



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PGMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



# CONSTRUÇÕES DE VARIEDADES TÓRICAS

JOÃO LUCIANO DE CARVALHO GOMES

Salvador-Bahia

Abril de 2016

# CONSTRUÇÕES DE VARIEDADES TÓRICAS

JOÃO LUCIANO DE CARVALHO GOMES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Mathieu Molitor.

Salvador-Bahia

Abril de 2016

Gomes, João Luciano de Carvalho

Geometria Simplética e Construção de Variedades Tóricas / João Luciano de Carvalho Gomes. – Salvador: UFBA, 2016.

?? f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Mathieu Molitor.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2015.

Referências bibliográficas.

1. Geometria Simplética. 2. Grupos de Lie 3. Convexidade de Atiyah-Guillemin-Sternberg. 4. Classificação de Delzant 5. Variedades Tóricas . I. Molitor, Mathieu. II. Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática. III. Convexidade e Geometria Simlética.

CDU :

XXX.XXX

# CONSTRUÇÕES DE VARIEDADES TÓRICAS

JOÃO LUCIANO DE CAVAHO GOMES

Dissertação de Mestrado apresentada ao,  
Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da  
Universidade Federal da Bahia como requisito  
parcial para obtenção do título de Mestre em  
Matemática, aprovada em 25 de agosto de 2016.

## Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Mathieu Molitor (Orientador)  
UFBA

---

Prof. Dr. Ézio de Araújo Costa  
UFBA

---

Prof. Dr. Simon George Chiossi  
UFF

*As memórias de José Ara-  
ripe de Carvalho Sales e Ce-  
zar Leão Ruas Neto.*

# Agradecimentos

Nestas linhas espero expressar a gratidão que sinto por tantas pessoas que passaram pela minha vida e direta ou indiretamente me influenciaram a seguir estudando. Começo agradecendo à CAPES pelo apoio financeiro e ao PGMAT pela oportunidade de seguir com o mestrado.

Ao meu orientador, o professor Mathieu Molitor. Sua preocupação foi essencial para que este trabalho fosse concluído. Posso dizer que realmente aprendi muito devido a sua dedicação e seriedade em fazer um bom trabalho. A banca presente composta pelos professores e pesquisadores, Prof. Dr. Simon George Chiossi, Prof. Dr. Mathieu Molitor e Prof. Dr. Ézio de Araújo Costa. E ao grupo de Geometria Diferencial e Física Matemática da UFBA.

Aos professores Joseph Yartey, Marco Antônio, Gerusa Soares e Ana Lucia que durante minha especialização me motivaram a seguir em frente. Também aos meus professores da graduação, em especial a João Maia, Vânia Gonçalves e Odete Amanda, pessoas que vivenciarão o meu crescimento gradual na área acadêmica e profissional. A todos os meus amigos e colegas. Aqui cito algumas pessoas: Gideone Ribeiro, Raiana Gouveia e Bruno Cesar. Pessoas que tornaram essa jornada mais leve. Agradeço também a colegas da minha turma que vivenciarão todo o sufoco do mestrado junto comigo em especial, Patrícia Fernandes, Fabrício Santos e Caroline Ribeiro. E a colegas mais experientes como Edvan Trindade e Luiz Augusto. Agradeço a Thaianne Benevides, pelos maravilhosos anos que já vivemos e pelos que estão por vir.

A minha família em especial meus pais, Lucia Maria de Carvalho e João dos Santos Gomes. Minha mãe uma pessoa guerreira que sempre me deu seu exemplo chamado “*trabalho*” e meu pai que tem sido um pai maravilhoso e atencioso e sempre me dando conselhos para seguir sempre em frente. Se hoje tenho algo bom devo a eles, que me dão ótimos exemplos de amor e dedicação. Sinto-me imensamente grato por todo seus esforços em realizar meus sonhos e se abdicarem do que for necessário para me tornar uma pessoa melhor e feliz. Não existem palavras suficientes que expressem todo o amor e gratidão que tenho por ambos.

E finalmente a Deus que me conforta e que me fortalece a cada desafio.

*“Disciplina é liberdade. Compaixão é fortaleza. Ter bondade é ter coragem.”*

Renato Russo.

# Resumo

Nesta dissertação apresentaremos o teorema de *Redução Simplética de Marsden-Weinstein-Meyer*, com o objetivo de construir a partir de um polítopo de Delzant  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$  uma variedade tórica simplética  $(M^{2n}, \omega)$  com ação tórica  $\mathbb{T}^n \times M \rightarrow M$  e aplicação momentum  $J : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $J(M) = \Delta$ . Isto mostrará a sobrejetividade do *Teorema de Delzant*, que classifica as variedades tóricas simpléticas.

**Palavras-chave:** Geometria Simplética; Ações de Grupos de Lie; Redução Simplética; Classificação de Delzant.



# Abstract

This master thesis presents the following application of the symplectic reduction Theorem of *Marsden-Weinstein-Meyer*; given a Delzant polytope  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ , there exists a symplectic toric manifold  $(M^{2n}, \omega)$  with action  $\mathbb{T}^n \times M \rightarrow M$  and momentum map  $J : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  such that  $J(M) = \Delta$ . This construction is the so-called “surjective part” of Delzant classification of toric symplectic manifolds.

**Keywords:** Symplectic geometry; Lie groups actions; Symplectic reduction; Delzant classification.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Variedades Simpléticas</b>	<b>4</b>
1.1 Espaço Vetorial Simplético . . . . .	4
1.2 Base Simplética . . . . .	7
1.3 Variedade Simplética . . . . .	9
1.4 Mecânica Hamiltoniana . . . . .	13
<b>2 Ações de Grupos de Lie</b>	<b>18</b>
2.1 Grupos de Lie . . . . .	18
2.2 A aplicação exponencial . . . . .	24
2.3 A Representação Adjunta . . . . .	27
2.4 Homomorfismos . . . . .	31
2.5 Subgrupos de Lie . . . . .	33
2.6 Ação de grupos de Lie . . . . .	39
2.7 O espaço das órbitas como variedade . . . . .	42
<b>3 Ações hamiltonianas e Redução Simplética</b>	<b>51</b>
3.1 Preliminares . . . . .	51
3.2 Fibrados principais . . . . .	56
3.3 Ações hamiltonianas e órbitas coadjuntas . . . . .	61
3.4 Redução Simplética . . . . .	68
<b>4 Construção de variedades tóricas simpléticas</b>	<b>80</b>
4.1 Polítopos de Delzant . . . . .	80
4.2 Variedades tóricas simpléticas . . . . .	90
4.3 Variedades Tóricas como espaços reduzidos . . . . .	92
<b>A Comentários sobre Variedades Simplética e Grupos de Lie</b>	<b>101</b>
A.1 Comentários sobre Formas Simpléticas . . . . .	101
A.2 Colchete de Lie para campos de vetores. . . . .	103

A.3 Comentários sobre os grupos de Lie. . . . . 104

# Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar a construção de variedades tóricas simpléticas por meio do Teorema de redução simplética de Marsden-Weinstein-Meyer, seguindo o método de Delzant [6]. No seu artigo original [6], Delzant mostrou um resultado mais geral e profundo, que relaciona variedades tóricas simpléticas e polítopos de Delzant através de uma correspondência, a qual é dada pela imagem da aplicação momentum:

$$\begin{aligned} \{\text{variedades tóricas simpléticas}\} / \sim &\xrightarrow[\cong]{} \{\text{polítopos de Delzant}\} \\ (M, \omega) &\longmapsto J(M) = \Delta, \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

onde  $J : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a aplicação momentum da variedades tóricas simpléticas  $(M, \omega)$ . O símbolo “ $\sim$ ” refere-se à relação de equivalência que identifica duas variedades tóricas simpléticas  $(M_1, \omega_1)$  e  $(M_2, \omega_2)$  quando existir um simplectomorfismo equivariante  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ . A correspondência de Delzant é um dos resultados mais profundos da geometria simplética e o objetivo principal dessa dissertação é introduzir e estudar as ferramentas necessárias para mostrar a sobrejetividade de (0.0.1). Isso inclui os grupos de Lie, as variedades simpléticas e as ações hamiltonianas. Como resultado importante, mostramos o Teorema de redução simplética de Marsden-Weinstein-Meyer, com o qual mostramos a sobrejetividade de (0.0.1) na última parte desse trabalho.

No capítulo 1, são apresentadas as variedades simpléticas, o Teorema de Darboux e são abordados brevemente as relações com a mecânica clássica.

No capítulo 2, introduzimos os grupos de Lie e definimos objetos relacionados importantes, tal como a álgebra de Lie, a aplicação exponencial e a representação adjunta. Consideramos também ações de grupos de Lie e mostramos que, no caso de uma ação livre e própria, o espaço das órbitas é uma variedade.

No capítulo 3, introduzimos os fibrados principais e mostramos a equivalência desse conceito com o de uma ação livre e própria. Definimos então uma ação hamiltoniana e mostramos o Teorema de redução simplética de Marsden-Weinstein-Meyer. Alguns exemplos estão apresentados, inclusive o espaço projetivo complexo munido da forma simplética de Fubini-Study.

Finalmente, no capítulo 4, mostramos a sobrejetividade da correspondência de Delzant usando o Teorema de redução simplética. Nossa apresentação segue o artigo

de Ana Cannas da Silva [5]. Na primeira parte desse capítulo, são apresentados sem demonstrações os conceitos e resultados referentes à teoria dos polítopos convexos.

O apêndice contém alguns resultados técnicos de geometria diferencial usados no texto.

As figuras foram todas feitas pelo autor usando o aplicativo GeoGebra [15].

# Capítulo 1

## Variedades Simpléticas

### 1.1 Espaço Vetorial Simplético

**Definição 1.1.1.** Seja  $V$  um espaço vetorial real, e seja  $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear anti-simétrica. Dizemos que a forma  $\Omega$  é *simplética* (ou *não-degenerada*) se :

$$\forall v \in V, \Omega(u, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

O par  $(V, \Omega)$  é chamado um *espaço vetorial simplético*.

*Observação 1.1.2.*  $\Omega$  é não-degenerada se somente se a aplicação  $\Omega^b : V \rightarrow V^*$ , definida por,

$$\langle \Omega^b(u), v \rangle := \Omega(u, v),$$

é uma bijeção, onde  $\langle, \rangle : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é a aplicação definida por  $\langle \alpha, u \rangle := \alpha(u)$ .

**Definição 1.1.3.** Dois espaços vetoriais simpléticos  $(V_1, \Omega_1)$  e  $(V_2, \Omega_2)$  são *simplectomorfos* se existe um isomorfismo linear  $\psi : V_1 \rightarrow V_2$  tal que  $\psi^*\Omega_1 = \Omega_2$ , onde  $\psi^*\Omega_1$  é a forma bilinear anti-simétrica definida por:

$$(\psi^*\Omega_1)(u, v) := \Omega(\psi(u), \psi(v)).$$

Escolhendo uma base  $\{e_1, \dots, e_m\}$  de  $V$ , representamos qualquer forma bilinear e anti-simétrica  $\omega$  por uma matriz anti-simétrica,  $A = [A_{ij}]$ , onde,

$$A_{ij} = \Omega(e_i, e_j),$$

de modo que  $\Omega(u, v) = uA^tv$ .

**Exemplo 1.1.4.** A aplicação bilinear antisimétrica  $\Omega_0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\Omega_0(u, v) = u_1v_2 - u_2v_1$ , onde  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$ , é não-degenerada. De fato, se

$u \in \mathbb{R}^2$  é tal que  $\Omega_0(u, v) = 0$  para todo  $v \in \mathbb{R}^2$ , então em particular, para  $v = (0, 1)$  e  $v = (-1, 0)$ , temos que:

$$\begin{aligned}\Omega(u, (0, 1)) = 0 &\Leftrightarrow u_1 \cdot 1 - u_2 \cdot 0 = 0 &\Leftrightarrow u_1 = 0, \\ \Omega(u, (-1, 0)) = 0 &\Leftrightarrow u_1 \cdot 0 + u_2 \cdot 1 = 0 &\Leftrightarrow u_2 = 0,\end{aligned}$$

e portanto,  $v = (0, 0)$ .

**Exemplo 1.1.5.** Seja  $V$  um espaço vetorial complexo. Um produto interno Hermitiano (ou unitário) em  $V$ , é uma aplicação

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

que satisfaz para todos  $u, v, w \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ , as seguintes condições:

1. é uma forma sesquilinear, isto é, é linear na primeira variável e semi-linear na segunda variável:

$$\begin{aligned}\langle (u + \lambda v) | w \rangle &= \langle u | w \rangle + \lambda \langle v | w \rangle, \\ \langle u | (v + \lambda w) \rangle &= \langle u | v \rangle + \bar{\lambda} \langle u | w \rangle.\end{aligned}$$

2. é simétrica:  $\langle u | v \rangle = \overline{\langle v | u \rangle}$ .
3. é não degenerada:  $\langle u | v \rangle = 0, \forall v \in V \Rightarrow u = 0$ .
4. é positiva:  $\langle u | u \rangle \geq 0$ , para qualquer que seja  $u \in V$ .

Um espaço vetorial complexo munido de um produto interno Hermitiano é chamado de um *espaço hermitiano*.

Dado um produto hermitiano  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$  é fácil ver que a aplicação  $\Omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por,

$$\Omega(u, v) := \text{Im}(\langle u | v \rangle),$$

onde “*Im*” significa a parte imaginária, é uma forma simplética em  $V$ , visto como espaço vetorial real.

**Exemplo 1.1.6.** Se  $(V_1, \Omega_1)$  e  $(V_2, \Omega_2)$  são dois espaços vetoriais simpléticos, então  $V_1 \times V_2$  é um espaço vetorial simplético em relação à seguinte forma bilinear:

$$\Omega((u_1, u_2), (v_1, v_2)) := \Omega_1(u_1, v_1) + \Omega_2(u_2, v_2).$$

**Definição 1.1.7.** Seja  $(V, \Omega)$  um espaço simplético. O *ortogonal simplético* de um subespaço  $W \subseteq V$  é o conjunto:

$$W^\Omega := \{v \in V ; \Omega(v, w) = 0, \forall w \in W\}.$$

O subespaço  $W$  é chamado *simplético* se  $W \cap W^\Omega = \{0\}$ .

*Observação 1.1.8.* Um subespaço  $W \subseteq V$  é simplético se e somente se, a restrição  $\Omega|_W$  é não degenerada, onde  $\Omega|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por,

$$\Omega|_W(u, v) := \Omega(u, v),$$

onde  $u, v \in W$ .

**Lema 1.1.9.** *Seja  $(V, \Omega)$  um espaço vetorial simplético. Se  $W$  é um subespaço linear de  $V$ , então:*

$$\dim(W) + \dim(W^\Omega) = \dim(V). \quad (1.1.1)$$

*Em particular, se  $W$  é simplético, então  $V = W \oplus W^\Omega$ .*

*Demonstração.* Seja  $V^*$  o espaço dual de  $V$ . Considere o seguinte espaço:

$$W^\circ := \{ \alpha \in V^* \mid \langle \alpha, u \rangle = 0, \forall u \in W \}$$

(é chamado o *aniquilador* de  $W$ ).

Primeiro provaremos que

$$\dim(W) + \dim(W^\circ) = \dim(V). \quad (1.1.2)$$

Seja  $\{e_1, \dots, e_q\}$  uma base de  $V$  tal que  $\{e_1, \dots, e_p\}$  seja uma base de  $W$  (necessariamente  $p \leq q$ ). Seja também  $\{e_1^*, \dots, e_q^*\}$  a *base dual* de  $\{e_1, \dots, e_q\}$  (lembramos que a base dual é a base do espaço dual  $V^*$  definida por  $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ , onde  $\delta_{i,j}$  é o símbolo de *Kronecker*).

Seja  $\alpha \in W^\circ$ . Então existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}$  tais que:

$$\alpha = \lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_q e_q^*.$$

Por definição de  $W^\circ$ , temos que  $\langle \alpha, v \rangle = 0$ , para todo  $v \in W$ . Fixando  $j = 1, \dots, p$ , temos então:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, e_j \rangle = 0, & \Leftrightarrow \lambda_1 \langle e_1^*, e_j \rangle + \dots + \lambda_q \langle e_q^*, e_j \rangle = 0, \\ & \Leftrightarrow \lambda_1 \delta_{1j} + \dots + \lambda_q \delta_{qj} = 0, \\ & \Leftrightarrow \lambda_j = 0. \end{aligned}$$

Assim,  $\alpha = \lambda_{p+1} e_{p+1}^* + \dots + \lambda_q e_q^*$ , e portanto  $\{e_{p+1}^*, \dots, e_q^*\}$  é uma base do *aniquilador* de  $W$ . Segue que,

$$\dim(W^\circ) = q - p,$$

o que prova a fórmula (1.1.2).



Por hipótese,  $\Omega$  é não-degenerada, o que implica pela *Observação 1.1.2* que  $\Omega^b : V \rightarrow V^*$  é um isomorfismo linear, onde  $\langle \Omega^b(u), v \rangle := \Omega(u, v)$ . Assim para  $u \in V$  temos que :

$$\begin{aligned} u \in W^\Omega &\Leftrightarrow \Omega(u, v) = 0, \quad \forall v \in W \\ &\Leftrightarrow \langle \Omega^b(u), v \rangle = 0, \quad \forall v \in W \\ &\Leftrightarrow \Omega^b(u)|_W \equiv 0 \\ &\Leftrightarrow \Omega^b(u) \in W^\circ \\ &\Leftrightarrow u \in (\Omega^b)^{-1}(W^\circ). \end{aligned}$$

Logo,

$$W^\Omega = (\Omega^b)^{-1}(W^\circ).$$

Portanto  $\dim(W^\Omega) = \dim(W^\circ)$ , e como  $\dim(W) + \dim(W^\circ) = \dim(V)$ , concluímos que  $\dim(W) + \dim(W^\Omega) = \dim(V)$ , o que prova a formula (1.1.1).

Se  $W$  é um subespaço simplético, então  $W \cap W^\Omega = \{0\}$ , e portanto,

$$\begin{aligned} \dim(W + W^\Omega) &= \dim(W) + \dim(W^\Omega) - \dim(W \cap W^\Omega), \\ &= \dim(W) + \dim(W^\Omega) \\ &= \dim(V). \end{aligned}$$

Segue que  $V = W + W^\Omega$ . De  $W \cap W^\Omega = \{0\}$  e  $V = W + W^\Omega$ , conclui-se que  $V = W \oplus W^\Omega$ .  $\square$

## 1.2 Base Simplética

**Definição 1.2.1.** Seja  $(V, \Omega)$  um espaço vetorial simplético. Uma *base simplética* de  $V$  é uma base  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$  de  $V$  que satisfaz:

$$\Omega(e_i, e_j) = 0, \quad \Omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j}, \quad \Omega(f_i, f_j) = 0,$$

para todos  $1 \leq i, j \leq n$ . Assim numa base simplética, a forma  $\Omega$  é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $n \times n$ .

**Teorema 1.2.2.** *Todo espaço simplético  $(V, \Omega)$  admite uma base simplética.*

*Demonstração.* Tome  $e_1 \in V - \{0\}$  arbitrário. Como  $\Omega$  é não-degenerada, existe  $f_1 \in V$  tal que  $\Omega(e_1, f_1) \neq 0$  (caso contrário, teríamos  $\Omega(e_1, f) = 0$  para todo  $f \in V$ , o que implicaria que  $e_1 = 0$ , que é absurdo). Dividindo  $f_1$  por  $\frac{1}{\Omega(e_1, f_1)}$  se necessário, podemos supor que  $\Omega(e_1, f_1) = 1$ .

Seja  $W_1$  o subespaço gerado por  $e_1$  e  $f_1$ , e seja  $\Omega|_{W_1}$  é a restrição de  $\Omega$  a  $W_1$ . Para  $u = u_1e_1 + u_2f_1$  e  $v = v_1e_1 + v_2f_1$  em  $W_1$ ,  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ , temos pela bilinearidade de  $\Omega$  que,

$$\begin{aligned} (\Omega|_{W_1})(u, v) &= \Omega(u_1e_1 + u_2f_1, v_1e_1 + v_2f_1) \\ &= u_1v_1\Omega(e_1, e_1) + u_1v_2\Omega(e_1, f_1) + u_2v_1\Omega(f_1, e_1) + u_2v_2\Omega(f_1, f_1) \\ &= u_1v_2 - u_2v_1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$(\Omega|_{W_1})(u, v) = u_1v_2 - u_2v_1.$$

Pelo Exemplo 1.1.4, temos que  $\Omega|_{W_1}$  é não degenerada, o que implica pela Observação 1.1.8 que  $W_1$  é simplético. Pelo Lema 1.1.9, temos então que  $V = W_1 \oplus W_1^\Omega$ .

Vamos mostrar que  $W_1^\Omega$  é simplético. De fato, suponha que exista  $u \in W_1^\Omega$  tal que

$$\Omega|_{W_1^\Omega}(u, v) = 0, \quad \forall v \in W_1^\Omega.$$

Isso implica que  $\Omega(u, v) = 0$  para todo  $v \in W_1^\Omega$ , e uma vez que  $W_1^\Omega$  é o ortogonal simplético do subespaço  $W_1$ , temos também que  $\Omega(u, v) = 0$  para todo  $v \in W_1$ . Como  $V = W_1 \oplus W_1^\Omega$ , temos então que  $\Omega(u, v) = 0$  para todo  $v \in V$ . Sendo  $\Omega$  não-degenerada, necessariamente  $u = 0$ . Isto mostra que  $\Omega|_{W_1^\Omega}$  é não degenerada, ou seja,  $W_1^\Omega$  é simplético.

Repetindo essa construção encontra-se,  $e_2$  e  $f_2 \in W_1^\Omega$  tal que  $\Omega(e_2, f_2) = 1$ . Obtemos assim a decomposição  $W_1^\Omega = W_2 \oplus W_2'$ , onde  $W_2'$  é o ortogonal simplético de  $W_2$  em  $W_1^\Omega$  em relação a  $\Omega|_{W_1^\Omega}$ , e onde  $W_2$  é o espaço gerado por  $e_2$  e  $f_2$ . Segue-se que

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_2',$$

onde:

- $W_1$  é gerado por  $e_1$  e  $f_1$ ,
- $W_2$  é gerado por  $e_2$  e  $f_2$ ,
- $W_2 \subseteq W_1^\Omega$  (pois  $W_2$  é gerado por  $e_2$  e  $f_2$  que pertencem a  $W_1^\Omega$ ).
- $\Omega(e_1, f_1) = \Omega(e_2, f_2) = 1$  por construção.

Continuando com esse processo, e levando em conta o fato da dimensão de  $V$  ser finita, obtemos uma decomposição de  $V$  da seguinte forma:

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n,$$

onde,

- $W_i$  é gerado por  $e_i$  e  $f_i$ ,
- $\Omega(e_i, f_i) = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ ,
- $W_j \subseteq W_i^\Omega$  sempre que  $i < j$ .

Com essas condições, vê-se que  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$  é uma base simplética de  $V$ , o que prova o Teorema.  $\square$

### 1.3 Variedade Simplética

**Definição 1.3.1.** Uma *variedade simplética* é um par  $(M, \omega)$ , onde  $M$  é uma variedade e  $\omega$  é uma 2-forma fechada, não-degenerada em  $M$ , chamada *forma simplética*.

*Observação 1.3.2.* Por “não-degenerada”, entende-se que em cada ponto  $p \in M$ , a forma bilinear  $\omega_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  é não degenerada.

**Proposição 1.3.3.** A 2-forma

$$\omega_0 := \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k,$$

onde  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  são as coordenadas canônicas de  $\mathbb{R}^{2n}$ , é uma forma simplética, chamada *forma simplética canônica* em  $\mathbb{R}^{2n}$ .

A prova desta proposição se encontra na Secção A.1.1 do apêndice.

**Exemplo 1.3.4.** A esfera  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  munida da forma  $\omega$  definida por:

$$\omega_p(u, v) = \det(p, u, v), \quad (1.3.1)$$

onde  $p \in S^2$  e  $u, v \in T_p S^2 = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, p \rangle = 0\}$ , é uma variedade simplética. Para ver isso, considere a seguinte 2-forma em  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy,$$

Denotando por  $j : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  a aplicação de inclusão, temos que para todo  $p \in S^2$  e todos  $u, v \in T_p S^2$ ,

$$\begin{aligned} (j^* \alpha)(u, v) &= \alpha_p(u, v) \\ &= (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)(u, v) \\ &= xdy \wedge dz(u, v) + ydz \wedge dx(u, v) + zdx \wedge dy(u, v) \\ &= x \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & u_1 & v_1 \\ y & u_2 & v_2 \\ z & u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \det(p, u, v), \end{aligned}$$

isto é,  $j^*\alpha = \omega$ . A forma  $\alpha$  sendo suave, isso implica que  $\omega$  é suave. Por causa das dimensões,  $d\omega = 0$ . Usando a fórmula (1.3.1), vê-se também que  $\omega$  é não degenerada. Segue-se que  $\omega$  é uma forma simplética em  $S^2$ .

Seja  $T^*M$  o fibrado cotangente de uma variedade  $M$ , e seja  $\pi : T^*M \rightarrow M$  a projeção canônica. A *forma tautológica*, ou *forma de Liouville*, é a 1-forma sobre  $T^*M$  definida por:

$$\theta_{\alpha_p}(A_{\alpha_p}) := \langle \alpha_p, \pi_* A_{\alpha_p} \rangle, \quad (1.3.2)$$

onde  $\alpha_p \in T^*M$  e  $A_{\alpha_p} \in T_{\alpha_p}(T^*M)$ . O lado direito da equação (1.3.2) denota a contração entre o espaço  $T_pM$  e seu dual  $T_p^*M$ .

**Teorema 1.3.5.** *A forma  $\omega := -d\theta$  é uma forma simplética sobre  $T^*M$ , chamada forma simplética canônica do fibrado cotangente.*

*Demonstração.* Seja  $(U, \varphi)$  uma carta de  $M$  com coordenadas locais  $(x_1, \dots, x_n)$ . Denotemos a aplicação derivada da  $i$ -ésima coordenada local como

$$(dx_i)_p = (x_i)_{*p} : T_pU \rightarrow T_p\mathbb{R}.$$

Usando as identificações  $T_pU \simeq T_pM$  e  $T_p\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ , podemos ver  $(dx_i)_p$  como um elemento de  $T_p^*M$ . Afirmemos que  $\{(dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p\}$  é a base dual de  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$ , isto é  $(dx_i)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \delta_{i,j}$ . De fato, temos que

$$(id \circ x_i \circ \varphi^{-1})(x) = (x_i \circ \varphi^{-1})(x) = \pi_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(x) = \pi_i(x),$$

onde  $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é a projeção canônica sobre a  $i$ -ésima coordenada, e onde  $Id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a aplicação identidade de  $\mathbb{R}$ . A matriz jacobiana dessa aplicação é dada por:

$$\begin{aligned} Jac(id \circ x_i \circ \varphi^{-1})(x) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \pi_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \pi_i}{\partial x_m} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1_i & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde “ $1_i$ ” significa “1 na posição  $i$ ”, donde,

$$(dx_i)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1_i & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \delta_{i,j},$$

o que é o resultado desejado.

Agora construiremos uma carta sobre  $T^*M$ . Seja  $\alpha_p \in T_p^*M = (T_pM)^*$ . Como  $\{(dx_1), \dots, (dx_n)_p\}$  é uma base de  $T_p^*M$ , existem  $\xi_1, \dots, \xi_n$  números reais tais que:

$$\alpha_p = \xi_1(dx_1)_p + \dots + \xi_n(dx_n)_p.$$

Definimos uma carta  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  de  $T^*M$ , da seguinte maneira:  $\tilde{U} := \pi^{-1}(U)$ ,  $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$  é dada por,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\xi_1(dx_1)_p + \dots + \xi_n(dx_n)_p) &= (\varphi(p), (\xi_1, \dots, \xi_n)) \\ &= (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \xi_1, \dots, \xi_n), \end{aligned}$$

onde  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$  denotam as coordenadas locais associadas. Note que  $\tilde{x}_i = x_i \circ \pi$ .

Sabemos que  $\theta_{\alpha_p} \in T_{\alpha_p}^*(T^*M)$  e  $\{(d\tilde{x}_1)_{\alpha_p}, \dots, (d\tilde{x}_n)_{\alpha_p}, (d\xi_1)_{\alpha_p}, \dots, (d\xi_n)_{\alpha_p}\}$  é uma base de  $T_{\alpha_p}^*(T^*M)$ , e portanto existem  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  números reais tais que:

$$\theta_{\alpha_p} = a_1(d\tilde{x}_1)_{\alpha_p} + \dots + a_n(d\tilde{x}_n)_{\alpha_p} + b_1(d\xi_1)_{\alpha_p} + \dots + b_n(d\xi_n)_{\alpha_p}. \quad (1.3.3)$$

Vamos determinar esses coeficientes.

Como  $\{(d\tilde{x}_1)_{\alpha_p}, \dots, (d\xi_n)_{\alpha_p}\}$  é a base dual de  $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \right|_{\alpha_p}, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right|_{\alpha_p} \right\}$ , então:

$$\left\langle d\tilde{x}_j, \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \right|_{\alpha_p} \right\rangle = \delta_{i,j} \quad e \quad \left\langle (d\xi_j)_{\alpha_p}, \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \right|_{\alpha_p} \right\rangle = 0. \quad (1.3.4)$$

Dado  $i = 1, \dots, n$ , temos a partir de (1.3.1) e (1.3.2) que:

$$\left\langle \theta_{\alpha_p}, \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \right|_{\alpha_p} \right\rangle = \sum_{j=1}^n a_j \left\langle d\tilde{x}_j \Big|_p, \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \right|_{\alpha_p} \right\rangle + \sum_{j=1}^n b_j \left\langle d\xi_j \Big|_{\alpha_p}, \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \right|_{\alpha_p} \right\rangle = a_i,$$

isto é,

$$\left\langle \theta_{\alpha_p}, \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \right|_{\alpha_p} \right\rangle = a_i,$$

ou ainda, usando a definição de  $\theta$ ,

$$\left\langle \alpha_p, \pi_{*\alpha_p} \left. \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \right|_{\alpha_p} \right\rangle = a_i.$$

Para calcular o primeiro membro, note que, dado  $(x, v) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \pi \circ \tilde{\varphi}^{-1})(x, v) &= (\varphi \circ \pi)(\tilde{\varphi}^{-1}(x, v)) \\ &= (\varphi \circ \pi)(v_1(dx_1)_{\varphi^{-1}(x)} + \dots + v_n(dx_n)_{\varphi^{-1}(x)}) \\ &= \varphi \circ \varphi^{-1}(x) \\ &= x, \end{aligned}$$

o que implica, usando uma notação matricial, que:

$$\pi_{*\alpha_p} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 & & 0 \end{bmatrix},$$

donde deduz-se que:

$$\pi_{*\alpha_p} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \Big|_{\alpha_p} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} a_i &= \left\langle \alpha_p, \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\rangle \\ &= \left\langle \xi_1(\alpha_p)(dx_1)_p + \dots + \xi_n(\alpha_p)(dx_n)_p, \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \xi_j(\alpha_p) \left\langle (dx_j)_p, \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \xi_j(\alpha_p) \delta_{j,i} \\ &= \xi_i(\alpha_p). \end{aligned}$$

Assim  $a_i = \xi_i(\alpha_p)$ .

De maneira análoga,

$$b_i = \left\langle \theta_{\alpha_p}, \frac{\partial}{\partial \xi_i} \Big|_{\alpha_p} \right\rangle = \left\langle \alpha_p, \pi_{*\alpha_p} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \Big|_{\alpha_p} \right\rangle,$$

e o termo  $\pi_{*\alpha_p} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \Big|_{\alpha_p}$  pode ser obtido pela representação matricial,

$$\pi_{*\alpha_p} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \Big|_{\alpha_p} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1_{n+i} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Assim,

$$b_i = \left\langle \theta_{\alpha_p}, \frac{\partial}{\partial \xi_i} \Big|_{\alpha_p} \right\rangle = \left\langle \theta_{\alpha_p}, 0 \right\rangle = 0.$$

Concluimos que

$$\theta_{\alpha_p} = \xi_1(\alpha_p) (d\tilde{x}_1)_{\alpha_p} + \dots + \xi_n(\alpha_p) (d\tilde{x}_n)_{\alpha_p},$$

ou seja,  $\theta = \xi_1 d\tilde{x}_1 + \dots + \xi_n d\tilde{x}_n$ . Segue-se que:

$$-d\theta_{\alpha_p} = -\sum_{i=1}^n d(\xi_i dx_i) = -\sum_{i=1}^n (d\xi_i \wedge dx_i + (-1)^n \xi_i \wedge d(dx_i)) = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\xi_i.$$

Portanto, a forma  $-d\theta_{\alpha_p}$  está na forma simplética canônica, o que prova o Teorema. (veja a Proposição 1.3.3).  $\square$

*Observação 1.3.6.* Nas coordenadas  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$  de  $T^*M$  introduzidas na demonstração do Teorema 1.3.5, vimos que

$$\theta = \sum \xi_i d\tilde{x}_i \quad e \quad \omega = \sum dx_i \wedge d\xi_i.$$

**Definição 1.3.7.** Seja  $(M_1, \omega_1)$  e  $(M_2, \omega_2)$  duas variedades simpléticas. Um difeomorfismo  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  é um *simplectomorfismo* se  $\varphi^* \omega_2 = \omega_1$ . Se esse *simplectomorfismo* existir então  $(M_1, \omega_1)$  e  $(M_2, \omega_2)$  são chamados de espaços *simplectomorfos*.

Concluimos essa seção com o seguinte resultado, sem demonstração.

**Teorema 1.3.8.** (*Darboux*) Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética. Dado um ponto  $p \in M$ , existe uma carta  $(U, \varphi)$  em  $p$  com coordenadas locais  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  tal que:

$$\omega|_U = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k,$$

onde  $\omega|_U$  designa a restrição de  $\omega$  ao conjunto  $U$ , isto é  $\omega|_U = j^* \omega$ , e onde  $j : U \hookrightarrow M$  é a aplicação inclusão.

## 1.4 Mecânica Hamiltoniana

Nesta seção iremos descrever brevemente a relação entre a geometria simplética e a mecânica clássica na sua formulação hamiltoniana. Como motivação, reformularemos a equação de Newton usando a geometria simplética.

Suponha que uma partícula de massa  $m > 0$  se move no espaço de configuração  $\mathbb{R}^3$ , por um campo de força  $F$ , visto como campo de vetores  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Seja  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , com  $a \leq t \leq b$ , a trajetória dessa partícula em  $\mathbb{R}^3$ . A segunda lei de Newton nos diz que

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x(t)). \quad (1.4.1)$$

Suponha que  $F$  seja conservativa, isto é, existe uma função  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F = -\nabla V$ , onde  $\nabla V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$  é o gradiente de  $V$ . Assim podemos reescrever a fórmula (1.4.1) por:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\nabla V. \quad (1.4.2)$$

Denotamos por  $\dot{x}(t)$  a derivada da trajetória  $x(t)$ ,

$$\dot{x} : \begin{cases} (a, b) & \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ t & \longmapsto (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)) = \left( \frac{dx_1}{dt}(t), \frac{dx_2}{dt}(t), \frac{dx_3}{dt}(t) \right). \end{cases}$$

Chamaremos de “*momentum*” a aplicação  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ , onde  $p_i(t) := m\dot{x}_i(t)$ , com  $i = 1, 2, 3$ . Assim podemos reescrever (1.4.2) como

$$\frac{dp_i}{dt} = -\nabla V(x(t)), \quad i = 1, 2, 3,$$

donde chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} & = -\frac{\partial V}{\partial x_i}(x(t)), \\ \frac{dx_i}{dt} & = \frac{1}{m}p_i(t), \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.4.3)$$

Podemos observar que a curva  $t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t))$  é uma curva integral em  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$  do seguinte campo de vetores:

$$(X_H)_{(x,p)} := \left( \frac{1}{m}p, -\nabla V(x) \right). \quad (1.4.4)$$

Afirmemos que  $X_H$  é o único campo de vetores em  $\mathbb{R}^6$  que satisfaz

$$\omega(X_H, u) = dH(u), \quad (1.4.5)$$

para todo  $u \in \mathbb{R}^6$ , onde  $\omega = \sum_{i=1}^3 dx_i \wedge dp_i$  é a forma simplética canônica de  $\mathbb{R}^6$ , e onde  $H : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$  é a função definida por

$$H(x, p) = \frac{1}{2m} \|p\|^2 + V. \quad (1.4.6)$$

Com efeito, se  $X$  satisfaz  $\omega(X, u) = dH(u)$  para todo  $u \in \mathbb{R}^6$ , então levando em conta a representação matricial de  $\omega$  (veja 1.2.1) assim como (1.4.9), temos que,

$$(X_1, \dots, X_6) \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_6 \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_3} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_6 \end{bmatrix}$$

para todo  $u \in \mathbb{R}^6$ , donde

$$\begin{aligned} (X_1, \dots, X_6) \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} &= \left( \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_3} \right) \\ \Rightarrow (-X_4, -X_5, -X_6, X_1, X_2, X_3) &= \left( \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_3} \right), \end{aligned}$$



o que implica que

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_i} = -X_{3+i}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} = X_i. \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.4.7)$$

Por outro lado, um cálculo direto mostra que:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m}p_i, \end{cases} \quad (1.4.8)$$

onde  $i = 1, 2, 3$ .

Comparando as equações (1.4.7) e (1.4.8), concluímos que  $X = X_H$ , o que mostra a unicidade de  $X_H$ , como havíamos afirmado.

Portanto temos uma reformulação da segunda Lei de Newton em termos da geometria simplética de  $(\mathbb{R}^6, \omega)$ , onde uma solução da equação de Newton aparece como curva integral do campo de vetores determinado pela energia  $H$  via a equação (1.4.5).

Esse exemplo ilustra uma situação geral da física contemporânea, onde as variedades simpléticas  $(M, \omega)$  se tornam os espaços de configurações de vários sistemas clássicos; nesse contexto a energia que descreve esse sistema mecânico é chamada de *função hamiltoniana*  $H$ , e a essa função associamos um campo de vetores  $X_H$  que é chamado de *campo de vetores Hamiltoniano*, cujas curvas integrais descrevem a dinâmica do sistema (veja definição a seguir).

**Definição 1.4.1.** Seja  $X$  um campo de vetores em uma variedade simplética  $(M, \omega)$ . Dizemos que  $X$  é um *campo hamiltoniano* se existir uma função  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

$$\omega(X, \cdot) = dH(\cdot). \quad (\text{igualdades de 1-formas}) \quad (1.4.9)$$

Neste caso,  $H$  é chamada a função hamiltoniana associada ao campo  $X$ , e escreve-se  $X = X_H$ . Dizemos também que  $X_H$  é o campo hamiltoniano associado a  $H$ . Na mecânica clássica, a função hamiltoniana  $H$  corresponde à energia total do sistema.

Para encerrar este capítulo, apresentaremos a equação clássica do pêndulo simples e sua reformulação simplética.

Considere um pêndulo simples num plano coordenado (vertical) sob a ação da força da gravidade. Vamos supor que uma haste rígida de tamanho  $L > 0$  e massa desprezível tenha uma partícula de massa  $m > 0$  no outro extremo. As possíveis posições dessa partícula estão sobre a circunferência de raio  $L$ . Denotamos por  $(x_1(t), x_2(t))$  as coordenadas cartesianas dessa partícula no tempo  $t$  no referencial  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (veja a Figura (1.4.1)).

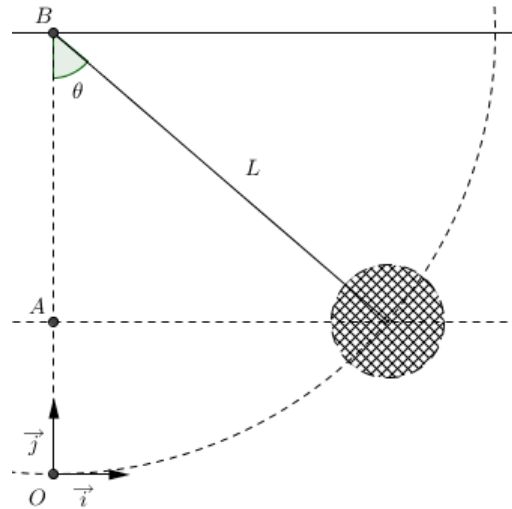


Figura 1.4.1: Pêndulo Simples

É conveniente descrever a posição da partícula com coordenadas polares  $(r, \theta)$ . Assim temos que  $(x_1(t), x_2(t)) = L(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$  que será a posição do pêndulo em movimento no tempo  $t$ . Vale ressaltar que a posição do pêndulo em repouso, no extremo inferior da circunferência, é considerada como sendo a posição  $\theta = 0$  do pêndulo. Vamos supor que a energia potencial  $E_{pot}$  nessa posição é nula.

Denotando por  $L$  a distância entre  $O$  e  $B$ , temos que  $L = d(\overline{OB}) = L(1 - \cos\theta)$ , e portanto a energia potencial é dada por:

$$E_{pot} = mG.d = mGL(1 - \cos\theta),$$

onde  $G$  é a constante gravitacional. Além disso, a da energia cinética é dada por,

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{1}{2}m \left\| \frac{d}{dt}(x_1(t), x_2(t)) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}m \left\| \frac{d}{dt}(L(\cos\theta(t)), \sin(\theta(t))) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}mL \left\| (-\sin\theta.\dot{\theta}(t), \cos\theta.\dot{\theta}(t)) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}mL \left| \dot{\theta}(t) \right|^2. \end{aligned}$$

Assim podemos calcular a *energia total*, denotado por  $E_{total}$ , que é a soma das energias potencial e cinética,

$$\begin{aligned} E_{total} &= E_{cin} + E_{pot} \\ &= \frac{1}{2}mL \left| \dot{\theta}(t) \right|^2 + mGL(1 - \cos\theta). \end{aligned}$$

Para simplificar essa equação, suponha  $m = G = L = 1$ . Daí,

$$E_{total} = \frac{1}{2}\dot{\theta}(t)^2 + 1 - \cos\theta. \quad (1.4.10)$$

Pelo fato de não considerar o atrito, a energia permanece constante ao longo da trajetória, e portanto temos a seguinte igualdade,

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}(t)^2 + 1 - \cos\theta = k,$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é fixo. Computando a derivada da igualdade acima temos:

$$\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t) + \text{sen}\theta\dot{\theta} = 0. \quad (1.4.11)$$

Devemos descartar o caso em que  $\dot{\theta} \neq 0$ , pois o pêndulo está em movimento. Logo vamos apenas considerar a equação  $\ddot{\theta} + \text{sen}\theta = 0$ . Introduzindo a velocidade angular  $\rho = \dot{\theta}(t)$  para simplificar a equação (1.4.11), obtemos assim

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \rho, \\ \dot{\rho} = -\text{sen}\theta. \end{cases}$$

Veja que a curva  $t \mapsto (\theta, \rho)$  é uma curva integral em  $\mathbb{R}^2$  do seguinte campo de vetores

$$X_{(\theta, \rho)} := (\rho, -\text{sen}\theta),$$

além disso, pela equação (1.4.10), temos que a energia total do sistema é a função  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$H(\theta, \rho) := \frac{1}{2}\rho^2 + 1 - \cos\theta. \quad (1.4.12)$$

Afirmemos agora que  $X_H = X$ , onde  $X_H$  é o campo hamiltoniano associado a  $H$  relativamente a forma simplética  $\omega = d\theta \wedge d\rho$ .

Com efeito,

$$\begin{aligned} \omega(X_H, u) &= dH(u) \\ \Rightarrow ((X_H)_1, (X_H)_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \left( \frac{\partial H}{\partial \theta}, \frac{\partial H}{\partial \rho} \right) \\ \Rightarrow (-(X_H)_2, (X_H)_1) &= (\text{sen}\theta, \rho), \end{aligned}$$

portanto  $(X_H)_{(\theta, \rho)} = (\rho, -\text{sen}\theta) = X_{(\theta, \rho)}$ .

Assim, podemos descrever a dinâmica do pêndulo simples por meio da variedade simplética  $(\mathbb{R}^2, d\theta \wedge d\rho)$ . De maneira mais geral podemos reformular outros sistemas mecânicos clássicos usando uma forma simplética, o que permite reescrever varias teorias da mecânica clássica por meio da geometria simplética (veja [12])

# Capítulo 2

## Ações de Grupos de Lie

### 2.1 Grupos de Lie

**Definição 2.1.1.** Um grupo de Lie é uma variedade  $G$  de classe  $C^\infty$  munida de uma estrutura de grupo, tal que as aplicações

$$m : G \times G \longrightarrow G; (g, h) \mapsto gh \quad (\text{multiplicação})$$

$$i : G \longrightarrow G; g \mapsto g^{-1} \quad (\text{inversão})$$

são de classe  $C^\infty$ .

*Observação 2.1.2.* Segue do fato de  $m$  ser de classe  $C^\infty$  que as aplicações  $L_g, R_g : G \longrightarrow G$ , definidas por :

$$L_g(h) := gh, \quad R_g(h) = hg,$$

são de classe  $C^\infty$ . Elas são claramente bijetivas com inversas:

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}} \text{ e } (R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}.$$

Além disso, para quaisquer  $g, h \in G$  temos que

$$L_g \circ L_h = L_{gh} \quad \text{e} \quad R_g \circ R_h = R_{hg}.$$

*Observação 2.1.3.* Na definição 2.1.1, não é necessário supor que  $i : G \longrightarrow G$  é de classe  $C^\infty$  pois decorre automaticamente do fato que  $m : G \times G \longrightarrow G$  é de classe  $C^\infty$ , e da equação implícita:

$$m(g, i(g)) = e, \quad (\text{elemento neutro})$$

que vale para todo  $g \in G$  (com efeito,  $\frac{\partial m}{\partial h}(g, h) = (L_g)_{*h}$  que é um isomorfismo linear o que permite aplicar o teorema da função implícita).

**Lema 2.1.4.** Para qualquer grupo de Lie temos a seguinte fórmula

$$i_{*g}u = -(L_{g^{-1}} \circ R_{g^{-1}})_{*g}u. \quad (2.1.1)$$

*Demonstração.* Seja  $\delta(t)$  uma curva que satisfaz  $\delta(0) = g$  e  $\dot{\delta}(0) = u$ . Derivando a relação  $\delta(t)\delta(t)^{-1} = e$  no ponto 0 obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\Big|_0(\delta(t)\delta(t)^{-1}) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt}\Big|_0 L_{\delta(t)}i(\delta(t)) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt}\Big|_0 L_{\delta(t)}i(\delta(0)) + \frac{d}{dt}\Big|_0 L_{\delta(0)}i(\delta(t)) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt}\Big|_0 L_{\delta(t)}i(g) + \frac{d}{dt}\Big|_0 L_g i(\delta(t)) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dt}\Big|_0 R_{g^{-1}}\delta(t) + \frac{d}{dt}\Big|_0 L_g i(\delta(t)) = 0 \\ \Rightarrow & (R_{g^{-1}})_{*\delta(0)}\dot{\delta}(0) + (L_g)_{*i(\delta(0))}i_{*\delta(0)}(\dot{\delta}(0)) = 0 \\ \Rightarrow & (R_{g^{-1}})_{*g}(u) + (L_g)_{*g^{-1}}i_{*g}(u) = 0 \\ \Rightarrow & (L_g)_{*g^{-1}}i_{*g}(u) = -(R_{g^{-1}})_{*g}(u), \end{aligned}$$

donde, multiplicando por  $(L_{g^{-1}})_{*e}$ ,

$$\begin{aligned} & (L_{g^{-1}})_{*e}(L_g)_{*g^{-1}}i_{*g}(u) = -(L_{g^{-1}})_{*e}(R_{g^{-1}})_{*g}(u) \\ \Rightarrow & (L_{g^{-1}} \circ L_g)_{*g^{-1}}i_{*g}(u) = -(L_{g^{-1}} \circ R_{g^{-1}})_{*g}u \\ \Rightarrow & i_{*g}(u) = -(L_{g^{-1}} \circ R_{g^{-1}})_{*g}u. \end{aligned}$$

O lema segue.  $\square$

**Exemplo 2.1.5.** Qualquer espaço vetorial real  $V$  de dimensão finita  $n$  é um grupo de Lie em relação as seguintes operações:

$$\begin{cases} m : V \times V \longrightarrow V, (x, y) \mapsto x + y, \\ i : V \longrightarrow V, x \mapsto -x. \end{cases}$$

**Exemplo 2.1.6.** O grupo linear das aplicações de  $\mathbb{R}^n$  para  $\mathbb{R}^n$ , definido da seguinte forma,

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \mid \det A \neq 0\},$$

é naturalmente uma variedade (é um conjunto aberto em  $\mathbb{R}^{n^2} \cong L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ), e possui uma estrutura de grupo dada por:

$$\begin{cases} m(A, B) = A \circ B, \\ i(A) = A^{-1}. \end{cases}$$

Para verificar que  $m$  é de classe  $C^\infty$ , basta observar que  $m$  é a restrição a  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  da aplicação bilinear:

$$\begin{cases} L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \\ (A, B) \longrightarrow A \circ B, \end{cases}$$

que é de classe  $C^\infty$  (toda aplicação multilinear é  $C^\infty$  em dimensão finita).

Portanto  $GL(n, \mathbb{R})$  é um grupo de Lie de dimensão  $n^2$ .

**Exemplo 2.1.7.** O círculo unitário  $S^1$  é um grupo de Lie em relação as seguintes operações,

$$\begin{cases} m : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1, (e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \mapsto e^{i(\theta+\varphi)}, \\ i : S^1 \longrightarrow S^1, e^{i\theta} \mapsto e^{-i\theta}, \end{cases}$$

onde  $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.1.8.** Dado um número finito de grupos lie  $G_1, \dots, G_n$ , o produto cartesiano  $G_1 \times \dots \times G_n$  é naturalmente um grupo de Lie. Em particular,  $\mathbb{T}^n := S^1 \times \dots \times S^1$  ( $n$ -vezes) é um grupo de Lie chamado *toro* de dimensão  $n$ .

**Definição 2.1.9.** A *álgebra de Lie* de um grupo de Lie  $G$  é o espaço vetorial

$$\mathfrak{g} := T_e G.$$

Usamos também a notação  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ .

Justificaremos a palavra “álgebra” mais adiante.

**Definição 2.1.10.** Seja  $X$  um campo de vetores e  $G$  um grupo de Lie. Dizemos que o campo  $X$  é *invariante à esquerda* se para todo  $h, g \in G$  têm-se:

$$(L_g)_{*h} X_h = X_{gh}.$$

Denotamos por  $\mathfrak{X}_L(G)$  o espaço vetorial dos campos de vetores invariantes à esquerda de  $G$ .

*Observação 2.1.11.* Seja  $M$  uma variedade,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo de vetores de  $M$  e  $\varphi : M \longrightarrow M$  um difeomorfismo. Definimos o campo de vetores  $\varphi^* X$  sobre  $M$  por:

$$(\varphi^* X) := \varphi_{*\varphi^{-1}(x)} X_{\varphi^{-1}(x)}.$$

Com essa notação, vê-se que  $X \in \mathfrak{X}(G)$  é invariante à esquerda se e somente se,  $(L_g)^* X = X$ , para todo  $g \in G$ .

**Proposição 2.1.12.** *Seja  $X : G \longrightarrow TG$  uma aplicação que satisfaz  $X_g \in T_g G$  para todo  $g \in G$  (não necessariamente de classe  $C^\infty$ ). Se  $(L_g)_{*h} X_h = X_{gh}$  para todo  $g, h \in G$ , então  $X$  é de classe  $C^\infty$ , isto é, campos invariantes a esquerda são de classe  $C^\infty$ .*

*Demonstração.* Defina

$$T_L : \begin{cases} G \times \mathfrak{g} & \longrightarrow TG, \\ (g, \xi) & \longmapsto (L_g)_{*e} \xi. \end{cases} \quad (\text{trivialização à esquerda}). \quad (2.1.2)$$

A aplicação  $T_L$  é bijetiva e sua inversa é dada por:

$$T_L^{-1}(u) := \left( g, (L_g^{-1})_{*g} u \right) \quad u \in T_g G.$$

Vamos mostrar que  $T_L$  é suave. Para isso, note que  $L_g = m \circ f_g$ , onde  $m : G \times G \rightarrow G$ ;  $(g, h) \mapsto gh$  e  $f_g : G \rightarrow G \times G$ ;  $h \mapsto (g, h)$ . Daí, substituindo  $L_g$  por  $m \circ f_g$  na equação (2.1.2), e usando a regra da cadeia, obtemos,

$$T_L(g, \xi) = (L_g)_{*e} \xi = (m \circ f_g)_{*e} \xi = m_*(f_g)_{*e} \xi, \quad (2.1.3)$$

donde,

$$T_L(g, \xi) = m_*(f_g)_{*e} \xi.$$

Por hipótese  $m$  é de classe  $C^\infty$  e portanto,  $m_* : TG \times TG \rightarrow TG$  é de classe  $C^\infty$ . Para verificar que  $(g, \xi) \mapsto (f_g)_{*e} \xi$  é de classe  $C^\infty$ , vamos considerar uma curva  $\delta(t)$  suave de  $G$  tal que  $\delta(0) = e$ ,  $\dot{\delta}(0) = \xi$ . Temos que:

$$(f_g)_{*e} \xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f_g(\delta(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (g, \delta(t)) = (0_{T_g G}, \xi).$$

Logo,

$$(f_g)_{*e} \xi = (s(g), \xi), \quad (2.1.4)$$

onde  $s : G \rightarrow TG$ ;  $g \mapsto 0_{T_g G}$  é a secção nula de  $TG$  que é de classe  $C^\infty$ .

Substituindo (2.1.4) em (2.1.3), obtemos:

$$T_L(g, \xi) = m_*(s(g), \xi),$$

donde vê-se que  $T_L$  é de classe  $C^\infty$ .

A inversa também é de classe  $C^\infty$ . Com efeito, dado  $u \in T_g G$ , temos que

$$(T_L^{-1})(u) = (g, (L_{g^{-1}})_{*g} u) = (\pi(u), (L_{g^{-1}})_{*g} u),$$

onde  $\pi : TG \rightarrow G$  é a projeção canônica (que é suave). Sendo assim, basta mostrar que  $(L_{g^{-1}})_{*g} u$  é de classe  $C^\infty$ . Para isso, note que:

$$(L_{g^{-1}})_{*g} u = (m \circ f_{g^{-1}})_{*g} u = m_*(f_{g^{-1}})_{*g} u.$$

Assim usando uma curva  $\beta(t)$  suave de  $G$  satisfazendo  $\beta(0) = g$  e  $\dot{\beta}(0) = u$ , temos

$$\begin{aligned} (f_{g^{-1}})_{*g} u &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 f_{g^{-1}}(\beta(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (g^{-1}, \beta(t)) \\ &= (0_{T_{g^{-1}} G}, u) = (i_* \circ s \circ \pi(u), u), \end{aligned}$$

onde  $i : G \rightarrow G$ ;  $g \mapsto g^{-1}$ .

Portanto,

$$(T_L^{-1})(u) = (\pi(u), m_*(i_* \circ s \circ \pi(u), u)). \quad (2.1.5)$$

Essa aplicação, vista como uma aplicação de  $TG$  para  $G \times TG$  é suave e sua imagem está contida em  $G \times \mathfrak{g}$ . Como  $G \times \mathfrak{g}$  é uma subvariedade mergulhada em  $G \times TG$ , temos que  $(T_L)^{-1} : TG \rightarrow G \times \mathfrak{g}$  é suave.

Segue-se que  $T_L$  é um difeomorfismo. Sendo assim,  $X : G \rightarrow TG$  é de classe  $C^\infty$  se e somente se,  $(T_L)^{-1} \circ X : G \rightarrow G \times \mathfrak{g}$  é de classe  $C^\infty$ , o que acontece, pois

$$(T_L^{-1} \circ X)(g) = (g, (L_{g^{-1}})_* X_g) = (g, X_e),$$

que é uma aplicação de classe  $C^\infty$ . □

**Proposição 2.1.13.** *A aplicação*

$$\phi : \begin{cases} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}_L(G), \\ \xi \longmapsto \xi^L, \end{cases} \quad (2.1.6)$$

onde  $(\xi^L)_g := (L_g)_{*e} \xi$ , é um isomorfismo linear.

*Demonstração.* Primeiro, note que  $\xi^L$  é invariante à esquerda. De fato, dados  $g, h \in G$ , temos que:

$$(L_g)_{*h} (\xi^L) = (L_g)_{*h} (L_h)_{*e} \xi = (L_g \circ L_h)_{*e} \xi = (L_{gh})_{*e} \xi = (\xi^L)_{gh}.$$

Para ver que (2.1.6) é um isomorfismo, basta observar que a aplicação  $\mathfrak{X}_L(G) \rightarrow \mathfrak{g}$ ,  $X \mapsto X_e$  é a inversa de  $\phi$ . □

*Observação 2.1.14.* Decorre da Proposição 2.1.13 que se  $X \in \mathfrak{X}(G)$  é invariante à esquerda, então  $X = (X_e)^L$ .

**Definição 2.1.15.** Seja  $G$  um grupo de Lie, com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . O colchete de Lie  $\mathfrak{g}$  é a aplicação:  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , definida por,

$$[\xi, \eta] := [\xi^L, \eta^L]_e,$$

onde o  $[\xi^L, \eta^L]$  é o colchete de Lie dos campos de vetores  $\xi^L$  e  $\eta^L$ .

**Proposição 2.1.16.** *O colchete de Lie é bilinear, anti-simétrica e satisfaz a identidade de Jacobi,*

$$[\xi, [\eta, \delta]] + [\eta, [\delta, \xi]] + [\delta, [\xi, \eta]] = 0,$$

onde  $\xi, \eta, \delta \in \mathfrak{g}$ .



*Demonstração.* A bilinearidade de  $[\cdot, \cdot]$  é uma consequência da bilinearidade do colchete de Lie para campos de vetores e da linearidade das seguintes aplicações:

- $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}_L(G), \quad \xi \mapsto \xi^L,$
- $\mathfrak{X}_L(G) \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad X \mapsto X_e.$

Para mostrar a identidade de Jacobi, provaremos primeiro a seguinte igualdade:

$$[\xi^L, \eta^L] = [\xi, \eta]^L. \quad (2.1.7)$$

A relação (2.1.7) decorre da observação 2.1.11 que implica

$$[\xi^L, \eta^L] = [(L_g)^*\xi^L, (L_g)^*\eta^L] = (L_g)^*[\xi^L, \eta^L],$$

onde usamos nesta última equação uma propriedade do colchete de Lie para campos de vetores descrito no Apêndice na secção ??.

Assim  $[\xi^L, \eta^L]$  é invariante à esquerda e portanto,

$$[\xi^L, \eta^L] = ([\xi^L, \eta^L]_e)^L = [\xi, \eta]^L.$$

Agora, a identidade de Jacobi é uma consequência da identidade de Jacobi para campos de vetores e da igualdade (2.1.7):

$$\begin{aligned} [\xi, [\eta, \delta]] + [\eta, [\delta, \xi]] + [\delta, [\xi, \eta]] &= [\xi^L, [\eta, \delta]^L]_e + [\eta^L, [\delta, \xi]^L]_e + [\delta^L, [\xi, \eta]^L]_e \\ &= \left( [\xi^L, [\eta, \delta]^L] + [\eta^L, [\delta, \xi]^L] + [\delta^L, [\xi, \eta]^L] \right)_e. \\ &= ([\xi^L, [\eta^L, \delta^L]] + [\eta^L, [\delta^L, \xi^L]] + [\delta^L, [\xi^L, \eta^L]])_e = 0, \end{aligned}$$

o que prova a proposição.  $\square$

**Definição 2.1.17.** Em geral, um espaço vetorial real  $V$  munido de um produto bilinear anti-simétrica

$$[\cdot, \cdot] : V \times V \longrightarrow V,$$

que satisfaz a identidade de Jacobi é chamado uma *álgebra de Lie*.

*Observação 2.1.18.* Em vez de trabalhar com os campos de vetores invariantes à esquerda, poderíamos trabalhar com os campos de vetores invariantes à direita, que por definição, são os campos de vetores  $X \in \mathfrak{X}(G)$ , que satisfazem para todos  $g, h \in G$ ,  $(R_g)_{*h} X_h = X_{hg}$ . Mostra-se então que

$$\begin{cases} T_e G \longrightarrow \mathfrak{X}_R(G), \\ \xi \longrightarrow \xi^R, \end{cases}$$

onde  $(\xi^R)_g := (R_g)_{*e} \xi$ , é um isomorfismo linear. Sendo assim, define-se um outro “colchete de Lie” em  $\mathfrak{g}$  pela fórmula  $[\xi, \eta]^R := [\xi^R, \eta^R]_e$ . Verifica-se que  $[\xi, \eta] = -[\xi, \eta]^R$  para todos  $\xi, \eta \in T_e G$  (ver lema ?? no Apêndice).

## 2.2 A aplicação exponencial

Seja  $G$  um grupo de Lie com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Fixamos  $\xi \in \mathfrak{g}$  e denotamos por  $\delta(t)$  a curva integral maximal  $\xi^L$  passando pelo ponto  $e$  quando  $t = 0$  (isto é  $\delta(0) = e$  e  $\dot{\delta}(t) = (\xi^L)_{\delta(t)}$  para todo  $t$ ).

**Lema 2.2.1.** *A curva  $\delta(t)$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Seja  $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$  o intervalo maximal onde  $\delta$  está definida ( $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq +\infty$ ). Suponha que  $\beta < +\infty$  (o caso  $\alpha > -\infty$  é análogo). Isto significa que não é possível prolongar  $\delta(t)$  para  $t > \beta$ .

Considere a curva

$$\begin{aligned} c: \left( \frac{\beta}{2}, \frac{3\beta}{2} \right) &\longrightarrow G, \\ t &\longmapsto \delta\left(\frac{\beta}{2}\right)\delta\left(t - \frac{\beta}{2}\right). \end{aligned}$$

Temos que  $c$  é suave e satisfaz  $c\left(\frac{\beta}{2}\right) = \delta\left(\frac{\beta}{2}\right)\delta(0) = \delta\left(\frac{\beta}{2}\right)$  e  $\frac{d}{dt}c(t) = (\xi^L)_{c(t)}$ . Com efeito:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta\left(\frac{\beta}{2}\right)\delta\left(t - \frac{\beta}{2}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\delta\left(\frac{\beta}{2}\right)\delta\left(t - \frac{\beta}{2}\right)\right), \\ &= \frac{d}{dt}L_{\delta\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left(\delta\left(t - \frac{\beta}{2}\right)\right), \\ &= \left(L_{\delta\left(\frac{\beta}{2}\right)}\right)_{*\delta\left(t - \frac{\beta}{2}\right)}(\xi^L)_{\delta\left(t - \frac{\beta}{2}\right)}, \\ &= \left(L_{\delta\left(\frac{\beta}{2}\right)}\right)_{*\delta\left(t - \frac{\beta}{2}\right)}(\xi^L)_{\delta\left(t - \frac{\beta}{2}\right)}, \\ &= \left(L_{\delta\left(\frac{\beta}{2}\right)}\right)_{*\delta\left(t - \frac{\beta}{2}\right)}\left(L_{\delta\left(t - \frac{\beta}{2}\right)}\right)_{*e}\xi, \\ &= \left(L_{\delta\left(\frac{\beta}{2}\right)} \circ L_{\delta\left(t - \frac{\beta}{2}\right)}\right)_{*e}\xi, \\ &= \left(L_{\delta\left(\frac{\beta}{2}\right)\delta\left(t - \frac{\beta}{2}\right)}\right)_{*e}\xi, \\ &= \left(L_{c(t)}\right)_{*e}\xi, \\ &= (\xi^L)_{c(t)}. \end{aligned}$$

Pela unicidade das curvas integrais, temos que:

$$c(t) = \delta(t) \quad \forall t \in (\alpha, \beta) \cap \left( \frac{\beta}{2}, \frac{3\beta}{2} \right) = \left( \frac{\beta}{2}, \beta \right),$$

o que implica que  $\delta$  possui uma extensão além do ponto  $t = \beta$ . Obtemos assim uma contradição com a maximilidade de  $\beta$ .  $\square$

Dado um campo vetorial  $X$  em uma variedade, denotamos por  $\varphi_t^X$  o seu fluxo. Assim  $t \mapsto \varphi_t^X(x)$  é a curva integral de  $X$  com condição inicial  $x \in M$ .

**Proposição 2.2.2.** *O fluxo de  $\xi^L$  é definido globalmente sobre  $\mathbb{R} \times G$  e satisfaz*

$$\varphi_t^{\xi^L}(g) = g\delta(t)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $g \in G$ .

*Demonstração.* Basta mostrar que  $\beta(t) := g\delta(t) = L_g(\delta(t))$ , que é definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  pelo Lema 2.2.1 é a curva integral em  $\xi^L$  com condição inicial  $g$ . Isto segue da fórmula  $\frac{d\beta}{dt}(t) = (\xi^L)_{\delta(t)} = (L_{\delta(t)})_{*e}\xi$ , e do seguinte cálculo:

$$\frac{d\beta}{dt} = (L_g)_{*\delta(t)} \frac{d\delta}{dt} = (L_g)_{*\delta(t)} (L_{\delta(t)})_{*e}\xi = (L_{g\delta(t)})_{*e}\xi = (\xi^L)_{\beta(t)}.$$

A proposição segue. □

*Observação 2.2.3.* Tomando  $g = \varphi_s^{\xi^L}(e)$  na proposição anterior, deduzimos que:

$$\varphi_{t+s}^{\xi^L}(e) = \varphi_t^{\xi^L}(e)\varphi_s^{\xi^L}(e) = \varphi_s^{\xi^L}(e)\varphi_t^{\xi^L}(e),$$

para todos  $s, t \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.2.4.** A aplicação exponencial do grupo de Lie  $G$  é a aplicação:

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G,$$

definida por:

$$\exp(\xi) := \varphi_1^{\xi^L}(e).$$

**Proposição 2.2.5.** *(Propriedades da aplicação exponencial)*

- (1) A aplicação  $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$  é de classe  $C^\infty$ .
- (2) Para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $\xi \in \mathfrak{g}$ ,

$$\exp(t\xi) = \varphi_t^{\xi^L}(e).$$

- (3)  $\exp(0) = e$  e  $\exp_{*0} = Id_{\mathfrak{g}}$  (aplicação identidade de  $\mathfrak{g}$ ).

*Demonstração.* (1) Considere a aplicação

$$\begin{cases} \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{g} \longrightarrow G \times \mathfrak{g}, \\ (t, g, \xi) \longmapsto (g\varphi_t^{\xi^L}(e), \xi). \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Temos que:

$$\frac{d}{dt} \left( (g\varphi_t^{\xi^L}(e), \xi) \right) = \left( \frac{d}{dt} (g\varphi_t^{\xi^L}(e)), 0 \right).$$

Calculamos separadamente a primeira coordenada:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( g\varphi_t^{\xi^L}(e) \right) &= \frac{d}{dt} ((g e \delta(t))) = \frac{d}{dt} ((g\delta(t))) \\
&= \frac{d}{dt} L_g(\delta(t)) \\
&= (L_g)_{*\delta(t)} \dot{\delta}(t) \\
&= (L_g)_{*\delta(t)} (\xi^L)_{\delta(t)} \\
&= (L_g)_{*\delta(t)} (L_{\delta(t)})_{*e} \xi \\
&= (L_g \circ L_{\delta(t)})_{*e} \xi \\
&= (L_{g\delta(t)})_{*e} \xi \\
&= (\xi^L)_{g\delta(t)} \\
&= (\xi^L)_{g\varphi_t^{\xi^L}(e)}.
\end{aligned}$$

Assim temos que  $\frac{d}{dt} \left( g\varphi_t^{\xi^L}(e), \xi \right) = X_{g\varphi_t^{\xi^L}(e)}$ , onde  $X$  é o campo de vetores em  $G \times \mathfrak{g}$  definido por,

$$X_{(g,\xi)} = (\xi^L, 0),$$

o que mostra que a aplicação em (2.2.1) é o fluxo de  $X$ . Como  $X$  é de classe  $C^\infty$  então seu fluxo também é de classe  $C^\infty$ , e em particular a aplicação (2.2.1) é suave assim como a sua restrição ao conjunto  $\{1\} \times \{e\} \times \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}$ .

(2) Considere a seguinte curva  $\beta(s) := \varphi_{st}^{\xi^L}(e)$ , com  $t \in \mathbb{R}$  fixo. Veja que  $\beta(0) = \varphi_0^{\xi^L}(e) = e$ , e

$$\frac{d}{dt} \beta(s) = \frac{d}{ds} \varphi_{st}^{\xi^L}(e) = \frac{d}{ds} (\delta(st)) = t \frac{d\delta}{ds}(st) = t (\xi^L)_{\delta(st)} = t \xi_{\beta(s)}^L,$$

onde usamos o fato que  $\frac{d\delta}{ds}(st) = \xi_{\delta(st)}^L$ . Segue-se que  $\beta(s)$  é uma curva integral do campo  $t\xi^L = (t\xi)^L$  passando pelo ponto  $s = 0$ , donde

$$\beta(s) = \varphi_s^{t\xi^L}(e),$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Em particular para  $s = 1$ , obtemos

$$\beta(1) = \varphi_1^{(t\xi)^L}(e),$$

isto é,

$$\varphi_t^{\xi^L}(e) = \varphi_1^{t\xi^L}(e).$$

Pela definição 2.2.4, conclui-se que  $\varphi_t^{\xi^L}(e) = \exp(t\xi)$ .

(3) Temos que  $\exp(0) = \varphi_0^0(e) = e$  pela parte (2), e dado  $\xi \in \mathfrak{g}$ ,

$$\exp_{*0} \xi = \frac{d}{dt} \Big|_0 \exp(t\xi) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \varphi_t^{\xi^L}(e) = (\xi^L)_e = \xi.$$

A proposição segue □

*Observação 2.2.6.* Seja  $\xi \in \mathfrak{g}$ . Segue da proposição 2.2.5 que a aplicação

$$\begin{cases} (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G, \\ t \longmapsto \exp(t\xi), \end{cases}$$

é um homomorfismo, isto é

$$\begin{cases} \exp((t+s)\xi) = \exp(t\xi)\exp(s\xi), \\ \exp(0) = e. \end{cases}$$

Em particular, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(-t) = (\exp(t))^{-1}$ . Dizemos que  $\exp(t\xi)$  é um *subgrupo a 1-parâmetro*.

*Observação 2.2.7.* Poderíamos usar campos de vetores invariantes à direita para definir uma aplicação “exponencial a direita”, da seguinte forma

$$\exp_R(\xi) := \varphi_1^{\xi^R}(e).$$

Mostra-se que  $\exp_R = \exp$ .

*Observação 2.2.8.* Na proposição 2.2.5 parte (3) temos que  $\exp_{*0} = Id_{\mathfrak{g}}$ . Pelo teorema da função inversa  $\exp$  é um difeomorfismo local no ponto  $0 \in \mathfrak{g}$ . Logo podemos construir uma carta de  $G$  em  $e$ , usando a aplicação  $\exp^{-1}$ . Tal carta é chamada de *carta canônica* de  $G$ .

## 2.3 A Representação Adjunta

É natural se questionar depois da Secção 2.1: como calcular  $[\xi, \eta]$  sem usar os campos de vetores a esquerda? Para responder a essa pergunta introduzimos as seguintes aplicações. Dado  $g \in G$ , definimos a aplicação  $I_g : G \longrightarrow G$  por:

$$I_g(h) = ghg^{-1}.$$

Note que  $I_g = L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g$ . Como  $I_g(e) = e$ , temos que a derivada de  $I_g$  no ponto  $e$  é um endomorfismo de  $T_e G = \mathfrak{g}$ , denotado por:

$$Ad_g := (I_g)_{*e} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}. \quad (2.3.1)$$

Obtemos assim uma aplicação,

$$Ad : G \longrightarrow L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}); \quad g \mapsto Ad_g \quad (2.3.2)$$

chamada *representação Adjunta*.

**Proposição 2.3.1.** *A aplicação  $Ad : G \longrightarrow L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  é suave, e para todos  $g, h \in G$ , temos que  $Ad_e = Id_{\mathfrak{g}}$  e*

$$Ad_{gh} = Ad_g \circ Ad_h.$$

*Demonstração.* Dado  $g, h \in G$ , temos que

$$\begin{aligned} Ad_{gh} &= (I_{gh})_{*e} \\ &= (L_{gh} \circ R_{(gh)^{-1}})_{*e} \\ &= (L_{gh} \circ R_{h^{-1}g^{-1}})_{*e} \\ &= (L_g \circ L_h \circ R_{g^{-1}} \circ R_{h^{-1}})_{*e} \\ &= (L_g \circ R_{g^{-1}} \circ L_h \circ R_{h^{-1}})_{*e} \\ &= (L_g \circ R_{g^{-1}})_{*e} \circ (L_h \circ R_{h^{-1}})_{*e} \\ &= (I_g)_{*e} \circ (I_h)_{*e} = Ad_g \circ Ad_h. \end{aligned}$$

Além disso,

$$Ad_e = (I_e)_{*e} = (Id_G)_{*e} = Id_{\mathfrak{g}}.$$

O fato de  $Ad$  ser de classe  $C^\infty$  decorre da proposição A.3.1 no Apêndice.  $\square$

Logo, como a aplicação  $Ad : G \longrightarrow L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  é de classe  $C^\infty$ , pode-se derivar de novo no ponto  $e$ . Obtemos assim uma nova aplicação,

$$ad := Ad_{*e} : \mathfrak{g} \longrightarrow L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), \quad (2.3.3)$$

onde usamos a identificação  $T_A L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ . Dado  $\xi \in \mathfrak{g}$ , é habitual escrever “ $ad_\xi$ ” em vez de “ $ad(\xi)$ ”.

**Proposição 2.3.2.** *Para todo  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ , têm-se:*

$$[\xi, \eta] = ad_\xi(\eta).$$

*Demonstração.* Temos que (veja Apêndice A.2):

$$[\xi, \eta] = [\xi^L, \eta^L]_e = \frac{d}{dt} (\varphi_{-t}^{\xi^L})_{\varphi_t^{\xi^L}(e)} (\eta^L)_{\varphi_t^{\xi^L}(e)},$$

onde  $\varphi_t^{\xi^L}$  é o fluxo do campo  $\xi^L$ . Por definição de  $\eta^L$ , temos que:

$$(\eta^L)_g = (L_g)_{*e} \eta.$$

Daí,

$$[\xi, \eta] = \frac{d}{dt} \Big|_0 (\varphi_{-t}^{\xi^L})_{\varphi_t^{\xi^L}(e)} (L_{\varphi_t^{\xi^L}(e)})_{*e} \eta = \frac{d}{dt} \Big|_0 (\varphi_{-t}^{\xi^L} \circ L_{\varphi_t^{\xi^L}(e)})_{*e} \eta. \quad (2.3.4)$$

Pela Proposição 2.2.2,  $\varphi_t^{\xi^L}(g) = g\delta(t) = R_{\delta(t)}(g)$  para todo  $g \in G$ , isto é,  $\varphi_t^{\xi^L} = R_{\delta(t)}$ , e pela observação 2.2.6,  $\delta(-t) = \delta(t)^{-1}$ . Voltando para (2.3.4), obtemos então:

$$\begin{aligned}
[\xi, \eta] &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\varphi_t^{\xi^L} \circ L_{\varphi_t^{\xi^L}})_{*e} \eta \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (R_{\delta(-t)} \circ L_{\delta(t)})_{*e} \eta \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (R_{\delta(t)^{-1}} \circ L_{\delta(t)})_{*e} \eta \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (I_{\delta(t)})_{*e} \eta \\
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 Ad_{\delta(t)} \eta \\
&= ad_{\delta(0)}(\xi) \\
&= ad_{\xi} \eta
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

o que prova a proposição (a igualdade (2.3.5) decorre da proposição A.3.1s no Apêndice).  $\square$

**Exemplo 2.3.3.** (Grupo de Lie comutativo) Um grupo de Lie é *comutativo* se para todos  $g, h \in G$  tem-se:

$$gh = hg.$$

Nesse caso, temos que  $I_g$  é a aplicação identidade de  $G$ , isto é,  $Ad_g = I_g$ , o que implica que

$$[\xi, \eta] = ad_{\xi}(\eta) = (Ad_{*e}\xi)(\eta) = 0,$$

pois  $Ad$  é uma aplicação constante. Por exemplo  $\mathbb{R}^n$  e o toro  $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$  são comutativos.

**Exemplo 2.3.4.** (Grupo linear  $GL(n, \mathbb{R})$ ) Para calcular o colchete de Lie do grupo linear, note que:

1. Dada  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ,  $(I_A)_{*I} = I_A$ , pois  $I_A$  é a restrição ao conjunto  $GL(n, \mathbb{R})$  da aplicação linear,

$$\begin{cases} M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow M(n, \mathbb{R}), \\ B \mapsto ABA^{-1}. \end{cases}$$

2. Dado  $\eta \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , temos que

$$Ad_A(\eta) = (I_A)_{*I} \eta = I_A \eta = A\eta A^{-1},$$

3. Se  $\xi \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  então,

$$i_{*I}\xi = -\xi, \tag{2.3.6}$$

onde  $i : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}), A \mapsto A^{-1}$ . Isso é uma consequência da fórmula

$$i_{*g} u = -(L_{g^{-1}} \circ R_{g^{-1}})_{*g} u,$$

(veja Lema 2.1.4) e do fato que  $(L_{g^{-1}} \circ R_{g^{-1}})_{*g} = L_{g^{-1}} \circ R_{g^{-1}}$  no caso particular  $G = GL(n, \mathbb{R})$ .

Usando (2) e (3) e uma curva  $\delta(t)$  tal que  $\delta(0) = I$  e  $\dot{\delta}(0) = \xi$ , obtemos:

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= ad_{\xi}(\eta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 Ad_{\delta(t)} \eta = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \delta(t) \eta(t) (\delta(t))^{-1} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (R_{\eta(\delta(0))^{-1}})(\delta(t)) + \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (L_{\delta(0)\eta} \circ i)(\delta(t)) \\ &= (R_{\eta})_{*I} \xi - (L_{\eta})_{*I} \xi. \end{aligned}$$

Como as aplicação  $R_{\eta}$  e  $L_{\eta}$  são as restrições de duas aplicações lineares, temos então que:

$$(R_{\eta})_{*I} \xi = \xi \eta \text{ e } (L_{\eta})_{*I} \xi = \eta \xi.$$

Portanto,

$$[\xi, \eta] = \xi \eta - \eta \xi, \quad (2.3.7)$$

que é o colchete de Lie de  $GL(n, \mathbb{R})$  procurado.

**Exemplo 2.3.5.** Sejam  $G_1, \dots, G_n$  um número finito de grupos de Lie com álgebras de Lie  $(\mathfrak{g}_1, [\cdot]_{\mathfrak{g}_1}), \dots, (\mathfrak{g}_n, [\cdot]_{\mathfrak{g}_n})$ . Um cálculo direto usando as representações adjuntas de cada grupo de Lie mostra que o colchete de Lie do produto cartesiano  $G = G_1 \times \dots \times G_n$  é dada por:

$$[(\xi_1, \dots, \xi_n), (\eta_1, \dots, \eta_n)] := ([\xi_1, \eta_1]_{\mathfrak{g}_1}, \dots, [\xi_n, \eta_n]_{\mathfrak{g}_n}),$$

onde  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  e  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  pertencem à  $Lie(G) = \mathfrak{g}_1 \times \dots \times \mathfrak{g}_n$ .

Seja  $M(n, \mathbb{R})$  o espaço das matrizes reais de tamanho  $n \times n$ . Definimos o *exponencial* de  $A \in M(n, \mathbb{R})$  como sendo a série:

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k. \quad (2.3.8)$$

Usando a norma *operacional* em  $M(n, \mathbb{R})$ , vê-se que (2.3.8) converge absolutamente, o que implica que  $e^A$  está bem definido para todo  $A \in M(n, \mathbb{R})$ . Além disso, a aplicação  $M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}), A \mapsto e^A$  é a aplicação exponencial do grupo de Lie  $GL(n, \mathbb{R})$ . Esse fato decorre de:

**Exemplo 2.3.6.** (1) a aplicação  $\delta : t \mapsto e^{tA}$  é a única solução do sistema  $\dot{\delta}(t) = A\delta(t)$  (é um fato bem conhecido no contexto das Equações Diferenciais Ordinárias) e

$$(2) \text{ se } A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \text{ então } (A^L)_B = AB.$$

Segue de (1) e (2) que  $e^{tA}$  é uma curva integral de  $A^L$  passando por  $I$  quando  $t = 0$ . Logo  $exp(A) = \delta(1) = e^{1A} = e^A$ .



## 2.4 Homomorfismos

**Definição 2.4.1.** Sejam  $G$  e  $H$  dois grupos de Lie.

(a) Um homomorfismo  $f : G \rightarrow H$  é chamado *homomorfismo de grupos de Lie* se  $f$  é de classe  $C^\infty$

(b) Um homomorfismo de grupos de Lie  $f : G \rightarrow H$  é um *isomorfismo* de grupos se é bijetora e se a aplicação inversa  $f^{-1}$  é homomorfismo de grupos de Lie.

**Proposição 2.4.2.** (*Derivada de um homomorfismo*) Sejam  $G, H$  dois grupos de Lie, com álgebras de Lie  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ , respectivamente. Se  $f : G \rightarrow H$  é um homomorfismo de grupos de Lie, então  $f_{*e} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  é um homomorfismo de álgebra de Lie, isto é, é linear e satisfaz

$$f_{*e} [\xi, \eta] = [f_{*e}\xi, f_{*e}\eta],$$

para todos  $\xi, \eta$  em  $\mathfrak{g}$ . Além disso, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{f_{*e}} & \mathfrak{h} \\ \exp_G \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

isto é,  $\exp_H \circ f_{*e} = f \circ \exp_G$ , onde  $\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow G$  e  $\exp_H : \mathfrak{h} \rightarrow H$  são aplicações exponenciais dos grupos  $G$  e  $H$ , respectivamente.

*Demonstração.* Como  $f$  é um homomorfismo temos que para todo  $g \in G$ ,  $f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$ . Calculando a derivada no elemento neutro na direção  $\xi \in \mathfrak{g}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} (f \circ L_g)_{*e} \xi &= (L_{f(g)} \circ f)_{*e} \xi \\ \Rightarrow f_{*g} (L_g)_{*e} \xi &= (L_{f(g)})_{*f(e)} f_{*e} \xi \\ \Rightarrow f_{*g} (\xi^L)_g &= (f_{*e} \xi)_{f(g)}^L, \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

o que mostra que  $\xi^L$  e  $(f_{*e}\xi)^L$  são  $f$ -relacionados. Logo os campos de vetores de  $[\xi^L, \eta^L]$  e  $[(f_{*e}\xi^L), (f_{*e}\eta^L)]$  são  $f$ -relacionados também (é uma propriedade geral do colchete de Lie para campos de vetores, veja no apêndice ??). Portanto, para todo  $g \in G$ , tem-se

$$f_{*g} [\xi^L, \eta^L]_g = \left[ (f_{*e}\xi)^L, (f_{*e}\eta)^L \right]_e.$$

Por definição do colchete de Lie da álgebra de Lie conclui-se que  $f_{*e} [\xi, \eta] = [f_{*e}\xi, f_{*e}\eta]$ .

Vamos mostrar que  $\exp_h \circ f_{*e} = f \circ \exp_G$ . Escolhemos  $\xi \in \mathfrak{g}$  e consideramos a curva  $\delta(t) := f(\exp_G(t\xi))$ . Temos que  $\delta(0) = e$  e que

$$\frac{d}{dt} \delta(t) = \frac{d}{dt} (f(\exp_G(t\xi))) = f_{*\exp(t\xi)} (\xi)_{\exp(t\xi)}^L. \tag{2.4.2}$$

Essa ultima igualdade é justificada pela Proposição 2.2.5. Usando a equação (2.4.1) na equação (2.4.2), obtemos que:

$$\frac{d}{dt}\delta(t) = (f_{*e}\xi)_{f(\exp_G(t\xi))}^L = (f_{*e}\xi)_{\delta(t)}^L.$$

Isto significa que  $\delta(t)$  é a curva integral do campo  $(f_{*e}\xi)^L$  satisfazendo  $\delta(0) = e$ , donde  $\delta(1) = \exp_H(f_{*e}\xi)$ , e portanto,

$$f(\exp_G(\xi)) = \exp_H(f_{*e}\xi).$$

□

**Exemplo 2.4.3.** A aplicação determinante

$$\det : \begin{cases} GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*, \\ A \longrightarrow \det(A), \end{cases}$$

é um homomorfismo de grupos de Lie, cuja derivada é dada por:

$$\det_{*A}B = \det(A)\text{Tr}(A^{-1}B),$$

onde  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  e  $B \in T_A GL(n, \mathbb{R}) \cong L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

Portanto, pela proposição anterior obtemos a seguinte fórmula:

$$\det(\exp(B)) = e^{\text{Tr}(B)},$$

onde  $B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

**Corolário 2.4.4.** Para todo  $g \in G$  e todos  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ , temos que

1.  $\exp(\text{Ad}_g\xi) = g(\exp(\xi))g^{-1}$ ,
2.  $\text{Ad}_g[\xi, \eta] = [\text{Ad}_g\xi, \text{Ad}_g\eta]$  (Homomorfismo de álgebras de Lie).

*Demonstração.* Decorre da proposição anterior aplicada ao homomorfismo  $I_g : G \longrightarrow G$ ,  $h \mapsto ghg^{-1}$ . □

**Corolário 2.4.5.** Seja  $G$  um grupo de Lie. Então o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}} & \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \\ \exp_G \downarrow & & \downarrow e \\ G & \xrightarrow[\text{Ad}]{} & GL(\mathfrak{g}) \end{array}$$

onde,  $e : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ ,  $M \mapsto \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} M^k$ , é a aplicação exponencial do grupo  $GL(\mathfrak{g})$ . Assim, para todo  $\xi \in \mathfrak{g}$ , têm-se,

$$\text{Ad}_{\exp_G(\xi)} = e^{\text{ad}_\xi}.$$

*Demonstração.* Decorre da proposição 2.4.2, do fato de  $\text{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$  ser um homomorfismo de Lie e da fórmula  $\text{Ad}_{*e} = \text{ad}$ . □

## 2.5 Subgrupos de Lie

Nesta secção serão estudados os subgrupos de Lie, que são subgrupos de grupos de Lie, e ao mesmo tempo grupos de Lie com uma estrutura de subvariedade. A álgebra de Lie de um subgrupo de Lie é uma subálgebra da álgebra de Lie do grupo ambiente.

**Definição 2.5.1.** Seja  $G$  um grupo de Lie. Dizemos que o par  $(H, i)$  é um *subgrupo de Lie* se,

- $H$  é um grupo de Lie,
- $i : H \rightarrow G$  é um homomorfismo injetivo de grupos de Lie.

**Definição 2.5.2.** Um *subgrupo de Lie fechado*, ou *regular*, de  $G$  é um subgrupo de Lie  $(H, i)$  de  $G$  tal que:

- $H$  é um subgrupo de  $G$ ,
- $i$  é a aplicação inclusão,
- $i$  é um mergulho.

**Lema 2.5.3.** *Seja  $(H, i)$  um subgrupo de Lie de  $G$ . Então  $i : H \rightarrow G$  é uma imersão.*

*Demonstração.* Por definição,  $i$  é um homomorfismo. Logo, dados  $g, h \in G$ ,

$$(i \circ L_g)(h) = i(gh) = i(g)i(h) = (L_{i(g)} \circ i)(h),$$

ou seja,  $i \circ L_g = L_{i(g)} \circ i$ . Portanto,

$$(i \circ L_g)_{*e} = (L_{i(g)} \circ i)_{*e} \Rightarrow i_{*g}(L_g)_{*e} = (L_{i(g)})_{*e} i_{*e}.$$

As aplicações  $L_g$  e  $L_{i(g)}$  sendo dois difeomorfismos, temos que  $(L_g)_{*e}$  e  $(L_{i(g)})_{*e}$  são dois isomorfismos lineares, donde,  $i_{*g}$  é injetiva se e somente se  $i_{*e}$  é injetiva.

Para mostrar que  $i_{*e} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$  é injetiva, consideramos  $\xi \in \mathfrak{h}$  tal que  $i_{*e}\xi = 0$ . Devemos mostrar que  $\xi = 0$ . Escolhemos um conjunto aberto  $U \subseteq \mathfrak{h}$  contendo  $0$  tal que

$$\exp|_U : U \rightarrow H,$$

é um difeomorfismo. Escolhemos também  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  tal que  $\lambda\xi \in U$  ( $\lambda$  existe, pois  $0 \in U$  e a aplicação  $\mathbb{R} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ ,  $(r, u) \mapsto ru$  é contínua em  $(0, \xi)$ ). Pela proposição 2.4.2, temos que  $\exp_G \circ i_{*e} = i \circ \exp_H$ , donde,

$$e = \exp_G(\lambda 0) = \exp_G(\lambda i_{*e}(\xi)) = i(\exp_H(\lambda\xi)).$$

Pelo fato de  $i$  ser injetiva, obtemos  $\exp_H(\lambda\xi) = e$ , e como  $\lambda\xi \in U$  onde  $\exp_H$  é um difeomorfismo, concluímos que  $\lambda\xi = 0_{\mathfrak{h}}$ . O número  $\lambda$  sendo diferente de zero,  $\xi = 0_{\mathfrak{h}}$ . Assim  $i_{*e}$  é injetiva o que prova o Lema.  $\square$

A seguir, indentificaremos  $\mathfrak{h}$  com  $i_{*e}\mathfrak{h}$  e  $H$  com  $i(H)$ .

**Definição 2.5.4.** Seja  $(\mathfrak{g}, [ , ])$  uma álgebra de Lie. Um subespaço  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  é uma *subálgebra* de Lie se para todos  $\xi, \eta, [\xi, \eta] \in \mathfrak{h}$ .

**Lema 2.5.5.** *Seja  $(H, i)$  um subgrupo de Lie de  $G$ . Então  $\mathfrak{h}$  é uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$ . Além disso,*

$$\mathfrak{h} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \exp_G(t\xi) \in H, \forall t \in \mathbb{R}\}. \quad (2.5.1)$$

*Demonstração.* Pela proposição 2.4.2, temos que  $i_{*e} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$  é um homomorfismo de álgebra de Lie, isto é

$$i_{*e}[\xi, \eta] = [i_{*e}\xi, i_{*e}\eta],$$

para todos  $\xi, \eta \in \mathfrak{h}$ . Sob as nossas identificações, isso significa exatamente que  $\mathfrak{h}$  é uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$ .

Para provar (2.5.1), considere  $\xi \in \mathfrak{h}$ . Dado  $t \in \mathbb{R}$  arbitrário, temos que:

$$\begin{aligned} (i \circ \exp_H)(t\xi) &= (\exp_G \circ i_{*e})(t\xi) \\ \Rightarrow i(\exp_H(t\xi)) &= \exp_G(t i_{*e}\xi) \\ \Rightarrow \exp_G(t i_{*e}\xi) &\in i(H). \end{aligned}$$

Identificando  $\mathfrak{h}$  com  $i_{*e}\mathfrak{h}$  e  $H$  com  $i(H)$  temos então que

$$h \subseteq \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \exp_G(t\xi) \in H, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Reciprocamente, considere  $\xi \in \mathfrak{g}$  tal que  $\exp_G(t\xi) \in H$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Como  $H \subseteq G$  é uma subvariedade imersa, temos que a derivada da curva suave  $\mathbb{R} \rightarrow G, t \mapsto \exp_G(t\xi)$  satisfaz

$$\frac{d}{dt}(\exp_G(t\xi)) \in T_{\exp_G(t\xi)}H,$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Em particular em  $t = 0$ ,  $(\exp_G)_{*0}\xi \in T_eH$ , e como  $(\exp_G)_{*0} = Id_{\mathfrak{g}}$ , obtemos então

$$\xi \in T_eH = \mathfrak{h}.$$

Isso mostra a outra inclusão e consequentemente (2.5.1).  $\square$

**Teorema 2.5.6.** *Seja  $G$  um grupo de Lie e seja  $(H, i)$  um subgrupo de Lie fechado. Então  $H$  é um subconjunto fechado em  $G$  (no sentido topológico).*

Esse resultado é de fato curioso pois em geral nem toda subvariedade é fechada. Para provar este Teorema precisamos do seguinte Lema:

**Lema 2.5.7.** *Seja  $G$  um grupo de Lie e seja  $U \subseteq G$  uma vizinhança aberta de  $e$ . Então existe um subconjunto aberto  $V \subseteq G$  tal que  $V \subseteq U$  e*

- (a)  $VV \subseteq U$ , onde  $VV := \{gh \in G \mid g, h \in V\}$ ,
- (b)  $V = V^{-1}$ , onde  $V^{-1} := \{g^{-1} \in G \mid g \in V\}$

*Demonstração.* Pela continuidade da multiplicação  $m : G \times G \longrightarrow G$ , existem duas vizinhanças abertas  $U_1$  e  $U_2$  de  $e$  em  $G$  tal que  $U_1 U_2 \subseteq U$ . Defina  $W := U_1 \cap U_2$  e  $V := W \cap W^{-1}$ . Note que  $V^{-1} = (W \cap W^{-1})^{-1} = W^{-1} \cap (W^{-1})^{-1} = W^{-1} \cap W = V$  e que  $V$  é uma vizinhança aberta contendo  $e$ . Além disso, temos que  $VV \subseteq WW \subseteq U_1 U_2 \subseteq U$ . Isso mostra (a) e (b).

O fato de que  $V$  esteja contido em  $U$  é uma consequência direta de (a):  $V \subseteq V\{e\} \subseteq VV \subseteq U$ . O lema segue.  $\square$

Esse Lema se generaliza ao caso dos “grupos topológicos” (veja [1]).

*Demonstração.* (Prova o Teorema 2.5.6) Seja  $g \in \overline{H}$  arbitrário e seja  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência de pontos de  $H$  que converge para  $g$ . Por hipótese  $H$  é uma subvariedade de  $G$ . Portanto existem cartas  $(U, \varphi)$  de  $G$  contendo  $e$  e dois conjuntos abertos  $A_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $A_2 \subseteq \mathbb{R}^{m-n}$  ( $n = \dim(H)$  e  $m = \dim(G)$ ) tal que  $\varphi(U) = A_1 \times A_2$  e

$$\varphi(U \cap H) = A_1 \times \{0_{\mathbb{R}^{m-n}}\}. \quad (2.5.2)$$

Seja  $W$  um subconjunto aberto de  $G$  contendo  $e$  tal que  $\overline{W} \subseteq U$ .

Pelo Lema 2.5.7, existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $e$  em  $G$  tal que  $V \subseteq W$ ,  $V = V^{-1}$  e  $VV \subseteq W$ . Como  $(g^{-1}h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge para  $e$ , podemos assumir sem perda de generalidade que  $g^{-1}h_k \in V$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Isso implica em particular que para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$h_0^{-1}h_k = (g^{-1}h_0)^{-1}(g^{-1}h_k) \in V^{-1}V = VV \subseteq W. \quad (2.5.3)$$

Seja  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  a sequência cujo termo geral é  $z_k := h_0^{-1}h_k$ . A equação (2.5.3) implica que:

(1)  $z_k \in W \cap H \subseteq U \cap H$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Denotando por  $\{x_1, \dots, x_m\}$  as coordenadas locais de  $(U, \varphi)$  e levando em conta (2.5.2), temos que:

$$\varphi(z_k) = (x_1(z_k), \dots, x_n(z_k), 0, \dots, 0), \quad (2.5.4)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

(2) O limite de  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  é dado por  $h_0^{-1}g$  que pertence a  $\overline{W}$  e portanto pertence a  $U$ . Assim podemos considerar a sua expressão local:

$$\varphi(h_0^{-1}g) = (x_1(h_0^{-1}g), \dots, x_n(h_0^{-1}g), x_{n+1}(h_0^{-1}g), \dots, x_m(h_0^{-1}g)). \quad (2.5.5)$$

Como  $(\varphi(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge para  $\varphi(h_0^{-1}g)$ , a comparação das equações (2.5.4) e (2.5.5) nos dá:

$$x_n(h_0^{-1}g) = \dots = x_m(h_0^{-1}g) = 0,$$

donde  $\varphi(h_0^{-1}g) \in A_1 \times \{0_{\mathbb{R}^{m-n}}\}$ . Isto significa que  $h_0^{-1}g \in U \cap H$  e, portanto  $h_0^{-1}g \in H$ . Multiplicando por  $h_0$ , obtemos  $g \in H$ . O teorema segue.  $\square$

*Observação 2.5.8.* A recíproca do Teorema 2.5.6 é verdadeira, isto é: se um subgrupo  $H$  de um grupo de Lie  $G$  é topologicamente fechado, então  $H$  é um subgrupo de Lie fechado. Esta afirmação é forte pois temos apenas a hipótese de que  $H$  é um subgrupo de um grupo de Lie  $G$  que é fechado. Uma demonstração deste fato se encontra no livro “*Introduction to Smooth Manifolds*” (veja [11]). Na literatura este teorema é chamado de “*Lie’s Third Fundamental Theorem*”.

*Observação 2.5.9.* Um outro resultado importante é o seguinte. Seja  $G$  um grupo de Lie e  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ . Então existe um único subgrupo de Lie  $(H, i)$ , onde  $i$  é a aplicação inclusão tal que  $\text{Lie}(H) = \mathfrak{h}$ . Uma demonstração encontra-se por exemplo em [1].

Terminamos essa seção com alguns exemplos de grupos de Lie.

**Exemplo 2.5.10.** Como já vimos, o grupo linear  $GL(n, \mathbb{R})$  é um grupo de Lie de dimensão  $n^2$  cuja álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  é o espaço das matrizes reais de tamanho  $n \times n$ , munido do colchete de Lie  $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$ , onde  $\xi, \eta \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ .

O grupo  $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n^2}$ , logo não é compacto. Além disso, a imagem da aplicação contínua  $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  não é conexa (sendo igual a  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ), e portanto  $GL(n, \mathbb{R})$  não é conexo.

**Exemplo 2.5.11.** O Grupo especial linear é o conjunto

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$

É um subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$  e uma subvariedade de  $GL(n, \mathbb{R})$  de dimensão  $n^2 - 1$ , pois  $SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$  e  $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma submersão, em virtude da fórmula

$$\det_{*A} B = \det(A) \cdot \text{Tr}(A^{-1}B).$$

Segue-se que  $SL(n, \mathbb{R})$  é um subgrupo de Lie fechado de  $GL(n, \mathbb{R})$  (Note que a multiplicação  $SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R}) \rightarrow SL(n, \mathbb{R})$ ,  $(A, B) \mapsto AB$  é suave, pois é a restrição da multiplicação  $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  que também é suave.

A sua álgebra de Lie é o espaço  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = T_{I_n} SL(n, \mathbb{R}) = \ker \det_{*I_n} = \ker(\text{traço})$ , donde,

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{\xi \in M(n, \mathbb{R}) \mid \text{tr}(\xi) = 0\},$$

com o colchete de Lie induzido por  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ :  $[\xi, \eta] := \xi\eta - \eta\xi$  (note que, como  $H \subseteq G$  é um subgrupo de Lie, pelo Teorema 2.5.9  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  é uma subálgebra de Lie).

O grupo  $SL(n, \mathbb{R})$  não é compacto. Com efeito para todo  $t \in \mathbb{R}$ , a matriz

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & t \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pertence a  $SL(n, \mathbb{R})$ , mas sua norma de Frobenius, que é dada por:

$$\|A_t\| = \sqrt{\text{tr}(A^t A)} = \sqrt{n^2 + t^2},$$

tende para  $\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Assim, o conjunto  $SL(n, \mathbb{R})$  não é limitado, e portanto não é compacto. Além disso mostra-se que  $SL(n, \mathbb{R})$  é conexo (veja [??]).

**Exemplo 2.5.12.** O Grupo Ortogonal  $O(n)$  é o conjunto das matrizes

$$O(n) := \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = I_n\},$$

onde  ${}^t A$  denota a transposta de  $A$ ; é claramente um subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$ . Considere a aplicação:

$$\phi : \begin{cases} GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow S(n, \mathbb{R}), \\ A \longmapsto AA^t, \end{cases}$$

onde  $S(n, \mathbb{R}) := \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A = A^t\}$  (matrizes simétricas). Note que  $O(n) = \phi^{-1}(I_n)$  e que  $\phi$  é suave.

Afirmamos que  $I_n$  é um valor regular de  $\phi$  (isto é  $\phi_{*A}$  é sobrejetiva para todo  $A \in \phi^{-1}(I_n)$ ). Com efeito, seja  $A \in \phi^{-1}(I_n) = O(n)$ . Dado  $B \in T_A GL(n, \mathbb{R}) \simeq M(n, \mathbb{R})$ , temos que:

$$\begin{aligned} \phi_{*A} B &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \phi(A + tB) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (A + tB)(A + tB)^t \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (AA^t + tAB^t + tBA^t + t^2 BB^t) \\ &= AB^t + BA^t. \end{aligned}$$

Em particular, dado  $C \in S(n, \mathbb{R})$  arbitrário, podemos observar que:

$$\begin{aligned} \phi_{*A} \left( \frac{1}{2} CA \right) &= A \left( \frac{1}{2} CA \right)^t + \left( \frac{1}{2} CA \right) A^t \\ &= \frac{1}{2} AA^t C^t + \frac{1}{2} C AA^t \\ &= \frac{1}{2} C^t + \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} C = C. \end{aligned}$$

Segue-se que  $\phi_{*A} : T_A GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow S(n, \mathbb{R})$  é sobrejetiva, o que mostra que  $I_n$  é um valor regular de  $\phi$ .

Concluimos que  $O(n)$  é uma subvariedade de  $GL(n, \mathbb{R})$  de dimensão:

$$\begin{aligned} \dim O(n) &= \dim GL(n, \mathbb{R}) - \dim S(n, \mathbb{R}) \\ &= n^2 - \left( n + \frac{n^2 - n}{2} \right) = \frac{n}{2}(n - 1). \end{aligned}$$

Além disso  $O(n)$  é um subgrupo de Lie fechado de  $GL(n, \mathbb{R})$  com álgebra de Lie:

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}(n) &= \ker \phi_{*I_n} \\ &= \{ \xi \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \xi^t = -\xi \}, \end{aligned}$$

munido do colchete de Lie habitual.

A norma de Frobenius de  $A \in O(n)$  é dada por:

$$\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^t A)} = \sqrt{\operatorname{tr}(I_n)} = \sqrt{n}.$$

Então,  $O(n)$  é limitado. Como  $O(n) = \phi^{-1}(I_n)$ , então  $O(n)$  é fechado e portanto compacto. Além disso temos que  $O(n)$  não é conexo, pois  $\det(O(n)) = \{\pm 1\}$  que não é conexo.

**Exemplo 2.5.13.** *Os análogos complexos,*

- $GL(n, \mathbb{C}) := \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\}$ ,
- $SL(n, \mathbb{C}) := \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ ,
- $U(n) := \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid AA^* = I_n\}$ , onde  $(A^*)_{i,j} := \overline{A_{j,i}}$ ,
- $SU(n) := \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$ ,

são todos grupos de Lie de dimensão  $2n^2$ ,  $2(n^2 - 1)$ ,  $n^2$ ,  $n^2 - 1$ , respectivamente, com álgebras de Lie:

- $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) := M(n, \mathbb{C})$ ,
- $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) := \{ \xi \in M(n, \mathbb{C}) \mid \operatorname{tr}(\xi) = 0 \}$ ,
- $\mathfrak{u}(n) := \{ \xi \in M(n, \mathbb{C}) \mid \xi^* = -\xi \}$ ,
- $\mathfrak{su}(n) := \{ \xi \in M(n, \mathbb{C}) \mid \xi^* = -\xi \text{ e } \operatorname{tr}(\xi) = 0 \}$ ,

todas sendo munidas do colchete de Lie  $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$ .



## 2.6 Ação de grupos de Lie

**Definição 2.6.1.** Seja  $M$  uma variedade e seja  $G$  um grupo de Lie. Uma ação à esquerda de  $G$  sobre  $M$  é uma aplicação suave  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  que satisfaz, para todo  $g, h \in G$ , as seguintes condições:

- (a)  $\Phi(e, p) = p$ ,
- (b)  $\Phi(g, \Phi(h, p)) = \Phi(gh, p)$ .

*Observação 2.6.2.* Usaremos às vezes a notação  $g.p$  em vez de  $\Phi(g, p)$ .

*Observação 2.6.3.* Analogamente, defini-se uma ação à direita como sendo uma aplicação suave  $\Psi : M \times G \rightarrow M$ , que satisfaz  $\Psi(p, e) = p$  e  $\Psi(\Psi(p, g), h) = \Psi(p, gh)$ , para todos  $g, h \in G$ , e todo  $p \in M$ .

*Observação 2.6.4.* Dada uma ação  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  e dados  $p \in M$  e  $g \in G$ , denotaremos por  $\Phi_p$  e  $\Phi_g$  as aplicações:

$$\begin{aligned}\Phi_p : G &\rightarrow M, & g &\mapsto \Phi(g, p), \\ \Phi_g : M &\rightarrow M, & p &\mapsto \Phi(g, p).\end{aligned}$$

Elas são suaves, pois  $\Phi_p = \Phi \circ i_p$  e  $\Phi_g = \Phi \circ j_g$ , onde  $i_p$  e  $j_g$  são aplicações suaves  $G \rightarrow G \times M$ ,  $g \mapsto (g, p)$  e  $M \rightarrow G \times M$ ,  $p \mapsto (g, p)$ , respectivamente.

*Observação 2.6.5.* Para todo  $g \in G$ , a aplicação

$$\Phi_g : M \rightarrow M, \quad p \mapsto \Phi(g, p),$$

é um difeomorfismo, cujo inverso é dado por  $\Phi_{g^{-1}}$ , isto é,  $(\Phi_g)^{-1} = \Phi_{g^{-1}}$ .

*Observação 2.6.6.* A aplicação  $G \rightarrow \text{Diff}(M)$ ,  $g \mapsto \Phi_g$ , é um homomorfismo de grupos, onde  $\text{Diff}(M)$  é o grupo dos difeomorfismos de  $M$ .

*Observação 2.6.7.* Se  $M = V$  é um espaço vetorial e se  $\Phi_g \in GL(V)$  para todo  $g \in G$ , diz-se então que  $\Phi$  é uma *representação* de  $G$  (a representação adjunta  $G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ ,  $g \mapsto \text{Ad}_g := (I_g)_*e$  é um exemplo de representação de  $G$ ).

**Exemplo 2.6.8.** A aplicação

$$\Phi : GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (A, u) \mapsto Au,$$

é uma ação de  $GL(n, \mathbb{R})$  sobre  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 2.6.9.** O círculo unitário,

$$S^1 := \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R}\},$$

é naturalmente um grupo de Lie (em relação ao produto complexo), que atua em  $\mathbb{C}^n$ , pela fórmula:

$$e^{i\theta} \cdot (z_1, \dots, z_n) := (e^{i\theta} z_1, \dots, e^{i\theta} z_n).$$

**Exemplo 2.6.10.** O fluxo  $\varphi_t^X : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  de um campo de vetores completo define uma ação de  $(\mathbb{R}, +)$  sobre  $M$  pela fórmula

$$t.p := \varphi_t^X(p).$$

**Definição 2.6.11.** Seja  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  uma ação de um grupo de Lie  $G$ .

(a) A *órbita* de  $p \in M$  é o conjunto

$$Orb(p) := \{\Phi(g, p) \in M \mid g \in G\}.$$

Às vezes escreve-se também  $G.p$  em vez de  $Orb(p)$ .

(b) O *estabilizador* de  $p \in M$  é o subgrupo de  $G$  definido por:

$$G_p := \{g \in G \mid \Phi(g, p) = p\}.$$

(c) Um ponto fixo  $p \in M$  é um ponto fixo pela ação  $\Phi$  se  $\Phi(g, p) = p$  para todo  $g \in G$ , ou seja, se  $G_p = G$ .

**Proposição 2.6.12.** Dado  $p \in M$ , o conjunto  $G_p$  é um subgrupo de Lie fechado de  $G$  cuja álgebra de Lie é dada por:

$$\mathfrak{g}_p = \{\xi \in \mathfrak{g} = Lie(G) \mid (\Phi_p)_{*e} \xi = 0\}. \quad (2.6.1)$$

*Demonstração.* O conjunto  $G_p = (\Phi_p)^{-1} \{p\}$  é fechado, e portanto pela observação 2.5.8  $G_p$  é um subgrupo de Lie fechado de  $G$ , e pelo lema 2.5.5, temos que:

$$\mathfrak{g}_p = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid exp(t\xi) \in G_p, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Seja então  $\xi \in \mathfrak{g}$  tal que  $exp(t\xi) \in G_p$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Temos que:

$$(\Phi_p)_{*e} \xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi_p(exp(t\xi)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 p = 0,$$

o que implica  $\{\xi \in \mathfrak{g} \mid exp(t\xi) \in G_p, \forall t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathfrak{g}_p$ . Reciprocamente, suponha que  $\xi \in \mathfrak{g}$  satisfaça  $(\Phi_p)_{*e} \xi = 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right| \Phi_p(exp(t\xi)) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_0 \Phi(exp(t+s)\xi, p) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_0 \Phi_{exp(t\xi)} \circ \Phi_p \circ exp(s\xi) \\ &= (\Phi_{exp(t\xi)})_{*p} (\Phi_p)_{*e} \xi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim,  $\Phi_p(exp(t\xi)) = constante = \Phi_p(exp(0.\xi)) = p$ , o que significa que  $exp(t\xi) \in G_p$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Definição 2.6.13.** Uma ação  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  é dita,

- (a) *livre*: se  $G_p = \{e\}$  para todo  $p \in M$ ;
- (b) *transitiva*: se existir  $p \in M$  tal que  $Orb(p) = M$ .

*Observação 2.6.14.* Uma ação  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  é livre, se somente se, para todo  $g \in G$  e todo  $p \in M$  tais que  $\Phi(p, g) = p$ , então  $g = e$ .

*Observação 2.6.15.* Uma ação  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  é transitiva, se somente se, para todos  $p, q \in M$ , existe  $g \in G$  tal que

$$q = \Phi(g, p).$$

*Observação 2.6.16.* Se  $\Phi$  é transitiva, então para todos  $p, q \in M$ ,  $Orb(p) = Orb(q) = M$ .

**Exemplo 2.6.17.** A ação natural de  $GL(n, \mathbb{R})$  sobre  $\mathbb{R}^n$  não é transitiva, pois  $Orb(0) = \{0\} \neq \mathbb{R}^n$ , e não é livre pois  $GL(n, \mathbb{R})_0 = GL(n, \mathbb{R}) \neq I_n$ . Em geral se  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , então  $Orb(v) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e o estabilizador é dada por:

$$GL(n, \mathbb{R})_v := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid 1 \in \sigma(A) \text{ e } v \in E_1(A)\},$$

onde  $\sigma(A)$  é o *espectro* de  $A$  e  $E_1(A) := \{w \in \mathbb{R}^n \mid Aw = w\}$ .

**Exemplo 2.6.18.** A fórmula

$$A.z = \frac{az + b}{cz + d},$$

onde  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$  e  $z \in \mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ , define uma ação de  $SL(2, \mathbb{R})$  sobre  $\mathbb{H}$ . Dado  $z = x + iy \in \mathbb{H}$ , verifica-se imediatamente que,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} . i = \frac{\sqrt{y}i + \frac{x}{\sqrt{y}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = x + iy,$$

donde vê-se que  $Orb(i) = \mathbb{H}$ . Assim essa ação é transitiva. Não é livre, pois para todo  $z \in \mathbb{H}$ , o estabilizador  $SL(2, \mathbb{R})_z$  contém pelo menos dois pontos,  $I_2$  e  $-I_2$ .

**Exemplo 2.6.19.** O conjunto  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  munido da multiplicação complexa é um grupo de Lie de dimensão 2 atuando em  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  pela fórmula:

$$\lambda.(z_1, \dots, z_n) := (\lambda z_1, \dots, \lambda z_n),$$

onde  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  e  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ .

A órbita de  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  é a reta complexa  $\mathbb{C}(z_1, \dots, z_n) - \{0\}$  e o estabilizador é o subgrupo  $\mathbb{C}^* = \{1\}$ . Portanto é livre, mas não transitiva (a não ser que  $n = 1$ ).

**Definição 2.6.20.** Uma ação  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  é *própria* se para todo conjunto compacto  $K \subseteq M \times M$ , o conjunto  $(\Phi^\times)^{-1}(K)$  é compacto, onde  $\Phi^\times : G \times M \longrightarrow M \times M$ ,  $(g, p) \mapsto (\Phi(g, p), p)$ .

**Proposição 2.6.21.** *Uma ação  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  é própria, se somente se, para toda sequência  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $G$  e toda sequência  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $M$  tais que  $(\Phi(g_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergem em  $M$ , então  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência convergente em  $G$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\Phi$  seja própria. Sejam  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  duas sequências em  $G$  e  $M$ , respectivamente, tais que  $\Phi(g_n, p_n)$  converge para  $q \in M$  e  $p_n$  converge para  $p \in M$ . Então,

$$\Phi^\times(g_n, p_n) = (\Phi(g_n, p_n), p_n) \rightarrow (q, p) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Seja  $K$  uma vizinhança compacta de  $(q, p)$  em  $M \times M$ . Como  $\Phi^\times(g_n, p_n)$  converge para  $(q, p)$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que:

$$n \geq N \Rightarrow \Phi^\times(g_n, p_n) \in K \Rightarrow (g_n, p_n) \in (\Phi^\times)^{-1}(K).$$

A ação  $\Phi$  sendo própria,  $(\Phi^\times)^{-1}(K)$  é compacto e portanto existe uma subsequência  $(g_n, p_n)_{n \in I}$ , com  $I \subseteq \mathbb{N}$ , que converge em  $(\Phi^\times)^{-1}(K) \subseteq G \times M$ . Segue-se que  $(g_n)_{n \in I}$  é uma subsequência convergente de  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Isso mostra a suficiência.

Reciprocamente, considere  $K \subseteq M \times M$  um conjunto compacto. Devemos mostrar que  $(\Phi^\times)^{-1}(K)$  é compacto em  $G \times M$ .

Seja  $(g_n, p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de  $(\Phi^\times)^{-1}(K)$ . Então,  $(\Phi^\times(g_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de pontos em  $K$  que é compacto. Portanto essa sequência possui uma subsequência convergente  $(\Phi^\times(g_n, p_n))_{n \in I}$  que converge em  $K$ . Note que isso significa que  $(\Phi(g_n, p_n))_{n \in I}$  e  $(p_n)_{n \in I}$  são convergentes e convergem em  $M$ . Pela hipótese,  $(g_n)_{n \in I}$  possui uma subsequência convergente  $(g_n)_{n \in J}$  com  $J \subseteq I$ . Segue-se que  $(g_n, p_n)_{n \in J}$  é uma subsequência convergente de  $(g_n, p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que converge em  $(\Phi^\times)^{-1}(K)$ . Pela caracterização dos conjuntos compactos com sequências, concluímos que  $(\Phi^\times)^{-1}(K)$  é compacto.  $\square$

*Observação 2.6.22.* Decorre da proposição anterior que qualquer ação  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ , com  $G$  compacto, é própria.

Dada uma ação  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ , podemos definir uma relação de equivalência em  $M$  da seguinte forma:

$$p \sim q \Leftrightarrow p \in \text{Orb}(q).$$

Usaremos a notação  $G \backslash M := M / \sim$  para designar o espaço das órbitas à esquerda e denotaremos  $\pi : M \longrightarrow G \backslash M$  a sua aplicação quociente. O espaço das órbitas de uma ação à direita  $\Psi : M \times G \longrightarrow M$  será denotado por  $M/G$ .

## 2.7 O espaço das órbitas como variedade

**Teorema 2.7.1.** *Seja  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  uma ação livre e própria de um grupo de Lie  $G$  sobre uma variedade  $M$ . Então existe uma única estrutura de variedade sobre  $G \backslash M$ ,*

com dimensão  $\dim(M) - \dim(G)$ , tal que a aplicação quociente  $\pi : M \rightarrow G \setminus M$  é uma submersão suave.

Para provar o Teorema 2.7.1 usaremos os seguintes lemas.

**Lema 2.7.2.** *Seja  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  uma ação livre. Então para todo  $p \in M$ ,*

$$(\Phi_p)_{*e} : \mathfrak{g} \rightarrow T_p M,$$

*é injetiva.*

*Demonstração.* Seja  $\xi \in \mathfrak{g}$  tal que  $(\Phi_p)_{*e} \xi = 0$ . Temos que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_t (\Phi_p(\exp(t\xi))) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_0 (\Phi_p(\exp(t+s)\xi)) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_0 (\Phi_{\exp(t\xi)} \circ \Phi_p)(\exp(s\xi)) \\ &= (\Phi_{\exp(t\xi)})_{*p} (\Phi_p)_{*e} \xi = 0. \end{aligned}$$

Portanto, para todo  $t \in \mathbb{R}$  temos que  $\Phi_p(\exp(t\xi)) = \text{constante} = p$ . Isso implica que  $\exp(t\xi) \in G_p = \{e\}$  (pois  $\Phi$  é livre) donde  $\exp(t\xi) = e$ . Derivando essa última relação em  $t = 0$  temos que  $\xi = 0$ , o que mostra que  $\ker(\Phi_p)_{*e} = \{0\}$ , como queríamos.  $\square$

Lembremos que um conjunto  $U \subseteq G \setminus M$  é aberto em relação à topologia quociente, se e somente se,  $\pi^{-1}(U)$  é aberto em  $M$ , onde  $\pi : M \rightarrow G \setminus M$  é a aplicação quociente.

**Lema 2.7.3.** *Suponha que  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  seja própria. Então, o espaço  $G \setminus M$  munido da topologia quociente é de Hausdorff.*

*Demonstração.* Seja  $\Phi^\times : G \times M \rightarrow M \times M$ ,  $(g, p) \mapsto (\Phi(g, p), p)$ . Primeiro vamos mostrar que  $W := \Phi^\times(G \times M) \subseteq M \times M$  é fechado.

Seja  $(\Phi^\times(g_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de  $W$  que converge em  $M \times M$ . Temos então que  $(\Phi(g_n, p_n), p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge em  $M \times M$  o que implica que  $(\Phi(g_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergem em  $M$ .

Pela Proposição 2.6.21, existe uma subsequência  $(g_n)_{n \in I}$  de  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que converge em  $G$  para um ponto  $g$ . Temos também que existe  $p \in M$  tal que  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $p$  quando  $n$  tende para infinito. Donde,  $(p_n)_{n \in I}$  é convergente e converge para  $p$ . Daí, concluímos pela continuidade de  $\Phi^\times$  que  $(\Phi^\times(g_n, p_n))_{n \in I}$  converge para  $\Phi^\times(g, p)$  que pertence ao conjunto  $W$ . Mas como o limite de uma subsequência de uma sequência convergente tem que ser igual ao limite da sequência, temos que o limite de  $(\Phi^\times(g_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$  é igual a  $(g, p) \in W$ . Isso mostra que  $W$  é fechado.

Sejam agora  $p, q \in M$ , tais que  $\pi(p) \neq \pi(q)$ , onde  $\pi : M \rightarrow G \backslash M$  é a aplicação quociente. Note que  $(p, q) \in M \times M \setminus W$  (senão teríamos  $(p, q) \in \Phi^\times(G \times M)$  e existiria  $g \in G$  tal que  $(\Phi(g, q), q) = (p, q)$ , o que implicaria  $\Phi(g, q) = p$  e portanto  $\pi(q) = \pi(p)$ ).

Como  $M \times M \setminus W$  é aberto em  $M \times M$ , então existem dois conjuntos abertos  $U, V$  contendo  $p, q$  respectivamente tais que  $U \times V \subseteq (M \times M) \setminus W$ .

Afirmamos que  $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ . Com efeito, suponha que  $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$ . Então existem  $u \in U$  e  $v \in V$  tais que  $\pi(u) = \pi(v)$ , donde existe  $g \in G$  tal que  $u = \Phi(g, v)$ . Daí,  $(u, v) = (\Phi(g, v), v)$  que pertence ao conjunto  $W$ , o que é absurdo. Assim,  $\pi(U)$  e  $\pi(V)$  são dois conjuntos abertos disjuntos de  $G \backslash M$ , contendo  $\pi(p)$  e  $\pi(q)$ , respectivamente. O lema segue.  $\square$

Fixamos agora uma ação  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  livre e própria de um grupo de Lie  $G$  de dimensão  $d$  sobre uma variedade  $M$  de dimensão  $m$ .

**Lema 2.7.4.** *Seja  $p \in M$ . Então existe uma subvariedade  $S \subseteq M$  tal que  $p \in S$  e*

$$T_q S \oplus (\Phi_q)_{*e} \mathfrak{g} = T_q M, \quad (2.7.1)$$

para todo  $q \in S$ .

*Demonstração.* Seja  $S'$  uma subvariedade de  $M$  contendo o ponto  $p$  e tal que:

$$T_p S' \oplus (\Phi_p)_{*e} \mathfrak{g} = T_p M. \quad (2.7.2)$$

Note que a dimensão de  $S'$  é igual a  $\dim(M) - \dim(G) = m - d$ . Considere:

- uma forma de volume  $\omega$  definida numa vizinhança aberta  $U$  de  $p$  (existe pois é local).

- $m - d$  campos de vetores  $X_1, \dots, X_{m-d}$  em  $U$  tais que para todo  $q \in U$ ,  $\{(X_1)_q, \dots, (X_{m-d})_q\}$  são linearmente independentes, é tal que para todo  $q \in S' \cap U$ ,  $(X_1)_q, \dots, (X_{m-d})_q \in T_q S'$  (restringindo  $U$  se necessário, esses campos existem).

- $\{\xi_1, \dots, \xi_d\}$  uma base de  $\mathfrak{g}$ .

A função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(q) := \omega_q((X_1)_q, \dots, (X_{m-d})_q, (\Phi_q)_{*e} \xi_1, \dots, (\Phi_q)_{*e} \xi_d),$$

é suave e satisfaz  $f(p) \neq 0$ , pois a família  $\{(X_1)_q, \dots, (X_{m-d})_q, (\Phi_q)_{*e} \xi_1, \dots, (\Phi_q)_{*e} \xi_d\}$  é uma base de  $T_q M$  (decorre de 2.7.2 e das escolhas feitas).

Pela continuidade de  $f$  no ponto  $p$ , existe um subconjunto aberto  $U' \subseteq M$  contendo  $p$  tal que  $f(q) \neq 0$  para todo  $q \in U'$ . Isso implica que para todo  $q \in U'$ ,  $\{(X_1)_q, \dots, (X_{m-d})_q, (\Phi_q)_{*e} \xi_1, \dots, (\Phi_q)_{*e} \xi_d\}$  é linearmente independente, e portanto,

$$T_q S \oplus (\Phi_q)_{*e} \mathfrak{g} = T_q M,$$

para todo  $q \in S := S' \cap U'$ .  $\square$

**Lema 2.7.5.** *Restringindo  $S$  se necessário, temos que:*

$$\Phi|_{G \times S} : G \times S \longrightarrow M,$$

é um difeomorfismo sobre a sua imagem.

*Demonstração.* Seja  $q \in S$  arbitrário. Dado  $(\xi, u) \in \mathfrak{g} \times T_q S$ , temos que:

$$\begin{aligned} \Phi_{*(e,q)}(\xi, u) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi(\exp(t\xi), \delta(t)), \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi(\exp(t\xi), \delta(0)) + \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi(e, \delta(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi_q(\exp(t\xi)) + \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \delta(t) \\ &= (\Phi_q)_{*0} \xi + u, \end{aligned}$$

onde  $\delta(t)$  é uma curva satisfazendo  $\delta(0) = q$  e  $\delta'(0) = u$ .

Suponha que  $(\xi, u) \in \mathfrak{g} \times T_q S$  pertença ao núcleo de  $\Phi_{*(e,q)}$ . Temos então que,

$$(\Phi_q)_{*e} \xi = -u \in T_q S \cap (\Phi_q)_{*e} \mathfrak{g} = \{0\}.$$

Assim,  $(\Phi_q)_{*e} \xi = 0$  e  $u = 0$ . Como  $(\Phi_q)_{*e}$  é injetiva (pois  $\Phi$  é livre), concluímos que  $\xi = 0$ , donde  $(\xi, u) = \{0\}$ , o que significa que  $\ker(\Phi_{*(e,q)}) = \{0\}$ . Por causa das dimensões (veja (2.7.1)), segue-se que  $\Phi_{*(e,q)}$  é um isomorfismo linear.

Para ver que  $\Phi_{*(g,p)}$  é um isomorfismo para todo  $(p, q) \in G \times S$ , basta observar que

$$\Phi \circ \tilde{L}_g = \Phi_g \circ \Phi,$$

onde  $\tilde{L}_g : G \times M \longrightarrow G \times M$ ,  $(h, q) \longmapsto (gh, q)$ , donde, pela regra da cadeia,

$$\Phi_{*(g,q)} \circ (\tilde{L}_g)_{*(e,q)} = (\Phi_g)_{*q} \circ \Phi_{*(e,q)},$$

o que implica que  $\Phi_{*(e,q)}$  é um isomorfismo linear.

Pelo teorema da função inversa,  $\Phi|_{G \times S}$  é um difeomorfismo local em todos os pontos de  $G \times S$ . Para mostrar que é um difeomorfismo global sobre sua imagem, basta mostrar que é injetiva.

Suponha por absurdo, que qualquer que seja o conjunto aberto  $U \subseteq S$  contendo  $p$ ,  $\Phi|_{U \times G}$  não seja injetiva. Nesse caso existem duas seqüências  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $S$  que convergem para  $p$ , e existem também duas seqüências  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $G$  tais que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(g_n, p_n) \neq (h_n, q_n) \text{ e } \Phi(g_n, p_n) = \Phi(h_n, q_n). \quad (2.7.3)$$

Note que essa última equação equivale a  $\Phi(l_n, p_n) = q_n$ , onde  $l_n = h_n^{-1}g_n$  e que  $l_n \neq e$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  (caso contrário obteríamos  $(g_n, p_n) = (h_n, q_n)$ ).

Agora, temos que  $((\Phi(l_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  são duas seqüências convergentes e  $\Phi$  é própria. Portanto  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência que converge para  $l \in G$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $l_n \rightarrow l$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Daí, obtemos  $\Phi(l, p) = p$ , isto é,  $l \in G_p = \{0\}$  ( $\Phi$  é livre), donde  $l = e$ .

Temos então uma contradição, pois  $\Phi$  é injetiva numa vizinhança de  $(e, p)$ , (pois é um difeomorfismo local), porém

$$\begin{cases} \Phi(l_n, p_n) = \Phi(e, q_n), \\ (l_n, p_n) \neq (e, q_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ (l_n, p_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (e, p) \text{ e } (e, q_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (e, p). \end{cases}$$

O lema segue. □

Uma subvariedade  $S \subseteq M$  como no Lema anterior é chamada um “*slice*” (da ação  $\Phi$ ). Note que se  $q \in M$  é tal que  $Orb(q) \cap S \neq \emptyset$ , então existe um único ponto  $q' \in S$  tal que  $Orb(q) \cap S = \{q'\}$ , ou seja

$$Orb(q) \cap S \neq \emptyset \Rightarrow \exists! q' \in S : Orb(q) \cap S = \{q'\}. \quad (2.7.4)$$

Com efeito, suponha que existam dois pontos  $q_1, q_2 \in Orb(q) \cap S$  com  $q_1 \neq q_2$ . Existem então  $g_1, g_2 \in G$  tais que  $q_1 = \Phi(g_1, q)$  e  $q_2 = \Phi(g_2, q)$ . Segue-se que  $\Phi(g_1^{-1}, q_1) = \Phi(g_2^{-1}, q_2)$ , e a aplicação  $\Phi|_{G \times S}$  sendo injetiva (é um difeomorfismo),  $(g_1^{-1}, q_1) = (g_2^{-1}, q_2)$ . Daí,  $q_1 = q_2$  o que é um absurdo.

Por conseguinte, a aplicação  $S \rightarrow G \backslash M, q \mapsto \pi(q)$  é injetiva.

Denotamos por  $\Psi_S$  a aplicação inversa de  $\Phi|_{G \times S}$ :

$$\Psi_S : \Phi(G \times S) \longrightarrow G \times S, \quad \Psi_S := \left( \Phi|_{G \times S} \right)^{-1}.$$

Denotamos por  $\kappa : \Phi(G \times S) \rightarrow G$  e  $\tau : \Phi(G \times S) \rightarrow S$  as funções coordenadas de  $\Psi_S$ . Assim  $\Psi_S(q) = (\kappa(q), \tau(q))$ , para todo  $q \in \Phi(G \times S)$ .

É imediato verificar que para todo  $g \in G$ ,

- $\Psi_S \circ \Phi_g = \bar{L}_g \circ \Psi_S$ , onde  $\bar{L}_g : G \times S \rightarrow G \times S, (h, q) \mapsto (gh, q)$ ,
- $\kappa \circ \Phi_g = L_g \circ \kappa$ ,
- $\tau \circ \Phi_g = \tau$ .

Temos ainda que  $\pi \circ \tau = \pi$ , onde  $\pi : M \rightarrow G \backslash M$  é a aplicação quociente. Com efeito, dado  $q \in \Phi(G \times S)$ , temos que

$$\begin{aligned} \Psi_S(q) = (\kappa(q), \tau(q)) &\Rightarrow q = (\Phi|_{G \times S})(\kappa(q), \tau(q)) \\ &\Rightarrow q = \Phi(\kappa(q), \tau(q)) \\ &\Rightarrow q \in Orb(\tau(q)) \\ &\Rightarrow \pi(q) = \pi(\tau(q)). \end{aligned} \quad (2.7.5)$$



Em resumo, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Phi(G \times S) & \xrightarrow{\Psi_S} & G \times S \\ \pi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_2 \\ \pi(S) & \xleftarrow{\pi} & S \end{array}$$

Chamaremos  $\Psi_S$  uma *trivialização* de  $\Phi$ .

Vamos voltar agora à estrutura de variedade de  $G \backslash M$ . Damos ao quociente  $G \backslash M$  a topologia quociente (em particular,  $\pi : M \rightarrow G \backslash M$  é contínua e aberta).

Dado um slice  $S \subseteq M$ , definimos:

$$\begin{cases} U_S := \pi(S) \subseteq G \backslash M, \\ \varphi_S : U_S \rightarrow S, \varphi_S := (\pi|_S)^{-1}. \end{cases}$$

Note que  $U_S$  é o conjunto das órbitas  $\mathcal{O}$  de  $M$  tais que  $\mathcal{O} \cap S \neq \emptyset$  e que  $\varphi_S(\mathcal{O})$  é o único ponto de  $S$  tal que  $\mathcal{O} \cap S = \{\varphi_S(\mathcal{O})\}$ .

**Lema 2.7.6.** *O conjunto  $\mathfrak{A} := \{(U_S, \varphi_S), S \text{ é um slice de } M\}$  é um atlas de  $G \backslash M$  de classe  $C^\infty$  e dimensão  $\dim(M) - \dim(G)$ , relativamente à topologia quociente.*

*Observação 2.7.7.* O leitor atento observará que os pares  $(U_S, \varphi_S)$  não são realmente cartas, pois as imagens dos  $\varphi_S$  não são abertos do espaço euclidiano. Porém restringindo os slices se necessário, poderíamos escolher a cada  $S$ , um difeomorfismo de  $S$  para um conjunto aberto do espaço euclidiano e assim obter cartas autênticas. Mas para não sobrecarregar desnecessariamente a notação, continuaremos com os pares  $(U_S, \varphi_S)$  definidos acima.

*Demonstração.* (Do Lema 2.7.6) Mostraremos que  $\mathfrak{A}$  é um atlas de  $G \backslash M$ .

- Obviamente  $\bigcup_S U_S = M$ ,
- $U_S$  é aberto em  $G \backslash M$ . Com efeito, temos que

$$\pi^{-1}(U_S) = \pi^{-1}(\pi(S)) = \bigcup_{q \in S} \text{Orb}(q) = \Phi(G \times S) = \Phi|_{G \times S}(G \times S)$$

que é aberto em  $M$ , pois é a imagem do difeomorfismo  $\Phi|_{G \times S}$ .

Por definição da topologia quociente,  $U_S$  é aberto em  $G \backslash M$ .

- A aplicação  $\varphi_S : U_S \rightarrow S$  é contínua. Com efeito, considere  $U \subseteq S$  um conjunto aberto em  $S$  relativamente à topologia induzida. Temos que,

$$\pi^{-1}(\varphi_S^{-1}(U)) = \pi^{-1}(\pi|_S(U)) = \pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{q \in U} \text{Orb}(q) = \Phi(G \times U),$$

que é aberto em  $M$ , pois  $G \times U$  é aberto em  $G \times S$  e  $\Phi|_{G \times S}$  é um difeomorfismo.

Por definição da topologia quociente,  $\varphi_S^{-1}(U)$  é aberto em  $G \setminus M$ , e portanto,  $\varphi_S$  é contínua.

- A aplicação  $\varphi_S^{-1} : S \rightarrow U_S$  é contínua. De fato,  $\varphi_S^{-1} = \pi|_S$  é a restrição da aplicação contínua  $\pi$  ao conjunto  $S$  munido da topologia induzida, e portanto é contínua.
- Se  $S_1$  e  $S_2$  são dois slices tais que  $U_{S_1} \cap U_{S_2} \neq \emptyset$ , então

$$\varphi_{S_2} \circ \varphi_{S_1}^{-1} : \varphi_{S_1}(U_{S_1} \cap U_{S_2}) \rightarrow \varphi_{S_2}(U_{S_1} \cap U_{S_2}),$$

é suave. Para mostrar isso, mostraremos primeiro que,

$$\varphi_{S_2} \circ \varphi_{S_1}^{-1} = \tau_2|_{\varphi_{S_1}(U_{S_1} \cap U_{S_2})},$$

onde  $\tau_2 : \Phi(G \times S_2) \rightarrow S_2$ , é a aplicação associada a  $\Psi_S$ . Com efeito, dado  $q \in \varphi_{S_1}(U_{S_1} \cap U_{S_2})$ , temos que:

$$(\varphi_{S_2} \circ \varphi_{S_1}^{-1})(q) = \varphi_{S_2}(\pi|_{S_1}(q)) = \varphi_{S_2}(Orb(q)),$$

é o único ponto que pertence à interseção  $S_2 \cap Orb(q)$  (veja 2.7.4)

Por outro lado  $\tau_2(q)$  pertence à interseção  $S_2 \cap Orb(\tau_2(q))$  e como  $Orb(\tau_2(q)) = Orb(q)$  (veja (2.7.5)), temos então que,

$$\tau_2(q) \in S_2 \cap Orb(q).$$

Assim, ambos  $(\varphi_{S_2} \circ \varphi_{S_1}^{-1})(q)$  e  $\tau_2(q)$  pertencem a  $S_2 \cap Orb(q)$  que é um único ponto, e portanto, são iguais. A aplicação  $\tau_2$  sendo suave, concluímos que  $\varphi_{S_2} \circ \varphi_{S_1}^{-1}$  é suave.

Portanto  $\mathfrak{A}$  é um atlas de  $G \setminus M$  de classe  $C^\infty$ , como queríamos.  $\square$

**Lema 2.7.8.** *A topologia  $G \setminus M$  possui uma base enumerável.*

*Demonstração.* Seja  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  uma base da topologia de  $M$ . A projeção  $\pi : M \rightarrow G \setminus M$  sendo uma aplicação aberta, segue-se que  $\{\pi(U_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  é uma família enumerável de conjuntos abertos em  $G \setminus M$ . Seja  $V \subseteq G \setminus M$  um conjunto aberto. Por definição da topologia quociente,  $\pi^{-1}(V)$  é aberto em  $M$ , e portanto, existe  $I \subseteq \mathbb{N}$  tal que:

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

Pelo fato de  $\pi$  ser sobrejetiva,  $V = \pi(\pi^{-1}(V))$ , donde,

$$V = \pi\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi(U_i).$$

Isso mostra que  $\{\pi(U_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  é uma base enumerável de  $G \setminus M$ .  $\square$

Segue dos lemas anteriores que  $G \setminus M$  é uma variedade de classe  $C^\infty$  e dimensão  $\dim(M) - \dim(G)$ .

**Lema 2.7.9.** *A projeção  $\pi : M \rightarrow G \setminus M$  é uma submersão. Além disso, a estrutura de variedade de  $G \setminus M$  descrita nos lemas acima é a única estrutura de variedade de dimensão  $\dim(M) - \dim(G)$  de  $G \setminus M$  tal que  $\pi : M \rightarrow G \setminus M$  é uma submersão.*

*Demonstração.* Para ver que  $\pi$  é uma submersão, basta observar que para todo slice  $S$  e todo  $(g, q) \in G \times S$ ,  $(\varphi_S \circ \pi \circ \Phi)(g, q) = q$  e usar o fato que  $\varphi_S$  e  $\Phi|_{G \times S}$  são dois difeomorfismos.

Agora, suponha que  $\mathfrak{B}$  seja um outro atlas de  $G \setminus M$  de dimensão  $\dim(M) - \dim(G)$  tal que  $\pi : M \rightarrow G \setminus M$  seja uma submersão. Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \pi \swarrow & \circlearrowleft & \searrow \pi \\ (G \setminus M, \mathfrak{A}) & \xrightarrow{Id} & (G \setminus M, \mathfrak{B}) \end{array}$$

O fato de  $\pi$  ser uma submersão sobrejetiva implica que:

$$Id : (G \setminus M, \mathfrak{A}) \rightarrow (G \setminus M, \mathfrak{B}),$$

é suave se somente se  $Id \circ \pi : M \rightarrow (G \setminus M, \mathfrak{B})$  é suave, o que acontece pois  $Id \circ \pi = \pi : M \rightarrow (G \setminus M, \mathfrak{B})$  é suave por hipótese. Assim,  $Id : (G \setminus M, \mathfrak{A}) \rightarrow (G \setminus M, \mathfrak{B})$  é suave. Da mesma maneira vê-se, que  $Id^{-1} : (G \setminus M, \mathfrak{A}) \rightarrow (G \setminus M, \mathfrak{B})$  é suave. Segue-se que  $Id : (G \setminus M, \mathfrak{A}) \rightarrow (G \setminus M, \mathfrak{B})$ , é um difeomorfismo, o que implica que  $\mathfrak{A}$  e  $\mathfrak{B}$  são compatíveis.  $\square$

Isso conclui a demonstração do Teorema 2.7.1. Esse teorema também vale para ações à direita.

**Exemplo 2.7.10.** A ação de  $\mathbb{C}^*$  sobre  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , dada por

$$\lambda \cdot (z_1, \dots, z_n) = (\lambda z_1, \dots, \lambda z_n),$$

onde  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  e  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , é livre e própria. Dado  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , a órbita de  $z$  é o conjunto

$$Orb(z) = \mathbb{C}z \setminus \{0\}.$$

Assim, o quociente  $\mathbb{C}^* \setminus (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$  é uma variedade de dimensão  $2n - 2 = 2(n - 1)$ , chamada *espaço projetivo complexo*, e denotado por  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ , isto é:

$$\mathbb{C}^* \setminus (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^n).$$

**Exemplo 2.7.11.** Analogamente, a ação de  $\mathbb{R}^*$  sobre  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  dada por

$$\lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  e  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , é livre e própria e dado  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , a órbita de  $x$  é o conjunto,

$$Orb(x) = \mathbb{R}x \setminus \{0\}.$$

Assim, o quociente  $\mathbb{R}^* \backslash (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  é uma variedade de dimensão  $n - 1$ , chamada *espaço projetivo real*, e denotado por  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ , isto é:

$$\mathbb{R}^* \backslash (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^n).$$

# Capítulo 3

## Ações hamiltonianas e Redução Simplética

### 3.1 Preliminares

Dado um subgrupo de Lie fechado  $H$  de  $G$ , definimos

$$\begin{cases} \Phi_L : H \times G \longrightarrow G, & (h, g) \mapsto hg, \\ \Phi_R : G \times H \longrightarrow G, & (g, h) \mapsto gh. \end{cases}$$

A aplicação  $\Phi_L$  é uma ação à esquerda enquanto  $\Phi_R$  é uma ação à direita.

A órbita de  $g \in G$  em relação a  $\Phi_L$  (respectivamente  $\Phi_R$ ) é o conjunto  $H.g := \{hg; h \in H\}$  (respectivamente  $g.H := \{gh; h \in H\}$ ). Denotamos por  $H \backslash G$  e  $G/H$  os espaços quocientes correspondentes e por

$$\begin{cases} \pi_L : G \longrightarrow H \backslash G, \\ \pi_R : G \longrightarrow G/H, \end{cases}$$

as projeções associadas.

**Proposição 3.1.1.** *Seja  $G$  um grupo de Lie e seja  $H$  um subgrupo de Lie fechado. Então  $\Phi_L$  e  $\Phi_R$  são ambas livres e próprias. Consequentemente,  $H \backslash G$  e  $G/H$  são duas variedades de dimensão  $\dim(G) - \dim(H)$  e as aplicações  $\pi_L$  e  $\pi_R$  são duas submersões.*

*Demonstração.* Para ver que  $\Phi_L$  é livre, suponha que  $(h, g) \in H \times G$  seja tal que  $h.g = g$ . Multiplicando por  $g^{-1}$  à direita, obtemos imediatamente  $h = e$ , o que mostra que  $\Phi_L$  é livre.

Para mostrar que  $\Phi_L$  é própria, considere a seguinte aplicação:

$$\Phi_L^\times : \begin{cases} H \times G \longrightarrow G \times G, \\ (h, g) \longmapsto (hg, h). \end{cases}$$

O objetivo é mostrar que  $(\Phi_L^\times)^{-1}(K)$  é compacto desde que  $K \subseteq G \times G$  seja compacto.

Considere a aplicação:

$$F : \begin{cases} G \times G \longrightarrow G \times G, \\ (h, g) \longmapsto (hg, g). \end{cases}$$

Note que  $\Phi_L^\times = F|_{H \times G}$ , e que  $F$  é um difeomorfismo cujo inverso é dado por

$$F^{-1}(h, g) = (hg^{-1}, g).$$

Tome  $K \subseteq G \times G$  um conjunto compacto. Temos que,

$$(\Phi_L^\times)^{-1}(K) = \left(F|_{H \times G}\right)^{-1}(K) = F^{-1}(K) \cap (H \times G).$$

Claramente  $F^{-1}(K)$  é compacto e  $H \times G$  é um conjunto fechado. Logo  $(\Phi_L^\times)^{-1}(K)$  é compacto.

Segue do Teorema 2.7.1 que existe uma única estrutura de variedade em  $H \backslash G$  de dimensão  $\dim(G) - \dim(H)$  tal que a aplicação  $\pi_L$  seja uma submersão (e analogamente para  $G/H$ ).  $\square$

*Observação 3.1.2.* Seja  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  uma ação de grupo de Lie não necessariamente livre, nem própria. Considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \pi_R \swarrow & \circlearrowleft & \searrow \Phi_p \\ G/G_p & \xrightarrow{j_p} & M \end{array} \quad (3.1.1)$$

onde  $G_p = \{g \in G \mid \Phi(g, p) = p\}$  é o estabilizador de  $p$ , e onde  $j_p : G/G_p \longrightarrow M$  está definida por

$$j_p(\pi_R(g)) := \Phi_p(g).$$

A aplicação  $\pi_R$  sendo uma submersão sobrejetiva, temos que  $j_p$  é suave, se somente se,  $\Phi_p$  é suave, o que é o caso. Além disso, é fácil verificar que  $j_p$  é injetiva e que  $j_p(G/G_p) = \text{Orb}(p)$ .

**Definição 3.1.3.** Seja  $\Phi_1 : G \times M \longrightarrow M$  e  $\Phi_2 : G \times N \longrightarrow N$  duas ações de um grupo de Lie  $G$  sobre as variedades  $M$  e  $N$ . Dizemos que  $f : M \longrightarrow N$  é *equivariante* se para todo  $g \in G$ , tem-se

$$f \circ (\Phi_1)_g = (\Phi_2)_g \circ f.$$

**Proposição 3.1.4.** *Seja  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  uma ação não necessariamente livre nem própria, e seja  $p \in M$ . Então,*

(i) A aplicação

$$\Psi : \begin{cases} G \times G/G_p \longrightarrow G/G_p, \\ (g, \pi_R(h)) \longmapsto \pi_R(gh), \end{cases}$$

é uma ação à esquerda suave e transitiva.

(ii) A aplicação  $j_p : G/G_p \longrightarrow M$ ,  $\pi_R(g) \mapsto \Phi_p(g)$  é uma imersão injetiva cuja imagem é  $\text{Orb}(p)$ . Além disso, é equ variante, isto é

$$j_p \circ \Psi_g = \Phi_g \circ j_p,$$

para todo  $g \in G$ .

(iii) A órbita de  $p$ ,  $\text{Orb}(p)$ , é uma variedade imersa de  $M$  de dimensão  $\dim(G) - \dim(G_p)$ , e a ação natural de  $G$  sobre  $\text{Orb}(p)$ , dada por  $G \times \text{Orb}(p) \longrightarrow \text{Orb}(p)$ ,  $(g, p) \mapsto \Phi(g, p)$ , é suave e transitiva.

*Demonstração.* Vamos provar (i). Afirmemos que  $\Psi$  está bem definida. Com efeito se  $\pi_R(h) = \pi_R(h')$ , com  $h, h' \in G$ , então existe  $\lambda \in G_p$  tal que  $h = h'\lambda$ . Multiplicando por  $g$ , obtemos  $gh = gh'\lambda$ , donde  $\pi_R(gh) = \pi_R(gh')$ . Isso mostra que  $\Psi$  está bem definida.

Temos que  $\Psi$  é uma ação à esquerda. Com efeito

$$\begin{cases} \Psi(e, \pi_R(g)) = \pi_R(eg) = \pi_R(g), \\ \Psi(g, \Psi(g', \pi_R(h))) = \Psi(g, \pi_R(g'h)) = \Psi(g, \pi_R(g'h)) = \Psi(gg', \pi_R(h)), \end{cases}$$

para quaisquer  $g, g' \in G$ .

Para ver que  $\Psi$  é transitiva, basta observar que para todo  $c \in G$ ,  $\text{Orb}(\pi_R(c)) = \{\pi_R(g.c) \mid g \in G\} = \pi_R(G) = G/G_p$ . A suavidade de  $\Psi$  vê-se da seguinte maneira. Considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{m} & G \\ Id \times \pi_R \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi_R \\ G \times G/G_p & \xrightarrow[\Psi]{} & G/G_p. \end{array}$$

A aplicação  $Id \times \pi_R$  sendo uma submersão sobrejetiva, temos que  $\Psi$  é suave, se somente se,  $\pi_R \circ m$  é suave, o que é o caso.

Vamos provar (ii). Mostremos que  $j_p$  é uma imersão usando as fórmulas:

$$\begin{cases} \Phi_p = j_p \circ \pi_R, \\ \Phi_p \circ L_g = \Phi_g \circ \Phi_p. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

A primeira fórmula é simplesmente a definição de  $j_p$  enquanto a segunda fórmula decorre do fato de  $\Phi$  ser uma ação.

Sejam  $g \in G$  e  $u \in T_g G$  tais que,

$$(j_p)_{*\pi_R(g)} (\pi_R)_{*g} u = 0.$$

Vamos mostrar que  $(\pi_R)_{*g} u = 0$ . Aplicando a regra da cadeia obtemos:

$$\begin{aligned}
(j_p \circ \pi_R)_{*g} u = 0 &\Leftrightarrow (\Phi_p)_{*g} u = 0 \\
&\Leftrightarrow (\Phi_p)_{*g} (L_g)_{*e} (L_g)_{*g}^{-1} u = 0 \\
&\Leftrightarrow (\Phi_p \circ L_g)_{*e} (L_g)_{*g}^{-1} u = 0 \\
&\Leftrightarrow (\Phi_g \circ \Phi_p)_{*e} (L_g)_{*g}^{-1} u = 0, \\
&\Leftrightarrow (\Phi_g)_{*p} (\Phi_p)_{*e} (L_{g^{-1}})_{*g} u = 0.
\end{aligned}$$

Levando em conta o fato de  $\Phi_g$  ser um difeomorfismo e usando a fórmula  $\mathfrak{g}_p = Ker(\Phi_p)_{*e}$  (veja Proposição 2.6.12) obtemos então:

$$\begin{aligned}
(j_p \circ \pi_R)_{*g} u = 0 &\Leftrightarrow (\Phi_p)_{*e} (L_{g^{-1}})_{*g} u = 0 \\
&\Leftrightarrow (L_{g^{-1}})_{*g} u \in \mathfrak{g}_p = Lie(G_p) \\
&\Leftrightarrow u \in (L_g)_{*e} \mathfrak{g}_p.
\end{aligned}$$

Assim,

$$Ker(j_p \circ \pi_R)_{*g} = (L_g)_{*e} \mathfrak{g}_p. \quad (3.1.3)$$

*Afirmação:*  $j_{*\pi_R(g)}$  é injetiva, se e somente se,

$$(L_g)_{*e} \mathfrak{g}_p = Ker(\pi_R)_{*g}. \quad (3.1.4)$$

*Demonstração (da Afirmação):* Suponha que  $j_{*\pi_R(g)}$  seja injetiva. Seja  $u = (L_g)_{*e} \xi \in (L_g)_{*e} \mathfrak{g}_p$ , com  $\xi \in \mathfrak{g}_p$ . Pela igualdade (3.1.3),  $(j_p \circ \pi_R)_{*g} u = 0$ , donde

$$\begin{aligned}
(j_p)_{*\pi_R(g)} (\pi_R)_{*g} u = 0 &\Rightarrow (\pi_R)_{*g} u = 0 \\
&\Rightarrow u \in Ker(\pi_R)_{*g}.
\end{aligned}$$

Isso mostra a inclusão  $(L_g)_{*e} \mathfrak{g}_p \subseteq Ker(\pi_R)_{*g}$ . Para mostrar a outra inclusão, tome  $u \in T_g G$  tal que  $(\pi_R)_{*g} u = 0$ . Temos trivialmente que  $(j_p)_{*\pi_R(g)} (\pi_R)_{*g} u = 0$ , donde pela igualdade (3.1.3),  $u \in (L_g)_{*e} \mathfrak{g}_p$ . Isso mostra a outra inclusão. Segue-se que  $(L_g)_{*e} \mathfrak{g}_p = Ker(\pi_R)_{*g}$ .

Suponha agora que  $(L_g)_{*e} \mathfrak{g}_p = Ker(\pi_R)_{*g}$ . Seja  $(\pi_R)_{*g} u \in Ker(j_p)_{*\pi_R(g)}$ . Temos então que  $(j_p)_{*\pi_R(g)} (\pi_R)_{*g} u = 0$ , o que implica pela igualdade (3.1.3) que  $u \in (L_g)_{*e} \mathfrak{g}_p$ . Mas como  $(L_g)_{*e} \mathfrak{g}_p = Ker(\pi_R)_{*g}$  por hipótese, concluímos que  $u \in Ker(\pi_R)_{*g}$ , ou seja,  $(\pi_R)_{*g} u = 0$ . Assim  $Ker(j_p)_{*\pi_R(g)} = \{0\}$ . Isso conclui a demonstração da afirmação.

Para mostrar a igualdade (3.1.4), veja que  $G_p$  e  $g.G_p := L_g(G_p)$  são duas subvariedades de  $G$  (pois  $G_p$  é uma subvariedade e  $L_g$  é um difeomorfismo) e que  $L_g|_{G_p} : G_p \rightarrow g.G_p$  é um difeomorfismo de  $G_p$  sobre  $g.G_p$ . Isso implica que

$$T_g(g.G_p) = (L_g)_{*e} T_e(G_p) = (L_g)_{*e} \xi_p. \quad (3.1.5)$$



Por outro lado,  $\pi_R : G \longrightarrow G/G_p$  é uma submersão cuja fibra acima de  $\pi_R(g)$  é a subvariedade  $g.G_p$ , isto é,  $\pi_R^{-1}(\pi_R(g)) = g.G_p$ . Segue que,

$$T_g(g.G_p) = \text{Ker}(\pi_R)_{*g}. \quad (3.1.6)$$

Comparando as equações (3.1.5) e (3.1.6), obtemos a equação (3.1.4). Segue daí e da afirmação acima que  $j_p$  é uma imersão. A equivariância pode ser verificada imediatamente.

Para mostrar o item (iii), damos ao conjunto  $\text{Orb}(p)$  a única estrutura de variedade que torna  $j_p : G/G_p \longrightarrow \text{Orb}(p)$  um difeomorfismo e aplicamos os resultados anteriores.  $\square$

**Corolário 3.1.5.** *Seja  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  uma ação de um grupo de Lie  $G$  e seja  $p \in M$ . Se  $G$  é compacto, então  $\text{Orb}(p)$  é uma subvariedade mergulhada de  $M$ .*

*Demonstração.* O conjunto  $G/G_p$  sendo compacto (pois  $G/G_p = \pi_R(G)$  é a imagem do compacto  $G$  pela aplicação contínua  $\pi_R$ ), segue-se que  $j_p$  é um mergulho. Assim,  $\text{Orb}(p) = j_p(G/G_p)$  é a imagem de um mergulho, e portanto é uma subvariedade mergulhada.  $\square$

**Corolário 3.1.6.** *Seja  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  uma ação de um grupo de Lie  $G$ . Dado  $p \in M$ , a aplicação  $\Phi_p : G \longrightarrow \text{Orb}(p)$ ,  $g \mapsto \Phi(g, p)$  é uma submersão sobrejetiva.*

*Demonstração.* Basta considerar o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \pi_R \swarrow & \circlearrowleft & \searrow \Phi_p \\ G \backslash G_p & \xrightarrow{j_p} & \text{Orb}(p) \end{array}$$

e usar o fato de  $\pi_R : G \longrightarrow G/G_p$  ser uma submersão sobrejetiva.  $\square$

**Proposição 3.1.7.** *(Caracterização dos espaços homogêneos) Seja  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  uma ação transitiva de um grupo de Lie  $G$  e seja  $p \in M$ . Então a aplicação*

$$j_p : \begin{cases} G/G_p \longrightarrow M, \\ \pi_R(g) \longmapsto \Phi(g, p), \end{cases}$$

*é um difeomorfismo equivariante, isto é, que satisfaz*

$$j_p(\Psi_g(\pi_R(h))) = \Phi_g(j_p(\pi_R(h))),$$

*para todos  $g, h \in G$ .*

*Demonstração.* Segue do fato que  $j_p : G/G_p \longrightarrow M$  é uma imersão injetiva cuja imagem é  $M = \text{Orb}(p)$ , e do fato de que uma imersão bijetiva é um difeomorfismo<sup>1</sup>.  $\square$

<sup>1</sup>Veja [11].

## 3.2 Fibrados principais

**Definição 3.2.1.** Sejam  $P$  e  $M$  duas variedades e seja  $G$  um grupo de Lie. Um *fibrado principal* com *grupo de estrutura*  $G$  é uma aplicação  $\pi : P \rightarrow M$  sobrejetiva de classe  $C^\infty$ , junto com uma ação  $\Phi : G \times P \rightarrow P$  tais que,

- $\pi \circ \Phi_g = \pi$  para todo  $g \in G$ ,
- para todo  $p \in M$ , existem um conjunto aberto  $U \subseteq M$  contendo  $p$  e um difeomorfismo  $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G \times U$ , chamado de *trivialização*, tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & G \times U \\ \pi \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \pi_2 \\ & U & \end{array}$$

comuta, onde  $\pi_2 : G \times U \rightarrow U$ ,  $(g, p) \mapsto p$ ,

- cada trivialização  $\psi$  é  $G$ -equivariante, isto é,

$$\psi \circ \Phi_g = (L_g \times Id|_U) \circ \psi$$

para todo  $g \in G$ , onde  $L_g \times Id|_U : G \times U \rightarrow G \times U$ ,  $(h, u) \mapsto (gh, u)$ .

*Observação 3.2.2.* Decorre da relação  $\pi \circ \Phi_g = \pi$  que qualquer conjunto da forma  $\pi^{-1}(U)$ , onde  $U \subseteq M$  é um conjunto arbitrário, é  $G$ -invariante, isto é, para todo  $g \in G$ ,  $\Phi_g(\pi^{-1}(U)) \subseteq \pi^{-1}(U)$ . Em particular, se  $\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow G \times U$  é uma trivialização, então faz sentido considerar a composta  $\Psi \circ \Phi_g$ .

**Exemplo 3.2.3.** O produto  $P = G \times M$  é trivialmente um fibrado principal, com a projeção  $\pi : G \times M \rightarrow M$ ,  $(g, p) \mapsto p$  e a ação:

$$\Phi : \begin{cases} G \times (G \times M) \rightarrow G \times M, \\ (g, (h, p)) \mapsto (gh, p). \end{cases}$$

Uma trivialização (global) de  $P$  é a aplicação identidade do conjunto  $G \times M$ . Esse fibrado é chamado de *fibrado trivial*.

*Observação 3.2.4.* Define-se também fibrados principais  $\pi : P \rightarrow M$  onde o grupo de estrutura  $G$  atua à direita (diz-se então que  $\pi : P \rightarrow M$  é um *fibrado principal à direita*). Nesse caso, as trivializações são aplicações

$$\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G,$$

tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & U \times G \\ \pi \searrow & \circlearrowleft & \swarrow \pi_1 \\ & U & \end{array}$$

comuta, e tal que

$$\psi \circ \Phi_g = (Id|_U \times R_g) \circ \psi$$

para todo  $g \in G$ .

**Exemplo 3.2.5.** Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $n$  e seja  $TM$  o seu fibrado tangente. Dado  $p \in M$ , definimos

$$B_p(TM) := \{(u_1, \dots, u_n) \in T_pM \times \dots \times T_pM \mid u_1, \dots, u_n \text{ são linearmente independentes}\}.$$

Note que um elemento de  $B_p(TM)$  é simplesmente uma base ordenada de  $T_pM$ . Definimos

$$B(TM) := \dot{\bigcup}_{p \in M} B_p(TM), \quad (\text{união disjunta})$$

e denotamos por  $\pi : B(TM) \rightarrow M$  a projeção que associa a uma base de  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $T_pM$  o ponto  $p \in M$ . Mostra-se que  $\pi : B(TM) \rightarrow M$  é um fibrado principal à direita com grupo de estrutura  $G = GL(n, \mathbb{R})$ . Este exemplo é conhecido como *fibrado dos referenciais* ou *fibrado das bases* (veja [14]).

*Observação 3.2.6.* Se  $\psi = (\kappa, \tau) : \pi^{-1}(U) \rightarrow G \times U$  é uma trivialização, então para todo  $p \in \pi^{-1}(U)$  e todo  $g \in G$ , as funções coordenadas de  $\psi$  satisfazem:

$$\begin{cases} \kappa(\Phi_g(p)) = g\kappa(p), \\ \tau(\Phi_g(p)) = \tau(p). \end{cases} \quad (3.2.1)$$

*Observação 3.2.7.* Seja  $\pi : P \rightarrow M$  um fibrado principal com ação associada  $\Phi : G \times P \rightarrow P$ . Defina  $\bar{\Phi} : G \times P \rightarrow P$ ,  $(g, p) \mapsto \Phi(g^{-1}, p)$ . Verifica-se que  $\bar{\Phi}$  é uma ação à direita relativamente à qual  $\pi : P \rightarrow M$  se torna um fibrado principal à direita; se  $\psi = (\kappa, \tau) : \pi^{-1}(U) \rightarrow G \times U$  é uma trivialização à esquerda, então  $\bar{\psi} = (\tau, \kappa^{-1}) : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  é uma trivialização à direita.

**Lema 3.2.8.** *Seja  $\pi : P \rightarrow M$  um fibrado principal com grupo de estrutura  $G$  e ação  $\Phi : G \times P \rightarrow P$ . Então:*

(i) a ação  $\Phi$  é livre e própria,

(ii) a aplicação  $\pi : P \rightarrow M$  é uma submersão de posto  $\dim(P) - \dim(G)$ , e para todo  $p \in P$ ,  $\pi^{-1}(\pi(p)) = \text{Orb}(p)$ ,

(iii)  $\dim(M) = \dim(P) - \dim(G)$ .

*Demonstração.* Para mostrar que  $\Phi$  é livre, tome  $p \in P$  arbitrário. Devemos mostrar que  $G_p = \{e\}$ , ou seja, que se  $\Phi(g, p) = p$ , então  $g = e$ . Como  $\pi : P \rightarrow M$  é um fibrado principal, existem um aberto  $U \subseteq M$  contendo  $\pi(p)$  e uma trivialização equivariante  $\psi = (\kappa, \tau) : \pi^{-1}(U) \rightarrow G \times U$ . Logo se  $g \in G$  é tal que  $\Phi_g(p) = p$ , então,  $\psi \circ \Phi_g(p) = \psi(p)$ ,

o que implica pelas fórmulas em (3.2.1) que  $g\kappa(p) = \kappa(p)$ . Multiplicando por  $\kappa(p)^{-1}$ , obtemos  $g = e$ . Isso mostra que  $\Phi$  é livre.

Mostraremos que  $\Phi$  é própria usando a caracterização com seqüências (veja Proposição 2.6.21).

Sejam  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  duas seqüências de  $G$  e  $P$ , respectivamente, tais que  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(\Phi(g_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergem em  $P$ . Devemos mostrar que  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência convergente.

Seja  $p \in P$  o limite de  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Como  $\pi$  é um fibrado principal, existe um conjunto aberto  $U \subseteq M$  contendo  $\pi(p)$  e uma trivialização equivariante  $\psi = (\kappa, \tau) : \pi^{-1}(U) \rightarrow G \times U$ . Pela continuidade de  $\pi$  em  $p$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,  $\pi(p_n) \in U$ . Além disso, a relação  $\pi \circ \Phi_g = \pi$  implica que  $\pi(\Phi(g_n, p_n)) = \pi(p_n) \in U$  desde que  $n \geq n_0$ , donde,  $\Phi(g_n, p_n) \in \pi^{-1}(U)$  desde que  $n \geq n_0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $n_0 = 0$ . Temos então que  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(\Phi(g_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$  são duas seqüências de pontos em  $\pi^{-1}(U)$  cujos limites pertencem ao conjunto  $\pi^{-1}(U)$ . Pela continuidade e pela equivariância de  $\psi = (\kappa, \tau)$ , segue-se que  $(\kappa(p_n), \tau(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(g_n \kappa(p_n), \tau(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$  são duas seqüências de  $G \times U$  que convergem em  $G \times U$ . Em particular,  $(\kappa(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(g_n \kappa(p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ , são duas seqüências convergentes de  $G$ . Mas como sabemos (veja Proposição 3.1.1), a multiplicação à esquerda é uma ação própria de  $G$  sobre  $G$ , donde existe uma subsequência convergente  $(g_n)_{n \in I}$  de  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que converge em  $G$ . Segue-se que  $\Phi$  é própria. Concluimos assim a prova de (i).

Seja  $p \in P$ . Vamos mostrar que  $\pi^{-1}(\pi(p)) = Orb(p)$ .

A inclusão  $Orb(p) \subseteq \pi^{-1}(\pi(p))$  decorre imediatamente da relação  $\pi \circ \Phi_g = \pi$ . Seja agora  $q \in \pi^{-1}(\pi(p))$ . Escolha um aberto  $U \subseteq M$  contendo  $\pi(p)$  e uma trivialização  $\psi = (\kappa, \tau) : \pi^{-1}(U) \rightarrow G \times U$ . Note que  $q$  pertence ao conjunto  $\pi^{-1}(U)$  que é o domínio de definição de  $\psi$ , e portanto podemos considerar o ponto  $\psi(q) = (\kappa(q), \tau(q))$ . Note também que  $\tau(q) = \tau(p)$ , pois  $\pi(p) = \pi(q)$  e  $\tau = \pi_2 \circ \psi = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$ , onde  $\pi_2 : G \times U \rightarrow U$ ,  $(g, u) \mapsto u$  e  $\tau = \pi_2 \circ \psi$ . Assim,

$$\begin{aligned} \psi(q) &= (\kappa(q), \tau(q)) = (\kappa(q), \tau(p)) \\ &= (\kappa(q)(\kappa(p))^{-1}\kappa(p), \tau(p)) \\ &= (L_{\kappa(p)(\kappa(p))^{-1}} \times Id_U)(\kappa(p), \tau(p)) \\ &= (L_{\kappa(p)(\kappa(p))^{-1}} \times Id_U)(\psi(p)) \\ &= \psi(\Phi_g(p)), \end{aligned}$$

onde  $g := \kappa(q)\kappa(p)^{-1}$ . A aplicação  $\psi$  sendo injetiva, segue-se que  $q = \Phi_g(p)$ . Isso mostra a inclusão  $\pi^{-1}(\pi(p)) \subseteq Orb(p)$ .

Vamos mostrar que  $\pi$  é uma submersão. Seja  $p \in P$ . Escolha um aberto  $U \subseteq M$

contendo  $\pi(p)$  e uma trivialização  $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G \times U$ . Como  $\pi = \pi_2 \circ \psi$ , então

$$\pi_{*p} = (\pi_2 \circ \psi)_{*p} = (\pi_2)_{*\psi(p)} \psi_{*p}.$$

Como  $\psi$  é um difeomorfismo,  $\psi_{*p}$  é um isomorfismo linear, e portanto,  $\pi_{*p}$  é sobrejetiva se e somente se  $(\pi_2)_{*\psi(p)}$  é sobrejetiva, o que é obviamente o caso. Isso mostra também que o posto de  $\pi$  é  $\dim(M)$ , e que  $\dim(P) = \dim(M) + \dim(G)$ .  $\square$

**Proposição 3.2.9.** *Seja  $\pi : P \longrightarrow M$  um fibrado principal, com grupo de estrutura  $G$  e ação  $\Phi : G \times P \longrightarrow P$ . Seja  $\bar{\pi} : P \longrightarrow G \backslash P$  a aplicação quociente. Então a aplicação*

$$\phi : \begin{cases} G \backslash P \longrightarrow M, \\ \bar{\pi}(p) \longmapsto \pi(p), \end{cases}$$

*está bem definida e é um difeomorfismo.*

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que  $\phi$  está bem definida.

Suponha que  $\bar{\pi}(p) = \bar{\pi}(q)$ . Existe então  $g \in G$  tal que  $p = \Phi(g, q)$ , e como  $\pi \circ \Phi_h = \pi$  para todo  $h \in G$ , temos então que  $\pi(p) = \pi(\Phi(g, q)) = \pi(q)$ . Isso mostra que  $\pi(p) = \pi(q)$  e implica que  $\phi$  está bem definida.

Afirmemos agora que  $\phi$  é bijetora. Sejam  $p, q \in P$ . Levando em conta o Lema 3.2.8 (que diz que  $\pi^{-1}(\pi(p)) = \text{Orb}(p)$ ) temos que:

$$\begin{aligned} \pi(p) = \pi(q) &\Rightarrow \pi^{-1}(\pi(p)) = \pi^{-1}(\pi(q)), \\ &\Rightarrow \text{Orb}(p) = \text{Orb}(q), \\ &\Rightarrow p = \Phi_g(q), \text{ para algum } g \in G, \\ &\Rightarrow \bar{\pi}(p) = \bar{\pi}(q). \end{aligned}$$

Isso mostra que  $\phi$  é injetora.

A sobrejetividade de  $\phi$  decorre do fato de  $\pi$  ser sobrejetiva. Note que a aplicação inversa  $\phi^{-1}$  é dada por:

$$\phi^{-1} : \begin{cases} M \longrightarrow G \backslash P, \\ \pi(p) \longmapsto \bar{\pi}(p). \end{cases}$$

Mostremos agora que  $\phi$  é suave. Consideramos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \bar{\pi} \swarrow & \circlearrowleft & \searrow \pi & \\ G \backslash P & \xrightarrow{\phi} & & M & \end{array}$$

Pelo Lema 3.2.8,  $\pi$  é uma submersão sobrejetiva. Assim,  $\phi$  é suave se e somente se,  $\phi \circ \bar{\pi}$  é suave, o que é o caso.

A suavidade de  $\phi^{-1}$  mostra-se de maneira análoga, considerando o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow & \circlearrowleft & \searrow & \pi \\ \bar{\pi} & & & & \\ G \setminus P & \xleftarrow{\phi^{-1}} & & & M \end{array}$$

□

**Teorema 3.2.10.** *Seja  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  uma ação livre e própria de um grupo de Lie  $G$ . Então a aplicação quociente,*

$$\pi : M \longrightarrow G \setminus M,$$

*é um fibrado principal com grupo de estrutura  $G$  e ação  $\Phi$ .*

*Demonstração.* Seja  $p \in M$ . Como  $\Phi$  é livre e própria, existe um slice  $S \subseteq M$  contendo  $p$  e tal que (por definição de um slice) a restrição de  $\Phi$  ao conjunto  $G \times S$  é um difeomorfismo sobre sua imagem.

Seja então,

$$\Psi_S : \Phi(G \times S) \longrightarrow G \times S,$$

a aplicação inversa de  $\Phi|_{G \times S}$ .

Lembremos que (veja Seção (2.6)):

- $\Psi_S$  é uma aplicação equivariante, isto é, para todo  $g \in G$ , tem-se:

$$\Psi_S \circ \Phi_g = (L_g \times Id_S) \circ \Psi_S,$$

- o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \Phi(G \times S) & \xrightarrow{\Psi_S} & G \times S & & \\ & \searrow \pi & \circlearrowleft & \swarrow \pi_2 & \\ & & \pi(S) \simeq S & & \end{array}$$

- $(S, \pi|_S)$  é uma carta de  $G \setminus M$  e  $\pi^{-1}(\pi(S)) = \Phi(G \times S)$ .

Daí, vê-se que as aplicações da forma  $\Psi_S$ , onde  $S$  é um slice de  $M$ , fornecem uma família de trivializações de  $M$  que torna  $\pi : M \longrightarrow G \setminus M$  um fibrado principal com grupo de estrutura  $G$  e ação  $\Phi$ . □

*Observação 3.2.11.* Segue da Proposição 3.2.9 e do Teorema 3.2.10 que a noção de fibrado principal e a de uma ação livre e própria são equivalentes.

### 3.3 Ações hamiltonianas e órbitas coadjuntas

Seja  $G$  um grupo de Lie com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Denotamos por  $GL(\mathfrak{g})$  o grupo das aplicações lineares invertíveis de  $\mathfrak{g}$  para  $\mathfrak{g}$ . Lembramos que a representação adjunta de  $G$  é a aplicação  $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ , definida por:

$$Ad_g(\xi) := (R_{g^{-1}} \circ L_g)_{*e} \xi, \quad (3.3.1)$$

onde  $g \in G$ ,  $\xi \in \mathfrak{g}$  e  $e$  é o elemento neutro de  $G$ . Lembramos também que a derivada de  $Ad$  no ponto  $e$  é denotada por  $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ , onde  $L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  denota o espaço das aplicações lineares  $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ .

**Definição 3.3.1.** Seja  $G$  um grupo de Lie com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , e seja  $\mathfrak{g}^*$  o seu dual. A representação coadjunta  $Ad^*$  é a aplicação  $G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}^*)$  definida pela fórmula

$$\langle Ad_g^* \alpha, \xi \rangle = \langle \alpha, Ad_{g^{-1}} \xi \rangle, \quad (3.3.2)$$

onde  $g \in G$ ,  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$  e  $\xi \in \mathfrak{g}$ , e onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\alpha, \xi) \mapsto \alpha(\xi)$ .

Verfica-se facilmente que a aplicação  $Ad^*$  é uma representação de  $G$  sobre  $\mathfrak{g}^*$ , isto é  $Ad_e^* = Id$  e  $Ad_{gh}^* = Ad_g^* \circ Ad_h^*$ , para todos  $g, h \in G$ . Além disso decorre facilmente da suavidade de  $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$  e da suavidade de  $i : G \longrightarrow G$ ,  $g \mapsto g^{-1}$ , que  $Ad^* : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}^*)$  é suave.

Denotaremos por  $ad^* : \mathfrak{g} \longrightarrow L(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}^*)$  a derivada de  $Ad^*$  no ponto  $e$ , isto é,

$$ad_\xi^* = (Ad^*)_{*e} \xi,$$

para todo  $\xi \in \mathfrak{g}$ .

*Observação 3.3.2.* As órbitas de  $Ad^*$  em  $\mathfrak{g}^*$  são chamadas de *órbitas coadjuntas*. Assim um conjunto  $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}^*$  é uma órbita coadjunta se e somente se, existe  $\beta \in \mathfrak{g}^*$  tal que:

$$\mathcal{O} = \{Ad_g^* \beta \mid g \in G\}.$$

Dado  $\alpha \in \mathcal{O}$ , mostra-se então por meio do Corolário 3.1.6 que

$$T_\alpha \mathcal{O} = \{ad_\xi^* \alpha \mid \xi \in \mathfrak{g}\}.$$

Um resultado importante da geometria simplética é que a fórmula,

$$(\omega_{\mathcal{O}})_\alpha (ad_\xi^* \alpha, ad_\eta^* \alpha) := \langle \alpha, [\xi, \eta] \rangle,$$

define uma forma simplética em  $\mathcal{O}$  chamada de forma simplética de *Kirillov-Kostant-Souriau* (veja [1]).

**Definição 3.3.3.** Seja  $G$  um grupo de Lie com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e seja  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  uma ação à esquerda. O *campo fundamental* de  $\xi \in \mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  é o campo de vetores  $\xi_M$  em  $M$  definido por:

$$(\xi_M)_p := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi(\exp(t\xi), p). \quad (3.3.3)$$

Para ver que  $\xi_M$  é suave, considere a aplicação,

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \\ (t, p) \mapsto \Phi(\exp(t\xi), p). \end{cases}$$

Para  $p \in M$  fixado, a aplicação  $\mathbb{R} \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \varphi(t, p)$  é um grupo a 1-parâmetro (isso decorre das propriedades da aplicação exponencial, veja Proposição 2.2.5 e Observação 2.2.6) cuja derivada em  $t = 0$  é o vetor  $(\xi_M)_p$ . Assim,  $\varphi$  é o fluxo de  $\xi_M$ . Sendo um fluxo suave,  $\xi_M$  é um campo suave (veja [11]).

Note que,

$$(\xi_M)_p := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi_p(\exp(t\xi)) = (\Phi_p)_{*e} \xi.$$

**Lema 3.3.4.** *Seja  $p \in M$  arbitrário. Então,*

$$\begin{aligned} (i) \quad T_p(G.p) &= \{(\xi_M)_p \in T_p M \mid \xi \in \mathfrak{g}\}, \\ (ii) \quad \text{Lie}(G_p) &= \{\xi \in \mathfrak{g} \mid (\xi_M)_p = 0\}, \end{aligned}$$

onde  $G.p = \text{Orb}(p)$  é a órbita de  $p$  e  $G_p$  é o estabilizador.

*Demonstração.* Basta observar que:

- (1)  $(\xi_M)_p = (\Phi_p)_{*e} \xi$ ,
- (2)  $\Phi_p : G \rightarrow G.p$ ,  $g \mapsto \Phi(g, p)$  é uma submersão (veja Corolário 3.1.6),
- (3)  $\text{Lie}(G_p) = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid (\Phi_p)_{*e} \xi = 0\}$  (veja Proposição 2.6.12). □

A seguir, usaremos a notação  $\mathfrak{g}.p = T_p(G.p)$  e  $\mathfrak{g}_p = \text{Lie}(G_p)$ .

**Definição 3.3.5.** Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética, e seja  $G$  um grupo de Lie. Uma ação  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  é dita *simplética* se ela preserva a forma simplética, isto é, se para todo  $g \in G$ ,  $\Phi_g^* \omega = \omega$ .

**Definição 3.3.6.** Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética. Uma ação simplética  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  é *hamiltoniana* se existe uma aplicação  $G$ -equivariante,

$$J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*,$$

chamada *aplicação momentum*, que satisfaz para todo  $\xi \in \mathfrak{g}$ ,

$$\omega(\xi_M, \cdot) = dJ^\xi, \quad (\text{igualdade de 1-formas}) \quad (3.3.4)$$

onde  $J^\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \langle J(p), \xi \rangle$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\alpha, \xi) \mapsto \alpha(\xi)$ .



A “ $G$ -equivariância de  $J$ ” deve ser entendida relativa às ações  $\Phi$  e  $Ad^*$ . Assim,  $J$  é  $G$ -equivariante significa que para todo  $g \in G$ ,

$$J \circ \Phi_g = Ad_g^* \circ J.$$

Um quádruplo  $(M, \omega, \Phi, J)$ , onde  $(M, \omega)$  é uma variedade simplética e  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  é uma ação hamiltoniana com aplicação momentum  $J$  é chamado de  $G$ -espaço Hamiltoniano.

**Exemplo 3.3.7.** Seja  $(S^2, \omega = \det)$  a variedade simplética considerada no Exemplo 1.3.4. Lembramos que  $\det = j^* \alpha$ , onde  $j : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  é a aplicação de inclusão e  $\alpha$  é a duas formas de  $\mathbb{R}^3$  definida por  $\alpha_p(u, v) = \det(p, u, v)$ , onde  $p, u, v \in \mathbb{R}^3$ . Afirmemos que a ação  $\Phi : S^1 \times S^2 \rightarrow S^2$  definida por:

$$\Phi(e^{i\theta}, (x, y, z)) = \left( \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, z \right),$$

é hamiltoniana, com aplicação momentum,

$$J : \begin{cases} S^2 \rightarrow \operatorname{Lie}(S^1) \cong \mathbb{R}, \\ (x, y, z) \mapsto z, \end{cases}$$

(descreveremos mais adiante a identificação  $\operatorname{Lie}(S^1) \cong \mathbb{R}$ ).

Para ver que  $\Phi : S^1 \times S^2 \rightarrow S^2$  é simplética, tome  $\theta \in \mathbb{R}$ , e defina:

$$R(\theta) = \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (x, y, z) \mapsto \left( \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, z \right). \end{cases}$$

Dados  $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  e  $u, v \in T_p \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$  temos, levando em conta a linearidade de  $R(\theta)$ , que:

$$\begin{aligned} ((R(\theta))^* \alpha)_p(u, v) &= \alpha_{R(\theta)p}(R(\theta)_* u, R(\theta)_* v), \\ &= \alpha_{R(\theta)p}(R(\theta)u, R(\theta)v) \\ &= \det(R(\theta)p, R(\theta)u, R(\theta)v) \\ &= \det(R(\theta)) \det(p, u, v) \\ &= \det(p, u, v) = \alpha_p(u, v), \end{aligned}$$

onde usamos que o determinante de uma rotação é igual a 1. Assim  $(R(\theta))^* \alpha = \alpha$  para

todo  $\theta \in \mathbb{R}$ . Usando a relação  $R(\theta) \circ j = j \circ \Phi_{e^{i\theta}}$ , temos então que:

$$\begin{aligned}
 (\Phi_{e^{i\theta}})^* \omega &= (\Phi_{e^{i\theta}})^* j^* \alpha \\
 &= (j \circ \Phi_{e^{i\theta}})^* \alpha \\
 &= (R(\theta) \circ j)^* \alpha \\
 &= j^* R(\theta)^* \alpha \\
 &= j^* \alpha = \omega.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\Phi$  é simplética.

Antes de mostrar que é hamiltoniana, vamos esclarecer a identificação  $Lie(S^1) \cong \mathbb{R}$  usada acima.

Seja  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $\theta \mapsto e^{i\theta}$ . É bem conhecido na geometria diferencial que  $\pi$  é um recobrimento. Logo a derivada de  $\pi$  em 0,

$$\pi_{*0} : T_0\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \rightarrow T_1S^1 \cong Lie(S^1), \quad (3.3.5)$$

é uma bijeção. Usamos (3.3.5) para identificar  $\mathbb{R}$  e  $Lie(S^1)$ . Além disso,  $\pi$  é um homomorfismo de grupos de Lie, o que implica pela Proposição 2.4.2 que para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp_{S^1}(\pi_{*0}\xi) = \pi(\exp_{\mathbb{R}}\xi).$$

Como  $\exp_{\mathbb{R}} = Id_{\mathbb{R}}$ , obtemos,

$$\exp_{S^1}(\pi_{*0}\xi) = e^{i\xi}.$$

Identificando  $\mathbb{R}$  e  $Lie(S^1)$  por meio de (3.3.5) temos então que  $\exp_{S^1} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  é dada por,

$$\exp_{S^1}(\xi) = e^{i\xi}, \quad (3.3.6)$$

onde  $\xi \in \mathbb{R}$ . Daí, podemos calcular o campo fundamental de  $\xi \in \mathbb{R} \cong Lie(S^1)$ :

$$\begin{aligned}
 (\xi_{S^2})_p &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi(\exp(t\xi), p) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi(e^{it\xi}, p) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \left( \begin{pmatrix} \cos t\xi & -\sin t\xi \\ \sin t\xi & \cos t\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, z \right) \\
 &= \left( \begin{pmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 0 \right) \\
 &= (-\xi y, \xi x, 0) = \xi(-y, x, 0).
 \end{aligned}$$

Assim  $(\xi_{S^2})_p = \xi(-y, x, 0)$ .

Considere agora a aplicação  $J : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^* = Lie(S^1)^*$ , definida, para  $p = (x, y, z) \in S^2$  e  $\xi \in \mathbb{R}$ , por:

$$\langle J(x, y, z), \xi \rangle := z\xi.$$

Note que  $J^\xi : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto z\xi$ . Vamos mostrar que para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\omega(\xi_{S^2}, \cdot) = dJ^\xi(\cdot).$$

Dado  $p = (x, y, z) \in S^2$  e  $u = (u_1, u_2, u_3) \in T_p S^2$ , temos que:

$$\begin{aligned} \omega_p(\xi_{S^2}, u) &= \det(p, \xi(-y, x, 0), (u_1, u_2, u_3)) \\ &= \xi \begin{vmatrix} x & -y & u_1 \\ y & x & u_2 \\ z & 0 & u_3 \end{vmatrix} \\ &= \xi [x \begin{vmatrix} x & u_2 \\ 0 & u_3 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} -y & u_1 \\ 0 & u_3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -y & u_1 \\ x & u_2 \end{vmatrix}] \\ &= \xi [x^2 u_3 + y^2 u_3 + z(-y u_2 - x u_1)], \end{aligned}$$

e como  $-y u_2 - x u_1 = z u_3$  (pois  $(u_1, u_2, u_3) \in T_p S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, v \rangle = 0\}$ ), segue que

$$\begin{aligned} \omega_p(\xi_{S^2}, u) &= \xi(x^2 u_3 + y^2 u_3 + z^2 u_3) \\ &= \xi u_3(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \xi u_3. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Por outro lado, dada uma curva  $\alpha(t)$  em  $S^2$  satisfazendo  $\alpha(0) = p$  e  $\dot{\alpha}(0) = u$ , temos que

$$\begin{aligned} dJ_p^\xi(u) &= J_{*p}^\xi(u), \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 J^\xi(\alpha(t)), \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \alpha_3(t)\xi, \\ &= u_3 \xi. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Comparando (3.3.7) e (3.3.8) obtemos a igualdade,

$$\omega(\xi_{S^2}, \cdot) = dJ^\xi,$$

que vale para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ .

Segue-se que  $J : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^*$  é uma aplicação momentum (note que  $J$  é equivariante, isto é,  $J \circ \Phi_{e^{i\theta}} = J$ ). Identificando  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^*$  por meio da métrica euclidiana, essa aplicação é simplesmente a aplicação,

$$J(x, y, z) = z.$$

Concluimos que  $(S^2, \omega = \det, \Phi, J)$  é um  $S^1$ -espaço hamiltoniano.

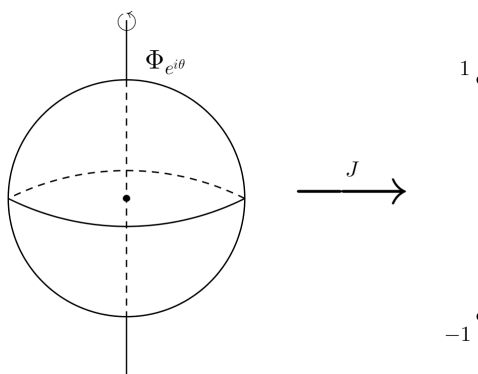


Figura 3.3.1: O exemplo e mais simples do Teorema de convexidade de *Atiyah-Guillemin-Strenberg*.

*Observação 3.3.8.* Neste exemplo, a imagem da aplicação momentum é o conjunto convexo em  $\mathbb{R}$  gerado por  $-1, 1$  que são as imagens por  $J$  dos pontos fixos  $(0, 0, -1)$  e  $(0, 0, 1)$ , respectivamente (veja figura (3.3.1)). Isso é um caso particular do Teorema de convexidade de *Atiyah-Guillemin-Strenberg*.

**Exemplo 3.3.9.** Seja  $G$  um grupo de Lie e  $H$  um subgrupo de Lie de  $G$ . Denotamos por  $i : \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$  a aplicação de inclusão e por  $i^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  a aplicação definida por

$$\langle i^*(\alpha), \xi \rangle := \langle \alpha, i(\xi) \rangle,$$

onde  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$  e  $\xi \in \mathfrak{h}$ . Suponha que  $(M, \omega, \Phi, J)$  seja um  $G$ -espaço hamiltoniano. Então é fácil verificar que a ação de  $H$  em  $M$  é hamiltoniana com aplicação momentum,

$$i^* \circ J : M \longrightarrow \mathfrak{h}^*.$$

**Exemplo 3.3.10.** Fazendo a seguinte identificação  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ , temos que  $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$  é uma variedade simplética munida da forma simplética canônica  $\omega_0$  (veja Proposição 1.3.3). Dados  $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ , mostra-se que a ação  $\Phi : \mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$  definida por,

$$(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \cdot (z_1, \dots, z_n) := (e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_n} z_n),$$

é hamiltoniana com aplicação momentum  $J$  dada por,

$$J : \begin{cases} \mathbb{C}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n \\ (z_1, \dots, z_n) \mapsto -\frac{1}{2} (\|z_1\|^2, \dots, \|z_n\|^2) + \text{constante.} \end{cases}$$

Mais adiante explicaremos as identificações  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  e  $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ . O quádruplo  $(\mathbb{C}^n, \omega_0, \Phi, J)$  é chamado de  $\mathbb{T}^n$ -espaço hamiltoniano.

**Exemplo 3.3.11.** Seja  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  uma ação de um grupo de Lie  $G$ . Definimos uma ação  $\Phi_* : G \times T^*M \longrightarrow T^*M$  pela fórmula:

$$\langle \Phi_*(g, \alpha), (\Phi_g)_{*p} u \rangle := \langle \alpha, u \rangle,$$

onde  $\alpha \in T_p^*M$ ,  $u \in T_pM$  e  $g \in G$ . Essa ação é chamada de “*lifted action*”. Definimos também a aplicação:

$$J : T^*M \longrightarrow \mathfrak{g}^*,$$

por:

$$\langle J(\alpha_p), \xi \rangle := \langle \alpha_p, (\xi_M)_p \rangle,$$

onde  $\alpha_p \in T_p^*M$  e  $\xi \in \mathfrak{g}$ . Mostra-se que  $(T^*M, \omega = -d\theta, \Phi_*, J)$  é um  $G$ -espaço hamiltoniano (veja[1]), onde  $\omega$  é a forma simplética canônica do fibrado cotangente (veja Teorema 1.3.5)

**Exemplo 3.3.12.** Seja  $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}^*$  uma órbita coadjunta de um grupo de Lie  $G$  munida da forma simplética de Kirillov-Konstant-Souriau  $\omega$  (veja Observação 3.3.2). Seja  $j : \mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}^*$  a aplicação inclusão. Mostra-se então que  $(\mathcal{O}, \omega, Ad^*, j)$  é um espaço hamiltoniano (veja[1]).

**Proposição 3.3.13.** *Seja  $(M, \omega, \Phi, J)$  um  $G$ -espaço hamiltoniano, e seja  $p \in M$ . Então,*

$$Im(J_{*p}) = \mathfrak{g}_p^\circ, \tag{3.3.9}$$

$$Ker(J_{*p}) = (\mathfrak{g} \cdot p)^{\omega_p}, \tag{3.3.10}$$

onde  $\mathfrak{g}_p^\circ \subseteq \mathfrak{g}^*$ , é o aniquilador de  $\mathfrak{g}_p$  e onde  $(\mathfrak{g} \cdot p)^{\omega_p}$  é o ortogonal simplético de  $\mathfrak{g} \cdot p$  no espaço simplético  $(T_pM, \omega_p)$ .

*Demonstração.* Seja  $p \in M$  arbitrário. Por definição da aplicação momentum, temos que

$$\omega((\xi_M)_p, u) = (dJ^\xi)_p(u), \tag{3.3.11}$$

para todo  $\xi \in \mathfrak{g}$  e todo  $u \in T_pM$ . O segundo membro pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} (dJ^\xi)_p(u) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 J^\xi(\alpha(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \langle J(\alpha(t)), \xi \rangle \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (ev_\xi \circ J)(\alpha(t)), \end{aligned}$$

onde  $ev_\xi : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \mapsto \alpha(\xi)$ . Por linearidade de  $ev_\xi$ ,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 (ev_\xi \circ J)(\alpha(t)) = ev_\xi \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_0 J(\alpha(t)) \right) = ev_\xi(J_{*p}u) = \langle J_{*p}u, \xi \rangle.$$

Podemos então reescrever (3.3.11) como,

$$\omega((\xi_M)_p, u) = \langle J_{*p}(u), \xi \rangle.$$

Decorre imediatamente dessa fórmula que  $\text{Ker}(J_{*p}) = (\mathfrak{g}.p)^{\omega_p}$ .

Vamos mostrar a igualdade  $\text{Im}(J_{*p}) = \mathfrak{g}_p^\circ$ . Seja  $\alpha = J_{*p}u \in \text{Im}(J_{*p})$ . Levando em conta a igualdade  $\mathfrak{g}_p = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid (\xi_M)_p = 0\}$ , temos que para todo  $\xi \in \mathfrak{g}_p$ ,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \xi \rangle &= \langle J_{*p}u, \xi \rangle \\ &= \omega((\xi_M)_p, u) \\ &= \omega(0, u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isso mostra a inclusão  $\text{Im}(J_{*p}) \subseteq \mathfrak{g}_p^\circ$ . Para mostrar que é uma igualdade, basta mostrar que

$$\dim(\text{Im}(J_{*p})) = \dim(\mathfrak{g}_p^\circ). \quad (3.3.12)$$

Para mostrar (3.3.12), note que:

- $\dim(\text{Im}(J_{*p})) + \dim(\text{Ker}(J_{*p})) = \dim(M)$  (Teorema do núcleo e da imagem),
- $\dim(\mathfrak{g}_p^\circ) + \dim(\mathfrak{g}_p) = \dim(\mathfrak{g})$  (veja equação (1.1.2)),
- $\text{Ker}(J_{*p}) = (\mathfrak{g}.p)^{\omega_p}$  (veja acima),
- $\dim((\mathfrak{g}.p)^{\omega_p}) = \dim(T_pM) - \dim(\mathfrak{g}.p)$  (veja Lema 1.1.9)

Segue desses pontos que (3.3.12) é equivalente à

$$\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{g}.p) + \dim(\mathfrak{g}_p),$$

e essa última igualdade decorre trivialmente do Teorema do núcleo e da imagem pois,  $\mathfrak{g}.p = \text{Im}(\Phi_p)_{*e}$  e  $\mathfrak{g}_p = \text{Ker}(\Phi_p)_{*e}$ . A proposição segue.  $\square$

**Corolário 3.3.14.** *Seja  $(M, \omega, \Phi, J)$  um  $G$ -espaço hamiltoniano. Suponha que para todo  $p \in M$ ,  $\mathfrak{g}_p = \{0\}$  (diz-se que  $\Phi$  é localmente livre). Então  $J$  é uma submersão sobre um conjunto aberto de  $\mathfrak{g}^*$ .*

*Observação 3.3.15.* Uma ação livre é sempre localmente livre.

**Corolário 3.3.16.** *Seja  $(M, \omega, \Phi, J)$  um  $G$ -espaço hamiltoniano. Se  $\Phi$  é transitiva, então  $J$  é uma imersão.*

## 3.4 Redução Simplética

**Lema 3.4.1.** *Seja  $K \subseteq G$  um subgrupo de Lie fechado do grupo de Lie  $G$ , e seja  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  uma ação livre e própria. Suponha que uma subvariedade  $N$  de  $M$  seja  $K$ -invariante (isto é,  $\Phi_g(N) \subseteq N$  para todo  $g \in K$ ). Então, a ação induzida de  $K$  sobre  $N$  é suave, livre e própria.*

*Demonstração.* Considere a seguinte aplicação:

$$\bar{\Phi} : \begin{cases} K \times N \longrightarrow N, \\ (k, n) \longmapsto \Phi(k, n). \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Por hipótese  $K \subseteq G$  é um subgrupo de Lie fechado, o que significa que  $K$  é uma subvariedade de  $G$  (veja Definição 2.5.2). Assim podemos considerar a subvariedade  $K \times N \subseteq G \times M$ . Como  $N$  é  $K$  invariante então  $\Phi(K \times N) \subseteq N$ , isso mostra que  $\bar{\Phi}$  está bem definida.

Para ver que  $\bar{\Phi}$  é suave, considere a aplicação inclusão  $i : N \hookrightarrow M$ . Assim,

$$\Phi = i \circ \bar{\Phi}.$$

Portanto  $\bar{\Phi}$  é suave, se somente se,  $\Phi$  e  $i$  é suave o que é o caso. Além disso  $\bar{\Phi}$  é a restrição de uma aplicação suave.

Para ver que  $\bar{\Phi}$  é livre, veja que para todo  $g \in G$  temos que

$$\bar{\Phi}(g, p) = p \Rightarrow \bar{\Phi}(g, p) = \Phi(g, p) = p,$$

mas como  $\Phi$  é livre por hipótese, então  $g = e$ . Isso mostra que  $\bar{\Phi}$  é livre.

Para mostrar que  $\bar{\Phi}$  é própria, usaremos a Proposição 2.6.21.

Seja  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $K$  e  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $N$  tal que:

$$\begin{aligned} p_n &\longrightarrow p \in N, \\ \bar{\Phi}(k_n, p_n) &\longrightarrow h \in N. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que existe uma subsequência  $(k_{n_j})_{n_j \in I}$ , onde  $I \subseteq \mathbb{N}$ , da sequência  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que converge em  $K$ .

Como  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $N \subseteq M$ , então  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência em  $M$ . Como  $N$  é subvariedade de  $M$ , a topologia de  $N$  é a topologia induzida de  $M$ , então  $p_n$  converge para algum  $p \in M$ . Analogamente  $\bar{\Phi}(k_n, p_n)$  é uma sequência em  $N \subseteq M$ , então é uma sequência em  $M$ , assim  $\bar{\Phi}(k_n, p_n)$  converge para algum  $h \in M$ .

Como  $\bar{\Phi}(k_n, p_n) = \Phi(k_n, p_n)$  e  $\Phi$  é própria, podemos concluir que existe uma subsequência  $(k_{n_j})_{n_j \in I \subseteq \mathbb{N}}$  de  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que converge para  $k_0 \in G$  na topologia de  $G$ . Por hipótese,  $K$  é subgrupo de Lie fechado, ou seja  $K$  é fechado em  $G$  (veja Teorema 2.5.6), e como  $K$  é induzida pela topologia de  $G$ , então  $(k_{n_j})_{n_j \in I \subseteq \mathbb{N}}$  converge para  $k_0 \in K$ . Portanto  $\bar{\Phi}$  é própria, o Lema segue.  $\square$

Vamos aplicar esse lema à seguinte situação:

Seja  $(M, \omega, \Phi, J)$  um  $G$ -espaço hamiltoniano. Dado  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ , denotaremos por  $G_\mu$  o estabilizador de  $\mu$  em relação a  $Ad^*$ , isto é,

$$G_\mu := \{g \in G \mid Ad_g^* \mu = \mu\}.$$

Sejam  $g \in G_\mu$  e  $p \in J^{-1}(\mu)$ . Pela equivariância de  $J$ , temos que:

$$J(\Phi(g, p)) = (Ad_g^* \circ J)(p) = Ad_g^*(\mu) = \mu.$$

Assim,  $\Phi(g, p) \in J^{-1}(\mu)$  o que implica que  $J^{-1}(\mu)$  é  $G_\mu$ -invariante.

**Proposição 3.4.2.** *Seja  $(M, \omega, \Phi, J)$  um  $G$ -espaço hamiltoniano e seja  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ . Suponha que  $\Phi$  seja livre e própria e que  $J^{-1}(\mu) \neq \emptyset$ . Então,*

- $J$  é uma submersão, em particular,  $J^{-1}(\mu)$  é uma subvariedade de  $M$ .
- O espaço  $M_\mu := G_\mu \backslash J^{-1}(\mu)$  é uma variedade.
- A aplicação quociente  $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \longrightarrow M_\mu$  é uma submersão sobrejetiva.

*Demonstração.* Esses resultados decorrem diretamente do Teorema 2.7.1, do Corolário 3.3.14 e do Lema 3.4.1. □

*Observação 3.4.3.* A aplicação  $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \longrightarrow M_\mu$  é um fibrado principal com grupo de estrutura  $G_\mu$ .

**Teorema 3.4.4.** *(Marsden-Weinstein-Meyer) Seja  $(M, \omega, \Phi, J)$  um  $G$ -espaço hamiltoniano e seja  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ . Suponha que  $\Phi$  seja livre e própria e que  $J^{-1}(\mu) \neq \emptyset$ . Então, existe uma única forma simplética  $\omega_\mu$  em  $M_\mu = G_\mu \backslash J^{-1}(\mu)$  caracterizada pela fórmula:*

$$\pi_\mu^* \omega_\mu = i^* \omega,$$

onde  $i : J^{-1}(\mu) \longrightarrow M$  é a aplicação de inclusão. O par  $(M_\mu, \omega_\mu)$  é chamado espaço simplético reduzido de  $(M, \omega, \Phi, J)$  em  $\mu$ .

*Observação 3.4.5.* Em vez da hipótese,

- (a)  $\Phi$  é livre e própria.

Poderíamos enunciar o Teorema 3.4.4 com a seguinte hipótese:

- (b)  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  é um valor regular de  $J$  e a ação de  $G_\mu$  sobre  $J^{-1}(\mu)$  é livre e própria.

O ponto importante, que se verifica tanto com a hipótese (a) quanto a (b), é que  $J^{-1}(\mu) \longrightarrow G_\mu \backslash J^{-1}(\mu)$  é um fibrado principal.

Para mostrar o Teorema 3.4.4 precisamos de alguns resultados preliminares.

A seguir, denotaremos por  $ad^* : \mathfrak{g} \longrightarrow L(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}^*)$  a derivada de  $Ad^* : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}^*)$  no ponto  $e$ , e por  $\mathfrak{g}_\mu$  a álgebra de Lie de  $G_\mu = \{g \in G \mid Ad_g^* \mu = \mu\}$ .

**Lema 3.4.6.** *Temos as seguintes fórmulas:*

- (i)  $\langle ad_\xi^* \alpha, \eta \rangle = -\langle \alpha, ad_\xi \eta \rangle$ , onde  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$  e  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ ,
- (ii)  $\mathfrak{g}_\mu = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid ad_\xi^* \mu = 0\}$ .



*Demonstração.* Primeiro vamos provar (i). Sejam  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$  e  $\xi \in \mathfrak{g}$ . Por definição de  $Ad^*$ , temos que:

$$\langle Ad_g^* \alpha, \xi \rangle = \langle \alpha, Ad_{g^{-1}} \xi \rangle, \quad (3.4.2)$$

para todo  $g \in G$ . Consideremos as aplicações lineares,

- $ev_\alpha : L(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}^*) \longrightarrow \mathfrak{g}^*, l \mapsto l(\alpha),$
- $ev_\xi : L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g}, l \mapsto l(\xi),$
- $\kappa_\xi : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \alpha \mapsto \langle \alpha, \xi \rangle,$
- $\kappa_\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}, \xi \mapsto \langle \alpha, \xi \rangle.$

A equação (3.4.2) reescreve-se como,

$$(\kappa_\xi \circ ev_\alpha \circ Ad^*)(g) = (\kappa_\alpha \circ ev_\xi \circ Ad \circ i)(g), \quad (3.4.3)$$

onde  $i : G \longrightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ . Derivando a equação (3.4.3) no ponto  $e$  e na direção  $\eta \in \mathfrak{g}$ , obtemos

$$\kappa_\xi \circ ev_\alpha \circ ad_\eta^* = \kappa_\alpha \circ ev_\xi \circ ad \circ i_{*e} \eta,$$

e como  $i_{*e} \eta = -\eta$  (veja Lema 2.1.4), segue-se que,

$$\kappa_\xi \circ ev_\alpha \circ ad_\eta^* = -\kappa_\alpha \circ ev_\xi \circ ad_\eta,$$

que é a formula desejada.

O item (ii) decorre imediatamente da Proposição 2.6.12 e da fórmula,

$$\begin{aligned} (Ad_\mu^*)_{*e} \xi &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 Ad^*(exp(t\xi), \mu) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (ev_\mu \circ Ad^* \circ exp)(t\xi) \\ &= ev_\mu(ad_\xi^*) \\ &= ad_\xi^*(\mu), \end{aligned}$$

onde  $ev_\mu : L(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}^*) \longrightarrow \mathfrak{g}^*, l \mapsto l(\mu)$ . □

**Lema 3.4.7.** *Seja  $p \in J^{-1}(\mu)$ . Então  $Ker(i_\mu^* \omega_p) = T_p(G_\mu \cdot p)$ , onde*

$$Ker(i_\mu^* \omega_p) := \{u \in T_p(J^{-1}(\mu)) \mid \omega_p(u, v) = 0, \forall v \in T_p(J^{-1}(\mu))\},$$

e onde  $G_\mu \cdot p$  é a órbita de  $p$  em  $J^{-1}(\mu)$  em relação a ação de  $G_\mu$ .

*Demonstração.* Primeiro note que:

$$Ker(i_\mu^* \omega_p) = T_p J^{-1}(\mu) \cap (T_p J^{-1}(\mu))^{\omega_p}. \quad (3.4.4)$$

Com efeito, dado  $u \in T_p J^{-1}(\mu) \cap (T_p J^{-1}(\mu))^{\omega_p}$  é óbvio que  $u \in Ker(i^* \omega_p)$  pois, (veja Definição 1.1.7)

$$(T_p J^{-1}(\mu))^{\omega_p} := \{u \in T_p M \mid \omega_p(u, v) = 0, \forall v \in T_p J^{-1}(\mu)\}.$$

Isso mostra que  $T_p J^{-1}(\mu) \cap (T_p J^{-1}(\mu))^{\omega_p} \subseteq Ker(i^* \omega_p)$ . A outra inclusão decorre diretamente da definição de  $Ker(i^* \omega_p)$ .

A aplicação  $J$  sendo uma submersão,  $T_p J^{-1}(\mu) = Ker J_{*p}$ , e como já vimos,  $Ker J_{*p} = (\mathfrak{g}.p)^{\omega_p}$ . Assim,  $T_p(J^{-1}(\mu)) = (\mathfrak{g}.p)^{\omega_p}$ , o que implica

$$T_p(J^{-1}(\mu))^{\omega_p} = \mathfrak{g}.p \quad (3.4.5)$$

(note que (3.4.5) é uma consequência do seguinte fato geral que decorre do Lema 1.1.9: se  $W$  é um subespaço vetorial de um espaço vetorial simplético  $(V, \Omega)$ , então  $(W^\Omega)^\Omega = W$ ).

Assim podemos rescrever (3.4.4) como:

$$Ker(i^* \omega_p) = (\mathfrak{g}.p) \cap Ker(J_{*p}).$$

Por outro lado, o Lema 3.3.4, (i) implica que  $T_p(G_\mu.p) = \mathfrak{g}_\mu.p$ . Portanto, devemos mostrar que

$$(\mathfrak{g}.p) \cap Ker(J_{*p}) = \mathfrak{g}_\mu.p. \quad (3.4.6)$$

Para mostrar essa igualdade, note que:

$$J_{*p}(\Phi_p)_{*e} \xi = (J \circ \Phi_p)_{*e} \xi = \frac{d}{dt} \Big|_0 (J \circ \Phi_p)(exp(t\xi)) = \frac{d}{dt} \Big|_0 (J \circ \Phi_{exp(t\xi)})(p).$$

Pela equivariância de  $J$ , o último termo pode ser escrito como,

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 (J \circ \Phi_{exp(t\xi)})(p) = \frac{d}{dt} \Big|_0 Ad_{exp(t\xi)}^* \circ J(p) = ad_\xi^* J(p) = ad_\xi^*(\mu).$$

Daí,  $J_{*p}(\Phi_p)_{*e} \xi = ad_\xi^*(\mu)$ . Levando em conta que  $\mathfrak{g}.p := \{(\Phi_p)_{*e} \xi \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$  e  $\mathfrak{g}_\mu := \{\xi \in \mathfrak{g} \mid ad_\xi^* \mu = 0\}$ , deduzimos então (3.4.6). O lema segue.  $\square$

*Demonstração.* (do Teorema de Marsden-Weinstein-Meyer). Defina  $\omega_\mu$  em  $M_\mu = G_\mu \setminus J^{-1}(\mu)$  pela fórmula,

$$(\omega_\mu)_{\pi_\mu(p)}((\pi_\mu)_{*p} u, (\pi_\mu)_{*p} v) := \omega_p(u, v), \quad (3.4.7)$$

onde  $p \in J^{-1}(\mu)$  e  $u, v \in T_p J^{-1}(\mu)$  (faz sentido definir  $\omega_\mu$  dessa forma pois,  $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \rightarrow M_\mu$  é uma submersão).

Primeiro vamos mostrar que  $\omega_\mu$  está bem definida em todo ponto. Suponha que  $p, q \in J^{-1}(\mu)$ , sejam tais que  $\pi_\mu(p) = \pi_\mu(q)$ , e suponha também que

$$(\pi_\mu)_{*p}u = (\pi_\mu)_{*q}u', \quad e \quad (\pi_\mu)_{*p}v = (\pi_\mu)_{*q}v', \quad (3.4.8)$$

onde  $u, v \in T_pJ^{-1}(\mu)$  e  $u', v' \in T_qJ^{-1}(\mu)$ . Devemos mostrar que  $\omega_p(u, v) = \omega_q(u', v')$ . Como  $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \rightarrow M_\mu$  é um fibrado principal com grupo de estrutura  $G_\mu$ , a relação  $\pi_\mu(p) = \pi_\mu(q)$  implica que existe  $g \in G_\mu$  tal que  $q = \Phi(g, p)$ .

Além disso, a relação  $\pi_\mu \circ \Phi_g = \pi_\mu$  implica que  $(\pi_\mu)_{*q}(\Phi_g)_{*p} = (\pi_\mu)_{*p}$  donde, levando em conta (3.4.8),

$$\begin{aligned} (\pi_\mu)_{*q}(\Phi_g)_{*p}u &= (\pi_\mu)_{*q}u' \\ \Rightarrow (\pi_\mu)_{*q}[(\Phi_g)_{*p}u - u'] &= 0 \\ \Rightarrow (\Phi_g)_{*p}u - u' &\in Ker((\pi_\mu)_{*q}) \\ \Rightarrow (\Phi_g)_{*p}u - u' &\in T_q(G_\mu \cdot q) \\ \Rightarrow (\Phi_g)_{*p}u - u' &\in \mathfrak{g}_\mu \cdot q. \end{aligned}$$

Logo existe  $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$  tal que:

$$u' = (\Phi_g)_{*p}u + (\Phi_q)_{*e}\xi.$$

Analogamente, existe  $\xi' \in \mathfrak{g}_\mu$  tal que

$$v' = (\Phi_g)_{*p}v + (\Phi_q)_{*e}\xi'.$$

Agora, usando o fato de  $\Phi$  ser simplética e a relação  $Ker(i^*\omega_p) = \mathfrak{g}_\mu \cdot p$ , vê-se que:

$$\begin{aligned} \omega_q(u', v') &= \omega_{\Phi(g,p)}((\Phi_g)_{*p}u + (\Phi_q)_{*e}\xi, (\Phi_g)_{*p}v + (\Phi_q)_{*e}\xi') \\ &= \omega_{\Phi(g,p)}((\Phi_g)_{*p}u, (\Phi_g)_{*p}v) + \omega_{\Phi(g,p)}((\Phi_g)_{*p}u, (\Phi_q)_{*e}\xi') + \omega_{\Phi(g,p)}((\Phi_q)_{*e}\xi, (\Phi_g)_{*p}v) \\ &\quad + \omega_{\Phi(g,p)}((\Phi_q)_{*e}\xi, (\Phi_q)_{*e}\xi'). \end{aligned}$$

Note que os três últimos termos da última igualdade são iguais a zero pois são termos da forma  $\omega_q(*, \beta)$ , com  $\beta \in T_q(G_\mu \cdot q) = Ker(i_\mu^*\omega_q)$  (veja Lema 3.4.7). Daí,

$$\omega_q(u', v') = \omega_{\Phi(g,p)}((\Phi_g)_{*p}u, (\Phi_g)_{*p}v) = ((\Phi_g)^*\omega)_p(u, v).$$

A ação  $\Phi$  sendo simplética,  $\Phi_g^*\omega = \omega$  e portanto,

$$\omega_q(u', v') = (\Phi_g^*\omega)_p(u, v) = \omega_p(u, v).$$

Isso mostra que  $\omega_\mu$  está bem definida e satisfaz  $\pi_\mu^*\omega_\mu = i_\mu^*\omega$ . A suavidade decorre da fórmula  $\pi_\mu^*\omega_\mu = i_\mu^*\omega$  e da suavidade de  $i_\mu^*\omega$ . É fechada, pois

$$\pi_\mu^*d\omega_\mu = d\pi_\mu^*\omega_\mu = di_\mu^*\omega = i_\mu^*d\omega = i_\mu^*0 = 0,$$

(essa ultima igualdade decorre da comutatividade do operador de *De Rham* e do operador pull-back).

Finalmente, suponha que  $u \in T_p(J^{-1}(\mu))$  seja tal que:

$$(\omega_\mu)_{\pi(p)}((\pi_\mu)_*u, (\pi_\mu)_*v) = 0, \quad \forall v \in J^{-1}(\mu).$$

Temos então que:

$$(i_\mu^*\omega)_p(u, v) = 0 \quad \forall v \in J^{-1}(\mu),$$

o que significa que  $u$  pertence ao espaço  $\text{Ker}(i_\mu^*\omega_p)$ , o qual é igual a  $T_p(G_\mu \cdot p) = \text{Ker}((\pi_\mu)_*p)$ . Assim  $(\pi_\mu)_*u = 0$ . Concluimos que  $\omega_\mu$  é não degenerada.  $\square$

**Exemplo 3.4.8.** Seja  $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$  aplicação definida por,

$$\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) := (z_1, \dots, z_n),$$

onde  $z_k := x_k + iy_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Identificamos  $\mathbb{R}^{2n}$  e  $\mathbb{C}^n$  por meio da aplicação  $\varphi$ .

Seja  $\Phi : S^1 \times \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  a ação a esquerda definida por:

$$e^{it} \cdot (z_1, \dots, z_n) := (e^{it}z_1, \dots, e^{it}z_n).$$

*Afirmção:* A ação  $\Phi$  é hamiltoniana relativa a forma simplética canônica  $\omega_0$  de  $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ , com aplicação momentum  $J : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$J(z) = -\frac{1}{2} \|z\|^2 + \frac{1}{2}, \quad \text{onde } \|z\|^2 = \|z_1\|^2 + \dots + \|z_n\|^2$$

(aqui identificamos  $\text{Lie}(S^1)$  com  $\mathbb{R}$  por meio da aplicação dada em (3.3.6)). Antes de provar esta afirmação, vamos expressar a ação  $\Phi$  em coordenadas reais. Note que dado  $k = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} e^{it}z_k &= (\cos(t) + i\sin(t))(x_k + iy_k) \\ &= x_k\cos(t) - y_k\sin(t) + i(y_k\cos(t) + x_k\sin(t)), \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} e^{it} \cdot (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &= (x_1\cos(t) - y_1\sin(t) + i(y_1\cos(t) + x_1\sin(t)), \dots, \\ &\quad , x_n\cos(t) - y_n\sin(t) + i(y_n\cos(t) + x_n\sin(t))), \\ &= (x_1\cos(t) - y_1\sin(t), \dots, x_n\cos(t) - y_n\sin(t), \\ &\quad y_1\cos(t) + x_1\sin(t), \dots, y_n\cos(t) + x_n\sin(t)). \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Usando uma notação matricial, temos então que,

$$e^{it} \cdot (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 & \cdots & 0 & -\text{sen}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cos(t) & 0 & \cdots & 0 & -\text{sen}(t) \\ \text{sen}(t) & 0 & \cdots & 0 & \cos(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \text{sen}(t) & 0 & \cdots & 0 & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)I_n & -\text{sen}(t)I_n \\ \text{sen}(t)I_n & \cos(t)I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$e^{it} \cdot (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} \cos(t)I_n & -\text{sen}(t)I_n \\ \text{sen}(t)I_n & \cos(t)I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

*Demonstração da Afirmação:* Vamos mostrar que  $\Phi$  é simplética. Dado  $\theta \in \mathbb{R}$ , definimos  $S(\theta) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , por

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)I_n & -\text{sen}(\theta)I_n \\ \text{sen}(\theta)I_n & \cos(\theta)I_n \end{pmatrix}.$$

Tomando  $u, v \in T_p\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^{2n}$ , temos que,

$$\begin{aligned} (S(\theta)^*\omega_0)(u, v) &= \omega_0(S(\theta)u, S(\theta)v) \\ &= \sum_{k=1}^n (dx_k \wedge dy_k)(S(\theta)u, S(\theta)v) \\ &= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} dx_k(S(\theta)u) & dy_k(S(\theta)u) \\ dx_k(S(\theta)v) & dy_k(S(\theta)v) \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

Para calcular  $dx_k(S(\theta)u)$  veja que,

$$\begin{aligned} dx_k(S(\theta)u) &= dx_k \begin{pmatrix} \cos\theta I_n & -\text{sen}\theta I_n \\ \text{sen}\theta I_n & \cos\theta I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{pmatrix}, \\ &= dx_k \begin{pmatrix} \cos\theta u_1 - \text{sen}\theta u_{n+1} \\ \vdots \\ \cos\theta u_n - \text{sen}\theta u_{2n} \\ \text{sen}\theta u_1 + \cos\theta u_{n+1} \\ \vdots \\ \text{sen}\theta u_n + \cos\theta u_{2n} \end{pmatrix}, \\ &= \cos\theta u_k - \text{sen}\theta u_{k+n}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos  $dy_k(S(\theta)u) = \text{sen}\theta u_k + \cos\theta u_{k+n}$ . Substituindo essas equações na igualdade (3.4.10) obtemos, após as devidas simplificações,

$$\begin{aligned} (S(\theta)^*\omega_0)(u, v) &= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \cos\theta u_k - \text{sen}\theta u_{k+n} & \text{sen}\theta u_k + \cos\theta u_{k+n} \\ \cos\theta v_k - \text{sen}\theta v_{k+n} & \text{sen}\theta v_k + \cos\theta v_{k+n} \end{vmatrix}, \\ &= \sum_{k=1}^n \cos^2\theta u_k v_{k+n} - \text{sen}^2\theta u_{k+n} v_k - \cos^2\theta v_k u_{k+n} + \text{sen}^2\theta v_{k+n} u_k, \\ &= \sum_{k=1}^n u_k v_{k+n} - u_{k+n} v_k = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} u_k & v_k \\ u_{k+n} & v_{k+n} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n (dx_k \wedge dy_k)(u, v). \end{aligned}$$

Daí,  $(S(\theta)^*\omega_0)(u, v) = \sum_{k=1}^n (dx_k \wedge dy_k)(u, v) = \omega_0(u, v)$ . Assim,  $S(\theta)^*\omega_0 = \omega_0$ , e portanto  $\Phi$  é simplética.

Vamos agora calcular o campo fundamental  $\xi_{\mathbb{R}^{2n}}$  associado à  $\xi \in \text{Lie}(S^1) \cong \mathbb{R}$ . Lembrando que  $\exp_{S^1} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $r \mapsto e^{ir}$ , temos que:

$$\begin{aligned} (\xi_{\mathbb{R}^{2n}})_p &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi(\exp(t\xi), p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi(e^{it\xi}, p), \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \begin{pmatrix} \cos(t\xi) I_n & -\text{sen}(t\xi) I_n \\ \text{sen}(t\xi) I_n & \cos(t\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{2n} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\xi I_n \\ \xi I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{2n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daí,

$$(\xi_{\mathbb{R}^{2n}})_p = \xi \begin{pmatrix} -p_{n+1} \\ \vdots \\ -p_{2n} \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}. \quad (3.4.11)$$

Considere agora a aplicação  $J : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^* = \text{Lie}(S^1)^*$ , definida para  $p \in \mathbb{R}^{2n}$  e  $\xi \in \mathbb{R}$ , por:

$$\langle J(p), \xi \rangle := \xi \left( -\frac{1}{2} \|z\|^2 + \frac{1}{2} \right).$$

Note que  $J^\xi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \xi \left( -\frac{1}{2} \|z\|^2 + \frac{1}{2} \right)$ . Vamos mostrar que para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\omega(\xi_{\mathbb{R}^{2n}}, \cdot) = dJ^\xi(\cdot).$$

Dado  $p \in \mathbb{R}^{2n}$  e  $u \in T_p \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^{2n}$ , temos que:

$$\begin{aligned} \omega_0(\xi_{\mathbb{R}^{2n}}, u) &= \sum_{k=1}^n (dx_k \wedge dy_k)(\xi_{\mathbb{R}^{2n}}, u), \\ &= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} dx_k(\xi_{\mathbb{R}^{2n}}) & dy_k(\xi_{\mathbb{R}^{2n}}) \\ dx_k(u) & dy_k(u) \end{vmatrix}, \\ &= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} -p_{k+n}\xi & p_k\xi \\ u_k & u_{k+n} \end{vmatrix}, \\ &= \sum_{k=1}^n -\xi p_{k+n} u_{k+n} - u_k p_k \xi, \\ &= -\xi \langle p, u \rangle. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Por outro lado temos que,

$$\begin{aligned} dJ^\xi(u) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 J^\xi(p + tu), \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \xi \left( -\frac{1}{2} \langle p + tu, p + tu \rangle + \frac{1}{2} \right), \\ &= -\xi \langle p, u \rangle. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Comparando as equações (3.4.12) e (3.4.13) temos que  $\omega(\xi_{\mathbb{R}^{2n}}, u) = dJ^\xi(u)$ .

Concluimos assim que  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, \Phi, J)$  é um  $S^1$ -espaço hamiltoniano. A afirmação segue.

Note que a ação  $\Phi$  é própria (pois  $S^1$  é compacto) e livre em  $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$ . Pelo Teorema da Redução Simplética, o espaço reduzido em 0,  $M_0 := S^1 \backslash J^{-1}(0)$ , é uma variedade

simplética munida de uma forma simplética  $\omega_{\mu=0}$  que satisfaz,

$$(\pi_0)^*\omega_{\mu=0} = j^*\omega, \quad (3.4.14)$$

onde  $\pi_0 : J^{-1}(0) \longrightarrow S^1 \backslash J^{-1}(0)$  é a aplicação quociente e  $j : J^{-1}(0) \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n} - \{0\}$  é a aplicação inclusão. Agora note que  $J^{-1}(0) = \{p \in \mathbb{R}^{2n} - \{0\} \mid \|p\|^2 = 1\}$ , isto é,

$$J^{-1}(0) = S^{2n-1} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

é a esfera unitária de dimensão  $2n - 1$  em  $\mathbb{R}^{2n}$ . Temos então que:

$$M_0 = S^1 \backslash S^{2n-1}.$$

É bem conhecido em geometria diferencial que o espaço projetivo complexo  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$  (veja Exemplo 2.7.10) indentifica-se com o quociente  $S^1 \backslash S^{2n-1}$ , e que  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$  possui uma única forma simplética  $\omega_{FS}$ , chamada forma simplética de *Fubini-Study*, que satisfaz  $(\pi_0)^*\omega_{FS} = j^*\omega$ . Pela parte unicidade do Teorema de redução simplética, concluímos que  $\omega_{\mu=0} = \omega_{FS}$ , e portanto:

$$(\mathbb{P}(\mathbb{C}^n), \omega_{FS}) = (M_0, \omega_{\mu=0}),$$

isto é, o espaço projetivo complexo é a redução simplética de  $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$  pela ação  $\Phi$ .

**Exemplo 3.4.9.** Modificações óbvias do exemplo anterior mostram que a ação  $\Phi : \mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$  definida por:

$$(e^{it_1}, \dots, e^{it_n}) \cdot (z_1, \dots, z_n) := (e^{it_1} z_1, \dots, e^{it_n} z_n),$$

atua de maneira hamiltoniana sobre o espaço  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  munido da forma simplética canônica, com aplicação momentum

$$J : \begin{cases} \mathbb{C}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n, \\ (z_1, \dots, z_n) \mapsto -\frac{1}{2} \sum \|z_i\|^2 + \text{constante}. \end{cases}$$

**Exemplo 3.4.10.** Seja  $\Phi : G \times M \longrightarrow M$  uma ação de um grupo de Lie  $G$  e seja  $\Phi_* : G \times T^*M \longrightarrow T^*M$  a “lifted action” (veja Exemplo 3.3.11). Lembramos que  $(T^*M, \omega = -d\theta, \Phi_*, J)$  é um  $G$ -espaço hamiltoniano, onde  $J : T^*M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$  está definida por:

$$\langle J(\alpha_p), \xi \rangle := \langle \alpha_p, (\xi_M)_p \rangle,$$

onde  $\alpha_p \in T_p^*M$  e  $\xi \in \mathfrak{g}$ .



Mostra-se que  $\Phi_*$  é uma ação livre e própria, o que implica, pela Redução Simplética em  $\mu = 0$ , que existe uma única forma simplética  $\omega_{\mu=0}$  em  $M_0 = G \backslash J^{-1}(0)$  que satisfaz,

$$(\pi_0)^* \omega_{\mu=0} = j^* \omega,$$

onde  $\pi_0 : J^{-1}(0) \rightarrow M_0$  é a aplicação quociente e  $j : J^{-1}(0) \hookrightarrow T^*M$  é a inclusão. Neste contexto, mostra-se também que existe um symplectomorfismo,

$$\varphi : (M_0, \omega_{\mu=0}) \rightarrow (T^*(G \backslash M), \tilde{\omega}),$$

onde  $\tilde{\omega}$  é a forma simplética canônica de  $T^*(G \backslash M)$ .

# Capítulo 4

## Construção de variedades tóricas simpléticas

### 4.1 Polítopos de Delzant

Nessa parte, apresentamos sem demonstração alguns conceitos e resultados da teoria dos polítopos necessários para enunciar os resultados principais de convexidade em geometria simplética.

Considere  $\Delta$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 4.1.1.** Dizemos que  $\Delta$  é um *poliedro*, se existem números reais  $a_{ij}$  e  $b_i$ , onde  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ , tais que dado  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(x_1, \dots, x_n) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases}$$

**Definição 4.1.2.** Dizemos que  $\Delta$  é um *polítopo convexo*, ou simplesmente *polítopo*, se existem  $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}^n$  tais que  $\Delta = \text{conv}(v_1, \dots, v_s)$ , onde

$$\text{conv}(v_1, \dots, v_s) := \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s \mid \lambda_1, \dots, \lambda_s \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_s = 1 \}.$$

Diz-se que  $\Delta$  é gerado por  $v_1, \dots, v_s$ .

Note que um polítopo  $\Delta$  é um conjunto convexo, isto é, se  $x, y \in \Delta$ , então, para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $tx + (1 - t)y \in \Delta$ . Com efeito dados  $x, y \in \Delta$  e  $t \in [0, 1]$ , existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \geq 0$  e  $\beta_1, \dots, \beta_s \geq 0$ , tais que,

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s; \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_s = 1,$$

$$y = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s; \quad \beta_1 + \dots + \beta_s = 1,$$

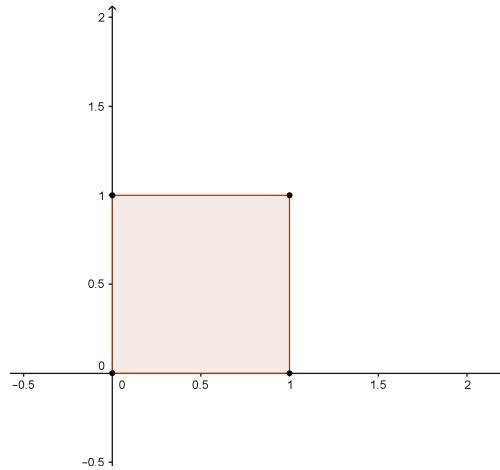


Figura 4.1.1: Quadrado unitário em  $\mathbb{R}^2$

donde,

$$\begin{aligned} tx + (1-t)y &= t(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s) + (1-t)(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s) \\ &= (t\lambda_1 + (1-t)\beta_1)v_1 + \dots + (t\lambda_s + (1-t)\beta_s)v_s. \end{aligned}$$

Claramente,  $t\lambda_i + (1-t)\beta_i \geq 0$  para todo  $i = 1, \dots, s$ , e temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s (t\lambda_i + (1-t)\beta_i) &= t \sum_{i=1}^s \lambda_i + (1-t) \sum_{i=1}^s \beta_i \\ &= t + (1-t) = 1. \end{aligned}$$

Isso mostra que  $tx + (1-t)y \in \Delta$ , como havíamos afirmado.

**Teorema 4.1.3.** (*Minkowski-Weyl*) Um conjunto  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$  é um poliedro limitado se e somente se é um polígono convexo.

Uma demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [13].

**Exemplo 4.1.4.** O quadrado unitário  $\text{conv}((0,0), (1,0), (0,1), (1,1)) \subseteq \mathbb{R}^2$  (veja Figura (4.1.1)) é um polígono que coincide com o conjunto dos pontos  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  que satisfazem,

$$\begin{cases} x \leq 1, \\ -x \leq 0, \\ y \leq 1, \\ -y \leq 0. \end{cases}$$

**Exemplo 4.1.5.** O hexágono  $\text{conv}((1,0), (\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, -1), (-\frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{2}, -1), (-1,0)) \subseteq \mathbb{R}^2$  (veja Figura (4.1.2)) é um polígono que coincide com o conjunto dos pontos  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

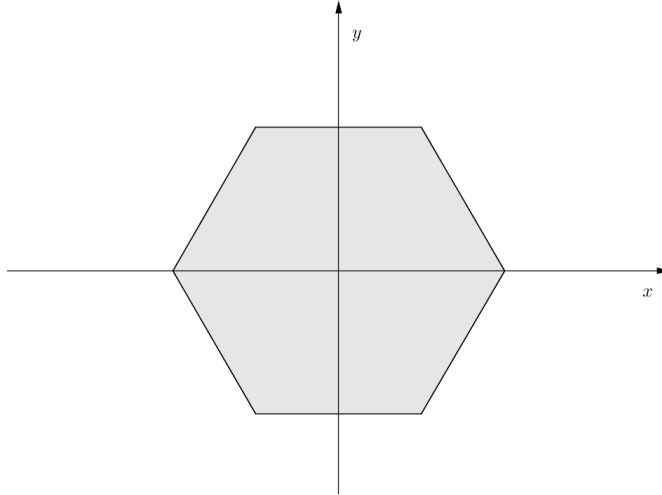


Figura 4.1.2: Hexágono em  $\mathbb{R}^2$

que satisfazem,

$$\begin{cases} y - 1 \geq 0, \\ 1 + y \geq 0, \\ y \leq -2(x - 1), \\ y \geq 2(x - 1), \\ y \leq 2(x + 1), \\ y \geq -2(x + 1). \end{cases}$$

**Definição 4.1.6.**

(a) Um conjunto  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  é um *hiperplano* se existem um vetor não nulo  $u \in \mathbb{R}^n$  e um número real  $\alpha$  tais que:

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = \alpha\},$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto euclidiano.

(b) Seja  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto qualquer e seja  $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = \alpha\}$  um hiperplano. Diz-se que  $H$  *corta*  $X$  se existem  $x_1, x_2 \in X$  tais que  $\langle x_1, u \rangle < \alpha$  e  $\langle x_2, u \rangle > \alpha$ .

(c) O hiperplano  $H \subseteq \mathbb{R}^n$  é um *suporte* de  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  se  $H$  não corta  $X$  e se a distância entre  $H$  e  $X$  é nula, isto é,

$$d(X, H) = \inf \{\|x - h\| \mid x \in X, h \in H\} = 0,$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana. Nesse caso  $H$  é chamado *hiperplano suporte* de  $X$ .

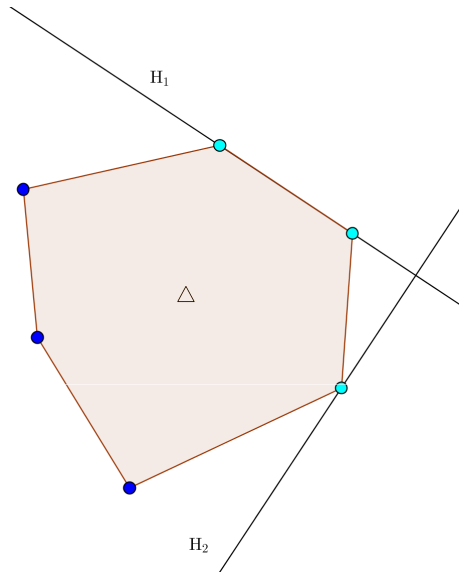


Figura 4.1.3: Hiperplanos suportes do polígono  $\Delta$

Seja  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto qualquer. O espaço afim gerado por  $X$ , denotado por  $\text{Aff}(X)$ , é o conjunto de todos os pontos da forma

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n,$$

onde  $x_1, \dots, x_n$  é um número finito arbitrário de pontos de  $X$  e onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são números reais satisfazendo

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Dado um subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , mostra-se que existe um único subespaço vetorial  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que para todo  $x \in X$ ,

$$\text{Aff}(X) = x + V.$$

Define-se então a *dimensão* de  $X$  como sendo a dimensão de  $V$ , isto é,

$$\dim(X) := \dim(V),$$

onde  $X = x + V$  (veja [13]).

No caso em que  $X = \Delta$  é um polígono de dimensão  $n$ , usamos a expressão “ $n$ -polígono”. Por exemplo,  $0$ -polígono são pontos e  $1$ -polígonos são segmentos.

**Definição 4.1.7.** Seja  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$  um polígono convexo. Um subconjunto  $F$  de  $\Delta$  é uma *face* de  $\Delta$  se  $F = \emptyset$  ou  $F = \Delta$ , ou se existe um hiperplano suporte  $H$  de  $\Delta$  tal que  $F = \Delta \cap H$ . As faces de dimensão 0 e 1 são chamadas de *vértices* e *arestas*, respectivamente (veja Figura (4.1.4)). Se a dimensão de  $\Delta$  é  $d$ , então as faces de dimensão  $d - 1$  são chamadas *facetras*; o conjunto de todos os vértices de  $\Delta$  é denotado por  $\text{ext}(\Delta)$ .

**Teorema 4.1.8.** *Seja  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$  um polítopo. Então:*

- (a)  $\Delta = \text{conv}(\text{ext}(\Delta))$ ,
- (b) cada face  $F$  de  $\Delta$  é um polítopo e  $\text{ext}(F) = F \cap \text{ext}(\Delta)$ .

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [13]. Note que o item (a) implica que qualquer ponto de  $\Delta$  é uma combinação convexa de vértices de  $\Delta$ .

Seja  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$  um  $n$ -polítopo. Dada uma faceta  $F$  de  $\Delta$ , temos que:

- $F$  é a interseção de  $\Delta$  com um hiperplano suporte  $H \subseteq \mathbb{R}^n$ , isto é,  $F = \Delta \cap H$ ,
- o hiperplano suporte  $H$  separa o espaço  $\mathbb{R}^n$  em dois semi-espacos fechados que se intersectam em  $H$ , e um deles contém  $\Delta$ ; denotaremos por  $K(\Delta, F)$  esse semi-espaço.

**Teorema 4.1.9.** *Seja  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$  um  $n$ -polítopo. Então,*

- (a) o número de faces de  $\Delta$  é finito,
- (b) temos que

$$\Delta = \bigcap_{i=1}^d K(\Delta, F_i), \quad (4.1.1)$$

onde  $F_1, \dots, F_d$  são as facetas de  $\Delta$ .

*Observação 4.1.10.* A partir da decomposição (4.1.1), é fácil encontrar uma descrição analítica (isto é, como poliedro) do polítopo  $\Delta$ . Com efeito, a cada semi-espaço  $K(\Delta, F_i)$ , podemos associar um vetor não nulo  $u_i \in \mathbb{R}^n$  ortogonal ao plano suporte associado a  $F_i$  e um número real  $\alpha_i$  tais que  $K(\Delta, F_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u_i \rangle \leq \alpha_i\}$ , donde,

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u_i \rangle \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, d\}.$$

*Observação 4.1.11.* Os vetores  $v_i$  da observação acima são *externos normais*, isto é, para todo ponto  $p$  do hiperplano suporte associado a  $F_i$  e todo  $t > 0$ , o ponto  $p + tv_i$  não pertence ao semi-espaço  $K(\Delta, F_i)$ . Para ver isso, calculamos:

$$\langle p + tv_i, v_i \rangle - \alpha_i = \langle p, v_i \rangle - \alpha_i + t \|v_i\|^2 = t \|v_i\|^2 > 0.$$

Assim,  $\langle p + tv_i, v_i \rangle > \alpha_i$ , o que significa que  $p + tv_i \notin K(\Delta, F_i)$ .

**Definição 4.1.12.** *Seja  $\Delta$  um polítopo. Dizemos que,*

- (a) um vértice e uma aresta de  $\Delta$  são *incidentes* se o vértice é um vértice da aresta,
- (b) dois vértices distintos de  $\Delta$  são *adjacentes* se o segmento que eles formam é uma aresta de  $\Delta$ .

**Definição 4.1.13.** *Diz-se que um  $n$ -polítopo  $\Delta$  é *simples* se cada vértice de  $\Delta$  é incidente a exatamente  $n$  vértices de  $\Delta$ .*

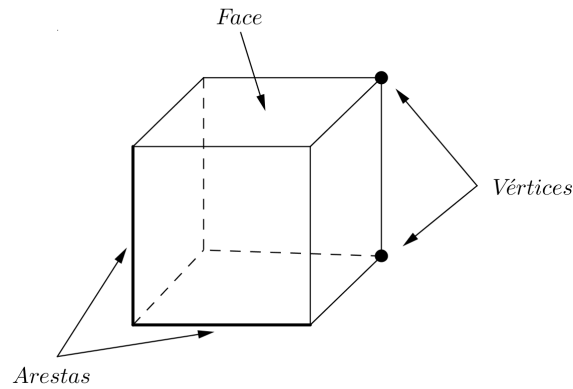


Figura 4.1.4: Face, vértices e arestas

**Proposição 4.1.14.** *Seja  $\Delta$  um  $n$ -polígono. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- (a)  $\Delta$  é simples.
- (b) Cada vértice de  $\Delta$  está contido em exatamente  $n$  facetas.
- (c) Cada vértice de  $\Delta$  é adjacente a exatamente  $n$  vértices.

Veja [13].

**Proposição 4.1.15.** *Sejam  $\Delta$  um  $n$ -polígono e  $p$  um vértice de  $\Delta$ . Sejam também  $q_1, \dots, q_k$  outros vértices de  $\Delta$  adjacentes a  $p$ . Defina  $F$  como sendo a menor<sup>1</sup> face de  $\Delta$  que contém o segmentos  $[p, q_1], \dots, [p, q_k]$ . Então,*

- (a)  $\dim(F) = k$ ,
- (b)  $[p, q_1], \dots, [p, q_k]$  são as únicas arestas de  $F$  incidentes a  $p$ .

Veja [13].

**Definição 4.1.16.** *Seja  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$  um  $n$ -polígono. Dizemos que  $\Delta$  é um polígono de Delzant se satisfaz as seguintes condições:*

1. *simplicidade:* existem  $n$  arestas incidentes a cada vértice  $p$  (veja Definição 4.1.13);
2. *racionalidade:* as arestas incidentes ao vértice  $p$  são da forma  $p + tu_i$ ,  $t \geq 0$  onde  $u_i$  são vetores em  $\mathbb{Z}^n$ ; e
3. *suavidade:* para cada vértice  $p$ , as arestas incidentes a ele podem ser escolhidas de tal maneira que formam uma base de  $\mathbb{Z}^n$  sobre  $\mathbb{Z}$ .

**Exemplo 4.1.17.** O triângulo isóceles em  $\mathbb{R}^2$  de vértices  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(0, a)$ , com  $a > 0$ , é um polígono de Delzant. Os vetores  $u_1$  e  $u_2$  podem ser escolhidos da seguinte forma (veja Figura (4.1.5)):

<sup>1</sup>A face  $F$  existe, pois o conjunto das faces de  $\Delta$  é finito, veja Teorema 4.1.9.

Vértices	$u_1, u_2$
(0,0)	(1,0),(0,1)
(a,0)	(-1,0),(-1,1)
(0,a)	(0,-1),(1,-1)

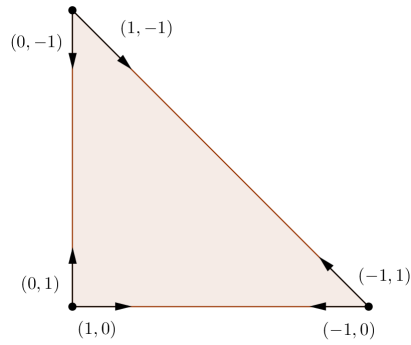


Figura 4.1.5: Um polítopo de Delzant em  $\mathbb{R}^2$

**Exemplo 4.1.18.** Mais exemplos de polítopos de Delzant em  $\mathbb{R}^2$ :

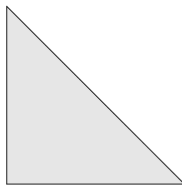


Figura (1)



Figura (2)

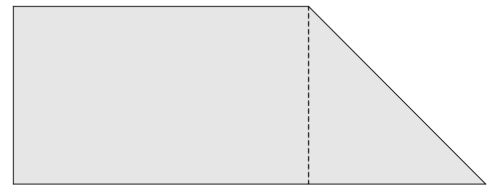
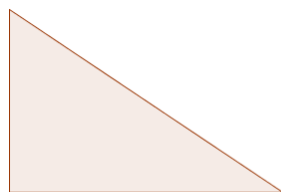


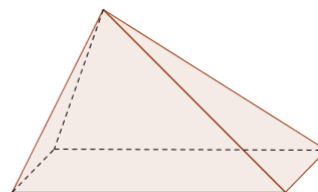
Figura (3)

Figura 4.1.6:

**Exemplo 4.1.19.** Exemplos de polítopos que não são de Delzant.



Figura(1)



Figura(2)

O primeiro polítopo do Exemplo 4.1.19 falha a condição (2), uma vez que o triângulo não é isósceles, enquanto o segundo polítopo falha a condição (1).



Seja agora  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$  um polítopo de Delzant. Queremos descreve-lo como um poliedro, isto é, por meio de um sistema de desigualdades. Fixamos um vértice  $p$  e denotamos por

- $q_1, \dots, q_n$  os vértices adjacentes a  $p$ ,
- $u_1, \dots, u_n$  uma família de vetores em  $\mathbb{Z}^n$  tal que para todo  $i = 1, \dots, n$ ,  $p + tu_i$ ,  $t \geq 0$ , descreve a aresta  $[p, q_i]$ ,
- $F_i$  a menor face de  $\Delta$  que contém as arestas  $[p, q_1], \dots, [p, q_{i-1}], [p, q_{i+1}], \dots, [p, q_n]$ .

**Lema 4.1.20.**

- (a) Para todo  $i = 1, \dots, n$ ,  $F_i$  é uma faceta de  $\Delta$ .
- (b) O plano suporte de  $F_i$  é o conjunto  $p + \text{Vect}\{u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n\}$ , onde  $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n\}$  é o espaço vetorial gerado por  $u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n$ .
- (c) Se  $i \neq j$ , então  $F_i \neq F_j$ .
- (d) Dada uma faceta  $F$  de  $\Delta$  que contém  $p$ , existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $F = F_i$ .

*Demonstração.* (a) Pela Proposição 4.1.15, a dimensão de  $F_i$  é  $n - 1$ ; isso significa que  $F_i$  é uma faceta.

(b) O plano suporte  $H_i$  de  $F_i$  é um espaço afim de dimensão  $n - 1$  passando pelo ponto  $p$ . Portanto é da forma  $H_i = p + E_i$ , onde  $E_i \subseteq \mathbb{R}^n$  é um espaço vetorial de dimensão  $n - 1$ . Além disso,  $H_i$  contém as arestas  $[p, q_1], \dots, [p, q_{i-1}], [p, q_{i+1}], \dots, [p, q_n]$ , as quais são da forma  $p + tu_j$ ,  $t \geq 0$ . Sendo assim, é claro que cada  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n$ , pertence ao espaço  $E_i$ , donde  $\text{Vect}\{u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n\} \subseteq E_i$ . Por causa das dimensões,  $E_i = \text{Vect}\{u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n\}$ .

(c) Sejam  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tais que  $i \neq j$ . Suponha que  $F_i = F_j =: F$ . Pela Proposição 4.1.15, temos que,

- $[p, q_1], \dots, [p, q_{i-1}], [p, q_{i+1}], \dots, [p, q_n]$  são as únicas arestas de  $F$  incidentes a  $p$ ,
- $[p, q_1], \dots, [p, q_{j-1}], [p, q_{j+1}], \dots, [p, q_n]$  são as únicas arestas de  $F$  incidentes a  $p$ .

Comparando as duas afirmações, concluímos por unicidade que  $q_i = q_j$ , o que é absurdo.

(d) Pela simplicidade de  $\Delta$ , o ponto  $p$  pertence a exatamente  $n$  facetas de  $\Delta$  que, pelos itens (a) e (c), são necessariamente os conjuntos  $F_1, \dots, F_n$ .  $\square$

**Definição 4.1.21.** O produto vetorial dos vetores  $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  é o único vetor de  $\mathbb{R}^n$ , denotado por  $v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{n-1}$ , que satisfaz,

$$\langle v, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle = \det(v, v_1, \dots, v_{n-1}), \quad (4.1.2)$$

para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ .

Note que  $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$  é ortogonal ao espaço vetorial gerado por  $v_1, \dots, v_{n-1}$ , isto é,

$$v_1 \times \dots \times v_{n-1} \in \text{Vect}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}^\perp.$$

Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Tomando  $v = e_i$  em (4.1.2) obtemos o seguinte resultado.

**Lema 4.1.22.** *Para todos  $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ , têm-se*

$$v_1 \times \dots \times v_{n-1} = \begin{vmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ (v_1)_1 & & (v_1)_n \\ \vdots & & \vdots \\ (v_{n-1})_1 & \cdots & (v_{n-1})_n \end{vmatrix} := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} (v_1)_1 & \cdots & \widehat{(v_1)_i} & \cdots & (v_1)_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ (v_n)_1 & \cdots & \widehat{(v_n)_i} & \cdots & (v_n)_n \end{vmatrix} e_i,$$

onde  $(v_i)_j$  denota a  $j$ -ésima coordenada do vetor  $v_i$  em relação à base canônica e onde “ $\widehat{\phantom{x}}$ ” significa que o símbolo correspondente deve ser omitido.

Segue imediatamente da fórmula acima que se  $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{Z}^n$ , então  $v_1 \times \dots \times v_{n-1} \in \mathbb{Z}^n$ .

Dado  $i = 1, \dots, n$ , definimos

$$n_i := \varepsilon_i(u_1 \times \dots \times u_{i-1} \times u_{i+1} \times \dots \times u_n),$$

onde  $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$  é escolhido de tal maneira que  $n_i$  seja externo normal do hiperplano suporte da faceta  $F_i$ .

**Lema 4.1.23.** *Os vetores  $n_1, \dots, n_n$  formam uma base de  $\mathbb{Z}^n$  sobre  $\mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Denotamos por  $(n_i)_j \in \mathbb{Z}$  a  $j$ -ésima coordenada de  $n_i$  em relação à base  $\{u_1, \dots, u_n\}$  (a qual é uma base de  $\mathbb{Z}^n$  sobre  $\mathbb{Z}$ ) e definimos,

$$N := \begin{bmatrix} (n_1)_1 & \cdots & (n_n)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (n_1)_n & \cdots & (n_n)_n \end{bmatrix}; \quad U := \begin{bmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_1, u_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_n, u_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Note que os determinantes de  $N$  e  $U$  são dois números inteiros.

Para mostrar que  $\{n_1, \dots, n_n\}$  é uma base de  $\mathbb{Z}^n$  sobre  $\mathbb{Z}$ , basta mostrar que o determinante de  $N$  é 1 ou  $-1$ . Para ver isso, note que as entradas da matriz  $N^t U$  são dadas por:

$$\begin{aligned} (N^t U)_{ij} &= \sum_{k=1}^n (N^t)_{ik} U_{kj} = \sum_{k=1}^n N_{ki} U_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n (n_i)_k \langle u_k, u_j \rangle = \langle n_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ \langle n_i, u_i \rangle & \text{se } i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Daí,

$$N^t U = \begin{bmatrix} \langle n_1, u_1 \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \langle n_n, u_n \rangle \end{bmatrix},$$

e portanto,  $\det(N)\det(U) = \langle n_1, u_1 \rangle \cdots \langle n_n, u_n \rangle$ . Além disso, para todo  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \langle n_i, u_j \rangle &= \langle \varepsilon_i(u_1 \times \cdots \times u_{i-1} \times u_{i+1} \times \cdots \times u_n), u_j \rangle \\ &= \pm \det(u_1, u_2, \dots, u_n), \end{aligned}$$

e  $\{u_1, \dots, u_n\}$  sendo uma base de  $\mathbb{Z}^n$  sobre  $\mathbb{Z}$ , necessariamente  $\det(u_1, \dots, u_n) \in \{1, -1\}$ . Concluimos que  $\det(N)U \in \{1, -1\}$ . Assim  $\det(N)$  divide 1, o que implica que  $\det(N) \in \{1, -1\}$ .  $\square$

**Definição 4.1.24.** Um vetor  $v \in \mathbb{Z}^n$  é chamado *primitivo* se ele não pode ser escrito da forma  $v = ku$ , onde  $u \in \mathbb{Z}^n$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e  $|k| > 1$ .

**Exemplo 4.1.25.** Os vetores  $(1,1)$ ,  $(4,3)$ ,  $(1,0)$  são primitivos enquanto  $(2,2)$  e  $(4,6)$  não são (por exemplo  $(4,6) = 2(2,3)$ ).

**Corolário 4.1.26.** Os vetores  $n_1, \dots, n_n$  são todos primitivos.

*Demonstração.* Suponha por absurdo que exista  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $n_i$  não seja primitivo. Então existe  $k \in \mathbb{Z}$  com  $|k| > 1$ , e  $v \in \mathbb{Z}^n$  tais que  $n_i = kv$ . Além disso,  $\{n_1, \dots, n_n\}$  é uma base de  $\mathbb{Z}^n$  sobre  $\mathbb{Z}$  e portanto existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$  tais que,

$$v = \lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_n n_n.$$

Multiplicando por  $k$ , obtemos que

$$n_i = \lambda_1 k n_1 + \dots + \lambda_i k n_i + \dots + \lambda_n k n_n.$$

Daí, vê-se que  $\lambda_i k = 1$  o que implica  $k = \pm 1$ , contradizendo a condição  $|k| > 1$ .  $\square$

*Observação 4.1.27.* Dado  $i = 1, \dots, n$ , o vetor  $n_i$  é o único vetor de  $\mathbb{Z}^n$  ortogonal à faceta  $F_i$  que é externo normal e primitivo.

Sejam  $F_{n+1}, \dots, F_d$  as outras facetas de  $\Delta$ . Repetindo o raciocínio usado acima para os outros vértices de  $\Delta$ , concluímos que existem vetores  $n_i \in \mathbb{Z}^n$ ,  $i = 1, \dots, d$ , tais que:

- $n_i$  é externo normal a faceta  $F_i$ ,
- $n_i$  é primitivo,
- existe  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  tal que o plano suporte de  $F_i$  é caracterizado pela equação

$$\langle x_i, n_i \rangle = \alpha_i.$$

Em particular,

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, n_i \rangle \leq \alpha_i, i = 1, \dots, d\}.$$

**Exemplo 4.1.28.** Descrição de um triângulo isósceles (que é de Delzant) como poliedro:

$$\begin{aligned}\Delta &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}, \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, (-1, 0) \rangle \leq 0, \langle x, (0, -1) \rangle \leq 0, \langle x, (1, 1) \rangle \leq 1\}.\end{aligned}$$

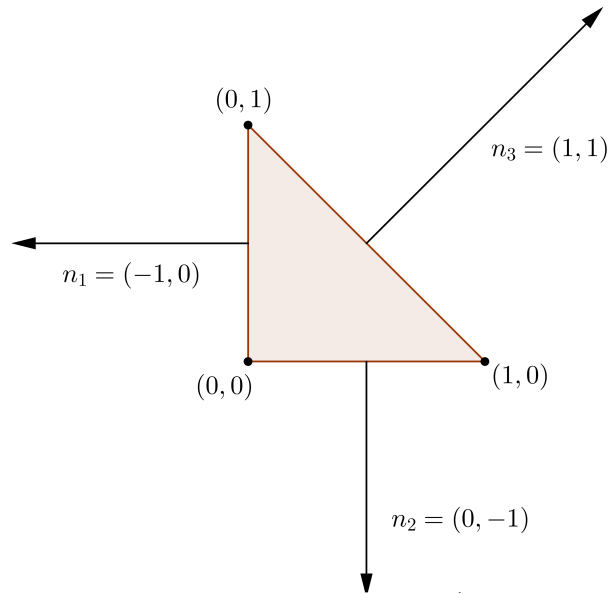


Figura 4.1.7:

## 4.2 Variedades tóricas simpléticas

**Definição 4.2.1.** Um *toro* de dimensão  $n$  é qualquer grupo de Lie  $G$  isomorfo (como grupo de Lie) ao grupo de Lie produto

$$S^1 \times \dots \times S^1, \quad (n\text{-vezes})$$

onde  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Denotamos um toro por  $\mathbb{T}^n$ .

Claramente,  $\mathbb{T}^n$  é comutativo, e portanto a sua álgebra de Lie é trivial.

Na prática, usamos frequentemente  $S^1 \times \dots \times S^1$  ou o quociente  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  como realizações concretas de  $\mathbb{T}^n$ . Esses dois grupos são relacionados da seguinte maneira. Denotando por  $[x] = [x_1, \dots, x_n]$  a classe de  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ , vê-se facilmente que a aplicação

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \longrightarrow S^1 \times \dots \times S^1 \\ [(x_1, \dots, x_n)] \mapsto (e^{2\pi x_1 i}, \dots, e^{2\pi x_n i}), \end{cases} \quad (4.2.1)$$

é um isomorfismo de grupos de Lie. O produto de cada grupo é explicitamente dado por:

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_n] + [y_1, \dots, y_n] &= [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n], \\ (e^{2\pi x_1 i}, \dots, e^{2\pi x_n i}) \cdot (e^{2\pi y_1 i}, \dots, e^{2\pi y_n i}) &= (e^{2\pi(x_1+y_1)i}, \dots, e^{2\pi(x_n+y_n)i}), \end{aligned}$$

e as álgebras de Lie correspondentes podem ser identificadas com  $\mathbb{R}^n$  por meio das derivadas em  $0 \in \mathbb{R}^n$  das aplicações

$$\begin{aligned} \pi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n, \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1, \dots, x_n], \end{cases} \\ \pi_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow S^1 \times \dots \times S^1, \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^{2\pi x_1 i}, \dots, e^{2\pi x_n i}). \end{cases} \end{aligned}$$

Note que  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são ambos homomorfismos de grupos de Lie. Pela Proposição 2.4.2, temos que para todos  $\xi, \eta \in T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} \exp_{\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n}((\pi_1)_* \xi) &= \pi_1(\exp_{\mathbb{R}^n}(\xi)), \\ \exp_{S^1 \times \dots \times S^1}((\pi_2)_* \eta) &= \pi_2(\exp_{\mathbb{R}^n}(\eta)), \end{aligned}$$

Como  $\exp_{\mathbb{R}^n} = Id$ , obtemos, identificando as duas álgebras de Lie com  $\mathbb{R}^n$ , que

$$\begin{aligned} \exp_{\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n}(\xi) &= [\xi_1, \dots, \xi_n], \\ \exp_{S^1 \times \dots \times S^1}(\eta) &= (e^{2\pi \eta_1 i}, \dots, e^{2\pi \eta_n i}). \end{aligned}$$

onde  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  e  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  são dois elementos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 4.2.2.** Uma ação de um toro  $\mathbb{T}^n$  sobre uma variedade  $M$  é chamada *ação tórica*.

Identificaremos também  $(\mathbb{R}^n)^*$  e  $\mathbb{R}^n$  por meio do produto euclidiano. Assim, uma aplicação momentum  $J$  de uma ação tórica poderá ser vista como uma aplicação de  $M$  para  $\mathbb{R}^n$ , isto é,

$$J : M \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

**Teorema 4.2.3.** (Atiyah, Guillemin-Sternberg) *Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética compacta e conexa e seja  $\mathbb{T}^n \times M \longrightarrow M$  uma ação tórica hamiltoniana com aplicação momentum  $J : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ . Então:*

- (a) para todo  $\mu \in \mathbb{R}^n$ ,  $J^{-1}(\mu)$  é um conjunto conexo, (pode ser vazio)
- (b) a imagem de  $J$  é um polítopo em  $\mathbb{R}^n$ , chamado de polítopo momentum,
- (c) a imagem de  $J$  é o polítopo convexo gerado pelas imagens dos pontos fixos da ação tórica.

Uma demonstração desse Teorema pode ser encontrada em [12].

**Exemplo 4.2.4.** A ação de  $S^1$  sobre a esfera  $S^2$  por meio das rotações em volta do eixo  $z$ , é uma ação tórica com aplicação momentum  $J : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto z$  (veja Exemplo 3.3.7). Os pontos fixos da ação são os polos norte e sul; suas imagens por  $J$  são os pontos  $1$  e  $-1$ . O espaço convexo gerado por  $1$  e  $-1$  é o segmento  $[-1, 1]$  que é a imagem de  $S^2$  por  $J$  (veja Figura 3.3.1).

**Definição 4.2.5.** Sejam  $G$  um grupo de Lie e  $M$  uma variedade. Dizemos que uma ação à esquerda  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  é *efetiva* se a aplicação

$$G \rightarrow \text{Diff}(M), \quad g \mapsto \Phi_g,$$

é injetiva, onde  $\Phi_g : M \rightarrow M$ ,  $p \mapsto \Phi(g, p)$ .

**Definição 4.2.6.** Uma variedade *tórica simplética* é uma variedade simplética  $(M, \omega)$  compacta e conexa de dimensão  $2n$  munida de uma ação efetiva tórica hamiltoniana  $\Phi : \mathbb{T}^n \times M \rightarrow M$  com uma escolha de uma aplicação momentum  $J : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Seja  $\text{Del}(\mathbb{R}^n)$  o conjunto dos polítopos de Delzant em  $\mathbb{R}^n$  e seja  $\text{SymTor}(n)$  o conjunto de todas as variedades tóricas simpléticas  $(M, \omega, \Phi, J)$  de dimensão  $2n$  relativa ao toro  $\mathbb{T}^n$ .

Definimos uma relação de equivalência em  $\text{SymTor}(n)$  da seguinte maneira:  $(M_1, \omega_1, \Phi_1, J_1)$  e  $(M_2, \omega_2, \Phi_2, J_2)$  são *equivalentes*, se e somente se, existe um simplectomorfismo equivariante  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  tal que  $J_1 = J_2 \circ \varphi$ . Denotamos por “ $\sim$ ” essa relação de equivalência, e por  $[(M, \omega, \Phi, J)]$  as classes de equivalência correspondentes.

**Teorema 4.2.7.** (*Delzant*) *Classes de equivalência de variedades simpléticas são classificadas pelos polítopos de Delzant. Em pormenores, a aplicação*

$$\frac{\text{SymTor}(n)}{\sim} \rightarrow \text{Del}(\mathbb{R}^n), \quad [(M, \omega, \Phi, J)] \mapsto J(M), \quad (4.2.2)$$

*está bem definida e é uma bijeção.*

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [6].

### 4.3 Variedades Tóricas como espaços reduzidos

Seja  $\Delta$  um polítopo de Delzant, com  $d$  facetas. Seguindo a descrição de um polítopo dada na Secção 4.1, existem vetores primitivos  $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{Z}^n$  e números reais  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  tais que

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, n_i \rangle \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, d\},$$

onde  $\langle , \rangle$  é o produto euclidiano em  $\mathbb{R}^n$ .

Seja  $\{e_1, \dots, e_d\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^d$ . Definimos a aplicação linear

$$\bar{\pi} : \begin{cases} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ e_i \longmapsto n_i. \end{cases}$$

**Proposição 4.3.1.** *A aplicação  $\bar{\pi}$  é sobrejetiva e  $\bar{\pi}(\mathbb{Z}^d) = \mathbb{Z}^n$ .*

*Demonstração.* O conjunto  $\{e_1, \dots, e_d\}$  sendo uma base de  $\mathbb{Z}^d$  sobre  $\mathbb{Z}$ , basta mostrar que o  $\mathbb{Z}$ -espaço gerado por  $\{n_1, \dots, n_d\}$  é  $\mathbb{Z}^n$ . Mas isso decorre imediatamente do Lema 4.1.23.  $\square$

Denotamos por  $p_1 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d \cong \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$  e  $p_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  as aplicações quocientes. Decorre da Proposição 4.3.1 que existe um homomorfismo de grupos de Lie sobrejetivo  $\pi : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^n$  tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathbb{R}^n \\ p_1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow p_2 \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{T}^n. \end{array} \quad (4.3.1)$$

As aplicações  $p_1$  e  $p_2$  sendo dois recobrimentos, temos que  $\pi$  é uma submersão (pois  $\bar{\pi}$  o é). Em particular,  $N := \text{Ker } \pi = \{g \in \mathbb{T}^d \mid \pi(g) = e\}$  é um subgrupo de Lie de  $\mathbb{T}^d$  de dimensão  $d - n$ .

Denotamos por  $\mathfrak{n}$  a álgebra de Lie de  $N$  e por  $i : N \hookrightarrow \mathbb{T}^d$  a aplicação inclusão. Temos uma sequência exata <sup>2</sup> de grupos de Lie,

$$e \longrightarrow N \xrightarrow{i} \mathbb{T}^d \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^n \longrightarrow e, \quad (4.3.2)$$

a qual induz a uma sequência exata de álgebras de Lie,

$$0 \longrightarrow \mathfrak{n} \xrightarrow{i_*e} \mathbb{R}^d \xrightarrow{\pi_*e} \mathbb{R}^n \longrightarrow 0. \quad (4.3.3)$$

Note que  $\pi_*e = \bar{\pi}$  (isso decorre do diagrama (4.3.1), da linearidade de  $\bar{\pi}$  e das identificações  $\text{Lie}(\mathbb{T}^d) \cong \mathbb{R}^d$  e  $\text{Lie}(\mathbb{T}^n) \cong \mathbb{R}^n$  por meio das aplicações  $(p_1)_{*0}$  e  $(p_2)_{*0}$ , respectivamente).

Dada uma aplicação linear  $f : E \longrightarrow F$  entre dois espaços vetoriais, denotaremos por  $f^* : F^* \longrightarrow E^*$  a aplicação definida por,

$$\langle f^*(\alpha), \xi \rangle = \langle \alpha, f(\xi) \rangle,$$

onde  $\alpha \in F^*$  e  $\xi \in E$ .

---

<sup>2</sup>Lembramos que uma sequência de aplicações é *exata* se a imagem de cada aplicação é o núcleo da seguinte aplicação. Por exemplo, na sequência exata (4.3.2) a aplicação  $i$  é injetiva pois o seu núcleo é a imagem da primeira aplicação que é o grupo trivial.

Definindo  $i^* := (i_{*e})^*$  e  $\pi^* := (\pi_{*e})^* = (\bar{\pi})^*$ , temos então uma outra seqüência exata:

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^d)^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{n}^* \longrightarrow 0. \quad (4.3.4)$$

Agora considere  $\mathbb{C}^d \cong \mathbb{R}^{2d}$  munido da forma simplética  $\omega_0$  (veja Exemplo 3.4.8) e a seguinte ação de  $\mathbb{T}^d$  sobre  $\mathbb{C}^d$ :

$$(e^{it_1}, \dots, e^{it_d}) \cdot (z_1, \dots, z_d) := (e^{it_1} z_1, \dots, e^{it_d} z_d). \quad (4.3.5)$$

Sabemos que essa ação é hamiltoniana com aplicação momentum  $J : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$  dada por (veja Exemplo 3.3.10):

$$J(z_1, \dots, z_d) = -\frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_d|^2) + \text{constante}. \quad (4.3.6)$$

A seguir, tomaremos esta constante igual a  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ . Para evitar confusões ao usar  $\mathbb{R}^d$  e o seu dual  $(\mathbb{R}^d)^*$ , denotaremos por  $\bar{J} : \mathbb{C}^d \longrightarrow (\mathbb{R}^d)^*$  a aplicação definida por  $\bar{J}(z) = \langle J(z), \cdot \rangle$ .

Pelo Exemplo 3.3.9, o grupo  $N$  atua em  $\mathbb{C}^d$  de maneira hamiltoniana com a aplicação momentum  $i^* \circ \bar{J} : \mathbb{C}^d \longrightarrow \mathfrak{n}^*$ .

Defina  $Z := (i^* \circ \bar{J})^{-1}(0) \subseteq \mathbb{C}^d$ .

Defina também  $\Delta^* := \{ \langle x, \cdot \rangle \in (\mathbb{R}^n)^* \mid x \in \Delta \}$ . Note que  $\Delta^* = \{ \beta \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle \beta, n_i \rangle \leq \alpha_i, i = 1, \dots, d \}$ .

**Lema 4.3.2.** *Temos que  $\bar{J}(Z) = \pi^*(\Delta^*)$ .*

*Demonstração.* Claramente  $\bar{J}(Z) = \bar{J}(\mathbb{C}^d) \cap \text{Ker } i^*$ , e como  $\text{Ker } i^* = \text{Im } \pi^*$  (veja a seqüência exata (4.3.4)), temos que:

$$\bar{J}(Z) = \bar{J}(\mathbb{C}^d) \cap \text{Im } \pi^*. \quad (4.3.7)$$

Afirmamos que

$$\bar{J}(\mathbb{C}^d) = \{ \beta \in (\mathbb{R}^d)^* \mid \langle \beta, e_i \rangle \leq \alpha_i, i = 1, \dots, d \}.$$

Com efeito, se  $\beta \in \bar{J}(\mathbb{C}^d)$ , então existe  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^d$  tal que  $\bar{J}(z) = \beta$ , donde, levando em conta (4.3.6),

$$\begin{aligned} \langle \beta, e_i \rangle &= \langle \bar{J}(z), e_i \rangle = \langle J(z), e_i \rangle \\ &= \left\langle -\frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_d|^2) + (\alpha_1, \dots, \alpha_d), (0, \dots, 1, \dots, 0) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2}|z_i|^2 + \alpha_i, \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

o que implica,

$$\langle \beta, e_i \rangle - \alpha_i = -\frac{1}{2}|z_i|^2 \leq 0.$$



Assim  $\langle \beta, e_i \rangle \leq \alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Reciprocamente, se  $\beta \in (\mathbb{R}^d)^*$  é tal que  $\langle \beta, e_i \rangle \leq \alpha_i$  para todo  $i = 1, \dots, d$ , então  $\alpha_i - \langle \beta, e_i \rangle \geq 0$  e portanto, podemos considerar o vetor  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^d$  cujas coordenadas são,

$$a_i := \sqrt{2(\alpha_i - \langle \beta, e_i \rangle)}.$$

É imediato, usando (4.3.8), verificar que  $\bar{J}(a) = \beta$ . Isso mostra a afirmação.

Segue da afirmação e da equação (4.3.7) que um covetor  $\beta \in (\mathbb{R}^d)^*$  pertence a  $\bar{J}(Z)$  se e somente se, satisfaz as seguintes condições:

1.  $\langle \beta, e_i \rangle \leq \alpha_i$  para todo  $i = 1, \dots, d$ ,
2. existe  $x \in (\mathbb{R}^n)^*$  tal que  $\beta = \pi^*(x)$ .

Se um covetor  $\beta \in (\mathbb{R}^d)^*$  é da forma  $\beta = \pi^*(x)$ , com  $x \in (\mathbb{R}^n)^*$ , então

$$\langle \beta, e_i \rangle = \langle \pi^*(x), e_i \rangle = \langle x, \pi_{*e} e_i \rangle = \langle x, \bar{\pi}(e_i) \rangle = \langle x, n_i \rangle,$$

donde,

$$\begin{aligned} \langle \beta, e_i \rangle &\leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, d, \\ \Leftrightarrow \langle x, n_i \rangle &\leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, d \\ \Leftrightarrow x &\in \Delta^*. \end{aligned}$$

Decorre imediatamente dessas observações que  $\bar{J}(Z) = \pi^*(\Delta^*)$ . □

**Lema 4.3.3.** *O conjunto  $Z$  é compacto e a ação de  $N$  sobre  $Z$  é livre.*

*Demonstração.* Segue da relação  $\bar{J}(Z) = \pi^*(\Delta^*)$  que  $Z = (i^* \circ \bar{J})^{-1}(0)$  está contido no conjunto  $(\bar{J})^{-1}(\pi^*(\Delta^*))$ , o qual é a imagem inversa do compacto  $\pi^*(\Delta^*)$  pela aplicação própria  $\bar{J}$ . Assim  $Z = (i^* \circ \bar{J})^{-1}(0)$  é um subconjunto fechado de um conjunto compacto, e portanto é compacto.

Resta mostrar que a ação de  $N$  sobre  $Z$  é livre.

Seja  $z \in Z$  arbitrário. Devemos mostrar que o estabilizador  $N_z$  é trivial. Pelo Lema 4.3.2, existe  $p \in \Delta$  tal que  $\bar{J}(z) = \pi^*(\langle p, \cdot \rangle)$ . Vamos considerar 3 casos:

- *Caso  $p$  é um vértice de  $\Delta$ .*

Sendo um vértice, existem índices  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq d$  tais que:

$$\begin{cases} \langle p, n_{i_k} \rangle = \alpha_{i_k}, & k = 1, \dots, n, \\ \langle p, n_{i_j} \rangle < \alpha_j, & j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i_1, \dots, i_n\}. \end{cases} \quad (4.3.9)$$

Por outro lado, dado  $l \in \{1, \dots, d\}$ , temos que:

$$\begin{aligned}
\langle p, n_{i_k} \rangle - \alpha_l &= \langle p, \bar{\pi}(e_{i_k}) \rangle - \alpha_l, \\
&= \langle \pi^*(\langle p, \cdot \rangle), e_{i_k} \rangle - \alpha_{i_k}, \\
&= \langle \bar{J}(z), e_{i_k} \rangle - \alpha_{i_k}, \\
&= -\frac{1}{2} |z_{i_k}|^2 + \alpha_l - \alpha_l, \\
&= -\frac{1}{2} |z_{i_k}|^2.
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Comparando (4.3.9) com (4.3.10), vemos que as coordenadas de  $z$  satisfazem  $z_{i_1} = z_{i_2} = \dots = z_{i_n} = 0$ , e se  $l \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i_1, \dots, i_n\}$ ,  $z_l \neq 0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $i_1 = 1, \dots, i_n = n$ . Assim  $z = (0, \dots, 0, z_{n+1}, \dots, z_d)$ , com  $z_{n+1} \neq 0, \dots, z_d \neq 0$ . Seja  $p_1(t_1, \dots, t_d)$  um elemento do estabilizador de  $z$  em relação a  $\mathbb{T}^d$ , isto é,  $p_1(t_1, \dots, t_d) \in (\mathbb{T}^d)_z$ . Temos então,

$$\begin{aligned}
&p_1(t_1, \dots, t_d) \cdot (0, \dots, 0, z_{n+1}, \dots, z_d) = (0, \dots, 0, z_{n+1}, \dots, z_d), \\
\Leftrightarrow &(e^{2\pi t_1} 0, \dots, e^{2\pi t_n} 0, e^{2\pi t_{n+1}} z_{n+1}, \dots, e^{2\pi t_d} z_d) = (0, \dots, 0, z_{n+1}, \dots, z_d), \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} e^{2\pi t_{n+1}} z_{n+1} = z_{n+1}, \\ \vdots \\ e^{2\pi t_d} z_d = z_d, \end{cases}
\end{aligned}$$

e como  $z_{n+1}, \dots, z_d$  são todos diferentes de 0, concluímos que

$$e^{2\pi t_{n+1}} = \dots = e^{2\pi t_d} = 1,$$

ou seja,  $t_{n+1}, \dots, t_d \in \mathbb{Z}$ . Assim, elementos de  $(\mathbb{T}^d)_z$  são da forma,

$$p_1(t_1, \dots, t_d) = p_1(t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0),$$

com  $t_1, \dots, t_n$  números reais quaisquer.

Afirmamos que a restrição de  $\pi$  ao subgrupo  $(\mathbb{T}^d)_z$  é uma bijeção,  $\pi : (\mathbb{T}^d)_z \xrightarrow{\cong} \mathbb{T}^n$ . Para ver isso, escolhamos um elemento arbitrário  $p_1(t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0)$  de  $(\mathbb{T}^d)_z$ . Levando em conta o diagrama (4.3.1), temos que,

$$\begin{aligned}
\pi(p_1(t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0)) &= (p_2 \circ \bar{\pi})(t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0), \\
&= (p_2 \circ \bar{\pi})(t_1 e_1 + \dots + t_n e_n), \\
&= p_2(t_1 n_1 + \dots + t_n n_n).
\end{aligned}$$

Segue que  $\pi$  é sobrejetiva, pois  $\{n_1, \dots, n_n\}$  é uma base de  $\mathbb{Z}^n$  sobre  $\mathbb{Z}$  (em particular, é uma base de  $\mathbb{R}$ ), e os números reais  $t_1, \dots, t_n$  podem ser escolhidos arbitrariamente. Para ver a injetividade de  $\pi$ , pegue  $p_1(t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0)$  no núcleo de  $\pi$ . Temos então que

$$p_2(t_1 n_1 + \dots + t_n n_n) = p_2(0) \Rightarrow t_1 n_1 + \dots + t_n n_n \in \mathbb{Z}^n.$$

Como os vetores  $n_1, \dots, n_n$  formam uma  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathbb{Z}^n$ , existem  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}^n$  tais que

$$t_1 n_1 + \dots + t_n n_n = k_1 n_1 + \dots + k_n n_n,$$

e necessariamente,  $t_1 = k_1, \dots, t_n = k_n$ . Segue que  $p_1(t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0) = p_1(0)$ . Isso mostra que  $\pi : (\mathbb{T}^d)_z \rightarrow \mathbb{T}^n$  é uma bijeção, como havíamos afirmado.

Sendo assim, temos que

$$\{e\} = \text{Ker}(\pi|_{(\mathbb{T}^d)_z}) = \text{Ker}(\pi) \cap (\mathbb{T}^d)_z = N \cap (\mathbb{T}^d)_z,$$

isto é,  $N \cap (\mathbb{T}^d)_z = \{e\}$ . Agora, é claro que  $N_z \subseteq (\mathbb{T}^d)_z$ , donde  $N_z \subseteq N \cap (\mathbb{T}^d)_z = \{e\}$ , o que implica  $N_z = \{e\}$ .

- *Caso  $p$  é um ponto interior de  $\Delta$ .*

Nesse caso,  $p$  satisfaz as desigualdades,

$$\langle p, n_k \rangle < \alpha_k$$

para todo  $k = 1, \dots, d$ . Um raciocínio análogo ao do caso anterior mostra que todas as coordenadas de  $z$  são diferentes de zero, isto é,  $z_k \neq 0$  para todo  $k = 1, \dots, d$ . Daí, o mesmo raciocínio mostra que  $(\mathbb{T}^d)_z$  é trivial, o que implica que  $N_z \subseteq (\mathbb{T}^d)_z$  é trivial também.

- *Caso  $p$  pertence a uma face  $F$ , onde  $F$  é diferente dos vértices e  $F \neq \Delta$ .*

Analogamente aos casos anteriores (o caso quando  $p$  é igual ao vértice é o “pior”).

Concluimos que a ação de  $N$  sobre  $Z$  é livre.  $\square$

**Lema 4.3.4.** *O conjunto  $Z = (i^* \circ \bar{J})^{-1}(0)$ , que é compacto pelo Lema 4.3.3, é também uma subvariedade de  $\mathbb{C}^d$  de dimensão  $d + n$ .*

*Demonstração.* Para ver isso, note que:

- a ação de  $\mathbb{T}^d$  sobre  $\mathbb{C}^d$  é livre, e portanto, a aplicação momentum  $\bar{J} : \mathbb{C}^d \rightarrow (\mathbb{R}^d)^*$  é uma submersão,

- a aplicação  $i_{*e} : \mathfrak{n} \rightarrow \mathbb{R}^d$  é injetiva, donde,  $i^* : (\mathbb{R}^d)^* \rightarrow \mathfrak{n}^*$  é sobrejetiva.

Segue desses dois pontos que  $(i^* \circ \bar{J})^{-1}(0) = Z$  é uma subvariedade de dimensão

$$\dim(\mathbb{C}^d) - \dim(\mathfrak{n}^*) = 2d - (d - n) = d + n.$$

$\square$

Pelo Lema 4.3.3, o grupo  $N$  atua livremente e propriamente (por compacidade) sobre  $Z$ . Podemos então aplicar o Teorema de Redução simplética de Marsden-Weinstein-Meyer 3.4.4 (veja também a Observação 3.4.5) : existe uma única forma simplética  $\omega_\Delta$  em  $M_\Delta := N \backslash Z$  caracterizada pela relação

$$p^* \omega_\Delta = j^* \omega, \tag{4.3.11}$$

onde  $p : Z \longrightarrow M_\Delta = N \backslash Z$  é a aplicação quociente e  $j : Z \hookrightarrow \mathbb{C}^d$  é a aplicação de inclusão,

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{j} & \mathbb{C}^d \\ p \downarrow & & \\ M_\Delta & & \end{array} .$$

Seja  $p$  um vértice de  $\Delta$  e seja  $z \in Z$  um ponto satisfazendo  $\bar{J}(z) = \pi^*(\langle p, \cdot \rangle)$  (veja acima). Sabemos que  $\pi : (\mathbb{T}^d)_z \longrightarrow \mathbb{T}^n$  é uma bijeção. Seja  $\sigma : \mathbb{T}^n \longrightarrow (\mathbb{T}^d)_z$  a aplicação inversa (é um homomorfismo de grupos de Lie). Defina

$$\Phi_\Delta : \begin{cases} \mathbb{T}^n \times M_\Delta \longrightarrow M_\Delta, \\ (g, p(w)) \longmapsto p(\sigma(g).w), \end{cases} \quad (4.3.12)$$

onde  $g \in \mathbb{T}^n$  e  $w \in Z$ . Neste contexto temos o seguinte lema.

**Lema 4.3.5.** *A aplicação  $\Phi_\Delta$  está bem definida e é uma ação simplética.*

*Demonstração.* Para verificar que  $\Phi_\Delta$  está bem definida, devemos verificar que  $Z$  é invariante pela ação do grupo  $\sigma(\mathbb{T}^n)$  e que a fórmula que define  $\Phi_\Delta$  é independente do representante  $w \in Z$  usado.

- $Z$  é  $\sigma(\mathbb{T}^n)$ -invariante:

Seja  $w \in Z$  e seja  $g \in \mathbb{T}^n$ . Pela  $\mathbb{T}^d$ -equivariância de  $\bar{J}$ , temos que  $\bar{J}(\sigma(g)w) = \bar{J}(w)$ , donde,

$$(i^* \circ \bar{J})(\sigma(g)w) = (i^* \circ \bar{J})(w) = 0,$$

pois  $w \in Z := (i^* \circ \bar{J})^{-1}(0)$ . Isso mostra que  $Z$  é  $\sigma(\mathbb{T}^n)$ -invariante.

- A fórmula que define  $\Phi_\Delta$  é independente do representante  $w$ :

Sejam  $n \in N$ ,  $g \in \mathbb{T}^n$  e  $w \in Z$ . Devemos mostrar que,

$$p(\sigma(g)(n.w)) = p(\sigma(g).w).$$

O grupo  $N$  sendo o núcleo de um homomorfismo, é normal em  $\mathbb{T}^d$ . Isso implica que existe  $n' \in N$  tal que  $\sigma(g).n = n'.\sigma(g)$ . Daí,

$$\begin{aligned} \sigma(g)(n.w) &= (\sigma(g)n).w, \\ &= (n'\sigma(g)).w, \\ &= n'(\sigma(g)w), \end{aligned}$$

e portanto,  $p(\sigma(g).(nw)) = p(\sigma(g)w)$ .

O fato de  $\Phi_\Delta$  ser uma ação decorre trivialmente do fato de  $\sigma$  ser um homomorfismo de grupos de Lie.

Para ver que  $\Phi_\Delta$  é suave, basta observar que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^n \times Z & \xrightarrow{\Phi} & Z \\ Id \times p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{T}^n \times M_\Delta & \xrightarrow{\Phi_\Delta} & M_\Delta, \end{array}$$

onde  $\Phi(g, w) := \sigma(g).w$ , é comutativo e que  $\Phi$  é suave.

Para ver que  $\Phi_\Delta$  é simplética, note que se  $A : \mathbb{T}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  denota a ação (4.3.5), então para todo  $g \in \mathbb{T}^n$ ,  $p \circ \Phi_g = (\Phi_\Delta)_g \circ p$  e  $j \circ \Phi_g = A_{\sigma(g)} \circ j$  donde,

$$\begin{aligned} p^*(\Phi_\Delta)_g^* \omega_\Delta &= ((\Phi_\Delta)_g \circ p)^* \omega_\Delta, \\ &= (p \circ \Phi_g)^* \omega_\Delta, \\ &= (\Phi_g)^* p^* \omega_\Delta, \\ &= (\Phi_g)^* j^* \omega, \quad (\text{veja (4.3.11)}), \\ &= (j \circ \Phi_g)^* \omega, \\ &= (A_{\sigma(g)} \circ j)^* \omega, \\ &= j^* A_{\sigma(g)}^* \omega, \\ &= j^* \omega \quad (\text{pois } \omega \text{ é } \mathbb{T}^d\text{-invariante}). \end{aligned}$$

Pela unicidade da forma simplética reduzida  $\omega_\Delta$ , concluímos que  $(\Phi_\Delta)_g^* \omega_\Delta = \omega_\Delta$  para todo  $g \in \mathbb{T}^n$ , isto é,  $\Phi_\Delta$  é simplética.  $\square$

A derivada de  $\sigma : \mathbb{T}^n \rightarrow (\mathbb{T}^d)_z \subseteq \mathbb{T}^d$  em 0 dá uma aplicação  $\sigma_{*e} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ ; denotamos por  $\sigma^*$  a aplicação dual  $(\sigma_{*e})^* : (\mathbb{R}^d)^* \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ .

Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \xrightarrow{j} & \mathbb{C}^d & \xrightarrow{\bar{J}} & (\mathbb{R}^d)^* & \xrightarrow{\sigma^*} & (\mathbb{R}^n)^* \\ p \downarrow & & \circlearrowleft & & & \nearrow & \\ M_\Delta & & & & & & \end{array}$$

Decorre imediatamente da  $\mathbb{T}^d$ -invariância de  $\bar{J}$  que a composta  $\sigma^* \circ \bar{J} \circ j$  é  $N$ -invariante, e portanto, existe uma única aplicação suave  $J_\Delta : M_\Delta \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  tal que o diagrama acima comuta.

**Lema 4.3.6.**  $J_\Delta$  é uma aplicação momentum da ação  $\Phi_\Delta$ , e a sua imagem é  $\Delta^*$ .

*Demonstração.* Fixamos  $\xi \in \mathbb{R}^n = Lie(\mathbb{T}^n)$ ,  $w \in Z$  e  $u \in T_w Z$ . Devemos mostrar que

$$(\omega_\Delta)_{p(w)}((\xi_{M_\Delta})_{p(w)}, p_{*w} u) = (J_\Delta^\xi)_{*p(w)} p_{*w} u. \quad (4.3.13)$$

As relações  $p \circ \Phi_g = (\Phi_\Delta)_g \circ p$  e  $j \circ \Phi_g = A_{\sigma(g)} \circ j$ , as quais valem para todo  $g \in \mathbb{T}^n$ , implicam as seguintes relações entre campos de vetores fundamentais,

$$\begin{aligned} ((\sigma_{*e}\xi)_{\mathbb{C}^d})_{j(w)} &= j_{*w}(\xi_Z)_w, \\ (\xi_{M_\Delta})_{p(w)} &= p_{*w}(\xi_Z)_w, \end{aligned}$$

donde, podemos reescrever o membro esquerdo de (4.3.13) como,

$$\begin{aligned} (\omega_\Delta)_{p(w)}((\xi_{M_\Delta})_{p(w)}, p_{*w}u) &= (\omega_\Delta)_{p(w)}(p_{*w}(\xi_Z)_w, p_{*w}u) \\ &= (p^*\omega_\Delta)_w((\xi_Z)_w, u) \\ &= (j^*\omega)_w((\xi_Z)_w, u) \\ &= \omega_{j(w)}(j_{*w}(\xi_Z)_w, j_{*w}u) \\ &= \omega_{j(w)}((\sigma_{*e}\xi)_{\mathbb{C}^d}, j_{*w}u) \\ &= (\bar{J}^{\sigma_{*e}\xi})_{*j(w)}j_{*w}u. \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Por outro lado, temos, levando em conta o diagrama acima, que

$$\begin{aligned} (J_\Delta^\xi)_{*p(w)}p_{*w}u &= \langle (J_\Delta)_{*p(w)}p_{*w}u, \xi \rangle \\ &= \langle (J_\Delta \circ p)_{*w}u, \xi \rangle \\ &= \langle (\sigma^* \circ \bar{J} \circ j)_{*w}u, \xi \rangle \\ &= \langle \sigma^*\bar{J}_{*j(w)}j_{*w}u, \xi \rangle \\ &= \langle \bar{J}_{*j(w)}j_{*w}u, \sigma_{*e}(\xi) \rangle \\ &= (\bar{J}^{\sigma_{*e}(\xi)})_{*j(w)}j_{*w}u. \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Comparando (4.3.14) e (4.3.15) concluímos que  $\Phi_\Delta$  é uma ação hamiltoniana com aplicação momentum  $J_\Delta$ . Finalmente note que,

$$\begin{aligned} J_\Delta(M_\Delta) &= J_\Delta(p(Z)) \\ &= (\sigma^* \circ \bar{J} \circ j)(Z) \\ &= \sigma^*(\pi^*(\Delta^*)) \quad (\text{veja lema (4.3.2)}) \\ &= (\sigma^* \circ \pi^*)(\Delta^*) \\ &= \Delta^*, \end{aligned}$$

pois,  $\sigma^* \circ \pi^* = (\pi \circ \sigma)^* = Id^* = Id$ . □

Assim  $(M_\Delta, \omega_\Delta, \Phi_\Delta, J_\Delta)$  é uma variedade tórica simplética cujo polítopo momentum é  $J_\Delta(M_\Delta) = \Delta^*$ , o qual indentifica-se com  $\Delta$  por meio da métrica euclidiana.

# Apêndice A

## Comentários sobre Variedades Simplética e Grupos de Lie

### A.1 Comentários sobre Formas Simpléticas

Nesta Secção, apresentaremos a prova da Proposição 1.3.3 que foi omitida na Secção 1.3.

**Proposição A.1.1.** *A 2-forma*

$$\omega_0 := \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k,$$

onde  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  são as coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^{2n}$ , é uma forma simplética.

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned} d\omega_0 &= d\left(\sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n d(dx_k \wedge dy_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \{d(dx_k) \wedge dy_k + (-1)^k dx_k \wedge d(dy_k)\} \\ &= \sum_{k=1}^n \{d^2x_k \wedge dy_k + (-1)^k dx_k \wedge d^2y_k\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que mostra que  $\omega_0$  é uma 2-forma fechada.

Para provar que é não-degenerada, devemos mostrar que a aplicação  $(\omega_0)_p : T_p\mathbb{R}^{2n} \times T_p\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  é não-degenerada. Seja  $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}\}$  a base canônica

de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Suponha que  $u = u_1 e_1 + \dots + u_{2n} e_{2n} \in \mathbb{R}^{2n} \simeq T_p \mathbb{R}^{2n}$  seja tal que  $(\omega_0)_p(u, v) = 0$  para todo  $v \in T_p \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{R}^{2n}$ . Isto implica em particular que para todo  $i = 1, \dots, 2n$ ,

$$0 = \omega(u, e_i) = \sum_{j=1}^{2n} u_j \omega(e_j, e_i) = \sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^n u_j (dx_k \wedge dy_k)(e_j, e_i), \quad (\text{A.1.1})$$

onde

$$(dx_k \wedge dy_k)(e_i, e_j) = \det \begin{bmatrix} dx_k(e_i) & dx_k(e_j) \\ dy_k(e_i) & dy_k(e_j) \end{bmatrix}.$$

Vamos calcular esse determinante. Para isso, considere  $\{dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_n\}$  a base dual da base canônica de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Logo por definição:

$$dx_k(e_i) = \delta_{k,i}, \quad dy_k(e_i) = \delta_{k,i-n}, \quad (k = 1, \dots, n)$$

Vamos considerar quatro casos:

Caso  $1 \leq i, j \leq n$ : temos então,  $dx_k(e_i) = \delta_{k,i}$ ,  $dy_k(e_i) = 0$ ,  $dx_k(e_j) = \delta_{k,j}$  e  $dy_k(e_j) = 0$ , donde

$$\det \begin{bmatrix} dx_k(e_i) & dx_k(e_j) \\ dy_k(e_i) & dy_k(e_j) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta_{k,i} & \delta_{k,j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

De maneira análoga o determinante é nulo no caso  $n+1 \leq i, j \leq 2n$ .

No caso  $1 \leq i \leq n$  e  $n+1 \leq j \leq 2n$ , temos  $dx_k(e_i) = \delta_{k,i}$ ,  $dy_k(e_i) = 0$ ,  $dx_k(e_j) = 0$  e  $dy_k(e_j) = \delta_{k,j-n}$ . Daí,

$$\det \begin{bmatrix} dx_k(e_i) & dx_k(e_j) \\ dy_k(e_i) & dy_k(e_j) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta_{k,i} & 0 \\ 0 & \delta_{k,j-n} \end{bmatrix} = \delta_{k,i} \delta_{k,j-n}.$$

E finalmente no caso  $n+1 \leq i \leq 2n$  e  $1 \leq j \leq n$ , temos  $dx_k(e_i) = 0$ ,  $dy_k(e_i) = \delta_{k,i-n}$ ,  $dx_k(e_j) = \delta_{k,j}$  e  $dy_k(e_j) = 0$ . Portanto:

$$\det \begin{bmatrix} dx_k(e_i) & dx_k(e_j) \\ dy_k(e_i) & dy_k(e_j) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & \delta_{k,j} \\ \delta_{k,i-n} & 0 \end{bmatrix} = -\delta_{k,j} \delta_{k,i-n}.$$

Concluimos então que :

$$\det \begin{bmatrix} dx_k(e_i) & dx_k(e_j) \\ dy_k(e_i) & dy_k(e_j) \end{bmatrix} = \begin{cases} 0, & \text{se } 1 \leq i, j \leq n \text{ ou } n+1 \leq i, j \leq 2n, \\ \delta_{k,i} \delta_{k,j-n}, & \text{se } 1 \leq i \leq n \text{ e } n+1 \leq j \leq 2n, \\ -\delta_{k,j} \delta_{k,i-n}, & \text{se } n+1 \leq i \leq 2n \text{ e } 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Se  $1 \leq i \leq n$  segue que o determinante é nulo ou igual a  $\delta_{k,i} \delta_{k,j-n}$ . Daí quando  $h = i =$



$j - n$  temos,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^n u_j \det \begin{bmatrix} dx_k(e_i) & dx_k(e_j) \\ dy_k(e_i) & dy_k(e_j) \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n u_j \det \begin{bmatrix} dx_k(e_i) & dx_k(e_j) \\ dy_k(e_i) & dy_k(e_j) \end{bmatrix} + \sum_{j=n+1}^{2n} \sum_{k=1}^n u_j \det \begin{bmatrix} dx_k(e_i) & dx_k(e_j) \\ dy_k(e_i) & dy_k(e_j) \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=n+1}^{2n} \sum_{k=1}^n u_j \delta_{k,i} \delta_{k,j-n} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j - n, \\ 1 & \text{se } i = j - n = k. \end{cases}
\end{aligned}$$

Necessariamente, existe um único  $j \in \{n+1, \dots, 2n\}$ , e um único  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $i = j - n = k$ . Portanto,

$$0 = \sum_{j=n+1}^{2n} \sum_{k=1}^n u_j \delta_{k,i} \delta_{k,j-n} = u_{i+n},$$

O que implica por (A.1.1) que  $u_{i+n} = 0$ . De maneira análoga mostra-se que  $u_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Assim  $\omega_0$  é não-degenerado, portanto  $\omega_0$  é uma forma simplética.  $\square$

## A.2 Colchete de Lie para campos de vetores.

Seja  $M$  uma variedade. Dado  $X$  um campo de vetores em  $M$ , denotamos por  $\varphi_t^X$  o fluxo de  $X$ . Assim, dado  $p \in M$ , a curva  $t \mapsto \varphi_t^X(p)$  é uma curva integral de  $X$  com condição inicial  $p$ , isto é,

$$\begin{cases} \dot{c}(t) = X_{c(t)}, \\ c(0) = p \end{cases}$$

onde  $c(t) = \varphi_t^X(p)$ .

**Definição A.2.1.** Sejam  $X$  e  $Y$  dois campos de vetores em  $M$ . O colchete de Lie de  $X$  com  $Y$  é o campo de vetores, denotado por  $[X, Y]$ , definido da seguinte maneira:

$$[X, Y]_p := (\varphi_t^X)_*_{\varphi_t^X(p)} Y_{\varphi_t^X(p)},$$

onde  $p \in M$ .

Verifica-se que  $[X, Y]$  está bem definido e é um campo de vetores suave em  $M$ .

**Proposição A.2.2.** *Seja  $M$  uma variedade. Dados três campos de vetores  $X, Y, Z$  e um número real  $a$ , tem-se:*

- (a)  $[aX + Y, Z] = a[X, Z] + [Y, Z]$ ,
- (b)  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
- (c)  $[X, [Y, X]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

*Demonstração.* Veja [11]. □

*Observação A.2.3.* A última relação é chamada *identidade de Jacobi*.

**Definição A.2.4.** *Seja  $\phi : M \rightarrow N$  uma aplicação suave entre duas variedades. Sejam também  $X$  um campo de vetores em  $M$  e  $Y$  um campo de vetores em  $N$ . Diz-se que  $X$  e  $Y$  são  $\phi$ -relacionados se*

$$\phi_{*p}X_p = Y_{\phi(p)}$$

para todo  $p \in M$ .

**Proposição A.2.5.** *Seja  $\phi : M \rightarrow N$  uma aplicação suave entre duas variedades. Sejam também  $X_1, X_2$  dois campos de vetores em  $M$  e sejam  $Y_1, Y_2$  dois campos de vetores em  $N$ . Suponha que  $X_i$  seja  $\phi$ -relacionado com  $Y_i$ ,  $i = 1, 2$ . Então  $[X_1, X_2]$  é  $\phi$ -relacionado com  $[Y_1, Y_2]$ , isto é,*

$$\phi_{*p}[X_1, X_2]_p = [Y_1, Y_2]_p$$

para todo  $p \in M$ .

*Demonstração.* Veja [11] □

### A.3 Comentários sobre os grupos de Lie.

Nesta secção vamos mostrar alguns resultados sobre os grupos de Lie que foram omitidos na Secção 2.1.

**Proposição A.3.1.** *A aplicação  $Ad : G \rightarrow L(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  (representação adjunta) é suave.*

A demonstração da Proposição A.3.1 basea-se no seguinte lema.

**Lema A.3.2.** *Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades e seja  $f : M \times N \rightarrow N$  uma aplicação  $C^\infty$ . Suponha que exista  $y_0 \in N$  tal que  $f(x, y_0) = y_0$  para todo  $x \in M$ . Então, a aplicação*

$$\rho : \begin{cases} M \rightarrow L(T_{y_0}N, T_{y_0}N), \\ x \mapsto (f_x)_{*y_0}, \end{cases}$$

onde  $\varphi_x : N \rightarrow N$  é a aplicação definida por  $f_x(y) = f(x, y)$ , é de classe  $C^\infty$ .

Além disso, dado  $u \in T_{y_0}N$  e dada uma curva  $\delta : I \rightarrow M$ ,  $0 \in I$ , temos que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \rho(f(t))(u) = (\rho_{*\delta(0)} \dot{\delta}(0))(u).$$

*Demonstração.* Seja  $x_0 \in M$  arbitrário e seja  $(W, \xi)$  uma carta de  $N$  em  $y_0$  com coordenadas locais  $\{z_1, \dots, z_n\}$ . Como  $f$  é de classe  $C^\infty$ , existem uma carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  em  $x_0$  e uma carta  $(V, \psi)$  de  $N$  em  $y_0$  tais que  $f(U \times V) \subseteq W$  e

$$\xi \circ f(\varphi \times \psi)^{-1} : \varphi(U) \times \psi(V) \rightarrow \xi(W)$$

é  $C^\infty$ , onde

$$\varphi \times \psi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}, \quad (x, y) \mapsto (\varphi(x), \psi(y)).$$

Sejam  $y_1, \dots, y_n$  coordenadas locais da carta  $(V, \psi)$ . Dado  $x \in U$ , temos que  $f_x(V) \in f(\{x\} \times V) \subseteq f(U \times V) \subseteq W$ . Logo, para todo  $x \in U$  podemos representar  $\rho_x = (f_x)_{*y_0}$  como uma matriz em relação as bases  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right\}$  e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\}$ :

$$(\rho(x))_{ij} = \left. \frac{\partial(\xi \circ f_x \circ \psi^{-1})_i}{\partial y_j} \right|_{\psi(y_0)},$$

onde  $i, j = 1, \dots, n$ . Dados  $u \in \varphi(U)$  e  $v \in \psi(V)$ , temos que

$$\begin{aligned} (\xi \circ f_{\varphi^{-1}(u)} \circ \psi^{-1})(v) &= (\xi \circ f)(\varphi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)) \\ &= (\xi \circ f \circ (\varphi \times \psi)^{-1})(u, v), \end{aligned}$$

e portanto  $(\rho(\varphi^{-1}(u)))_{ij}$  é a  $y_j$ -ésima derivada da  $i$ -ésima função coordenada da aplicação suave  $\xi \circ f \circ (\varphi \times \psi)^{-1}$  no ponto  $\psi(y_0)$ . Segue-se que  $\rho_{ij} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  é suave para todo  $i, j = 1, \dots, n$  o que implica que  $\rho$  é suave.

Mostraremos agora a segunda parte do enunciado. Seja  $u \in T_{y_0}N$ . Defina  $ev_u : L(T_{y_0}N, T_{y_0}N) \rightarrow T_{y_0}N$ ,  $A \mapsto A(u)$ . Sendo linear, a aplicação  $ev_u$  é  $C^\infty$  e a sua derivada satisfaz  $(ev_u)_{*A} = ev_u$  para todo  $A \in L(T_{y_0}N, T_{y_0}N)$ . Se  $\delta(t)$  é uma curva suave de  $M$ , então  $\rho(\delta(t))(u) = (ev_u \circ \rho \circ \delta)(t)$  é suave (é a composta de três aplicações suaves), e pela regra da cadeia, temos que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\rho(\delta(t))(u)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (ev_u \circ \rho \circ \delta)(t) \\ &= (ev_u)_{*\rho(\delta(t))} \rho_{*\delta(t)} \dot{\delta}(t) \\ &= ev_u(\rho_{*\delta(t)} \dot{\delta}(t)) \\ &= (\rho_{*\delta(t)} \dot{\delta}(t))(u) \\ &= (\rho_{*\delta(t)} \dot{\delta}(t))(u). \end{aligned}$$

□

*Demonstração.* (da Proposição A.3.1) Basta definir  $f : G \times G \longrightarrow G$ ,  $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$  e aplicar o Lema A.3.2 no ponto  $y_0 = e$ .  $\square$

**Definição A.3.3.** Seja  $G$  um grupo de Lie. O colchete de Lie à direita é a aplicação  $[\cdot, \cdot]^R : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ , definida por:

$$[\xi, \eta] := [\xi^R, \eta^R]_e,$$

onde  $\xi^R$  e  $\eta^R$  são os campos de vetores invariante à direita associados, isto é,  $(\xi^R)_g = (R_g|_{*e} \xi)$ .

**Lema A.3.4.** *Seja  $G$  um grupo de Lie. Então, para todo  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ , têm-se:*

$$[\xi, \eta]^R = -[\xi, \eta].$$

*Demonstração.* Temos que:

$$\begin{aligned} [\xi, \eta]^R &= [\xi^R, \eta^R]_e \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\varphi_t^{\xi^R})_{*_{\varphi_t^{\xi^R}(e)}} (\eta^R)_{\varphi_t^{\xi^R}(e)}. \end{aligned}$$

Usando um raciocínio análogo ao da demonstração da Proposição 2.2.2, vê-se que  $\varphi_t^{\xi^R}(g) = L_{\delta(t)}g = \delta(t)g$ , onde  $\delta(t)$  é a curva integral máxima do campo de vetores  $\xi^R$  que passa pelo ponto  $e$  no tempo  $t = 0$ . Vê-se também, seguindo a Observação 2.2.3 que  $\delta(-t) = \delta(t)^{-1}$ . Assim,

$$\begin{aligned} (\varphi_{-t}^{\xi^R})_{*_{\varphi_{-t}^{\xi^R}(e)}} (\eta^R)_{\varphi_{-t}^{\xi^R}(e)} &= (L_{\delta(-t)})_{*_{\delta(t)}} (R_{\delta(t)})_{*e} \eta \\ &= (L_{\delta(-t)})_{*_{\delta(t)}} (R_{\delta(t)})_{*e} \eta \\ &= (L_{\delta(-t)} \circ R_{\delta(t)})_{*e} \eta \\ &= (L_{\delta(t)^{-1}} \circ R_{\delta(t)})_{*e} \eta \\ &= (I_{\delta(t)^{-1}})_{*e} \eta \\ &= (Ad \circ i)(\delta(t))(\eta). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} [\xi, \eta]^R &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (Ad \circ i)(\delta(t))(\eta) \\ &= ad_{i_{*e}\xi}(\eta) \\ &= [i_{*e}\xi, \eta], \end{aligned}$$

onde  $i : G \longrightarrow G$ ,  $g \mapsto g^{-1}$ . Pelo Lema 2.1.4,

$$i_{*e}\xi = -(L_{e^{-1}} \circ R_{g^{-1}})_{*e}\xi = -\xi,$$

e portanto,

$$[\xi, \eta]^R = [i_{*e}\xi, \eta] = -[\xi, \eta].$$

O Lema segue. □

# Referências Bibliográficas

- [1] Ortega, Ratiu. *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction*. Birkhäuser Basel Vol.222, 2000.
- [2] Bursztyn, Macarini. *Introdução a Geometria Simplética*. 26 de julho 2006.
- [3] Michael F. Atiyah. Convexity and commuting Hamiltonians. *Bull. Lond. Math. Soc*, 14:1-15, 1982.
- [4] M. Audin. *Torus Actions On Symplectic Manifolds*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2004.
- [5] Ana Cannas da Silva. Symplectic toric manifolds. In *Symplectic geometry of integrable Hamiltonian systems (Barcelona, 2001)*, Adv. Courses Math. CRM BARCELONA, pages 85-173, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [6] Thomas Delzant. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment. *Bull. Soc. Math. France*, 116(3):315-339, 1988.
- [7] Ana Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Techniques in Physics*. Cambridge University Press, 1990.
- [8] Victor Guillemin. Kaehler structures on toric varieties. *J. Differential Geom.*, 40(2):285-309, 1994.
- [9] Mathieu Molitor. Exponential families, Kähler geometry and quantum mechanics. *J. Geom. Phys.*, 70:54-80, 2013.
- [10] J.E. Marsden and T.S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry*, volume 17 of Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1999.
- [11] Jonh M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, version 3.0, December 31, 2000. University of Washington, Seattle WA 98195-4350.
- [12] V. Guillemin and S. Sternberg. *Symplectic Techniques in Physics*. Cambridge University Press, 1990.

- [13] Brøndsted, Arne. *An Introduction to Convex Polytopes, Graduate Texts in Mathematics*. Springer Science+Business Media, LLC, 1982.
- [14] Gregory L. Naber. *Topology, Geometry and Gauge fields, Interactions*. Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, second edition, LLC, 2011.
- [15] GeoGebra, <https://www.geogebra.org/>.