



Astrophysique

Chapitre VI : *Dynamique stellaire dans les galaxies*

Jean-François Gonzalez

Centre de Recherche Astrophysique de Lyon



CENTRE DE RECHERCHE ASTROPHYSIQUE DE LYON



1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

- La galaxie est composée de $\sim 10^{11}$ étoiles

- ◆ trop pour résolution numérique
- ◆ trop peu pour résolution continue (fluide)

⇒ description statistique

- Étoiles soumises à un potentiel gravitationnel moyen ϕ créé par les 10^{11} autres

- ◆ $\Delta\phi = 4\pi G\rho$

- Tout système stellaire va aboutir à un état quasi-stationnaire



1. Temps caractéristiques

1.1 Temps de traversée

1.2 Temps de relaxation

1.3 Temps d'évaporation

1.4 Temps de collision

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

1. Temps caractéristiques



1.1 Temps de traversée

1. Temps caractéristiques

1.1 Temps de traversée

1.2 Temps de relaxation

1.3 Temps d'évaporation

1.4 Temps de collision

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

- Temps qu'il faut à une étoile pour traverser le système

- ◆ R : taille du système

- ◆ v : vitesse typique d'une étoile

$$\Rightarrow \tau_{\text{trav}} = \frac{R}{v}$$

- Galaxie typique

- ◆ $R \sim 20$ kpc

- ◆ $v \sim 200$ km s⁻¹

$$\Rightarrow \tau_{\text{trav}} \sim 10^8 \text{ ans}$$

- Amas globulaire

- ◆ $R \sim 1$ pc

- ◆ $v \sim 10$ km s⁻¹

$$\Rightarrow \tau_{\text{trav}} \sim 10^5 \text{ ans}$$



1.2 Temps de relaxation

1. Temps caractéristiques

1.1 Temps de traversée

1.2 Temps de relaxation

1.3 Temps d'évaporation

1.4 Temps de collision

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

- Équilibre thermodynamique atteint quand équipartition de l'énergie \Rightarrow on peut définir une t°
- Équipartition par processus collisionnels : GP = gaz
 - ◆ sans interactions longue portée
 - ◆ avec seulement collisions élastiques très fréquentes
- Énergie d'1 étoile : son énergie cinétique de translation, caractérisée par \vec{v}
- Temps de relaxation = temps pour évoluer vers l'équilibre thermodynamique = temps pour que \vec{v} soit altérée par les chocs de manière significative
- Système : N étoiles de masse m , taille R

1.2 Temps de relaxation

1. Temps caractéristiques

1.1 Temps de traversée

1.2 Temps de relaxation

1.3 Temps d'évaporation

1.4 Temps de collision

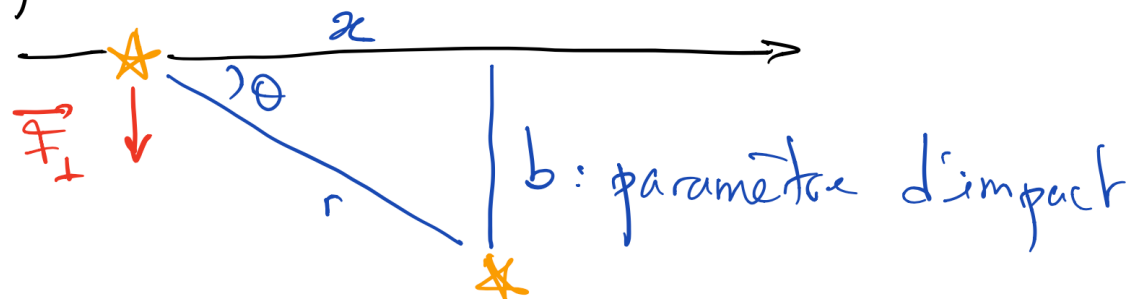
2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

Déviaton d'une étoile se déplaçant en ligne droite à \vec{v} par rapport à une étoile fixe, dans l'approx. des petites déviations



$$\perp \text{ au mouvement : } F_{\perp} = \frac{G m^2}{b^2 + x^2} \cdot \sin \theta = \frac{G m^2 b}{(b^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$F_{\perp} = m \cdot a_{\perp} \quad \text{donc} \quad a_{\perp} = \frac{G m b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{G m b}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}}$$

1.2 Temps de relaxation

1. Temps caractéristiques

1.1 Temps de traversée

1.2 Temps de relaxation

1.3 Temps d'évaporation

1.4 Temps de collision

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

Déviations :
$$\Delta v_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Gmb}{b^3 \left[1 + \left(\frac{vt}{b}\right)^2\right]^{3/2}} dt$$

$$s = \frac{vt}{b} \Rightarrow dt = \frac{b}{v} ds$$

$$= \frac{Gm}{b^2} \frac{b}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{(1+s^2)^{3/2}} = \frac{Gm}{b^2} \times \frac{2b}{v}$$

$$= \text{accélération au point le + proche} \times \text{temps d'interaction}$$

On suppose l'étoile déviée plusieurs fois
densité de surface des étoiles dans le système $\frac{N}{\pi R^2}$
nb de collisions avec paramètre d'impact entre b et $b+db$.

$$\Delta n = \frac{N}{\pi R^2} \times 2\pi b \cdot db = \frac{2N}{R^2} b \cdot db$$

1.2 Temps de relaxation

1. Temps caractéristiques

1.1 Temps de traversée

1.2 Temps de relaxation

1.3 Temps d'évaporation

1.4 Temps de collision

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

En moyenne : $\overline{\Delta v_I} = 0$ mais énergie échangée $\propto \overline{\Delta v_I^2}$

$$1 \text{ collision} : \Delta v_I^2 = \left(\frac{2Gm}{bv} \right)^2$$

$$8n \text{ collisions} : 8n \times \Delta v_I^2 = \left(\frac{2Gm}{bv} \right)^2 \frac{2N}{R^2} b db$$

Approx. de faible déviation valable si $\Delta v_I \ll v$

avec si $b \gg b_{\min} \sim \frac{Gm}{v^2}$, D'autre part $b < R$

$$\Rightarrow \Delta v_I^2 = \int_{b_{\min}}^R 8n \cdot \Delta v_I^2 = 8N \left(\frac{Gm}{Rv} \right)^2 \int_{b_{\min}}^R \frac{db}{b}$$

$$\text{On pose } \Lambda = \frac{R}{b_{\min}} : \Delta v_I^2 = 8N \left(\frac{Gm}{Rv} \right)^2 \ln \Lambda$$

Δv_I^2 : variation de vitesse de l'étoile lors d'une traversée du système (intégration sur b et sur t)

1.2 Temps de relaxation

1. Temps caractéristiques

1.1 Temps de traversée

1.2 Temps de relaxation

1.3 Temps d'évaporation

1.4 Temps de collision

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

Vitesse typique d'une étoile : $v^2 \sim \frac{GNM}{R}$ donc $\frac{\Delta v_{\perp}^2}{v^2} = \frac{8 \ln \Lambda}{N}$

Relaxation si $\Delta v_{\perp}^2 \sim v^2$: au bout de $n_{\text{relax}} = \frac{N}{8 \ln \Lambda}$ traversées

donc $\tau_{\text{relax}} = n_{\text{relax}} \tau_{\text{trav}}$ or $\Lambda = \frac{R}{r_{\text{min}}} = \frac{Rv^2}{Gm} = N$

donc $\tau_{\text{relax}} = \frac{N}{8 \ln N} \tau_{\text{trav}} \gg \tau_{\text{trav}}$ si $N \gg 100$

1.2 Temps de relaxation

1. Temps caractéristiques

1.1 Temps de traversée

1.2 Temps de relaxation

1.3 Temps d'évaporation

1.4 Temps de collision

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

■ Galaxie typique

- ♦ $N \sim 10^{11}$

- ♦ $\tau_{\text{trav}} \sim 10^8$ ans

⇒ $\tau_{\text{relax}} \sim 5 \times 10^{16}$ ans : pas de relaxation
(âge de l'Univers $\sim 10^{10}$ ans)

- ♦ **étoiles : gaz sans collisions, hors éq. thermo**

■ Amas globulaire

- ♦ $N \sim 10^4 - 10^6$

- ♦ $\tau_{\text{trav}} \sim 10^5$ ans

⇒ $\tau_{\text{relax}} \sim 10^7 - 10^9$ ans : **éq. thermo possible**

■ Remarque :

- ♦ $b_{\text{min}} = R/\Lambda = R/N$ et distance interparticules : $a \sim R/N^{1/3}$

⇒ $b_{\text{min}}/a \sim N^{-2/3} \ll 1$ dès que $N \gg 1$, ⇒ $b_{\text{min}} \ll a$

- ♦ approx. petites déviations toujours valable

1.3 Temps d'évaporation

1. Temps caractéristiques

1.1 Temps de traversée

1.2 Temps de relaxation

1.3 Temps d'évaporation

1.4 Temps de collision

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

- Par collision, v peut devenir $> v_{\text{lib}} \Rightarrow$ l'étoile peut s'échapper du système, qui s'évapore
 - ◆ Δv important \Rightarrow relaxation
 - ◆ On peut montrer que $v_{\text{lib}}^2 \sim 4\langle v^2 \rangle$ et distr. maxwellienne \Rightarrow fraction d'étoiles dont $v > v_{\text{lib}}$:
 $f = 7,38 \times 10^{-3}$

\Rightarrow Taux d'évaporation : $\frac{dN}{dt} = -f \frac{N}{\tau_{\text{relax}}} = -\frac{N}{\tau_{\text{evap}}}$ d'où

$$\tau_{\text{evap}} = \frac{1}{f} \tau_{\text{relax}} = 136 \tau_{\text{relax}}$$

- Galaxies : τ_{relax} trop grand, **n'arrive jamais**
- Amas globulaires : **évaporation possible**



1.4 Temps de collision

1. Temps caractéristiques

1.1 Temps de traversée

1.2 Temps de relaxation

1.3 Temps d'évaporation

1.4 Temps de collision

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

- Intervalle de temps séparant deux collisions assez proches pour effets inélastiques (forces de marée) : $\tau_{\text{coll}} \sim \frac{1}{n\sigma v}$

- ◆ $n \sim \frac{3N}{4\pi R^3}$: densité numérique d'étoiles
- ◆ $\sigma \sim \pi R_{\star}^2$: section efficace
- ◆ v vitesse moyenne

$$\Rightarrow \tau_{\text{coll}} = \frac{4R^3}{3NR_{\star}^2 v} = \frac{4R^2}{3NR_{\star}^2} \tau_{\text{trav}}$$

- Galaxies : $R_{\star} \sim 10^6$ km, $\Rightarrow \tau_{\text{coll}} \sim 10^{20}$ ans, les collisions entre étoiles n'arrivent jamais
- Amas globulaires : $\tau_{\text{coll}} \sim 10^{14}$ ans, idem
- Collisions entre galaxies dans les amas possibles et observées



1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

2. Théorème du Viriel

2. Théorème du Viriel

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

- Système de N particules ponctuelles de masse m_i en interaction gravitationnelle :

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2K + \Omega$$

♦ ici : pas d'énergie interne

- À l'équilibre, $\frac{d^2 I}{dt^2} = 0$ donc

$$2K + \Omega = 0$$

- Énergie totale :

♦ $E = K + \Omega = -K = \frac{\Omega}{2} < 0$

♦ similaire à E d'une étoile avec K à la place de U



1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

3.1 Équations de Jeans

3.2 Intégrale du mvt

3.3 Théorème de Jeans

3.3 Symétrie sphérique

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

3. Équation de Boltzmann sans collisions

3. Équation de Boltzmann sans collisions



1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

3.1 Équations de Jeans

3.2 Intégrale du mvt

3.3 Théorème de Jeans

3.3 Symétrie sphérique

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

- Galaxies : collisions entre étoiles négligeables.
- Mouvement d'une étoile déterminé essentiellement par le champ gravitationnel moyen et non par l'action des plus proches voisins.
- Fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$: densité de probabilité de trouver une étoile en \vec{r} à la vitesse \vec{v} à l'instant t .
- Sans collisions, loi de conservation :

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

♦ ici $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{g} = -\vec{\nabla} \phi$, d'où

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla}_{\vec{r}} f - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \phi \vec{\nabla}_{\vec{v}} f = 0$$

C'est l'équation de Boltzmann sans collisions

3. Équation de Boltzmann sans collisions

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

3.1 Équations de Jeans

3.2 Intégrale du mvt

3.3 Théorème de Jeans

3.3 Symétrie sphérique

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

- Potentiel gravitationnel obtenu par $\Delta\phi = 4\pi G\rho$
- Densité numérique d'étoiles : $n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v$
- $\rho(\vec{r}, t) = \int m f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v = \langle m \rangle n(\vec{r}, t)$
- Si une étoile a $v > v_{\text{lib}}$, elle \notin système
 $\Rightarrow f(v) \searrow$ vite $\rightarrow 0$ quand $v \rightarrow \infty$
- Éq. de Boltzmann impossible à résoudre numériquement
 - ◆ 7 variables
 - ◆ 100 points de discrétisation pour chaque $\Rightarrow 10^{14}$ nombres

3.1 Équations de Jeans

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

3.1 Équations de Jeans

3.2 Intégrale du mvt

3.3 Théorème de Jeans

3.3 Symétrie sphérique

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

- Moments en vitesse de l'éq. de Boltzmann sans collisions

- ◆ moment d'ordre n : on $\times \vec{v}^n$ puis $\int \dots d^3v$

- Déf. : vitesse moyenne $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\int \vec{v} f d^3v}{\int f d^3v} = \frac{1}{n} \int \vec{v} f d^3v$

- Moment d'ordre 0 \Rightarrow 1^{ère} équation de Jeans

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} (n \langle \vec{v} \rangle) = 0$$

- ◆ ressemble à l'équation de continuité

3.1 Équations de Jeans



1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

3.1 Équations de Jeans

3.2 Intégrale du mvt

3.3 Théorème de Jeans

3.3 Symétrie sphérique

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

- Déf : tenseur dispersion de vitesse $\overline{\sigma^2} = \langle \vec{v} \otimes \vec{v} \rangle - \langle \vec{v} \rangle \otimes \langle \vec{v} \rangle$
- Moment d'ordre 1 \Rightarrow 2^{ème} équation de Jeans

$$n \frac{\partial \langle \vec{v} \rangle}{\partial t} + n (\langle \vec{v} \rangle \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \langle \vec{v} \rangle = -n \vec{\nabla}_{\vec{r}} \phi - \vec{\nabla}_{\vec{r}} (n \overline{\sigma^2})$$

- ◆ ressemble à l'équation d'Euler
- ◆ $\overline{\sigma^2}$ joue le rôle de tenseur des contraintes
- On retrouve le fait que la dispersion de vitesse s'interprète comme une température
 - ◆ fluide isotrope et homogène : tenseur des contraintes
$$= \frac{P}{m} \overline{\mathbb{I}} = \frac{nkT}{m} \overline{\mathbb{I}}$$
 - ◆ si $\overline{\sigma^2} = \sigma^2 \overline{\mathbb{I}}$, on retrouve que σ^2 est analogue à $\frac{kT}{m}$



3.1 Équations de Jeans

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

3.1 Équations de Jeans

3.2 Intégrale du mvt

3.3 Théorème de Jeans

3.3 Symétrie sphérique

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

- Cas général : $\overline{\sigma^2}$ évidemment symétrique
 - ⇒ diagonalisable dans une base orthonormée
 - ◆ Ellipsoïde ayant
 - ❖ axes principaux = cette base
 - ❖ demi-axes = valeurs propresappelé ellipsoïde des vitesses
 - ⇒ lien évident avec structure des galaxies

- Résolution des équations de Jeans
 - ◆ relation de fermeture : hypothèses sur $\overline{\sigma^2}$

3.2 Intégrale du mouvement

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

3.1 Équations de Jeans

3.2 Intégrale du mvt

3.3 Théorème de Jeans

3.3 Symétrie sphérique

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

- Déf. : fct $I(\vec{r}, \vec{v})$ cste le long de chaque orbite $\Rightarrow \frac{dI}{dt} = 0$
 - ♦ ne dépend pas explicitement du temps donc

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} I - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \phi \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}} I = 0$$

\Rightarrow solution stationnaire de l'éq. de Boltzmann sans collisions

- Exemples :
 - ♦ $\phi(\vec{r})$ statique : énergie par u. de masse $E/m = v^2/2 + \phi$
 - ♦ ϕ à sym. cylindrique : moment cinétique par u. de masse projeté sur z , $J_z/m = (\vec{r} \wedge \vec{v})_z$
 - ♦ ϕ à sym. sphérique : toute composante de $\vec{J}/m = \vec{r} \wedge \vec{v}$
- \exists au + 5 IDM indépendantes



3.3 Théorème de Jeans

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

3.1 Équations de Jeans

3.2 Intégrale du mvt

3.3 Théorème de Jeans

3.3 Symétrie sphérique

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

- *Une fonction de distribution f est solution stationnaire de l'équation de Boltzmann sans collisions si et seulement si elle s'exprime comme fonction d'une ou plusieurs intégrales du mouvement.*
- On n'a jamais unicité de la solution, pourtant les galaxies ont toutes la même forme

3.3 Systèmes à symétrie sphérique

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

3.1 Équations de Jeans

3.2 Intégrale du mvt

3.3 Théorème de Jeans

3.3 Symétrie sphérique

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

f est fct de E et de \vec{J}

Si en plus \vec{J} est aussi à sym. sphérique : f ne dépend que de E et de $J = \|\vec{J}\|$

On veut résoudre l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G m \int f d^3v \quad \text{soit}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G m \int f \left(\frac{v^2}{2} + \phi, \|\vec{r} \wedge \vec{v}\| \right) d^3v$$

On définit : - un potentiel relatif : $\psi = \phi_0 - \phi$

- une énergie relative u. de masse :

$$E = -\frac{E}{m} + \phi_0 = \psi - \frac{v^2}{2}$$

3.3 Systèmes à symétrie sphérique

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

3.1 Équations de Jeans

3.2 Intégrale du mvt

3.3 Théorème de Jeans

3.3 Symétrie sphérique

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

On veut décrire un système fini, avec $r \leq R$ et $v < v_{\text{éb}}$
 \Rightarrow on choisit ϕ telle que $\begin{cases} f \geq 0 & \text{pour } \mathcal{E} \geq 0 \\ f = 0 & \text{pour } \mathcal{E} \leq 0 \end{cases}$

Si f ne dépend que de \mathcal{E} , $f(\mathcal{E})$: f est paire des v

$$\Rightarrow \langle \vec{v} \rangle = \vec{0} \quad \text{et} \quad \langle v_r^2 \rangle = \langle v_\theta^2 \rangle = \langle v_\phi^2 \rangle = \sigma^2$$

\Rightarrow par la rotation globale et $\overline{\sigma^2} = \sigma^2 \mathbb{I}$

Equation de Poisson :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = -16\pi^2 G m \int_0^{\sqrt{2\psi}} f\left(\psi - \frac{v^2}{2}\right) v^2 dv$$

$$\text{ou} \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = -16\pi^2 G m \int_0^\psi f(\mathcal{E}) \sqrt{2(\psi - \mathcal{E})} d\mathcal{E}$$



1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

4.1 Sphère isotherme

4.2 Modèles de King

4.3 Modèles de disques

5. Structure spirale

4. Modèles stationnaires

4.1 Sphère isotherme

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

4.1 Sphère isotherme

4.2 Modèles de King

4.3 Modèles de disques

5. Structure spirale

- Analogie à une sphère de gaz isotherme autogravitante
- On peut construire un modèle de statistique stellaire avec dispersion de vitesse isotrope et constante

$$f(\mathcal{E}) = \frac{n_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathcal{E}/\sigma^2} = \frac{n_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\frac{\psi - v^2/2}{\sigma^2}}$$

4.1 Sphère isotherme

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

4.1 Sphère isotherme

4.2 Modèles de King

4.3 Modèles de disques

5. Structure spirale

avec $f(\mathcal{E}) = \frac{n_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-\frac{\mathcal{E}-v^2/2}{\sigma^2}}$, on calcule

$$n = \int_0^{+\infty} f \cdot 4\pi v^2 dv = n_1 \cdot e^{\mathcal{E}/\sigma^2}$$

$$\Rightarrow \rho = m \cdot n = m n_1 e^{\mathcal{E}/\sigma^2} = \rho_1 \cdot e^{\mathcal{E}/\sigma^2}$$

$$\text{et } \mathcal{E} = \sigma^2 \ln\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)$$

$$\text{Eq. de Poisson : } \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\mathcal{E}}{dr} \right) = -4\pi G \rho$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{\sigma^2} r^2 \rho}$$

Système pas encore relaxé :

- formation \rightarrow structure isotherme
- relaxation (très lente) \rightarrow équi-partition de l'énergie

4.1 Sphère isotherme

$$\text{On a } \langle v^2 \rangle = \frac{\int f v^2 d\mathbf{v}}{\int f d\mathbf{v}} = 3\sigma^2$$

$$\text{De même } \langle v_r^2 \rangle = \langle v_\theta^2 \rangle = \langle v_\phi^2 \rangle = \sigma^2$$

On cherche des solutions en loi de puissance : $\rho = A \cdot r^\alpha$

$$\text{Poisson} \rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\alpha}{r} \right) = -\frac{4\pi G}{\sigma^2} A \cdot r^{\alpha+2} = \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+2=0 & \rightarrow \alpha=-2 \\ A = \frac{\sigma^2}{2\pi G} \end{cases}$$

Donc $\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2}$ \rightarrow solution appelée sphère isotherme singulière

Solutions non divergentes : intégration numérique

on adimensionalise, en fait de la densité centrale ρ_0

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{et} \quad \tilde{r} = \frac{r}{r_0} \quad \text{avec} \quad r_0 = \frac{3\sigma}{\sqrt{4\pi G \rho_0}} \quad \text{rayon de King}$$

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

4.1 Sphère isotherme

4.2 Modèles de King

4.3 Modèles de disques

5. Structure spirale

4.1 Sphère isotherme

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

4.1 Sphère isotherme

4.2 Modèles de King

4.3 Modèles de disques

5. Structure spirale

L'équation devient $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \tilde{\rho}}{dr} \right) = -g r^2 \rho$

CL: $\tilde{\rho}(0) = 1$ et $\tilde{\rho}'(0) = 0$.

Les solutions se rapprochent asymptotiquement de la sphère isotherme singulière.

Orbite circulaire dans le plan $z=0$: courbe de rotation

$$\frac{v_c^2}{r} = \frac{d\phi}{dr} = -\frac{d\psi}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(\sigma^2 \ln \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right) \right) = -\sigma^2 \frac{d \ln \rho}{dr} = \frac{2\sigma^2}{r}$$

Sphère singulière: $v_c = \sqrt{2} \cdot \sigma = \text{cte} \rightarrow$ courbe de rotation plate

modèle non singulier \rightarrow asymptotiquement plate.

Pb: masse infinie \Rightarrow besoin d'une coupure à grand r .

4.2 Modèles de King

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

4.1 Sphère isotherme

4.2 Modèles de King

4.3 Modèles de disques

5. Structure spirale

- Coupure de la sphère isotherme : en tronquant f
 \Leftrightarrow une étoile n'est plus gravitationnellement liée au système si son énergie est $>$ à une certaine valeur

- Distribution

$$f_K(\mathcal{E}) = \begin{cases} \frac{n_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} (e^{\mathcal{E}/\sigma^2} - 1) & \text{si } \mathcal{E} > 0 \\ 0 & \text{si } \mathcal{E} \leq 0 \end{cases}$$

- ♦ $\mathcal{E} \gg 0 \Leftrightarrow E/m \ll \phi_0$: f_K proche de la sphère isotherme
- ♦ $\mathcal{E} < 0 \Leftrightarrow E/m > \phi_0$: $f_K = 0$, transition continue en ϕ_0 .

- Famille des modèles de King, paramétrisée par n_1 et ϕ_0



4.2 Modèles de King

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

4.1 Sphère isotherme

4.2 Modèles de King

4.3 Modèles de disques

5. Structure spirale

- Intégration numérique
 - ♦ $\rho \searrow$ quand $r \nearrow$ et s'annule pour r_m : rayon de marée
 - ♦ limitation de f en énergie \Rightarrow limitation spatiale de la distribution de matière
 - ♦ surface = limite entre attraction gravitationnelle du système et celle de ses voisins
 - ♦ si r dépasse r_m : l'étoile quitte le système \Rightarrow évaporation des amas globulaires (collisions \Rightarrow énergie nécessaire)
- Modèles de King
 - ♦ applicables aux amas globulaires et galaxies elliptiques
 - ♦ reproduisent la loi de de Vaucouleurs



4.3 Modèles de disques

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

4.1 Sphère isotherme

4.2 Modèles de King

4.3 Modèles de disques

5. Structure spirale

- Disque axisymétrique : \mathcal{E} et J_z/m sont des IDM
- Distribution

$$f\left(\mathcal{E}, \frac{J_z}{m}\right) = \begin{cases} F \left(\frac{J_z}{m}\right)^q e^{\mathcal{E}/\sigma^2} & \text{si } J_z > 0 \text{ et } \mathcal{E} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ♦ $q = \frac{v_c^2}{\sigma^2} - 1$: aplatissement \simeq degré de soutien par la force centrifuge
- ♦ limite $q \rightarrow -1$ ($v_c \rightarrow 0$) : système soutenu par la dispersion de vitesse, équivalente à une pression
- ♦ $q = 0$: f ne dépend que de \mathcal{E} , système sphérique et soutenu autant par la dispersion de vitesse que par la rotation
- ♦ limite $q \rightarrow +\infty$: toutes les étoiles ont une orbite circulaire et $\sigma = 0$, disque soutenu par la rotation



1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

5.1 Origine

5.2 Théorie des orbites

5. Structure spirale



5.1 Origine

[1. Temps caractéristiques](#)

[2. Théorème du Viriel](#)

[3. Équation de Boltzmann](#)

[4. Modèles stationnaires](#)

[5. Structure spirale](#)

5.1 Origine

[5.2 Théorie des orbites](#)

Plusieurs hypothèses pour expliquer l'origine des bras spiraux

■ Bras spiraux matériels ?

♦ courbe de rotation plate $\Rightarrow v = \text{cste}$

♦ mais $\omega = \frac{v}{R}$ plus grande vers le centre

\Rightarrow une structure radiale s'enroule en spirale

♦ v observées \Rightarrow plusieurs dizaines de tours en 10^{10} ans, âge moyen des galaxies

♦ pas observé \Rightarrow bras spiraux non matériels



5.1 Origine

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

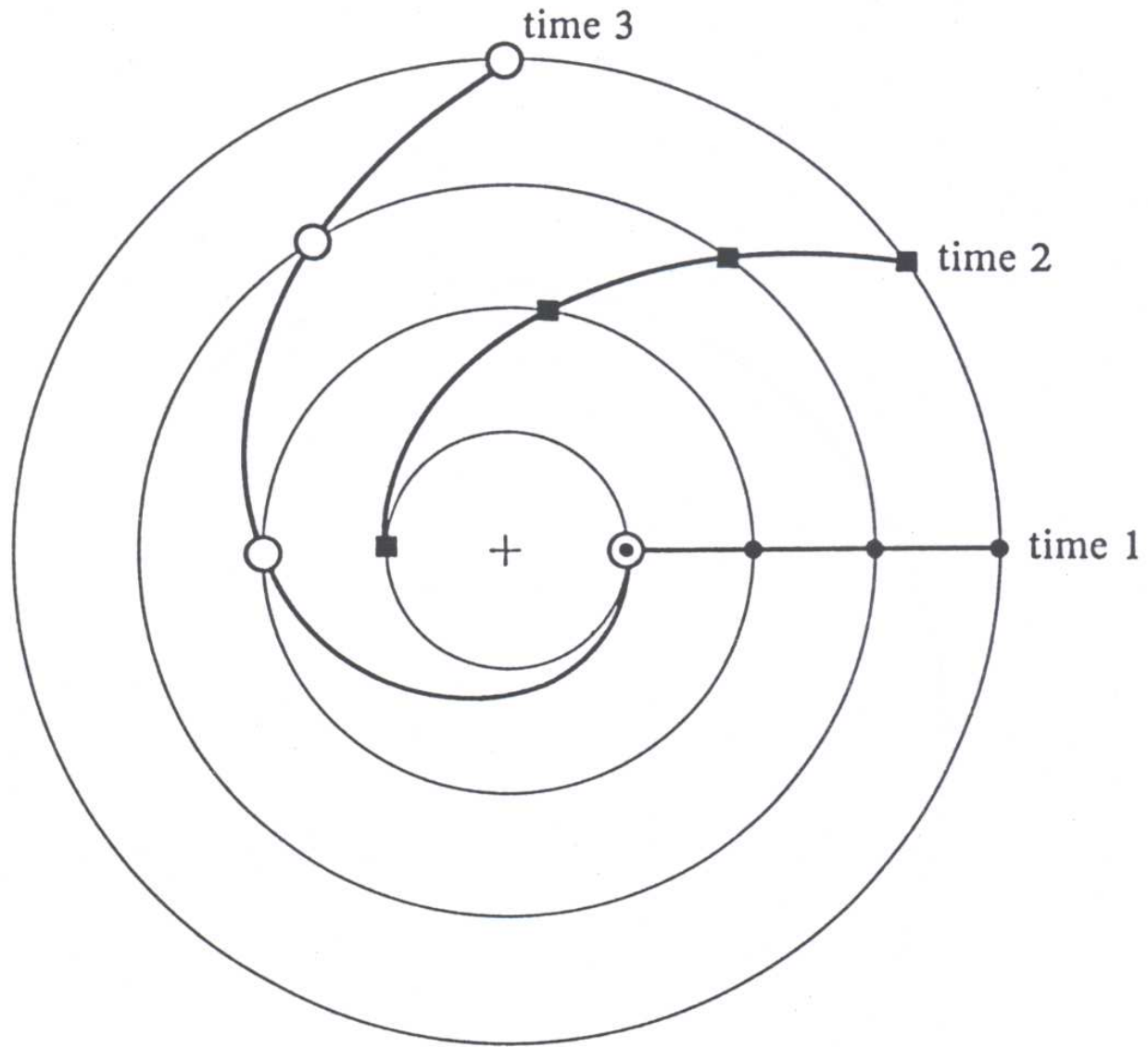
3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

5.1 Origine

5.2 Théorie des orbites



Enroulement en spirale d'une structure linéaire



5.1 Origine

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

5.1 Origine

5.2 Théorie des orbites

■ Résonances d'orbites ?

- ◆ théorie de Lindblad

■ Ondes de densité quasi-stationnaires ?

- ◆ théorie de Lin & Shu (1964)
 - ◆ explique l'apparence universelle des bras spiraux
 - ◆ présence corrélée à celle d'étoiles jeunes et de gaz
- ⇒ relation causale : ondes de densité compriment le gaz
⇒ vague de formation stellaire ⇒ rend les bras visibles
- ◆ observations radio (à 21 cm) ⇒ gaz + dense sur les bras spiraux

5.2 Théorie des orbites

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

5.1 Origine

5.2 Théorie des orbites

Disque axisymétrique autour de l'axe z et symétrique par rapport au plan $z=0$, potentiel : $\phi(R, z)$
Equation du mouvement d'une étoile : $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi$

$$\text{soit } \begin{cases} \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial \phi}{\partial R} \\ \ddot{z} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases}$$

$\frac{J_z}{m} = R^2 \dot{\theta}$ reste constant sur une orbite d'étoile

Déf: potentiel effectif : $\phi_{\text{eff}} = \phi + \frac{(J_z/m)^2}{2R^2}$

5.2 Théorie des orbites

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

5.1 Origine

5.2 Théorie des orbites

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \phi_{\text{eff}}}{\partial R} = \frac{\partial \phi}{\partial R} - \frac{(J_z/m)^2}{R^3} = \frac{\partial \phi}{\partial R} - R\dot{\Theta}^2 \\ \frac{\partial \phi_{\text{eff}}}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases}$$

\Rightarrow équation du mouvement
des étoiles

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{\partial \phi_{\text{eff}}}{\partial R} \\ \dot{\Theta} = \frac{J_z/m}{R^2} \\ \ddot{z} = -\frac{\partial \phi_{\text{eff}}}{\partial z} \end{cases}$$

Approximation épicyclique : on considère une orbite
presque circulaire

- famille d'orbites circulaires dans plan $z=0$, de rayon

$$R_c : \frac{v_c^2}{R_c} = R_c \dot{\Theta}^2 = \frac{\partial \phi}{\partial R}(R_c, 0)$$

5.2 Théorie des orbites

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

5.1 Origine

5.2 Théorie des orbites

Posons $x = R - R_c \rightarrow$ DL de ϕ_{eff} autour de $(x=0, z=0)$

- minimum de ϕ_{eff} car $\frac{\partial \phi}{\partial z}(R_c, 0) = 0$ par symétrie

$$- \frac{\partial \phi_{\text{eff}}}{\partial R}(R_c, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial R}(R_c, 0) - R_c \dot{\Omega}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \phi_{\text{eff}} = \phi_{\text{eff},0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{\text{eff}}}{\partial R^2}(R_c, 0) x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{\text{eff}}}{\partial z^2}(R_c, 0) z^2 + o(x^2, z^2, xz)$$

$$\simeq \phi_{\text{eff},0} + \frac{1}{2} \kappa^2 x^2 + \frac{1}{2} \nu^2 z^2$$

κ : fréquence épicyclique : $\kappa^2 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial R^2}(R_c, 0) + \frac{3(\dot{\Omega}^2/m)^2}{R_c^4}$

ν : " verticale

5.2 Théorie des orbites

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

5.1 Origine

5.2 Théorie des orbites

Def: fréquence circulaire Ω par $\Omega^2 = \dot{\theta}^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R}(R_{c,0}) = \frac{(J_z/m)^2}{R^4}$

→ eq. du mouvement $\begin{cases} \ddot{x} = -k^2 x \\ \ddot{z} = -\nu^2 z \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{On a } k^2 &= \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) (R_{c,0}) + 3 \frac{(J_z/m)^2}{R_c^4} = \frac{\partial (R \Omega^2)}{\partial R} (R_{c,0}) + 3 \Omega^2 \\ &= R_c \frac{\partial \Omega^2}{\partial R} (R_{c,0}) + 4 \Omega^2 \end{aligned}$$

En général : $\Omega \leq k \leq 2\Omega$

Vicinage du soleil : $\kappa_{\odot} = 36 \pm 10 \text{ km. s}^{-1} \cdot \text{kpc}^{-1}$

$$\Rightarrow \frac{\kappa_{\odot}}{\Omega_{\odot}} = 1,3 \pm 0,2$$

Orbites = ellipses qui ne referment pas = rosaces



5.2 Théorie des orbites

[1. Temps caractéristiques](#)

[2. Théorème du Viriel](#)

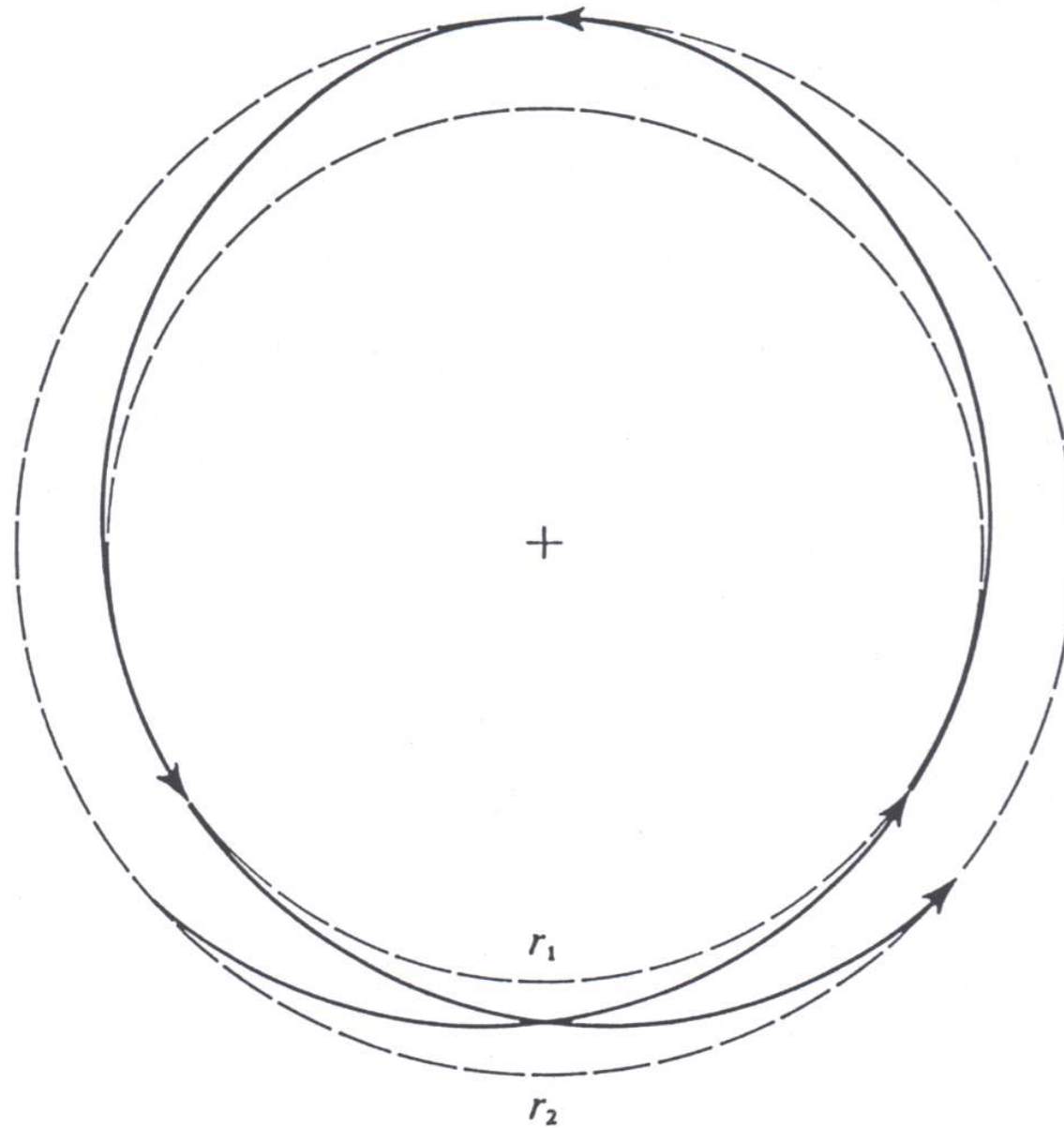
[3. Équation de Boltzmann](#)

[4. Modèles stationnaires](#)

[5. Structure spirale](#)

[5.1 Origine](#)

5.2 Théorie des orbites



Orbite non fermée : rosace

5.2 Théorie des orbites

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

5.1 Origine

5.2 Théorie des orbites

Déf : paramètres de Oort A et B par

$$\begin{cases} A(R) - B(R) = \Omega(R) \\ A(R) + B(R) = -\frac{d(R\Omega)}{dR} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(R) = -\frac{1}{2} R \frac{d\Omega}{dR} \\ B(R) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d(R\Omega)}{dR} + \Omega \right) = -\Omega - \frac{1}{2} R \frac{d\Omega}{dR} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \kappa^2 = -4B\Omega$$

Galaxie spirale : courbe de rotation plate loin du centre

$$v_c = R\Omega = \text{cte} \Rightarrow \frac{d(R\Omega)}{dR} = 0$$

$$\text{et } A(R) = \frac{\Omega(R)}{2} \text{ et } B(R) = -\frac{\Omega(R)}{2} \Rightarrow \kappa^2 = 2\Omega^2$$



5.2 Théorie des orbites

[1. Temps caractéristiques](#)

[2. Théorème du Viriel](#)

[3. Équation de Boltzmann](#)

[4. Modèles stationnaires](#)

[5. Structure spirale](#)

[5.1 Origine](#)

5.2 Théorie des orbites

■ Orbites \simeq ellipses qui tournent

- ♦ rotation \propto demi-grand axe \Rightarrow une structure spirale apparaît
- ♦ si $\Omega - \kappa/n = \text{cste} \Rightarrow$ structure spirale à n bras tourne sans déformation
- ♦ spirales à 2 bras dominant

■ Dans les bras, les étoiles ne sont jamais les mêmes, elles suivent leur orbite

\Rightarrow Bras spiraux = concentrations d'orbites



5.2 Théorie des orbites

1. Temps caractéristiques

2. Théorème du Viriel

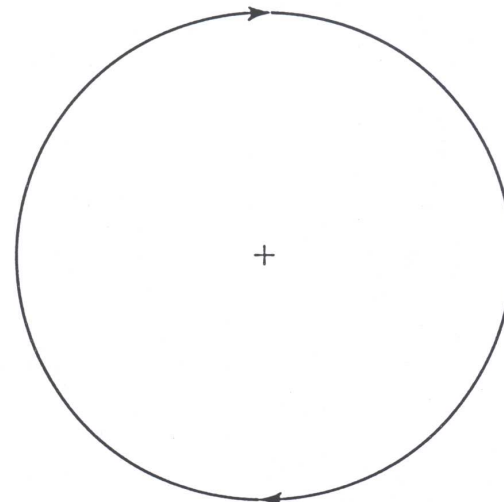
3. Équation de Boltzmann

4. Modèles stationnaires

5. Structure spirale

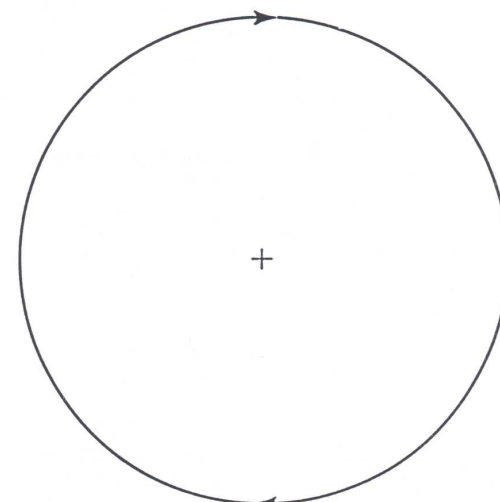
5.1 Origine

5.2 Théorie des orbites



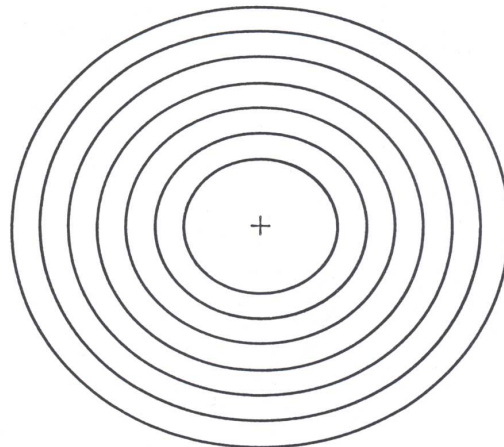
$$F_1 = 0$$

(a)



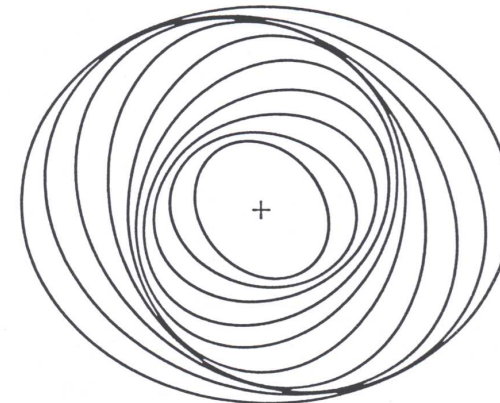
$$F_1 = A \cos(m\varphi)$$

(b)



$$F_1 = A(r) \cos(m\varphi)$$

(c)



$$F_1 = A(r) \cos[m\varphi - \Phi(r)]$$

(d)

Orbites elliptiques en rotation