, slapy	
GFZ-1	1995-017JE	52	6780	geodézie	zánik 1999
WESTPAC	1998-043A	98	7610	geodézie	
CHAMP	2000-039B	87	6840	geovědní obory	
GRACE	2002-012A,B	89	6870	geovědní obory	
GOCE	2008	96	6630	geovědní obory	gradiometr

## **4.2 Geodetické a geodynamické družice**

Družice jsou primárně pro určení geocentrických souřadnic sledovacích stanic a po dosažení určité přesnosti a dlouhodobosti měření také ke sledování změn těchto souřadnic v čase. Současně se analýzou jejich drah získávají údaje pro určení parametrů gravitačního pole Země (Stokesových parametrů) a po dosažení jisté přesnosti i jejich časových variací.

Ultrapřesné dráhy vybraných geodynamických družic (hlavně LAGEOSu 1 a 2) se staly cílem studia nebeských mechaniků; ti se zaměřili na miniaturní reziduální negravitační poruchy dráhy termálního původu. Byl navržen mezinárodní projekt LAGEOS 3 se stejnojmennou družicí určenou k vypuštění na dráze se sklonem umožňujícím eliminovat - v součinnosti s předchozími družicemi LAGEOS - geodetickou precesi dráhy (způsobenou zploštěním Země) a studovat Lenseův-Thirringův efekt strhávání souřadného systému rotujícím hmotným tělesem, plynoucí z obecné teorie relativity, s cílem teorii dále prověřovat.

První *geodetická družice* ANNA (akronym z Army, Navy, NASA, AirForce; USA) měla na palubě xenonové výbojky, které byly připraveny v přesně stanovených intervalech vydávat záblesky pozorovatelné z pozemských pozorovacích stanic s cílem určení jejich polohy. Družice se nedostala na oběžnou dráhu. Podobný cíl určování poloh měl balón PAGEOS, pasivní geodetická družice, jasně svítící na noční obloze. Po navedení na dráhu se nafoukl na průměr 40 m. Díky této družici vědci zjistili existenci a význam negravitačních poruch drah UDZ. Balón posléze zdeformoval, praskl a rozpadl se na desítky úlomků.

Družice BEACON-C, též Beacon Explorer C, BE-3, měla magnetometr, sluneční sensory a koutové laserové odrážače (viz obr. 4.1). Série družic GEOS (USA) byla vybavena pro určení polohy xenonovými výbojkami a koutovými odrážači. Poslední z nich, GEOS C neboli 3, měl i radarový altimetr. Série byla gravitačně stabilizována, čili tehdy ještě žádné motorky, ale dlouhá výsuvná (teleskopická nebo pantografická) tyč s protizávažím.

**Geodynamické družice** se odlišují od všech ostatních tím, že jsou to těžké pasivní koule pokryté (až na výjimky jen) koutovými odrážači pro laserové sledování se Země. Cílem je minimalizace negravitačních poruch dráhy, které závisejí lineárně na poměru plochy nastavené působení rušivé síly  $A$  ku hmotnosti družice  $m$ . Malá, těžká koule má  $A/m$  řádově menší než běžně vybavená aktivní družice a navíc má  $A/m$  konstantní. Geodynamické družice přispěly k vybudování souřadných systémů s centimetrovou přesností (viz kap.1) a ke sledování litosférických pohybů. Některé z nich jsou určené ke studiu slapů. Díky vysokým drahám a malému  $A/m$  mají enormní životnost (neplatí pro GFZ-1 a WESTPAC na nízkých drahách). LAGEOS má být na oběžné dráze asi 8 miliónů let. Uvnitř družice je, podobně jako na mezplanetární sondě Pioneer, vzkaz naší civilizace případným návštěvníkům z vesmíru. Projekt geodynamických družic je amerického původu, první geodynamickou družicí však vypustila Francie. Je to STARLETTE (1975), *Satellite de Taille Adaptée avec Reflecteurs Laser pour les Etudes de la Terre*, Teprve pak následoval americký LAGEOS (*Laser GEODynamics Satellite 1*, r.1976). Nejmenší geodynamickou družicí je GFZ 1 (podle GFZ *GeoForschungsInstitut* v Postupimi), velký asi jako fotbalový míč, ale váží 20 kg. STARLETTE a její pokračovatelka a kopie STELLA jsou jen nepatrně větší. Největší nejsou sovětské družice ETALON 1 a 2, ale japonský AJISAI (*Hydrangea*) s průměrem 2.15 m, vybavený vedle odrážačů též zrcadlovými ploškami. GFZ 1, STARLETTE a STELLA mají 60 koutových odrážačů, LAGEOSy o průměru 0.6 m již 426, ETALONy 2146 a AJISAI 1436 (a 318 zrcátek). K dosažení co největší hmotnosti je uvnitř francouzských družic jádro z neradioaktivního uranu (U 238) a uvnitř LAGEOSů mosazné polokoule. ETALONy jsou kupodivu duté.



**Obrázek 4.1:** *Beacon C (BE-3), segmenty koutových odrážeců*

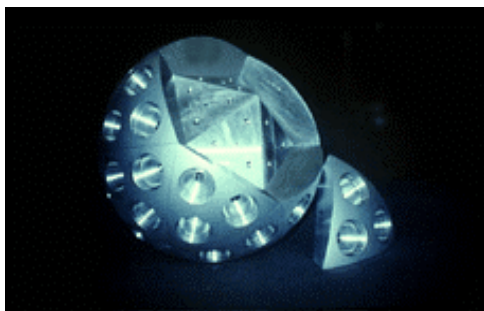
CHAMP, GRACE a GOCE je trojice moderních družic ke studiu detailní struktury a časových změn gravitačního pole. CHAMP byl vypuštěn r. 2000, dvojice družic GRACE A a B v r. 2002 a GOCE je naplánován na r. 2008. Všechny jsou či budou na extrémně nízkých drahách, takže dráhové korekce či manévry (zvedající v případě mise CHAMP výšku letu třikrát asi o 20 km) jsou nutné, pokud systémy dobře fungují a chceme prodloužit životnost ve dráze. Nominální přístrojová životnost je 5 let. U GRACE úpravy dráhy směřují hlavně k udržení sestavy GRACE A a B. V případě GOCE je třeba dosáhnout vybranou letovou hladinu pro gradientometrická měření.

*CHAMP*, [www.gfz-potsdam.de](http://www.gfz-potsdam.de) (a jiné) je určen pro studium detailní struktury gravitačního pole a ke zlepšení modelů magnetického pole Země. Revoluční konstrukce družice připomínající střechu domu (navržená býv. řed. GFZ Prof. Ch. Reigberem) vede ke kompaktnímu objektu, v jehož hmotném středu je mikroakcelerometr, na spodní stěně koutové odrážecí a anténa pro bistatickou altimetrii (odst. D3.9), ve směru vektoru rychlosti je rozložena tyč s magnetometrem na konci, na horní stěně jsou antény pro GPS a DORIS. Dráha je určena s lépe než decimetrovou přesností ve všech složkách. CHAMP způsobil revoluci ve zpřesnění popisu gravitačního pole.

*GRACE* je dvojice družic připomínajících *CHAMP* (bez magnetometru). Sestava je určena primárně pro studium časových variací parametrů gravitačního pole. Mezi družicemi GRACE A a B probíhá měření vzájemné vzdálenosti (která je asi 200 km), low-low SST (odst. 3.10), s přesností lepší než 10 $\mu$ m. Mezi GRACE A a GPS je high-low SST s přesností lepší než 0.2 mm. Na palubě GRACE A je mikroakcelerometr, umožňující eliminovat souhrn negravitačních zrychlení s přesností 10<sup>-10</sup> m/s<sup>2</sup>.

*GOCE* má podobnou konstrukci jako předchozí družice, podobné vybavení pro určení velmi nízké dráhy (viz Tabulku 4.1) a na palubě bude první gradientometr (odst. 3.11).





*STARLETTE a STELLA (Francie)*



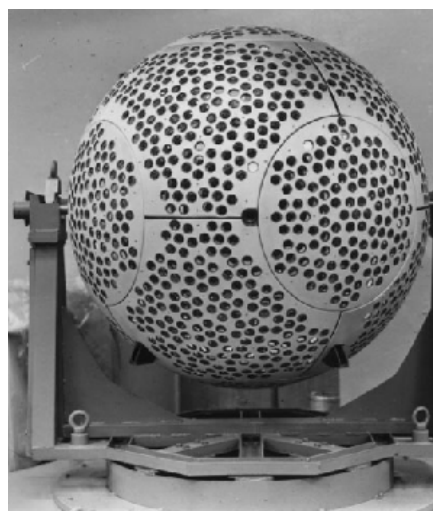
*LAGEOS 1 a 2 (USA)*



*GFZ-1 (Německo) a WESTPAC (Rusko)*



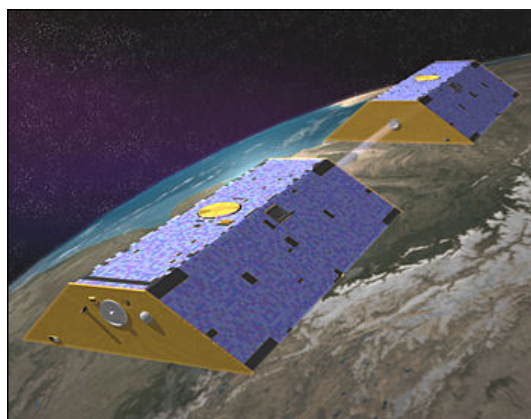
*AJISAI (Japonsko)*



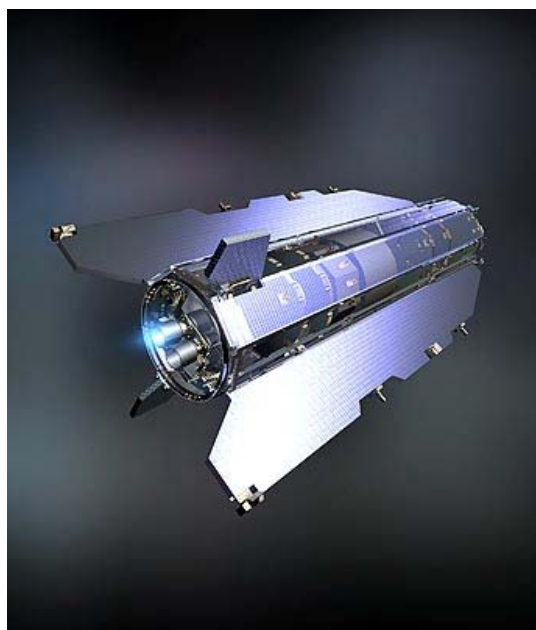
*ETALON 1 a 2 (Sovětský Svaz)*



*CHAMP*



*GRACE*



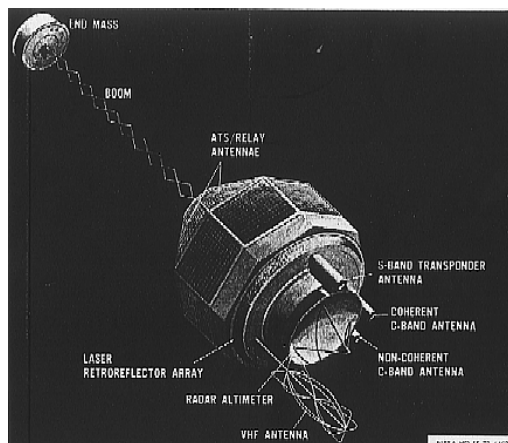
*GOCE*

### 4.3 Altimetrické družice



Altimetrické družice byly vyjmenovány v odst. 3.9. Základní informace jsou v tabulce u této kapitoly a další, ohledně výběru dráhy, v tab. 2, str. 32 v příručce Klokočník et al (1994). Tam je i podrobný technický popis starších altimetrických družic. Zde jen uvedeme obrázky pro družice *GEOS 3*, *SEASAT*, *GEOSAT*, *GFO*, *ERS 1, 2*, *ENVISAT*, *TOPEX/POSEIDON*, *JASON*, *ICESAT*. Až na poslední případ nesly všechny družice radarový altimetr, *ICESAT* má altimetr laserový.

Mimo oběžnou dráhu Země (odst. D.3.9.8.8) pracovaly laserové altimetry na družicích *CLEMENTINE* (kolem Měsíce), *MGS MOLA* (kolem Marsu), a *NEAR Shoemaker* (u planetky EROS).

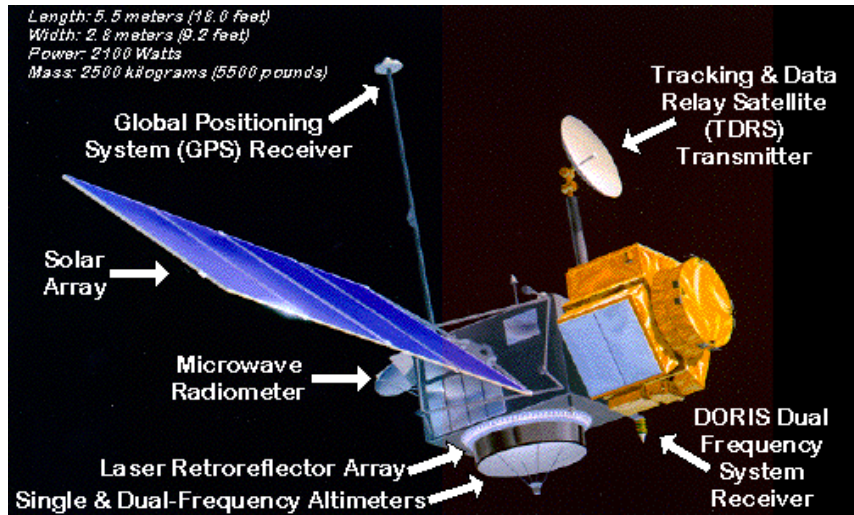


*GEOS 3(USA)*

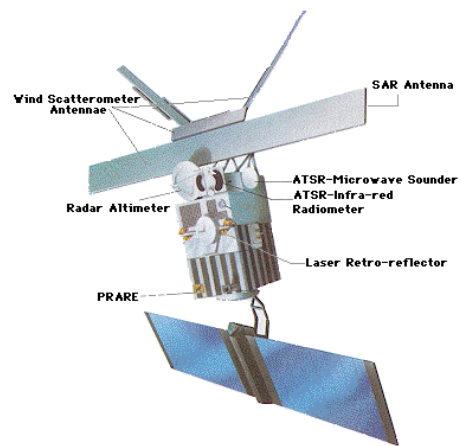
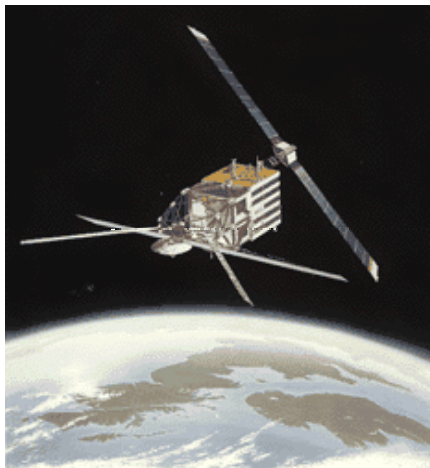


*SEASAT(USA)*

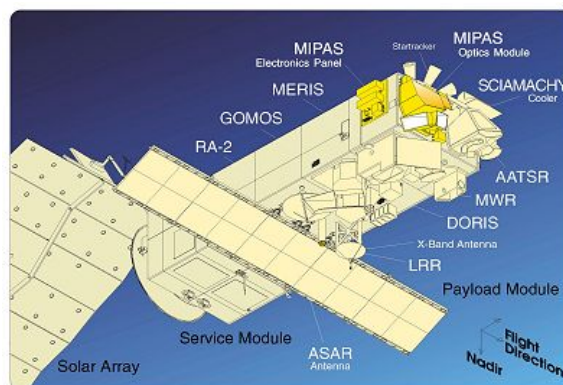




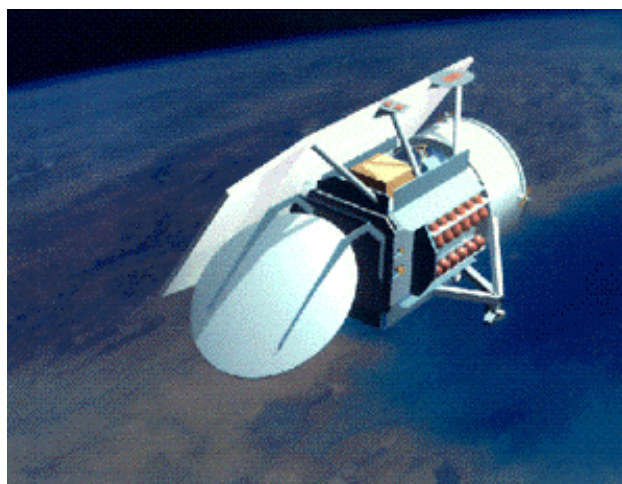
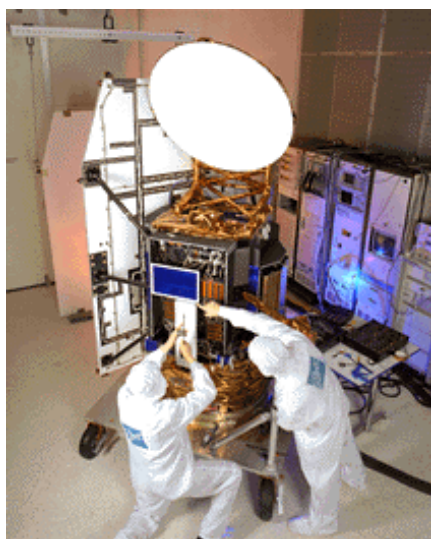
*TOPEX/Poseidon (T/P), USA a Francie*



*ERS 1 a 2 (ESA)*



*ENVISAT (ESA)*



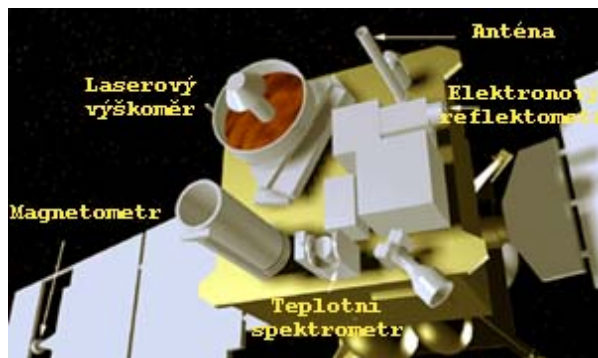
*GFO (USA)*



*ICESAT (USA)*



*JASON 1 (USA a Francie)*



*Mars Global Surveyor (MGS), Mars Orbiting Laser Altimeter (MOLA)*

#### **4.4 Družicové systémy**

Kromě individuálních družicových misí existují komplexy družic, zaměřených za jistým účelem. Dále se budeme věnovat pouze systémům, které mají bezprostřední geodetické využití. Již dříve byly ve 3. kapitole zmíněny systémy DORIS a PRARE v souvislosti s pozorovacími metodami. Předchůdcem dnešních globálních navigačních satelitních systémů (GNSS) byl systém TRANSIT, který umožňoval určování relativní polohy s přesností lepší než 1 m využitím dopplerovských pozorování. Systém byl primárně určen pro vojenskou navigaci, ale civilní využití umožňovalo definovat světový souřadnicový systém s přesností polohy kolem 0.5 m. V dalším se budeme věnovat nejpoužívanějším GNSS systémům.

V roce 2007 existují tři Globální Navigační Satelitní (družicové) Systémy (GNSS):

- Global Positioning System (GPS NAVSTAR)
- Global Navigation Satellite System (GLONASS)
- Galileo

a čtyři systémy, umožňující zpřesňovat určení polohy pomocí zavádění korekcí

- WAAS/EGNOS/MSAS/Gagan

Připomeňme pro úplnost princip určení polohy pomocí GNSS systémů:

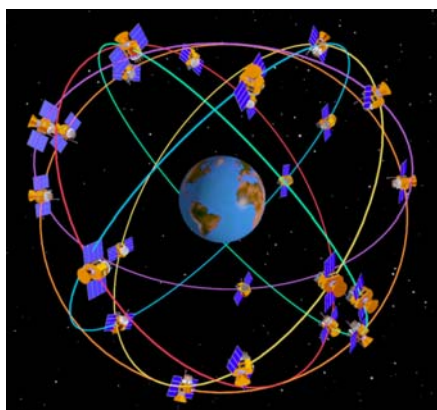
- *navigační* – družice o známé poloze vysílá v přesně definovaný okamžik signál, který je v aparatuře, jejíž polohu potřebujeme určit, přijat se zpožděním, vyplývajícím z doby šíření signálu. Z doby šíření je možné vypočítat vzdálenost aparatura – družice. Pokud pozorujeme v jednom okamžiku alespoň 4 družice, je možné „protínáním z délek“ určit prostorovou polohu a opravu chodu hodin aparatury.
- *geodetická* – využívá též navigačního určení polohy, které zpřesňuje měřením fáze nosné vlny vysílaného signálu. Tímto způsobem opět určí vzdálenost aparatura –



družice, tentokráte s podstatně vyšší přesností (jednotky mm) až na celý počet vln (tzv. ambiguity, ty je nutno určovat početním postupem). Pomocí velmi sofistikovaných postupů je možné – při větším počtu pozorování stejných družic ze dvou stanic ve stejném okamžiku – určit prostorové souřadnicové rozdíly s milimetrovou přesností.

#### **4.4.1 GPS NAVSTAR (Globální polohový systém NAVSTAR)**

Jde o prostorový radionavigační systém americké armády pro určování polohy, který byl pod tlakem veřejnosti uvolněn i k civilnímu použití. Systém je navržen pro 24 družic (díky existenci tzv. záložních družic je v r. 2007 funkčních celkem 31 družic), které se pohybují v šesti rovinách dráhy (4 funkční družice na jedné dráze) – viz obr. 4.2.

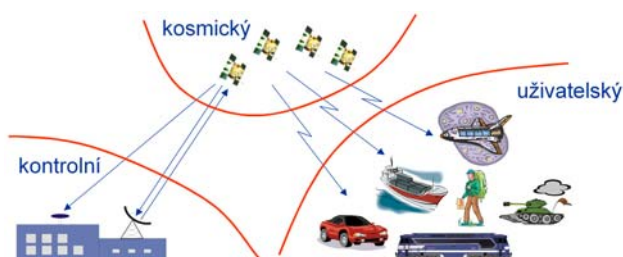


**Obrázek 4.2:** Schematické rozložení družic systému GPS NAVSTAR

Družice systému jsou přibližně 20000 km vysoko, na téměř kruhových drahách, oběžná doba je 11<sup>h</sup> 58<sup>m</sup> a sklon roviny dráhy k rovníku je 55°.

První operační družice byla vypuštěna v r. 1989, počáteční operační fáze trvala do prosince 1993 a plné nasazení systému je od dubna 1995. Civilní služba využívá SPS – Standard Positioning Service pro přímé určování polohy (nejde o geodetické využití). Vojenské využití je v rámci PPS – Precise Positioning Service, které je omezeno pouze pro autorizované uživatele (*Armáda ČR je v rámci NATO autorizovaným uživatelem*). Systém obsahuje tři oddělené segmenty – viz obr. 4.3

- kontrolní
- uživatelský
- kosmický



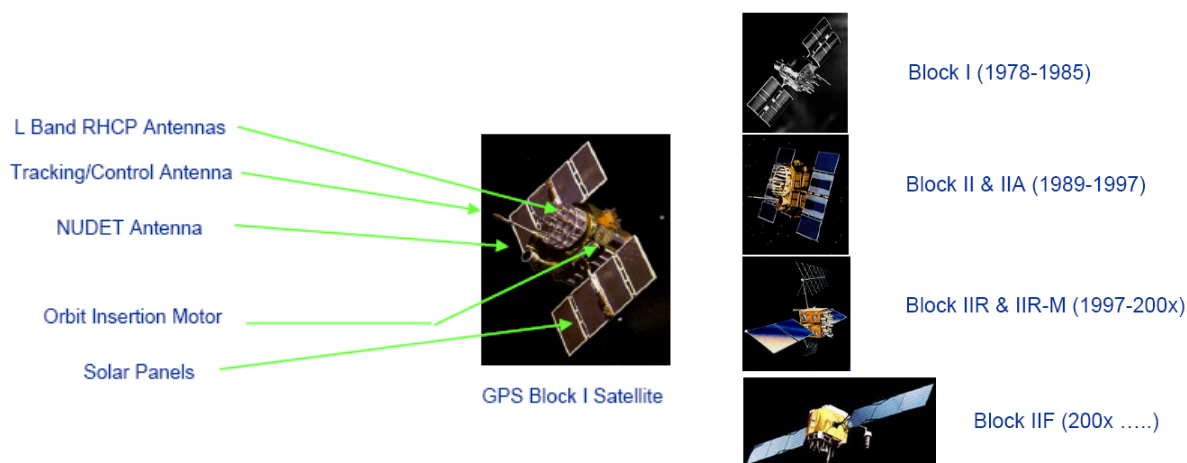
**Obrázek 4.3:** Segmenty systému GPS NAVSTAR, monitorovací stanice

*Kontrolní segment* monitoruje dráhy družic, monitoruje – viz obr. 4.3 vpravo – a zjišťuje „zdraví“ družic, zajišťuje „GPS Time“, počítá efemeridy a parametry chodu hodin, aktualizuje navigační zprávu a provádí dráhové manévry.

*Kosmický segment* sestává z družic. Stávající konstelace obsahuje

- Blok II (1 družice)
- Blok II a IIA (15 družic)
- Blok IIR (12 družic)
- Blok IIR-M (3 družice)

viz též obr. 4.4.



**Obrázek 4.4:** Družice systému GPS NAVSTAR

*Uživatelský segment* je tvořen uživateli radiových GPS přijímačů pro určování polohy a její změny. Mezi nimi hraje také důležité místo **mapování, geodézie a geodynamika**, které systém využívají ve speciální modifikaci kvůli využití maximální možné přesnosti (až 1 mm) v dané aplikační oblasti.

GPS signály jsou přenášeny v  $L$  pásmu na dvou hlavních a dalších frekvencích, existují  $L1$  a  $L2$  pro navigaci,  $L3$  pro NUDET (detekce jaderných výbuchů) a  $L4$  je tajná.  $L5$  je určena též pro navigaci v budoucnu. Signál obsahuje 3 hlavní složky

- RF Carrier Frequency (frekvenci nosné vlny)
- Ranging Code (kód pro určování vzdálenosti), každá družice je identifikována svým pseudonáhodným kódem – viz též kap. 3. Kód umožňuje měření vzdáleností, každá družice vysílá dva nebo více kódů,
  - na  $L1$  se vysílá C/A a P kód,
  - na  $L2$  se vysílá P kód (P kód je pro vojenské využití)
- Navigation data (navigační zprávu). Zpráva je v binárním kódu a obsahuje údaje o zdraví družic, efemeridy, opravu hodin a almanach

V blízké budoucnosti se připravuje  $L2C$  – druhý civilní signál na  $L2$ , dále  $L5$  3. civilní signál na nové nosné vlně a  $Lm$  tajný vojenský signál na  $L1$  a  $L2$ .

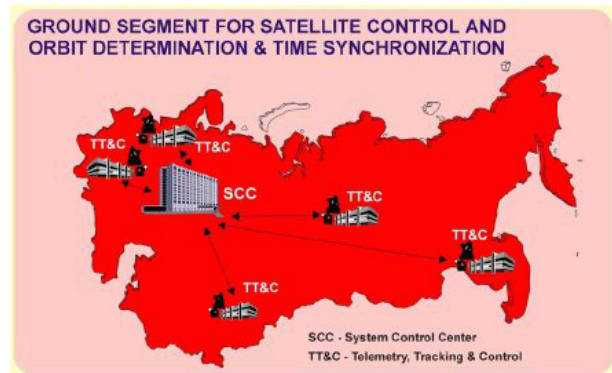
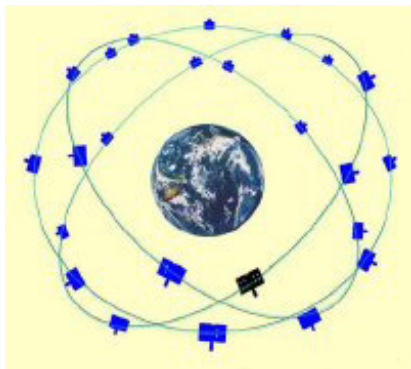


Přesnost určení polohy (navigační) je s C/A kódem 5 – 10 m ve vodorovném směru a 7 – 20 m ve svislém směru, s tajným P kódem 2 – 4 m ve vodorovném směru a 3 – 6 m ve svislém směru.

#### 4.4.2 Systém GLONASS

Systém GLONASS (Globalnaja navigacionnaja sistema) je ruskou obdobou systému GPS-NAVSTAR. Operační systém obsahuje 21 družic na 3 dráhových rovinách – viz obr. 4.5. GLONASS umožňuje získání navigační přesnosti 100 m s C/A kódem a 10 – 20 m přesnosti s P vojenským kódem.

Družice jsou umístěny na kruhové dráze, 19100 km vysoko, sklon roviny dráhy vůči rovníku je  $64.8^\circ$ , oběžná doba je  $11^h 15^m$ . První družice GLONASS byla vypuštěna v r. 1982. Před tím byly na stejnou dráhu vypuštěny 2 geodetické družice ETALON, aby provedly testování vhodnosti dráhy. Doplnění všech družic není doposud dokončeno (v r. 2007), k použití byl systém připraven v r. 1995. Oficiálně byl světu oznámen 24. 9. 1993.



Obrázek 4.5: Družice systému GLONASS spolu s pozemním segmentem

Kontrolní segment GLONASSu je celý umístěn na území bývalého SSSR. „System Control Centre and Time Standards“ je v Moskvě. Provádí následující funkce: monitoruje systém družic na dráze, zpřesňuje parametry drah družic a družicových hodin a vytváří navigační zprávu.

Kosmický segment – počátkem r. 2007 operovalo 9 družic. Připravuje se modernější družice GLONASS-M. Na obr. 4.6 je zobrazena družice systému GLONASS.



*Uživatelský segment:* existuje několik komerčních aparatur, některé firmy, vyrábějící geodetické přijímače mají GLONASS integrován. GLONASS-M také zavádí druhý civilní signál, umožňující zpřesnit navigační přesnost na 30 m. Ruská vláda slibuje, že v r. 2010 bude systém kompatibilní s GPS.

*GLONASS signály:* každá družice vysílá dva kódy – C/A kód a P kód, každá družice má vlastní frekvenční kanál pro přenos dat.

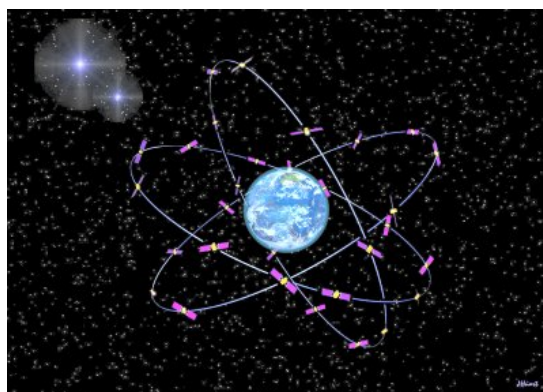
*GLONASS modernizace:* v roce 2003 byl uveden do provozu druhý civilní signál na  $L2$  frekvenci pro zvýšení přesnosti (zatím na 3 družicích), připravuje se 3. civilní signál na  $L3$  frekvenci pro

Obrázek 4.6 - GLONASS

zvýšení operability a přesnosti. Dále se připravují globální diferenciální efemeridy a korekce družicových hodin na třetím civilním signálu kvůli dosažení submetrové navigační přesnosti pro mobilní uživatele. Co se družic týče, má být zlepšena stabilita družicových hodin a zpřesněny efemeridy. Dále má být zvýšen počet monitorovacích stanic, zlepšen časový standard a modernizován software.

#### 4.4.3 Systém Galileo

Jde o evropský navigační systém, u kterého má být dosaženo plné interoperability s GPS a GLONASS. Půjde o plně komerční systém, který není primárně určen pro vojenské využití. Systém bude obsahovat 30 družic ve třech dráhových rovinách – 9 operačních a 1 záložní družice na každé dráze – viz obr. 4.7.

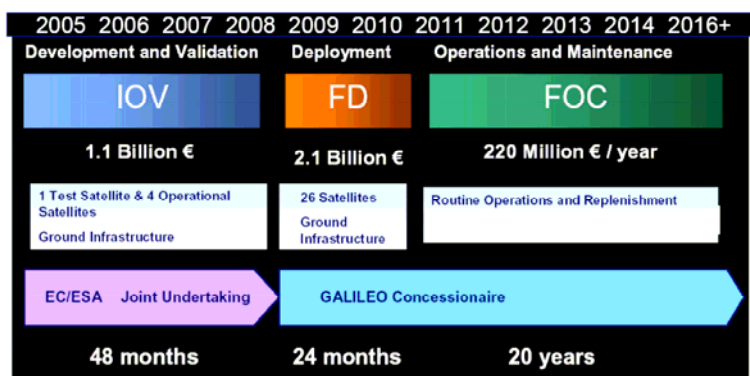


**Obrázek 4.7:** Družice systému Galileo

Výška družic nad Zemí bude 23222 km s dobrým pokrytím ve větších zeměpisných šířkách. Počátek realizace systému byl v r. 1998 zahájen Evropskou Unií, konečné rozhodnutí o existenci bylo učiněno v r. 2002. Důvody pro zřízení Galilea jsou následující:






- GPS/GLONASS jsou primárně vojenské systémy
- pro některé aplikace není dostatek družic
- horší pokrytí v některých oblastech (zejména polárních)
- při případné havárii systému GPS/GLONASS není náhrada
- použití GPS/GLONASS může být znemožněno vojenskými autoritami
- existují otázky kolem spolehlivosti GPS

Na obr. 4.8 je tzv. „implementační plán“ systému, již v r. 2007 však dochází ke zpoždění.



**Obrázek 4.8:** Galileo „implementační plán“

Galileo služby: na obrázku 4.9 je uveden přehled základních služeb systému

Open Service (OS)	Otevřená; masový trh poloha & čas	
Commercial Service (CS)	kód. data; vysoká přesnost garantované služby	
Safety of Life (SoL)	otevřená + Integrita & legalizace signálu	
Public Regulated Service (PRS)	kód. data; Integrita; neustálá dostupnost	
Search & Rescue (SAR)	„Near real-time“; Přesná; zpětná odezva	

Obrázek 4.9: Galileo služby

Galileo - systémové složky: jde o tři komponenty

- globální složky – družice a pozemní operační a kontrolní segment spolu s testovacími přijímači
- regionální složky – „External Region Integrity System“ (ERIS)
  - Evropský
  - integrovaný
- lokální složky – lokální rozšíření systému

Frequency	Signal	Service	General
L1 – 1575.42MHz	L1A	PRS	⊕ Encrypted Signals and Data
L1 – 1575.42MHz	L1B/C	OS	⊕ Equivalent to GPS C/A code ⊕ Free for General Use ⊕ B component has data, C used aids signal tracking ⊕ Some Integrity Information
E5a – 1176.45MHz	E5a	OS	⊕ Equivalent to GPS C/A code ⊕ No Integrity Information
E5b – 1207.12MHz E5ab - 1191.975MHz ALTB0C	E5b	OS	⊕ Free service designed for aircraft and safety of life applications (SOL) ⊕ Integrity Information ⊕ E5ab also has SAR Service
E6 – 1278.75MHz	E6A	PRS	⊕ Encrypted Signals and Data
E6 – 1278.75MHz	E6B/C	CS	⊕ Encrypted signals, chargeable ⊕ B component has data, the C aids signal tracking ⊕ Higher accuracy and performance than OS with guarantees of service

Obrázek 4.10: Galileo signály

Galileo – pozemní kontrolní segment: pozemní kontrolní segment zajišťuje „kontrolní“ funkce, zajištění konstelace družic a jejich údržbu.

Galileo – pozemní operační segment obsahuje kontrolní navigační systém, 30 tzv. „Galileo Sensor Stations (GSS)“, kde je hlavním prvkem referenční přijímač. Základní monitorovací stanice určují dráhy družic a synchronizují čas a obnovou informace každých 100 minut.

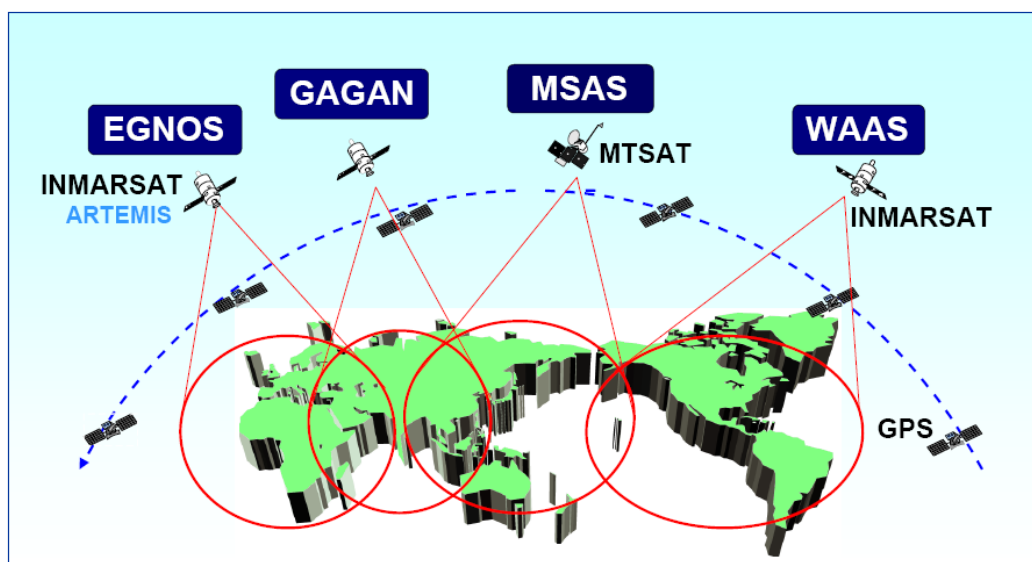
Galileo signály jsou uvedeny na obrázku 4.10.

#### **4.4.4 WAAS/EGNOS/MSAS/GAGAN**

Neustálá snaha o zvýšení přesnosti a operability systémů GNSS vede autory k zavádění korekcí. Největším problémem, limitující přesnost určení polohy, jsou korekce měřených dat o vlivy atmosféry – troposféry a ionosféry. Aby bylo možno využít technologii GNSS pro navigaci v pokud možno reálném čase, je nutné tyto korekce přenášet do aparatury uživatele. V současné době existují čtyři hlavní systémy, umožňující zavádění korekcí pozorování

- WAAS – Wide Area Augmentation (= rozšířený, plošný) System
- EGNOS – European Geostationary Overlay Service
- MSAS – Multi-Function Transport Satellite Augmentation System
- GAGAN – GPS/GLONASS Aided GEO Augmented Navigation

Všechny tyto systémy patří pod SBAS (Space Based Augmentation System). Jejich „rozdělení světa“ je patrné z obrázku 4.11.

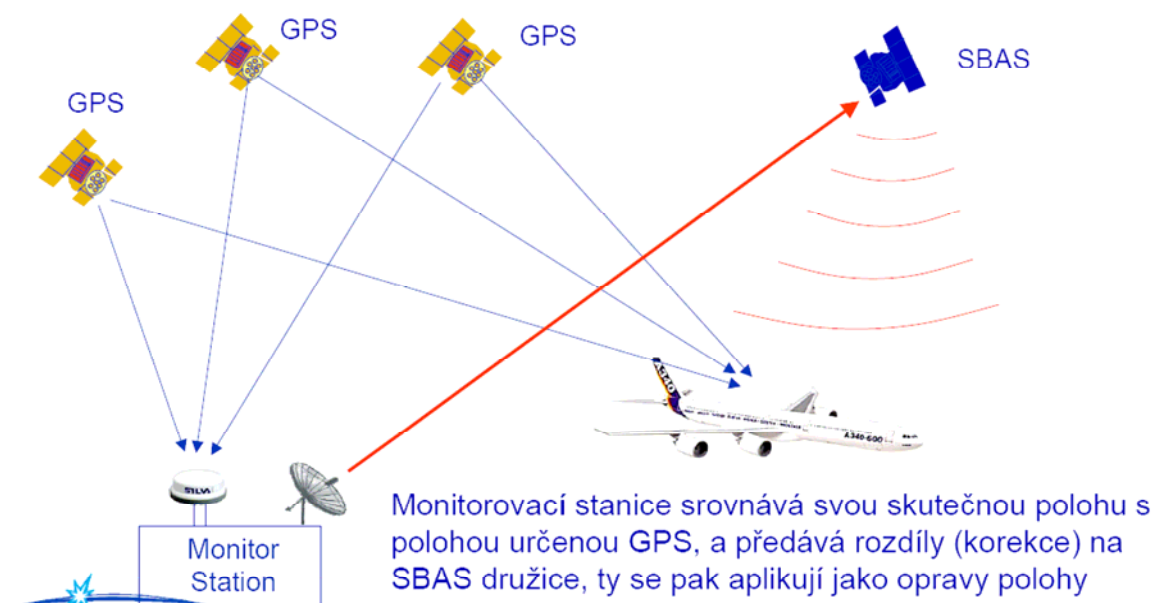


**Obrázek 4.11:** Geografické rozdělení působnosti jednotlivých korekčních systémů v rámci SBAS

Jak již bylo řečeno výše, tyto systémy řeší některé problémy navigačních systémů, jako jsou

- nepřesné atmosférické korekce
- multipath (vícecestné šíření signálu)
- chyby v určení polohy a korekce hodin
- nevhodnou konstelaci družic
- úmyslné zhoršení signálu (armáda)
- nízká přesnost určení polohy

Zavádění korekcí je buď individuální, nebo plošné, zpravidla pro velké území a je různého druhu. Jedna z možností je znázorněna na obr. 4.12.



**Obrázek 4.12:** Příklad šíření diferenciálních korekcí

SBAS umožňuje zpřesnit navigační horizontální polohu na 1 – 2 m. Mnoho jednofrekvenčních GPS přijímačů má SBAS jako standard. EGNOS (přenos korekcí přes stacionární družice) bude klíčový u systému Galileo.

*Systém EGNOS*, který je pro Evropu nejdůležitější, spolupracuje se všemi dalšími systémy. Zprávy vysílá každých 6 vteřin pro GPS i pro GLONASS. Využívá tři stacionární družice. Data jsou dostupná, pokud je stacionární družice vidět (což ve větších zeměpisných šířkách bývá problém), data je však možné získat pomocí internetu, telefonu, radia apod. Pro určování korekcí existuje rozsáhlá síť monitorovacích stanic.

## 5. Řešení obrácených úloh družicové geodézie

V této kapitole se budeme zabývat úlohami, které je možné řešit s využitím různých typů družicových pozorování. Přímou úlohou družicové geodézie je možno nazvat určení polohy družice v prostoru, když uvažujeme všechny možné veličiny, které tuto polohu ovlivňují. Obrácenou úlohou je pak naopak určení parametrů, charakterizujících příslušné vlivy na základě studia pohybu umělých družic.

Předpokládejme, že inerciální souřadnicový systém máme charakterizován systémem ICRS a terestrický systém systémem ITRS – viz kap.1. Mezi těmito systémy je definován transformační vztah, charakterizovaný tzv. „parametry orientace Země“ (EOP – Earth’s Orientation Parameters) – preceseně nutační maticí, greenwichským (světovým) rotačním časem a polohou pólu OCI vůči okamžité rotační ose.

Vyjdeme z této úvahy: Družice se pohybuje pod vlivem gravitačních a negravitačních sil rušeným pohybem, vztaženým k inerciálnímu systému (ICRS). Pozorování těchto družic jsou prováděna ze stanic, fixovaných ke geodetickým „značkám“, které se vlivem tektonických (a dalších) sil pohybují vůči terestrickému systému (ITRS). Z těchto pozorování jsme tedy schopni zpětně určovat parametry, charakterizující výše uvedené vzájemné vztahy.

Z družicových pozorování je pak možné určovat:

- parametry zemského gravitačního pole – charakterizované Stokesovými parametry  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$
- souřadnice pozorovacích stanic a jejich změny vůči ITRF
- globální parametry oceánských slapů a topografie oceánů, charakterizované parametry rozvoje do sférických funkcí  $C_{lm}^S, S_{lm}^S$
- parametry transformační matice mezi terestrickým a inerciálním systémem (tzv. **parametry orientace Země – EOP** (Earth’s Orientation Parameters)) – opravu *nutačních parametrů*  $d\psi$  (*nutace v ekliptikální délce*) a  $d\epsilon$  (*nutace ve sklonu ekliptiky*) (precese je považována za správnou), opravu *rotačního času*  $DUT1$  a *souřadnice CIP* (leží v blízkosti *okamžitého rotačního pólu* – viz kap. 1)  $x_p, y_p$  vůči konvencionálnímu počátku OCI.

Na základě takto určených parametrů lze dále

- definovat terestrický souřadnicový systém
- určovat průběh globálního geoidu a tížnicové odchylky
- určovat délkový rozměrový faktor Země (= poloměr koule, která má stejný *gravitační potenciál* jako geoid)
- určovat časové změny parametrů gravitačního pole

Existuje dvojí základní dělení metod družicové geodézie podle druhu využití jejich pohybu v prostoru a čase. Jde o

- 1) **dynamické metody**
- 2) **geometrické metody**



**Dynamické metody** vycházejí z teorie pohybu družic v poli gravitačních a negravitačních sil, řešením inverzních (obrácených) úloh určujeme parametry, charakterizující tato silová pole, souřadnice stanic a další veličiny.

**Geometrické metody** používají družice pouze jako záměrný cíl (musíme však mít informace o její přibližné dráze, abychom ji vůbec mohli pozorovat a vypočítat řadu korekcí, záviselých na její přibližné poloze). Slouží výhradně k určování souřadnicových rozdílů pozorovacích stanic. Vyžadují tzv. simultánní pozorování (pozorování provedené ve stejný časový okamžik) – stejná družice se pozoruje ve stejný okamžik alespoň ze dvou stanic. Využívaly se hlavně v 60. letech 20. století, kdy existovaly pouze metody *směrových (fotografických) pozorování*. Úlohy určení souřadnicových rozdílů dvou stanic se řešily metodami **analytické geometrie**. Dvě stanice a družice vytvářejí rovinu, když provedeme pozorování na více družic (nebo stejnou družici) v různých okamžicích dostáváme „vějíř“ rovin, jejichž průsečnice tvoří vektor spojnice mezi dvěma stanicemi. Tyto vektory je dále možné spojit do sítě a vyrovnat prostorovou síť, když ještě napřed určíme délkový rozměr, buď z pozemního měření anebo z *laserových pozorování*. Pokud známe souřadnice alespoň dvou stanic, můžeme určit souřadnice dalších stanic protínáním přímo z jednotlivých simultánních rovin. Příkladem může být celosvětová síť BC-4 z r. 1974, která byla určena pomocí fotografických směrových pozorování a délkový rozměr byl získán pomocí *základěn kosmické triangulace* zaměřených klasicky, s využitím stávajících trigonometrických sítí – viz obr. 5.1.

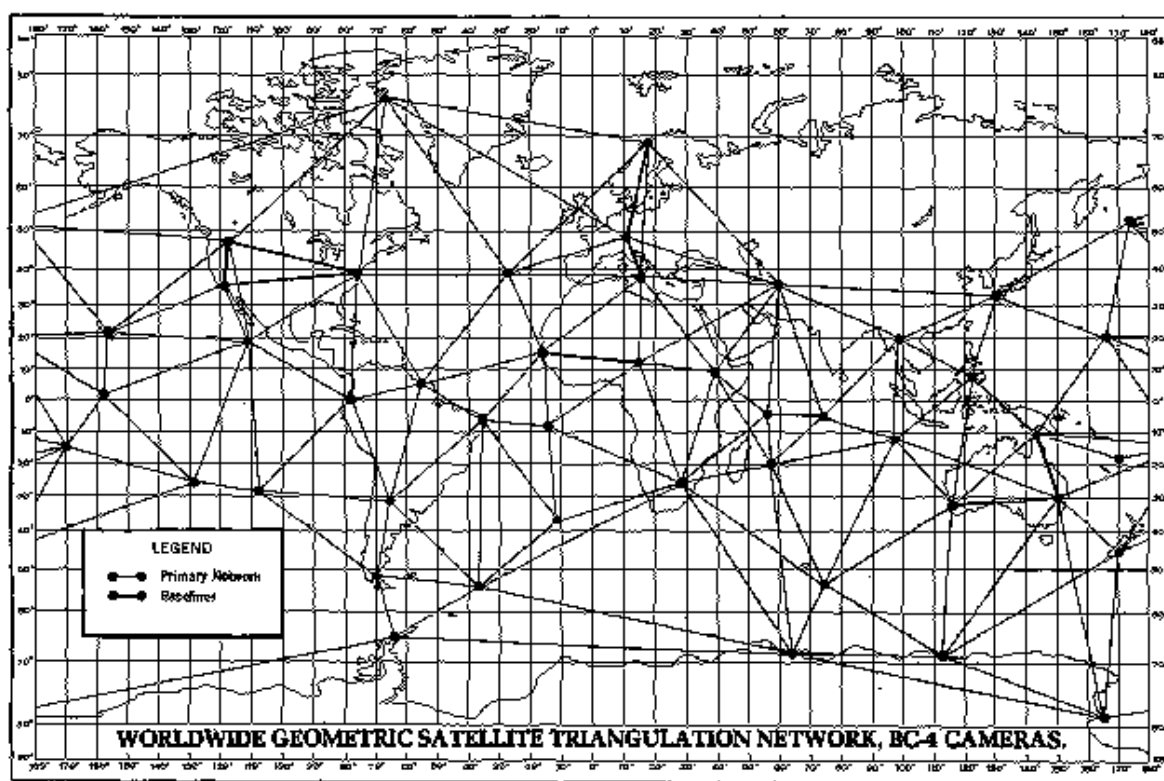


Figure 39

Obrázek 5.1: Družicová síť BC-4

V počátcích éry kosmické geodézie byly dynamické a geometrické metody striktně odděleny, v současné době se rozdíl stírá. Příkladem může být geodetické použití GPS, kde

se *dynamickými metodami* určují dráhy družic a souřadnicové rozdíly se určují ze simultánních pozorování v podstatě *geometrickými metodami* protínáním z délek.

### **5.1 Určování vybraných Stokesových parametrů charakterizujících gravitační pole Země z analýzy dráhových elementů družic**

Na základě výsledků druhé kapitoly víme, že sekulární změny elementů  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $M_0$  jsou působeny sudými zonálními Stokesovými parametry  $C_{2n,0}$ , kde  $n = 1, 2, \dots, \infty$ . Nejvýraznější dlouhoperiodické poruchy jsou v excentricitě  $e$  a sklonu roviny dráhy  $i$  a působí je liché zonální Stokesovy parametry  $C_{2n+1,0}$ , kde  $n = 1, 2, \dots, \infty$ . Lagrangeovy planetární rovnice zapíšeme v tomto případě symbolicky:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n}^{(\omega)}(a, e, i) C_{2n,0} + O(C_{2,0}^2) + LS_{\omega} + PC_{\omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n}^{(\Omega)}(a, e, i) C_{2n,0} + O(C_{2,0}^2) + LS_{\Omega} + PC_{\Omega} \end{aligned}$$

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n}^{(e)}(a, e, i) C_{2n+1,0} \right) \sin \omega + LS_e + PC_e \\ \frac{di}{dt} &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n}^{(i)}(a, e, i) C_{2n+1,0} \right) \sin \omega + LS_i + PC_i \end{aligned}$$

kde  $Q$  jsou funkce Keplerových elementů  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $LS$  značí lunisolární poruchy a  $PC$  periodické členy, které je třeba odfiltrovat nebo vyloučit volbou vhodné metody zpracování. Úkolem je určit individuální Stokesovy parametry  $C_{2n,0}$ ,  $C_{2n+1,0}$ . Tato metoda se používala pouze v počátcích éry družicové geodézie, ale její výsledky byly pro další rozvoj kosmické geodézie podstatné.

Z (5.1) i (5.2) je patrné, že jednotlivé parametry půjde určit, pokud budeme mít dostatečně dlouhé řady pozorování družic na různých sklonech a o různých výškách na Zemi (vliv změny excentricity je zanedbatelný). V tomto případě totiž získáme různé hodnoty parametru  $Q$  a rovnice budou lineárně nezávislé.

Předpokládejme, že máme pro sadu družic měřené směry vyjádřené rektascenzí a deklinací  $\alpha$ ,  $\delta$ , nebo délky stanice – družice  $\rho$  (radarová či laserová měření), nebo všechny tři veličiny, interpolované na stejný okamžik. Dále předpokládejme, že souřadnice stanic známe s dostatečnou přesností (stačí 10 – 50 m v geocentrické pozici). Metodami **nebeské mechaniky** lze z těchto veličin určit Keplerovy elementy  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $M_0$ . Když si tyto elementy vyneseme do grafu jako časovou řadu, můžeme je v případě  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $M_0$  aproximovat přímkou, její směrnice je pak  $d\omega/dt$ ,  $d\Omega/dt$ , ..., v případě periodické změny excentricity nebo sklonu je člen u sinu v (5.2) amplitudou příslušné sinusovky. V případě analýzy elementů  $k$  družic dostáváme  $2k$  rovnic (5.1) a (5.2), vyrovnáním aplikací MNČ můžeme určit tedy maximálně  $2k-1$  individuálních koeficientů. *Poznámka: V praktických případech se určovalo vždy méně koeficientů, než dovoloval počet rovnic, aby bylo více nadbytečných pozorování a výsledky byly věrohodnější. Vzhledem k tomu, že jde o nekonečné řady, je třeba nějakým způsobem nutno odhadnout zbytek, nebo alespoň jeho statistické vlastnosti. Pak je možno považovat zbytek řady za „signál“ a aplikovat zobecněnou metodu nejmenších čtverců.*



## 5.2 Základní model dynamické metody družicové geodézie

Úloha je formulována tak, aby bylo možno použít metodu nejmenších čtverců (MNC). Tedy půjde nám o sestavení rovnic oprav modelu

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &= f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{v} &= \mathbf{A} d\mathbf{x} + \mathbf{l} \end{aligned}$$

kde  $\bar{\mathbf{y}}$  je vektor vyrovnaných pozorovaných veličin  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$  je vektor oprav,  $f$  vyjadřuje nelineární funkční vztah mezi pozorovanými veličinami a vyrovnanými hodnotami hledaných parametrů  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{A}$  je matice plánu.  $\mathbf{l}$  je absolutní člen – vektor rozdílů mezi měřenými veličinami  $\mathbf{y}$  a jejich přibližnými hodnotami  $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ , kde  $\mathbf{x}_0$  jsou přibližné hodnoty hledaných parametrů. Každé rovnici je dále možné přiřadit váhu pozorování  $p$ , případně mohou do vyrovnání vstoupit další parametry, vázané kovarianční maticí. Tyto případy z našich dalších úvah vypustíme.

Předpokládejme dále, že máme dále k dispozici

- $\mathbf{r}_0(t_0), \dot{\mathbf{r}}_0(t_0)$  - přibližnou polohu a rychlost družice (state vector) v čase  $t_0$  vztaženou k inerciálnímu systému ICRS
- $\mathbf{R}_0, \dot{\mathbf{R}}_0$  – přibližné souřadnice stanic  $B$  a přibližné časové změny souřadnic vztažené k terestrickému systému ITRS
- $\mathbf{y}_0$  – přibližné hodnoty vektoru pozorování

Věnujme se nyní vektoru pozorování  $\mathbf{y}$ . Z něj známe buďto

- měřené směry (z fotografických pozorování), tedy v podstatě směrové kosiny  $\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}$
- vzdálenosti (z laserových pozorování) -  $|\mathbf{y}|$
- časové změny vzdáleností (z dopplerovských pozorování) -  $|\dot{\mathbf{y}}|$
- rozdíly vzdáleností mezi stanicí a mezi dvěma body družice v různých časových okamžicích  $t_1$  a  $t_2$  -  $|\mathbf{y}_2| - |\mathbf{y}_1|$
- úplný polohový vektor (v případě, že je družice vybavena aparaturou GPS) –  $\mathbf{y}$

Měření jsou funkcí času  $t$ , skutečné polohy družice v čase  $t$ :  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(X_t, Y_t, Z_t)$  a rychlosti  $\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}(\dot{X}_t, \dot{Y}_t, \dot{Z}_t)$  vůči ICRF a řadou dalších neznámých parametrů  $\mathbf{p}$ .

Naším úkolem je určit:

- $\mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0)$  - vyrovnané hodnoty state vectoru v čase  $t_0$
- $\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)$  - vyrovnané hodnoty state vectoru v časech  $t$ , ve kterých bylo uskutečněno pozorování
- $\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}$  - vyrovnané hodnoty souřadnic pozorovacích stanic a jejich časových změn, případně počátek a orientaci os systému ITRS
- vyrovnané hodnoty dalších parametrů  $\mathbf{p}$ .

Předpokládejme, že máme k dispozici **směrová, délková, dopplerovská** příp. **polohová** (úplný vektor) pozorování jedné družice v jistém časovém intervalu  $t_1$  až  $t_2$ , které může dosahovat délky až několika let. Řešení rozdělíme na dílčí úseky – „oblouky“ délky 1 až 4 dny.

Určované parametry, které jsme dosud nespécifikovali, pak dělíme na **vnitřní** a **vnější**.

**Vnitřní parametry** přísluší pouze analyzovanému oblouku a jsou to:

- $\mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0)$  - state vector, příslušející příslušnému oblouku
- určované parametry redukci či negravitačních poruch, které nejsme schopni analyticky nebo numericky přesně modelovat (Příklad: u GPS pozorování jsou to parametry troposféry a koeficienty, charakterizující tlak slunečního záření)

**Vnější parametry** přísluší všem obloukům společně a jsou to:

- $\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}$  - souřadnice pozorovacích stanic a jejich časových změn
- $C_{lm}, S_{lm}$  - parametry gravitačního pole Země
- $C_{lm}^S, S_{lm}^S$  - parametry, charakterizující slapy oceánů
- parametry orientace Země (EOP) -  $d\psi$  a  $d\varepsilon$ ,  $DUT1$  a  $x_p, y_p$ .

Vlastní vyrovnání podle MNČ vede k sestavení rovnic oprav typu

$$(5.4) \quad \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{l},$$

kde jsme do neznámých parametrů  $\mathbf{x}$  zahrnuli všechny neznámé (tedy  $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, \mathbf{p}$ ). Nyní jde o to, jak sestavit absolutní člen  $\mathbf{l}$  a matici plánu  $\mathbf{A}$ .

**Absolutní člen** je podle definice (MNČ) rozdíl mezi měřenými a přibližnými veličinami. Uvedme jako **příklad** případ zpracování laserového pozorování, uskutečněného v čase  $t$ . Přibližnou vzdálenost  $D_0(t)$  pak vypočteme z výrazu

$$(5.5) \quad D_0(t) = \sqrt{(X_t - X_B)^2 + (Y_t - Y_B)^2 + (Z_t - Z_B)^2},$$

kde  $X_t, Y_t, Z_t$  jsou přibližné souřadnice družice vypočítané z přibližné hodnoty state vektoru v čase  $t_0$  numerickou integrací pohybových rovnic – viz (5.7) – do okamžiku  $t$  a transformované z ICRS do ITRF pomocí přibližných parametrů precese, nutace, Greenwichského hvězdného času a polohy pólu.  $X_B, Y_B, Z_B$  jsou přibližné souřadnice stanice, na které bylo provedeno laserové pozorování. Absolutní člen je pak roven

$$(5.6) \quad l = D - D_0,$$

kde  $D$  je pozorovaná a o příslušné redukce (troposférická, ionosférická, refrakce, družicová aberace, ...) redukovaná měřená vzdálenost. Přibližnou polohu (a po vyrovnání i vyrovnanou polohu) družice počítáme **numerickou integrací** pohybových rovnic v ICRS

$$(5.7) \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, [V, \Delta \mathbf{F}], \mathbf{p}),$$

zde  $V$  a  $\Delta\mathbf{F}$  vyjadřují přibližné hodnoty poruchových konzervativních, resp. nekonzervativních sil, závisících na některých parametrech  $\mathbf{p}$ . Jde o tři diferenciální rovnice 2. řádu pro hledané veličiny  $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ . To, že neznáme *analytické* vyjádření přibližné, (ani přesné) dráhy nám komplikuje situaci při sestavení matice plánu  $\mathbf{A}$ .

### Sestavení matice plánu $\mathbf{A}$

Nechť  $\mathbf{y}$  je vektor pozorování (směry, délky, rozdíly délek, pozice, ...). Tento vektor závisí na poloze **družice** a **stanice**. Z aplikace MNC víme, že  $\mathbf{A}$  je tvořeno parciálními derivacemi  $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$ . Na první pohled je zřejmé, že jelikož neznáme analytické vyjádření funkčního vztahu (5.3), nepůjde tyto derivace počítat přímo analyticky. Vyjdeme proto z následujícího výrazu

$$(5.8) \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{p}} \right) + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \dot{\mathbf{R}}}.$$

Z podstaty úlohy plyne, že  $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \dot{\mathbf{r}}}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{R}}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \dot{\mathbf{R}}}$  jsme schopni vypočítat analyticky, viz následující příklad.

**Příklad:** Pro laserové pozorování  $D$  stanice – družice vypočteme parciální derivace z přibližných hodnot. Vyjdeme z již známého vztahu (5.5)

$$D_0(t) = \sqrt{(X_t - X_B)^2 + (Y_t - Y_B)^2 + (Z_t - Z_B)^2},$$

tedy

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\partial D_0}{\partial \mathbf{r}} = \left( \frac{\partial D_0}{\partial X_t}, \frac{\partial D_0}{\partial Y_t}, \frac{\partial D_0}{\partial Z_t} \right) = \left( \frac{X_t - X_B}{D_0}, \frac{Y_t - Y_B}{D_0}, \frac{Z_t - Z_B}{D_0} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} &= \frac{\partial D_0}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \left( \frac{\partial D_0}{\partial \dot{X}_t}, \frac{\partial D_0}{\partial \dot{Y}_t}, \frac{\partial D_0}{\partial \dot{Z}_t} \right) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

atd.

Problémem jsou však parciální derivace  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{p}}$ , vzhledem k tomu, že pro  $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$  bud' neznáme přesné analytické výrazy anebo jsou neúměrně komplikované. Problém se řeší pomocí tzv. **variačních rovnic**.

Vyjděme z výrazu

$$(5.10) \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right] + \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{p}} \right] + \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right]_{\text{explicitně}}.$$

Jelikož určované parametry  $\mathbf{p}$  a čas  $t$  jsou nezávislé, je možno psát

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right) \end{aligned}$$

když jsme ve třetím členu provedli záměnu derivací podle  $\mathbf{p}$  a  $t$ . Výraz (5.10) lze podobným způsobem přepsat na tvar

$$(5.12) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right] = \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right] + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right] + \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \right]_{\text{explicitně}}$$

Označme nyní

$$(5.13) \quad A(t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}}, \quad B(t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}}, \quad C(t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\text{explicitně}}$$

Všechny tyto derivace **umíme vypočítat analyticky**, vzpomeňme na

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{\partial V_{ICRF}}{\partial \mathbf{r}}, \quad V_{ICRF} = Tr(d\psi, d\varepsilon, DUT1, x_p, y_p) V_{ITRF}, \\ V_{ITRF} &= \frac{GM}{r} \left[ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{a_e}{r} \right)^l (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) P_{lm}(\sin \Phi) \right], \end{aligned}$$

kde  $Tr$  znamená transformační matici mezi ITRF a ICRF. (Podobným způsobem vyjádříme i potenciál oceánských slapů).

Hledané neznámé derivace označme  $Y(t) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}}$  a  $\dot{Y}(t) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{p}}$ . Po dosazení do (5.12) s přihlédnutím k (5.11) a (5.13) máme

$$(5.15) \quad \dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + B(t)Y(t) + C(t).$$

To jsou tzv. **variační rovnice** – tři diferenciální rovnice 2. řádu pro hledané  $Y(t), \dot{Y}(t)$ . Tyto rovnice je možné numericky integrovat a určit  $Y(t), \dot{Y}(t)$ .

Proveďme nyní rekapitulaci výše naznačené aplikace MNČ:

- absolutní člen v rovnici oprav („měřená minus přibližná“) vypočteme tak, že přibližnou polohu družice určíme *numerickou integrací pohybových rovnic* (5.7) s počátečními podmínkami  $\mathbf{r}_0(t_0), \dot{\mathbf{r}}_0(t_0)$
- matici plánu (parciálních derivací)  $\mathbf{A}$  určíme zčásti *analytickým výpočtem* a zčásti *numerickou integrací variačních rovnic*

- při konečném sestavení úlohy jsou pak kombinovány různé zpracovávané oblouky z jedné i z více družic

Pak již provedeme výpočet MNČ některým ze známých algoritmů. Z praktického hlediska numerické matematiky je třeba zvolit stabilní výpočetní algoritmus, vzhledem k tomu, že se zpracovávají řádově desetitisíce pozorování a určují tisíce neznámých.

Z teoretického hlediska není problém přidat do zpracování **altimetrická, gradientometrická** nebo **SST** (satellite to satellite tracking) pozorování.

V odstavci 5.1 jsme se zabývali odděleným určováním vybraných parametrů gravitačního pole a určení souřadnic. Vzhledem k výsledkům *dynamické metody* se toto řešení může zdát anachronismem. Není tomu tak, vzhledem k tomu, že aplikace MNČ vyžaduje poměrně „přesné“ přibližné hodnoty (v opačném případě bychom museli úlohu řešit iterativně). Je tedy výhodné znát souřadnice stanic s alespoň metrovou přesností a mít určené zonální Stokesovy parametry, aby se „přibližná dráha“ nelišila od vyrovnané o více než desítky metrů.

Závěrem je nutno konstatovat, že dynamická úloha se v řadě případů neřeší v úplné komplexnosti. Například při určování parametrů orientace Země EOP a definici souřadnicového systému se předpokládá, že parametry gravitačního pole jsou známe s dostatečnou přesností. Naopak při řešení úlohy určení tzv. modelu gravitačního pole se určují Stokesovy parametry a souřadnice stanic zatímco EOP se považují za známe (jejich hodnoty se přebírají z cirkulářů Mezinárodní služby rotace Země a souřadnicových systémů (IERS)).

### **5.3 Kinematické určení parametrů gravitačního pole Země**

Kinematický postup určování potenciálu (*energy balance approach*) spočívá ve využití součtu kinetické a potenciální energie, který je v konzervativním systému konstantní (tzv. *Hamiltonův princip*). Platí

$$(5.16) \quad H = T + V,$$

kde  $T$  představuje kinetickou a  $V$  potenciální energii.  $H$  je Hamiltonova konstanta. Výraz (5.16) konkrétně zapíšeme ve tvaru:

$$(5.17) \quad V_{\oplus} + R_3 + R_{oc} + H = E_{kin} - E_{rot} + E_{dis},$$

kde  $V_{\oplus}$  je gravitační potenciál Země – viz (5.14),  $R_3$  je poruchový potenciál od Měsíce a Slunce (přímý a nepřímý),  $R_{oc}$  je poruchový potenciál působený změnami oceánu a atmosféry. Obě tyto veličiny je možno předem vypočítat – budou tedy později brány jako veličiny známé, případně budou ještě některé jejich charakteristiky určovány v rámci „kalibračních neznámých“. Dále platí:

$$(5.18) \quad E_{kin} = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \int \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} dt,$$

kde  $\mathbf{r}$  je geocentrický vektor průvodič družice v rotujícím systému (ITRF) a  $\mathbf{\dot{v}}$  je vektor rychlosti družice ve stejném systému. Odstředivá složka  $E_{rot}$  je pak

$$(5.19) \quad E_{rot} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2,$$

kde vektor zemské rotace  $\boldsymbol{\omega}$  je možno vyjádřit jako funkci Greenwichského hvězdného času  $S$ :

$$(5.20) \quad \boldsymbol{\omega} = \left( 0, 0, -\frac{dS}{dt} \right)^T.$$

Energii vlivů negravitačního původu  $E_{diss}$  vyjádříme jako křivkový integrál negravitačního zrychlení  $\mathbf{F}a_{cc}$ , tedy

$$(5.21) \quad E_{diss} = \int \mathbf{F}a_{cc} \cdot \mathbf{\dot{v}} dt.$$

Při přechodu do inerciálního systému ICRS bude platit:

$$(5.22) \quad \mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{\dot{v}} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

kde  $\mathbf{v}$  je rychlost vůči inerciálnímu systému a matice  $\mathbf{R}$  je transformační matice mezi ICRF a ITRF – viz kap. 1. Pro  $E_{rot}$  pak platí

$$(5.23) \quad E_{rot} = -\mathbf{e}_3 \boldsymbol{\omega} \langle \mathbf{e}_3, (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rangle,$$

a integrál negravitačních vlivů bude

$$(5.24) \quad E_{dis} = \int \mathbf{F}a_{cc} \cdot (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dt.$$

Úloha je v této chvíli zadána tak, že kromě hledaných neznámých, kterými jsou parametry gravitačního pole Země  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  musíme určovat Hamiltonovu konstantu  $H$  a další parametry, charakterizující např. nepřesně zavedené korekce. Označme je souhrnně jako vektor  $\mathbf{k}$ .

Aplikací metody nejmenších čtverců na výraz (5.17) můžeme pro neznámé parametry  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ ,  $\mathbf{k}$  psát  $i$ -tou rovnicí oprav

$$(5.25) \quad \varepsilon_i = \left( \frac{\partial V_{\oplus}}{\partial C_{lm}|_i}, \dots, \frac{\partial V_{\oplus}}{\partial S_{lm}|_i}, \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{k}} \Big|_i \right) \cdot \begin{pmatrix} C_{lm} \\ \dots \\ S_{lm} \\ \dots \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} + P_i,$$

kde  $\varepsilon_i$  je oprava,  $\mathbf{K}(\mathbf{k})$  je systém kalibrace, který zahrnuje veškeré neznámé nad rámec parametrů gravitačního pole Země a  $P_i$  jsou „pseudopozorování“, protože tuto veličinu musíme vypočítat z veličin skutečně měřených. Pro  $P_i$  platí vzhledem k (5.17):

$$(5.26) \quad P_i = \left( E_{kin} - E_{rot} + E_{dis} - R_3 - R_{oc} + K|_0 + V_{\oplus}|_0 \right)_i,$$

kde indexy „0“ značí přibližné hodnoty.

*Aplikace:*

Jako aplikační příklad nám může sloužit mise CHAMP (viz kap. 4). Jde o družici na nízké dráze, jejíž poloha je určována kinematickou metodou GPS v jistých časových intervalech, kromě toho je pomocí mikroakcelerometru měřeno negravitační tíhové zrychlení a orientace družice je určována pomocí hvězdných sensorů. Vztah mezi měřenými a odvozenými veličinami je naznačen v Tabulce 5.1.

**Tabulka 5.1:** Vztah mezi přímo měřenými hodnotami (×) a odvozenými veličinami (●)

měřená veličina	$\mathbf{r}$	$\mathbf{v}$	$E_{kin}$	$\mathbf{F}a_{cc}$	$\mathbf{A}_t$	$E_{dis}$	$E_{rot}$	$t$
poloha	(×)	(●)	(●)			(●)	(●)	
negravitační zrychlení				(×)		(●)		
orientace					(×)	(●)		
čas		(●)			(●)			(×)

Pomocí měřených a odvozených veličin je pak sestavena soustava lineárních rovnic oprav, která je řešena některým ze standardních postupů MNČ.

## 6. Modely gravitačního pole Země

### 6.1 Definice a základní informace

*Modelem gravitačního (tíhového) pole Země (Earth gravity field model, EM)* rozumíme – v úplné obecnosti – soubor:

- Stokesových parametrů (harmonických geopotenciálních koeficientů v rozvoji gravitačního potenciálu v řadu kulových funkcí), charakterizujících vnější gravitační pole tělesa,
- souřadnic pozorovacích stanic a jejich časových změn, ze kterých byla prováděna pozorování některou z technik kosmické geodézie,
- tzv. „parametrů orientace Země“, parametrů charakterizujících přechod mezi inerciální souřadnicovou soustavou a terestrickou souřadnicovou soustavou, kterými jsou: oprava parametrů nutace, korekce koordinovaného času UTC na čas rotační UT1 a souřadnice rotačního pólu vůči osám terestrického souřadnicového systému,
- Stokesových parametrů, charakterizujících globální oceánské slapy (harmonické slapové koeficienty),
- Stokesových parametrů, charakterizujících topografii oceánů – odlehlost oceánské hladiny od geopotenciální plochy geoidu (harmonických topografických koeficientů).
- parametrů referenčního elipsoidu, geocentrické gravitační konstanty  $GM$ , aj.

Dnes je *model Země* chápán jako soubor parametrů charakterizujících její gravitační (tíhové) pole (neplést s geofyzikálními *modely vnitřní stavby Země*, k jejichž výpočtu poskytují Stokesovy parametry jen okrajové podmínky).

Před zahájením éry družicové geodézie se toho o globálních parametrech gravitačního pole Země a tím i o průběhu geoidu v globálním měřítku nevědělo mnoho. Spíše byl pouze znám jen slušný odhad pólového zploštění planety a tušila se existence dalších tvarových anomálií. To platilo do r. 1958, kdy se objevily první výsledky analýz změn drah (otáčení uzlu a perigea) z nejprimitivnějších amatérských pozorování družic, vedoucí k určení pólového zploštění Země (úměrné koeficientu  $C_{2,0}$ ), které se pak prokázalo být přesnější než výsledky předdružicové. Prioritu v těchto pracech má Čech Prof. E. Buchar. Zanedlouho poté byla určena tendence Země k hruškovitosti ( $C_{3,0}$ ), pak další zonální a posléze i nezonální harmonické koeficienty (určeny zejména v USA). K tomu byl třeba rozvoj pozorovacích metod na straně jedné i teoretické práce a zlepšování výkonů výpočetní techniky na straně druhé.

Podívejme se nejprve na měření přispívající k určení parametrů gravitačního pole. Většina pozorování není geocentrická (s výjimkou geometrického přístupu GPS), ale zprostředkovaná se zemského povrchu nebo z družice k němu. Geocentrický průvodič družice píšeme jako součet vektoru průvodiče stanice a topocentrického vektoru pozorování. Platí tedy

$$(6.1) \quad \mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{R},$$

kde  $\boldsymbol{\rho}$  je topocentrický vektor a  $\mathbf{R}$  je geocentrický průvodič stanice. Díky tomu, že popis pohybu umělých družic jsme schopni vyjádřit v inerciální souřadnicové soustavě a  $\mathbf{R}$  je vázáno na terestrickou souřadnicovou soustavu, je možné do řešení úlohy zahrnout i určování souřadnic pozorovacích stanic a parametrů orientace Země. Současné pozorovací techniky



jsou pak schopny určovat buď úplný vektor (GPS) nebo jeho složky či jejich časové změny (ostatní měření). Z optických pozorování speciálními kamerami se získával směr topocentrického průvodiče. Dopplerovská měření poskytují časovou změnu průvodiče čili rychlost družice vůči pozorovateli (tím může být i druhá a další družice). Laserová lokace (SLR, Satellite Laser Ranging) dává velikost topocentrického průvodiče, nikoli však jeho směr. Družicová altimetrie měří výšku letu nad povrchem a může být použita i jako informace k určení dráhy družice, zprostředkovaně. Družicový gradientometr bude měřit veličiny přímo vztahované ke druhým derivacím tíhového potenciálu a postup zpracování bude jiný než u předchozích typů měření.

Vzhledem k tomu, že vliv gravitačního pole Země na dráhy družic klesá s  $l$ -tou mocninou vzdálenosti družice od středu Země ( $l$  je stupeň Stokesových parametrů v rozkladu geopotenciálu do kulových funkcí), je třeba zpravidla „družicové“ výsledky doplnit

- „pozemními“ tíhovými daty – tíhovými anomáliemi, určenými z gravimetrických měření,
- výsledky pozorování *družicové altimetrie*. Ty též mohou být presentována formou tíhových anomálií, nebo mohou být použity přímo měřené výšky nebo jejich rozdíly mezi vzestupným a sestupným obloukem dráhy v křížících se bodech (crossovers).

*Metoda dynamické družicové geodézie* využívá podstatnou měrou Gaussovu metody nejmenších čtverců (viz kap. 5). Vzhledem ke složitosti problému je úloha nelineární a numericky nestabilní, pro úspěšnou linearizaci je třeba mít k dispozici dostatečně přesné „přibližné“ hodnoty určených parametrů, numerická stabilita se zlepšuje přidáním dodatečných podmínek. Zájemce o podrobnosti odkazujeme např. na: Lemoine F. G., Kenyon S. C., Factor J. K., Trimmer R. G., Pavlis N. K., Chinn D. S., Cox C. M., Klosko S. M., Luthcke S. B., Torrence M. H., Wang Z. M., Williamson R. G., Pavlis E. C., Rapp R. H., Olson T. R.: *The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM 96*, NASA/TP-1998-206861, NASA, Greenbelt, MD, 1998.

Zatímco před SLR byla dráha družic známa s polohovou chybou stovek metrů až několika kilometrů (podle typu dráhy družice, jejího vybavení, pozorovacích prostředků a geografického rozložení pozorovacích stanic a četnosti jejich pozorování), s fotografickými kamerami na desítky metrů, SLR postupně - díky zpřesňování technologie - přinesla revoluční přesnost řádově metrovou a nyní až decimetrovou a pro geodynamické družice (pasivní koule vybavené jen koutovými odražeči pro odrazy laserového paprsku), přesnost až na jednotlivé centimetry (v topocentrické vzdálenosti pozorovatel-povrch družice).

V nejnovější době je SLR spolu s GPS neocenitelnou pomůckou také pro přesné určování drah altimetrických družic (kap. 3), kde se vyžaduje nejvyšší přesnost na úrovni jednotlivých centimetrů v určení radiální složky dráhy, jako jsou družice ERS 2, GFO, TOPEX/Poseidon a nejnovější ENVISAT či JASON – (SLR se zde vždy kombinují s dalšími prostředky pro přesné určení dráhy) či CHAMP a GRACE (kap. o družicích 4) pro studium gravitačního a magnetického pole Země.

Kombinací družicových pozorovacích technik – laserové lokace družic, technologie GPS, DORIS a altimetrie, nebo jen některých z nich, byla určována řada modelů Země. Tabulka 6.1 stručně a bez nároku na úplnost dává přehled o historii modelů Země, Tabulka 6.2 shrnuje soudobé modely (stav k r. 2007).

**Tabulka 6.1:** Historické modely gravitačního pole Země

Instituce	Název modelu <sup>1</sup>	rok tvorby posledního modelu	maximální l,m	Data		
				družicová	pozemní Δg	Δg přepočtené z altimetrie
Smithsonian Astrophysical Observatory (USA)	Standard Earth SE I	1966	8, 8	ano	5° x 5°	ne
	Standard Earth SE III	1973	18, 18	ano	1° x 1°	ne
Ohio State University (USA)	OSU	1991	360, 360	ano	0.5° x 0.5°	0.5° x 0.5°
NASA Goddard Space Flight Center (USA)	GEM (liché)	90. léta	od 12, 12 do 180, 180	ano	ne	ne
	GEM (sudé)	90. léta	180, 180	ano	1° x 1°	1° x 1°
	další „testovací“ modely					
CNES (Francie) DGFI (Německo)	GRIM 1-3	1992	60, 60	ano	1° x 1°	1° x 1°
Texas University (USA)	TEG 1-4	2000	60, 60	ano	0.5° x 0.5°	0.5° x 0.5°
NASA + NIMA (USA)	JGM 1-3	1996	70, 70	ano	ano	ano
ZIPE (bývalé Vých. Německo)	POEM	1988	20, 20	ano	ano	ano
CNES (Francie) GFZ (Německo)	GRIM5S1,C1	2000	120,120	ano	ano	ano

<sup>1</sup> za názvem zpravidla existovalo další upřesňující označení

### EGM 96 (Earth Gravity Model 1996)

**NASA** (National Aeronautic and Space Administration), **NIMA** (National Imagery and Mapping Agency) a **OSU** (Ohio State University)

Kombinovaný model do stupně a řádu 360, 360

Data: *družicová*:

- „poziční“ pozorování SLR, GPS, DORIS, TDRSS a TRANET více než 20 družic,
- přímá altimetrická pozorování z družic TOPEX/Poseidon, ERS-1, GEOSAT

*pozemní*:

- gravitační anomálie z pozemní, letecké a námořní gravimetrie (střední hodnoty 0.5° x 0.5°) – 32% povrchu Země
- gravitační anomálie z altimetrie (oceány/ledovce) (střední hodnoty 0.5° x 0.5°) – 66% povrchu Země
- gravitační anomálie odvozené z výšek pomocí izostatického modelu Země – 2% povrchu Země

## 6.2 Historie a současnost modelů gravitačního pole Země

Historicky první institucí, která se zabývala určením EM byla Smithsonian Astrophysical Observatory ve Washingtonu. Jejich Standard Earth (I) z roku 1966 byla pionýrskou prací, na které se podílel mezinárodní tým pracovníků. Šlo o kombinované řešení na bázi družicových fotografických pozorování a pozemních gravimetrických pozorování průměrovaných přes

oblasti  $5^\circ \times 5^\circ$  - data však zdaleka v té době nepokrývala celý povrch Země. Aktivita této instituce končí kolem roku 1980 prezentací Standard Earth (VI). Další významná řešení byla prováděna v Ohio State University, Columbus (modely OSU). Šlo o kombinovaná řešení v tom smyslu, že jako nultá aproximace se bralo čistě družicové řešení NASA (modely řady GEM) a k němu se přidávala pozemní data. Tyto modely byly určovány zpravidla na svou dobu vzniku do vysokých stupňů a řádů, až do  $(360 \times 360)$ . Největší aktivitu v tvorbě modelů gravitačního pole vyvíjela NASA v Goddard Space Flight Center (Goddardovo středisko kosmických letů), Greenbelt řadou svých Gravity Earth Models (GEM). Modely s lichými čísly byla čistě družicová řešení, modely se sudými čísly pocházely z kombinovaných řešení. Významnou institucí při tvorbě modelů bylo též Center for Space Research Univerzity v Austinu v Texasu svými modely řady TEG.

V Evropě byly v rámci spolupráce Německého výzkumného ústavu geodetického v Mnichově (DGFI) a francouzského střediska pro výzkum kosmického prostoru CNES vytvořeny modely řady GRIM. Posledními z této řady jsou družicový GRIM5-S1 a kombinovaný GRIM5-C1. Pak přišla družice CHAMP (2000) a revoluce v pokrytí dráhy kontinuálními a superpřesnými měřeními a tím pádem i ve tvorbě modelů Země. Lze hovořit o etapě „před Champem“ a po něm, kdy jsou (v současné době) k dispozici data z družic CHAMP a GRACE (Tabulka 6.2).

NASA GSFC v USA „před Champem“ vytvořila m.j. kombinované modely řady JGM 1 až 3 a *Earth Gravity Model 1996* (EGM 96), vzniklý ve spolupráci více institucí pod vedením NASA, National Imaginery and Mapping Agency (NIMA) a Ohio State University. Základní charakteristiky jsou uvedeny v Tabulce 6.1.

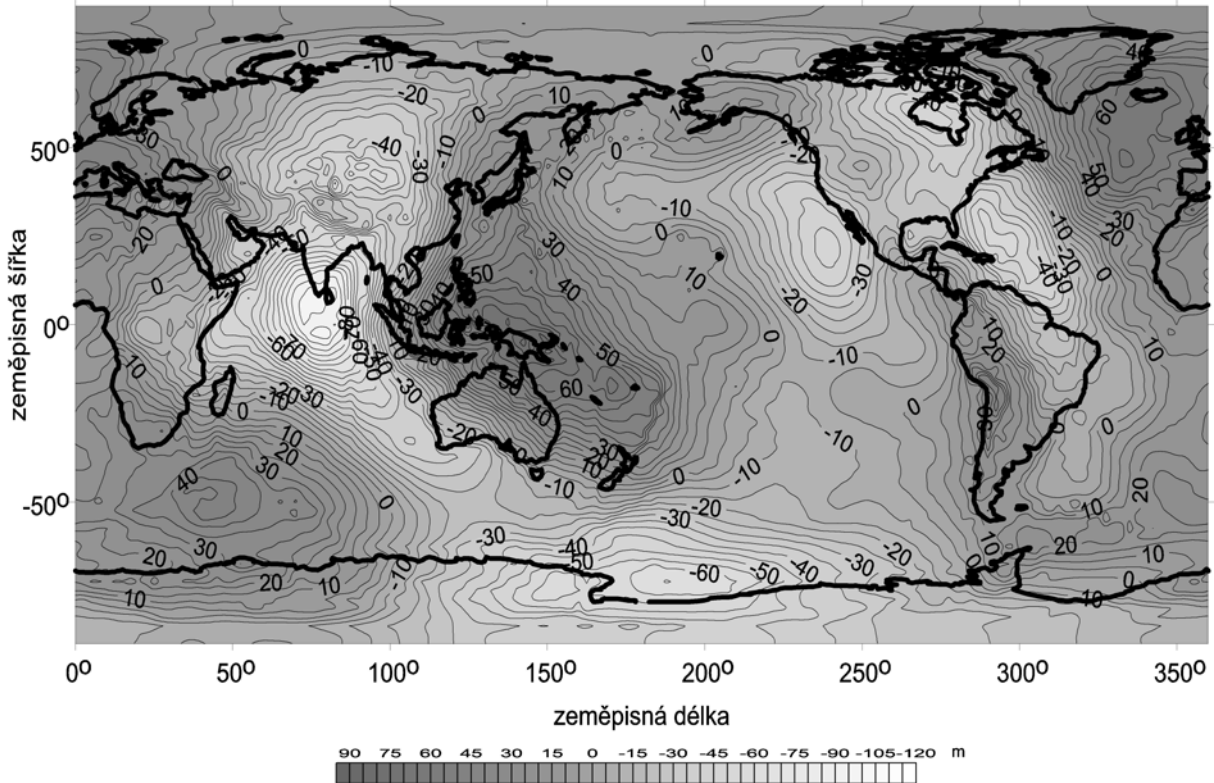
Inverzí výrazu pro geopotenciál a zahrnutím potenciálu odstředivé síly můžeme určit průběh globálního geoidu. Na Obr. 6.1 je znázorněn průběh geoidu, vzniklý inverzí EGM 96 (model výše citovaný). Přesnost tohoto geoidu lze charakterizovat střední kvadratickou chybou 0.1 m na oceánech a méně než 0.5 m na kontinentech.

Významným přínosem pro zpřesnění parametrů gravitačního pole jsou v současné době družicové mise CHAMP a GRACE. CHAMP je mimo jiné vybaven aparaturou GPS pro určování dráhy a akcelerometrem, který umožňuje detekci zrychlení negravitačního původu. Eliminací negravitačních zrychlení získáme „gravitační signál“, který umožňuje zpřesňovat parametry gravitačního pole Země. Prvními EM, založené na příspěvku či výhradním použití dat z mise CHAMP, jsou modely řady EIGEN, vzniklé ve spolupráci CNES (Francie) a GFZ Postupim (Německo), více v Tabulce 6.2. Posléze jsou družicová data z obou družic CHAMP i GRACE kombinována, pro nízké harmonické koeficienty posílána data z geodynamických družic a kombinována s pozemskými tíhovými anomáliemi, které jsou nyní k dispozici téměř z celého světa.

### **6.3 Testování přesnosti modelů gravitačního pole Země**

Dnes není problém invertovat normální rovnice sestavené z různorodých družicových a nedružicových dat a vypočítat hodnoty Stokesových parametrů, popř. dalších veličin. Problémem zůstává objektivní hodnocení přesnosti vypočtených výsledků. Problém to bude čím dál tím obtížnější, neboť autoři modelů Země využívají vše, co je k dispozici ke tvorbě svých modelů a neponechávají nic pro nezávislé testování přesnosti.

Průběh plochy globálního geoidu vzhledem ke geocentrickému referenčnímu elipsoidu - řešení EGM 96  
(izočáry v metrech, interval 5 m)



**Obrázek 6.1:** Geoid EGM96 (Poznámka: Izočarami znázorněný průběh plochy geoidu nad referenčním elipsoidem budí zdání, že plocha geoidu obsahuje „kopce“ a „dolíky“. Jde však o optický klam, plocha geoidu je plochou vypuklou s kladnou Gaussovou křivostí ve všech bodech. V místech se zápornými hodnotami převýšení je pouze plošší, v místech s kladnými hodnotami převýšení je zakřivenější)

Předpokládejme, že model gravitačního pole je definován souborem Stokesových parametrů (geopotenciálních, harmonických koeficientů)  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ , kde  $l$  je stupeň a  $m$  je řád v rozkladu geopotenciálu do řady kulových funkcí. Hodnotu gravitačního potenciálu v bodě o sférických souřadnicích  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$  je pak možno vyjádřit výrazem

$$(6.2) \quad V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{a_e}{r} \right)^l (C_{lm} \cos \lambda + S_{lm} \sin \lambda) P_{lm}(\sin \varphi) \right\},$$

kde  $P_{lm}$  jsou přidružené Legendreovy funkce. Doplníme-li  $V$  o hodnotu potenciálu odstředivé síly  $Q$  dostáváme výraz pro tíhový potenciál  $W$ :

$$(6.3) \quad W(r, \varphi, \lambda) = V(r, \varphi, \lambda) + Q(r, \varphi).$$

Ten je již úzce vázán na plochu geoidu, jelikož geoid je definován jako plocha stejného tíhového potenciálu  $W_0$ . Pro průvodič geoidu  $r_{geoid}$  pak získáme spojením (6.2) a (6.3) výraz

$$(6.4) \quad r_{geoid} = \frac{GM}{W_0} \left\{ 1 + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{a_e}{r_{geoid}} \right)^l (C_{lm} \cos \lambda + S_{lm} \sin \lambda) P_{lm}(\sin \varphi) \right\} + \frac{Q(r_{geoid}, \varphi) \cdot r_{geoid}}{W_0}.$$

Z výrazu (6.1) je zřejmá skutečnost, že geocentrický průvodič dráhy družice  $\mathbf{r}$  je funkcí gravitačního potenciálu  $V$ , symbolicky tedy můžeme psát

$$(6.5) \quad \mathbf{r}(r, \varphi, \lambda) = f[C_{lm}, S_{lm}, \{\cdot\}],$$

kde  $\{\cdot\}$  vyjadřuje závislost na dalších parametrech. Důležitou roli bude v dalším hrát radiální složka  $r_{sat}$  vektoru  $\mathbf{r}$ . Z výrazu (6.4) lze odvodit, že platí nejen

$$(6.6) \quad r_{sat}(\varphi, \lambda) = f[C_{lm}, S_{lm}, \{\cdot\}],$$

ale i

$$(6.7) \quad \Delta r_{12} = r_1(\varphi, \lambda) - r_2(\varphi, \lambda) = f[C_{lm}, S_{lm}, \{\cdot\}].$$

Levá strana výrazu (6.7) vyjadřuje rozdíl radiální složky geocentrického průvodiče buď *jedné* družice, prolétávající (v různých časových okamžicích) nad stejným místem zemského povrchu – ten je určitelný měřením z diferenciální altimetrie jako „single satellite crossover“, anebo ze dvou družic prolétávajících (v různých časových okamžicích) nad stejným místem zemského povrchu jako „dual satellite crossover“ (kap. D3.9).

V případě družicové altimetrie se ukazuje výhodné definovat tzv. „latitude lumped coefficients“  $C_m(\varphi)$  a  $S_m(\varphi)$  jako lineární kombinaci Stokesových parametrů daného řádu (odst. D2.3.3.2.1)

$$(6.8) \quad C_m = \sum_{l=m}^{l=\max} 2Q_{lm}^S C_{lm}, \quad S_m = - \sum_{l=m}^{l=\max} 2Q_{lm}^S S_{lm} \Rightarrow \Delta r_{12}(\varphi, \lambda) = \sum_{m=1}^{m=\max} (C_m \sin m\lambda + S_m \cos m\lambda),$$

kde  $Q_{lm}^S$  jsou „přenosové funkce“ mezi Stokesovými parametry a SSC, plynoucí z teorie *Rosborougha*.

Předpokládejme dále, že řešením úlohy *dynamické družicové geodézie* máme k dispozici soubor Stokesových parametrů a jejich kovarianční matici

$$(6.9) \quad \forall (C_{lm}, S_{lm}) \rightarrow \exists Cov(C_{lm}, S_{lm})$$

do určitého stupně a řádu  $l, m$ .

Z výrazů (6.4) až (6.9) již plynou možnosti **testování přesnosti modelů**. Aplikací metod teorie odhadu jsme pro všechny výše definované veličiny schopni na základě znalosti kovarianční matice modelu vypočítat standardní odchylky  $\sigma$  (konkrétně to zde nebudeme provádět). Dostáváme pak

$$(6.10) \quad \sigma_{r_{\text{geoid}}}, \sigma_{r_{\text{sat}}}, \sigma_{\Delta r_{12}}, \sigma_{C_m}, \sigma_{S_m}.$$

Tyto odchylky pak můžeme porovnat – a statisticky testovat – s nezávisle určenými veličinami přímo z některého typu pozorování. Tak například standardní odchylku v průvodiči geoidu, určenou „přenosem“ kovarianční matice modelu, můžeme porovnat s výškou geoidu určenou v testovaném bodě na oceánech pomocí altimetrických měření, na kontinentech pomocí GPS+nivelace. Standardní odchylku v geocentrickém průvodiči družice můžeme porovnat s hodnotou „vypočtená minus měřená“ např. z laserových či GPS pozorování příslušné družice atd.

F.J. Lerch (GSFC NASA, kolem r. 1990) vypracoval postup, který přímo porovnává koeficienty dvou modelů spolu s jejich chybami a vytváří tzv. kalibrační faktory. Z hlediska teorie odhadu jde v podstatě o testování nulové hypotézy. Mějme dva modely Země  $F$  a  $\bar{F}$  s parametry

$$(6.11) \quad F : C_{lm}, S_{lm}, \sigma \quad \text{a} \quad \bar{F} : \bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm}, \bar{\sigma},$$

kde  $\sigma$  vyjadřuje aposteriorní standardní odchylku Stokesových parametrů. Definujme dále veličiny

$$(6.12) \quad RMS_l(\Delta F) = \left[ \sum_{m=0}^l \frac{\Delta C_{lm}^2 + \Delta S_{lm}^2}{2l+1} \right]^{1/2}, \quad \sigma_l = \left[ \sum_{m=0}^l \frac{\sigma_{(C_{lm})}^2 + \sigma_{(S_{lm})}^2}{2l+1} \right]^{1/2},$$

kde  $\Delta C$  resp.  $\Delta S$  jsou rozdíly Stokesových parametrů jednotlivých modelů. Podobně

$$(6.13) \quad RMS_m(\Delta F) = \left[ \sum_{l=m}^{l_{\max}} \frac{\Delta C_{lm}^2 + \Delta S_{lm}^2}{\delta_m (l_{\max} - m + 1)} \right]^{1/2}, \quad \sigma_m = \left[ \sum_{l=m}^{l_{\max}} \frac{\sigma_{(C_{lm})}^2 + \sigma_{(S_{lm})}^2}{\delta_m (l_{\max} - m + 1)} \right]^{1/2},$$

$$\delta_m = 1 \text{ pro } m = 0; \quad \delta_m = 2 \text{ pro } m \neq 0.$$

V obou výrazech se ve jmenovateli objevují počty Stokesových parametrů, ve výrazu (6.12) jde o „spektrum“ podle jednotlivých stupňů, ve výrazu (6.13) podle jednotlivých řádů. Ze základů matematické statistiky plyne, že pro statisticky očekávanou průměrnou hodnotu  $e_l$  rozdílu koeficientů daného stupně  $l$  nebo  $e_m$  daného řádu  $m$  platí:

$$(6.14) \quad e_l^2 = E(RMS_l)^2 \quad \text{resp.} \quad e_m^2 = E(RMS_m)^2.$$

Pokud jsou modely  $F$  a  $\bar{F}$  datově zcela vzájemně nezávislé, platí

$$(6.15) \quad e_l^2 = \sigma_l^2 + \bar{\sigma}_l^2,$$

naopak, je-li model  $\bar{F}$  „podmnožinou“ modelu  $F$  (model  $F$  vznikl rozšířením modelu  $\bar{F}$  o další data), čili modely jsou vzájemně plně datově závislé, platí

$$(6.16) \quad e_l^2 = \bar{\sigma}_l^2 - \sigma_l^2.$$

Nyní již můžeme definovat kalibrační faktory  $k$ :

$$(6.17) \quad k_l = \frac{RMS_l}{e_l} \quad \text{pro stupeň } l \quad \text{a} \quad k_m = \frac{RMS_m}{e_m} \quad \text{pro řád } m .$$

Z výše uvedeného odvození je jasné, že pokud jsou chyby Stokesových koeficientů odhadnuty správně, mělo by být  $k = 1$ . Tato metodika tedy umožňuje hodnotit dva modely mezi sebou. Problém však nastává, pokud chceme získat objektivní kritéria pro jeden model. V tomto případě se postupuje tak, že se při zpracování vytvářejí „závislé podmodely“ např. vypouštěním některých typů pozorování. Tento postup (Lerchova statistika v případě závislých dat) však bývá kritizován, neboť může být ne příliš objektivní.

**Tabulka 6.2:** Soudobé modely gravitačního pole Země (stav v r. 2007)

instituce	název modelu	rok tvorby modelu	maximální $l, m$	data		
				družicová	pozemní $\Delta g$	$\Delta g$ přepočtené z altimetrie
GFZ a CNES	EIGEN 1S *	2002	99,99 <sup>&amp;</sup>	ano	ne	ne
GFZ a CNES	EIGEN 2 **	2003	120,120	ano	ne	ne
GFZ a CNES	EIGEN-GRACE02S/C ***	2004	150,150	ano	ne	ne
CSR Austin TX	GGM02 ***	2005	160,160	ano	ne	ne
Delft Univ.	DEOS-CHAMP01C**	2006	70,70	ano	ne	ne
GFZ a CNES	EIGEN-GL05S/C ****	2007	360,360	ano	ano	ne

EIGEN je akronym z *European Improved Gravity models of the Earth by New techniques*

\*) data z predchampovského jen družicového modelu GRIM 5S1 a laserová a mikrovlnná data z Champu, 3 měsíce

\*\*\*) výhradně data z družice CHAMP, 7 měsíců dat za interval 2000-2001

\*\*\*\*) výhradně data z družice GRACE

\*\*\*\*\*) kombinace dat z Champu a Graceu, Lageosu a tíhových anomálií se zemského povrchu (většinou  $0.5 \times 0.5^0$ ).

&) plus rezonační členy do vyšších  $(l, m)$

Další možností testování reálné přesnosti modelu gravitačního pole je určení kalibračního faktoru  $k^2$ , vyjadřujícího poměr reálné kovarianční matice vůči původní kovarianční matici

$$(6.18) \quad Cov(C_{lm}, S_{lm})_{real} = k^2 Cov(C_{lm}, S_{lm}).$$

Tento kalibrační faktor se pak získává nezávisle s využitím *standardních odchylek*, tedy s využitím výrazu (6.10). Tato metoda je hojně aplikována u modelů, vzniklých v německo – francouzské spolupráci (GFZ a CNES).

Výsledky testování přesnosti konkrétních modelů Země a jejich interpretaci nepovažujeme za důležitou uvádět v rámci skript, kde se zabýváme spíše metodologií.

## 7. Vybrané aplikace kosmické geodézie

V této kapitole se budeme věnovat některým aplikacím metod kosmické geodézie ve smyslu získání dalších „produktů“. Pokusíme se podat souhrn nejdůležitějších aplikací s případnými příslušnými odkazy na probranou látku.

Nejdůležitějšími výsledky jsou:

- **realizace nebeského souřadnicového systému (ICRS – International Celestial Reference System)** je výhradně předmětem technologie VLBI, kterou se určují souřadnice mimogalaktických objektů (převážně kvazarů), které definují systém
- **realizace globálního geocentrického systému (ITRS – International Terrestrial Reference System)** – tato záležitost je předmětem kap. 1, využívá se všech přesných metod kosmické geodézie, výsledků řešení dynamické úlohy družicové geodézie (kap. 5) a následného zpracování dílčích výsledků. Výsledkem je souřadnicový systém ITRS, jehož součástí je referenční rámec, který obsahuje prostorové souřadnice stanic a jejich časové změny
- **určení parametrů orientace Země (Earth Orientation Parameters - EOP)** – využívá se vztahu mezi inerciální soustavou (ICRS) a terestrickou soustavou (ITRS) – viz kap. 1. Tato věc je předmětem dynamické úlohy družicové geodézie (kap. 5) pro družicové metody a využitím vztahu mezi ICRF a ITRF v případě technologie VLBI.
- **určování parametrů gravitačního pole Země** je předmětem dynamické úlohy družicové geodézie (kap. 5). Jde o soubor Stokesových parametrů (harmonických koeficientů)  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  určených kombinací družicových, pozemních gravimetrických a altimetrických dat. Výsledkem jsou *modely geopotenciálu* jejichž globální výčet je v kapitole 6. V současné době se určují i časové variace gravitačního pole Země – sekulární na základě dlouhodobé analýzy drah geodynamických družic – časová změna parametru  $C_{2,0}$  charakterizujícího zemské zploštění je

$$\frac{dC_{2,0}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{5}} (-3.6 \pm 0.3) \times 10^{-9} [\text{století}]^{-1}.$$

Sezónní časové změny jsou určovány z družicových misí CHAMP a GRACE a projevují se ve variacích výšky geoidu (viz dále).

- **určování parametrů oceánských slapů a topografie oceánů** je předmětem úlohy dynamické družicové geodézie (kap. 5), kdy ovšem dostáváme pouze globální charakteristiky slapových parametrů a topografie oceánů, vyjádřených pomocí harmonických koeficientů do nízkých stupňů a řádů. Detailní strukturu získáme pouze pomocí metod družicové altimetrie.
- **určování detailní struktury gravitačního pole kombinací družicových a pozemních dat** je předmětem odstavce 7.1
- **určování průběhu plochy geoidu kombinací družicových a pozemních dat** je předmětem odstavce 7.2
- **aplikace dráhových rezonancí v geodézii a oceánografii** je předmětem odstavce 7.3.



## 7.1 Určování detailní struktury gravitačního pole kombinací družicových a pozemních dat

Družice, i ty na nejnižších drahách, jsou citlivé na poměrně nízký stupeň a řád rozvoje potenciálu do kulových funkcí. Proto se ve výsledných řešeních spojují (kombinují) družicová data s daty, získanými pozemním a námořním gravimetrickým měřením. Vyjděme z výrazu pro poruchový gravitační potenciál vnějšího gravitačního pole (2.3.2)

$$(7.1.1) \quad R_{ITRF}(r, \Phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{a_e}{r} \right)^l P_{lm}(\sin \Phi) (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda),$$

kde  $r, \phi, \lambda$  jsou sférické souřadnice,  $r$  je průvodič,  $\phi$  je geocentrická šířka (na rozdíl od elipsoidické),  $\lambda$  je (greenwichská) zeměpisná délka,  $a_e$  je v podstatě libovolný délkový faktor, zpravidla se za něj volí velká poloosa referenčního elipsoidu Země,  $C_{lm}, S_{lm}, l \in \langle 2, \infty \rangle, m \in \langle 0, l \rangle$ , jsou Stokesovy parametry a  $P_{lm}$  je Legendreova přidružená funkce.

Přepíšme (7.1.1) do zkráceného zápisu

$$(7.1.2) \quad R_{ITRF}(r, \Phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{a_e}{r} \right)^l \sum_{\alpha=0}^1 C_{lm}^{\alpha} Y_{lm}^{\alpha}(\Phi, \lambda),$$

kde

$$(7.1.3) \quad \begin{aligned} C_{lm}^{\alpha} &= \begin{cases} C_{lm} & \text{pro } \alpha = 0 \\ S_{lm} & \text{pro } \alpha = 1 \end{cases} \\ Y_{lm}^{\alpha} &= \begin{cases} P_{lm}(\sin \Phi) \cos m\lambda & \text{pro } \alpha = 0 \\ P_{lm}(\sin \Phi) \sin m\lambda & \text{pro } \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Z fyzikální geodézie je znám výraz pro tíhovou anomálii

$$(7.1.4) \quad \Delta g = g_P - \gamma_Q,$$

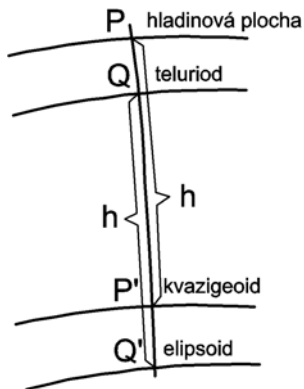
kde  $g_P$  je tíže v bodě  $P$  na zemském povrchu a  $\gamma_Q$  je normální tíže v odpovídajícím bodě  $Q$  na telluriodu - viz obr. 7.1. Podle *Brunsova teorému* platí

$$(7.1.5) \quad \Delta g = -\frac{\partial R_{ITRF}}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial R_{ITRF}}{\partial h} R_{ITRF},$$

kde  $h$  měříme ve směru tížnice. Dosadíme-li z (7.1.2) do (7.1.5), dostáváme (když ještě derivaci ve směru  $h$  položíme za identickou derivaci ve směru  $r$ ):

$$(7.1.6) \quad \Delta g = \frac{GM}{r^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l (l-1) \left( \frac{a_e}{r} \right)^l \sum_{\alpha=0}^1 (C_{lm}^{\alpha} - C_{lm}^{\alpha, h} - C_{lm}^{\alpha, \gamma}) Y_{lm}^{\alpha}(\Phi, \lambda),$$

kde  $C_{lm}^{\alpha,h}, C_{lm}^{\alpha,\gamma}$  jsou Moloděnského elipsoidální korekce (Brunsova a Stokesova teorie platí na kouli a my pracujeme na náhradním elipsoidu).



Když se nám podaří redukovat  $\Delta g$  na plochu elipsoidu a zavedeme-li ještě

$$(7.1.7) \quad C_{lm}^{\alpha,0} = C_{lm}^{\alpha} - C_{lm}^{\alpha,h} - C_{lm}^{\alpha,\gamma}$$

můžeme na základě definice kulových funkcí psát

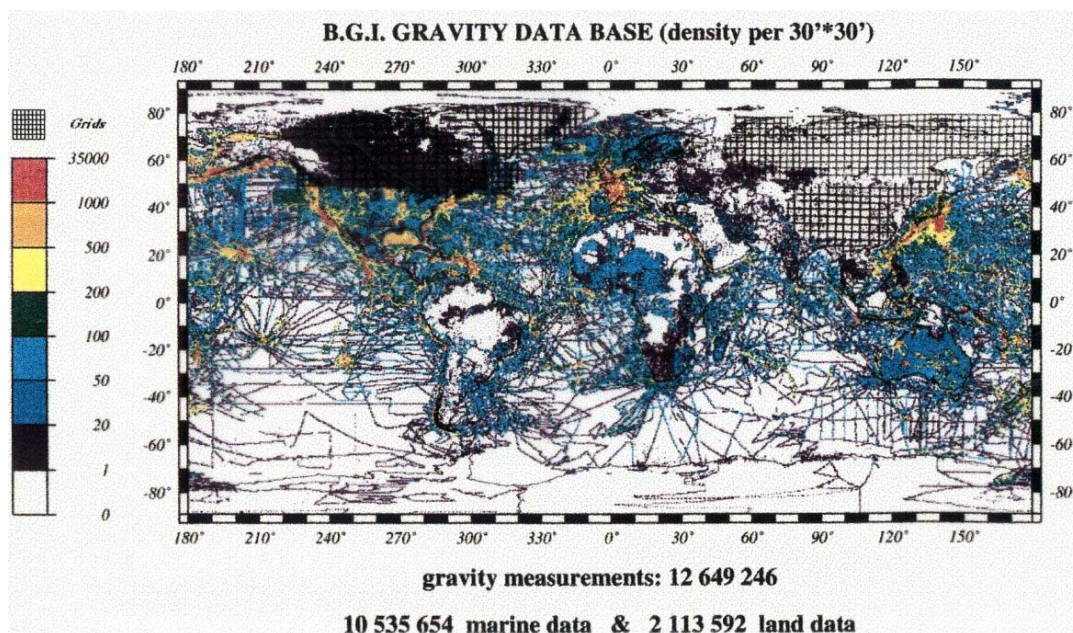
$$(7.1.8) \quad C_{lm}^{\alpha,0} = \frac{a^2}{GM(l-1)4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g_e Y_{lm}^{\alpha}(\Phi, \lambda) d\sigma,$$

Obrázek 7.1

kde  $\sigma$  je povrch Země a  $\Delta g_e$  jsou tíhové anomálie, redukované na plochu elipsoidu. V reálném případě však  $\Delta g_e$  nemáme k dispozici jako spojitou funkci, zpravidla je známa vystředěná hodnota v geografickém „gridu“ ( $5^\circ \times 5^\circ$ , nebo  $1^\circ \times 1^\circ$ , nebo ještě menším). Pak musíme integrál (7.1.8) nahradit sumací

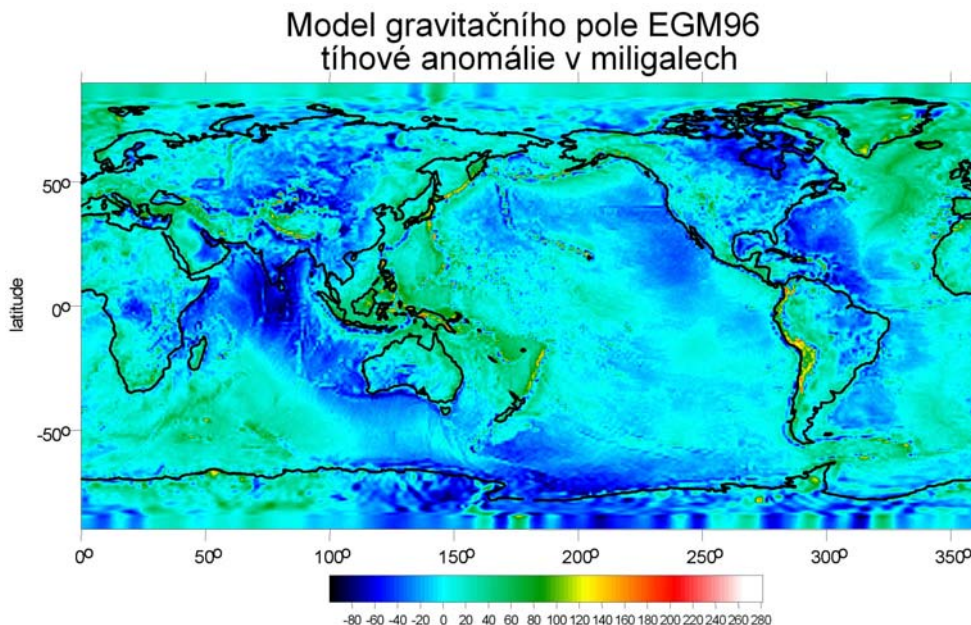
$$(7.1.9) \quad C_{lm}^{\alpha,0} = \frac{a^2}{GM(l-1)4\pi} \sum_{i,j} \Delta g_{e,i,j} Y_{lm}^{\alpha}|_{i,j},$$

kde  $Y_{lm}^{\alpha}|_{i,j}$  je střední hodnota  $Y_{lm}^{\alpha}(\Phi, \lambda)$  pro příslušný grid. Získání pozemních dat je poměrně obtížná úloha, zvláště v oblastech moří a oceánů, kde provádění gravimetrických měření je nákladné a zdlouhavé. Na obrázku 7.2 je znázorněn obsah dat, který byl/je k dispozici v mezinárodním gravimetrickém byru (B.G. I. – Bureau Gravimetrique Internationale).



Obrázek. 7.2: Databáze tíhových dat Mezinárodního gravimetrického byra

Využití pozemních, resp. altimetrických dat umožňuje určovat Stokesovy parametry do vysokých stupňů a řádů. V současné době je reprezentativním kombinovaným modelem EGM96 (do  $l, m = 360$ ) – (viz kap. 6 a obrázek 6.1), připravuje se model EGM08 do  $l, m = 2160$ .



**Obrázek 7.3:** Gravitační anomálie modelu EGM96 – příklad kombinace družicových a pozemních dat

## 7.2 Určení průběhu plochy globálního geoidu

Globálním geoidem zde budeme rozumět plochu geoidu, reprezentující geoid na celém povrchu Země, který je dán souborem Stokesových parametrů do jistého konečného stupně  $l_{max}$  a řádu  $m_{max}$  a je tedy do jisté míry „vyhlazený“.

Vyjdeme z výrazu pro gravitační potenciál  $V$

$$(7.2.1) \quad \begin{aligned} V(r, \Phi, \lambda) &= \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{a_e}{r} \right)^l P_{lm}(\sin \Phi) (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) \right] = \\ &= \frac{GM}{r} f(r, \Phi, \lambda). \end{aligned}$$

Geoid je definován jako hladinová plocha konstantního **tíhového potenciálu**  $W$

$$(7.2.2) \quad W = V + Q,$$

kde  $Q$  je potenciál odstředivé síly

$$(7.2.3) \quad Q = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \Phi = Q(r, \Phi),$$

$\omega$  je zde rychlost rotace Země. Dosadíme-li do výrazu (7.2.2) můžeme formálně zapsat

$$(7.2.4) \quad W = \frac{GM}{r} [f(r, \Phi, \lambda)].$$

Geoid je plochou konstantního potenciálu, označme ho  $W_{geoid}$ . Pak lze (7.2.4) analogicky přepsat na tvar

$$(7.2.5) \quad W_{geoid} = \frac{GM}{r_{geoid}} [f(r_{geoid}, \Phi, \lambda)].$$

Pro jeho průvodič pak z (7.2.5) platí

$$(7.2.6) \quad r_{geoid} = \frac{GM}{W_{geoid}} [f(r_{geoid}, \Phi, \lambda)].$$

Z výrazu pro průvodič je okamžitě vidět, že při známém  $W_{geoid}$  je nutné určovat  $r_{geoid}$  iteračním postupem.

Hodnotu  $W_{geoid}$  bychom do jisté míry mohli volit libovolně, pokud však chceme vyhovět tradiční definici, že geoid je hladinová plocha, která na oceánech splývá s volnou hladinou (zbavenou SST – topografie oceánů a slapů), je možné určovat  $W_{geoid}$  v rámci určování tzv. **délkového rozměrového faktoru  $R_0$** .

Označme

$$(7.2.7) \quad R_0 = \frac{GM}{W_{geoid}}.$$

Z definice je hned patrné, že  $R_0$  reprezentuje poloměr koule o potenciálu  $W_{geoid}$ . Výraz (7.2.6) je pak možné přepsat na tvar

$$(7.2.8) \quad r_{geoid} = R_0 [f(r_{geoid}, \Phi, \lambda)]$$

a z toho

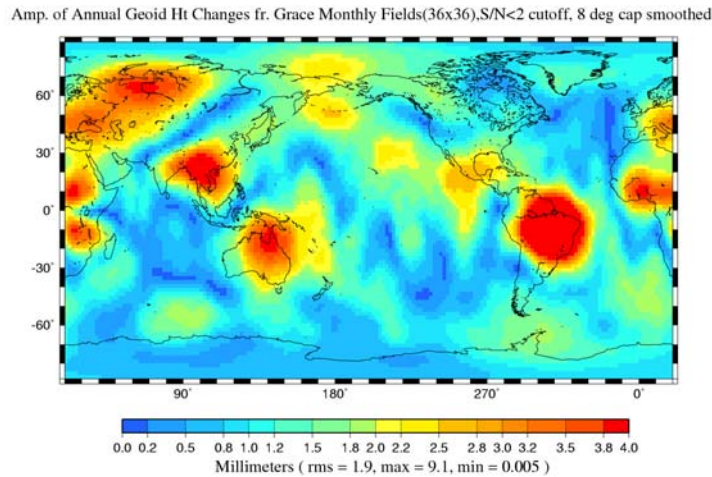
$$(7.2.9) \quad R_0 = r_{geoid} [f(r_{geoid}, \Phi, \lambda)]^{-1}.$$

Pokud se nám např. z družicové altimetrie, nebo pomocí GPS, podaří „zmapovat“ průběh střední hladiny moří a oceánů, tedy vlastně zmapovat  $r_{geoid}$ , můžeme určit délkový rozměrový faktor  $R_0$  a z něj pomocí (7.2.7) ihned plyne  $W_{geoid}$ .

Současná hodnota tíhového potenciálu globálního geoidu je:

$$W_{geoid} = 62\,636\,856.0 \pm 0.5 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

Ukázka průběhu plochy globálního geoidu EGM96 je v odstavci 6.3. Díky novým geodetickým družicovým misím je však možné vytvářet modely globálního geoidu v krátkých časových intervalech (měsíční řešení). Z něj je pak možné konstruovat časový průběh změn plochy geoidu, vyvolaný převážně hydrologickými efekty. Na obrázku 7.4 jsou znázorněny amplitudy ročních změn výšky geoidu způsobené tropickými dešti (Amazonka, Indie, rovníková Afrika, severní Austrálie), resp. změnou sněhové pokrývky (Sibiř).



**Obrázek 7.4:** Amplitudy ročních změn průběhu geoidu (autor C.A. Wagner, NOAA)

### **7.3 Aplikace dráhových rezonancí UDZ v geodézii a oceánografii**

#### **7.3.1 Pohybové rovnice pro rezonanční případ a lumped koeficienty**

Z výkladu kap. 2.3.3 resp D2.3.3 je zřejmé, že rezonančního jevu ve drahách UDZ lze využít k určení některých harmonických geopotenciálních koeficientů  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ , které „nějakým způsobem“ odpovídají konkrétnímu ‘rezonančnímu stavu  $\beta / \alpha$ ’. Zde postup výpočtu naznačíme. Pro analýzu rezonančních jevů v drahách blízkých UDZ zvolíme sklon  $I$  roviny dráhy družice k rovině zemského rovníku, neboť  $I$  je obvykle jen málo (na rozdíl od rychle proměnných elementů  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $M$ ) ovlivňován nerezonančními poruchami dráhy.

Lagrangeovy pohybové planetární rovnice (LPR) pro sklon dráhy  $I$ , rušený statickým gravitačním polem Země, tj. i „všemi“  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ , lze napsat i takto (Allan 1971, 1973)

$$(7.3.1) \quad \frac{dI}{dt} = n(1 - e^2)^{-1/2} \cdot \sum^L_{lmpq} J_{lm} (a_0/a)^l \cdot \Re \{ F_{lmp}(I) \cdot G_{lpq}(e) \cdot j[(l-2p) \cotg I - m \operatorname{cosec} I] \exp(j\psi_{lmpq}) \},$$

kde  $J_{lm}$  je amplituda harmonických geopotenciálních koeficientů  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ . Dále je  $L$  maximální stupeň teoreticky nekonečné sumace přes indexy  $(l, m, p, q)$ ,  $a_0$  hlavní poloosa referenčního elipsoidu nahrazujícího tvar Země,  $a$  hlavní poloosa dráhové elipsy,  $F_{lmp}(I)$  a  $G_{lpq}(e)$  jsou funkce sklonu a excentricity dráhy (zde nenormované stejně jako  $J_{lm}$ ), symbol  $\Re\{.\}$  značí reálnou část následujícího výrazu  $\{.\}$  a  $j$  je imaginární jednotka. Připomeňme ještě proměnnou  $\psi_{lmpq}$  (2.3.8), rezonanční úhel  $\Phi_{\alpha, \beta}$  (2.3.3.5) a rezonanční indexy (2.3.3.6).

Použijeme-li indexy (2.3.3.6) na „nerezonanční“ LPR (7.3.1), můžeme odvodit tento „rezonanční“ zápis LPR



$$(7.3.2) \quad dI / dt_{(\beta/\alpha)} = \sum_{\gamma}^{\infty} f_{\gamma} \left\{ \left[ {}^I C_{\beta\gamma}^{0,\alpha\gamma}(a, I) \sin \gamma \Phi_{\alpha,\beta} - {}^I S_{\beta\gamma}^{0,\alpha\gamma}(a, I) \cos \gamma \Phi_{\alpha,\beta} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} e \left[ {}^I C_{\beta\gamma}^{\pm 1, \alpha\gamma \mp 1}(a, I) \sin(\gamma \Phi_{\alpha,\beta} \mp \omega) - {}^I S_{\beta\gamma}^{\pm 1, \alpha\gamma \mp 1}(a, I) \cos(\gamma \Phi_{\alpha,\beta} \mp \omega) \right] \right\} + O(e^2),$$

kde  ${}^I f_{\gamma} = n[(\alpha\gamma - q) \cos I - \beta\gamma] \operatorname{cosec} I.$

Nové koeficienty  $\{C, S\}_{\beta,\alpha}^{\gamma,q}$  jsou lineárními kombinacemi harmonických  $C_{lm}, S_{lm}$  pro rezonanční výběr pro daný řád  $\beta$ , danou „repeat periodu“  $\alpha$ , zvolenou rezonanční úroveň  $\gamma$  (1, 2, ...) a index  $q$  (0,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ , ...). Nazývají se *lumped coefficients* (vázané či souhrnné koeficienty, „lumped koeficienty“). V nich se kombinují či kumulují  $C_{lm}, S_{lm}$  téhož řádu a téže parity stupně  $l$  (buď sudé nebo liché), ale různých stupňů, v teoreticky nekonečné sumaci. Jejich hodnoty závisejí na sklonu a na hlavní poloose dráhy.

*Definice lumped koeficientů – příklad pro hlavní členy na kruhové dráze:*

pro  $q = 0$ , t.j.  $\{C, S(a, I)\}_{\beta\gamma}^{0,\alpha\gamma}$  :

$$(7.3.3) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon^l C(a, I) - \delta^l S(a, I) \\ \delta^l C(a, I) + \varepsilon^l S(a, I) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{li} F_{li, \beta\gamma, pi}(I) \cdot \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix}_{li, \beta\gamma} = \\ = \sum_{i=0}^{\infty} Q_{li, \beta\gamma}^{0,\alpha\gamma}(a, I) \cdot \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix}_{li, \beta\gamma}$$

$$\begin{aligned} \delta &= 0 \text{ pro } (\beta - \alpha)\gamma + q \text{ sudé} \\ \delta &= 1 \text{ pro } (\beta - \alpha)\gamma + q \text{ liché, } \varepsilon = 1 - \delta. \end{aligned}$$

$Q(I, a)$  jsou tzv. funkce vlivu (influence functions).

Příklad: pro rezonanci 15/1, základní členy pro  $q = 0$  a  $\gamma = 1$  platí

$$C_{15}^{0,1} = \left[ F_{15,15,7} C_{15,15} - (a_0/a)^2 F_{17,15,8} C_{17,15} + (a_0/a)^4 F_{19,15,9} C_{19,15} \mp \dots \right].$$

### **7.3.2. Rezonance UDZ a parametry gravitačního pole Země**

Pionýrské práce ve studiu rezonančních jevů ve drahách UDZ pocházejí z Anglie a USA (kolem r. 1970). Na obr. 2.3.3.3 v Dodatku 2.3.3 ukazujeme analýzu chodu sklonu dráhy družice Ariel 3 kolem rezonance 15/1. Ze své počáteční dráhy se družice díky kontrakci hlavní poloosy dráhy odporem atmosféry přiblížila k exaktní rezonanci 15/1 a dráhové poruchy měly stále větší amplitudu a delší periodu. Pak došlo k průchodu exaktní rezonancí. Kdyby nebylo atmosféry ani dalších „zdrojů“ poruch dráhy, rezonance by trvala navěky. Díky atmosféře dráha stále klesala a poruchy měly menší amplitudu a kratší periodu – situace byla „zrcadlová“ k situaci před exaktní rezonancí.

Rozborem sklonu kolem rezonance lze pak určit lumped koeficienty. Změna sklonu, přepočtená na délkovou jednotku ve dráze družice, bývá stovky metrů i několik kilometrů a pak lze určit lumped koeficienty dosti přesně i z méně přesně známé dráhy. Od začátku prací Goodinga, Allana, resp. King-Heleho skupiny ve Farnborough v UK uplynulo již 40 let a byla

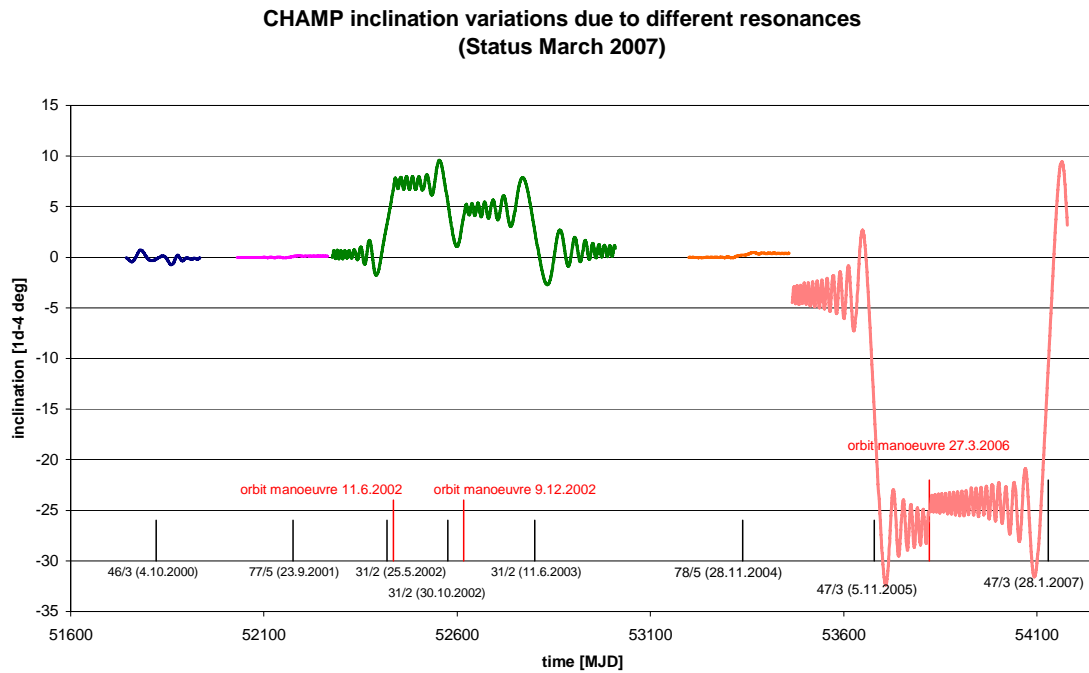
nashromážděna celá řada lumped koeficientů různých řádů, hlavně 15tého a 14tého. Práce pocházejí z bývalé SRN, Francie, USA a bývalé ČSSR. Tyto výsledky bylo možno implementovat do modelů gravitačního pole Země nebo použít k testu jejich přesnosti.

Lumped koeficienty pro určitý řád  $m$  lze považovat za mezistupeň k výpočtu geopotenciálních harmonických koeficientů dotyčného řádu. Musíme mít dostatek analýz drah různých sklonů, abychom je mohli zkombinovat. Použita může být klasická MNČ i zobecněná metoda nejmenších čtverců, LSC (Least Squares Collocation), kolokace.

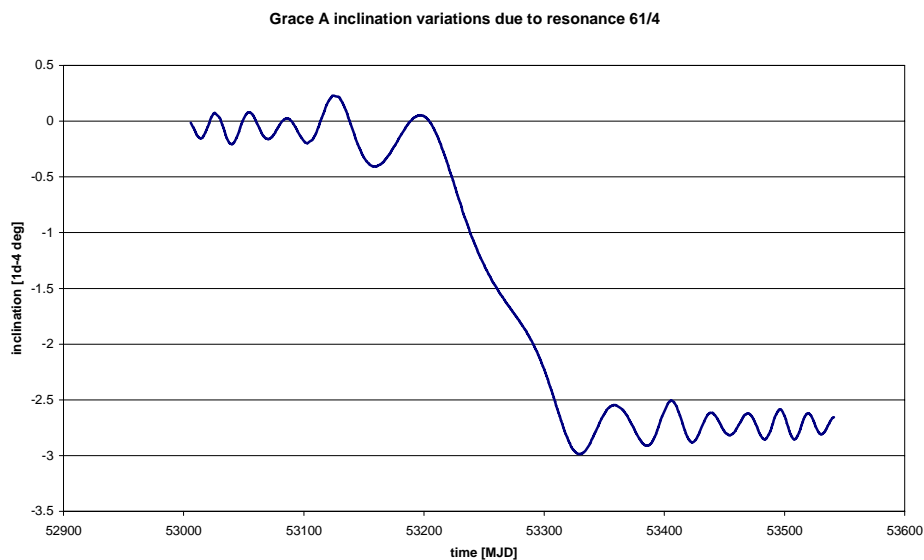
Lumped koeficienty lze, v případě nezávislosti na modelu Země, použít k testu přesnosti a kvality jeho harmonických koeficientů příslušného řádu. Mějme lumped koeficienty pro dané  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  a  $q$  a sklon  $I$ , které jsou určeny k rozboru rezonančního jevu; nazvěme je „pozorované“. Nechť jsou díky dlouhodobému působení rezonančních poruch na kruhové a přesně určené dráze „velmi přesné“ (s formálními středními chybami o řád menšími než mají harmonické koeficienty stejných  $(l, m)$  v nějakém modelu gravitačního pole Země). Můžeme spočítat – pro stejné  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $q$  a nejrůznější  $I$  – hodnoty z příslušných  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  tohoto modelu Země; označme je jako „vypočtené“. Pak již zbývá jen „pozorované“ a „vypočtené“ lumped koeficienty porovnat a při dodržení uvedených podmínek takto *testovat model Země pro dotyčný řád* (souhrnně pro stupně dané parity od  $l = m + \delta$ , až k nějakému maximálnímu stupni  $L$ , kde šum dat už převyšuje signál).

Objev existence rezonančních jevů ve drahách umělých družic Země byl důležitou událostí pro nebeskou mechaniku, která do té doby studovala dráhové a rotační rezonance přirozených těles naší Sluneční soustavy popř. analogické jevy v galaxiích. Určení lineárních kombinací harmonických geopotenciálních koeficientů zemského gravitačního pole, tzv. lumped koeficientů, z rezonancí UDZ a následné odhady číselných hodnot samotných geopotenciálních koeficientů „kombinováním“ lumped koeficientů z drah různých sklonů znamenalo revoluci v ověřování přesnosti tehdejších modelů gravitačního pole Země a jejich následné zpřesnění (pro vybrané „rezonanční“ řády).

Rezonance UDZ sehrály zajímavou a podstatnou roli ve studiu gravitačního pole naší planety. Jen nedostatek patřičných dat (dráhových parametrů pro nejrůznější rezonanční dráhy, které u mnoha aplikovaných a komerčních družic nevyhovují přesností pro vědecké účely) byl a je překážkou pro další rozšíření této metody. Objevily se a objevují pokusy zpřesnit geopotenciální koeficienty nízkých stupňů a řádů rozbořením geostacionárních drah (rezonance 1/1) a drah družic NAVSTAR GPS a GLONASS (2/1). V posledních letech po vypuštění družic CHAMP (2000) a GRACE A/B (2002) nastal určitý „comeback“ rezonančních analýz. Dráhy zmíněných družic určených pro studium gravitačního pole Země a jeho časových variací jsou ultrapřesné – na úrovni decimetru ve vektorech stavu v každém okamžiku. Nic tak přesného předtím k dispozici nebylo (snad s výjimkou drah geodynamických družic určovaných prostřednictvím SLR). Z rozboru sklonu dráhy družice CHAMP byly nejprve určeny lumped koeficienty z rezonance 46/3 (Gooding et al, 2003) a poté - díky dráhovým manévřům zvyšujícím hlavní poloosu dráhy s cílem prodloužení aktivní služby družice CHAMP - došlo k opakování exaktních rezonancí 31/2 a 47/3 (obr. 7.5) a k následným analýzám (např. Gooding et al, 2007). U družice GRACE byla nejvýznamnější rezonance 61/4 (chod sklonu ukazuje obr. 7.6).



**Obrázek 7.5:** Vývoj sklonu dráhy družice CHAMP od jejího vypuštění v létě r. 2000 do jara 2007. Dráha družice postupně prošla těmito rezonancemi nízkých řádů: 46/3, 31/2 (tříkrát díky dvojitmu „zvednutí“ dráhy o 20km v poloose) a 47/3 (dvakrát díky třetímu a poslednímu dráhovému manévru). Analýza sklonu dala lumped koeficienty příslušných řádů (někdy i pro  $\gamma=2$ ) s velkou přesností. Lumped koeficienty z uvedených rezonancí mohou kalibrovat harmonické geopotenciální koeficienty příslušných řádů v modelech gravitačního pole Země před zahrnutím dat z družice CHAMP. Porovnání s hodnotami lumped koeficientů spočtenými z hodnot harmonických koeficientů nejnovějších modelů, využívajících dat z misí CHAMP a GRACE, vykazuje dobrou shodu.



**Obrázek 7.6:** Variace sklonu dráhy družice GRACE A v okolí exaktní rezonance 61/4 ( $k$  té došlo v září r. 2004). Dráha je určena s přesností decimetrovou, variace sklonu jsou řádově stometrové, takže lze vypočítat přesné hodnoty lumped koeficientů 61ho řádu.



### 7.3.3. Rezonanční dráhy pro oceánografii

Z rezonanční podmínky (2.3.3.1) lze odvodit

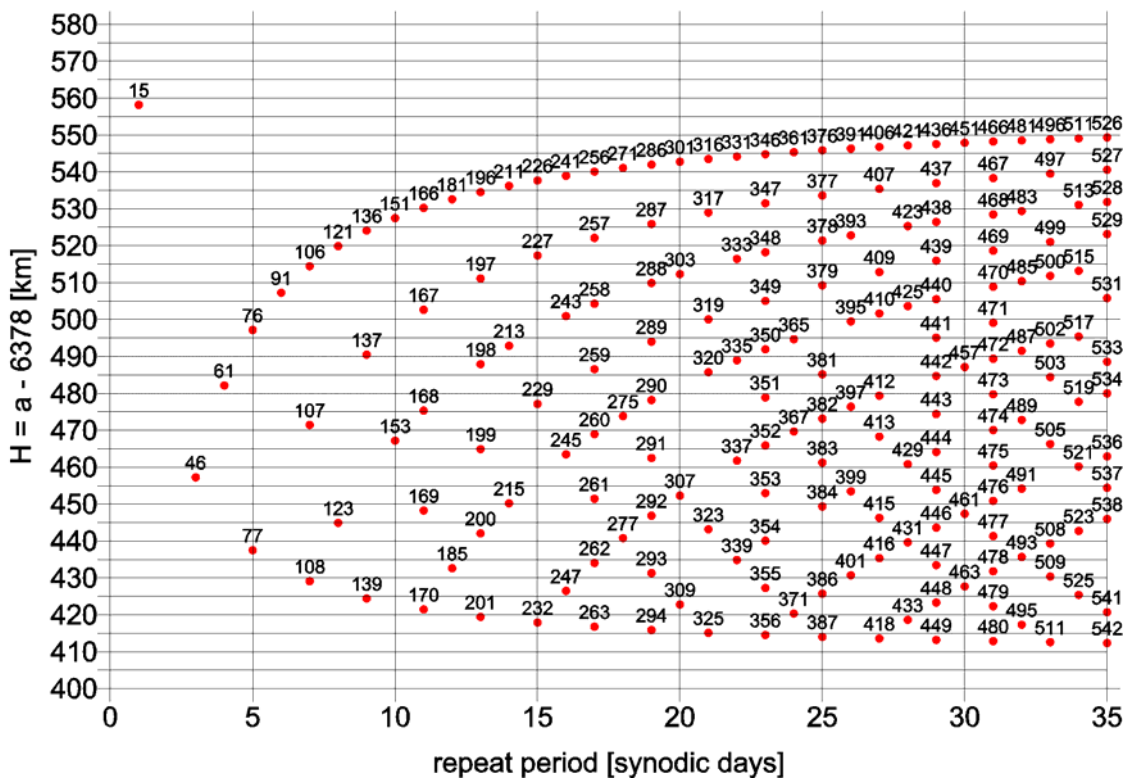
$$n = \frac{\beta}{\alpha} (\dot{S} - \dot{\Omega}) - \dot{\omega} - \dot{M}_0.$$

S uvážením LPR pro změny  $\omega$ ,  $\Omega$  a  $M$  vlivem  $C_{2,0}$  dostaneme

$$(7.3.4) \quad n = \frac{\beta}{\alpha} n_0 \left\{ 1 - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R}{a} \right)^2 \left[ 4 \cos^2 I - \frac{\beta}{\alpha} \cos I - 1 \right] \right\}.$$

kde v korekčním členu předpokládáme  $\frac{\beta}{\alpha} n_0 = n$ ,  $J_2$  je alternativní zápis pro  $C_{20}$  a platí  $J_2 = -C_{20} \cdot \sqrt{5}$ .

K tomuto  $n$  lze spočít určitou střední hlavní poloosu dráhy  $a$ , resp. výšku letu družice nad zemským povrchem (zde je  $R$  poloměr Země). Zde jsme rovnici (7.3.4) využili k vyhotovení obr. 7.7.



**Obrázek 7.7:** Rezonance ve dráze družic GRACE A/B od jejich vypuštění až do konce aktivního života. Na x-ové ose je  $\alpha$ , na y-ové výška letu. V poli obrázku jsou čísla – to jsou hodnoty  $\beta$ . Zatím nejvýznačnější rezonancí byla 61/4, v r. 2007 se očekává 107/7 a později, v závislosti na vývoji slunečního cyklu i 46/3. Teoreticky existuje v každém okamžiku nějaká rezonance - třeba velmi vysokého řádu, ale její dráhový efekt je neměřitelně malý.

Dráha, která se vůči pozemskému „pozorovateli“ či místu na moři zopakuje například za  $\alpha = 3, 35$  nebo 127 dnů (a tento stav trvá dostatečně dlouho), je zajímavá pro studium topografie oceánů a mořských proudů a podobných jevů. Oceánografové nazývají takové dráhy „repeat orbits“ či ERM (Exact Repeat Mission) a hodnotu  $\alpha$  nazývají „repeat period“. Jsou voleny u altimetrických družic Geosat, ERS 1, 2, TOPEX/Poseidon, ENVISAT, JASON a plánují se pro další mise. ERM se kombinují s „volnými drahami“ (s velkým  $\alpha$ ) pro geodetické účely (GM, Geodetic Mission) jako je studium gravitačního pole Země, detailního průběhu oceánského geoidu a topografie moří z altimetrie. S jednou družicí lze provést „malý“ přesun ve dráze změnou hlavní poloosy a přejít z jedné rezonance do některé okolní. S jednou družicí tak lze tzv. *jemným doladováním dráhy* (orbit dossier, orbit tuning) vyhovět různorodým – a někdy kontroverzním – požadavkům různých uživatelů.

## 8. Mezinárodní služba rotace Země a souřadnicových systémů IERS

Vzhledem k tomu, že metody kosmické geodézie pracují v globálním celosvětovém rozsahu, ukázala se nutnost koordinace prací, za účelem dosažení optimálních výsledků. Na základě doporučení Mezinárodní astronomické unie (IAU) a Mezinárodní unie geodetické a geofyzikální (IUGG) byla v roce 1988 založena Mezinárodní služba rotace Země (International Earth Rotation Service – IERS) jako následník a pokračovatel Mezinárodní časové služby (Bureau International de l'Heure – BIH – viz skripta GA10, kap. 5). Služba sídlila v Paříži (Francie), později se přemístila do Frankfurtu nad Mohanem (SRN). V roce 2005 byla tato služba přejmenována na Mezinárodní službu rotace Země a souřadnicových systémů (International Earth Rotation and Coordinate Systems Service), původní zkratka IERS však zůstala zachována.

Účelem IERS je koordinovat práce související s využitím výsledků pozorovacích technik kosmické geodézie v celosvětovém rozsahu za účelem tvorby souřadnicových systému ICRS a ITRS a monitorování parametrů orientace Země (EOP). IERS tak obsahuje:

- Technique Centres – technická centra
- Product Centres – centra, která zpracovávají data a produkují výsledky
- Combination Research Centres – centra, která kombinují výsledky „Product Centres“ a vytvářejí finální řešení
- Analysis Coordinator – koordinátora, který koordinuje práci analytických center
- Central Bureau – řídicí výbor
- Directing Board – radu, která řídí práci služby

### **8.1 Technique Centres**

Technická centra jsou v podstatě na IERS nezávislé instituce, které koordinují práci služeb zaměřených na jednotlivé pozorovací techniky. Konkrétně to jsou:

- International GPS Service (IGS) – služba, která koordinuje celosvětově pozorování technologií globálních navigačních družicových systémů GNSS, pozorování z vybraných permanentních stanic (v ČR je takovou stanicí stanice GOPE na Geodetické observatoři Pecný v Ondřejově u Prahy)
- International Laser Ranging Service (SLR) – služba, která koordinuje laserové pozorování družic
- International VLBI Service (IVS) – služba, která koordinuje využití pozorování mimogalaktických objektů prováděná pro geodetické účely pomocí interferometrie z dlouhých základen (Very Long Baseline Interferometry)
- International DORIS Service (IDS) – služba, která koordinuje pozorování vybraných družic pomocí dopplerovské technologie DORIS

### **8.2 Product Centres**

Jde o centra, která produkují výsledky zpracování pozorování, provedená jednotlivými technikami kosmické geodézie. Jsou to:

- Earth Orientation Centre – centrum, produkující parametry orientace Země (EOP) – nutační parametry, rozdíl rotačního a koordinovaného času  $DUT1 = UT1 - UTC$ , a

souřadnice polohy rotačního pólu Země vůči konvenčnímu počátku souřadnicové soustavy

- Rapid Service/Prediction Centre – jde o tzv. rychlou službu, která vydává předpovědi EOP pro účely okamžitého využití, vzhledem k tomu, že finální výsledky jsou předmětem časově náročného zpracování a jsou publikovány s časovým odstupem
- Convention Centre – centrum, které se zabývá tvorbou závazných konvencí – definicí závazných konstant (např. gravitační konstanta, rychlost světla, precesní konstanta, relativistické konstanty, atp.) a definicí závazných zpracovatelských postupů (autorizuje např. software pro výpočet nutace, výpočet slapových variací stanic atp.)
- ICRS Centre – centrum, které se zabývá tvorbou, udržováním a zpřesňováním Mezinárodního nebeského systému (International Celestial Reference System) ICRS
- ITRS Centre – centrum, které se zabývá tvorbou, udržováním a zpřesňováním Mezinárodního terestrického systému (International Terrestrial Reference System) ICRS
- Global Geophysical Fluids Centre – centrum, které se zabývá určováním parametrů geofyzikálních jevů, které ovlivňují hodnotu parametrů orientace Země (EOP), gravitačního pole a souřadnic stanic. Jsou to centra pro:
  - atmosféru
  - oceány
  - slapy
  - hydrologii
  - zemský plášť
  - zemské jádro
  - gravitaci a změnu těžiště Země
  - efekty, související se změnou zatížení zemského povrchu a oceánského dna

### **8.3 Analysis coordinator, Central Bureau a Directing Board**

Analysis coordinator koordinuje práci analytických center a je zodpovědný za dlouhodobou vnitřní konzistenci produkovaných výsledků.

Centrální byro – řídicí výbor je zodpovědný za řízení IERS

Directing board – řídicí rada vykonává dohled nad všemi aktivitami všech služeb a navrhuje změny struktury služby podle okamžitých vědeckých potřeb

### **8.4 Hlavní produkty služby**

Hlavními výsledky služby jsou:

- definice a realizace Mezinárodního nebeského referenčního systému (International Celestial Reference System – ICRS)
- definice a realizace Mezinárodního terestrického referenčního systému (International Terrestrial Reference System – ITRS)
- definice a realizace vzájemného vztahu mezi ICRS a ITRS, který je realizován pomocí parametrů orientace Země (Earth Orientation Parameters – EOP)

Dalšími důležitými výsledky jsou též produkty Global Geophysical Fluid Centres, vzhledem k tomu, že při zpracování pozorování technik kosmické geodézie je možné některé veličiny určovat (např. parametry, charakterizující stav troposféry a ionosféry při zpracování pozorování GNSS a VLBI apod.).



platí (bez odvození) s využitím obrázku D2.3.1, pro speciální případ, kdy  $\bar{\delta} = 0$ ,  $\bar{\Lambda} = \nu$  ( $\nu$  je pravá anomálie) a Eulerovy transformační úhly mezi oběma soustavami jsou (viz např. Keplerovský pohyb z GA12)

- $\Omega - S$  ... rektascenze výstupního uzlu minus Greenwichský hvězdný čas
- $\omega$  ... argument perigea
- $i$  ... sklon roviny dráhy družice vůči rovině rovníku

vztah

$$(D2.3.3) \quad P_m(\sin \delta) \exp(jk\Lambda) = \sum_{p=0}^l j^{(l-m)} F_{lmp}(i) \exp j[(l-2p)(\omega + \nu) + m(\Omega - S)].$$

Zde je  $F_{lmp}(i)$  tak zvaná **normovaná funkce sklonu**, jejíž první členy pro  $l = 2$  jsou uvedeny v tabulce D2.3.1 a rekurentní vzorce pro její výpočet jsou – viz Burša et al., 1993

$$(D2.3.4) \quad \begin{aligned} 2pF'_{lmp} &= s^2(l+m)^{1/2}(l+m-1)^{1/2}F'_{l-1,m-1,p-1} + \\ &+ 2cs(l+m)^{1/2}(l-m)^{1/2}F'_{l-1,m,p-1} + c^2(l-m)^{1/2}(l-m-1)^{1/2}F'_{l-1,m+1,p-1}, \\ 2(l-p)F'_{lmp} &= c^2(l+m)^{1/2}(l+m-1)^{1/2}F'_{l-1,m-1,p} + \\ &+ 2cs(l+m)^{1/2}(l-m)^{1/2}F'_{l-1,m,p} + s^2(l-m)^{1/2}(l-m-1)^{1/2}F'_{l-1,m+1,p} \end{aligned}$$

a

$$(D2.3.5) \quad F_{lmp}(i) = (2 - \delta_k^0)(2l+1)^{1/2} F'_{lmp},$$

kde  $c = \cos(i/2)$ ,  $s = \sin(i/2)$  a  $\delta_k^0$  je Kroneckerovo delta. (Zde  $F'_{lmp}$  neznámá  $dF/di$ ). Pro dosažení do Lagrangeových planetárních rovnic jsou ještě potřebné derivace podle  $i$ , ty je možné jednoduše spočítat derivováním (D2.3.4) a (D2.3.5).

**Tabulka D2.3.1:** Normované funkce sklonu

$l \ m \ p$	$F_{lmp}(i)$
2 0 0	$\left(\frac{3}{8}\sin^2 i\right)\sqrt{5}$
2 0 1	$\left(-\frac{3}{4}\sin^2 i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{5}$
2 0 2	$\left(\frac{3}{8}\sin^2 i\right)\sqrt{5}$
2 1 0	$\left[\frac{3}{4}\sin i(1 + \cos i)\right](-\sqrt{5/3})$
2 1 1	$\left[\frac{3}{2}\sin i \cos i\right](\sqrt{5/3})$

2 1 2	$\left[ \frac{3}{4} \sin i (1 - \cos i) \right] (\sqrt{5/3})$
2 2 0	$\left[ \frac{3}{4} (1 + \cos i)^2 \right] (\sqrt{5/12})$
2 2 1	$\left( \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \sqrt{5/12}$
2 2 2	$\left[ \frac{3}{4} (1 - \cos i)^2 \right] (\sqrt{5/12})$

Pomocí (D2.3.4) přepíšeme (D2.3.3) na tvar

(D2.3.6)

$$R_{ICRF}(r, \delta, \alpha) = \operatorname{Re} \frac{GM}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{a_e}{r} \right)^l \bar{C}_{lm} \sum_{p=0}^l j^{(l-m)} F_{lmp}(i) \exp j[(l-2p)(\omega + \nu) + m(\Omega - S)].$$

V posledním výrazu nám stále ještě „vadí“ průvodič  $r$  a pravá anomálie  $\nu$ , které nejsou Keplerovými elementy. Aplikací teorie Besselových funkcí můžeme však (bez odvození) psát

$$(D2.3.7) \quad \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \exp j[(l-2p)\nu] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e) \exp j[(l-2p+q)M],$$

kde  $a$  je velká poloosa dráhy,  $M$  je střední anomálie a  $G_{lpq}(e)$  je **funkce excentricity**  $e$ . Prvních několik členů funkce excentricity je uvedeno v tabulce D2.3.2, dále je možno počítat podle rekurentních vzorců (proměnnou  $e$  u  $G$  vynecháváme) - viz Burša et al., 1993

$$(D2.3.8) \quad \begin{aligned} (l-2p)(1-e^2)G_{lpq} &= (l-2p+q)(1-e^2)^{1/2}G_{l-2,p-1,q} - \\ &- (l+1)\frac{e}{2}(G_{l-1,p-1,q-1} - G_{l-1,p,q+1}), \\ (1-e^2)^2G_{lpq} &= \left(1 - \frac{e}{2}\right)^2 G_{l-2,p-1,q} + e(1-e^2)(G_{l-1,p-1,q-1} - G_{l-1,p,q+1}) - \\ &- \frac{e^2}{4}(G_{l-2,p-2,q-2} - G_{l-2,p,q+2}). \end{aligned}$$

Derivace podle  $e$  opět získáme snadným derivováním výrazu (D2.3.8).

**Tabulka D2.3.2:** Funkce excentricity

$l p q$	$l p q$	$G_{lpq}(e)$
2 0 -2	2 2 2	0
2 0 -1	2 2 1	$-e/2 + e^3/16 + \dots$
2 0 0	2 2 0	$1 - 5e^2/2 + 13e^4/16 + \dots$
2 0 1	2 2 -1	$7e/2 - 123e^3/16 + \dots$
2 0 2	2 2 -2	$17e^2/2 - 115e^4/6 + \dots$
2 1 -2	2 1 2	$9e^2/4 + 7e^4/4 + \dots$

2 1 -1	2 1 1	$3e/2 + 27e^3/16 + \dots$
	2 1 0	$(1 - e^2)^{-3/2}$

Pomocí (D2.3.8) tak můžeme získat výsledný výraz

(D2.3.9)

$$R_{ICRF}(r, \delta, \alpha) = \operatorname{Re} \frac{GM}{a} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left( \frac{a_e}{a} \right)^l \cdot \bar{C}_{lm} \sum_{p=0}^l j^{l-m} F_{lmp}(i) \cdot \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}(e) \exp j[(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - S)].$$

Pro malé excentricity  $e \ll 1$ , což platí pro většinu geodetických družic, členy s  $|q| > 2$  velmi rychle konvergují k nule a je možné tyto členy v praktických případech zanedbat. Všimněme si ještě, že na pravé straně se již podle požadavku vyskytují pouze Keplerovy elementy

- $a$  ... velká poloosa dráhy družice,
- $e$  ... excentricita dráhy družice,
- $i$  ... sklon roviny dráhy družice k rovině rovníku,
- $\omega$  ... argument perigea dráhy družice
- $\Omega$  ... rektascenze výstupního uzlu družice
- $M$  ... střední anomálie družice

vše vztažené k rovníkové soustavě  $S_{r2}$ , doplněné ještě hodnotou  $S$  Greenwichského (světového) hvězdného času. Dále zde figurují kromě **Stokesových parametrů (harmonických koeficientů)**  $\bar{C}_{lm}$ , geocentrické gravitační konstanty  $GM$  a poloměru zemského rovníku  $a_e$  **normované funkce sklonu**  $F_{lmp}(i)$  a **funkce excentricity**  $G_{lpq}(e)$ , které se výrazně uplatní v aplikacích dráhové dynamiky družic.



## Dodatek k odstavci 2.3.3

### D2.3.3 Příklad rezonance.

V tomto Dodatku se věnujeme o poznání podrobněji než v hlavním textu v odst. 2.3.3. teoretické části studia rezonančních jevů v drahách umělých družic Země (UDZ). Pak následuje výklad k praktickému využití rezonancí (zde zaměřenému hlavně na studium gravitačního pole Země) s příklady, který je doplněním a rozšířením textu v kap. 2 hlavní části skript.

#### D2.3.3.1 Rezonanční jev v přírodě.

Jev *rezonance* je v přírodě běžný a je užíván ve vědě a technice. Ve fyzice jste se s ním setkali v akustice, mechanice, v atomové fyzice, nauce o elektřině a magnetizmu, optice, radiosystémech, ale též v chemii a jiných oborech. Rezonanci lze charakterizovat jako stav souměřitelnosti mezi frekvencemi oscilujících či vibrujících systémů. Mějme jev (1) s frekvencí  $f_1$  a jev (2) s frekvencí  $f_2$ . Řekněme, že  $f_1$  je přirozená frekvence nějakého systému a  $f_2$  frekvence zvně dodaná, vtištěná. Jsou-li  $f_1$  a  $f_2$  v poměru celých čísel, pak jsou (1) a (2) v rezonanci, kterou si můžeme označit jako  $f_1/f_2$ . Amplitudy kmitů v „normálním stavu“ (tj. mimo rezonanci) malé v rezonanci (či v její „bezprostřední blízkosti“) zesílí.

V kosmickém prostoru nejsou rezonanční stavy výjimkou. Hrají důležitou roli v uspořádání a ve vývoji galaxií i naší Sluneční soustavy. V té je celá řada *dráhových, rotačních, dráhově-rotačních* a dalších rezonančních stavů, patrně jako důsledek předchozího dynamického vývoje systému. Souměřitelnosti (komensurability) středních denních pohybů planet sluneční soustavy a posléze i jejich (přirozených) satelitů (měsíců) a prstenců si všimli astronomové již dávno. V klasické nebeské mechanice je tento jev znám jako „*problém malého jmenovatele*“ (small divisor(s)). Laplace, Lagrange, Tisserand a další popsali „velkou nerovnost“ v pohybu planet Jupitera a Saturna způsobem, na kterém není nutno nic měnit ani dnes (je to klasický příklad „dráhové rezonance“ s oscilací pro učebnice astronomie). Poměr oběžné doby Jupitera kolem Slunce vzhledem ke hvězdám (tzv. siderický oběh) k oběžné době Saturna kolem Slunce je  $1/0.40268677$ , poměr středních denních pohybů  $n_J$  a  $n_S$  Jupitera a Saturna je  $r = n_S/n_J = n_2/n_1 = 0.40268677$ . Tomuto poměru nejbližší je rezonance  $2/5$  (= 0.4) či 2:5, což neříká nic jiného než že Saturn oběhne Slunce dvakrát, zatímco Jupiter pětkrát. Tentýž fakt lze ještě napsat takto:  $5n_S - 2n_J = 0$ . Ovšem též poměry 1:2, 29:72 nebo 60:149 jsou blízké číslu  $r$  - jde o rezonance mělké (shallow) a rezonance „vyššího řádu“, vztažené k téže soustavě těles, k témuž rezonujícímu systému, v tomto případě dvou těles.

To, co popsal Laplace pro Jupiter a Saturn, lze zapsat obecněji (Brouwer a Clemence, 1961, str. 297) před integrací pohybové rovnice pro dráhový element  $s$  planety nebo jiného tělesa takto:

$$(D2.3.3.1) \quad ds/dt = \sum A_{j,k} \sin[(jn_1 + kn_2)t + c_{j,k}] ,$$

kde  $c$  jsou považovány (jako vždy v teorii 1. řádu) za konstanty, konkrétně délka perihelia a uzlu,  $j, k$  jsou celá kladná čísla,  $n_{1,2}$  jsou střední denní pohyby uvažovaných těles,  $t$  je čas a  $A$  je blíže neurčená amplituda poruchy v elementu  $s$ .

Není-li  $n_2/n_1$  racionální číslo, výsledek integrace předchozí rovnice je

$$(D2.3.3.2) \quad \delta_s = \left( \sum \right)' \frac{A_{j,k}}{jn_1 + kn_2} \cos \left[ (jn_1 + kn_2)t + c_{j,k} \right],$$

ale když  $n_2/n_1 = \beta/\alpha$ ,  $\alpha$  a  $\beta$  jsou dvě kladná celá čísla, jejich poměr neredukovatelný, pak členy s argumentem  $[(\beta n_1 - \alpha n_2) \cdot t + c_{j,k}]$  a jeho násobky budou konstantní a poruchy v  $s$  se stanou sekulárními či pseudo-sekulárními (dočasně dlouhoperiodickými tak, že jako sekulární vypadají).

Je to právě výraz  $(jn_1 + kn_2)$  ve jmenovateli integrované rovnice, který může v blízkosti exaktní rezonance, kdy se  $n_2/n_1$  blíží  $\beta/\alpha$ , být tak malý, že analytický přístup, předpokládající na pravé straně pohybové rovnice konstanty (a tak snad integrovatelný v uzavřené formě), dá nerealisticky velké poruchy nebo již selže. Proto název „problém malého jmenovatele“. Problém lze obejít numerickou integrací rovnice  $(ds/dt)$ , ovšem numerická integrace neumožňuje takový vhled do podstaty studovaného problému jako integrace analytická. Analytický přístup, který by problém rezonancí řešil plně a obecně, nebyl dosud objeven.

*Rezonančních stavů* různých typů je v naší Sluneční soustavě tolik, že určitě nejsou náhodné; lze hovořit o *rezonanční struktuře* Sluneční soustavy. Zjednodušeně řečeno, platí, že celý systém měsíců (a prstenců) velkých planet (Jupiter, Saturn, Uran, Neptun) je regionálně (vzhledem k jednotlivým velkým planetám) rezonanční. Rezonance se týkají, jak je dobře známo, planetek (asteroidů) nejen v pásu mezi Marsem a Jupiterem, ale i samotných planet.

Na kosmická tělesa ovšem nepůsobí nikdy jen konzervativní gravitační síly, ale vždy je tam nějaký důvod pro existenci *negravitačních poruch* drah (pramenících z odporu prostředí, daného například hustotou atmosféry planety, kolem které družice obíhá, nebo z existence tlaku slunečního záření, termálních a relativistických efektů, aj.). Tím se celá situace může nadále komplikovat. Uvidíme na příkladě UDZ, že role NEkonzervativních sil a NEgravitačních poruch je pro rezonance důležitá.

### **D2.3.3.2 Dráhové rezonance UDZ**

*Definice.* Ke dráhově-rotační rezonanci  $\beta/\alpha$  UDZ dochází, když UDZ uskuteční  $\beta$  nodálních (neboli drakonických) obletů (oběhů kolem) Země (počítáno od vzestupného či sestupného uzlu dráhy družice opět k uzlu téhož typu) zatímco se Země otočí  $\alpha$ -krát kolem své osy vzhledem ke hvězdám (čili za  $\alpha$  hvězdných (siderických) dnů). Přitom  $\alpha$  a  $\beta$  jsou čísla kladná, celá, nesoudělná, jejich poměr je neredukovatelný; např. 15/1 či 31/2 nebo 502/35, nikoli však třeba 30/2.

Definice tedy bere v úvahu precesi dráhové elipsy družice, tj. otáčení uzlové přímky a apsidové čáry v prostoru a změnu střední anomálie ve dráze, vše v linearizovaném případě, kdy na  $\omega$ ,  $\Omega$  a  $M_0$  působí jen člen  $C_{2,0}$ , úměrný pólovému zploštění zemského tělesa. (To je logická aproximace, neboť zonální harmonický koeficient  $C_{2,0}$  je ze všech harmonických geopotenciálních koeficientů  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  zdaleka ten největší a jeho druhá mocnina je řádově rovna (nebo větší) než hodnota kteréhokoli jiného geopotenciálního koeficientu vyššího stupně a řádu.). Změny dráhových elementů v čase popisují známé Lagrangeovy (planetární)

rovnice (LPR). Pro sekulární změny elementů  $\omega$ ,  $\Omega$  a  $M_0$  vlivem jen  $C_{20}$  mají jednoduchý tvar, který zde zopakujeme

$$\begin{aligned}\Omega(C_{20}) &= \frac{3}{2}nC_{2,0}\sqrt{5} \cdot (a_0/a)^2(1-e^2)^{-2} \cos I, \\ \dot{\omega}(C_{20}) &= \frac{3}{4}nC_{2,0}\sqrt{5} \cdot (a_0/a)^2(1-e^2)^{-2}(1-5\cos^2 I), \\ \dot{M}_0(C_{20}) &= \frac{3}{4}nC_{2,0}\sqrt{5} \cdot (a_0/a)^2(1-e^2)^{-3/2}(1-3\cos^2 I).\end{aligned}$$

*Matematický, fyzikální a geometrický význam rezonančního jevu.* O periodách poruch dráhy rozhoduje proměnná  $\psi_{l,m,p,q}$  v LPR:

$$(D2.3.3.3) \quad \psi_{lmpq} = (l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - S - \lambda_{lm}),$$

kde stupeň  $2 < l < \infty$ , řád  $0 \leq m < l$ , třetí a čtvrtý index  $0 \leq p < l$ ,  $-\infty \leq q < \infty$ ;  $\lambda_{lm}$  je fáze k  $J_{lm}$ , tj.  $\tan m\lambda_{lm} = (S_{lm}/C_{lm})$ ,  $J_{lm} = \sqrt{C_{lm}^2 + S_{lm}^2}$ ,  $S$  je hvězdný čas.

Přesně v okamžiku rezonance je časová derivace  $\psi_{lmpq}$  rovna nule, tj.  $\psi_{lmpq}$  je konstantní. Tuto situaci označíme jako *exaktní rezonanci*. Ta vede (alespoň teoreticky) k sekulárním poruchám dráhy.

Uveďme rovnou používané pojmy *hluboká* (deep) a *mělká* (shallow) rezonance. Z matematického hlediska stav rezonance znamená situaci s malým jmenovatelem jako v rov. (D2.3.3.2) a možné selhání analytické teorie 1. řádu. Je-li rezonance mělká, je perioda řádově dny; teorie 1. řádu je ještě použitelná. Je-li rezonance hluboká, je „rezonanční perioda“  $P = (2\pi/\dot{\psi})$ , řádově stovky dní, jmenovatel v LPR po případné integraci již příliš malý a teorie 1. řádu již selže. V exaktní rezonanci je  $P$  teoreticky nekonečně dlouhá. V hluboké a exaktní rezonanci je analytický přístup nutno nahradit numerickou integrací dráhy družice.

V exaktní rezonanci  $\beta/\alpha$  se ovšem neanuluje  $\psi_{l,m,p,q}$  pro všechny indexy  $(l,m,p,q)$ , ale jen pro kombinace indexů dané rezonanci adekvátní. Z rov. (D2.3.3.3) a podmínky  $\dot{\psi} = 0$  máme

$$(D2.3.3.4) \quad (l-2p)\dot{\omega} + (l-2p+q)\dot{M} = m(\dot{S} - \dot{\Omega}).$$

Zvolme

$$(D2.3.3.5) \quad (l-2p+q) = \alpha \cdot \gamma, \quad m = \beta \cdot \gamma, \quad \gamma = 1, 2, 3, \dots$$

Pak (D2.3.3.4) přejde na

$$(D2.3.3.6) \quad (\alpha \cdot \gamma)(\dot{\omega} + \dot{M}) - q \cdot \dot{\omega} = \beta \cdot \gamma(\dot{S} - \dot{\Omega}).$$

Uvažme ještě, že  $\dot{M}(C_{20}) = \dot{M}_0(C_{20}) + n$ , kde  $n$  je nerušený střední denní pohyb družice (pro UDZ je to obvykle v rozmezí 1-16 oběhů/den), a že je  $\dot{S}$  derivace hvězdného času podle času čili úhlová rychlost rotace Země (1.0027 oběhu/24 hod). Je zřejmé, že  $\omega(C_{20}), \Omega(C_{20}), \dot{M}_0(C_{20})$  jsou řádově menší než  $n$  či  $\dot{S}$ . Proto z rovnice (D2.3.3.6) – po zanedbání menších členů – dostaneme

$$(D2.3.3.7) \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{n}{\dot{S}} = \frac{n_2}{n_1},$$

jako v případě rezonancí mezi drahami dvou planet či měsíců s ( $n_2/n_1$ ).

Z fyzikálního hlediska je rezonanční jev v drahách UDZ opět dílem souměřitelnosti jakýchsi dvou frekvencí (oběžné doby družice kolem Země a rotace Země kolem své osy). V případě UDZ je ovšem precese jejich drah vyvolaná pólovým zploštěním Země velká a znatelná i za krátkou dobu, takže ji nelze zanedbat. Proto platí rezonanční podmínka (D2.3.3.6), zatímco rovnice (D2.3.3.7) platí jen přibližně a uvedli jsme ji jen pro názornost.

Spolu s fyzikálním smyslem rezonance UDZ popíšeme i její geometrický význam: po  $\beta$  (nodálních) obězích se za  $\alpha$  (siderických) dnů družice vrací přesně na totéž místo nad zemským povrchem. Pak je zřejmé, že se vybrané poruchy, působené gravitačním polem, mohou hromadit a mohou být značné, dokud rezonanční stav trvá. To je v praxi výhoda, neboť informaci o gravitačním poli lze „vytěžit“ i z málo přesných pozorování, která by malé krátkoperiodické změny „nerезonanční“ dráhy jinak nezaznamenala. Pokud se družice po  $\beta$  obězích dostane nad tytéž subsatelitní body, může zopakovat různá měření, která mají zaznamenat vývoj nějakého jevu v čase. To má použití mimo jiné v oceánografii.

Podmínku exaktní rezonance lze napsat i takto:

$$\alpha(\omega + M) = \beta(\Omega - S).$$

Zavedme proměnnou  $\Phi_{\alpha,\beta}$ :

$$(D2.3.3.8) \quad \Phi_{\alpha,\beta} = \alpha(\omega + M) + \beta(\Omega - S),$$

která se poblíž rezonance  $\beta/\alpha$  bude pomalu měnit a jejíž časová derivace tam bude blízká nule. Tuto proměnnou nazveme *rezonanční úhel*. Ta a její časová derivace vhodným způsobem popisují vývoj rezonance v reálném případě UDZ za přítomnosti atmosféry Země.

Geometrickou interpretaci rezonance pak můžeme ještě upřesnit. Uvážíme-li, že v kterémkoli výstupném uzlu platí  $\omega + M = 2k\pi + 2e\sin\omega + O(e^2)$ , pak z (D2.3.3.8) plyne pro délky  $\beta$  různých výstupných uzlů (do  $e^1$ )

$$\frac{1}{\beta} [\Phi_{\alpha,\beta} - 2k\alpha\pi - 2\alpha e\sin\omega],$$

kde  $k = 1, 2, \dots$   $\beta$  (a podobně pro sestupné uzly dráhy). V blízkosti exaktní rezonance  $\beta/\alpha$  (pro dostatečně malá  $\beta$  a  $\alpha$ ) se zvýrazní dráhový vliv těch teserálních (popř. sektorových)

geopotenciálních koeficientů, které mají řád  $m = \beta\gamma$  a stupeň vyplývající z (D2.3.3.5); explicitně taková  $l$  nalezneme v pododstavci o výběru rezonančních indexů. Takové „rezonanční“ koeficienty geopotenciálu  $C_{l,m}$ ,  $S_{l,m}$  mohou být velmi přesně určeny, je-li dostatek drah družic splňujících rezonanční podmínku pro totéž  $\beta\gamma$ . Místo krátkoperiodických poruch s malou amplitudou budeme analyzovat dlouhoperiodické poruchy s velkou amplitudou. V pododstavci o rezonančních indexech budeme pro zvolená  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (reprezentující konkrétní rezonanci) a  $q$  (odpovídající excentritě dráhy) hledat „rezonanční“ indexy  $(l, m, p)$  pro harmonické koeficienty, funkce sklonu a excentricitu v příslušných pohybových rovnicích. Bude nekonečně mnoho řešení, jakýchsi řad rezonancí, z nichž jen některé mají praktický význam. (V opačném „směru“, indexy  $l, m, p$  definují  $\alpha, \beta, \gamma$  jednoznačně).

Pro úplnost zmiňme někdy používané dělení na rezonance *vnitřní* (subsynchronní) pro  $\beta > \alpha$  a *vnější* pro  $\beta < \alpha$ . Geosynchronní geostacionární rezonance mající  $\alpha = 1 = \beta$  je jejich „dělitkem“. V dalším se zabýváme hlavně drahami blízkých UDZ, čili s prvním jmenovaným případem. Naopak, ve Sluneční soustavě všechny měsíce planet, s výjimkou Phobose u Marsu (a případně některých nově objevených malých těles obíhajících velké planety), jsou ve vnějších rezonancích vzhledem ke své planetě.

V reálném případě UDZ existují významné negravitační poruchy dráhy. Pro dráhy s výškou letu pod 500 km je dominující odpor atmosféry, který omezuje a určuje životnost družice ve dráze, a to jen na týdny, na měsíce až roky (v závislosti na excentritě dráhy a na sluneční činnosti, která „řídí“ variace hustoty atmosféry s časem). Odpor atmosféry a gravitační pole lze chápat jako spolu soupeřící faktory, přičemž atmosféra (pro blízké družice) nakonec vždy zvítězí. Negravitační poruchy dráhy narušují dosaženou rezonanční dráhu a pokud družice není aktivní (nemá korekční motorky), dříve či později rezonanční dráhu opustí. V praxi proto hovoříme o „*průchodu exaktní rezonancí*“. Podstatné je, jak dlouho se družice ve stavu blízkém exaktní rezonanci dokáže udržet a kolik měření za tu dobu získáme k určení dráhových elementů její dráhy a k případnému provedení inverzní úlohy.

### **D2.3.3.3 Rezonanční dráhy pro geodézii a oceánografii**

Z rezonanční podmínky (D2.3.3.6), pro efektivně kruhovou dráhu (tj. uvažujeme jen  $q = 0$ ), odvodíme snadno, že

$$n = \frac{\beta}{\alpha} (S - \Omega) - \dot{\omega} - \dot{M}_0.$$

S uvažováním LPR pro změny  $\omega$ ,  $\Omega$  a  $M$  vlivem  $C_{2,0}$  dostaneme

$$n = \frac{\beta}{\alpha} n_0 - \frac{3}{2} \left( \frac{\beta}{\alpha} n_0 \right) J_2 \left( \frac{R}{a} \right)^2 \cdot \left[ -\frac{\beta}{\alpha} \cos I + \frac{5}{2} \cos^2 I + \frac{3}{2} \cos^2 I - 1 \right],$$

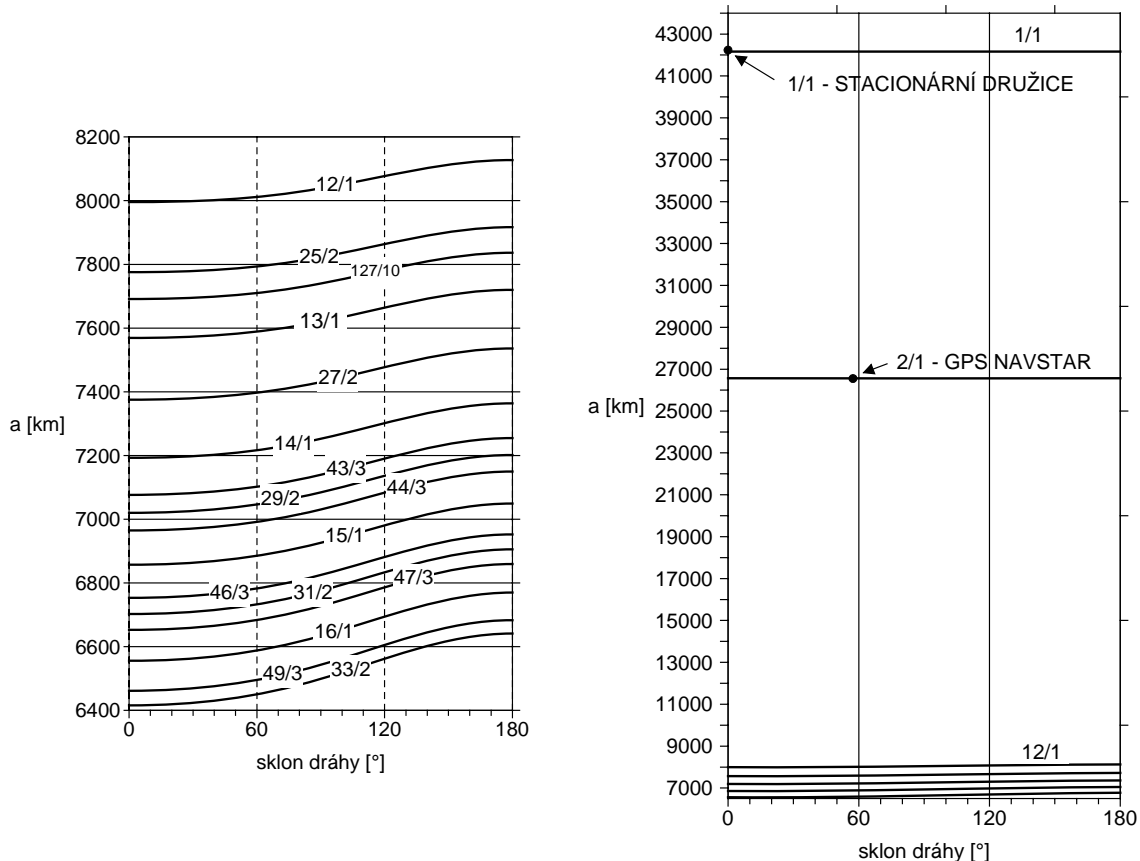
kde v korekčním členu předpokládáme  $\frac{\beta}{\alpha} n_0 = n$ , a  $J_2$  je alternativní zápis pro  $C_{20}$  a platí

$J_2 = -C_{20} \cdot \sqrt{5}$ . Po úpravě dospějeme k rovnici:

$$(D2.3.3.9) \quad n = \frac{\beta}{\alpha} n_0 \left\{ 1 - \frac{3}{2} J_2 \left( \frac{R}{a} \right)^2 \cdot \left[ 4 \cos^2 I - \frac{\beta}{\alpha} \cos I - 1 \right] \right\}.$$

K tomuto  $n$  lze spočítat keplerovskou hlavní poloosu dráhy  $a$ , resp. výšku letu družice nad zemským povrchem (zde je  $R$  poloměr Země). Ve skutečnosti se situace komplikuje tím, že střední elementy, tedy i střední  $a$  lze volit různě a tak existuje například střední poloosa podle Brouwera nebo podle Kozaie (více pro zájemce o detaily viz např. Gooding et al. 2003).

Na obr. D2.3.3.1 ukazujeme průběh rezonančních  $a$  se sklonem dráhy  $I$  v rozsahu nejmenších možných výšek letu až asi po 1400 km (odpovídá rezonanci 13/1). Markantní je závislost na sklonu dráhy. Např. průměrná výška letu družice v rezonanci 15/1 je sice asi 500 km, ale rozdíl mezi prográdní (přímou) a retrográdní (zpětnou) dráhou je až 150 km (retrográdní je vždy výše).



**Obrázek D2.3.3.1:** Hlavní poloosa dráhové elipsy pro nejdůležitější rezonance na nízkých drahách, jako funkce sklonu  $I$  roviny dráhy k rovině zemského rovníku.

Vyhledáme-li mezi řadou drah družic, které jsou v archivech k dispozici, ty dráhy, které jsou v některé významné rezonanci, můžeme pak řešením inverzní úlohy dospět k určení parametrů gravitačního pole Země, a jak již víme, s využitím rezonančního „zesílení“ poruch drah lze získat výsledky i z méně přesných měření nebo získat velmi přesné parametry z přesných drah. Platí ovšem, že rozborem jedné dráhy dostaneme jen jakousi lineární kombinaci harmonických koeficientů toho řádu (a jeho násobku), který odpovídá rezonanci, ve které se dráha nachází. Jedna dráha, jeden „řez“ gravitačním polem; z jedné dráhy nelze očekávat určení parametrů charakterizující globální pole. K tomu je třeba určitým způsobem kombinovat výsledky analýz více drah s co nejrozmanitějšími  $a$  a  $I$ .

Podle obr. D2.3.3.1 může vznikat mylný dojem, že rezonanční dráhy jsou jakoby „kvantovány“. Pro  $\alpha = 1$  jich skutečně najdeme konečný (a malý) počet mezi nejnižší (16/1)

a geostacionární (1/1) dráhou. Pro „velké“  $\alpha$  je nekonečně mnoho celých kladných čísel nesoudělných a příslušné dráhy v rezonanci  $\beta/\alpha$  přitom mohou existovat. Např. rezonance  $\beta/\alpha = 5309/370$  je blízko rezonance 43/3, t.j. mezi rezonancemi 14/1 a 29/2. Pro rezonance tak vysokých řádů jako je  $\beta = 5309$  lze však očekávat zanedbatelné poruchy dráhy, neboť v LPR budou faktory  $(R/a)^l$  s vysokými mocninami  $l$  ( $l \geq \beta$ ), a samozřejmě poměr  $R/a$  je menší než jedna. Zatímco rezonance 15/1, 14/1, 13/1, resp. 29/2, 31/2 vyvolaly velké poruchy dráhy (např. kilometrové změny sklonu  $I$  při přesnosti určení sklonu rámcově na desítky metrů) a v praxi posloužily k určení geopotenciálních koeficientů dotyčných řádů  $\beta$ , nelze od drah s tak vysokými  $\beta$  nic podobného očekávat. Znamená to, že jsou neúčinné? Samozřejmě, že ne. Jednak poslouží ke standardní inverzní úloze (s „mimorezonanční“ dráhou), jednak jsou zajímavé pro oceánografii díky tomu hlavnímu, co rezonanční dráhy charakterizuje, tj. opakování dráhy vůči pozemskému pozorovateli.

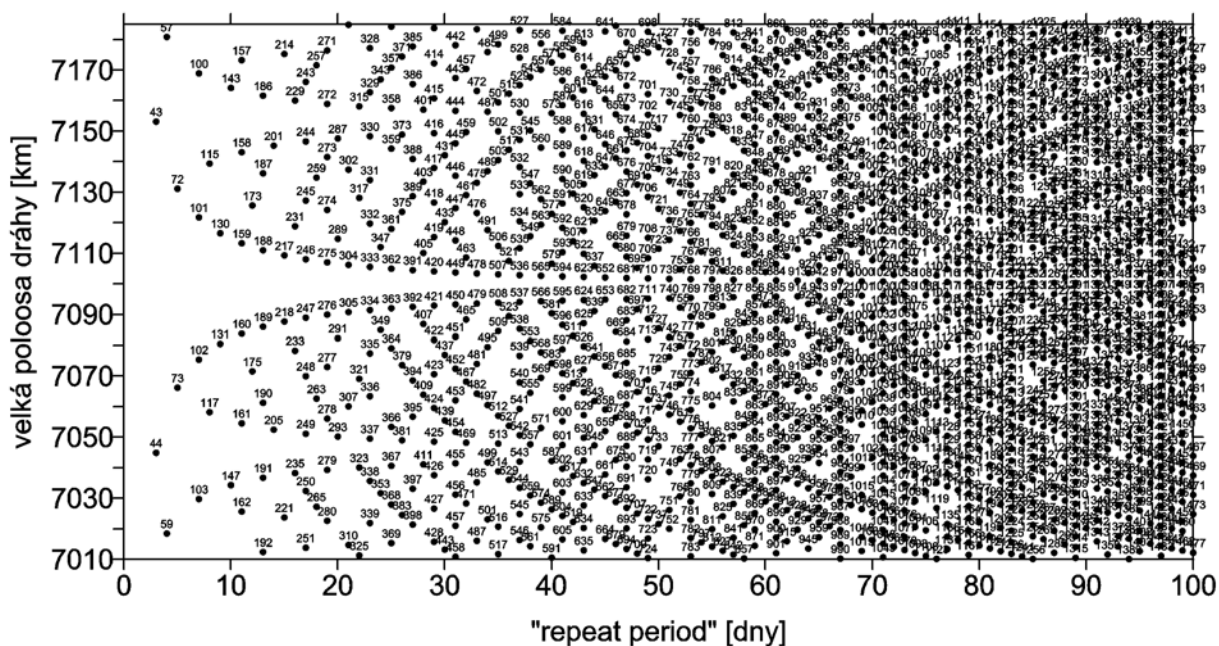
Dráha, která se vůči pozemskému „pozorovateli“ (či místu na oceánu) zopakuje například za  $\alpha = 3, 10$  nebo 50 dnů (a tento stav trvá dostatečně dlouho), je zajímavá pro studium variability a anomálií topografie oceánů a mořských proudů a podobných jevů. Oceánografové nazývají takové dráhy „repeat orbits“ a hodnotu  $\alpha$  nazývají „repeat period“ (což je prostě mnohomluv). Také se používá, spíše mezi geodety, pojmenování ERM (Exact Repeat Mission). Jsou voleny u altimetrických družic Geosat, ERS 1, 2, TOPEX/Poseidon, ENVISAT, JASON a plánují se pro další mise. ERM se kombinují s „volnými drahami“ (s velkým  $\alpha$ ) pro geodetické účely (GM, Geodetic Mission) jako je studium gravitačního pole Země, detailního průběhu oceánského geoidu a topografie moří z altimetrie.

S jednou družicí lze provést přesun ve dráze v rozsahu desítek kilometrů, měřeno ve hlavní poloose dráhy, a přejít z jedné rezonance vysokého řádu do některé okolní. S jednou družicí tak lze tzv. *jemným doladováním dráhy* (orbit dossier, orbit tuning) vyhovět různorodým – a někdy kontroverzním – požadavkům různých uživatelů.

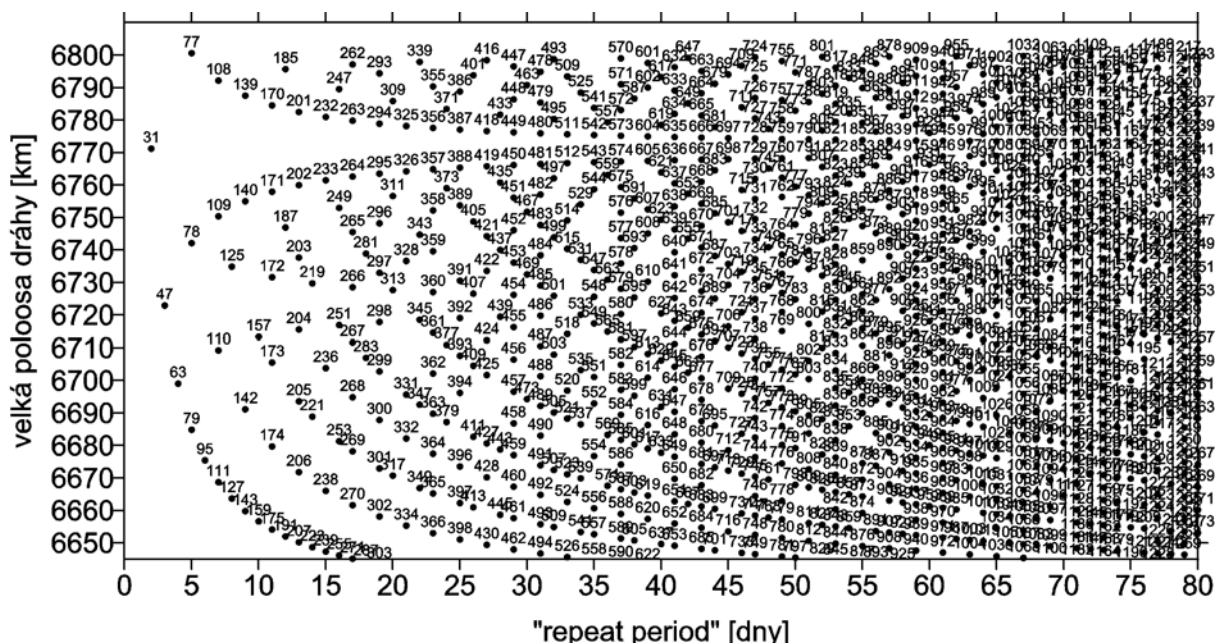
Příklad jemného doladování dráhy družice ERS 1 (ESA 1991, ukončená mise) ukazuje obr. D2.3.3.2a, kde je za základ vzata dráha 43/3. Nakonec pro ERS 1 byly vybrány dvě ERM, a to 3 a 35 dní v první fázi letu a GM (168 dní) poté až do konce funkce ERS 1.

ERM vždy vyžadují systematické dráhové manévry, kterými se průběžně vyrovnává zmenšení výšky letu (přesněji hlavní poloosy dráhové elipsy) díky odporu atmosféry. Zhruba platí (v závislosti na intenzitě sluneční činnosti), že dráhový manévr pro družici na kruhové dráze ve výšce kolem 800 km se uskuteční jednou až dvakrát za měsíc a dráha se posune „výš“, aby s přesností kolem  $\Delta a = 1$  km (opět na určitou dobu) vyhověla rezonanční podmínce.

Obr. D.2.3.3.2b ukazuje totéž pro misi CHAMP ( $I = 87.3^\circ$ , počáteční  $a = 6830$  km), určenou ke studiu gravitačního a magnetického pole Země. CHAMP prošel rezonancemi nízkých řádů, které vyvolaly měřitelné změny dráhových elementů. Byl studován zejména sklon dráhy k rovníku při průchodu rezonancemi 46/3, 31/2 a 47/3 (Gooding et al 2003, 2007).



**Obrázek D2.3.3.2a:** Vztah velké poloosy dráhy a „repeat period“ pro  $\beta$  (číslo u tečky). Jemně doladování dráhy (ERS 1). Od zvolené rezonanční dráhy (Exact Repeat Mission) se odvíjí celá řada rezonančních drah  $\beta/\alpha$  s velmi podobnou hlavní poloosou  $a$ . Lze navrhnout série rezonančních drah s minimálními změnami a nebo lze pro požadovanou „periodu“  $\alpha$  opakování dráhy vůči zemskému pozorovateli najít  $\beta$  nodálních oběhů plánované družice v požadovaném rozsahu poloos.



**Obrázek D2.3.3.2b:** Vztah hlavní poloosy dráhy k dráhovým rezonancím, podobně jako na obr. D2.3.3.2a, ale pro družici CHAMP. Číslo u tečky je  $\beta$ .



#### **D2.3.3.4. Rezonanční indexy (l, m, p) v Lagrangeových pohybových rovnicích (LPR)**

Vyberme rezonanční indexy pro zvolenou rezonanci  $\beta/\alpha$ , „rezonanční úroveň“ (overtone)  $\gamma$ , a index  $q$ , který se vztahuje k excentricitě dráhy; v praxi připadají v úvahu většinou jen  $q=0$  a  $q=+1, -1$ . Tyto výsledky použijeme posléze k napsání „rezonančního“ tvaru Lagrangeových planetárních rovnic (LPR) a k definici lumped koeficientů (lineárních kombinací harmonických geopotenciálních koeficientů).

Odlišíme případy s  $[(\beta - \alpha) \cdot \gamma]$  sudými a lichými. Rozdíl  $(l - m)$  lze pomocí (D2.3.3.5) napsat jako  $2p - [(\beta - \alpha) \cdot \gamma + q]$ . Je-li  $(l - m)$  sudé (liché), pak  $[(\beta - \alpha) \cdot \gamma + q]$  musí být také sudé (liché), neboť  $2p$  je vždy sudé ( $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ ). Pro  $(l - m) = 0, 2, 4, \dots$  je  $p = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \cdot \gamma + \frac{1}{2}q$ ;  $\frac{1}{2}(\beta - \alpha) \cdot \gamma + \frac{1}{2}q + 1$ ;  $\frac{1}{2}(\beta - \alpha) \cdot \gamma + \frac{1}{2}q + 2$ , atd., a  $l = \beta \cdot \gamma$ ;  $\beta \cdot \gamma + 2$ ;  $\beta \cdot \gamma + 4$ , atd. Obecně, pro  $(\beta - \alpha) \cdot \gamma + q$  sudé, máme

$$(D2.3.3.10) \quad \begin{aligned} l_i &= \beta \gamma + 2i ; \\ m_i &= \beta \gamma ; \\ p_i &= \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \cdot \gamma + \frac{1}{2} q + i . \end{aligned}$$

Pro  $(\beta - \alpha) \cdot \gamma + q$  liché bychom dostali

$$\begin{aligned} l_i &= \beta \gamma + (2i + 1) ; \\ m_i &= \beta \gamma ; \\ p_i &= \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \gamma + \frac{1}{2} q + i + \frac{1}{2} , \end{aligned}$$

kde index  $i$  je 0, 1, 2, ...

Nejdůležitější pro danou rezonanci  $\beta/\alpha$  jsou členy pro  $\gamma = 1$  a  $q = 0$ . Čtenář si může výpočet rezonančních indexů ujasnit a ověřit na příkladech v Tab. D2.3.3.1. Podrobnější výklad nalezne v práci Klokočnicka (1976) nebo Gooding a King-Hele (1989).

#### **D2.3.3.2 Dráhové rezonance UDZ a parametry gravitačního pole Země.**

##### **D2.3.3.2.1 LPR pro rezonanční případ a lumped koeficienty**

Z výkladu odst. 2.3.3. resp D.2.3.3.1 je zřejmé, že rezonančního jevu ve drahách UDZ lze využít k určení některých harmonických geopotenciálních koeficientů  $C_{l,m}$ ,  $S_{l,m}$ , které „nějakým způsobem“ odpovídají konkrétnímu ‘rezonančnímu stavu  $\beta/\alpha$ ’. V této kapitole je popsán postup od obecné úrovně až ke konkrétnímu určení jednotlivých  $C_{l,m}$ ,  $S_{l,m}$  rezonančních řádů. Zájemce o bližší informace a podrobnější studium odkazujeme na práce uvedené v seznamu použité a doporučené literatury. [Česky psaný přehled je v GaKO 46/88, 2000, č. 3, str. 45-57.]

Pro analýzu rezonančních jevů v drahách blízkých UDZ zvolíme sklon  $I$  roviny dráhy družice k rovině zemského rovníku, neboť  $I$  je jen málo (na rozdíl od rychle proměnných elementů  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $M$ ) ovlivňován nerezonančními poruchami dráhy od ostatních parametrů gravitačního pole, ale také málo rušen (až na polární dráhy) lunisolárními poruchami a dokonce je dosti imunní i proti poruchám nerezonančního původu, jako je odpor atmosféry.

Na sklon dráhy působí sekulárně jen rotace vysoké atmosféry, která se děje rychlostí jinou než je úhlová rychlost rotace pozorovatele na zemském povrchu; ta sklon dráhy systematicky zmenšuje.

**Tabulka D2.3.3.1:** Rezonanční indexy **l, m, p** harmonických geopotenciálních koeficientů a funkcí sklonu v Langrangeových planetárních rovnicích pro vybrané rezonance  $\beta/\alpha$  a zvolené hodnoty  $\gamma$  a  $q$ .

$\beta/\alpha$	$\gamma = 1$			$\gamma = 2$		
	$q = 0$			$q = 0$		
	$l$	$m$	$p$	$l$	$m$	$p$
14/1	15	14	07	28	28	13
	17	14	08	30	28	14
	19	14	09	32	28	15
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
15/1	15	15	07	30	30	14
	17	15	08	32	30	15
	19	15	09	34	30	16
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
16/1	17	16	08	32	32	15
	19	16	09	34	32	16
	21	16	10	36	32	17
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
29/2	30	29	14	58	58	27
	32	29	15	60	58	28
	34	29	16	62	58	29
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
31/2	32	31	15	62	62	29
	34	31	16	64	62	30
	36	31	17	66	62	31
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
1/1	3	1	1	2	2	0
	5	1	2	4	2	1
	7	1	3	6	2	2
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
2/1	3	2	1	4	4	1
	5	2	2	6	4	2
	7	2	3	8	4	3

--	--	--	--

Přirozeně, že lze analyzovat i jiné dráhové elementy nebo jejich určité kombinace, ale je nutné je nejprve „dekontaminovat“ od „nerezonančních“ poruch gravitačního i negravitačního původu. To však může být problém, protože poruch je celá řada a mohou být větší než rezonanční efekty. Druhým nevhodnějším elementem pro analýzy hlubokých rezonancí je excentricita dráhy. Také se používala délka ve dráze ( $\lambda = \omega + M + \Omega \cos i$ ) pro případ mělkých rezonancí.

Konkrétní tvar LPR pro  $I$ , rušený „všemi“  $C_{lm}, S_{lm}$  je (Allan 1971, 1973)

$$(D2.3.3.11) \quad \frac{dI}{dt} = n(1 - e^2)^{-1/2} \cdot \sum_{lmpq}^L J_{lm} (a_0/a)^l \cdot \Re \{ F_{lmp}(I) \cdot G_{lpq}(e) \cdot j[(l-2p) \cotg I - m \operatorname{cosec} I] \exp(j\psi_{lmpq}) \},$$

kde  $J_{lm}$  je amplituda harmonických geopotenciálních koeficientů  $C_{lm}, S_{lm}$  a  $\lambda_{lm}$  je fáze k  $J_{lm}$ . Dále je  $L$  maximální stupeň teoreticky nekonečné sumace přes indexy  $(l, m, p, q)$ ,  $a_0$  hlavní poloosa referenčního elipsoidu nahrazujícího tvar Země,  $a$  hlavní poloosa dráhové elipsy,  $F_{lmp}(I)$  a  $G_{lpq}(e)$  jsou funkce sklonu a excentricity dráhy (zde nenormované stejně jako  $J_{lm}$ ),  $\Re\{\cdot\}$  značí reálnou část následujícího výrazu  $\{\cdot\}$  a  $j = \sqrt{-1}$ .

Připomeňme ještě proměnnou  $\psi_{lmpq}$  (D2.3.3.3), rezonanční úhel  $\Phi_{\alpha,\beta}$  (D2.3.3.8) a rezonanční indexy (D2.3.3.10), napsané obecně, tj.

$$(D2.3.3.12) \quad \begin{aligned} l_i &= \beta\gamma + \delta + 2i, \\ m_i &= \beta\gamma, \\ 2p_i &= (\beta - \alpha)\gamma + \delta + q + i, \\ \delta &= 0 \text{ pro } (\beta - \alpha)\gamma + q \text{ sudé} \\ \delta &= 1 \text{ pro } (\beta - \alpha)\gamma + q \text{ liché.} \end{aligned}$$

Porovnání rovnic pro  $\Psi_{lmpq}$  a  $\Phi_{\alpha,\beta}$  vede k

$$(D2.3.3.13) \quad \Psi_{[l,m,p,q]-rez.} = [\gamma(\Phi_{\alpha,\beta} - \beta\lambda_{[l,m]-rez.})] - q\omega.$$

Použijeme-li indexy (D2.3.3.12) na „nerezonanční“ LPR (D2.3.3.11), dostaneme – po menším odvozování – tento „rezonanční“ zápis LPR

$$(D2.3.3.14) \quad \begin{aligned} \frac{dI}{dt}_{(\beta/\alpha)} &= \sum_{\gamma}^{\infty} f_{\gamma} \left\{ \left[ {}^I C_{\beta\gamma}^{0,\alpha\gamma}(a, I) \sin \gamma \Phi_{\alpha,\beta} - {}^I S_{\beta\gamma}^{0,\alpha\gamma}(a, I) \cos \gamma \Phi_{\alpha,\beta} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} e \left[ {}^I C_{\beta\gamma}^{\pm 1, \alpha\gamma \mp 1}(a, I) \sin(\gamma \Phi_{\alpha,\beta} \mp \omega) - {}^I S_{\beta\gamma}^{\pm 1, \alpha\gamma \mp 1}(a, I) \cos(\gamma \Phi_{\alpha,\beta} \mp \omega) \right] \right\} + O(e^2), \end{aligned}$$

kde

$${}^I f_{\gamma} = n [(\alpha\gamma - q) \cos I - \beta\gamma] \operatorname{cosec} I.$$

Nové koeficienty  $\{C, S\}_{\beta\gamma}^x$  jsou lineárními kombinacemi harmonických  $C_{l,m}, S_{l,m}$  pro rezonanční výběr pro daný řád  $\beta$ , danou „repeat periodu“  $\alpha$ , zvolenou rezonanční úroveň

$\gamma$  (1, 2, ...) a index  $q$  (0,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ , ...). Nazývají se – podle anglických autorů Goodinga a Allana *lumped coefficients*, vázané či souhrnné koeficienty (či bez překladu: „lumped koeficienty“). V nich se kombinují či kumulují  $C_{l,m}$ ,  $S_{l,m}$  téhož řádu a téže parity stupně  $l$  (buď sudé nebo liché), ale různých stupňů, v teoreticky nekonečné sumaci. Závisí na sklonu a na hlavní poloose dráhy.

*Definice.*

Pro  $q = 0$ , tj.  $\{C, S(a, I)\}_{\beta\gamma}^{0, \alpha\gamma}$  :

$$(D2.3.3.15) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon {}^l C(a, I) - \delta {}^l S(a, I) \\ \delta {}^l C(a, I) + \varepsilon {}^l S(a, I) \end{pmatrix} &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{li} F_{l, \beta\gamma, p_i}(I) \cdot \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix}_{l, \beta\gamma} = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} Q_{l, \beta\gamma}^{0, \alpha\gamma}(a, I) \cdot \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix}_{l, \beta\gamma} \end{aligned}$$

$\delta$  viz u rovnice (D2.3.3.12),  $\varepsilon = 1 - \delta$ , se všemi funkcemi sklonu i s harmonickými koeficienty plně normovanými.  $Q(I, a)$  jsou tzv. funkce vlivu (*influence functions*).

Pro  $q = \pm 1$ , tj.  $\{C, S(a, I)\}_{\beta\gamma}^{\pm 1, \alpha\gamma \mp 1}$  :

$$(D2.3.3.16) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon {}^l C(a, I) - \delta {}^l S(a, I) \\ \delta {}^l C(a, I) + \varepsilon {}^l S(a, I) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} Q_{l, \beta\gamma}^{\pm 1, \alpha\gamma \mp 1}(a, I) G_{l, p_i, \pm 1}(e) \cdot \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix}_{l, \beta\gamma},$$

kde  $G(e)$  jsou funkce excentricity.

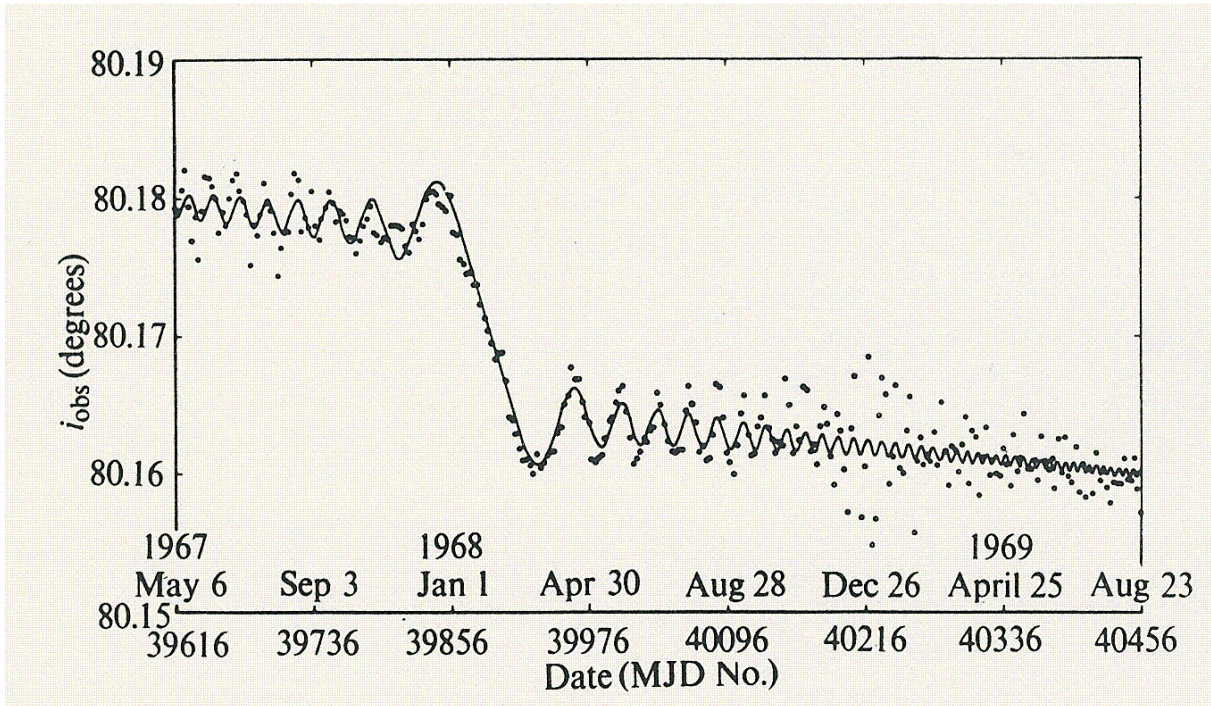
*Příklad:*

pro  $C$  lumped koeficient, pro rezonanci 15/1, základní členy pro  $q = 0$  a  $\gamma = 1$ :

$$C_{15}^{0,1} = \left[ F_{15,15,7} C_{15,15} - (a_0/a)^2 F_{17,15,8} C_{17,15} + (a_0/a)^4 F_{19,15,9} C_{19,15} \mp \dots \right].$$

Asi před třiceti lety Američané analyzovali v rámci tehdejší tvorby modelů gravitačního pole Země dráhy řady družic a našli v některých případech nevysvětlené oscilace, které nešlo přičíst na vrub známým gravitačním a negravitačním poruchám. Usoudili vcelku logicky, ale nesprávně, že jsou to artefakta pocházející ze zpracování družicových měření při určení dráhy družice: tehdejší sledovací síť pozemských stanic (dopplerovských aparatur, interferometrie, fotografických kamer a optických amatérských pozorování směru letu družice mezi hvězdami) byla velmi nedokonalá s koncentrací stanic v Severní Americe a v Evropě. Tento nedostatek se mohl promítat do určení dráhy jako falešné variace elementů. Angličané v Royal Aircraft Establishment, Farnborough, byli důkladnější: u družice Ariel 3 nešlo mohutné pseudosekulární variace sklonu a excentricity přehlédnout. Správně je přisoudili rezonanci 15/1, ke které se družice přiblížila „shora“ (s denním pohybem menším než 15 otoček kolem Země za den) a kterou prošla (působením odporu atmosféry, který sekulárně zmenšoval hlavní poloosu dráhové elipsy). Na obr. D2.3.3.3 vidíme chod sklonu v období rezonance 15/1, zejména výrazný pokles během zhruba dvou měsíců, po eliminaci lunisolárních poruch. Jím proložená teoretická křivka odpovídá hodnotám lumped koeficientů

$\{C, S\}_{15}^{0,1}(I)$  nejlépe (ve smyslu metody nejmenších čtverců) vyhovujícím danému sklonu  $I$  a dané rezonanci. Při důkladnější analýze lze z měření odvozených rezonančních poruch sklonu určit ještě lumped koeficienty pro  $\gamma = 1$ , ale  $q = \pm 1$  (které ovšem mohou zaniknout v šumu dat, má-li dráha malou excentricitu) a též pro  $\gamma = 2$  a  $q = 0$  (pokud ještě členy s  $(a_0/a)^{30}$  a vyššími mocninami působí měřitelné poruchy ve sklonu dráhy).



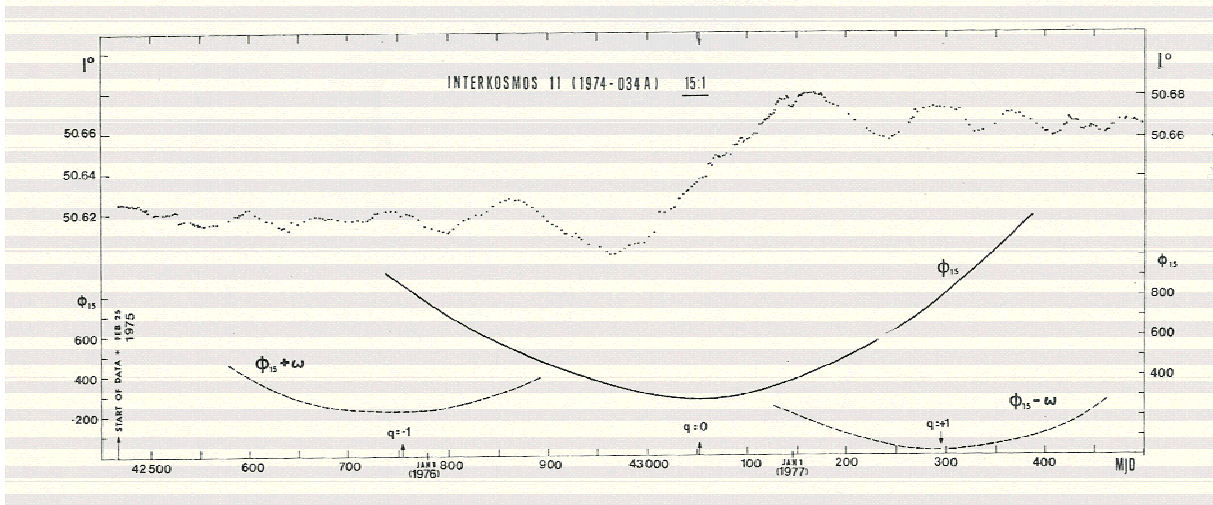
**Obrázek D2.3.3.3:** Chod sklonu dráhy  $I$  družice Ariel 3 v období kolem dráhové rezonance 15/1. R. R. Allan a R. H. Gooding z RAE, Farnborough objevili, že pseudosekulární pokles sklonu je způsoben rezonančním jevem. Sklony redukovanými o lunisolární poruchy je proložena „nejlépe pasující“ křivka, která odpovídá z vyrovnání určeným lumped koeficientům 15. řádu (pro  $\gamma = 1$  a  $q = 0$ ). Pionýrská analýza rezonančního jevu v dráze UDZ z r. 1971.

Od začátku prací Goodinga, Allana, resp. King-Heleho skupiny ve Farnborough v UK uplynulo již 40 let a byla nashromážděna celá řada lumped koeficientů různých řádů. Práce pocházejí z bývalé SRN, Francie, USA a bývalé ČSSR. Na obr. D2.3.3.4 uvádíme variace sklonu dráhy družice Interkosmos 11 (analýza z ČSSR), která prošla hlubokou rezonancí 15/1 na kruhové dráze s mohutným rezonančním efektem. Lumped koeficienty pro  $\gamma = 1$  a  $q = 0$  z této analýzy byly použity v německo-francouzském modelu gravitačního pole Země GRIM 3 (1983).

### **D2.3.3.2.2. Rezonance UDZ, parametry gravitačního pole Země; jejich určení a testy přesnosti.**

Lumped koeficienty jsou lineárními kombinacemi harmonických geopotenciálních koeficientů  $C_{l,m}$ ,  $S_{l,m}$ ; jsou vázány ke konkrétní rezonanci  $\beta/\alpha$  a ke konkrétní dráze, tj. k jejím  $a$ ,  $I$  a  $e$ . Jedině kombinací více lumped koeficientů téhož řádu z analýzy drah různých sklonů (popř. excentricit) drah lze zjistit jednotlivé „rezonanční“ harmonické geopotenciální koeficienty  $C_{l,m}$ ,  $S_{l,m}$ . To se podařilo jen pro  $m = 15$ , 14 a částečně pro vyšší dráhy v mělkých

rezonancích (13 / 1 a 12 / 1). Výsledků z „dvoudenních“ rezonancí  $\beta/2$  je nedostatek. Členy  $C_{l,m}$ ,  $S_{l,m}$  vyšších stupňů rezonujícího řádu nelze určit pro omezený počet rovnic oprav. Pomoci si lze kolokacemi (viz níže), ale ani to není ideální.



**Obrázek D2.3.3.4:** Případ družice Interkosmos 11 a dráhové rezonance 15/1. Na časové stupnici zleva doprava vidíme, jak se malé a krátkoperiodické změny sklonu změní v pseudosekulární nárůst poblíž exaktní rezonance. Jen díky odporu atmosféry družice exaktní rezonancí 15/1 projde (a poté se situace s poruchami „symetricky“ opakuje). Na obrázku jsou též hodnoty rezonančních úhlů  $\Phi_{\alpha,\beta}$  a  $\Phi_{\alpha,\beta} + \omega$ ,  $\Phi_{\alpha,\beta} - \omega$ , pro  $(\alpha,\beta) = (1,15)$ , které náležejí k sériím lumped koeficientů s  $q = 0, +1, a -1$ . Lumped koeficient 15. řádu s  $\gamma = 1$  a  $q = 0$  obsahuje  $(C,S)_{l,15}$  lichých stupňů  $l$ , zatímco lumped koeficient 15. řádu s  $\gamma = 1$  a  $q = +1$  nebo  $-1$  je složen z  $(C,S)_{l,15}$  sudých stupňů

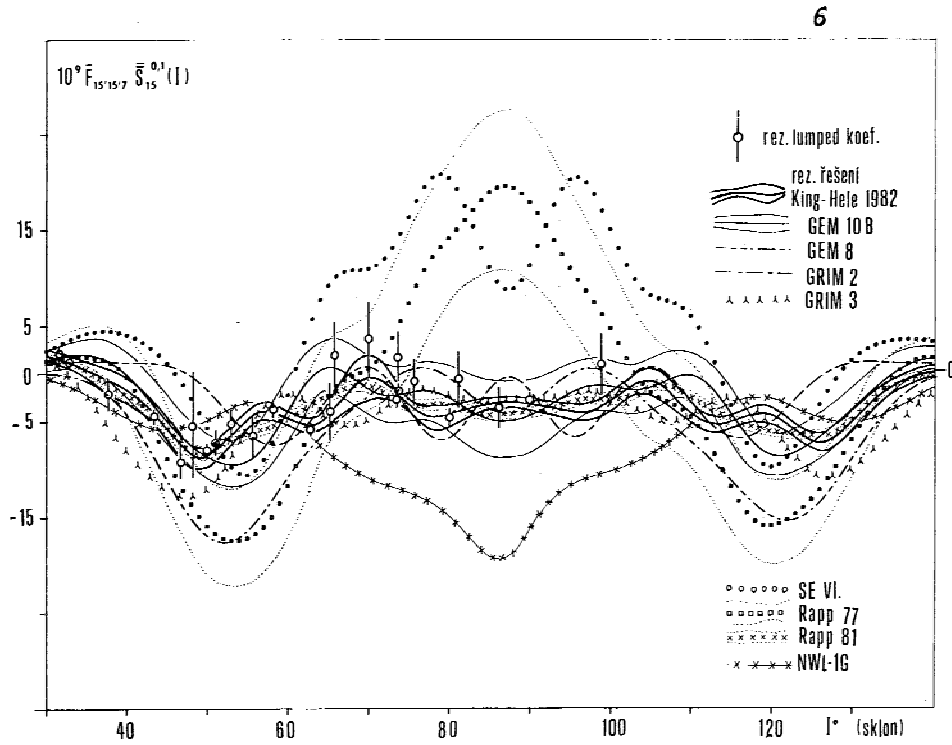
Zmíněný postup považuje lumped koeficienty za jakýsi mezivýsledek, mezistupeň, ze kterého se pak odvozují parametry globální. Lze ovšem použít přímo lumped koeficienty a přiřadit je do systému rovnic oprav některého z modelů gravitačního pole Země jako každé jiné „pozorování“.

Mějme lumped koeficienty  $\{C,S\}_{\beta,\alpha}^{\gamma,q}(I)$  pro dané  $\alpha, \beta, \gamma$  a  $q$  a sklon  $I$ , které jsou určeny k rozboru rezonančního jevu; nazvěme je „pozorované“ „obs“. Necht' jsou díky dlouhodobému působení rezonančních poruch na kruhové a přesně určené dráze „velmi přesné“ (s formálními středními chybami o řád menšími než mají harmonické koeficienty stejných  $(l,m)$  v nějakém modelu gravitačního pole Země). Můžeme spočíst – pro stejné  $\alpha, \beta, \gamma, q$  a nejrůznější  $l$  – hodnoty z příslušných  $C_{lm}, S_{lm}$  tohoto modelu Země; označme je jako „vypočtené“ „comp“. Pak již zbývá jen „pozorované“ a „vypočtené“ lumped koeficienty porovnat a při dodržení uvedených podmínek takto *testovat model Země pro dotýčný řád* (souhrnně pro stupně dané parity od  $l = m + \delta$ , až k nějakému maximálnímu stupni  $L$ , kde šum dat už převyšuje signál). Takovéto porovnání lze účinně zaranžovat způsobem, který předvádí obr. D2.3.3.5.

Na x-ové ose je sklon  $I$ , na y-ové hodnoty lumped koeficientů „pozorovaných“ a hodnoty lumped koeficientů „vypočtených“ z modelu, který testujeme (hodnoty, plus minus pás středních kv. chyb promítnutých z variančně-kovarianční submatice testovaných harmonických koeficientů pro dotýčný řád). Hodnoty „pozorované“ bereme za srovnávací



etalon. Vytvoříme rozdíly  $\{C, S\}_{\beta, \alpha, -obs-}(I) - \{C, S\}_{\beta, \alpha, -comp-}(I)$ . Pokud se hodnoty „vypočtené“ statisticky významně liší, je „defekt“ v modelu Země (pro testovaný řád harmonických). Konkrétní případ na obr. D2.3.3.5 zastaral svými čísly, ale princip zůstává v platnosti. Takto byla testována celá série modelů gravitačního pole Země v letech 1980-1990. Poté byly modely Země zpřesněny, hlavně díky družicové altimetrii, a řada z modelů v sobě zahrnuje i výsledky z rezonancí, takže dnes zůstává jen málo nezávislých a současně velmi přesných rezonančních výsledků pro podobná porovnání.



**Obrázek D2.3.3.5:** Porovnání lumped koeficientů z rozboru rezonančního jevu s obdobnými hodnotami spočtenými pro potřebný interval sklonu dráhy z harmonických geopotenciálních koeficientů tehdejších modelů gravitačního pole Země. Jsou-li rezonanční výsledky na modelech Země nezávislé a jsou-li navíc prokazatelně přesnější (zejména když jde o analýzu markantní změny dráhy díky rezonanci, i při datech průměrné přesnosti), pak lze rezonance použít k testování přesnosti modelů Země (jmenovitě harmonických koeficientů řádu příslušného použité rezonanci), zde 15tého řádu. Kompozice z výsledků Klokočnicka a Kosteckého (cca 1975-1985).

Podívejme se na postup určení harmonických geopotenciálních koeficientů určitého řádu z lumped koeficientů téhož řádu, bez toho, že bychom se zabývali detaily. Použita bude zobecněná metoda nejmenších čtverců, LSC (Least Squares Collocation), kolokace. Ta je podrobně rozebrána např. v Moritzově knize a aplikace na určení  $C_{l,30}, S_{l,30}$  je v detailu v práci Kosteckého a Klokočnicka [GaKO 46/88, 2000, č.3, str. 45-57].

Dány lumped koeficienty  $\{C, S(a, I)\}_{\beta\gamma}^{q, \alpha\gamma \mp q}$  včetně jejich formálních středních kvadratických chyb a kovariancí či korelačních koeficientů mezi nimi (které jsou součástí výsledků vyrovnání lumped koeficientů metodou nejmenších čtverců z „pozorovaných“ variací sklonu), a to pro nejrozmanitější sklonu dráhy  $I$  a příslušnou rezonanci ( $\beta, \alpha, \gamma, a$ ) a jsou vypočteny funkce vlivu  $Q_{l,m}^{q, \alpha\gamma \mp q}(a, I)$  do dostatečně vysokého stupně  $l_{max}$ .

Princip LSC podchycuje rovnice

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{s} + \mathbf{n},$$

kde  $\mathbf{x}$  je vektor měření (lumped koeficientů),  $\mathbf{A}$  design matice (matice derivací „pozorovaných veličin“ podle neznámých),  $\mathbf{X}$  vektor neznámých čili určovaných parametrů (geopotenciálních koeficientů),  $\mathbf{s}$  vektor signálu, kterým aproximujeme chování určovaných parametrů předem, a  $\mathbf{n}$  jsou opravy či vektor šumu. Řešení je (za obvyklých předpokladů, že střední hodnoty  $\mathbf{s}$  a  $\mathbf{n}$  jsou nuly)

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x}$$

s apriorním odhadem přesnosti a signálem

$$\mathbf{E}_{XX} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \quad \mathbf{s} = \mathbf{C}_{XX} (\mathbf{C}_{XX} + \mathbf{C}_{nn})^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{X})$$

za předpokladu, že inverze váhové matice je dobře určena z apriorních středních chyb měření.

Pro váhovou matici  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$  v kolokacích platí

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{SS} & \mathbf{C}_{SX} \\ \mathbf{C}_{XS} & \mathbf{C}_{XX} \end{pmatrix},$$

kde kovarianční matice měření a predikovaného signálu jsou před vyrovnáním určeny ze vstupních kovariancí mezi lumped koeficienty a z Kaulova pravidla

$$\mathbf{C}_{xx} = [\text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x})] = \mathbf{C}_{SS} + \mathbf{C}_{nn} \quad \text{a} \quad \mathbf{C}_{SS} = [\text{cov}(\mathbf{s}, \mathbf{s})].$$

Zbývající smíšené matice je legální anulovat, neboť  $\mathbf{s}$  s  $\mathbf{x}$  nekoreluje.

V LSC pro určení geopotenciálních koeficientů  $\mathbf{X}$  jsou  $\mathbf{x}$  vstupní lumped koeficienty a členy matice  $\mathbf{A}$  tvoří koeficienty vlivu  $Q_{lm}^{C,S}(a, I)$ . Pro lepší stabilizaci inverzní úlohy ještě odhadneme neurčovaný „zbytek“ harmonických koeficientů vyšších stupňů než kritické  $l_{max}$ , opět Kaulovým pravidlem, což se projeví v design matici. Podrobnosti jsou m.j. v GaKO 12/1979.

### **D2.3.3.2.3 Rezonance na vysokých drahách**

Zatím byla řeč jen o rezonancích nízkých drah (výška letu stovky kilometrů). Naznačená teorie je použitelná i pro geostacionární dráhy v rezonanci 1/1 (kruhová dráha nad rovníkem ve výšce zhruba 36 000 km ve směru rotace Země kolem své osy) nebo pro jiné vysoké dráhy, např. pro dráhy družic NAVSTAR GPS, GLONASS a j. poblíž rezonance 2/1 (ve výškách zhruba 20 000 km). Připomeňme, že tu byly mezinárodně koordinované akce a pozorovací kampaně COGEOS I a II (zhruba před dvaceti lety). COGEOS znamená „International Campaign for Optical Observations of GeoSynchronous Satellites for Geophysical Purposes“ a zahrnoval určení  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  nejnižších stupňů a řádů (viz Tab. D2.3.3.1) z poruch drah v rezonanci 1/1 a 2/1 a odhad jejich časových změn.



Geostacionární dráha má přesně definovanou hlavní poloosu  $a_1$ , která plyne z definice rezonance 1/1 na kruhové rovníkové dráze ve směru rotace Země. Je-li pro konkrétní dráhu  $a \neq a_1$ , dojde k pohybu družice v délce (mění se zeměpisná délka  $\lambda$  subsatelitních bodů). Ale ani přesná volba  $a_1$  není zárukou, že družice zůstane nad počáteční  $\lambda$ . V obecném případě se bude  $\lambda$  měnit buď v nějakém rozsahu délek (librace) kolem jisté délky  $\lambda_{22}$  nebo v rozsahu 360 stupňů (cirkulace). Bude záležet na přesnosti navedení počáteční dráhy na dráhu rezonanční a na počáteční rychlosti. Jelikož je řez rovníkem Země v prvním přiblížení elipsa, působí na družici dominantně  $C_{2,2}$ ,  $S_{2,2}$  ze všech sektorových harmonických geopotenciálních koeficientů (viz tab. 1). Jediná, z tohoto hlediska stabilní, geostacionární dráha je ve směru malé poloosy rovníkové elipsy. Odpovídající zeměpisné délky  $\lambda_{22}$  jsou zhruba  $105^\circ$  západně a  $75^\circ$  východně od Greenwiche. Ostatní pozice musíme (podle požadavků praxe) udržovat pomocí korekčních motorků na družici.

Geostacionární družice jsou používány v telekomunikacích, pro meteorologii, a j.; stále jich přibývalo. Geostacionární dráha však není nevyčerpatelným přírodním zdrojem. Je to pás asi 20 km široký ve výšce asi 36 000 km nad zemským rovníkem. Neustále rostoucí počet objektů v tomto pásu zvyšoval riziko srážek, protože staré, již opotřebované nebo morálně zastaralé objekty nikdo neodklízel. Proto došlo k mezinárodní dohodě o vynášení družic, které dosluhují, na dráhy vyšší než je dráha geostacionární. Takové dráhy se označují jako „disposal“ či „graveyard“ („hřbitovní“), kde družice „odpočívají“ teoreticky navěky. Bylo nutné zvážit, jaký minimální nárůst  $\Delta a$  musíme požadovat, aby se díky poruchám od gravitačního pole Země, lunisolárním poruchám a tlaku slunečního záření hřbitovní dráhy nezměnily a neprotly dráhy původní. Podle toho je třeba pro tento účel rezervovat množství zbývajících paliva na palubě družice. Dnes se bere  $\Delta a = +200$  km jako minimum, aby odklizené družice byly na drahách stabilních a neprotínajících dráhy geostacionární alespoň na příštích několik století.

#### **D2.3.3.2.4. Závěrečná poznámka k rezonancím**

Objev existence rezonančních jevů ve drahách umělých družic Země byl důležitou událostí pro nebeskou mechaniku, která do té doby studovala dráhové a rotační rezonance přirozených těles naší Sluneční soustavy popř. analogické jevy v galaxiích. Blízký kosmický prostor a umělé družice Země (UDZ) lze chápat jako laboratoř a speciální studijní objekty. To, co u planet a jejich přirozených měsíců trvá desetiletí i tisíciletí, probíhá v této laboratoři a s těmito objekty týdny či roky, jak ve zrychleném filmu, jehož režii máme víceméně ve svých rukou.

Určení lineárních kombinací harmonických geopotenciálních koeficientů zemského gravitačního pole, tzv. lumped koeficientů, z rezonancí UDZ a následné odhady číselných hodnot samotných geopotenciálních koeficientů „kombinováním“ lumped koeficientů z drah různých sklonů znamenalo revoluci v ověřování přesnosti tehdejších souhrnných geopotenciálních řešení (modelů gravitačního pole Země), a jejich následné zpřesnění (pro vybrané „rezonanční“ řády).

Rezonance UDZ sehrály zajímavou a podstatnou roli ve studiu gravitačního pole naší planety. Jen nedostatek patřičných dat (dráhových parametrů pro nejrůznější rezonanční dráhy, které u mnoha aplikovaných a komerčních družic nevyhovují přesností pro vědecké účely) byl a je překážkou pro další rozšíření této metody. Objevily se a objevují pokusy zpřesnit geopotenciální koeficienty nízkých stupňů a řádů rozbořením geostacionárních drah a drah družic NAVSTAR GPS a GLONASS. V posledních letech po vypuštění družic CHAMP

(2000) a GRACE A/B (2002) nastal určitý „comeback“ rezonačních analýz. Dráhy zmíněných družic určených pro studium gravitačního pole Země a jeho časových variací jsou ultrapřesné – na úrovni decimetru ve vektorech stavu v každém okamžiku. Nic tak přesného předtím k dispozici nebylo (snad s výjimkou drah geodynamických družic určovaných prostřednictvím SLR). Z rozboru sklonu dráhy družice CHAMP byly nejprve určeny lumped koeficienty z rezonance 46/3 (Gooding et al., 2003) a poté - díky dráhovým manévřům zvyšujícím hlavní poloosu dráhy s cílem prodloužení aktivní služby družice CHAMP - došlo k opakování exaktních rezonancí 31/2 a 47/3 a k následným analýzám (např. Gooding et al., 2007). U družice GRACE byla nejvýznamnější rezonance 61/4.

## Dodatek k odstavci 3.9

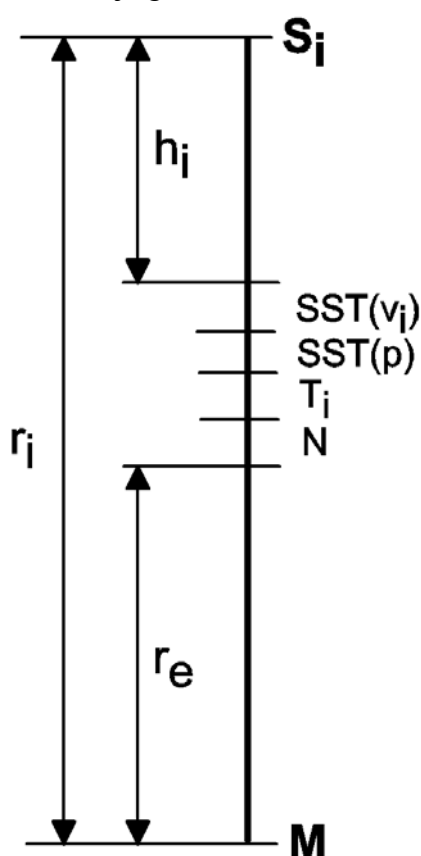
### D3.9 Družicová altimetrie

Družicová altimetrie se stala za posledních dvacet let dominantním zdrojem informací o gravitačním poli Země. Může být doplněna družicovou gradientometrií, ale žádný gradientometr dosud na oběžné dráze nebyl, kdežto altimetrických družic létalo již několik a dnes jsou altimetrická měření průběžně k dispozici z více než jedné družice. Družicová altimetrie přispívá různým geovědním oborům, nejenom geodézii. Posunula znalosti geofyziky a zejména oceánografie a je aplikována i v klimatologii.

Čtenář tohoto *Dodatku* může čerpat z rozsáhlé literatury. Doporučujeme přehledy Fu & Cazenave (2001) a Klokočník et al. (1994).

#### D3.9.1 Princip družicové altimetrie a fundamentální rovnice družicové altimetrie

Jde o měření výšky letu družice nad hladinou oceánu nebo jiným bodem povrchu radiolokačním (radarovým) nebo laserovým výškoměrem - altimetrem, orientovaným (pasivně t.j. gravitační stabilizací či "vynuceně" aktivní orientací družice) k nadiru, tj. ve směru místní vertikály (obr. D3.9.1). Inspirace pochází z měření výšek u letadel.



V okamžiku  $t_i$  v bodě  $S_i$  vyšle altimetr kratičký signál k nadiru, signál se odrazí od mořské hladiny (nebo jiného místa na zemském povrchu) a vrátí zpět na palubu. Z transitního času (jak dlouho letěl signál z paluby dolů a zpět na družici) se určí "hrubá" výška,  $h'_i$ , která po řadě korekcí (přístrojových, ze šíření signálu atmosférou a podle stavu hladiny, od které se signál odráží) dá korigovanou výšku  $h_i$ .

Na obr. D3.9.1 je geocentrický průvodič družice v okamžiku měření  $t_i$  označen  $r_i$ , průvodič referenčního elipsoidu  $r_e$ , symbol  $N$  znamená převýšení geoidu nad referenčním elipsoidem a  $T$  označuje oceánské slapové vlivy; složky topografie moře - sea surface topography  $SST$  (proměnná a konstantní) jsou označeny  $SST(v_i)$  a  $SST(p)$ . Topografie moří a oceánů je definována jako odchylka jejich střední hladiny (zbavená vlnění a vlivu tlaku atmosféry na hladinu oceánu) od geoidu, daná oceánskými proudy, různou salinitou (slaností) a teplotou vody a dalšími vlivy.

**Obrázek D3.9.1:** *Princip družicové altimetrie*

- S ..... hmotný střed družice nesoucí výškoměr,
- h ..... měřená výška po patřičných korekcích,
- $r_e$  ..... průvodič náhradního (referenčního) elipsoidu,
- N ..... převýšení geoidu nad referenčním elipsoidem,
- SST ... topografie mořské hladiny (variabilní a permanentní složka),
- T ..... oceánské slapy.

Podle obr. D3.9.1 platí

$$(D3.9.1) \quad r_i = h_i + SST(v_i) + SST(p) + T_i + N + r_e,$$

což je *fundamentální rovnice družicové altimetrie*.

Veličiny na obr. D3.9.1 se určují a zpřesňují v postupných aproximacích. Jak velké jsou a jak přesně je dnes známe?

### **D3.9.2 Diskuse k fundamentální rovnici družicové altimetrie**

Zvlnění geoidu  $N$  je řádově desítky metrů oproti řádově decimetrům (až 1.5 m) u  $SST$  a  $T$ . Z toho lze logicky usoudit, že první aplikace družicové altimetrie se týkaly zpřesnění oceánské části geoidu a tím i popisu gravitačního pole Země jako celku. Jak se postupně zpřesňovalo určení dráhy v radiálním směru díky stále přesnějším měřickým metodám a důkladnějšímu modelování poruch dráhy (vliv gravitačního pole Země, odporu její atmosféry, tlaku slunečního záření na dráhu, aj.), došlo i na ty menší fenomény, tedy na určení topografie moří a zpřesnění oceánských slapů. Co se týče  $r_i$ , pro TOPEX/Poseidon a JASON (podrobnosti níže) je zhruba 7700 km, pro ostatní altimetrické družice kolem 7000 km (dráhy jsou vesměs kruhové). Výrazně nižší ani vyšší dráhy se nepoužívají (vysvětlení především v kap. 2.1 v Klokočník et al., 1994 a zde v odst. D3.9.5.1).

Průběh oceánské části geoidu je v nejnovějších modelech gravitačního pole Země znám s přesností 20-30 cm, na pevninách stále s chybou kolem  $\pm 1$  m, což pro mnohé aplikace nedostačuje a jinde může znamenat zbytečnou překážku použití altimetrie. Proto se volí diferenciální přístup, viz kap. D3.9.3. Vlastní výškoměrné měření  $h_i$  má dnes ohromující přesnost 1-2 cm (v závislosti na vlnění oceánu). Zavádění korekcí je velký problém, žádná není známa dokonale a vede tudíž k residuální chybě na úrovni až jednotlivých centimetrů (odst. D3.9.4.).

Veličiny  $T$  a  $SST$  jsou známy s přesností na jednotlivé decimetry. Kritická byla *radiální chyba* dráhy  $r_i$  družice nesoucí výškoměr. Z obr. D3.9.1 je jasné, že každá chyba dráhy ve směru měření (tj. v radiálním směru, ve směru radius-vektoru) se přímo přenesou do určovaných veličin. Navíc, a to už z obr. D3.9.1 nepoznáme, je část radiální chyby dráhy geograficky korelovaná (blíže o tom v odst. D3.9.7.3.).

### **D3.9.3 Fundamentální rovnice diferenciální (crossover) altimetrie**

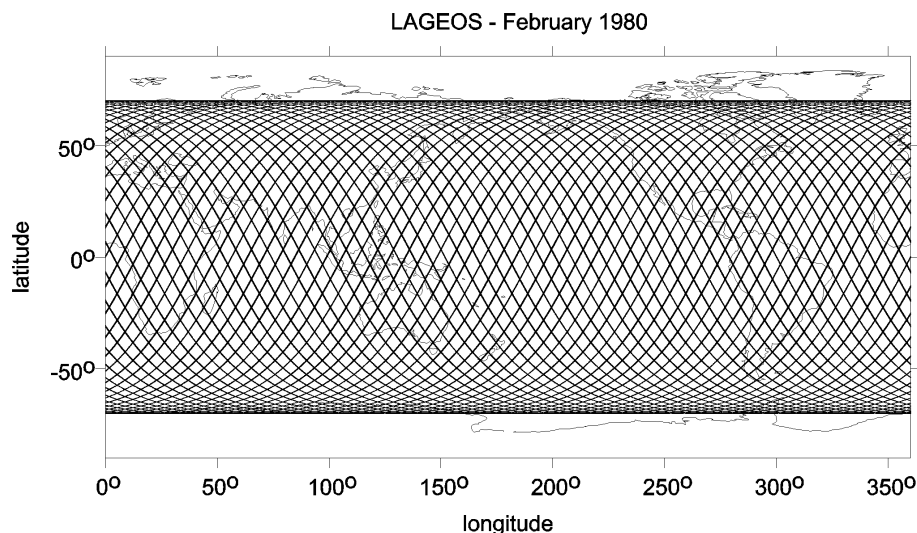
Nejprve definujme vzestupný (sestupný) oblouk dráhy družice. Vzestupným (*ascending*) obloukem je ta část dráhy družice, kdy průmět dráhy na zemském povrchu vytváří křivku se zvětšující se zeměpisnou šířkou (a naopak pro sestupný (*descending*) oblouk).

Nebudeme-li usilovat o určení  $N$  z altimetrie, lze například  $SST(v)$  nebo  $T$  nebo relativní změny výšek určovat z rozdílu  $r$  nad týmž subsatelitním bodem (průmět dráhy na zemský povrch) mezi vzestupným a sestupným obloukem dráhy. Uvažujme alespoň dvě měření  $h_i$  a označme je  $h_a$  pro vzestupný a  $h_d$  pro sestupný oblouk. Pak máme rovnici (D3.9.1) dvakrát a můžeme napsat rozdíl

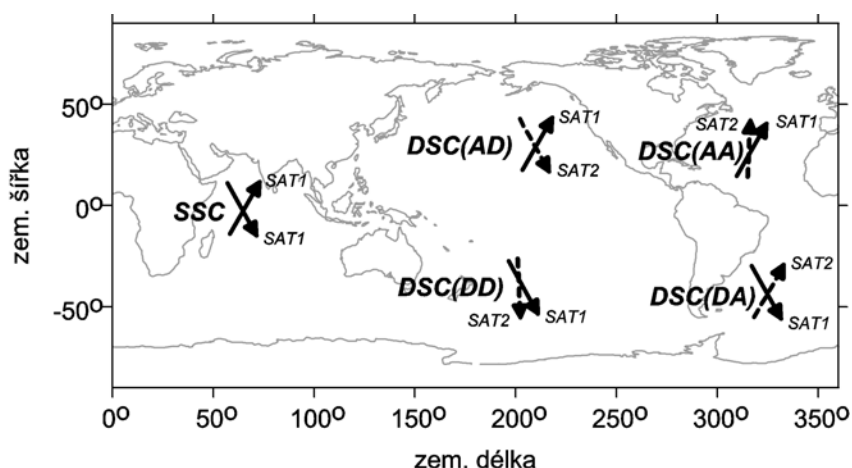
$$(D3.9.2) \quad x \equiv r_a - r_d = h_a - h_d + SST(v_a) - SST(v_d) + T_a - T_d$$

což je *fundamentální rovnice družicové „diferenciální“ altimetrie (cross-over altimetry)*.

Všechny veličiny, které lze za interval  $(t_2 - t_1)$  uplynulý mezi měřeními  $h_a(t_1)$  a  $h_d(t_2)$  považovat za neměnné v rovnici (D3.9.1), se už v rovnici (D3.9.2) neobjeví. Tím také chyby těchto veličin neovlivní rozdíl průvodičů (crossover difference). Jelikož největší chybu do (D3.9.1) dodává neznalost průběhu geoidu a  $N$  je pro náš účel spolehlivě konstantní, je (D3.9.2) mnohem přesnější než (D3.9.1) i při jinak stejných podmínkách. Jako vždy v geodézii při "diferenciálním" přístupu něco získáme a něco ztratíme.



**Obrázek D3.9.2:** *Průměty dráhy družice na zemský povrch (ground tracks), vzestupný a sestupný oblouk dráhy (mezi nimi body obratu s největší či nejmenší zeměpisnou šířkou), odpovídající sklonu roviny dráhy družice k rovině zemského rovníku a pozice křížících se bodů (crossovers). Na obrázku zatím nejsou ground tracks nějaké altimetrické družice, ale zcela libovolně vybrané družice (LAGEOS)*



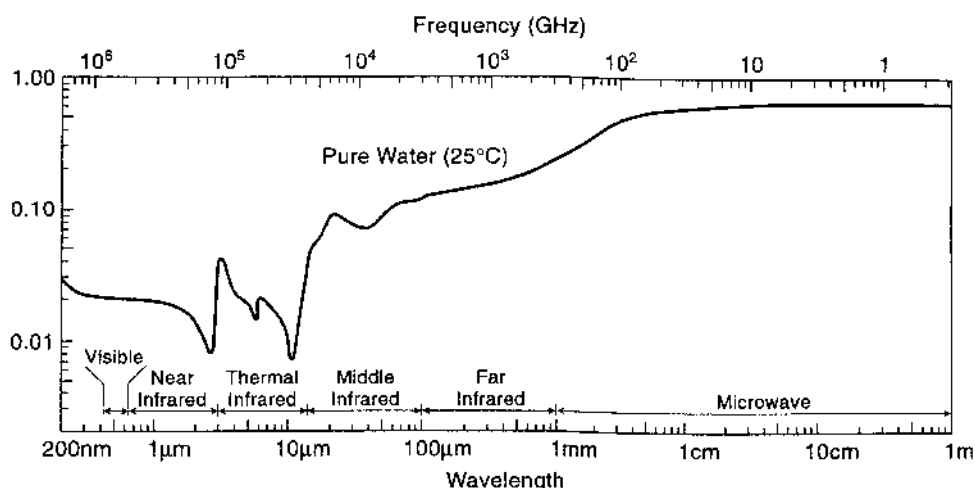
**Obrázek D3.9.3:** *Geometrická interpretace single- a dual-satellite crossovers (SSC a DSC) pro jednu a dvě různé dráhy*

Mezi vzestupnými a sestupnými oblouky jedné jediné konkrétní dráhy (jako je na obr. D3.9.2) existuje jeden typ křížících se bodů. Pokud rozdíl  $r_a - r_d$  nahradíme rozdílem  $r_d - r_a$ , změní

se jen znaménko. Pro jednu dráhu máme *single satellite crossovers* (SSC). Pro dvě dráhy (rozumí se s různým sklonem a hlavní poloosou) existují **právě čtyři** typy *dual satellite crossovers* (DSC), a to AA, AD, DA a DD. Označili jsme prvním/druhým písmenkem A vzestupný nebo D sestupný oblouk. Pro SSC by pak bylo AD = -DA (AA či DD neexistují). Lepší orientaci poskytuje obr. D3.9.3. Více o SSC a DSC ve výkladu o Rosboroughově teorii (kap. D3.9.6.4).

### **D3.9.4 Vlastní altimetrická měření a jejich korekce**

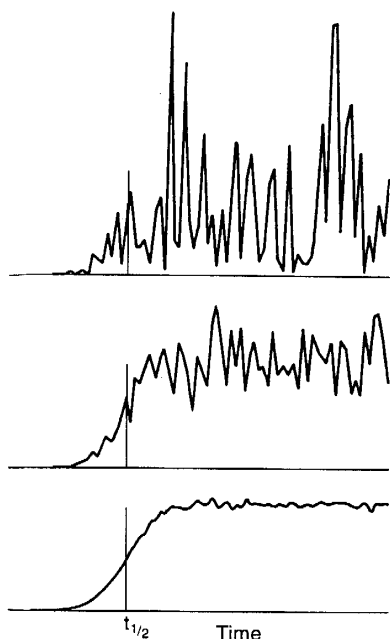
Radar nebo laser „vidí“ v jiných vlnových délkách než lidské oko. Proto je mořská hladina tmavá – albedo (odrazivost) je několik procent (bílý papír má 70%), zatímco pro radar je albedo povrchu oceánů značné. Obr. D3.9.4 ukazuje odrazivost od mořské hladiny (voda o teplotě 25° C) při kolmém dopadu signálu pro různé vlnové délky. Optimální pro altimetrii je část mikrovlnného spektra. Musí se ještě zvážit vliv pohlcování signálu atmosférickými vodními parami nebo kyslíkem na vybraných frekvencích, navíc různý pro různé zeměpisné šířky (více Fu a Cazenave, 2001). Družicové altimetry pracují na frekvencích 2-20 GHz (připomeňme, že 1 gigahertz =  $10^9$ /s). Rozlišují se pásma (bands) *S* (1.6-4.2 GHz), *L* (4.2-5.8), *X* (5.8-10.9) a *K<sub>u</sub>* (10.9-20 GHz).



**Obrázek D3.9.4:** Albedo signálu při kolmém dopadu k mořské hladině pro různé vlnové délky. Nejvhodnější frekvence pro družicové radarové altimetry jsou 2-20 GHz. Např. TOPEX má altimetry dva na 5.3 a 13.6 GHz (vlnová délka 5.7 a 2.2 cm).  
Převzato z Fu a Cazenave (2001).

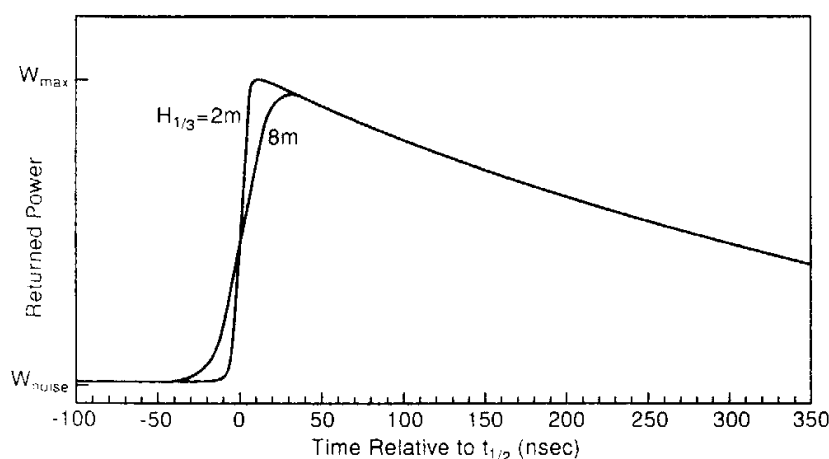
Signál vyslaný altimetrem musí být co nejkratší. Požadavku přesnosti měření  $\pm 1$  cm by odpovídal signál dlouhý jen 30 pikosekund ( $1 \text{ psec} = 10^{-12} \text{ s}$ ). K tomu by m.j. byla potřeba velká anténa a obrovský výkon radaru. Proto se používá lineárně frekvenčně modulovaný pulz (*chirp*), pulz „speciálně tvarovaný“, komprimovaný.

Signál z družice má určitou rozbíhavost a na hladině vytvoří *footprint* (otisk), jehož rozměr bychom rádi volili tak, aby bylo možné studovat požadované oceánografické jevy. Pro radarové altimetry je typický průměr stopy signálu na mořské hladině stovky metrů až 10 km, pro laserový altimetr pro měření nad zaledněným terénem je stopa mnohem menší.



Altimetr je schopen generovat až tisíce pulzů za sekundu. Pro přesné určení tranzitního času a tím i výšky je třeba provést průměrování. Zvýšení formální přesnosti měření ukazuje obr. D3.9.5., kde se uvažuje průměr z jednoho, 25 a 1000 pulzů. Přesnost také závisí na stavu hladiny moře – s většími vlnami je určení výšky méně přesné. Moře označujeme jako klidné, když jsou na něm vlny s výškou pod 0.5 m. Pro vlny nad 4 m v dané oblasti (např. bouře) se měření vynechají a měří se až při dalším přeletu. Stav náběžné hrany signálu přijatého po odrazu od hladiny obráží velikost vln. Na obr. D3.9.6 je simulována situace pro dvoufrekvenční altimetr na družici TOPEX pro dvě různé výšky vlnění. Veličina  $H_{1/3}$  je významná výška vln SWH (empiricky stanovovaná veličina).

**Obrázek D3.9.5:** Průměry z 1, 25 a 1000 (odshora dolů) simulovaných nezávislých časových sérií osvětlovaného povrchu v případě Gaussovského rozdělení výšek vln.



**Obrázek D3.9.6:** Náběžné hrany navraceného signálu pro  $H_{1/3} = 2$  a 8 metrů. Obr. D3.9.5 a 6 převzaty z (Fu a Cazenave, 2001).

Vyjmenujeme nyní hlavní korekce od altimetru na družici na oběžné dráze až po hmotný střed Země.

Altimetr není v těžišti družice; referenční bod, ke kterému se mají vztahovat korigované výšky vypočtené z tranzitního času, je někde v prostoru altimetrické antény. Konstrukteři musí příslušnou vzdálenost zjistit s přesností několika milimetrů. V případě změn prostorové orientace družice musíme znát orientační prvky v časech měření.

Signál z družice letí směrem k oceánu, odráží se od hladiny a vrací se zpět a je ovlivňován (zpoždován a ohýbán) atmosférou (a to v obou směrech).

*Ionosférická* korekce je způsobena přítomností volných elektronů ve vysoké atmosféře. Závisí na zeměpisné šířce. Má amplitudu kolem 10 cm a lze ji určit přesněji než na  $\pm 1$  cm. Měření na dvou frekvencích (jednoho radaru nebo více než jedním radarem na palubě) se minimalizuje.

*Troposférické* korekce jsou dvě. *Suchá* je vyvolána plynovými složkami atmosféry a je funkcí tlaku atmosféry a její teploty. Závisí na zeměpisné šířce. Amplituda stálé složky je cca dva metry, variabilní složka je 0.5 - 2 cm. Chyba v určení suché troposférické korekce je asi 1 cm. *Mokrá* část korekce zahrnuje vliv vodních par vody z mraků, je menší (20 cm), ale variabilní a známa snad na  $\pm 1$  cm. Je nejlépe ji měřit přímo z paluby družice souběžně s altimetrickými měřeními (radiometr).

*Sea state bias* též *electromagnetic bias* (EM) je systematická odchylka v měřené výšce pramenící z faktu, že radar neprůměruje výšku vln na střední geometrickou hodnotu, jak by to „viděly naše oči“, ale na jinou hodnotu. Vrchy a důlky vln na moři odrážejí různě a radarové měření je tím ovlivněno. Hodnota korekce se odvozuje jako procentuální část SWH.

### **D3.9.5 Výběr drah altimetrických družic (hlavní poloosa, sklon a excentricita)**

#### **D3.9.5.1 Obecně**

Nejdůležitější je výběr *hlavní poloosy dráhové elipsy*  $a$  či výšky letu  $H = a - R$  (kde  $R$  je referenční poloměr Země), *sklonu*  $I$  *roviny oběžné dráhy* družice k rovině zemského rovníku a *excentricity* dráhy  $e$ .

Obecně platí, že dráha nesmí být příliš nízká ani příliš vysoká. Dráha s výškou perigea pod 500 km by byla velmi rychle kontrahována odporem atmosféry a museli bychom ji často korigovat raketovými motorky (samozřejmě odpor atmosféry závisí i na sluneční aktivitě, který výrazně mění hustotu vysoké atmosféry a na poměru plochy vystavené působení gravitačních sil k hmotnosti družice). Příliš vysoká dráha, nad 2000 km, by kladla přílišné nároky na speciální přístrojové vybavení na palubě neboť by se příliš blížila Van Allenovým pásům nabitých částic obklopujících Zemi. Volí se proto výšky zhruba 800-1300 km. Podrobněji v D3.9.5.2.

Dráha je *rovníková*, má-li sklon  $I = 0^\circ$  nebo  $180^\circ$ , *přímá* (prográdní) pro  $0 < I < 90^\circ$ , *polární* pro  $I = 90^\circ$  a *nepřímá* (proti směru rotace Země, retrográdní) pro  $90^\circ < I < 180^\circ$ . Pokud by byl sklon dráhy příliš „malý“ (dráha blízká rovníkové), rozsah zeměpisných šířek pokrytých pozorováními by nemusel stačit cíli experimentu. Pokud by byla dráha blízká polární, nedefinovaly by se dobře crossovers. Proto se volí sklon „velký“, ať už na přímé či retrográdní dráze, např.  $66^\circ$  nebo  $98.5^\circ$ ,  $108^\circ$  atp. Vyvarovat bychom se měli i sklonů, kde dochází k aliasingu se slapovými vlivy (více Klokočník et al., 1994). K volbě heliosynchronních drah viz komentář a obrázek níže v kap. D3.9.5.3.

Excentricitu volíme malou, čili dráhy altimetrických družic jsou skoro kruhové. Pro eliptické dráhy bychom měli výrazně jiné podmínky na funkci přístrojů na palubě kolem perigea a apogea. K volbě dráhy se zamrzlým perigeem, která vede k výběru specifické, malé excentricity, se ještě vrátíme (kap. D3.9.5.4).



### **D3.9.5.2. Výška letu**

Teoreticky v každém okamžiku je dráha se svou aktuální výškou letu v některé z dráhových rezonancí  $\beta/\alpha$ , kdy družice uskuteční  $\beta$  nodálních oběhů za  $\alpha$  hvězdných dnů a dráha družice se tak vůči pozemskému pozorovateli přesně opakuje po  $\alpha$  dnech. V oceánografii se hovoří o „repeat orbits“ a Exact Repeat Missions (ERM). Dráha se stále musí upravovat tak, aby požadovaná rezonanční podmínka byla splňována (úpravy dráhy raketovými motorky, frekvence úprav závisí především na hustotě atmosféry v daném prostoru a čase). Na rozdíl od ERM máme neovlivňované, v atmosféře „volně degradující dráhy“ pro geodetické aplikace (Geodetic Mission, GM). Jedna a táž družice může v průběhu své mise „pobývat“ třeba v několika režimech ERM a GM, dle dohody uživatelské komunity. Mezi režimy musí změnit dráhu pomocí raketových motorků. Každý typ dráhy se hodí pro jiné účely.

Pojem *dráhové rezonance* je pro volbu altimetrických drah velmi důležitý, takže čtenář by se měl vrátit ke kap. 2.3.3., příp. i k Dodatku D2.3.3, ze kterých teď budeme čerpat a teprve pak pokračovat v četbě tohoto materiálu.

Z rovnic odstavce D2.3.3 jsme pro dané střední  $I$ , za předpokladu efektivně kruhové dráhy a pro vybraný rozsah  $H$  (nebo  $a$ ) spočetli ta  $H$  (nebo  $a$ ), která odpovídají rezonancím  $\beta/\alpha$ . Aplikace pro GRACE je na obrázku v kap. 4, pro CHAMP na obr. D2.3.3.2b z Dodatku D2.3.3. Nyní potřebujeme příklad pro altimetrickou družici a tak byla vybrána dráha typu ERS (platí pro ERS 1, 2 i ENVISAT) s  $I = 98.5^\circ$ . Výsledek je na obr. D2.3.3.2a o rezonancích. ERS 1 byla vypuštěna na dráhu v rezonanci  $\beta/\alpha = 43/3$  (tomu odpovídá střední  $a = 7154$  km, posléze byla přesunuta na  $\beta/\alpha = 501/35$  ( $a = 7159$  km), čímž splnila oceánografické úkoly a pak byla ponechána jako GM k mapování oceánského geoidu. Také SEASAT měnil dráhu, ze 43/3 na 244/17. GEOSAT byl na 244/17, pak GM. TOPEX/Poseidon (T/P) i JASON jsou na vyšších drahách, kolem 1300 km s  $\beta/\alpha=127/10$ .

### **D3.9.5.3. Heliosynchronní dráhy**

Pro dálkový průzkum bývá požadován dlouhodobě konstantní úhel osvětlení přístrojů Sluncem. Můžeme chtít a dá se splnit, aby např. Slunce pro speciální dráhu jakoby stále vycházelo či zapadalo nebo aby dráha byla chvíli na přímém slunci, chvíli ve stínu. Dráha splňující podmínku konstantního osvětlení je *heliosynchronní* (*sun-synchroneous*).

Pro otáčení uzlu dráhy díky  $C_{2,0}$  známe Lagrangeovu planetární rovnici, viz (2.3.16). Přímá dráha „couvá“, polární je teoreticky stabilní, u retrográdní dráhy uzel prograduje. Požadujeme, aby změna astronomické délky Slunce byla stejná jako změna uzlu dráhy. Na obr. D3.9.7 se z pozice „a“ ve dráze kolem Země dostáváme po čase do pozice „b“. Uzel se otočil o stejný úhel jako postoupila Země na dráze kolem Slunce.

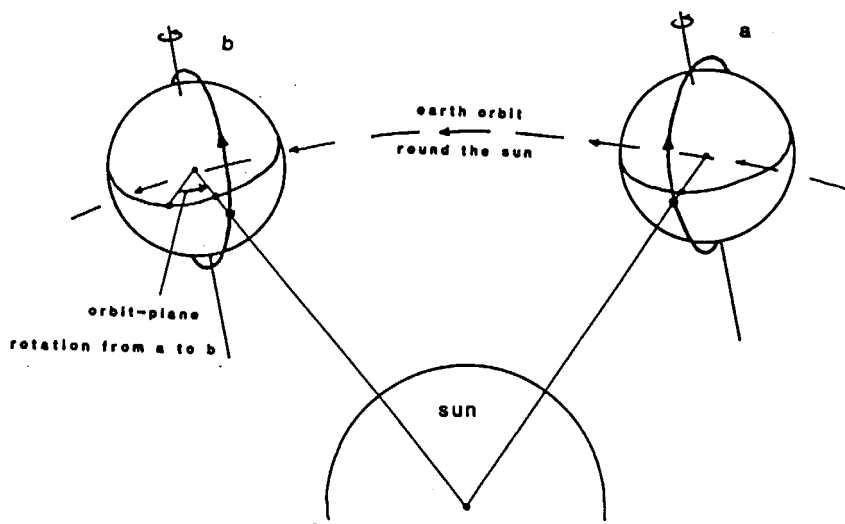
Berme „modelovou“ délku středního Slunce, pohybujícího se rovnoměrně po rovníku a ne po ekliptice. Pro denní změnu délky  $L$  platí

$$\dot{L} = 2\pi/365.2422 \cong 0.9856 \text{ stupně za den,}$$

kde 365.2422 dní je délka tropického roku. Nyní žádáme, aby  $\dot{\Omega}$  byla stejně veliká. Pak z (2.3.16) dostaneme

$$(D3.9.3) \quad \dot{\Omega} \approx -(GM)^{1/2} C_{20} R^2 a^{-7/2} (1-e^2)^2 \cos I$$

Výsledek (D3.9.3) primárně závisí na sklonu dráhy, sekundárně na hlavní poloose a excentricitě dráhy. Vidíme, že jen retrográdní dráha může (viz  $-\cos I$ ) být heliosynchronní. Pro výšky letu kolem 800 km vychází heliosynchronní sklon kolem 98.5 stupně.



**Obr. D3.9.7:** Heliosynchronní dráha. Precese uzlu dráhy družice  $2\pi/365.2422$  musí být kladná a stejná jako rychlost, se kterou se otáčí Země kolem Slunce. Počáteční vybraná orientace dráhy družice vůči směru ke Slunci se pak dlouhodobě nemění (v praxi se mění jen málo).

#### D3.9.5.4. Dráha se zamrzlým perigeem

Družici lze umístit na dráhu s efektivně konstantním  $\omega$ , tj vzdáleností perigea od výstupného uzlu (*frozen perigee*). Z toho vyjde požadavek na určitou, malou, ale nenulovou hodnotu excentricity. Vezměme Langrangeovy planetární rovnice pro  $e$  a  $\omega$  alespoň s prvním lichým zonálním členem  $C_{3,0}$

$$(D3.9.4a) \quad \dot{e} = -\frac{3}{8} n C_{3,0} \sqrt{7} \left(\frac{R}{a}\right)^3 (1-e^2)^{-2} \sin I (1-5 \cos^2 I) \cos \omega$$

$$(D3.9.4b) \quad \dot{\omega} = \omega_{2,0} [1 + \omega_{3,0}] = \omega_{2,0} \left[ 1 + \frac{C_{3,0} \sqrt{7}}{C_{2,0} \sqrt{5}} \left(\frac{R}{a}\right) (1-e^2)^{-1} S_I \frac{\sin \omega}{e} \right],$$

kde  $S_I = (\sin^2 I - e \cos^2 I) / \sin I \cong \sin I$  pro malé  $e$ . Pro změnu v  $\omega$  díky samotnému  $C_{2,0}$  platí (2.3.16). Zkusme zvolit

$$(D3.9.5) \quad e = -\frac{C_{3,0} \sqrt{7}}{C_{2,0} \sqrt{5}} \left(\frac{R}{a}\right) (1-e^2)^{-1} S_I$$

Pak (D3.9.4b) přejde na tvar

$$(D3.9.6) \quad \dot{\omega} = \dot{\omega}_{2,0} - \dot{\omega}_{2,0} \sin \omega$$

Rovnice (D3.9.6) se anuluje buď pro  $\dot{\omega}_{2,0} = 0$ , tj pro tzv. kritický sklon (kap. 2.3.1) anebo pro  $\omega=90^\circ$  pro libovolný sklon.

### **D3.9.6 Historie družicové altimetrie**

Je bezesporné (a přineseme posléze názorné ukázky), že družicová altimetrie se za posledních dvacet let stala největším přínosem pro určení parametrů gravitačního pole Země a detailního oceánského geoidu a pro příslušné geofyzikální interpretace. Stalo se však mnohem více, jak někteří jasnozřivě předpovídali (Lundquist 1967, Lundquist et al, 1969): díky dosažené decimetrové (cca před 10ti lety) a nyní centimetrové přesnosti určení dráhy altimetrické družice TOPEX/Poseidon (T/P) a nyní JASON v radiálním směru (t.j. ve směru měření) dnes altimetrická měření přispívají oceánografům ve studiu topografie oceánu a časových variací topografie včetně zajímavých anomálních jevů jako je El Niño. Jak se zvyšovala přesnost měření a přesnost určení radiální složky dráhy družic nesoucích altimetry, rozšiřoval se i obzor aplikací altimetrických měření, od geodézie, dráhové dynamiky družic a geofyziky, po oceánografii a klimatologii. Současně je ale čím dál obtížnější postoupit o další krůček v přesnosti, neboť to znamená interakci řady oborů. Například s korekcemi altimetrických družic nemůže geodet jako uživatel měření nic dělat než je podle návodu jiných využít. Pokud je autoři zpřesní a přepočtou, čeká totéž uživatele.

První, technologické experimenty družicového altimetru proběhly na amerických kosmických lodích *Skylab* III a IV (1973-4). Od družice *GEOS 3* (vypuštěna v r. 1975), mající poprvé praktické geodetické použití tj. určení  $N$  se submetrovou chybou, jsme se přes americké družice *SEASAT* (1978) a *GEOSAT* (1985-1990) a americko-francouzský *TOPEX/Poseidon* (TOPOgraphic Experiment, NASA+francouzský CNES, 1992-2004), dále *T/P*, a evropskou *ERS 1* (European Remote Sensing satellite ESA, 1991-2000) dostali až k dnešním altimetrickým družicím *ERS 2* (ESA, 1995-dosud), *GFO* (Geosat Follow-On, USA 1998-), *JASON* (Joint Altimetry Satellite Oceanography Network, NASA+CNES 2001-) a *ENVISAT* (ESA, 2002-). Až do roku 1991 lze hovořit o experimentální družicové altimetrii, poté již o "altimetrickém provozu". Altimerická měření alespoň z jedné družice jsou kontinuálně k dispozici. Obrázky a popisy družic přinášíme v kapitole 4. Pro starší družice jsou též v Klokočník et al. (1994).

*Výběr dráhy.* Dráhy všech zmíněných družic až na *T/P* a *JASON* jsou ve výšce kolem 800 km, *T/P* a *JASON* kolem 1300 km. Všechny až na *T/P* a *JASON* mají retrográdní dráhy, série *ERS 1*, *2* a *ENVISAT* mají dráhu navíc heliosynchronní. *T/P* a *JASON* jsou na stejných prográdních drahách s  $I = 66^\circ$  (krátkou dobu po vypuštění *JASONu* létala dvojice *JASON + T/P* v tandemu, při kterém se průměty drah z jedné dostaly přesně mezi průměty drah z druhé družice a poskytly tak dvojnásobnou hustotu měření). Všechny dráhy bez výjimky jsou téměř kruhové. Všechny měly za svůj aktivní život fázi alespoň jedné „repeat orbit“ (pro oceánografii). *SEASAT* fungoval jen asi čtvrt roku, jinak družice jako *ERS 1* či *T/P* předčily svou výdrž očekávání.

*Určení dráhy.* Prostředky k určení dráhy se dnes kombinují s cílem určení „centimetrové dráhy“ v každém okamžiku. Používají se koutové odrážače pro SLR, high-low

SST z GPS, i vlastní altimetrie. Vedle toho jsou družice vybaveny anténami pro spojení se systémem PRARE či DORIS (ten nyní převládá). Starší družice jako *GEOS* či *SEASAT* SST neumožňovaly, *GEOSAT* neměl koutové odrážedlo. PRARE na *ERSu* 1 selhal, takže dráha závisela jen na SLR. Nyní je PRARE aktivní na *ERS* 2, ostatní nové altimetrické družice mají DORIS. Více podrobností v Klokočník et al (1994), v kap. 3.6.1 a 3.6.2 a na řadě webových stránek.

PRARE a DORIS nejsou tak přesné jako SLR, ale měření mohou probíhat kontinuálně bez ohledu na počasí, takže pokrytí dráhy měření je optimální. Tyto postupy určení dráhy jsou na ostatních nezávislé. PRARE (Precise Range And Range-rate Equipment) je německý mikrovlnný dvoucestný dopplerovský systém. Družice vysílá signál k pozemským stanicím a ty jej vracejí na družici. DORIS (Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite) je francouzský systém, který využívá klasická dopplerovská měření. Vysílače jsou umístěny na Zemi a stále vysílají do prostoru na dvou frekvencích a družice přelétající nad nimi jejich signály přijímají. Na družici musí být ultrastabilní oscilátor (stabilita  $5 \times 10^{-23}/10-100$  vteřin). Síť pozemních stanic je již dosti hustá (přes 50 stanic) a je snaha volit je tak, aby DORIS navazovala na systém ITRS. U obou postupů musí být sběrné a zpracovatelské centrum na Zemi.



**Obrázek D3.9.8:** Anténa DORIS – vysílač na Zemi (stanice Socoro, Mexico), vlevo, a přijímač na družici, vpravo.

Výsledků ze jmenovaných misí jsou spousty. Několik reprezentativních citací sborníků dnes již klasických prací následuje: *SEASAT* (J. Geophys. Res., 87, celé číslo C5, 1982; a též 88, C3, 1983), *GEOSAT* (Johns Hopkins APL Technical Digest, April-June 1987, 8, celé číslo 2; J. Geophys. Res. 95, č. C3, 1990), *ERS 1* (ESA Bull. č. 65, "ERS 1 Special Issue", Feb.

1991), *T/P* (m.j. J. Geophys. Res., 99, celé číslo C12, 1994), Proceedings of the *Symposium on 15 Years of Progress in Radar Altimetry*, March 2006 Italy, CD s referáty. Řada informací je na webovských stránkách NASA JPL, CNES, AVISO, GFZ a dalších.

Zatím všechny zmíněné družice měly či mají radarové (přesněji řečeno radiolokační) výškoměry, ale existují i *výškoměry laserové*. Nejprve se (v období studené války) zkoušely mimo planetu Zemi, v rámci "Hvězdných válek" na oběžné dráze kolem Měsíce (mise Clementine, viz kap. D3.9.8.8. Poté došlo i na Zemi, projekt se jmenoval Shuttle Laser Altimetry (Schutz, 1997) pro studium topografie pevniny, ledové příkrývky a atmosféry. Realizovaná družice rutinně pozorující hlavně Grónsko a Antarktidu se jmenuje *ICESat* (Ice, Cloud and land Elevation Satellite), vypustila ji NASA a pracuje od r. 2003 na dráze s výškou  $H = 600$  km a sklonem  $I = 94^{\circ}$ . Má být schopna „zmapovat“ změny výšky ledové pokrývky pouhých 1.5 cm za rok s rozlišením 100x100 km. Podobný experiment CRYOSAT ESA zkrachoval díky neúspěšnému startu. ESA připravuje druhou verzi.

### **D3.9.7 Radiální chyba dráhy**

#### **D3.9.7.1 Obecné poznámky**

Chceme-li odvozovat fyzikální veličiny uvedené v rovnici (D3.9.1) s přesností například na jednotlivé centimetry, pak musíme znát  $r$  družice v okamžiku měření s ještě větší přesností. Znat polohu (a rychlost) znamená znát dráhu čili *dráhové parametry* (elementy). Požadavek centimetrové přesnosti alespoň v radiálním směru (kde jej dosáhnout je z jistých důvodů přece jen snazší než například ve směru podél dráhy, tj. ve směru vektoru rychlosti) byl obrovskou výzvou pro *dráhovou dynamiku umělých družic Země*, což je obor na pomezí astronomie (aplikované nebeské mechaniky), teorie potenciálu, geofyziky a geodézie. Dnes se cílí – centimetrové radiální chybě – blížíme v případě drah družic *T/P*, *JASON* a *ENVISAT*.

Družice se pohybuje kolem Země v poli rušivých zrychlení gravitačního i negravitačního původu (vliv gravitačního pole Země samotné, přímý i nepřímý (slapový) vliv Měsíce, Slunce, popř. planet; odpor atmosféry, tlak slunečního záření přímého i odraženého od Země v různých vlnových délkách, aj.). Nyní jde o to, jak je dráhová dynamika schopna jednotlivé vlivy přesně určit.

V minulosti dominovaly v radiální chybě dráhy příspěvky od nepřesně známých parametrů statického gravitačního pole Země (harmonických geopotenciálních koeficientů), a to pro dráhy všech altimetrických družic. Radiální chyba *GEOSu 3* byla asi metrová, pro *GEOSAT* již submetrová, s tehdy existujícími modely Země (jako GEM 9). Studovat fenomény s amplitudami decimetrovými přirozeně ještě nešlo. Negravitační poruchy od atmosféry byly určovány nikoli analyticky, ale pomocí empirických parametrů odhadovaných spolu s dráhovými elementy, aniž bychom se snažili dopátrat fyzikální podstaty těchto parametrů. V současnosti pro *T/P* a *JASON* jsou chyby gravitačního původu již na úrovni  $\pm 1$  cm, tedy srovnatelné nebo menší než chyby korekcí altimetrických měření. V radiální chybě pro *T/P* dominují reziduální chyby modelu tlaku slunečního záření (např. Antreasian 1992; Luthcke a Marshall, 1992, Shum et al, 1993). Pro *GEOSAT*, *ERS 1* a *ERS 2* s modely gravitačního pole jako byl EGM 96 nebo GRIM 5 (cca 1998) byla radiální chyba decimetrová. Pro nejnovější modely Země vyhotovené s příspěvkem dat z družic *CHAMP* a *GRACE* lze již věřit, že v radiální chybě bylo dosaženo subcentimetrové úrovně z hlediska chyb působených nepřesnostmi modelů gravitačního pole Země.

### **D3.9.7.2 Radiální chyba jako funkce sklonu roviny dráhy altimetrické družice**

Geocentrický průvodič družice  $r$  lze napsat

$$(D3.9.7) \quad r = a (1 - e \cos E),$$

kde  $a, I, e, E$  jsou postupně hlavní poloosa dráhové elipsy, sklon a excentricita dráhy a excentrická anomálie. Totální diferenciál (D3.9.7) je

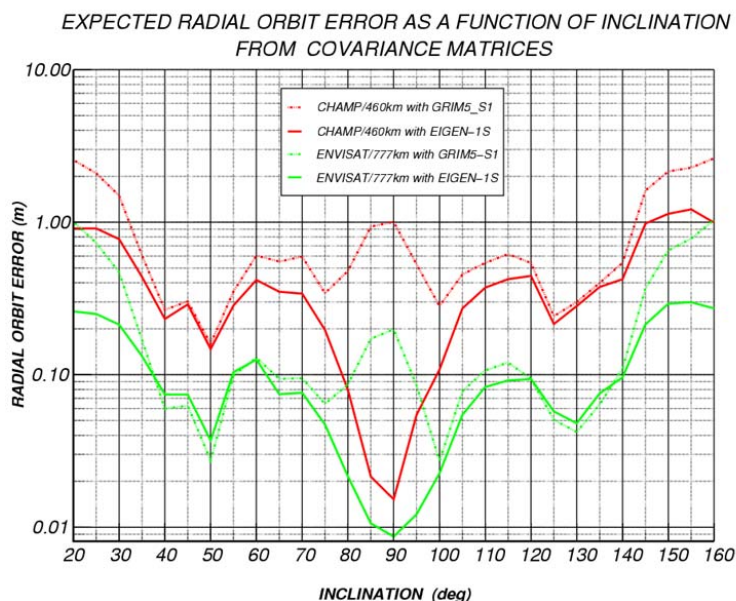
$$(D3.9.8) \quad \Delta r = (1 - e \cos M) \Delta a + a(e - \cos M - e \cos 2M) \Delta e + a e \sin M \cdot \Delta M.$$

K převodu  $E$  na střední anomálii  $M$  použijeme Besselovy funkce (viz např. Rosborough, 1986) a odvodíme, že

$$(D3.9.9) \quad \Delta r_{imp}^0 = na \left( \frac{R}{a} \right)^l F_{imp}(I) \left[ \frac{2(l-2p)}{\psi_{imp0}} + \frac{4p-3l-1}{2\psi_{imp1}} + \frac{4p-l+1}{2\psi_{imp(-1)}} \right] \cdot S_{imp0} = \\ = D_{imp} \cdot S_{imp0},$$

kde  $n$  je střední denní pohyb družice,  $F_{imp}(I)$  jsou funkce sklonu (odst. D2.3) a  $\psi$  jsou časové derivace úhlu  $\psi_{impq}$ . Ve výrazu  $S_{impq}$  jsou obsaženy  $C_{lm}, S_{lm}$  takto:  $S_{impq} = C_{l,m} \cos \psi_{impq} + S_{l,m} \sin \psi_{impq}$ . (D3.9.9) je výraz pro poruchu v radiálním směru (zde v určitém zjednodušení), která tu je díky existenci gravitačního pole Země. Ještě musíme učinit jeden krok, abychom se dostali k *radiální chybě* působené nepřesnou znalostí parametrů gravitačního pole  $C_{lm}, S_{lm}$  a to je, že na rovnici (D3.9.9) musíme aplikovat zákon o přenosu středních kvadratických chyb. Ve výsledném vzorci pro chybu v radiální složce dráhy budou opět pomalu proměnné elementy  $a$  a  $I$  (které lze vzít jako nominální hodnoty středních elementů), ale místo  $C_{l,m}, S_{l,m}$  tam budou „chyby“  $C_{l,m}, S_{l,m}$ , tj členy příslušné variančně-kovariační matice (COVAR  $C_{l,m}, S_{l,m}$ ). Více v Rosborough 1986, Wagner 1985, Klokočník et al, 1994.

K objektivnímu výpočtu radiální chyby je třeba vzít plnou (COVAR  $C_{l,m}, S_{l,m}$ ), nejen variance, do co nejvyššího stupně  $l$  (stačí 70, pokud v modelu jsou) a s uvážením poruch dráhy, které mají periodicitu srovnatelnou (ne delší) s délkou dráhového oblouku, ze kterého byla dráha družice určována.



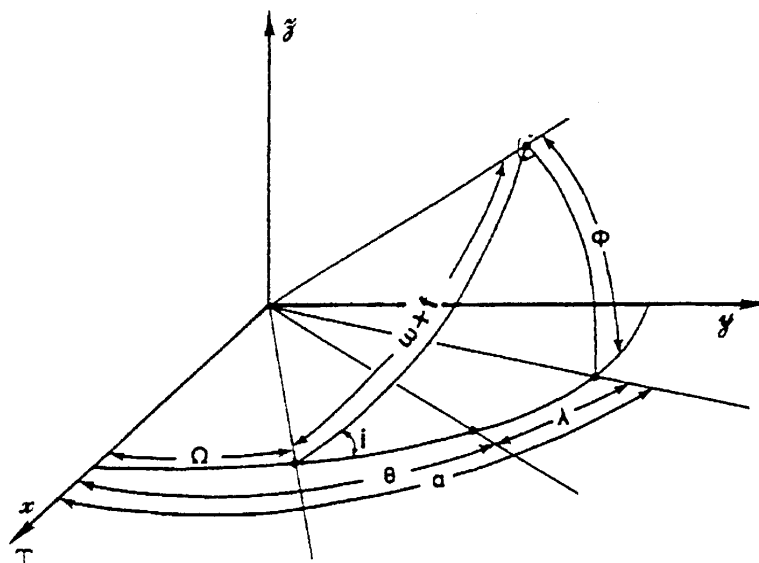
**Obrázek D3.9.9:** Radiální chyba průvodiče dráhy jako funkce sklonu a plně variančně-kovarianční matice harmonických geopotenciálních koeficientů uvedených modelů gravitačního pole Země.

Na obr. D3.9.9 vidíme ukázkou vývoje radiální chyby. Na ose  $x$  je sklon, na ose  $y$  v logaritmické stupnici je radiální chyba v metrech. Pro model GRIM5S1 vidíme typický stav před zahrnutím dat z družic CHAMP a GRACE do modelů Země. Radiální chyba má lokální maximum u polárních drah (kde bylo méně dobrých dat). Už i dnes historický model Eigen-1S s krátkým intervalem dat z družice CHAMP ukazuje výrazné zlepšení pro polární zónu. Samozřejmě také platí, že radiální chyba nižší dráhy družice CHAMP je vyšší než radiální chyba dráhy družice ENVISAT. Nejnovější modely vykazují plochou a miniaturní hodnotu radiální chyby (pod  $\pm 1$  cm) pro všechny sklonové dráhy altimetrických družic.

### **D3.9.7.3 Radiální chyba jako funkce zeměpisné šířky a délky subsatelitního bodu**

Je potřebné znát radiální chybu jako funkci sklonu a mít možnost přímého porovnání mezi modely Země a drahami družic, jako na obr. D3.9.8. Ten nám však nic neprozradí o případných variacích radiální chyby se zeměpisnou resp. geocentrickou šířkou  $\varphi$  a délkou  $\lambda$  pro daný model a dráhu, které mohou být značné a mohou ovlivnit kvalitu určení dráhy. Pro tento podrobnější „vhléd“ potřebujeme přetransformovat (D3.9.9) tak, aby v ní vystupovaly  $\varphi$  a  $\lambda$ . Pomůže nám obr. D3.9.10.

Na obrázku D3.9.10 je počátek souřadnic v hmotném středu Země, osa  $x$  míří k jarnímu bodu, osy  $xy$  leží v rovině rovníku v systému spojeném se Zemí,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $i$ ,  $f$ ,  $\theta$  jsou postupně rektascenze výstupného uzlu dráhy družice  $S$ , vzdálenost perigea od výstupného uzlu neboli argument perigea, sklon roviny dráhy, pravá anomálie, hvězdný čas;  $\varphi$  a  $\lambda$  jsou geocentrické souřadnice místa, pro které radiální složku či chybu počítáme (subsatelitní bod vůči  $S$ ),  $\alpha$  je rektascenze družice  $S$ , její deklinace je rovna geocentrické šířce. Odvození zde reprodukuje dle Rosborougha (1986), kap. 5.



**Obrázek D3.9.10:** Vysvětlení k transformaci ze systému spojeného s dráhou družice do systému vázaného k zemskému rovníku, potřebné k vyjádření radiální složky a chyby dráhy jako funkce zeměpisné šířky a délky.

Z obrázku vyčteme, že  $\lambda = \alpha - \theta$ , tedy i  $\lambda = \alpha - \theta + \Omega - \Omega = (\alpha - \Omega) + (\Omega - \theta)$  neboli  $\Omega - \theta = \lambda - (\alpha - \Omega)$ . V rovnici D3.9.9 pro efektivně kruhovou dráhu ( $v = M$ ) pro  $\psi_{lmp0}$  použijeme součtové věty a provedeme transformaci tak, že *siny* a *cosiny* budou mít argumenty  $(\alpha - \Omega)$ ,  $\lambda$  a  $(\omega + M)$ . Ve sférickém trojúhelníku se stranami  $(\omega + M)$ ,  $\varphi$  a  $(\alpha - \Omega)$  vyjádříme *sin*, *cos*  $(\alpha - \Omega)$  jako funkci  $(\omega + M)$ ,  $\varphi$  a  $i$ . V rovnici pro radiální složku tím už máme  $\varphi$ , ale stále ještě  $(\omega + M)$ . Vzorce se *sin*, *cos*  $(\alpha - \Omega)$  a  $(\omega + M)$  ze sférického trojúhelníku přetvoříme na výrazy s mocninami *sin*, *cos* [ $i$ ,  $\varphi$  a  $(\omega + M)$ ]. Zbývá transformovat  $(\omega + M)$  ve sférickém trojúhelníku s vrcholem *S* na obr. D3.9.9 tak, abychom zavedli závislost jen na  $\varphi$  a  $i$ . Pro  $\sin(\omega + M) = \sin\varphi / \sin i$ , což je jednoduché, ale pro  $\cos(\omega + M)$  bude znaménko kladné i záporné. Tato nejednoznačnost zmizí, když si uvědomíme, že  $\cos(\omega + M)$  je kladný pro první a čtvrtý kvadrant  $(\omega + M)$  a záporný pro druhý a třetí, čili kladný pro vzestupný a záporný pro sestupný oblouk dráhy.

Výsledný vzorec pro radiální poruchu dráhy pak vypadá takto:

$$(D3.9.10) \quad \Delta r = \sum_{l=2}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l D_{lmp} \tilde{\Phi}_{lmp}^c (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) \pm \sum_{l=2}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l D_{lmp} \tilde{\Phi}_{lmp}^s (C_{lm} \cos m\lambda - S_{lm} \sin m\lambda) ,$$

kde  $D_{lmp}$  závisí na sklonu a hlavní poloose a  $\tilde{\Phi}_{lmp}^{c,s}$  jsou funkcemi sklonu a šířky. Podrobnosti v Rosborough (1986) či Klokočník et al., 1994.

Zavádí se



$$(D3.9.11) \quad Q_{lm}^{c(s)} = \sum_{p=0}^l D_{lmp} \tilde{\Phi}_{lm}^{c(s)}$$

jako funkce vlivu (*influence functions*). Výraz (D3.9.11) přepíšeme jako

$$(D3.9.12) \quad \Delta r = \Delta \gamma + \Delta \delta,$$

kde

$$(D3.9.13a) \quad \Delta \gamma = \sum_{l=2}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l Q_{lm}^c (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda)$$

a

$$(D3.9.13b) \quad \Delta \delta = \sum_{l=2}^{l_{\max}} \sum_{m=0}^l Q_{lm}^s (C_{lm} \cos m\lambda - S_{lm} \sin m\lambda).$$

Ještě musíme učinit jeden krok, tak jako v předchozí kapitole, abychom se dostali k *radiální chybě* a to je opět aplikace zákona přenosu středních kvadratických chyb. Ve výsledném vzorci pro chybu v radiální složce dráhy budou místo  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  členy (COVAR  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$ ). Radiální chyba dráhy způsobená gravitačním polem Země, vyjádřená jako funkce zeměpisné šířky a délky, má dvě složky (což se ví od Rosborougha 1986, ale tuší již od Anderleho a Hoskina, 1977). Jedna část je *geograficky korelovaná* (odpovídá rovnici D3.9.13a) a je stejná pro  $r_a$  i  $r_d$ , kdežto druhá část je proměnná kolem geograficky korelované složky, tzv. složka *variabilní* či *antikorelovaná* (odpovídá rovnici (D3.9.13b)); ta má pro  $r_a$  i  $r_d$  stejnou velikost, ale opačné znaménko. Pro SSC komponenta korelovaná vymizí a variabilní se objeví v dvojnásobku (více v následující kapitole). Obě složky jsou komplikovanými funkcemi sklonu roviny dráhy k rovníku, hlavní poloosy dráhové elipsy, zeměpisné šířky a řádu  $m$  harmonických geopotenciálních koeficientů. Jejich podrobná znalost je důležitá pro studium radiální chyby dráhy, chyb SSC a DSC a reziduálních chyb negravitačního původu; to je však velmi specializované téma (Klokočník et al., 1995, 1996, aj.).

#### **D3.9.7.4 SSC a DSC**

Podle definice SSC a DSC (kap. D3.9.3.) a s použitím Rosboroughovy teorie dostaneme okamžitě

$$(D3.9.14) \quad \Delta x \equiv \Delta r_a - \Delta r_d = (\Delta \gamma + \Delta \delta) - (\Delta \gamma - \Delta \delta) = 2 \Delta \delta$$

a tím pádem pro střední kvadratickou chybu SSC máme  $\sigma_{\Delta x} = 2 \sigma_{\Delta \delta}$ .

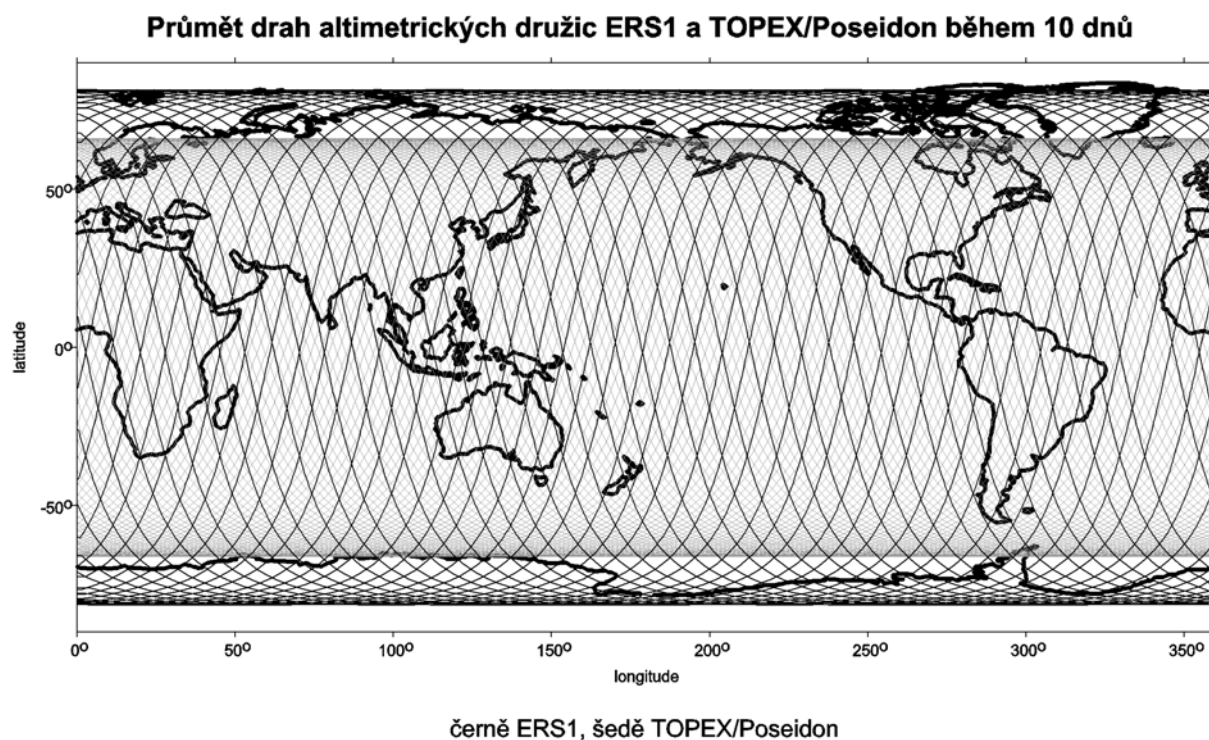
Pro DSC AD, DA, AA a DD dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta x_{12}^{AD} &\equiv \Delta r_1^A - \Delta r_2^D = (\Delta \gamma_1 + \Delta \delta_1) - (\Delta \gamma_2 - \Delta \delta_2) = (\Delta \gamma_1 - \Delta \gamma_2) + (\Delta \delta_1 + \Delta \delta_2), \\ \Delta x_{12}^{DA} &\equiv \Delta r_1^D - \Delta r_2^A = (\Delta \gamma_1 - \Delta \delta_1) - (\Delta \gamma_2 + \Delta \delta_2) = (\Delta \gamma_1 - \Delta \gamma_2) - (\Delta \delta_1 + \Delta \delta_2), \\ \Delta x_{12}^{AA} &\equiv \Delta r_1^A - \Delta r_2^A = (\Delta \gamma_1 + \Delta \delta_1) - (\Delta \gamma_2 + \Delta \delta_2) = (\Delta \gamma_1 - \Delta \gamma_2) + (\Delta \delta_1 - \Delta \delta_2), \\ \Delta x_{12}^{DD} &\equiv \Delta r_1^D - \Delta r_2^D = (\Delta \gamma_1 - \Delta \delta_1) - (\Delta \gamma_2 - \Delta \delta_2) = (\Delta \gamma_1 - \Delta \gamma_2) - (\Delta \delta_1 - \Delta \delta_2). \end{aligned}$$

Vidíme, že zatímco korelovaná složka radiální chyby pro SSC vymizela (což má neblahé následky pro některé aplikace SSC), pro DSC je přítomna a je pro všechny 4 typy DSC stejná.

Výrazy pro chyby DSC jsou složité a nebudeme je zde uvádět. Jsou v Klokočník et al 1994, 1995. Lze odvodit obecný výraz pro střední kvadratickou chybu zahrnující jak radiální chybu a její jednotlivé složky, tak SSC i DSC.

Ze čtyřech DSC lze vytvořit právě 12 kombinací (DD+DA), (DD-DA), (AA+AD), (AA-AD), (AA+DA), (AA-DA), (DD+AD), (DD-AD), (DA+AD), (DA-AD), (DD+AA) a (DD-AA). Ty mají zajímavé vlastnosti pro vyšetřování reziduálních chyb altimetrických dat negravitačního původu. (Klokočník a Wagner, 1999; Klokočník et al., 2000). Například (AA-AD) pro dvojici drah 1 a 2 vychází rovna  $-\Delta\delta_2/2$ . Pokud je dráha 2 vysoká a velmi dobře určená a dráha 1 nízká a nepřesně známá, máme v uvedené rovnici prostředek, jak z kombinace DSC drah 1 a 2 vytvořit veličinu téměř nezávislou na nepřesnosti parametrů gravitačního pole.



**Obrázek D3.9.11:** Průměty drah dvou různých družic na zemský povrch (ground tracks), vzestupný a sestupný oblouk dráhy v případě dráhy prográdní i retrográdní a pozice křížících se bodů (4 typy DSC, zmíněné již v kap. D3.9.3, zde precizované). Na obrázku jsou ground tracks z dráhy T/P (127/10),  $I=66^\circ$  a z dráhy typu ERS (43/3),  $I=98.5^\circ$

Pro správný výpočet radiální chyby a chyb SSC/DSC jako funkce zeměpisných souřadnic, platí tytéž podmínky jako v případě radiální chyby, vyjádřené jako funkce sklonu pro vybranou letovou hladinu (kap. D3.9.7.2, obr. D3.9.9).

V následujících ukázkách máme příklad vývoje SSC chyby v čase (od starších po novější modely pro danou dráhu) a ukázkou radiální chyby výstupného i sestupného oblouku, i

obou komponent radiální chyby pro daný model a vybranou dráhu. V prvním případě (obr. D3.9.12) jde o sérii pro nízkou dráhu typu ERS a modely GEM T2, JGM 2,3 a EGM 96.

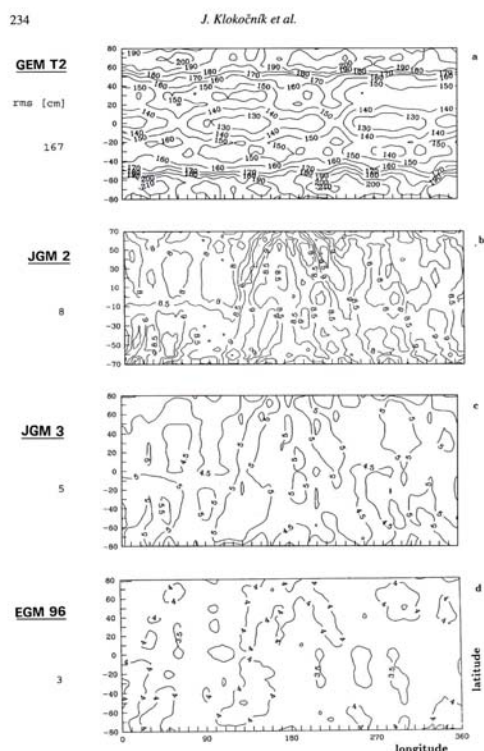


FIGURE 9 Evolution of single-satellite crossover error, for ERS 1 (501/35-orbit), with GEM T2, JGM 2, JGM 3, and EGM96 (4-day cut of orbit perturbations).

**Obrázek D3.9.12:** Chyba SSC pro dráhu typu ERS (ERM 501/35) jako funkce šířky a délky pro kalibrované kovarianční matice různých modelů Země, od velmi starého GEM T2 k novějšímu standardu EGM 96 (Lemoine et al., 1997). RMS chyby SSC jsou uvedeny u každého grafu vlevo. Vidíme markantní zmenšení chyb SSC, které je produktem razantního zlepšování modelů gravitačního pole v období cca 1985-2000. Na obr. s JGM 2 je dobře vidět jev často se vyskytující u starých modelů Země, kdy chyba „kopíruje“ složku podél dráhy (patrně díky nepřesně určeným některým harmonickým koeficientům). Čím modernější model, tím nejen menší amplituda chyby, ale také výrazně menší její variabilita s geografickou polohou. Pro soudobé modely Země jako je Eigen-GL05C (2007) m.j. s daty z družice GRACE je radiální a SSC chyba subcentimetrová a téměř neměnná s délkou, jako kdybychom ignorovali off-diagonální členy kovarianční matice. Patrně je přínos dat z moderních družic CHAMP a GRACE tak enormní díky jejich přesnosti i homogenitě.

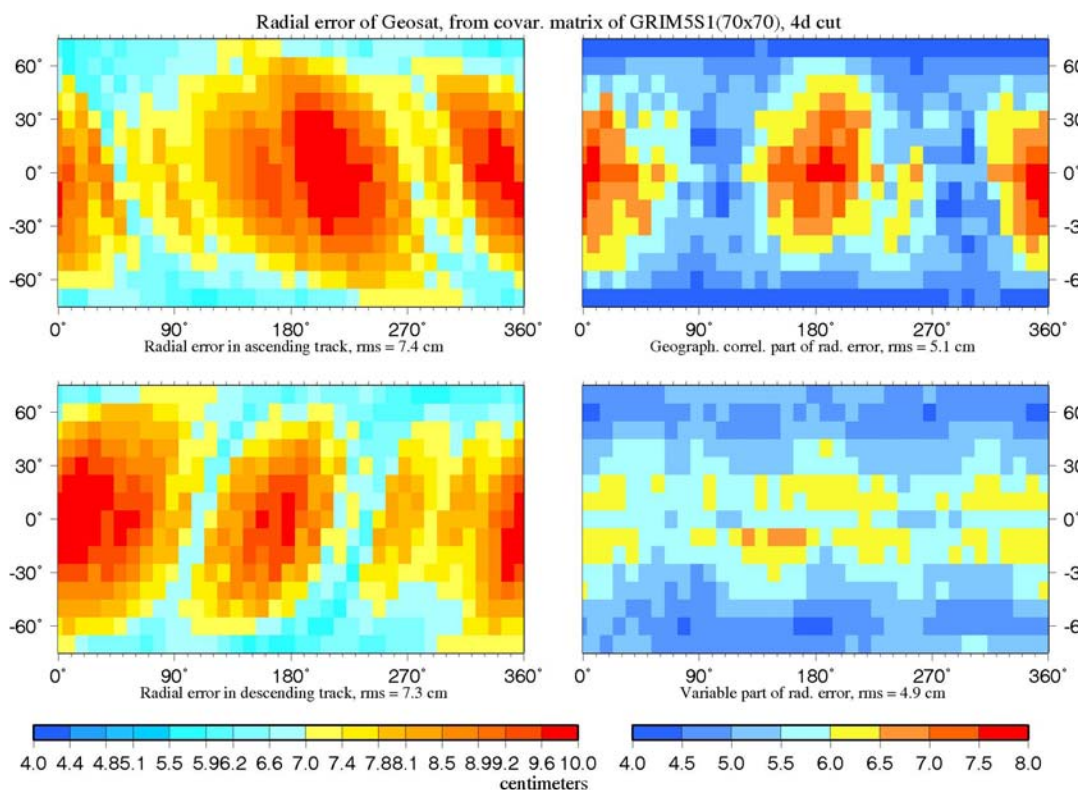
Ve druhém (obr. D3.9.13) jde o radiální chybu pro dráhu družice GEOSAT a kalibrovanou kovarianční matici modelu GRIM-5S1 do stupně a řádu 70. Vidíme geografickou závislost zejména radiální chyby pro vzestupný a sestupný oblouk kopírující směry ground tracks družice GEOSAT ( $I = 108^{\circ}$ ). Variace chyb v šířce a délce byly tehdy ještě značné, v rozmezí 4-12 cm s RMS kolem 7 cm pro radiální chyby u vzestupného/sestupného oblouku dráhy a kolem 5 cm pro geograficky korelovanou a variabilní složku radiální chyby. Pro současné modely jsou obrázky „zcela nezajímavé“, s malou a téměř neměnnou chybou.

## D3.9.8 Aplikace družicové altimetrie

### D3.9.8.1 Detailní oceánský geoid

Výška povrchu oceánu (sea surface height, SSH) nad referenčním elipsoidem je podle fundamentální rovnice (D3.9.1) rovna  $SST(v_i) + SST(p) + T_i + N$ . Tuto veličinu a ne samotné  $N$  často dříve publikovali jako výsledek altimetrie, jelikož  $SST$  i  $T$  nebyly dostatečně dobře známy a sotva oddělitelné od  $N$ . Například z dat družice SEASAT sestavili Marsh a Martin (1982) globální mapu SSH (a současně zpřesnili tehdejší modely gravitačního pole Země GEM 9-10 B přidáním altimetrie). Přesnost SSH byla 1-2 m, podle oblasti. Výčet prací by byl dlouhý, ale nelze opomenout práce Rappa (1981, 1982, aj) a jeho kolektivu a žáků z OSU (Ohio State University, Columbus). Rapp (1982) využil altimetrická měření z Geosu 3 a Seasatu a SSH vyrovnal metodou kolokací. Publikoval atlas SSH, z něhož uvádíme jeden

příklad (obr. D3.9.14a). Tečky ukazují místa altimetrických měření, ze kterých byl průběh "geoidu" odvozen.



**Obrázek D3.9.13:** Ukázky radiální chyby pro dráhu družice GEOSAT a kalibrovanou kovarianční matici modelu GRIM-5S1 (GFZ+CNES, Biancale et al 2000, Klokočník et al 2002) do stupně a řádu 70 s ignorováním poruch dráhy s periodou delší než 4 dny. Více příkladů je v (Klokočník et al., 1994, 1998, 2002).

Z řady současných prací zmiňme Cazenave et al (1996) a práce McAdoo a Marksové (1992) a Livermore et al (1994) hledající detailní mořský geoid, jeho  $N$ . Cazenavová využila data z družic ERS 1 a T/P, která zkombinovala a potlačila tak radiální složku chyby dráhy (lepší pro T/P) bez ztráty rozlišovací schopnosti (lepší pro geodetickou část mise ERS 1). Na mapách pro Atlantický, Tichý a Indický oceán jsou zřetelné geofyzikální fenomény jako hřbety a zlomové linie. Cílem prací jsou geofyzikální interpretace (stáří litosféry, objevy nových tektonických struktur dříve nerozlišitelných, podmořských hor, atd.). Například v Atlantickém oceánu dokumentují nové výsledky různou míru segmentace Středoatlantického hřbetu a některé fosilní struktury v severní části oceánu. Je zcela mimo technické možnosti těchto skript reprodukovat barevné atlasy detailního mořského geoidu, viz např. příručku Fu a Cazenave, eds., 2001).

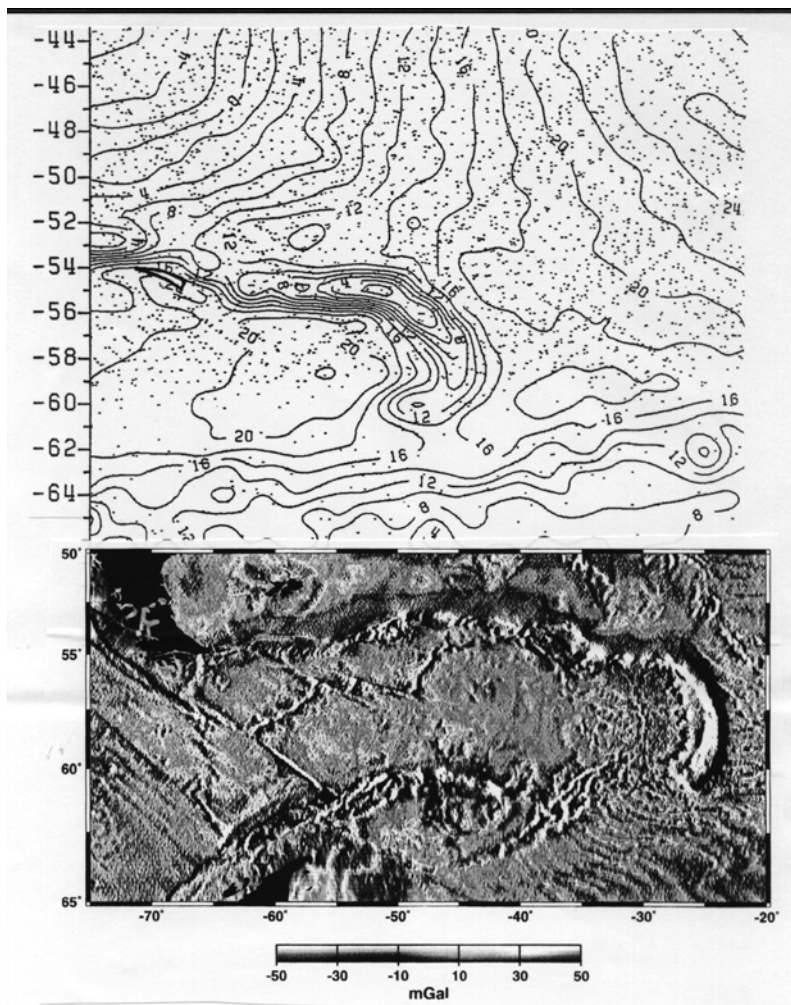
McAdoo a kolektiv (McAdoo a Marksová, 1992; Livermore et al, 1994) vytvořili nový postup použití altimetrických dat pro studium detailního regionálního oceánského geoidu. Nepracují s výškami či rozdíly výšek z altimetrie, ale s náklonem geoidu podél trasy měření altimetru. Z měřených SSH zkonstruují tížnicové odchylky orientované ve směru letu altimetru a kolmo k němu. Přitom odfiltrují "dlouhoperiodický signál" v altimetrických měřeních. Pak tyto tížnicové odchylky transformují na "běžné" tížnicové odchylky, jak je

známe z učebnic. Poté následuje transformace z tížnicových odchylek na tíhové anomálie (tzv. inverzní Vening-Meineszova transformace). Konečnou fází je grafické barevné a stínované zobrazení tíhových anomálií a jejich geofyzikální interpretace. Prezентují výsledky pro konkrétní oblasti jižních moří. Reprodukujeme z (Livermore et al., 1994) na obr. D3.9.14b oblast stejnou jako na obr. D3.9.14a.

Tam, kde jsou k dispozici tíhové anomálie z měření na lodích, jsou porovnány s altimetrií. Podobně slapové bóje poskytují výškové údaje. Na toto téma existuje řada prací v globálním i regionálním měřítku. Altimetrie už jednoznačně vede v rychlosti a globálnosti pokrytí měřeními, v jejich přesnosti i rozlišovací schopnosti.

### **D3.9.8.2 Družicová altimetrie pro určení parametrů gravitačního pole Země**

Altimetrie přispívá především ke zpřesnění harmonických geopotenciálních koeficientů  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  „vyšších  $(l,m)$ “ a k určení „vysokých  $(l,m)$ “, čili „jemné struktury“ gravitačního pole.



**Obrázek D3.9.14a,b:** Ukázka výsledků altimetrie z historických misí Geos 3 a Seasat (Rapp 1982, zde převýšení geoidu), a porovnání s novějšími výsledky (v tomto případě detailní tíhové anomálie) z měření ERS 1 a Geosatu (Livermore et al., 1994).



Poprvé se plná altimetrická data objevila v roli *testovacích dat* přesnosti modelů Země (např. Wagner a Lerch, 1978; Lerch et al., 1981, Rapp et al., 1991) ještě na modelech gravitačního pole nezávislá nebo záměrně ponechaná k nezávislému testování. Do modelů vlastních začala pronikat v letech 1977-1980, např. Hadgigeorge a Blaha, 1979; SAO SE VI (Gaposchkin, 1980); OSU 81 (Rapp, 1981) a další této série nebo GRIM 3 (Reigber et al, 1983). Významně ovlivnila modely GEM 10C (Lerch et al, 1981), kde všechny  $C_{lm}, S_{lm}$  s  $(l,m) > 36$  (do 180) jsou odhadnuty z altimetrie, PGS S1-4 (Lerch et al, 1982), JGM 2 (Nerem et al, 1994), JGM 3 (Tapley et al, 1996), GRIM 4C4 (Schwintzer et al, 1997) a samozřejmě EGM 96 (Gra-GeoMar, 1996; Lemoine et al., 1997). Všechny další modely až na uvedené výjimky počítají s altimetrickými daty nebo crossovers jako se samozřejmě součástí databáze. Nejnovější modely založené na měřeních z družic CHAMP a GRACE (např Eigen 2,3p, Eigen-GRACE 02) altimetrii ponechávají stranou.

Zatímco standard před zhruba dvaceti lety byl kombinované řešení z družicových (nealtimetrických) a pozemských dat do stupně a řádu  $(l,m) = 36$ , nyní je to kombinovaný model také s použitím altimetrických dat do 360 (např. OSU 91, Rapp et al 1991; EGM 96, Lemoine et al, 1997). Koeficienty o vysokých  $(l,m)$  lze interpretovat jako "vlnky" geoidu s menší a malou vlnovou délkou. Pro  $l_{max}=36$  má půlvlna na rovníku délku  $360:36:2=5^\circ$ , tj asi 550 km, pro  $l_{max}= 360$  je to 55 km. Asi od  $l = 70$  výše hovoříme o "jemné struktuře" gravitačního pole Země.

Nejčastěji byla (a jsou) měření SSH z družicových altimetrů transformována na tíhové anomálie a ty pak zkombinovány v modelech gravitačního pole Země s ostatními "terestrickými anomáliemi" (odvozenými z gravimetrických měření na pevninách a z lodí) a přidány do zprostředkujících rovnic pro vyrovnání geopotenciálních koeficientů  $C_{lm}, S_{lm}$  a dalších určených neznámých. Připomeňme práce z Ohio State University, Columbus a modely gravitačního pole Goddardova střediska kosmických letů (GSFC) NASA v americkém Greenbeltu série GEM (Goddard Earth Models).

Jiný způsob využití altimetrie v souhrnných řešeních pro geopotenciál je přímé využití altimetrických výšek v podmínkových rovnicích jako by se jednalo o každé jiné pozorování, například z družicových kamer nebo laserových dálkoměrů. Zájemce nalezne příslušný matematický aparát např. v práci (Schwintzer et al, 1991) a výsledky ve francouzsko-německých modelech GRIM 4S4/C4 (Schwintzer et al, 1997). Oba přístupy lze přirozeně kombinovat.

Součástí starších modelů Země byly i geocentrické souřadnice pozemských pozorovacích stanic. Dnes jsou publikovány odděleně. Naopak, soudobé modely obsahují i harmonické koeficienty topografie moří a slapové harmonické koeficienty. Taková řešení se někdy nazývají *integrovaná*. Jsou rozdílné názory na to, co je lepší, zda společné či oddělené vyrovnání.

### **D3.9.8.3 Družicová altimetrie pro testování přesnosti parametrů gravitačního pole Země**

Předpokládejme, že máme dva nezávislé soubory dat. První tvoří data diferenciální altimetrie podle rovnice (D3.9.2), opravená o všechny možné korekce, nejlepším v danou chvíli dosažitelným způsobem, z některé altimetrické družice, popřípadě dvojice družic. Data jsou téměř globální a pokrývají alespoň dvouletý interval. Jsou vytvořeny dlouhodobé průměry  $(r_a - r_d)$ , které (zprůměrováním) potlačují krátkodobé variace topografie moří,

redukuje sezónní vlivy a další oceánografické signály v datech. Tento datový soubor nazveme *crossover residuals* (rezidua diferenciálních altimetrických dat v křížících se bodech) a označíme  $C_{obs}$ , tj. z "pozorování vzniklá". Vnitřní přesnost takových dat je dnes 0.7-1.0 cm.

Předpokládejme, že máme k dispozici model gravitačního pole Země (soubor harmonických geopotenciálních koeficientů do určitého stupně a řádu) a variančně-kovarianční matici těchto koeficientů, vyjadřující "přesnost" řešení, přesněji vazby mezi určenými neznámými harmonickými koeficienty při vyrovnání z daného souboru družicových a terestrických dat se zvoleným schématem váhování. Předpokládejme, že dotýčný model Země nepoužil diferenciální altimetrická data  $C_{obs}$ . Dále máme odvozeny a naprogramovány vzorce, jak se kovariační informace šíří do veličin analogických  $C_{obs}$ , které označíme  $C_{comp}$ , tj. vypočtených (promítnutých) z kovarianční matice modelu Země. Vypočteme  $C_{comp}$  ve stejném rozsahu řádů  $m$  a zeměpisných šířek  $\phi$  jako  $C_{obs}$ .

Nyní můžeme konfrontovat  $C_{obs}$  a  $C_{comp}$  a detailně (řád po řádu pro jednotlivé šířkové pásy v rozsahu šířek daném měřeními) testovat přesnost modelu Země, který byl použit k odvození  $C_{obs}$ . V ČR jsme vypracovali testovací metodu, používající pro zmíněný test jisté kombinace harmonických koeficientů, tzv. Latitude Lumped Coefficients (LLC, šířkové souhrnné koeficienty). Provedli jsme testy přesnosti řady modelů (Wagner a Klokočník, 1994; Wagner et al., 1995, 1997b; Klokočník et al., 1996, 1998, 2006).

#### **D3.9.8.4 Posuny souřadných systémů mezi altimetrickými misemi**

Jedna altimetrická mise trvá typicky pět let; přístroje na družici někdy déle nevydrží nebo celá mise morálně zastará (například způsobem určování dráhy). Za tu dobu jsou od geodetů a dráhových dynamiků k dispozici stamilióny altimetrických měření (a přesná určení dráhy k nim), které pak používají různé geovědní obory. Oceánografové potřebují delší, desetileté, dvacetileté série měření. Pak je a bude nezbytné propojovat jednotlivé altimetrické mise do jednoho "jednotného" systému.

Dráha družice je teoreticky geocentrická, v praxi však je definována sítí pozorovacích stanic, takže záleží na přesnosti toho kterého sledovacího systému, jak je geocentricita dodržena. Například starší americká družice GEOSAT byla plně závislá na dopplerovských měřeních z dnes již opuštěné sledovací (jen) pozemské sítě, která nebyla globální a kde nebyly přesně známy některé měřické korekce. Již nelze určit centrační veličiny starých dopplerovských stanic vůči novým stanicím vybaveným SLR nebo PRARE či DORIS. GEOSAT nebyl vybaven koutovými odražeči pro laserové sledování. Z toho plyne, že celý systém, ve kterém byla určena dráha GEOSATu, nemůže být ani zdaleka bezchybně geocentrický. Naproti tomu soudobé americko-francouzské T/P a JASON na vyšších drahách mají koutové odražeče, dva výškoměry pracující na různých frekvencích (jejichž měření se také používají k vylepšení dráhy), dopplerovský systém DORIS a vybavení na sledování z GPS. Dráha takových družic je "perfektně vybudována", ultrapřesná, dnes s přesností  $\pm 1$  cm v každém směru v každém okamžiku.

Rozborem DSC mezi družicemi GEOSAT resp. ERS 1 a T/P jsme zjistili relativní posun systému Geosatu či ERSu vůči systému Topexu – řádově několikacentimetrový (viz Wagner et al., 1997 a,b).

### **D3.9.8.5 Oceánografické aplikace družicové altimetrie**

Topografie povrchu moří a oceánů (Sea Surface Topography, *SST*, nejlépe se satellite-to-satellite tracking, kap. 3.10) obráží teplotu moří, jejich různou hustotu a salinitu. Oceány a atmosféra si předávají ohromné množství tepla. *SST* se liší od geoidu v rámci decimetrů až 1.5m. Popisujeme ji nejčastěji rozvojem v řadu kulových funkcí s harmonickými „topografickými“ koeficienty  $C_{lm}^T, S_{lm}^T$ . Z nedružicových dat sestavený je nejznámější model Levitův (1982), často používaný pro porovnání s výsledky z altimetrie. Model reprezentuje dlouhodobý průměr *SST*, zatímco družicová řešení jsou vlastně nedokonale oddělené složky průměrné hodnoty  $SST(v)$  za interval měření a  $SST(p)$ , viz rovnici (D3.9.1).

Prvních několik koeficientů pro rozvoj *SST* se pokusili určit Mather et al (1979) z altimetrie Geosu 3, ale bez valného úspěchu.. Klasická je práce Shum et al (1993), odkud přebíráme vrstevnicové mapky *SST* z jednotlivých altimetrických misí (obr. D3.9.15a-c). Maximální stupeň  $l_{krit}$  určovaných topografických koeficientů je v praxi omezen tím, že vnější střední kvadratické chyby geopotenciálních koeficientů jsou už pro  $l > l_{krit}$  větší než amplitudy topografických koeficientů.

*SST* má přirozeně časové variace, zejména sezónní, patrně i sekulární trend a krátko-periodické změny, což vše lze do matematického modelu zahrnout. Vyjma periodických existují i aperiodické změny (viz dále o El Niño/La Niña). Detaily oceánského proudění poskytují výsledky z T/P, JASONu či ENVISATu v podobě kvazi-synoptických map *SST* (NOAA, NASA JPL, CNES, <http://sealevel.jpl.nasa.gov/gallery/videos-ssh-movies.html>, a j).

*SST* je úzce svázána s oceánskými proudy. V nejjednodušším provedení pro tzv. geostrofické (povrchové) mořské proudy (které mají přenášet dominantní část tepla) platí mezi  $SST(v+p)$  a složkami rychlosti oceánských proudů ve směru východ/západ  $u_{long}$  a sever/jih  $v_{lat}$  tyto vztahy (např. Coleman, 1980):

$$(D3.9.16) \quad u = -x \frac{\partial(SST)}{\partial \varphi}, \quad v = \frac{x}{\cos \varphi} \frac{\partial(SST)}{\partial \lambda},$$

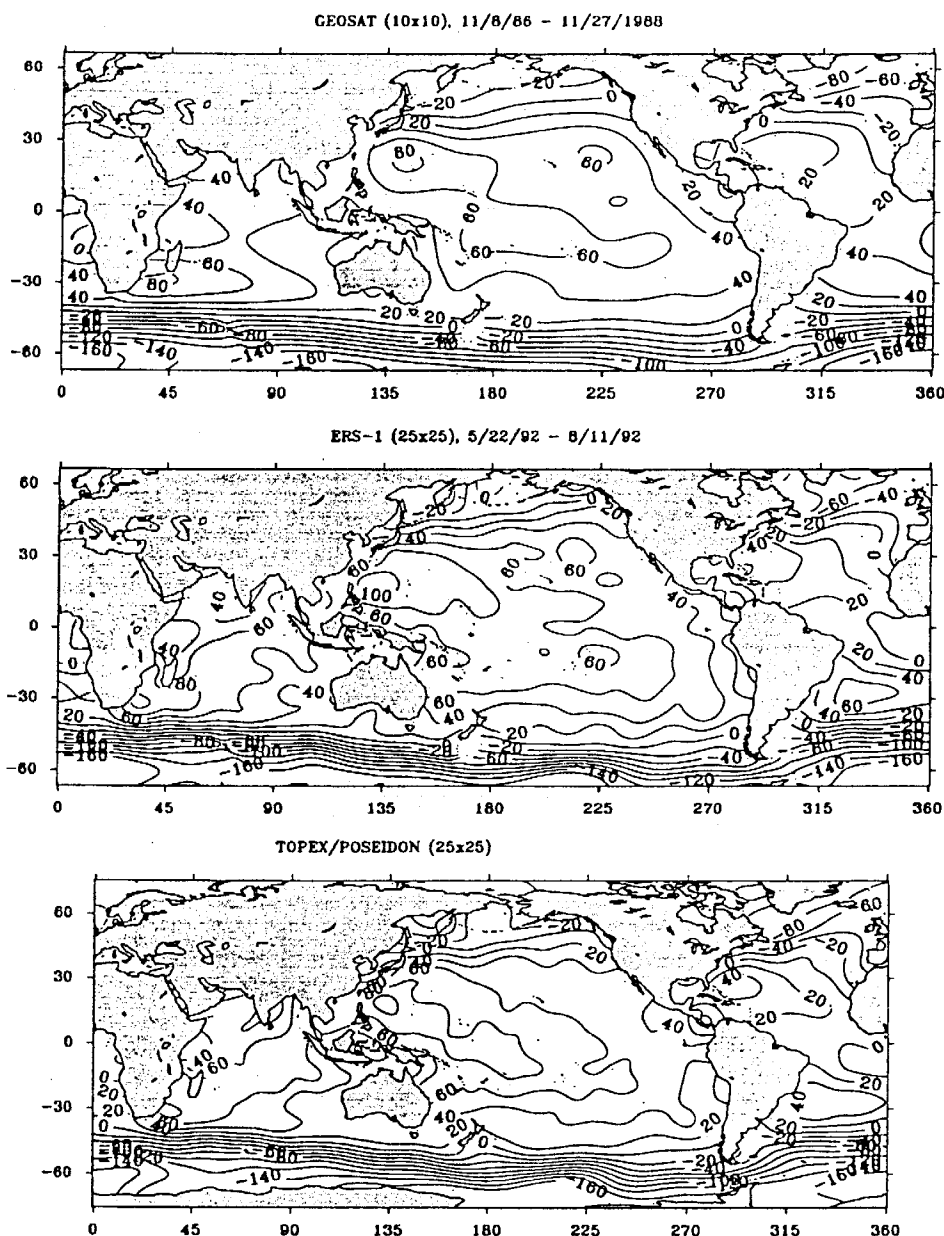
kde  $x = g/(fr_e)$ ,  $g$  je tíhové zrychlení,  $f$  je Coriolisův parametr ( $f = 2\omega \sin \varphi$ ,  $\omega$  je úhlová rychlost rotace Země,  $\varphi$  zeměpisná šířka),  $r_e$  střední rovníkový poloměr Země (jako v D3.9.1).

Velikosti složek  $(u,v)$  odvozené Stammerem a Wunschem (1994) z altimetrie T/P vidíme na obr. D3.9.16. a, b. Jsou podchyceny všechny mořské proudy známé ze školního atlasu (např. Kuroshio, Golfský, Agulhas, Cirkumpolární proud, zvaný též Západní příhon, a další). Největší nestability jsou v rovníkové oblasti. Na rovníku uvedená lineární aproximace (D3.9.16) selhává.

Oceánskými proudy se přenáší asi polovina veškeré energie, kterou Země dostane od Slunce (o druhou část se postará atmosféra). Předpokládejme rozdíl *SST* 10 cm/ 1000 km ve směru meridiánu ve střední zeměpisné šířce (45°). Podle (D3.9.16) bude  $v = 1$  cm/s. Uvažujeme-li barotropické podmínky do hloubky 1 km, pak toto  $v$  vede k objemovému transportu 10 Sv a při teplotním kontrastu 1°C k přenosu tepla řádově  $10^{13}$  W/s. [jednotka 1Sv je Svedrup  $1Sv=10^6 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ ]. Hlavní oceánské proudy přenášejí 100 Sv. Nepřesnosti soudobých modelů gravitačního pole Země vedou k chybám kolem 10 Sv. Pro studium oceánských eddies a medies je ve výstupech z altimetrie stále co zlepšovat.



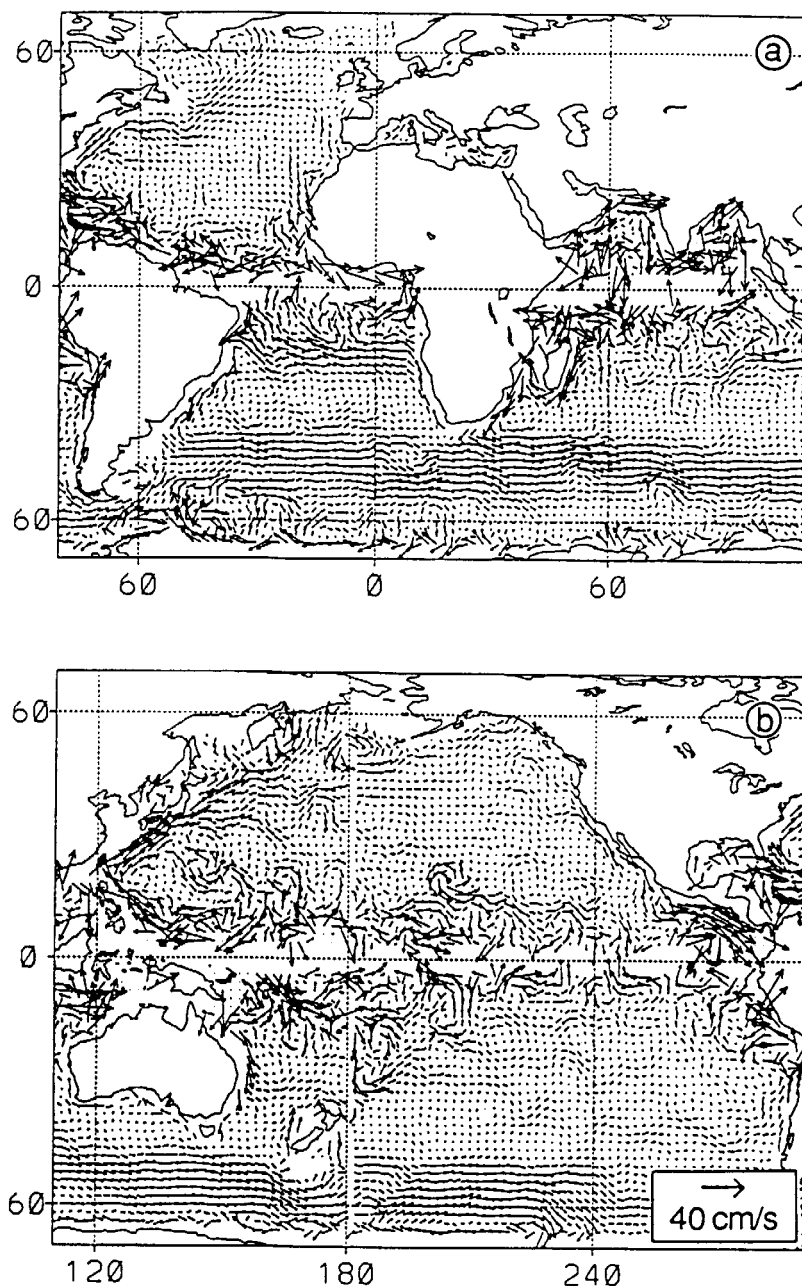
Stále aktuální je požadavek na souběžné zpřesňování  $N$  a  $SST$  a zejména na věrohodnou separaci  $SST(p)$  od  $N$ . Geograficky korelovaná složka radiální chyby dráhy zůstává v altimetrických měřeních skryta a vstupuje do  $SST(p)$ . Každé zpřesnění dráhy vede nepřímo tedy i ke zpřesnění  $SST(p)$ . Role družic jako CHAMP, GRACE a GOCE je nezastupitelná. Altimetrie nemůže úkol souběžného zpřesňování  $N$  a  $SST$  splnit sama.



Obrázek D3.9.15a-c: Střední SST určená ze tří různých altimetrických družic (Shum et al., 1993).

*El Niño* (ze španělštiny Dítě, Ježíšek, Jezulátko) je rekurentní, aperiodické, nízkofrekvenční, meziroční ohřívání tropické zóny Tichého oceánu (dostavující se jednou za 2-10 let), které probíhá souběžně se změnami tlaku vzduchu při hladině mezi východní a západní částí Tichého oceánu. El Niño lze chápat jako výsledek nestabilních oscilací v systému atmosféra-oceán, jako přirozenou součást interakce atmosféry a oceánu, vyplývající z odlišných fyzikálních vlastností obou. Jedna definice praví, že Jezulátko nastává, když v přesně vymezené

rovníkové oblasti Tichého oceánu stoupne povrchová teplota vody aspoň o  $0.6^{\circ}\text{C}$  po dobu alespoň půl roku.

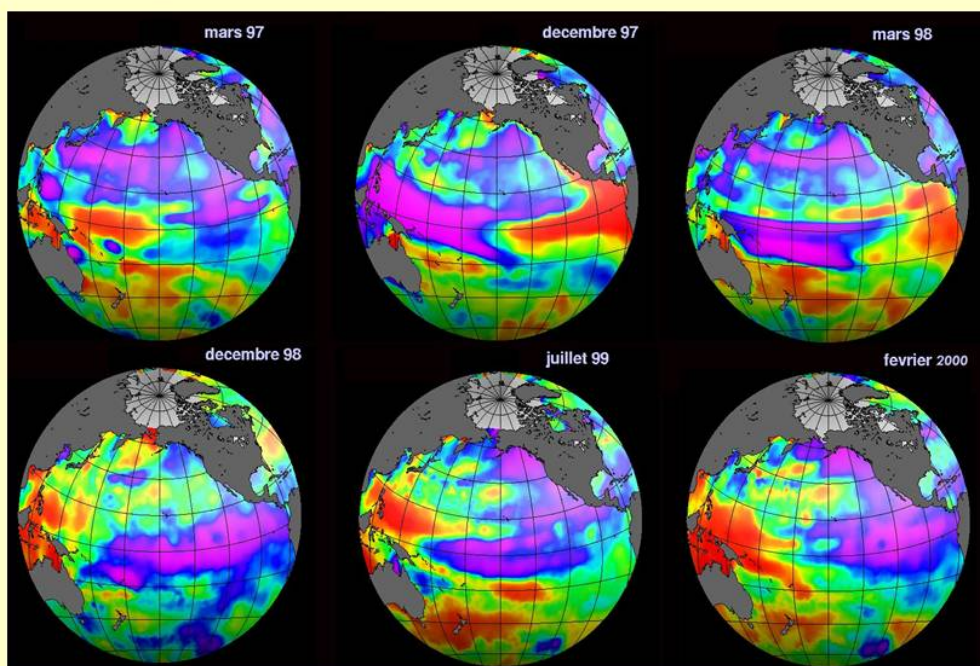


**Obrázek D3.9.16. a, b:** Velikosti složek  $(u,v)$  odvozené Stammerem a Wunschem (1994) z altimetrie T/P.

"Océanografický" popis El Niña lze podrobně sledovat podle textu populárně-vědeckého článku Cílka (1995). Jednotlivá epizoda El Niña začne (z nejasných příčin) oslabením pasátů (trade winds), větrů vanoucích od Jižní Ameriky k Indonésii v rovníkovém pásu Tichého oceánu. V důsledku toho se velké množství tepla a srážek nedostane tam, kam má (Austrálie, Indonésie, Indie, Afrika), ale je odneseno jinam i daleko na sever a jih od rovníku (jih Severní Ameriky, Mexiko, Kanada, Brazílie). Současně vznikne teplá mořská vlna v rovníkové části Pacifiku (projevující se na mapkách jako lokální a dočasné zvýšení

SST), dá na postup podél rovníku přes Tichý oceán na východ k Jižní Americe, kde zatlačí Humboldtův studený proud postupující normálně od jihu. Oceán se při hladině ohřeje, ryby pomřou, zkolabuje rybářství v Peru a Ekvádoru; na pevnině (na poušti) se vše zazelená a je "rok hojnosti". Obvyklé období dešťů (u nich v prosinci až únoru) bude intenzivnější a vytrvalejší, což způsobí další ohromné škody. Právě proto, že se tyto projevy dostávají v tomto regionu kolem vánoc, je tu jméno El Niño. Pokud se deště vrátí na jaře či v létě následujícího roku k normálu, je vše v pořádku; pokud ne, je rok El Niña, období katastrof. Dnes víme, že nejen lokálních.

Důsledky El Niña bývají globální, dlouhodobé (několikaleté) a katastrofální, např. velké deště a následné záplavy na jihu USA, v Mexiku a střední Americe, posunutí a nedostatečnost monzunů a tím velká sucha, neúroda a možnost následných požárů v Africe, Indii, Indonésii a Austrálii. Nejsilnější El Niño ve 20. století bylo patrně v r. 1925 a v 1997-1998 (již dokumentované z altimetrických družic). "Obrana" spočívá v predikci jevu a v patřičné informovanosti veřejnosti. Zastavit El Niño přirozeně nelze. Jsou nepřímé důkazy o existenci tohoto jevu již v dávné historii lidstva.



**Obrázek D3.9.17:** Kompozice výsledků anomálií SST vůči ročním průměrům [stupnice v cm] z měření T/P odpovídajících „normálnímu“ stavu a extrémním situacím El Niño (prosinec 1997 a jaro 1998) a La Niña (konec r. 1998 až zima 1999/2000). Převzato z Fu a Cazenaveové, eds., 2001 a z přednášky Cazenavové ve Wuhanu 2002.

Již víme, že SST je odchylka střední hladiny moře od geoidu. "Vnější projev" El Niña není nic jiného než nesezonní (meziroční) anomálie SST o amplitudě 5-20 cm, velkém plošném rozsahu a s přemístováním přes oceán (ve formě Rossbyho a Kelvinových vln) v rámci měsíců. Z hlediska altimetrie je jedno, zda "měříme" tu nebo onu "vlnku" topografie mořské hladiny. Jen je třeba mít souvislou a patřičně přesnou sérii měření a výsledky dát k

dispozici téměř v reálném čase; a to vše je dnes proveditelné a běžně se už děje (řada webových stránek).

Obr. D3.9.17 je kompozice výsledků z T/P v období „normálu“ 1996, El Niña a jeho opačné fáze (La Niña). Jev El Niño a jeho protipól La Niña (Dívka) jsme dnes schopni predikovat na půl roku dopředu ([http://ibis.grdl.noaa.gov/SAT/near\\_rt/enso/](http://ibis.grdl.noaa.gov/SAT/near_rt/enso/)) a j).

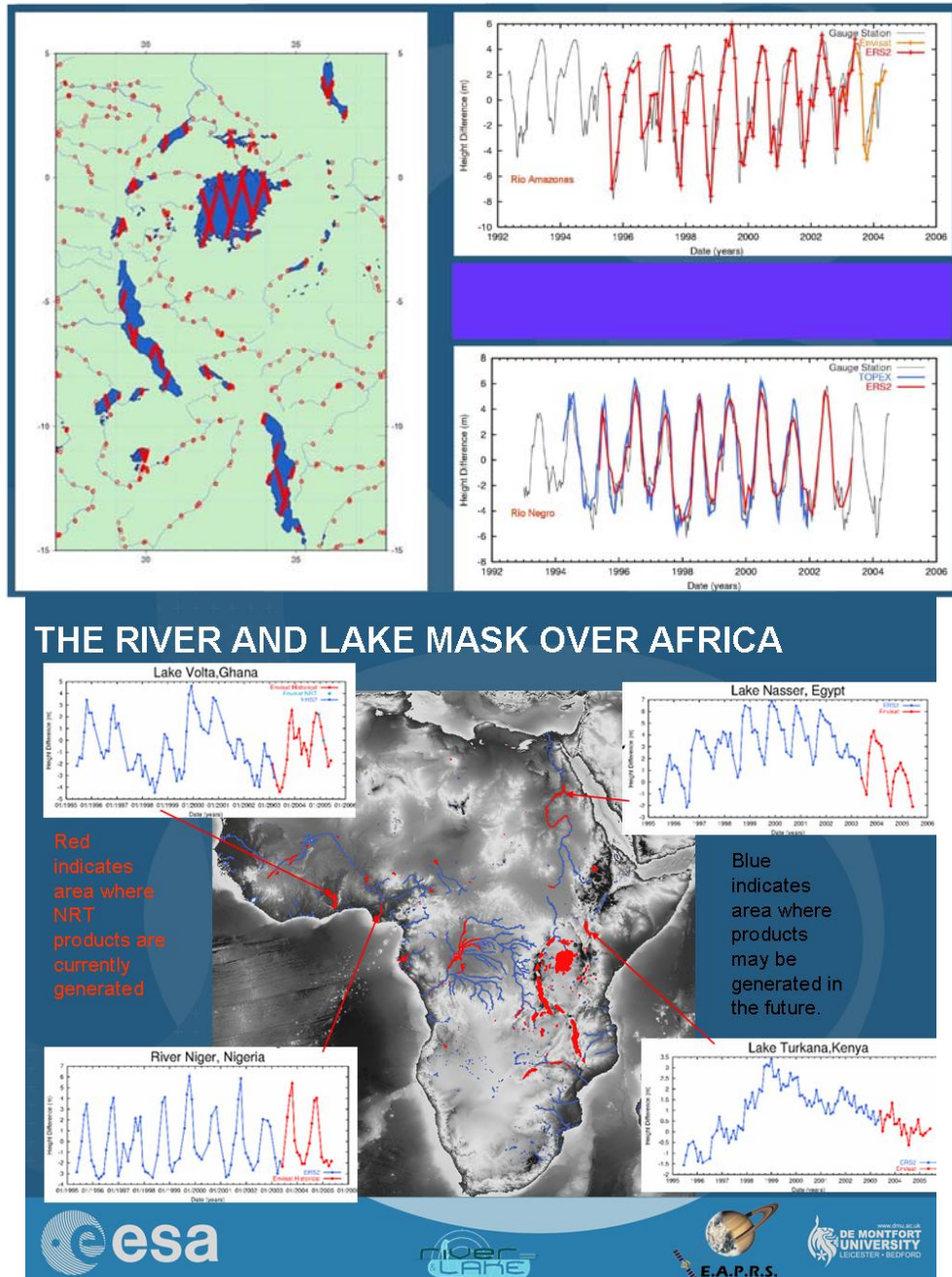
Delší série měření z nejpřesnější altimetrické družice konce minulého století (T/P) pochopitelně lákala vyzkoušet, zda vedle sezónních popř. meziročních změn SST nelze již z dat "vyčíst" i *sekulární trend*, např. globální zvyšování hladiny oceánu, který bychom pak připsali *globálnímu oteplování*. Prvenství, ale neslavné, zaznamenal Nerem (1995) z NASA. Po zavedení všech tehdy dostupných korekcí altimetrických měření z T/P za období od prosince 1992 do prosince 1994 odhadl „sekulární“ nárůst střední hladiny moří na  $+3.9 \pm 0.8$  mm/rok, celkem v souladu s globálním nárůstem teplot při mořské hladině (podle dat Národního Meteorologického Centra USA). Práce se objevila nejen v *Science* (Nerem, 1995), ale i na různých vědeckých konferencích. Spěchat se nemá a mýlit se může každý, zvláště je-li závislý na jiných odbornících (geodet a dráhový dynamik přijímá altimetrické korekce jako danou věc od odborníků na dálkový průzkum). V červenci 1996 objevili Ouan-Zan Zanife, Philippe Escudier a Partick Vincent chybu v softwaru pro zpracování altimetrických měření (Hancock a Hayne, 1996). Konkrétně šlo o chybu v algoritmu č. S 1034, který koriguje altimetrická měření o chod oscilátoru na palubě družice: v korekčním členu byl zaměněn číselník za jmenovatel. Po opravení chyby přestal "nárůst mořské hladiny" existovat. Pozdější analýzy, založené ovšem na delších sériích dat, víceméně ověřila Neremův odhad. Z altimetrie dnes vychází sekulární nárůst  $+2.4 \pm 0.1$  mm/rok (IPCC). Pro porovnání výsledek dlouhodobých měření slapových bójí (korigovaný o postglaciální zdvih Fénoskandinávie)  $+1.8 \pm 0.3$  mm/rok (Douglas 1991). Slovo „sekulární“ musíme brát s rezervou, neboť řady altimetrických měření jsou nejvýše asi dvacet let dlouhé a data ze slapových bójí asi 150 let, ale někdy jsou sporná. Také je dobré si uvědomit, že sekulární nárůst globálně nemusí znamenat nárůst regionálně. Družicová altimetrie poskytuje argumenty ve prospěch globálního oteplování, ale sama nemůže rozhodnout jak je velká role člověka v tomto procesu.

#### **D3.9.8.6 Družicová altimetrie mimo oceány**

Původně sloužila altimetrie výhradně nad oceány a moři. Uzavřená moře a některé pobřežní oblasti měly problémy s přesností (zejména slapové korekce). Nad pevninou a ledovou pokrývkou se měřit nemohlo. To všechno se změnilo díky vývoji technologie. Dnes existují elektronické postupy vylepšující a lépe interpretující přijímaný signál (retracking). Pak lze altimetrii použít (s trochu nižší přesností) i na pevnině, jmenovitě na pouštích k určení relativních lokálních změn SST. Existuje řada aplikací sledování relativních změn výšek hladin jezer a řek, když se najdou ground tracks a crossovers na potřebných místech. Ukázky jsou na obr. D3.9.18. Povšimněte si sezónních změn, ale i „sekulárních“ trendů v některých případech.

O aplikaci laserového altimetru na družici ICESat pro měření ledové pokrývky jsme se již zmínili (na konci odst. 3.9.4). Altimetrie má ale další teoretická i zcela praktická využití. Může sloužit k určení geopotenciálního měřítkového faktoru (Klokočník et al., 1994, str. 120) stejně jako k navigaci ponorek (tíhové anomálie odvozené z altimetrie slouží ke korigování inerciálního navigačního a naváděcího systému, hlavní motiv vypuštění družice GEOSAT) nebo „vylepšení“ rybolovu na základě podrobných znalostí oceánských proudů. Družicová

altimetrie se nemusí omezovat na zemské těleso. Pokud budeme schopni dráhu družice obíhající kolem jiného kosmického tělesa sledovat s patřičnou přesností ze Země, lze koncept družicové altimetrie přenést do Sluneční soustavy (viz poznámky v odst. D3.9.8.8).

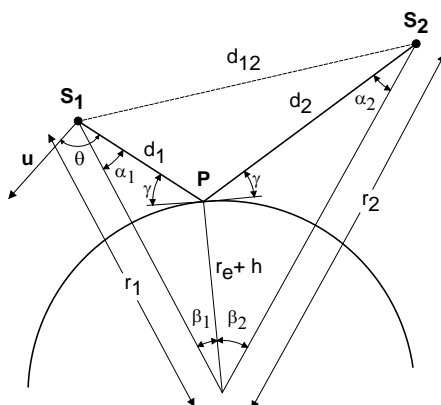


**Obrázek D3.9.18:** Relativní změny SST nad řekami a jezery Afriky. Vlevo nahoře detail spodního obrázku střední Afriky. (Převzato se svolením J. Benvenisteho, více viz na <http://earth.esa.int/riverandlake>)



### D3.9.8.7 Princip bistatické altimetrie

Zatím jsme měli vybavení na jedné družici pro vysílání i příjem altimetrického signálu. Obr. D3.9.19. ukazuje princip *bistatické altimetrie*, kdy jedna družice (GPS na vysoké dráze) signál vysílá a druhá na nízké dráze (CHAMP, SAC-C) signál přijímá, ale dvojitou cestou: přímo z družice na družici a ještě odrazem od hladiny moře (teoreticky v bodě  $P$ ). K tomu musejí být přijímací družice vybavené další speciální směrovanou anténou. Měřenou veličinou je zpoždění signálu ( $d_1 + d_2 - d_{12}$ ). Hledá se pozice odrazového bodu  $P$  na reálné ploše, když známe vektory obou družic a měření jsou známa. Odvození pro kouli je klasické (Martín-Neira 1993), pro elipsoid obtížnější (Olivík et al 2006).



Obr. D3.9.19. Princip bistatické altimetrie

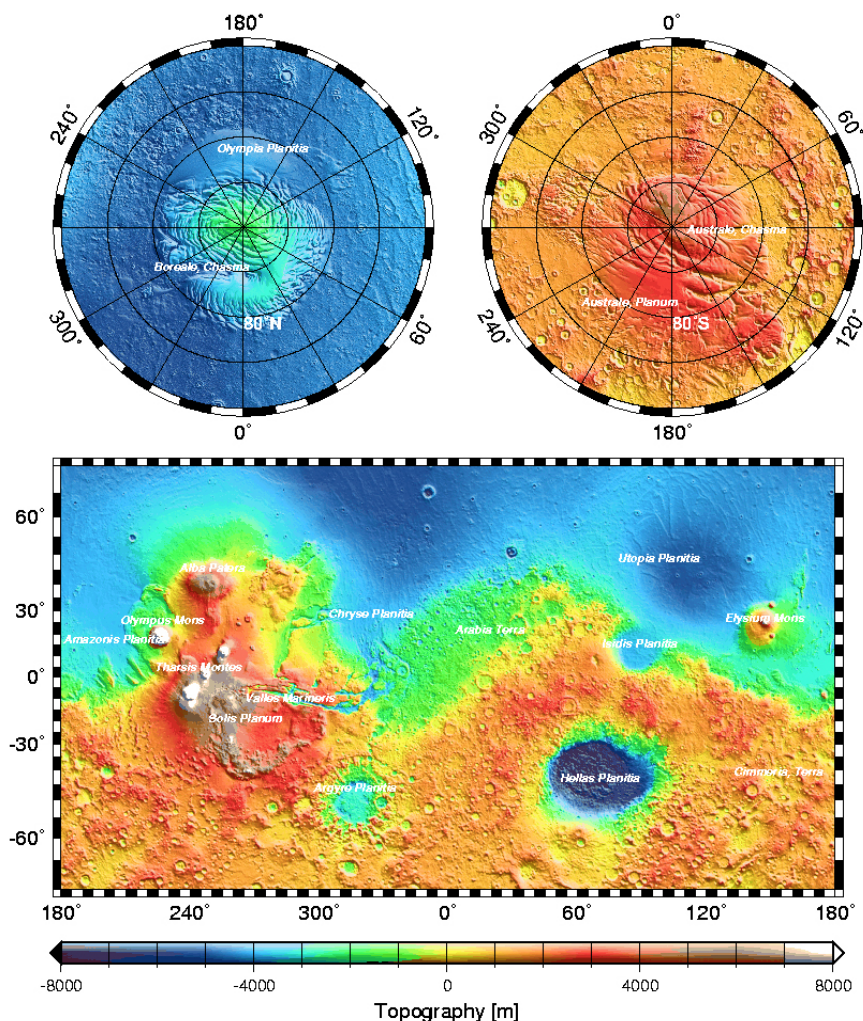
Výhodou bistatické oproti tradiční „monostatické“ altimetrii by bylo množství měření, neboť k nadírovým měřením přibude řada off-nadírových bez vážné ztráty přesnosti výsledku (Kostecký et al., 2005). Bistatická měření se zkoušela na Zemi, na letadlech a na oběžné dráze na družici CHAMP a SAC-C, ale družice specializovaná na bistatickou altimetrii zatím vypuštěna nebyla (stav v r. 2007).

### D3.9.8.8 Družicová altimetrie mimo planetu Zemi

Laserové dálkoměry pracovaly již na oběžných drahách kolem Měsíce, Marsu a planetky Eros. Meziplanetární sondy jsou navedeny na nízké kruhové dráhy nad příslušným tělesem a z nich se altimetricky měří k povrchu. Dráhy sond jsou určovány dopplerovsky (DSN, Deep Space Network).

Kolem Měsíce obíhala a měřila sonda *Clementine* (vojenský projekt Naval Res. Lab., USA), 1994 a přispěla podstatnou měrou ke zlepšení modelů gravitačního pole Měsíce. K Marsu mířila řada sond, ale jen některé se povedly, např. Mars Reconnaissance a Mars Odyssey. Z hlediska určování parametrů gravitačního pole Marsu má ze starších sond zásluhu hlavně Mariner 9 (1971) a Viking Orbiter 1 a 2 (1976) a z novějších MGS (Mars Global Surveyor) s laserovým výškoměrem *MOLA* (Mars Orbiter Laser Altimeter). Z výšky 400 km měřil v období 1997-2000. Přesnost dráhy byla několik metrů, což se měření DSN týče a lepší než metrová, což se oběžné dráhy kolem Marsu týče. Měření byla využita k určení harmonických koeficientů Marsova gravitačního pole do stupně a řádu 80 s přesností určení průběhu Marsova „geoidu“ asi  $\pm 2\text{m}$  (m.j. Lemoine et al 2001). Marsovo gravitační pole je

více „rozeklané“ než pozemské, zejména v oblasti obřích sopek. Tam jsou tíhové anomálie až +2950 mGal a v údolí Valles Marineris až -450mGal. Globálně vzato, Mars stejně jako náš Měsíc, má větší rovníkové zploštění než Země. Ukázka topografie Marsu, získaná z altimetrie je na Obrázku D3.9.20.



**Obrázek D3.9.20:** Ukázka topografie Marsu, získaná z altimetrické mise MGS

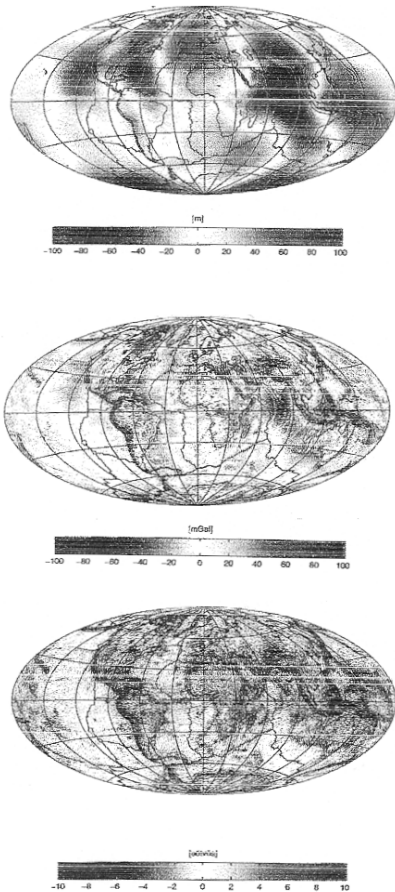
*Eros* je planetka č. 433 tvaru rohlíku, dlouhá asi 33 km. Prozkoumala ji a nakonec na ni přistála americká sonda *NEAR Shoemaker* (2000). Z oběžné dráhy kolem planetky pořídila asi 11 miliónů laserových a spoustu dalších měření, která m.j. přispěla k určení detailů povrchu. Připravuje se sonda s laserovým výškoměrem na dráhu kolem Merkura.

## Dodatek k odstavci 3.11

### D3.11 Družicová gradientometrie

#### D 3.11.1 Motiv pro nástup družicové gradientometrie

Všechny typy družicových měření dosud uvedené řeší úkol diferenciálního zpřesňování dráhy umělé družice Země (UDZ) a určování geodetických a dalších parametrů zemského tělesa (Earth gravity models, EM) zprostředkovaně pomocí LPR či GPR. Lze však měřit přímo v prostoru poruchová zrychlení či změny poruchových zrychlení. K tomu slouží či budou sloužit družicový mikroakcelerometr a gradiometer/gradientometr. Jelikož jsou zrychlení (resp. jejich časové změny) prvními (resp. druhými derivacemi) gravitačního (tíhového) potenciálu, lze harmonické geopotenciální koeficienty odvodit přímo z těchto derivací. (Ani tato 'přímá' metoda se ovšem bez běžného určení dráhy s patřičnou přesností neobejde, abychom věděli, kdy a kde měření proběhlo).



Dnešní přesnost a rozlišovací schopnost určení parametrů gravitačního pole nestačí pro řadu geoaplikací. Také je třeba chápat gravitační pole jako nestatické, časově proměnné. Tradiční kosmické metody používané k určování parametrů gravitačního pole (bez altimetrie) dávají věrohodně hodnoty harmonických geopotenciálních koeficientů  $C_{l,m}$ ,  $S_{l,m}$  spíše těch nižších stupňů a řádů, asi do  $(l,m)=(50,50)$  (s využitím rezonančních jevů, odst. 2.3.3) a to ještě s přesností dosti proměnnou se stupněm a řádem. S příspěvkem altimetrických měření a terestrických gravimetrických dat (tíhové anomálie), jsou dnešní modely gravitačního pole, (t.j. soubory  $C_{l,m}$ ,  $S_{l,m}$  a dalších veličin), kap. 6., známy až do (360, 360) [např. Rapp a Cruz, 1986 nebo Lemoine a kol., 1998 a řada současných modelů]. Pro jednotlivé koeficienty s  $(l,m)$  zhruba nad (50, 50) je však obtížné něco zodpovědného říci o jejich skutečné přesnosti. Bude to právě gradientometrie, která zkontroluje stávající určení  $C_{l,m}$ ,  $S_{l,m}$  nižších  $(l,m)$  a přispěje ke zpřesnění a odhadu těch vyšších. Její přínos vidíme právě ve zpřesnění popisu "jemné struktury" statického gravitačního pole (obr. D3.11.1a-c). Tím se též zlepšuje možnost studia časových variací parametrů gravitačního pole Země.

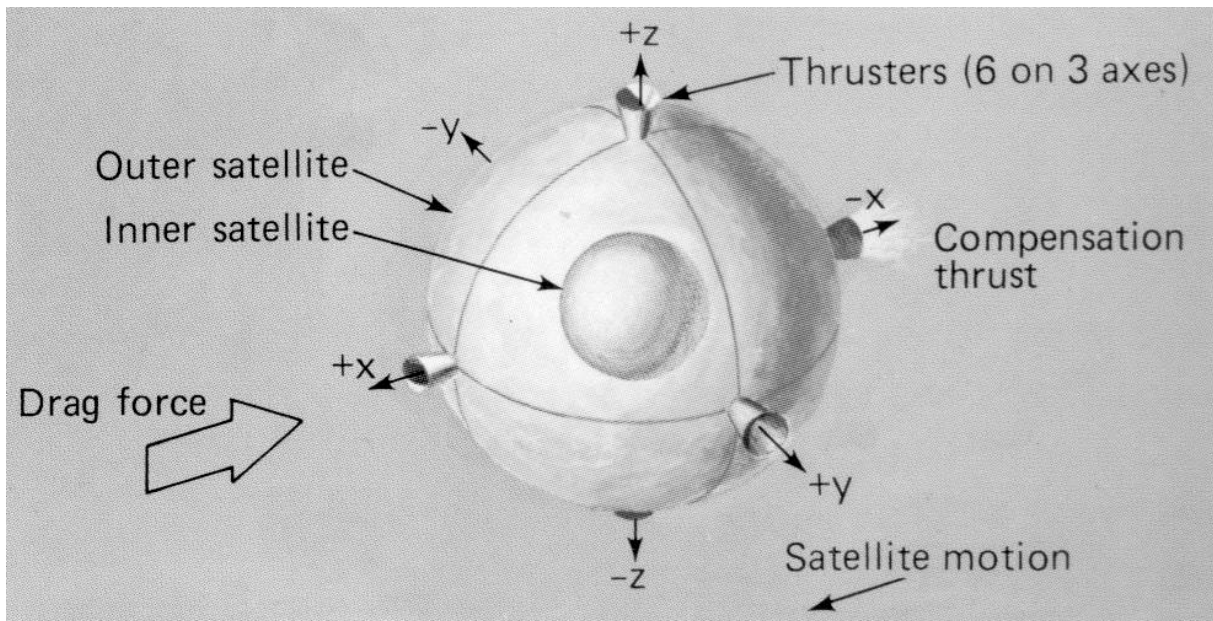
**Obrázek D3.11.1:** *Převýšení geoidu vůči referenčnímu elipsoidu (1a), [metry], tíhové anomálie při zemském povrchu (1b), [miligaly] a velikost druhé derivace poruchové části tíhového potenciálu v radiálním směru (1c), [Eötvös] - E je změna zrychlení 1 miligalu na vzdálenost 10 km. Jak známo, převýšení geoidu N vůči referenčnímu rotačnímu elipsoidu nejlépe vystihujícím tvar Země kolísá mezi +90 a -105 metry. Střední tíže na Zemi je 981 000 mgal, pólové zploštění Země vydá na 200 miligalovou anomálii, hustotní nehomogenity zemské litosféry typicky desítky miligalů. Největší složka tenzoru druhých derivací je vertikální tíhový gradient u povrchu 3000 E, horizontální složky jsou zhruba poloviční a smíšené (např. xy) pod 100 E. Anomálie v horách mohou přesáhnout*



1000 E. Cílem obrázků (1a-c) je poukázat na trend: čím vyšší derivace potenciálu, tím vyšší citlivost na detail v anomálii pole. Obr. 1a-c podle materiálů Nico Sneeuwa, TU Delft, 1998

### **D3.11.2 Elementární úvahy o mikroakcelerometrii a gradientometrii.**

Představme si (obr. D3.11.2) 'kouli v kouli', kuličku v dutině (a v prostoru mezi nimi vakuum). Nechť je na počátku myšleného experimentu vnitřní kulička přesně centrována uvnitř dutiny. Sestava nechť obíhá kolem Země. Pak na vnější obálku působí gravitační  $g$  a negravitační síly  $n$ , kdežto na vnitřní jen ty gravitační  $g$ , neboť vnější slupka brání projevu odporu atmosféry a dalších negravitačních vlivů na vnitřní kouli. Tím mezi působením rušivých zrychlení na vnější a vnitřní kouli vzniká rozdíl  $g-n$ . Ten naruší původní centrickou polohu vnitřní koule, až tato narazí do stěny dutiny (a experiment nutno opakovat).

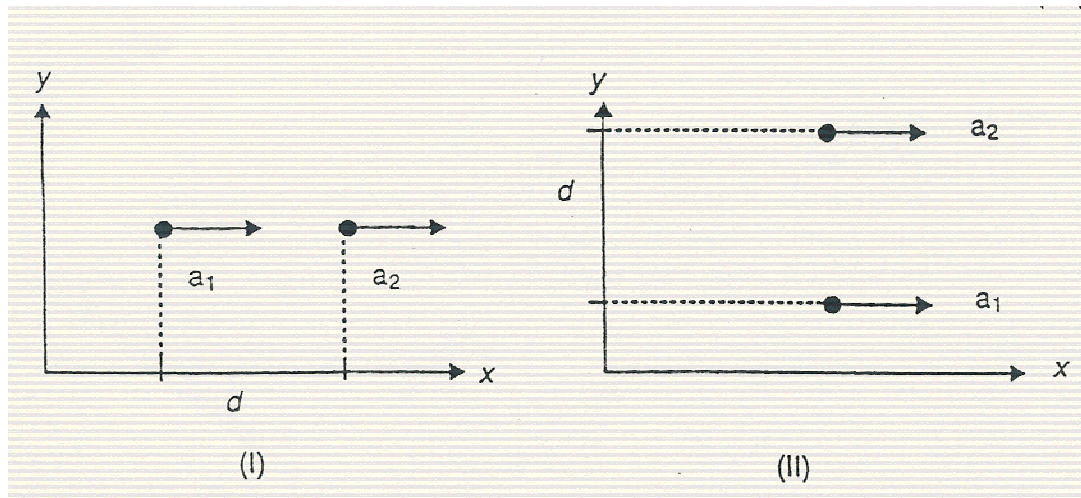


**Obrázek D3.11.2:** *Princip aktivní minimalizace negravitačních poruch dráhy, tzv. drag-free system. V případě, že složky rušivých negravitačních zrychlení nejsou odstraňovány manévrováním ve dráze, ale měřeny, jedná se o mikroakcelerometr. Z propagačních materiálů NASA o GRM, 1983.*

Opakovaným zapínáním korekčních motorků družice můžeme centrální polohu kuličky s určitou přesností udržovat. Celá družice se pak pohybuje po 'geodetické dráze' jakoby jen pod vlivem gravitačních poruch. Cesta aktivní 'eliminace' negravitačních poruch vede k tzv. 'drag-free' systému. Druhou možností je do ztráty centricity vnitřní koule (dočasně) nezasahovat, ale měřit nějakým způsobem velikost a směr rušivých zrychlení. To je *mikroakcelerometr*.

Mikroakcelerometr "měří" miniaturní zrychlení. Představme si dvojici nespojených mikroakcelerometrů vzdálených třeba 1 m ve společném 'obalu', orientovaných například ve vertikálním směru. Na 'horní' a 'dolní' mikroakcelerometr působí různě velká gravitační zrychlení, zatímco zrychlení negravitačního původu jsou prakticky stejně velká. Zařídíme, abychom mohli číst rozdíly zrychlení mezi oběma akcelerometry; pak dostaneme druhé derivace gravitačního potenciálu. Jelikož jsme ve volném prostoru a nerotujeme, tak prozatím

nemluvíme o tíhovém potenciálu. Gradienty zrychlení se udávají v jednotkách [E], Eötvös či EU [Eötvös Unit]. Platí, že  $1 \text{ E} = 10^{-9} \text{ ms}^2 / 1 \text{ m} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$ .



**Obrázek D3.11.3:** Gradientometr jako diferenciální mikroakcelerometr. Na obr. (I) je 'citlivou osou' osa  $x$  a gradientometr zaznamenává  $\Gamma_{xx} = (a_2 - a_1) / d$  zrychlení  $a_1$  a  $a_2$  měřených ve směru osy  $x$  dvěma mikroakcelerometry ve vzdálenosti  $d$  jejich těžišť. V případě (II) se měří  $\Gamma_{yy} = (a_2 - a_1) / d$ . Převzato z ESA SP-1196, 1996.

Obr. D3.11.3 ukazuje princip gradientometru jako diferenciálního mikroakcelerometru. Rozdíly v měření dvojice mikroakcelerometrů v jednom směru umožňují vypočítat druhé derivace potenciálu v tomto směru. Jiný přístup považuje gradientometry za modifikaci Eötvösových či Cavendishových (též Coulombových) torzních vah. Klasické Eötvösovy váhy měří rozdíly tíhových zrychlení působících na dvě různé hmoty zavěšené na tenkém torzním vlákně. K podrobnému popisu torzních vah odkazujeme na učebnici Pick a kol., 1973 (obr. 58, str. 166-173). Gradientometry se používaly v geofyzice ke měření některých druhých derivací tenzoru tíhového potenciálu, ale neuplatnily se pro velkou náchylnost k okolním rušivým vlivům. Pro aplikaci do vesmíru se vyvíjejí kryogenní gradientometry.

Co ve skutečnosti měří mikroakcelerometr jako přístroj? Není to přímo zrychlení. Měřit lze napětí  $U$  potřebné k udržení vnitřní koule či krychle v geometrickém středu dutiny mikroakcelerometru (tj. soustavy elektrod). Převod z  $U$  na zrychlení je dán empirickým koeficientem a je snaha o lineární vztah (závisí na provedení elektrických obvodů). Například krychlový mikroakcelerometr MACEK (viz další text) detekuje pohyb vnitřní testovací krychle (posun a natočení) jako změnu kapacity mezi stěnami krychle a elektrodami. Italský pružinový mikroakcelerometr SAGE (viz další text) měl měřit změnu napětí v důsledku změny kapacity způsobené pohybem pružiny v důsledku rozdílového vektoru ( $g-n$ ).

Také družicový gradientometr by přímo neměřil druhé derivace gravitačního potenciálu, ale například rozdíly čtení napětí mezi dvojicí (dvojicemi) mikroakcelerometrů nebo nějaké 'natočení vlákna' či 'velikost torse' v důsledku gradientu (gradientů) zrychlení podél citlivých os. Představme si dvě čtveřice stejně velkých hmot, vytvářejících jakési rotující kříže, spojené dutou tyčí uvnitř s torzním vláknem. Celá sestava nechť rotuje kolem osy totožné s osou spojovací tyče. Nechť je orientace spojovací tyče ve směru místní vertikály. Horní a dolní čtveřice reagují především na rozdílnou vertikální složku tenzoru

druhých derivací, ale i na menší změny zrychlení v neradiálním směru. Horní a dolní čtveřice hmot se pohybují jinak rychle a ve spojovacím vláknu to vyvolá torzi, která se pomocí piezoejektu změní a převede na požadované druhé derivace.

### **D3.11.3 Cíl gradiometrických měření**

Cílem gradientometru je určit opravy stávajících hodnot harmonických geopotenciálních koeficientů  $C_{l,m}$ ,  $S_{l,m}$  prostřednictvím měření druhých derivací gravitačního potenciálu, tj. složek tenzoru

$$(D3.11.1) \quad \Gamma_{ab} = \begin{pmatrix} \Gamma_{xx} & \Gamma_{xy} & \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{yx} & \Gamma_{yy} & \Gamma_{yz} \\ \Gamma_{zx} & \Gamma_{zy} & \Gamma_{zz} \end{pmatrix},$$

zde v lokálním souřadném systému, kde osa  $x$  má směr shodný s vektorem rychlosti družice, osa  $z$  míří k nadíru a  $y$ -ová osa doplňuje pravouhly systém v 'normálovém' směru.

Představme si transformaci  $\mathbf{R}$  z lokálního do inerciálního systému pro měření v libovolném bodě (..)

$$(D3.11.2) \quad \Gamma_{ij}(\cdot) = \mathbf{R} \Gamma_{xy}(\cdot) \mathbf{R}^T$$

Předpokládáme, že gravitační potenciál  $V$  máme vyjádřen tradičně rozvojem v řadu kulových funkcí s harmonickými koeficienty  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  stupně  $l$  a řádu  $m$  do nějakého maximálního stupně  $L$ . Uvažujeme dvě části  $V$ , komponentu  $N$ , kterou nazveme normální a  $T$  rušivý potenciál v bodě  $P'$  na nominální, resp.  $P$  na skutečné na oběžné dráze. Pozorované  $\Gamma_{ij}(P)$  rozdělíme na normální, referenční část  $N_{ij}(P)$ , vypočtené s nominálním (již známým) geopotenciálem a na neznámou (hledanou) poruchovou část  $T_{ij}$ . Poněvadž souřadnice bodu  $P$  neznáme, rozvineme  $N$  do Taylorovy řady v  $P'$  a podržíme jen lineární člen. Také uvážíme, že  $T$  v bodech  $P$  a  $P'$  se liší jen nepatrně. Pak máme:

$$(D3.11.3) \quad \Gamma_{ij}(P) = N_{ij}(P) + T_{ij}(P),$$

kde  $N_{ijk}$  jsou parciální derivace  $N(P')$  podle souřadnic  $x^k$ .

Měřením jsme získali druhé derivace odpovídající poruchovému potenciálu  $T$ , t.j. opravy  $\Delta\Gamma_{ij}$ . Nalezneme vztahy mezi nimi a opravami geopotenciálních koeficientů  $\Delta C_{lm}$ ,  $\Delta S_{lm}$ , které pak určíme metodou nejmenších čtverců nebo kolokacemi. Explicitní forma lineárního systému rovnic oprav v bodě  $P'$  může vypadat takto (Rummel a Colombo, 1985):

$$(D3.11.4) \quad \begin{pmatrix} \Delta\Gamma_{xx} \\ \Delta\Gamma_{xy} \\ \Delta\Gamma_{xz} \\ \Delta\Gamma_{yy} \\ \Delta\Gamma_{yz} \\ \Delta\Gamma_{zz} \end{pmatrix} = \frac{3GM}{r_p^3} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_p^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ r_p^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_p^{-1} \\ 0 & r_p^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -2r_p^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \\ + \frac{GM}{r} \sum_{l,m,\alpha} \Delta C_{l,m,\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ \left( \frac{r}{r_p} \right)^{l+1} Y_{l,m,\alpha}(P') \right\} + \varepsilon_{ij}$$

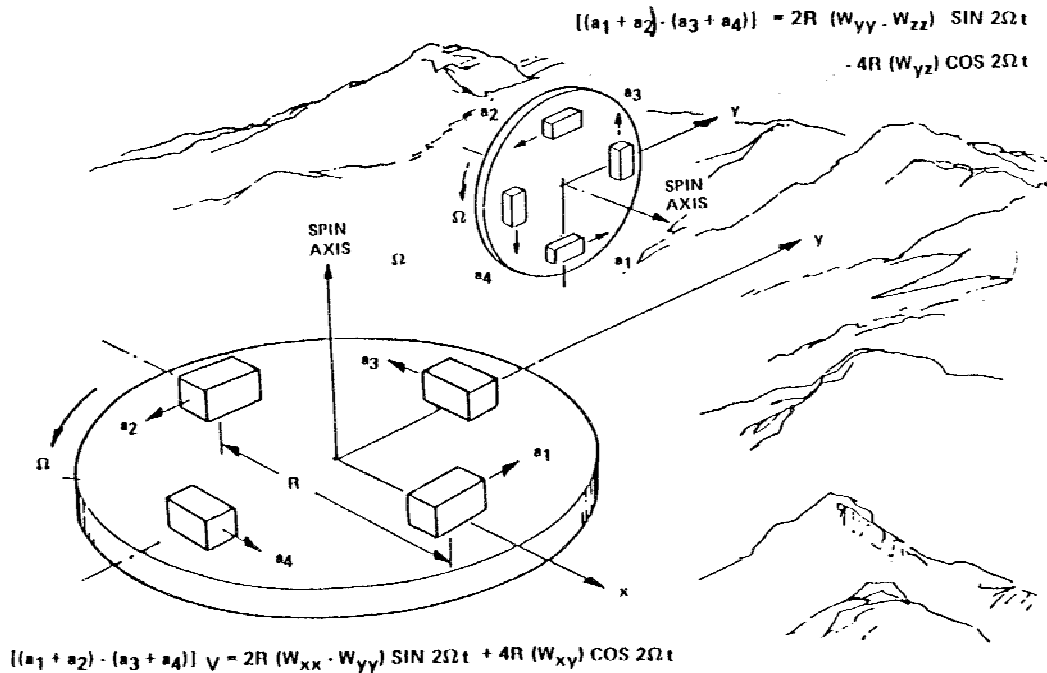
kde  $\alpha = 1, 2$  pro  $C_{l,m}$ ,  $S_{l,m}$ ,  $r$  je poloměr Země,  $r_p$  geocentrický průvodič hmotného středu družice v  $P'$ ,  $Y_{l,m,\alpha}(P') = P_{lm}(\sin \Phi_p) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases}^{\alpha=1} (m\lambda_p)$  a  $\varepsilon_{ij}$  jsou chyby měření.

Matice (D3.11.1) je symetrická díky konzervativnímu charakteru gravitačního pole a součet členů na hlavní diagonále je nula, neboť ve vnějším prostoru platí Laplaceova rovnice: Z toho plyne, že musíme v každém okamžiku měřit právě pět (nikoli nutně všech devět) složek tenzoru (D3.11.1), aby měření v daném okamžiku a místě bylo kompletní. K tomu zjevně nestačí jedna dvojice mikroakcelerometrů. Ideální by byl kanonický gradientometr se šesti mikroakcelerometry poskytující nadbytečná měření (pro určení systematických přístrojových chyb a orientace gradientometru v prostoru). Z literatury (např. Balmino a kol. 1981, Rummel a Colombo, 1985, a j.) vyplývá, že centrifugální zrychlení působené rotací družice s gradientometrem v prostoru lze u kanonického gradientometru snadno eliminovat. S kanonickým gradientometrem počítal francouzský projekt GRADIO, vycházející z mikroakcelerometru CACTUS (viz dále).

Není nezbytné měřit kompletní tenzor, stačí jen některé složky, podle orientace přístroje v prostoru. Např. v projektu ARISTOTELES se nepočítalo s derivacemi ve směru vektoru rychlosti  $(xx)$ ,  $(xy)$ ,  $(xz)$ , protože v tomto směru se nejvíce projevuje silně rušivý odpor atmosféry. Pro ostatní složky odvodili např. Petrovskaja a Zielinski (1996) příslušné vzorce, které zde jen schematicky popíšeme. Nejjednodušší je 'radiální' složka  $\Gamma_{zz} = \partial^2 T / \partial r^2$ , kde  $r$  je geocentrický průvodič dráhy družice (složka  $(zz)$  je ve směru  $r$ ) a poruchový potenciál  $T$  je vyjádřen jako funkce dráhových elementů; ostatní složky jsou různě komplikovanými kombinacemi  $\partial(r, \Omega, \omega, M)$ , kde  $\Omega, \omega, M$  jsou Keplerovské dráhové elementy. Např. Visser (1992) uvádí (pro jednotlivý člen  $C_{l,m}$ ,  $S_{l,m}$  a indexy  $(l,m,p)$ ):

$$(D3.11.5) \quad \Gamma_{zz} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \mathbf{f} \left[ (l+1)(l+2), \left( \frac{1}{a^{l+3}} \right), F_{lmp}, S_{lmp} \right], \\ \Gamma_{yy} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \left( \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial (\omega + M)^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \mathbf{f} \left[ (l-2p)^2 - (l+1)^2, \left( \frac{1}{a^{l+3}} \right), F_{lmp}, S_{lmp} \right], \\ \Gamma_{xy} = \mathbf{f} \left[ m - (l-p), (l+2), \left( \frac{1}{a^{l+3}} \right), F'_{lmp}, S'_{lmp} \right],$$

kde  $F_{lmp}$  a  $F'_{lmp}$  jsou funkce sklonu a derivace funkcí sklonu podle sklonu,  $a$  hlavní poloosa dráhové elipsy,  $S_{lmp}$  a  $S'_{lmp}$  sinové a kosinové kombinace  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $M$  a času, které jsou funkcemi  $\Delta C_{lm}$ ,  $\Delta S_{lm}$ . Za zdůraznění stojí nepřímá úměra na přinejmenším třetí mocnině  $a$  a různá závislost na součtech, rozdílech a mocninách  $(l,m,p)$ , vedoucí k různé citlivosti jednotlivých složek druhých derivací na parametrech gravitačního pole).



**Obrázek D3.11.4:** Čtveřice mikroakcelerometrů měřících zrychlení  $a_i$  umístěných na deskách otáčejících se rychlostí  $\Omega$  by (na zemském povrchu) měly měřit uvedené kombinace druhých derivací tíhového potenciálu. Návrh rotačního gradientometru fy Bell Aerospace/Textron. Podle (NASA, 1984).

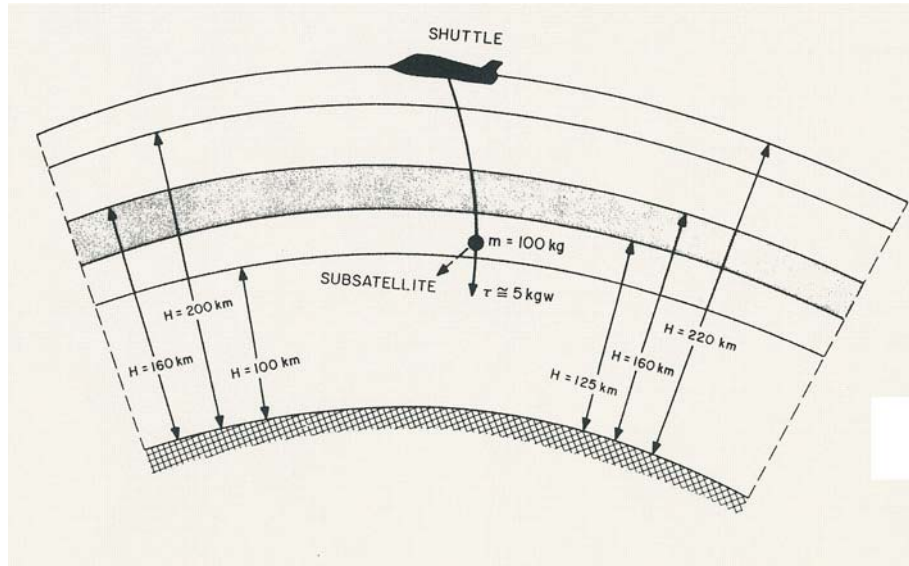
Ilustrativní může být obr. D3.11.4 (reprodukováno z materiálů NASA, 1984) se čtveřicemi mikroakcelerometrů na otáčejících se deskách různě orientovaných v prostoru. Každá dvojice mikroakcelerometrů dává jedno čtení druhých derivací, jedna otáčející se čtveřice lineární kombinaci druhých derivací modulovanou rotací desky.

#### **D3.11.4. Projekty**

Tab. D3.11.1 shrnuje (bez nároku na úplnost) projekty družicových mikroakcelerometrů, drag-free systémů a gradientometrů. Některé nápady byly opravdu zvláštní; většina nebyla uskutečněna z finančních důvodů nebo pro enormní technologické nároky (na svou dobu).

*Gravity dumbell* (gravitační činka) se dvěma mikroakcelerometry, orientovaná ve směru místní vertikály (NASA, 1984), projekty *GRAVSAT* a *GRM* (NASA, 1986) na jedné straně -určené především pro studium gravitačního pole Země - a družice *LOGACS* a *Triad 1, 2* s mikroakcelerometry či drag-free systémy americké armády pro studium atmosféry lze považovat za 'rozcvičku' pro supravodivý *SGG* (satellite gravity gradiometer). Neuskutečnil

se *GRM* (Geopotential Research Mission), který počítal s dvojicí družic na velmi nízkých (160 km), kruhových a polárních drahách. Družice měly být vybavené drag-free systémy. Navzájem by se dopplerovsky sledovaly (low-low satellite-to-satellite tracking). Jedna z nich měla mít i citlivý magnetometr pro studium (variací) magnetického pole Země. Analogií k tomuto opuštěnému projektu je mise *GRACE* (2002) a *GOCE* (plánované vypuštění v r. 2008), viz Tab. D3.11.1, podrobnosti níže).



**Obrázek D3.11.5:** *SKYHOOK*, "kosmická udička". Raketoplán a subdružice na oběžné dráze. V subdružici odvinuté a vlečené na laně „za Raketoplánem“, penetrující až do výšky pouhých 100 km nad zemským povrchem, (kam se běžná UZ nedostane, aniž by skoro ihned zanikla v atmosféře) měl být umístěn gradientometr (převzato z materiálu Martin Marietta, 1983).

Ve snaze přiblížit měřickou aparaturu (gradientometr) ke zdroji poruch (co nejblíže k Zemi), byla navržena subdružice vlečená na dlouhém laně "pod" raketoplánem. Projekt byl nazván *SKYHOOK* neboli "kosmická udička". Subdružice by byla vynesena raketoplánem a pomocí navijáku by ji drát 100 km (!) dlouhý dostal od něj až do výšky asi jen 100 km nad zemským povrchem (obr. D3.11.5). Tak nízko se žádná samostatná družice neudrží více než několik oběhů kolem planety - díky enormnímu brzdění o atmosféru, ale na druhou stranu tak vysoko se nedostanou letadla ani balony. Autoři projektu sice tvrdili, že se kevlarový drát ani nezauzlí ani nepřetrhne, ale pozdější experiment (NASA+Italové) se subdružicí bez gradientometru na drátě dlouhém "jen" 20 km předvedl pravý opak.

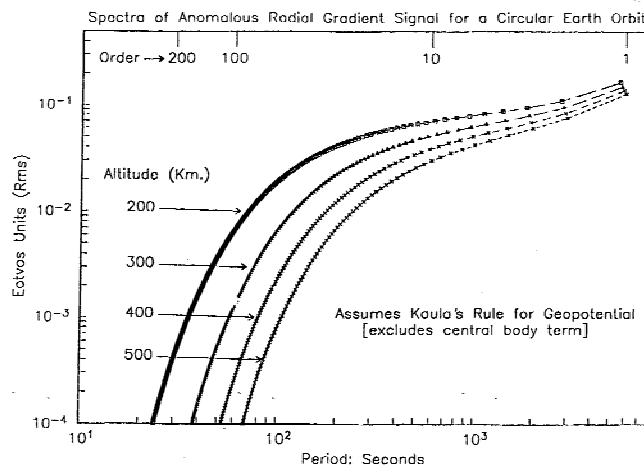
Francouzi vyvinuli a vypustili mikroakcelerometr *CACTUS* (Capteur Accelerometriques Capacitifs Triaxiaux Ultra Sensible) a zkonstruovali gradientometr *GRADIO* ONERA (viz např. Balmino a kol., 1981, 1984). Také připravili ještě citlivější akcelerometr *SUPER-CACTUS*. ESA společně s NASA uvažovala o projektu *ARISTOTELES* s gradientometrem (Applications and Research Involving Space Techniques Observing The Earth's Field from Low Earth Orbiting Satellite), ale hlavně z finančních důvodů z toho sešlo. Podobný osud potkal plány na *GAMES* (Gravity and Magnetic Earth Surveyor, NASA + CNES) a další.

Dalšími projekty byly *STEP* a *GG*, určené pro test principu ekvivalence [PE]. Pro *STEP* měly být použity sestavy mikroakcelerometrů různých konstrukcí vytvářející gradientometry, v prostředí s velmi nízkou teplotou, v zařízení nazývaném *SQUID*

(Superconducting Quantum Interference Device) k potlačení okolního šumu. Protože se počítalo s velmi nízkou drahou příliš rušenou odporem atmosféry, byl navíc požadován 'drag-free' systém!

Co je to PE? PE říká, že všechny objekty v daném gravitačním poli padají se stejným zrychlením, bez ohledu na jejich hmotnost, složení a vnitřní strukturu. Dnes se o platnosti tohoto principu, zobecněného Einsteinem, diskutuje, avšak přesnost dosavadních měření nevedla k rozhodnutí, zda princip platí či nikoli. Přesnost z doby Galilea, kdy pouštěl předměty ze šikmé věže v Pise, dnes samozřejmě nestačí. SQUID dokáže detekovat diferenciální pohyb dvou testovacích hmot (cca 200 g) s citlivostí na  $10^{-15}$  m. Princip měření je však stále tentýž: v sestavě mikroakcelerometrů pouštět 'volně padat' (na oběžné dráze kolem Země) dvě testovací hmoty vyrobené z různého materiálu. Dopadnou-li na stejné místo za prokazatelně různou dobu, PE neplatí.

Neplatnost PE by znamenala revizi fundamentálních fyzikálních teorií gravitace (ať už Newtonovy nebo obecné teorie relativity). V obou teoriích bychom zavedli korekční členy vyjadřující, že existuje jakýsi náboj, který způsobuje skalární pole analogické poli gravitačnímu, který není roven setrvačné hmotě, čili připustili bychom existenci dalšího fyzikálního pole. V obecné teorii relativity by neplatnost PE mohla znamenat, že gravitační pole není lokálně ekvivalentní poli neinerciálních sil; modifikaci, obohacení, v krajním případě neplatnost obecné teorie relativity.



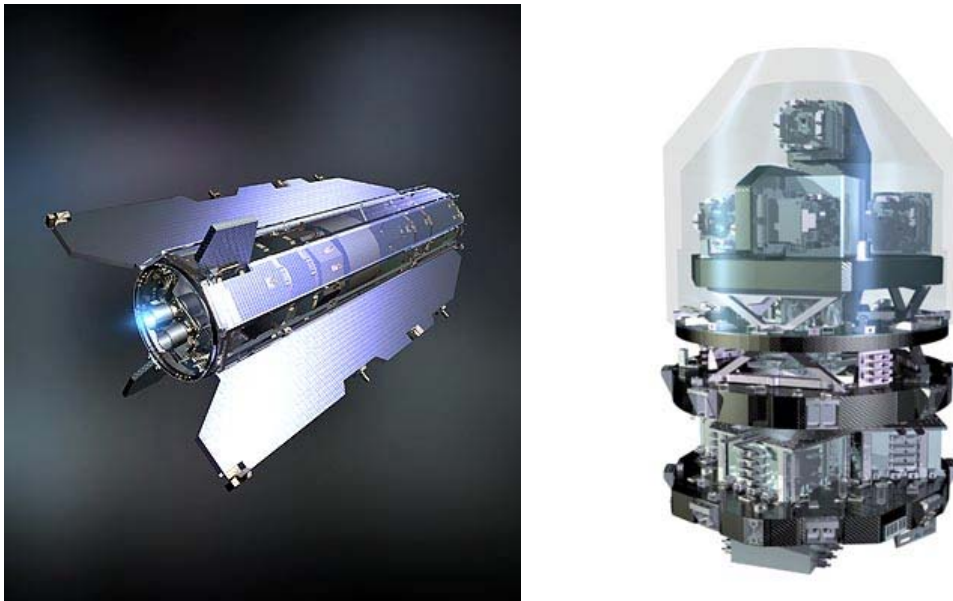
**Obrázek D3.11.6:** Co lze z družicového gradientometru s danou přesností měření ( $E$ ) očekávat při určení maximalního stupně  $L$  harmonických geopotenciálních koeficientů v popisu gravitačního pole Země. (1) Do jakého  $L$  lze  $C_{lm}$ ,  $S_{lm}$  určit při dané přesnosti přístroje a dané výšce letu nad Zemí (kruhová polární dráha). (2) Jak dlouho je třeba měřit (opět při zadané přesnosti a výšce letu). (3) Chceme-li zvýšit stávající přesnost a rozlišovací mez popisu gravitačního pole (do určitého  $L$ ), jakou musíme volit dráhu při dané měřické přesnosti gradientometru či naopak jakou měřickou přesnost při zvolené dráze. Podle Wagnera, NOAA 1998.

Ve výčtu projektů nelze opomenout český mikroakcelerometr MACEK a družici MIMOSA. O projektu MACEK (původně: Mikro Accelerometer InterKosmos) se začalo uvažovat v ASÚ Ondřejov v letech 1982 - 1984. MACEK měl být opakováním francouzského mikroakcelerometru CACTUS, který úspěšně pracoval na družici D5B Castor v r. 1975. CACTUS byl - po krátkodobých testech americké armády s mikroakcelerometry na družicích



San Marco (1964) a LOGACS (1967) - prvním (a dosud posledním!) dlouhodobým vědeckým experimentem tohoto typu. MACEK měl být 'koule v kouli' s 'citlivostí' měření  $10^{-9}$  m.s<sup>-2</sup>; mělo se měřit elektrické napětí potřebné k udržení centrované polohy vnitřní koule v dutině. Dráha byla volena silně eliptická (stejně jako u mikroakcelerometru francouzského) proto, aby v perigeu řádově převažoval odpor atmosféry nad tlakem záření (a tedy z měření kolem perigea byl zpřesňován model hustoty atmosféry) a aby v apogeu převažoval tlak záření nad odporem atmosféry (a tudíž měření z tohoto úseku dráhy byla využívána ke zpřesnění modelu tlaku slunečního záření a albeda Země). Avšak v bývalé ČSSR nebyly vytvořeny dostatečné podmínky pro konstrukci tak jemného přístroje v civilním sektoru. Proto byl koncept 'koule v kouli' nahrazen 'krychlí v krychli'. O skutečném rozvoji projektu mikroakcelerometru v ČR lze mluvit až po r. 1990. Místo kulového akcelerometru byl zhotoven krychlový. První zkušební lety proběhly úspěšně v r. 1992 na ruské družici RESURS F 1 (s návratem přístroje na padáku) a v r. 1996 na modulu SPACEHAB amerického raketoplánu Atlantis. Pro vědecké účely však musí být mikroakcelerometr umístěn ve hmotném středu družice a nesmí být rušen velkými parazitními negravitačními poruchami (jako je rotace raketoplánu, jeho nepravidelné osvětlení a zahřívání slunečními paprsky, chůze astronautů na palubě nebo připojování kosmických lodí). Proto byla vyvinuta samostatná malá družice MIMOSA (Sehnal, 2002), která však po vypuštění nepracovala jak měla a experiment se nezdařil.

Podívejme se ještě na studie přesnosti měření s gradientometrem. Obr. D3.11.6 ukazuje, co lze od gradientometru s danou přesností měření očekávat pro určení parametrů gravitačního pole Země (odhad maximálního  $l$  harmonických koeficientů). Podrobnosti jsou u obrázku. Další doporučená studie: Schrama (1990).



**Obrázek D3.11.7:** *GOCE, 7a - malířova představa družice na oběžné dráze, 7b - gradientometr.*

Po družici *CHAMP* (viz např. [www.gfz-potsdam.de](http://www.gfz-potsdam.de)) pro studium gravitačního a magnetického pole Země (vypuštěna v r. 2000) a dvojici družic *GRACE* (2002) bude vypuštěna (plán na r. 2008) družice *GOCE* (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer), v rámci ESA. Na palubách *CHAMPu* a *GRACE* jsou mikroakcelerometry ke zjištění a početní eliminaci negravitačních poruch drah. Na palubě *GOCE* (obr. 7a) má být



tříosý gradientometr (obr. 7b), typ diferenciální mikroakcelerometr. Vnitřní přesnost měření 3 miliE v každé ose. Současně má být družice vybavena pro high-low satellite-to-satellite tracking s družicemi systému GPS (viz např. [www.esa.int/export/esaLP/](http://www.esa.int/export/esaLP/)). Dráha má být heliosynchronní a velmi nízká (výška letu asi 250 km); negravitační vlivy budou známy z mikroakcelerometrických složek gradientometru a aktivně korigovány (drag-free koncept zde nazývaný Drag Free Control System). Také Češi se *GOCE* hodlají aktivně účastnit.

V budoucnosti bude postupně dosažena přesnost  $10^{-4}$  E (ale to patrně jen se supravodivým gradientometrem) a gravitační pole Země bude známo s řádově větší přesností a rozlišením než dnes, což využijí různé geovědní obory a praxe. Podle plánů NASA se kosmická gradientometrie neomezí jen na planetu Zemi, ale v dlouhodobější perspektivě budou gradientometry (třebas i méně přesné) vyslány i na oběžnou dráhu nebo k průletům kolem Měsíce, planet, asteroidů a komet s cílem upřesnit resp. vůbec poprvé odhadnout parametry jejich gravitačních polí (nejvíce toho zatím víme o gravitačním poli Měsíce, Marsu a Venuše z jiných měření).

**Tabulka D3.11.1:** *Přehled projektů (většinou nerealizovaných) kosmických mikroakcelerometrů, drag-free družic a gradientometrů. Uveden rok vypuštění, symbol "=" znamená, že projekt nebyl (dosud) uskutečněn, symboly "G" a "N" označují převažující určení experimentu pro studium gravitačního pole resp. negravitačních poruch dráhy.*

název experimentu	rok realizace	typ experimentu
<b>LOGACS</b> LOW-G Accelerometer Calibration System	1967	N
<b>DUMBEL</b>	=	G
<b>SKYHOOK</b>	=	G
<b>TRIAD 1 DISCOS</b> DISturbance COmpensating System	1972	G
<b>TRIAD 2 DISCOS</b>	1973	G
<b>CACTUS</b> Capteurs Accelerometriques Capacitifs Triaxiaux Ultra Sensible	1975	N
<b>GRAVSAT</b>	=	G
<b>GRM</b> Geopotential Research Mission	=	G
<b>GRADIO</b>	=	G
<b>ARISTOTELES</b> Applications and Research Involving Space Techniques Observing The Earth's field from Low Earth orbiting Satellite	=	G
<b>GRAVITY PROBE B</b>	=	G
<b>SUPERCACTUS</b>	=	N
<b>STEP</b> Satellite Test of the Equivalence Principle	=	G
<b>GG</b> Galileo Galilei	=	G
<b>MACEK RESURS F1</b>	1992	N
<b>MACEK STS 79 Atlantis</b>	1996	N

*Dodatek k odstavci 3.11*

<b>CHAMP</b> CHallenging Micro-satellite Payload for geophysical research and application (high-low SST and accelerometer)	<b>2000</b>	<b>G</b>
<b>MIMOSA</b> Microaccelerometric Measurements Of Satellite Accelerometers	=	<b>N</b>
<b>GRACE</b> Gravity Recovery And Climate Experiment (low-low SST, high-low SST, and 2 accelerometers )	<b>2002</b>	<b>G</b>
<b>SAGE</b> Satellite Accelerometry for Gravity field Exploration (high-low SST, SLR and accelerometer)	=	<b>G</b>
<b>GOCE</b> Gravity field and steady-state Ocean circulation Explorer (high-low SST and 3-axis gradiometer)	<b>(2008)</b>	<b>G</b>

## Literatura

- Altamimi, Z, 2006: [http://itrf.ensg.ign.fr/ITRF\\_solutions/ITRF2005.php](http://itrf.ensg.ign.fr/ITRF_solutions/ITRF2005.php)
- Altamimi, Z, Sillard, P, and Boucher, C, 2002, "ITRF2000: A New Release of the International Terrestrial Reference Frame for Earth Science Applications," J. Geophys. Res., 107, B10, 10.1029/2001JB000561.
- Anderle RJ., Hoskin RL, 1977, Correlated Errors in Satellite Altimetry Geoids, Geophys. Res. Letts., 4, 421.
- Antreasian PG, 1992, Precision Radiation Force Modelling for the TOPEX/Poseidon Mission, Doctor Thesis, Dept. Aerospace Eng. Sci., Univ. of Texas at Austin, Texas.
- ASI, 1998: SAGE: Phase A final report, eds. A. Albertella a F. Migliaccio, Italian Space Agency project, publikace vydána Interntl. Geoid Service, 182 stran, Milano.
- Ball (company) 1994, EOS ALT-R/GFO Convergence Study—Final Briefing, Oct. 28, NOAA Silver Spring, USA.
- Balmino G, a j. 1984: A study of Gradiometry; Proceedings: "The Use of Artif. Satell...", Vol. III, pp. 105-112, ed. G. Veis, TU Athens.
- Balmino G, Barlier F, Bernard A, Bouzat C, Riviere G, Runavot J J: 1981 Proposition pour les arcs GRADIO, CNES Toulouse Techn. Rep.,.
- BERNESE 3.5, 1993: Základní funkce software jsou popsány v: Rothacher M., Beutler G., Gurtner W., Brockmann E., Mervart L. (1993): *Documentation of the Bernese GPS Software Version 3.4*. Astronomical Institute, University of Berne.
- Biancale R, a 16 dalších 2000 A New Global Earth's Gravity Field Model from Satellite Orbit Perturbations: GRIM5-S1, Geophys. Res. Letts. 27, 3611.
- Bjerknes J, 1979, Atmospheric Teleconnection from the Equatorial Pacific, Mon. Weather. Rev., 97, 163.
- Black HD, 1973: A Satellite Freed of all but Gravitational Forced: "Triad 1", rukopis The Staff Space Dept., The Johns Hopkins Univ., APL and Staff of the Guidance and Control Lab., Standford Univ., předloženo na zasedání COSPAR.
- Bosch W, Wagner CA, Klokočník J, Kostelecký J, 1996: Gravity Field Parameters from Single- and Dual-Satellite Crossovers, present. na EGS (Europ. Geophys. Soc.) XXI GA, Hague, Holandsko.
- Boucher C, Altamimi Z, 1995: Specifications for reference frame fixing in the analysis of EUREF GPS Campaigns. in: Gubler, E., Hornik, H. (eds.): Re port on the Symp. of the IAG Subcommision for the Euro pean Reference Frame (EUREF) held in Helsinki 3 - 6 May 1995. Veroff. der Bayer. Kommission fur die Internat. Erdmessung der Bayer. Akad. Wiss., Heft Nr. 56, p. 265-267.
- Boudon Y, Barlier F, Bernard A, Juillerat R, Mainguy AM, Walch JJ, 1979: Synthesis of Flight results of the Cactus Accelerometer for Accelerations below  $10^{-9}$  g, em Acta Astronaut. bf 6, 1387--1398.
- Brouwer D, Clemence GM, 1961: *Methods of Celestial Mechanics*. New York and London, Academic Press 1961.
- Burša M, Karský G, Kostelecký J, 1993: *Dynamika umělých družic v tíhovém poli Země*. Academia Praha 1993, 263 s.

- Burša M, Kostelecký J, 1994: Kosmická geodezie a kosmická geodynamika, Ministerstvo obrany – GŠ AČR 1994, 393 s.
- Burša M, Kostelecký J, 1999: Space geodesy and space geodynamics, Ministry of Defense of the Czech Republic 1999, 459 p.
- Cazenave A, Schaeffer P, Berge M, Brossier C, Dominh K, Gennero MC, 1996: High-resolution Mean Sea Surface Computed with Altimeter Data of ERS 1 (Geodetic Mission) and TOPEX/Poseidon, *Geophys. J. Int.*, 125, 696.
- Černohorský J, Kolář R, Kostelecký J, Šimek J, 2004: Rozvoj geodetických základů České republiky v kontextu EUREF. *Geodetický a kartografický obzor*, 50/92, 2004, č. 4-5, p. 63 – 79.
- Cheney RE, Miller LL, Douglas BC, Agreen RW, 1987: Monitoring Equatorial Pacific Sea Level with GEOSAT, *Johns Hopkins APL Technical Digest*, 8, 2, 245.
- Cílek V, 1995: El Niño- Jezulátko, *Vesmír* 74, č.5, 257.
- Cimbálník M, Zeman A, Kostelecký J, 2007: *Základy vyšší a fyzikální geodézie*, Skriptum, Nakladatelství ČVUT 2007, 218 s.
- Coleman R, 1980: On the Recovery of Ocean Dynamic Information from Satellite Altimetry, *Marine Geod.* 4, 351.
- Colombo G, Gaposchkin E M, Grossi M D, Weiffenbach G C, 1974: Shuttle-Borne "Skyhook": A New Tool for Low-Orbital-Altitude Research, *SAO Rep. nečísl.*, Cambridge.
- Delattre M, a j. 1976: Les Essais en Orbite de l'Accéléromètre CACTUS, CNES report 1976-5, Chatillon, France.
- Diaz FH, Markgraf V [eds.], 1992: *El Niño*, Cambridge Univ. Press.
- Douglas BC, 1991: Global Sea-Level Rise, *J. Geophys. Res.*, 96, 6981.
- ESA 2007: DVD with Proceedings of 3rd Interntl. GOCE User Workshop SP-627, ed. K. Fletcher, ISBN 92-9092-938-3 ISSN 1609-042X.
- ESA, 1989: Proc. Ital. Workshop on the Europ. Solid-Earth Mission ARISTOTELES, Trevi, Italy, k tomu propagační materiály ESA o ARISTOTELES. *ESA J.* 17, 331.
- ESA, 1996: Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Mission (GOCE), Rep. SP 1196(1).
- ESA, 1998: European Views on Dedicated Gravity Field Missions: GRACE and GOCE, Rep. ESD-MAG-REP-CON-001.
- EUREF, 2006: <http://www.euref.iag.net/>
- EUREF-EPN, 2006: <http://www.epncb.oma.be/>
- Forum on Global Change Modeling, USGCRP 95-02, report of SubComm. on Global Change Research, [ed.] E. Barron; Washington, D.C., 1995.
- Fu LL, Cazenave A, editoři, 2001: Satellite Altimetry and Earth Sciences, *A Handbook of Techniques and Applications*, AP Ser. 69, San Diego, 463 stran
- Gaposchkin EM, 1980: Global Gravity Field to Degree and Order 30 from GEOS 3 Satellite Altimetry and Other Data, *J. Geophys. Res.*, 85, B12.
- Gooding RH, King-Hele DG, 1989, Explicit form of some functions arising in the analysis of resonant satellite orbits, *Proc. R. Soc. Lond.* A422: 241-259, 1989.

- Gooding RH, Wagner C A, Klokočník J., Kostelecký J., Reigber Ch, 2003: CHAMP and resonances, in: Ch. Reigber, H. Luehr, P. Schwintzer and J. Wickert (eds.): Earth Observation with CHAMP – Results from Three Years in Orbit, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2004, p. 101 – 107.
- Gooding RH, Wagner CA, Klokočník J, Kostelecký J, Gruber Ch, 2007: CHAMP and GRACE resonances, and the gravity field of the Earth, Adv. in Space Research, Vol. 39, Issue 10, 2007, p. 1604-1611, Pergamon, Elsevier Science Ltd.
- GraGeoMar* 1996, sborník abstraktů a referátů z mezinár. symposia Gravity, Geoid, and Marine Geodesy, Tokyo, Japan, [eds.]: J. Segawa, H. Fujimoto, S. Okubo, IAG Symp. 117, Springer, Berlin (sborník ref. vytištěn v r. 1997).
- Hadgigeorge G, Blaha G, 1979: Gravity Field Determination from Combination of Altimetric and Gravity Anomaly Data, sborník ref. "The Use of Artificial Satel. for Geodesy and Geodynamics", II, [eds.]: Veis a Livieratos, Atény, 273.
- Hancock III, DW, Hayne GS, 1996: Error in Topex Oscillator Drift Correction, Wallops Flight Facility web pages: <http://www.grdl.noaa.gov/SAT/products/topex.html>,
- Hofmann-Wellenhof B, Lichtenegger H, Collins J, 2001: GPS – Theory and Practice, Fifth Edition, Springer-Verlag 2001, 382 s.
- IERS, 2006: <http://www.iers.org/>
- Kabeláč J, Kostelecký J, 1998: Geodetická astronomie 10. Skriptum, Vydavatelství ČVUT, 254 s.
- Karský G, Kostelecký J, Novák P, Šimek J, 1993: Budování sítě Nultého řádu na území České a Slovenské republiky. Publikace VÚGTK č.7, roč. 39, Zdiby 1993.
- Klees R, Koop R, Visser J, 2000: Efficient gravity field recovery from GOCE gravity gradient observations, em J. Geod, bf 74, 561-571.
- Klokočník J, 1976: Changes in the inclination of a close earth satellite due to orbital resonances. Bull. Astr. Inst. Czechosl. 27, p. 287 – 295.
- Klokočník J, Kostelecký J, Karasová D, 1994: Satellite Altimetry and its Use in Geoscience, edice VÚGTK 40, 12, 157 stran.
- Klokočník J, Kostelecký J, Jandová M, 1995: Altimetry with Dual-Satellite Crossovers, Manusc. Geod. 20, 82.
- Klokočník J, Kostelecký J, Wagner CA, Gruber Ch, 2006: Review of the Use of Satellite Crossover Altimetry to Test the Accuracy of the Earth Gravity Models, poster na ESA Symp On 15 years of Progress in Radar Altimetry, Benátky, Itálie, březen.
- Klokočník J, Lemoine FG, Kostelecký J, 1998: Reduction of of Crossover Errors in the Earth Gravity Model (EGM) 96, Marine Geod., 21, 219.
- Klokočník J, Reigber Ch, Schwintzer P, Wagner CA, Kostelecký J, 2002: Evaluation of pre-CHAMP Gravity Models GRIM5-S1 and GRIM5-C1 with Satellite Crossover Altimetry, J. Geod. 76, 189.
- Klokočník J, Wagner CA, 1999: Combinations of Satellite Crossovers to Study Orbit and Residual Errors in Altimetry, Celest. Mech. 74, 223.
- Klokočník J, Wagner CA, Kostelecký J, 1996: Accuracy Assessments of Recent Earth Gravity Models using Crossover Altimetry, Studia geoph. et geod., 40, 77.

- Klokočník J, Wagner CA, Kostelecký J, 2000: Residual Errors in Altimetry Data Detected by Combinations of Single- and Dual-Satellite Crossovers, *J. Geod.* 73, 671.
- Kolektiv autorů, 1998: Geodetické referenční systémy v České republice, Vývoj od klasických ke geocentrickým souřadnicovým systémům. Publikace VÚGTK a VZÚ 1998, Roč. 44, No 21. 186 p., 34 obr.
- Kostelecký J, Karský G, 1994: Výpočetní program pro vyrovnání sítě zaměřené metodou GPS (program VUGNET, verze 1.0). Zpráva dílčího úkolu VUGTK 1-01-20: Výzkum tvorby a využívání subsystému základních bodových polí. VÚGTK 1994.
- Kostelecký J, Klokočník J, Wagner CA, 2005: Geometry and Accuracy of Reflecting Points in Bistatic Satellite Altimetry, *J. Geod.*, 79, 421.
- Kostelecký J, Vondrák J, 2003: IERS and its importance for global geodynamics. *Acta Montana IRSM AS CR* (2003), Series A, No. 24 (131), p. 7 – 19.
- Krynski J, 1979: Observation Equations for Satellite-to-satellite Tracking, *Artif. Satel.* 14, Nos. 2-3.
- Leick A, 1995: GPS Satellite Surveying, John Wiley & Sons. Inc., New York, 560 p.
- Lemoine FG a 6 dalších, 2001: An Improved Solution of the Gravity Field of Mars (GMM-2B) from Mars Global Surveyor, *J. Geophys. Res.* 106, E10, 23359.
- Lemoine FG a 17 dalších, 1997: The Development of the NASA GSFC and NIMA Joint Geopotential Model, IAG Symposia 117, [eds.]: J. Segawa, H. Fujimoto, S. Okubo, GraGeoMar, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 461.
- Lemoine FG, a j., 1998: The Development of the Joint NASA GSFC and the NIMA Geopotential Model EGM 1996, NASA GSFC Rep. NASA TP 206861, 700 str., Greenbelt.
- Lerch FJ, Marsh JG, Klosko SM, Williamson RG, 1982: Gravity Model Improvement for SEASAT, *J. Geophys. Res.*, 87, C5, 3281.
- Lerch FJ, Putney BH, Wagner CA, Klosko SM, 1981: Goddard Earth Models for Oceanographic Applications (GEM 10 b and 10 C), *Marine Geod.* 5, 145.
- Levitus S., 1982: Climatological Atlas of the World Ocean, NOAA Professional Paper 13, Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, Rockville, Maryland.
- Livermore R, McAdoo D, Marks K, 1994: Scotia sea Tectonics from High-resolution Satellite Gravity, *Earth Planet. Sci. Letts.*, 123, 255.
- Lundquist CA, 1967: Satellite Altimetry and Orbit Determination, *Smiths. Astrophys. Obs. SAO Rep.* 248, Cambridge, Mass.
- Lundquist CA, Giacaglia GEO, Hebb K, Mair SG, 1969: Possible Geopotential Improvement from Satellite Altimetry, *Smiths. Astrophys. Obs. SAO Rep.* 294, Cambridge, Mass.
- Luthcke SB, Marshall JA, 1992: Nonconservative Force Model Parameter Estimation Strategy for TOPEX/Poseidon Precision Orbit Determination, NASA Techn. Memor. 104575, GSFC Greenbelt.
- Ma C, Feissel M eds., 1997: Definition and realization of the International Celestial Reference System by VLBI Astrometry of Extragalactic Objects. IERS Technical Note 23, Observatoire de Paris.
- Marsh JG, Martin TV, 1982: The SEASAT Altimeter Mean Sea Surface Model, *J. Geophys. Res.*, 87, C5, 3269.

- Martín-Neira M., 1993: A Passive Reflectometry System: Application to Ocean Altimetry, Mather RS, Lerch FJ, Rizos C, Masters EG, Hirsch B, 1979: Dynamic Sea Surface Topography from GEOS-3 Altimetry: Determination of some Dominant Parameters, sborník ref. "The Use of Artificial Satel. for Geodesy and Geodynamics", II, [eds.]:Veis a Livieratos, Atény, 448.
- McAdoo DC, Marks KM, 1992: Gravity Fields of the Southern Ocean from Geosat data, J. Geophys. Res., 97, B3, 3247.
- Mervart L, Cimbálník M, 1997: Vyšší geodézie 2, Skriptum, Nakladatelství ČVUT 1997, 178 s.
- NASA, 1984: Spaceborne Gravity Gradiometers, Proc. Workshop NASA GSFC, Greenbelt, March 1982, NASA Conference Publ. 2305, STIB.
- NASA, 1986: Geopotential Research Mission (GRM), Proc. Conf. Univ. of Maryland, Oct. 1984, NASA Conference Publ. 2390, STIB.
- NASA, 1988: Superconducting Gravity Gradiometer Mission, Vol. II, Study Team Techn. Rep., NASA TM 4091.
- Nerem RS, 1995: Global Mean Sea Level Variations from TOPEX/Poseidon Altimeter Data, Science 268, 708.
- Nobili AM, a j., 1993: Galileo Galilei (GG), Test of the Equivalence Principle at Room Temperature with Masses Mechanically Suspended inside a Spinning non-drag free Spacecraft, proposal for the M3 medium size mission of ESA, report for ESA, Pisa.
- Olivík S, Kočandrlová M, Kostelecký J, Klokočník J, 2006: Position of Reflecting Points in Bistatic Satellite Altimetry: Theoretical Solutions for Ellipsoid, poster EGU General Assembly, Vienna., Geophys. Res. Abstracts, Vol.6., ISSN:1029-7006.
- Peřestý R, Bijvoet J, 1997: MACEK Experiment on STS-79, In: em Proc. MGM No16, NASA PIMS Working Group, Gainesville, USA.
- Peřestý R, Sehnal L, 1992: In-orbit testing of the MACEK microaccelerometer, 7th Internatl. Symp. em "Geodesy and Physics of the Earth", IAG Symp. No 112, Potsdam, Germany.
- Petrovskaya MS, Zielinski JB, 1996: Determination of the Global and Regional Gravitational Fields from Satellite and Balloon Gradiometry Missions, 32th GA COSPAR, Birmingham.
- Pick M, Pícha J, Vyskočil V, 1973: Úvod ke studiu tíhového pole Země, Academia, Praha.
- Rapp RH, 1981: The Earth's Gravity Field to Degree and Order 180 using SEASAT Altimeter Data, Terrestrial Gravity Data, and Other Data, Dept. Geod. Sci. Ohio State Univ. rep. #322, Columbus.
- Rapp RH, 1982: A Global Atlas of Sea Surface Heights based on the Adjusted SEASAT Altimeter Data, Dept. Geod. Sci. Ohio State Univ. Rep. # 333, Columbus.
- Rapp RH, Cruz JY, 1986: Spherical Harmonic Expansions of the Earth's Gravitational Potential to Degree 360 using 30 Mean Anomalies, Dept. Geod. Sci. Ohio State Univ. Rep. # 376, Columbus.
- Rapp RH, Wang YM, Pavlis NK, 1991: The Ohio State 1991 Geopotential and Sea Surface Topography Harmonic Coefficient Models, Dept. Geod. Sci. Ohio State Univ. Rep. # 410, Columbus.

- Rapp RH, Cruz JY, 1986: Spherical Harmonic Expansions of the Earth's Gravitational Potential to degree 360 using 30' Mean Anomalies, Ohio Space Univ. DGSS Rep. 376, 22 str., Columbus, Ohio.
- Reigber Ch, Balmino G, Moynot B, Mueller H, 1983: The GRIM 3 Earth Gravity Field Model, *Manuscr. Geod.*, 8, 93.
- Reigber Ch, Schwintzer P, Kohlhase A, 1995: CHAMP, A Challenging Micro-Satellite Payload for Geophysical Research and Application, Feasibility study for DARA, Final report, Potsdam.
- Reinhard R, Jafry Y, Laurance R, 1993: STEP - A satellite Test of the Equivalence Principle, *ESA Journal* bf 17, 251-263.
- Rosborough GW, 1986: Satellite orbit perturbations due to geopotential. Austin, Texas: Center for Space Research The University of Texas at Austin.
- Rummel R, Colombo OL, 1985: Gravity Field Determination from Satellite Gradiometry, *Bull. Geod.* bf 59, 233-246.
- Schrama E, 1990: Gravity field error analysis: Applications of GPS receivers and gradiometers on Low Orbiting Platforms, NASA GSFC TM 100769, Greenbelt, Md.
- Schutz B., 1997: Laser Altimetry for Polar Ice, Sheet Mass Balance, Land Topography and Atmosphere, present. na EGS XXII. GA, symp. G7, Vídeň, Rakousko.
- Schuyer M, Silvestrin P, Aguirre M, 1992: Probing the Earth's from Space: the ARISTOTELES Mission, *ESA Bull.* # 72.
- Schwintzer P. a 13 dalších, 1991: A New Earth Gravity Field Model in Support of ERS-1 and SPOT-2: GRIM4-S1/C1, Final rep. to DARA and CNES, DGFI Mnichov, 177 stran.
- Schwintzer P. a 13 dalších, 1997: Long-wavelength Global Gravity Field Models: GRIM4-S4, GRIM4-C4, *J. Geod.* 71, 189.
- Sehnal L, 2002: Kosmický projekt MIMOSA, *Čs.čas.fyz.* 52, 4, 201-209.
- Shum CK, Tapley BD, Ries JC, 1993: Satellite Altimetry: its Applications and Accuracy Assessment, *Adv. Space Res.*, 13(11), 315.
- Stammer D, Wunsch C, 1994: Preliminary Assessment of the Accuracy and Precision of TOPEX/Poseidon Altimeter Data with respect to the large-scale ocean circulation, *J. Geophys. Res.*, 99, C12, 24584.
- Tapley BD a 14 dalších, 1996: The Joint Gravity Model 3, *J. Geophys. Res.*, 101, B12, 28029.
- Visser PNAME, 1992: The Use of Satellites in Gravity Field Determination and Model Adjustment, dissertace TU Delft, Holandsko; Delft Univ. Press.
- VonBun FO et al, 1977: Gravity Anomalies Determined From Tracking The Apollo-Soyuz, *NASA Techn. Memorandum* 78031, NASA GSFC Greenbelt.
- Wagner CA, 1985: Radial Variations for a Satellite Orbit due to Gravitational Error: Implications for Satellite Altimetry, *J. Geophys. Res.*, 90, B4, 3027.
- Wagner CA, Klokočník J, Cheney R, 1997a: Making the Connection between Geosat and TOPEX/ Poseidon, *J. Geod.* 71, 273.
- Wagner CA, Klokočník J, 1994: Accuracy of the GEM T2 Geopotential from Geosat and ERS 1 Crossover Altimetry, *J. Geophys. Res.*, 99, B5, 9179.



- Wagner CA, Klokočník J, Tai CK, 1995: Evaluation of JGM 2 Geopotential Errors from Geosat, TOPEX/Poseidon and ERS 1 Crossover Altimetry, *Adv. Space Res.*, 16, (12)131.
- Wagner CA, Klokočník, J, Kostecký J, 1997b: Dual-Satellite Crossover Latitude Lumped Coefficients, their Use in Geodesy and Oceanography, *J. Geod.* 71, 603.
- Wagner CA, Lerch FJ, 1978: The Accuracy of Geopotential Models, *Planet. Space Sci.* 26, 1081.
- Wagner CA, 1983: Direct Determination of Gravitational Harmonics From Low-Low GRAVSAT Data, *J. Geophys. Res.* 88, No.B 12, 10309.
- Wnuk E, Golebiewska J, 2007: Relative Satellite Motion in a Formation, *ScienceDirect, Adv. Space Res.* , doi: 10.1016/j.asr.2007.01.049, Elsevier Ltd.
- Wolf M, 1969: Direct Measurements of the Earth's gravitational potential using a satellite pair, *J. Geophys. Res.* 74, No.22, 5295.