

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika



Metody nelineární dynamiky pro ultrarelativistické jaderné srážky

Methods of Nonlinear Dynamics for Ultrarelativistic Nuclear Collisions

VÝZKUMNÝ ÚKOL

Vypracoval: Bc. Tomáš Novák
Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Michal Beneš, prof. Dr. Boris Tomášik
Rok: 2020



Katedra: fyziky

Akademický rok:

2019/2020

VÝZKUMNÝ ÚKOL

Student: Bc. Tomáš Novák

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Vedoucí úkolu: prof. Dr. Ing. Michal Beneš (KM), prof. Dr. Boris Tomášik (KF)

Název úkolu (česky/anglicky):

Metody nelineární dynamiky pro ultrarelativistické jaderné srážky

Methods of Nonlinear Dynamics for Ultrarelativistic Nuclear Collisions

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s metodami analýzy hamiltonovských systémů
2. Použijte tyto metody na vybraných příkladech
3. Seznamte se se základy matematického popisu klasické hydrodynamiky
4. Seznamte se se základy matematického popisu relativistické hydrodynamiky
5. Zahajte práce na hledání atraktorů při hydrodynamickém popisu ultrarelativistických srážek

Součástí zadání výzkumného úkolu je jeho uložení na webové stránky katedry fyziky.

Literatura:

1. F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, Berlin 1990
2. P. Romatschke and U. Romatschke, Relativistic Fluid Dynamics In and Out of Equilibrium, Cambridge University Press 2019
3. Jaiswal, Sunil & Chattopadhyay, Chandrodoy & Jaiswal, Amaresh & Pal, Subrata & Heinz, Ulrich. (2019). Exact solutions and attractors of higher-order viscous fluid dynamics for Bjorken flow. Physical Review C. 100. 10.1103/PhysRevC.100.034901.
4. M. P. Heller and M. Spaliński, Hydrodynamics Beyond the Gradient Expansion: Resurgence and Resummation, Physical Review Letters 115, 072501 (2015)

Datum zadání: 25.10.2019

.....

Datum odevzdání: 26.06.2020

vedoucí katedry

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svůj výzkumný úkol vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

.....
Bc. Tomáš Novák

Poděkování

Moc děkuji prof. Dr. Ing. Michalu Benešovi a prof. Dr. Borisovi Tomášikovi za směřování této práce, korekturu textu a hlavně za jejich trpělivost i ochotu při dlouhých konzultacích. Jsem vděčný, že mi umožnili pracovat na tak fyzikálně zajímavém tématu.

Bc. Tomáš Novák

Název práce:

Metody nelineární dynamiky pro ultrarelativistické jaderné srážky

Autor: Bc. Tomáš Novák

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Druh práce: Výzkumný úkol

Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Michal Beneš (KM), prof. Dr. Boris Tomášik (KF)
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Konzultant: –

Abstrakt: Presentujeme základní pojmy i některé pokročilé metody klasické nelineární dynamiky spolu s aplikací KAM teorému. Dále budujeme klasickou hydrodynamiku pro zřejmější analogie se svým relativistickým protějškem. V rámci relativistické hydrodynamiky jsou odvozeny pohybové rovnice blízko statické rovnováhy včetně Bjorkenova modelu. Je nastíněna divergence hydrodynamického rozvoje dále od statické rovnováhy a řešení tohoto problému vede k hydrodynamickému atraktoru.

Klíčová slova: kvark-gluonové plazma, relativistická hydrodynamika, nelineární dynamika, klasická hydrodynamika, hydrodynamický atraktor

Title:

Methods of Nonlinear Dynamics for Ultrarelativistic Nuclear Collisions

Author: Bc. Tomáš Novák

Abstract: We present basic concepts and some advanced methods of classical nonlinear dynamics also with an application of the KAM theorem. We are building classical hydrodynamics for better insight into its relativistic analogy. Within relativistic hydrodynamics equations of motion are derived near static equilibrium including the Bjorken model. Divergence of hydrodynamic expansion further from static equilibrium is outlined and its solution leads to the hydrodynamic attractor.

Key words: quark-gluon plasma, relativistic hydrodynamics, nonlinear dynamics, classical hydrodynamics, hydrodynamic attractor

Obsah

Úvod	9
1 Klasická nelineární dynamika	11
1.1 Spojitý dynamický systém	12
1.1.1 Metoda linearizace	14
1.1.2 Stabilita řešení	17
1.1.3 Bifurkace	18
1.1.4 Ljapunovova metoda	19
1.1.5 Hamiltonovské systémy	20
1.1.6 Deterministický chaos v Hamiltonovských systémech	22
2 Hydrodynamika	27
2.1 Hydrostatika	27
2.1.1 Tenzor napětí	28
2.2 Transportní teorém	30
2.3 Hydrodynamické pohybové rovnice	32
2.3.1 Tenzor napětí	32
2.3.2 Eulerovy rovnice	33
2.3.3 Navierova-Stokesova rovnice	35
3 Relativistická hydrodynamika	37
3.1 Tenzor energie a hybnosti	37
3.1.1 Kovariantní derivace	38
3.1.2 Rozvoj tenzoru energie a hybnosti	39
3.2 Relativistické Eulerovy rovnice	40
3.2.1 Limitní přechod ke klasickým Eulerovým rovnicím	42
3.2.2 Bjorkenův model	42
3.3 Relativistická Navierova-Stokesova rovnice	44
3.3.1 Limitní přechod ke klasické Navierovi-Stokesovi rovnici	45
3.4 Smykové a objemové napětí, efektivní tlak	45
3.5 Divergence hydrodynamického rozvoje dále od statické rovnováhy	46
3.6 Hydrodynamický atraktor v MIS teorii	46
Závěr	49
Literatura	50

Úvod

Střed našeho zájmu je modelování vývoje kvark-gluonového plazmatu (QGP), které vzniká v ultrarelativistických jaderných srážkách na RHIC či LHC. Hydrodynamické modely (v relativistickém formalismu) si vysloužily valný úspěch v popisu evoluce tohoto exotického média. Je zajímavé, že v poslední době nacházíme tzv. hydrodynamický atraktor – univerzální řešení, ke kterému spěje evoluce QGP z libovolných počátečních podmínek. Tato vlastnost je nejčastěji spojována s klasickou nelineární dynamikou, avšak i s klasickou hydrodynamikou, která je přirozeně nelineární. Relativistická hydrodynamika je dalším zobecněním dosavadní teorie, a proto při uvažování nelineárních příspěvků není překvapivé pozorovat podobné chování.

V první části této práce se snažíme uceleně prezentovat vybrané metody z klasické nelineární dynamiky, jistým střídavým přístupem z důvodu obsáhlosti tématu. Dané metody jsou použitelné i při hydrodynamických simulacích, čehož budeme chtít v budoucnu využít. Teorie nelineární dynamiky je po bližším zkoumání (možná překvapivě) elegantní a podivuhodná. Vrcholem první kapitoly je KAM teorém, který kvalitativně postihuje vznik deterministického chaosu v Hamiltonovských systémech.

Ve druhé kapitole se snažíme systematicky vybudovat klasickou hydrodynamickou teorii v blízkosti statické rovnováhy (neturbulentní chování), aby posléze byly zřejmé analogie s relativistickou hydrodynamikou. Sledujeme zde několik publikací, které se snažíme syntetizovat do detailní a srozumitelné formy. Dospějeme k Navierovi-Stokesovi rovnici a budeme prezentovat přístup pro získání pohybových rovnic vyšších řádů.

Konečně ve třetí kapitole jdeme po stopách budování samotné teorie relativistické hydrodynamiky vhodné pro popis QGP vzniklého v ultrarelativistických jaderných srážkách. Ukážeme, jak v blízkosti statické rovnováhy získávat pohybové rovnice libovolného řádu a dospějeme tak k relativistickým Eulerovým, resp. Navierovým-Stokesovým rovnicím. V tomto kontextu se soustředíme i na Bjorkenův model. Problém nastane uvážíme-li již větší gradienty stavových proměnných (případy dále od statické rovnováhy), kdy daný hydrodynamický rozvoj diverguje. Východiskem jsou nám poté dva přístupy, pomocí MIS teorie, či Borelovské sumace. Pouze nastíníme MIS teorii, kvůli nezbytné časové náročnosti pro detailní zpracování, avšak již zde ukážeme existenci hydrodynamického atraktoru. Také lze výše uvažovaný divergentní hydrodynamický rozvoj přesumat pomocí Borelovské sumace, která vede na stejný hydrodynamický atraktor. Tyto přístupy jsou otevřené našemu dalšímu zkoumání.

Kapitola 1

Klasická nelineární dynamika

Zde si představíme základní pojmy vztahující se k dynamickým systémům a jejich rozdělení na diskrétní a spojité. Začneme nejdříve obecně, avšak spojité dynamické systémy mají fyzikálně větší význam, proto se jim budeme věnovat detailněji spolu s vhodnými přístupy k jejich charakterizaci.

Definice: Necht' \mathbf{X} je metrický prostor (neprázdna množina s metrikou ϱ) a $\{\mathbf{S}(t)\}_{t \in \square}$ je soubor zobrazení splňující

- $(\forall t \in \square)(\mathbf{S} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ je spojité),
- $\mathbf{S}(0) = \text{Id}_{\mathbf{X}}$,
- $(\forall s, t \in \square, s + t \in \square)(\mathbf{S}(s + t) = \mathbf{S}(t) \circ \mathbf{S}(s))$,

poté $\{\mathbf{S}(t)\}_{t \in \square}$ nazveme dynamický systém (DS), pro $\square = \mathbb{R}$ invertovatelný, $\square = \mathbb{R}^+$ neinvertovatelný a pro $\square = \mathbb{Z}$ diskrétním. Prostor \mathbf{X} se nazývá fázovým prostorem.

Pro invertovatelný DS tedy platí

$$\text{Id}_{\mathbf{X}} = \mathbf{S}(t) \circ \mathbf{S}(-t) = \mathbf{S}(-t) \circ \mathbf{S}(t) \implies (\mathbf{S}^{-1}(t) = \mathbf{S}(-t)) \wedge (\mathbf{S}^{-1}(-t) = \mathbf{S}(t)). \quad (1.1)$$

Pro diskrétní DS, kdy $t \in \mathbb{Z}$ označme $n = t$, platí

$$\mathbf{S}(n) = \mathbf{S}(n-1) \circ \mathbf{S}(1) = (\mathbf{S}(1))^n. \quad (1.2)$$

Stav systému v čase n označme \mathbf{x}_n . Zobrazení $\mathbf{S}(1)$ působící na stav \mathbf{x}_n propaguje stav \mathbf{x}_n jako

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{S}(1)\mathbf{x}_n. \quad (1.3)$$

Poznamenejme, že nalezení explicitního tvaru zobrazení $\mathbf{S}(t)$ není vždy možné.

Definice: Necht' $\{\mathbf{S}(t)\}_{t \in \square}$ je DS na \mathbf{X} a $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$.

- Trajektorie procházející bodem \mathbf{x}_0 je množina $\sigma(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{t \in \square} \{\mathbf{S}(t)\mathbf{x}_0\}$.

- Pokud $\mathbf{x}_s \in \mathbf{X}$ je takový, že $(\forall t \in \mathbb{R})(\mathbf{S}(t)\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_s)$, pak \mathbf{x}_s se nazývá pevným bodem, resp. stacionárním bodem.
- Pokud $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ je množina, pro kterou je splněno $(\forall t \in \mathbb{R})(\mathbf{S}(t)\mathbf{A} = \mathbf{A})$, tak \mathbf{A} nazveme invariantní.
- Pokud $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ je množina, pro kterou platí podmínky
 - 1) $(\exists \mathbf{B} \subset \mathbf{X}$ otevřená a $\mathbf{B} \supset \mathbf{A})(\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbf{B})(\lim_{t \rightarrow +\infty} \varrho(\mathbf{S}(t)\mathbf{x}_0, \mathbf{A}) = 0)$, neboli \mathbf{A} je ve svém blízkém okolí přitahující,
 - 2) je invariantní,

pak \mathbf{A} nazýváme atraktorem.

- Množina $\mathbf{M}_-(\mathbf{x}_s) = \{\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X} | \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{S}(t)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_s\}$ se nazývá stabilní varieta pevného bodu \mathbf{x}_s .
- Množina $\mathbf{M}_+(\mathbf{x}_s) = \{\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X} | (\exists \sigma(\mathbf{x}_0) \text{ úplná trajektorie zapsaná jako } \sigma(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{u}(t) | t \in \mathbb{R}\}, \text{ kdy } (\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{x}_s))\}$ se nazývá nestabilní varieta pevného bodu \mathbf{x}_s .
- Limitním cyklem nazveme trajektorii periodického řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+T)$, která je zároveň atraktorem.

1.1 Spojitý dynamický systém

Dále předpokládejme pouze invertovatelné DS, které jsou generované soustavou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (1.4)$$

kde tedy $t \in \mathbb{R}$ chápeme jako čas a je shodný s parametrem t z definic výše. Nechtě vektorová funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá v argumentu t a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Řešení soustavy (1.4) je taková diferencovatelná funkce času $\mathbf{x}(t)$, jejíž derivace splňují právě (1.4).

Obecně lze převést skalární obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu

$$\frac{d^n \xi}{dt^n} = g\left(t, \xi, \frac{d\xi}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}\xi}{dt^{n-1}}\right) \quad (1.5)$$

na $n+1$ ODR 1. řádu pomocí substituce

$$x_1 = \frac{d^{n-1}\xi}{dt^{n-1}}, \quad x_2 = \frac{d^{n-2}\xi}{dt^{n-2}}, \quad \dots, \quad x_{n+1} = \xi, \quad (1.6)$$

těchto $n+1$ ODR 1. řádu lze kompaktně zapsat ve tvaru (1.4) dosazením (1.6) do (1.5).

Definice: Necht' \mathbf{f} je vektorová funkce z (1.4) a pro $|t - t_0| \leq a$, $\mathbf{x} \in \mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ splňuje na intervalu $(t_0 - a, t_0 + a)$ podmínku

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad (1.7)$$

kde $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{D}$, pak řekneme, že \mathbf{f} je lipschitzovsky spojitá v \mathbf{x} a $L > 0$ je Lipschitzova konstanta.

Lze nahlédnout, že diferencovatelnost vektorové funkce \mathbf{f} implikuje její lipschitzovskou spojitost v \mathbf{x} , což dále implikuje spojitost v \mathbf{x} .

Věta: Řešme soustavu ODR 1. řádu spolu s počátečními podmínkami ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.8)$$

pro $|t - t_0| \leq a$, $\mathbf{x} \in \mathbf{D} = \{\mathbf{x}' \mid \varrho(\mathbf{x}', \mathbf{x}_0) \leq d\}$, kdy a a d jsou kladná čísla. Necht' vektorová funkce \mathbf{f} splňuje

- 1) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ je spojitá na $\mathbf{G} = (t_0 - a, t_0 + a) \times \mathbf{D}$.
- 2) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ je lipschitzovsky spojitá v \mathbf{x} .

Poté má úloha (1.8) právě jedno řešení pro čas $|t - t_0| \leq \inf(a, \frac{d}{M})$, kde

$$M = \sup_G \|\mathbf{f}\| = \sup_G \sum_{i=1}^n |f_i|. \quad (1.9)$$

Bez důkazu.

Definice: Úlohu (1.8) nazýváme Cauchyho úlohou, její řešení $\mathbf{x}(t)$ v závislosti na počátečních podmínkách $\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}(t_0)$ označme $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$.

Definice: Trajektorií řešení $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ Cauchyho úlohy (1.8) nazveme množinu $\sigma(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Definice: Pro DS definovaný na $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ a generovaný soustavou $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ nazvěme množinu $\Sigma = \{\sigma(\mathbf{x}_0) \mid \mathbf{x}_0 \in \Gamma\}$ fázovým portrétem dynamického systému.

Definice: Diferenciální rovnici (1.4) nazveme autnomní, pokud vektorová funkce $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ nezávisí explicitně na čase, nebo také (1.4) nazýváme autonomním systémem.

Liouvilleova věta: Necht' je DS generován autonomní soustavou $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{f} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(3)}$, $\mathbf{M} \subset \Gamma$ měřitelná s $\mu(\mathbf{M}) < +\infty$ (μ je míra). Pak platí

$$\frac{d}{dt}(\mu(\mathbf{S}(t)\mathbf{M}))|_{t=0} = \int_{\mathbf{M}} \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.10)$$

Bez důkazu.

Definice: DS, pro který platí $\mu(\mathbf{S}(t)\mathbf{M}) = \mu(\mathbf{M})$, kde $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ je měřitelná množina, $t \in \mathbb{R}$, se nazývá konzervativní.

Pokud platí $\mu(\mathbf{S}(t)\mathbf{M}) < \mu(\mathbf{M})$ pro $t > 0$, tak se DS nazývá disipativní.

1.1.1 Metoda linearizace

Nyní se budeme zabývat tím, jak charakterizovat chování spojitého autonomního dynamického systému na okolí pevného bodu \mathbf{x}_s (stacionárního bodu). Říkáme, že vyšetřujeme stabilitu pevného bodu \mathbf{x}_s .

V rámci evolučních zákonů, tj. v (1.4), musí pro pevný bod platit

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) = 0. \quad (1.11)$$

Můžeme rozepsat obecně nelineární vektorovou funkci \mathbf{f} v pevném bodě \mathbf{x}_s dle Taylorova rozvoje vzhledem k (1.11) jako

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}_s + \mathbf{dx}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) + \mathbb{A}\mathbf{dx} + \dots \\ &= \mathbb{A}\mathbf{dx} + \mathbf{g}(\mathbf{x}_s + \mathbf{dx}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Pokud vektorová funkce \mathbf{g} splňuje podmínku

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_s} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|} = 0, \quad (1.13)$$

tak aproximujeme vektorovou funkci \mathbf{f} na blízkém okolí pevného bodu \mathbf{x}_s pouze lineární částí. Tím získáme linearizovanou úlohu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{dx} \simeq \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1.14)$$

Ukážeme si, že pro linearizovanou úlohu lze snadno vyšetřit dynamiku na okolí pevného bodu, avšak korespondence s původní obecně nelineární úlohou (1.4) není zaručena.

Pokud však korespondence platí (pevný bod je *hyperbolickým pevným bodem*), pak při posunutí proměnné $\mathbf{y} = \mathbf{dx} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_s$ a přidání parametru $\varepsilon > 0$ lze (1.12) přepsat do tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbb{A}\mathbf{y} + \varepsilon\mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{x}_s), \quad (1.15)$$

jelikož vektorová funkce $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ je pouze funkcí \mathbf{y} , tak můžeme nelineární systém (1.15) chápat jako poruchu lineárního systému

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbb{A}\mathbf{y} \quad (1.16)$$

na blízkém okolí počátku.

Získáme-li rovnici (1.15), kde \mathbf{g} splňuje podmínku (1.13), pak položíme $\varepsilon = 0$ a studujme lineární systém (1.16). Konstantní matice $\mathbb{A} = (a_{i,j}) = \left(\frac{df_i}{dx_j}\right)|_{\mathbf{x}_s} = (\mathbf{f}'(\mathbf{x}_s))$ představuje Jacobiho matici systému (1.4) v pevném bodě \mathbf{x}_s . Předpokládejme, že

\mathbb{A} není singulární, tj. $\det(\mathbb{A}) \neq 0$ a její vlastní čísla jsou navzájem rozdílná. Pokud by vlastní čísla nebyla rozdílná, poté následující postup stále zjednodušuje úlohu.

Matici \mathbb{A} musíme diagonalizovat. Řešením algebraické rovnice

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{1}) = 0 \quad (1.17)$$

nalezneme vlastní čísla λ_i pro $i \in \hat{n}$, poté příslušné vlastní vektory $\boldsymbol{\eta}^{(i)}$ matice \mathbb{A} získáme jako netriviální řešení

$$\mathbb{A}\boldsymbol{\eta}^{(i)} = \lambda_i\boldsymbol{\eta}^{(i)}. \quad (1.18)$$

Sestavíme-li bázi prostoru \mathbb{R}^n z vlastních vektorů $\boldsymbol{\eta}^{(i)}$, tím matici \mathbb{A} diagonalizujeme, kdy má vlastní čísla na diagonále. Jelikož je matice \mathbb{A} diagonální, tak jsou jednotlivé směry nezávislé a dospěli jsme k n diferenciálním rovnicím s řešením

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^{(i)} = \lambda_i\boldsymbol{\eta}^{(i)} \implies \boldsymbol{\eta}^{(i)}(t) = e^{\lambda_i(t-t_0)}\boldsymbol{\eta}^{(i)}(t_0), \quad (1.19)$$

Obecné řešení je poté

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i(t-t_0)}\boldsymbol{\eta}^{(i)}(t_0), \quad (1.20)$$

kde $c_i = \frac{1}{\|\boldsymbol{\eta}^{(i)}(t_0)\|} \mathbf{y}(t_0) \cdot \boldsymbol{\eta}^{(i)}(t_0)$.

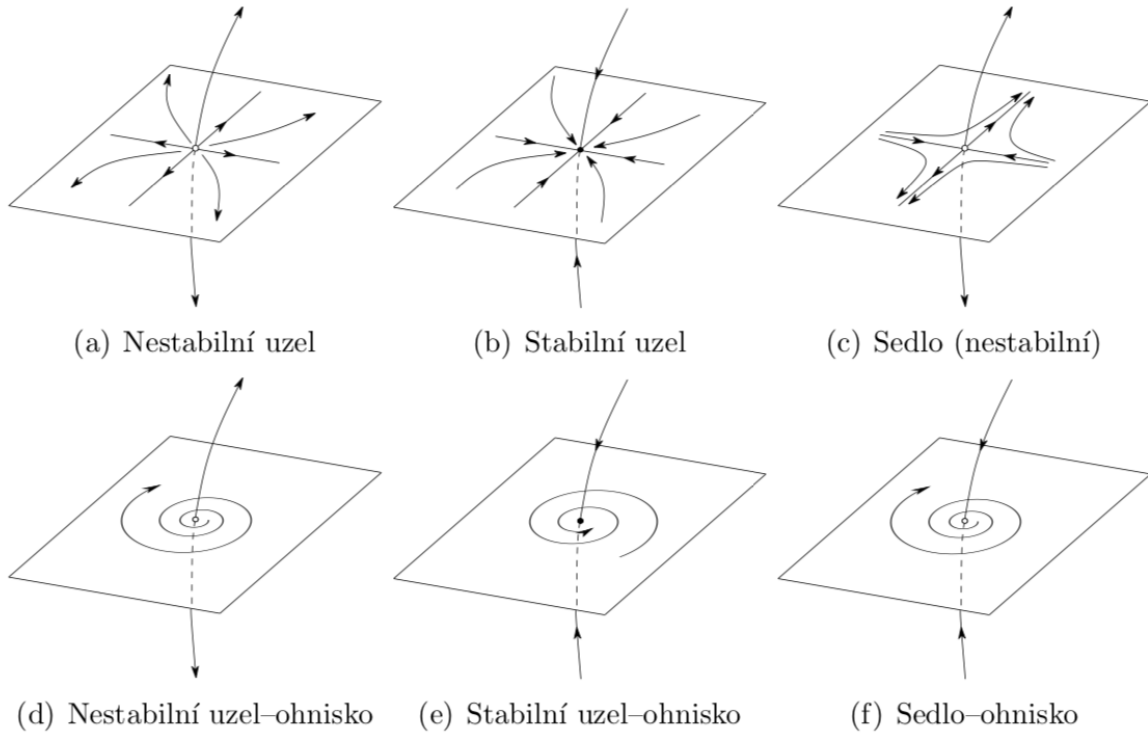
Z řešení v (1.19) lze vidět, že vlastní číslo λ_m určuje dynamiku ve směru $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$. Nechtě $\lambda_m = b_m + ic_m$ pro $m \in \hat{n}$. Mohou nastat následující případy

- Pokud $b_m < 0$, tak ve směru vektoru $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ je daný pevný bod stabilní.
- Pokud $b_m > 0$, tak ve směru vektoru $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ je daný pevný bod nestabilní.
- Jeli $c_m \neq 0$, tak ve směru vektoru $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ stavový vektor osciluje.

Některé kombinace jednotlivých složek vlastních čísel matice \mathbb{A} si představíme pro fázový prostor \mathbb{R}^3 . Na Obr. (1.1) lze vidět možné důsledky kombinací vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, resp. jejich složek $b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3$ a odpovídající chování v okolí pevných bodů. Vlastní číslo λ_1 přísluší vektoru $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$, který je v naznačené rovině a vertikálním směrem z pohledu čtenáře. Dále λ_2 přísluší směru $\boldsymbol{\eta}^{(2)}$ ležícím v rovině a kolmém na $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$. Zbývá směr odpovídá vlastnímu vektoru $\boldsymbol{\eta}^{(3)}$. Kombinace složek vlastních čísel odpovídající různým pevným bodům z Obr. (1.1) jsou následující:

- a) $b_1, b_2, b_3 > 0$ a $c_1, c_2, c_3 = 0$ – *nestabilní uzel*.
- b) $b_1, b_2, b_3 < 0$ a $c_1, c_2, c_3 = 0$ – *stabilní uzel*.
- c) $b_1, b_3 > 0, b_2 < 0$ a $c_1, c_2, c_3 = 0$ – *sedlo*.
- d) $b_1, b_2, b_3 > 0, c_1 = -c_2 \neq 0$ a $c_3 = 0$ – *nestabilní uzel-ohnisko*.
- e) $b_1, b_2, b_3 < 0, c_1 = -c_2 \neq 0$ a $c_3 = 0$ – *stabilní uzel-ohnisko*.
- f) $b_1, b_2 > 0, b_3 < 0, c_1 = -c_2 \neq 0$ a $c_3 = 0$ – *sedlo-ohnisko*.

Nyní zpět ke korespondenci obecného nelineárního systému (1.4) na okolí \mathbf{x}_s a linearizovaného systému (1.16) na okolí počátku.



Obrázek 1.1: Druhy pevných bodů ve fázovém prostoru. [6]

Definice: Necht' $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ generuje DS na okolí $\mathcal{H}_{\mathbf{x}^*}$ bodu \mathbf{x}^* a $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ generuje DS na okolí $\mathcal{H}_{\mathbf{y}^*}$ bodu \mathbf{y}^* . Říkáme, že tyto dva systémy jsou topologicky-orbitálně ekvivalentní (TOE), pokud

- 1) $(\exists h : \mathcal{H}_{\mathbf{x}^*} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbf{y}^*})(h \text{ je homeomorfní})$.
- 2) h zachovává trajektorie, tj. necht' $\sigma = \{\varphi(t), t \in \mathbb{R}\}$ je trajektorie řešení $\varphi(t)$ soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, pak $(\exists \psi = \psi(t) \text{ řešení } \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}))$, takže $(h(\sigma) = \{\psi(t), t \in \mathbb{R}\})$, tedy trajektorie se na sebe mapují.
- 3) h zachovává orientaci trajektorií, tj. necht' $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \sigma$, takže $\mathbf{x}_1 = \varphi(t_1)$ a $\mathbf{x}_2 = \varphi(t_2)$, kdy $t_1 < t_2$. Pak existuje výše dané řešení $\psi(t)$ soustavy $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$, pro které $(\exists \tilde{t}_1, \tilde{t}_2; \tilde{t}_1 < \tilde{t}_2)(h(\mathbf{x}_1) = \psi(\tilde{t}_1), h(\mathbf{x}_2) = \psi(\tilde{t}_2))$.

Definice: Necht' DS generovaný soustavou $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ má pevný bod $\mathbf{x}_s \in \Gamma$, kde $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ je oblast a $\mathbf{f} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$. Pokud $(\forall \lambda \in \sigma(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_s)))(\text{Re}(\lambda) \neq 0)$, pak \mathbf{x}_s se nazývá hyperbolický pevný bod.

Množina $\sigma(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_s))$ je spektrum Jacobiho matice $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_s)$.

Hartmanova-Grobmanova věta: Necht' DS generovaný soustavou $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ má hyperbolický pevný bod $\mathbf{x}_s \in \Gamma$, kde $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ je oblast a $\mathbf{f} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$. Pak $(\exists \mathcal{H}_{\mathbf{x}_s} \subset \Gamma)(\exists \mathcal{H}_0 \subset \mathbb{R}^n)(\text{DS: } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ na } \mathcal{H}_{\mathbf{x}_s} \stackrel{\text{TOE}}{\sim} \text{DS: } \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{f}'(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} \text{ na } \mathcal{H}_0)$.

Bez důkazu.

Odsud tedy plyne, že v okolí hyperbolického pevného bodu lze určit dynamiku systému poměrně snadno, a to pomocí metody linearizace. Pokud naopak $\exists \lambda$, kdy $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, poté jsme nuceni použít náročnější metody jako je *redukce na centrální varietu*, nebo *Ljapunovova metoda*, kterou si později představíme.

1.1.2 Stabilita řešení

Zabývejme se stabilitou řešení v rámci autonomních systémů. Uvažujme stabilitu triviálního řešení v pevném bodě, tj. stabilitu řešení Cauchyho úlohy s počáteční podmínkou $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_s$.

Navíc nás může zajímat stabilita periodického řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T)$ při hledání limitního cyklu.

Definice: Nechť DS je generován systémem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, kde \mathbf{x}_s je pevný bod. Řešení $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_s) = \mathbf{x}_s$ je Ljapunovsky stabilní, pokud pro lib. $\varepsilon > 0$ lze nalézt $\delta(\varepsilon) > 0$, takže pro řešení $\tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{x}}_0)$ s počáteční podmínkou $\tilde{\mathbf{x}}_0$ splňující $\|\tilde{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_s\| < \delta$ platí $\|\tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{x}}_0) - \mathbf{x}_s\| \leq \varepsilon$. Pokud rovnovážné řešení $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_s) = \mathbf{x}_s$ není Ljapunovsky stabilní, poté ho nazýváme nestabilním.

Definice: Nechť DS je generován systémem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, kde \mathbf{x}_s je pevný bod. Řešení $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_s) = \mathbf{x}_s$ nazveme asymptoticky stabilní, pokud pevný bod je Ljapunovsky stabilní a je zároveň bodovým atraktorem.

V případě hyperbolického pevného bodu metoda linearizace rozhoduje pouze mezi nestabilitou, či asymptotickou stabilitou pevného bodu.

Definice: Nechť DS je generován systémem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, kde $\phi(t)$ je periodické řešení.

Řekneme, že periodické řešení $\phi(t)$ je Ljapunovsky stabilní pokud pro lib. $\varepsilon > 0$ lze nalézt $\delta(\varepsilon) > 0$, takže pro řešení $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ s počáteční podmínkou \mathbf{x}_0 splňující $\|\mathbf{x}_0 - \phi(t_0)\| < \delta$ platí $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \phi(t)\| \leq \varepsilon$.

Tato definice neuvažuje opoždění v periodě sousedních řešení. Mějme dvě periodické řešení $\phi(t) = \phi(t + T)$ a $\psi(t) = \psi(t + \tilde{T})$ s $T \neq \tilde{T}$. Pokud by pro obě řešení platilo, že $(|\rho(\phi(t), \psi(t))| \leq \varepsilon)$, což je podmínka Ljapunovské stability, tak jsme ve sporu s $T \neq \tilde{T}$. Navíc pokud by byly *kvaziperiodické řešení* z okolí periodické trajektorie přitahovány k této trajektorii, tak ani poté periodická řešení nenaplní definici Ljapunovské stability. Čímž se zásadně zužuje množina DS vyhovující této definici.

Kvůli tomu jsme nuceni zavést *asymptotickou stabilitu periodického řešení* jiným spíše geometrickým způsobem, a sice pomocí tzv. *Poincarého řezu*, resp. *Poincarého zobrazení*.

Definice: Poincarého řezem v n dimenzionálním prostoru rozumíme $n - 1$ dim. nadrovinu \mathcal{V} . Nechť její normála je tečná k periodickému řešení $\phi(t)$ v bodě $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$, tj. tečná k $\dot{\phi}(\mathbf{a})$.

Vezměme dostatečně malé okolí $\mathcal{H}_{\mathbf{a}} \subset \mathcal{V}$ bodu \mathbf{a} ve \mathcal{V} , tak aby se řešení s počáteční podmínkou $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{H}_{\mathbf{a}}$ opět navracela do \mathcal{V} . Nechť t_0, t_1, \dots, t_n jsou časy, kdy řešení $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ prochází \mathcal{V} , poté definujeme Poincarého zobrazení $\mathcal{P} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ předpisem

$$\mathcal{P}^k(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t_k), \quad (1.21)$$

pro $k \in \hat{n}$.

Poincarého zobrazení \mathcal{P} nám generuje diskrétní DS na \mathcal{V} . Formulujme pojem stability periodického řešení v rámci vlastnosti Poincarého zobrazení.

Definice: Nechť DS je generován soustavou $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ s periodickým řešením $\phi(t)$ protínající Poincarého řez \mathcal{V} v bodě \mathbf{a} , mějme Poincarého zobrazení $\mathcal{P} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Řešení $\phi(t)$ je stabilní, pokud pro lib. $\varepsilon > 0$ lze nalézt $\delta(\varepsilon) > 0$, takže pro $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}$, $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\| \leq \delta$ platí

$$\|\mathcal{P}^n(\mathbf{x}_0) - \mathbf{a}\| \leq \varepsilon \text{ pro } n \in \mathbb{N}. \quad (1.22)$$

Tedy průniky blízkých trajektorií a Poincarého řezu jsou omezeny na okolí bodu \mathbf{a} . Někdy se tato forma stability nazývá *orbitální stabilita*.

Definice: Nechť DS je generován soustavou $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ s periodickým řešením $\phi(t)$ protínající Poincarého řez \mathcal{V} v bodě \mathbf{a} , mějme Poincarého zobrazení $\mathcal{P} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Řešení $\phi(t)$ je asymptoticky stabilní, pokud lze nalézt $\delta > 0$, takže pro $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}$, $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\| \leq \delta$ platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}^n(\mathbf{x}_0) = \mathbf{a}. \quad (1.23)$$

Určení asymptotické stability řešení jsme převedli na úlohu zkoumání přitažlivosti bodu \mathbf{a} ve \mathcal{V} , tedy zkoumání bodového atraktoru \mathbf{a} v rámci diskrétního DS na \mathcal{V} generovaného zobrazením \mathcal{P} .

Dodejme, že vyšetřování stability periodických řešení zde nebudeme prezentovat. Je možné využít např. *Floquetovu teorii*, jejíž základy lze nalézt v [1].

1.1.3 Bifurkace

V této kapitole se zaměříme na generické rovnice, kdy pozorujeme závislost na vnějších parametrech $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$. Tedy studujeme systémy tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbb{A}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}), \quad (1.24)$$

kde jsme osamostatnili lineární část $\mathbb{A}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{x} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorové funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ a navíc $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ splňuje podmínku (1.13). Otázkou je, jaký vliv má změna parametrů $\boldsymbol{\mu}$ na dynamiku systému. Vzhledem k definici

topologické-orbitální ekvivalence máme nástroj na klasifikaci DS. Kvalitativně rozdílné by měli být dva DS, které nejsou TOE a jejich fázové portréty poté nelze, vzhledem k časovému toku, vzájemně homeomorfně mapovat. V našem kontextu to může například znamenat, že získáme novou množinu řešení, či budeme pozorovat změnu dynamiky systému v závislosti na parametrech $\boldsymbol{\mu}$.

V nadcházející definici uvažujme skalární parametr ε jako složku z vektoru parametrů $\boldsymbol{\mu}$, tedy $\varepsilon = \mu_i$ pro nějaké $i \in \hat{n}$. Děláme tak kvůli jednodušimu vyšetřování *bifurkace*, kdy navíc máme relaci uspořádání na intervalu uvažovaného parametru ε .

Definice: Necht' $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)}(\Gamma \times \mathbb{R})$ a DS je generovaný soustavou $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$. Pokud $(\exists \mathcal{H}_0 \subset \mathbb{R})(\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{H}_0)(\text{DS: } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon_1) \stackrel{\text{TOE}}{\sim} \text{DS: } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon_2))$, pak řekneme, že DS generovaný $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 0)$ je strukturálně stabilní.

Pokud $(\forall \mathcal{H}_0 \subset \mathbb{R})(\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{H}_0)(\text{DS: } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon_1) \not\stackrel{\text{TOE}}{\sim} \text{DS: } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon_2))$, pak řekneme, že v bodě $\varepsilon = 0$ má DS generovaný $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ bifurkaci.

1.1.4 Ljapunovova metoda

Nyní se zaměříme na tzv. přímou metodu (Ljapunovovu metodu) vyšetřování stability pevného bodu. Neznamena to však, že postup je obecně daný, či zřejmý, jak by se mohlo dle názvu zdát. Zejména jedná-li se o nalezení *Ljapunovovy funkce*.

Definice: Spojitá skalární funkce $V = V(\mathbf{x})$ je na okolí $\mathcal{H}_0 \in \mathbb{R}^n$ pozitivně definitní, pokud $(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}_0)(V(\mathbf{0}) = 0 \wedge V(\mathbf{x}) > 0 \text{ pro } \mathbf{x} \neq \mathbf{0})$.

Funkce $V = V(\mathbf{x})$ je pozitivně semidefinitní, pokud $(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}_0)(V(\mathbf{x}) \geq 0 \wedge V(\mathbf{0}) = 0)$.

Definice: Uvažujme diferencovatelnou skalární funkci $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a vektorovou funkci $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Orbitální derivací L_t funkce $F = F(\mathbf{x})$ podél vektorové funkce $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ rozumíme

$$L_t F = \text{grad} F \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \dot{x}_n, \quad (1.25)$$

Chceme-li explicitně označit bod $\tilde{\mathbf{x}}$, ve kterém vyčíslujeme (1.25), tak značíme $L_t F|_{\tilde{\mathbf{x}}}$.

Protože máme evoluční zákony ve formě $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, můžeme vyjádřit orbitální derivaci také jako

$$L_t F = \text{grad} F \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial F}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} f_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} f_n. \quad (1.26)$$

Jedná se o derivaci skalární funkce ve směru vývoje DS. Ukážeme nyní, jak využít orbitální derivace k vyšetření stability nehyperbolické pevné body.

Ljapunovova věta: Necht' $\mathbf{f} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$, Γ je oblast, takže $\mathbf{0} \in \Gamma$ a zároveň $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ je pevným bodem DS generovaným soustavou $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Pokud platí $(\forall \mathbf{x} \in \Gamma)(L_t V \leq 0)$, kde $V = V(\mathbf{x})$ je spojitá skalární funkce, pak $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ je stabilním pevným bodem.

Pokud platí $(\forall \mathbf{x} \in \Gamma)(L_t V \leq -W(\mathbf{x}))$, kde $W = W(\mathbf{x})$ je pozitivně definitní funkce, pak pevný bod $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ je asymptoticky stabilním.

Bez důkazu.

Problémem je zejména nalézt funkci V , k čemuž neexistuje obecný postup. Funkci V si lze představit jako potenciál systému, či samotný Hamiltonián, jak bude dále ukázáno a nazýváme ji Ljapunovovou funkcí.

1.1.5 Hamiltonovské systémy

Definice: Necht' DS je generován soustavou $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} \in \mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$. Skalární funkci $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme prvním integrálem pohybu, je-li v \mathbf{D} splněno

$$L_t F = 0. \quad (1.27)$$

Uvažujme DS, pro které existuje tzv. Hamiltonova funkce $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathcal{C}^2$ zobecněných poloh \mathbf{q} a hybností \mathbf{p} , $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$. Tato funkce je prvním integrálem pohybu a pohybové rovnice lze získat jako

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (1.28)$$

což odpovídá jinému zápisu soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, kde např.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

odsud tedy musí $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Věta: Hamiltonovský systém (1.28) je konzervativní.

Využijeme značení (1.29) a formu zápisu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Poté

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{f} &= \left(\frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_n}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n} \right) \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right)^T = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Což plyne ze záměnnosti parciálních derivací funkce H . Proto dle Liouvilleovy věty je zachován fázový objem, a tedy systém je z definice konzervativní. ■

Navíc odsud i plyne, že Hamiltonovské systémy nemohou generovat pevné body, kdy jsou všechna vlastní čísla se stejným znaménkem. Tedy nejsou dovoleny uzly, mohou se vyskytovat pouze sedla, ohniska a jejich kombinace při splnění dané podmínky $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$.

Ilustrovat to lze na linearizované úloze (1.14), při zvolení ortonormální báze z vlastních vektorů Jacobiho matice \mathbb{A} platí, že $\mathbb{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$, kde λ_m jsou vlastní hodnoty. Předpokládejme, že vlastní hodnoty jsou pouze reálné. Poté

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \operatorname{div} \mathbb{A} \mathbf{x} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{\partial}{\partial x_m} x_m \lambda_m = \sum_{m=1}^{2n} \lambda_m = \operatorname{Tr}(\mathbb{A}). \quad (1.30)$$

Pro uzly musí tedy být nutně výraz (1.30) nenulový, protože vlastní hodnoty λ_m mají vždy stejné znaménko. Pro vynulování výrazu (1.30) musí být alespoň jedno vlastní číslo se záporným znaménkem.

Bez újmy na obecnosti umístíme pevný bod do počátku. Uvažujme stabilitu triviálního řešení $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_s \\ \mathbf{p}_s \end{pmatrix} = \mathbf{x}_s = \mathbf{0}$. Anž bychom změnili systém (1.28), můžeme k Hamiltonově funkci přičíst konstantu tak, aby platilo $H(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$. Tj. Hamiltonián je určen až na konstantu. Je-li Hamiltonova funkce pozitivně definitní poté může sloužit jako Ljapunovova funkce systému.

Věta: Mějme soustavu (1.28) s triviálním řešením $\begin{pmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_s \\ \mathbf{p}_s \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, kdy hamiltonova funkce $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \tilde{H}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ je pozitivně definitní na nějakém okolí $\begin{pmatrix} \mathbf{q}_s \\ \mathbf{p}_s \end{pmatrix}$. Poté je triviální řešení Ljapunovsky stabilní.

Víme, že pro Hamiltonovské systémy platí

$$L_t = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \implies$$

$$L_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \equiv [H, F],$$

kde jsme zadefinovali Poissonovu závorku. Protože funkce H má záměnné parciální derivace, tak nutně platí $[H, H] = L_t H = 0$ (což víme, protože H je prvním integrálem pohybu).

Jsou naplněny podmínky první části Ljapunovovy věty, kde $L_t H \leq 0$, H je pozitivně definitní a diferencovatelná. Triviální řešení je proto Ljapunovsky stabilní.

Protože $L_t H = 0$, tak nemůže existovat pozitivně definitní funkce W , aby $L_t H|_{\mathbf{x}} \leq -W(\mathbf{x})$. Proto triviální řešení nemůže být asymptoticky stabilní. Což je ve shodě s konzervativností systému. ■

Jelikož je Hamiltonián integrálem pohybu, lze ho položit roven konstantě $E \in \mathbb{R}$, a tím zadefinovat $2n - 1$ dimenzionální nadrovina ve fázovém prostoru \mathbb{R}^{2n} . Z věty výše je tato nadrovina Ljapunovsky stabilní a obsahuje fázový portrét systému.

Jelikož se fázový objem zachovává, je otázkou, jak se uspořádávají trajektorie v rámci nadrovininy určené vztahem $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E$. Nyní vyslovíme zajímavé tvrzení zabývající se dynamikou systému na této nadrovině.

Poincarého věta o návratu: Uvažujme invariantní fázový objem $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^{2n}$ vzhledem k DS $\{\mathbf{S}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, jehož zobrazení navíc zachovávají objem. Mějme Poincarého řez $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{2n-1}$.

Poté pro lib. bod $\mathbf{x} \in \mathbf{D} \cap \mathcal{P}$ ležící na periodické trajektorii s periodou T a jeho lib. okolí $\mathcal{H}_x \subset \mathbf{D} \cap \mathcal{P}$ existuje bod $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}_x$ a čas \tilde{T} řádově odpovídající T , takže se trajektorie z bodu $\tilde{\mathbf{x}}$ po době \tilde{T} opět navrátí do \mathcal{H}_x , tj. $(\mathbf{S}(\tilde{T})\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}_x)$.

Bez důkazu.

Z jiné formulace této věty plyne zřejmě, že konzervativní systém, žijící na invariantní kompaktní množině se za dostatečně dlouhý čas navrátí do podobného stavu, ve kterém již byl. Tento fakt je odražen i v názvu věty. Daný čas však není omezen a pro složité systémy může být reálně nedosažitelný.

Zmíňme zde, že pokud Hamiltonián systému H_{lin} vedoucí na lineární systém $\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{x}$ je porušen Hamiltoniánem $H_{per} = H_{per}(\mathbf{x})$ uvažující např. vazby fázových proměnných, poté se v pohybových rovnicích (1.28) objeví nelineární příspěvek $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Schématicky

$$H = H_{lin} + \varepsilon H_{per} \implies \dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \varepsilon), \quad (1.31)$$

kde ε je poruchový parametr a zápisem $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ se snažíme přiblížit tvaru (1.24) z kapitoly o bifurkaci. Jelikož poruchový parametr ε lze chápat také jako bifurkační parametr, který přidává nelinearitu do pohybových rovnic a mění charakter DS.

V následující kapitole si představíme v rámci Poincarého řezu Hamiltonovského systému jiný bifurkační parametr, a sice energii systému E .

1.1.6 Deterministický chaos v Hamiltonovských systémech

Zde se zaměříme na jev zvaný deterministický chaos konkrétně v nelineárních Hamiltonovských systémech. Představíme si *KAM teorém (teorém Kolmogorova, Arnolda a Mosera)*, který kvalitativně charakterizuje chování Hamiltonovských systému pro různé hodnoty energie E (tj. počátečních podmínek) a rozlišuje mezi tzv. *regulárním* a *chaotickým chováním*.

Budeme studovat diskretní dynamický systém na Poincarého řezu, generovaný Poincarého zobrazením. Energie systému $E = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ bude chápána jako vnější bifurkační parametr tohoto diskretního dynamického systému. Pro Hamiltonovský systém energie E značí pouze množinu přípustných počátečních podmínky. Tento kontrast bude ještě komentován.

Definice: Deterministickým chaosem nazveme chování DS vyznačující se

- vysokou citlivostí vůči počátečním podmínkám,

- typicky exponenciální rozbíhavostí blízkých trajektorií,
- atraktorem s geometricky složitým uspořádáním, který nazýváme podivný atraktor.

Vysokou citlivostí vůči počátečním podmínkám myslíme ztrátu paměti systému vzhledem ke své historii a praktické nepředpověditelnost systému v delších časových usecích.

Explicitně lze počítat tzv. *Ljapunovův exponent* λ , který charakterizuje průměrné vzdalování blízkých trajektorií, tj. pro $\|\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0\| < \varepsilon$ platí přibližně $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t, \tilde{\mathbf{x}}_0)\| \sim e^{\lambda t}$. Tato vlastnost koresponduje s vysokou citlivostí na počátečních podmínkách.

Zejména zajímavé je, že dynamika systému se odehrává na geometricky složité množině, která je podmnožinou nadrovina definovaná vztahem $E = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Tato množina – podivný atraktor může být modelována pomocí *fráktálových, soběpodobných množin*, které nemají celočíselnou dimenzi vzhledem k definici *Hausdorffovy dimenze*. Zde se této problematice však nebudeme hlouběji věnovat.

Na následujícím příkladu Hamiltonovského systému budeme ilustrovat nové pojmy spolu s *KAM teorémem*.

Mějme Hamiltonián ve tvaru

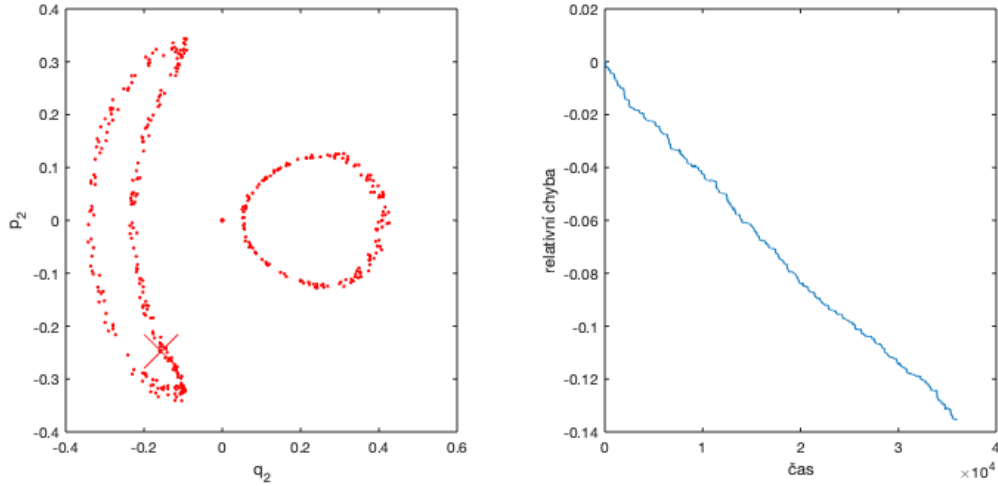
$$H = H_{lin} + \varepsilon H_{per} = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \varepsilon(q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3), \quad (1.32)$$

kde H_{lin} představuje Hamiltonián dvoudimenzionálního harmonického oscilátoru a H_{per} nelineární poruchu, která zároveň váže směry výkyvu, tj. proměnné q_1 a q_2 . Pohybové rovnice jsou poté

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1, \\ \dot{q}_2 &= p_2, \\ \dot{p}_1 &= -q_1 - \varepsilon 2q_1 q_2, \\ \dot{p}_2 &= -q_2 + \varepsilon(q_2^2 - q_1^2). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Systém (1.33) jsme řešili numericky v rozhraní Matlab, při $\varepsilon = 1$ a vytvářeli Poincarého řezy v $q_1 = 0$, kde jsou zobrazeny proměnné q_2, p_2 a p_1 je dopočteno z integrálu pohybu (1.32). Pro neporušený harmonický oscilátor bychom v Poincarého řezu spatřili soustředné kruhy. Dané proměnné spolu s časem jsou bezrozměrné veličiny.

Na Obr. (1.2) vydíme Poincarého řez pro jednu trajektorii systému (1.33) při $E = 1/8$, kde kříž v grafu označuje počáteční podmínky. Navíc je vyobrazena relativní chyba energie – poměr $\frac{E-E'}{E}$, kde $E' = E'(\mathbf{q}'(t), \mathbf{p}'(t))$ je funkcí numericky spočteného řešení $(\mathbf{q}'(t), \mathbf{p}'(t))$. Učinili jsme tak, abychom prezentovali neideálnost numerických řešičů, v našem případě *ode113* v rámci softwaru Matlab a odůvodnili *rozptýlení trajektorií* v Poincarého řezu. Doba oběhu byla pro danou trajektorii průměrně 17 jednotek. Tedy chybě 10% odpovídá zhruba 1300 cyklů trajektorie. Snižování energie zapříčiňuje tzv. *numerická disipace*, kterou nejsme schopni úplně potlačit. Pro



Obrázek 1.2: Vlevo Poincarého řez pro jednu trajektorii a vpravo spočtená její relativní chyba energie.

relevantní numerické simulace disipativních systémů musíme zaručit, aby uvažovaná klasická disipace byla vždy menší než numerické disipace.

Dynamika v rámci Poincarého řezu z Obr. 1.2 je následující: trajektorie aperiodicky přeskakuje mezi dvěma uzavřenými křivkami. Tyto křivky jsou průniky Poincarého řezu a tzv. *invariantního tóru*, což je tří-dimenzionální tórus v \mathbb{R}^4 , v rámci kterého se pohybuje dané řešení. Je zajímavé, že i přes vysokou relativní chybu energie pozorujeme stabilitu tohoto řešení.

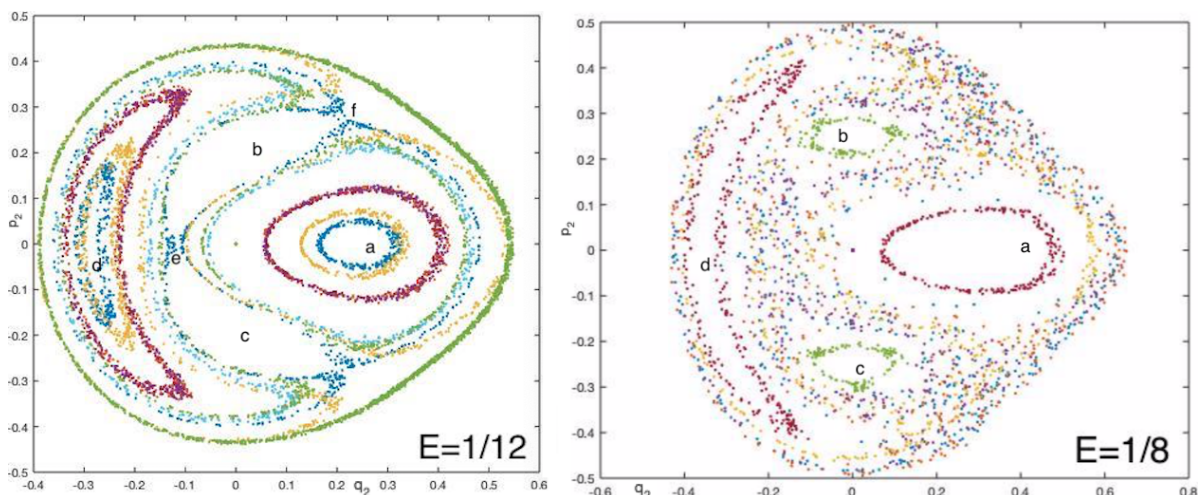
Dále máme na Obr. 1.3 dva řezy odpovídající energiím $E = 1/12$ a $E = 1/8$ vždy pro několik různých počátečních podmínek, které jsou barevně odlišeny. Všimněme si zejména jiného charakteru průniků trajektorií na Poincarého řezu. Těmito kvalitativními rozdíly se budeme nyní zabývat.

Shodu obou obrázků můžeme pozorovat v oblastech označených a, b, c, d , což jsou právě místa průniků dvou *invariantních tóru* s Poincarého řezem. Jak jsme viděli z trajektorie na Obr. 1.2, části a a d jsou z jednoho tóru a b, c z jiného tóru, což usuzujeme z chování zelené trajektorie při energii $E = 1/8$ na Obr. 1.3. Naopak trajektorie podél křivky spojující řešení e a f změnili zásadně dynamiku svých průniků při navýšení energie $E = 1/12 \rightarrow 1/8$.

Otázkou je, proč si určité oblasti v rámci Poincarého řezu zachovávají svoji podobu i při navýšení energie a jiné ne. Nejdříve zavedme dvě definice a následně se pokusíme na danou otázku odpovědět.

Definice: Heteroklinickou orbitou nazveme takové trajektorie vzhledem k \mathcal{P} , které jsou mezi dvěma periodickými řešeními (např. e, f) a platí, že pro $t \rightarrow +\infty$ se trajektorie blíží k jednomu periodickému řešení (e) a pro $t \rightarrow -\infty$ k druhému (f).

Homoklinickou orbitou nazveme trajektorie vzhledem k \mathcal{P} , které pro $t \rightarrow \pm\infty$ spějí ke stejnému periodickému řešení.



Obrázek 1.3: Poincarého řezy systému (1.33) pro energii $E = 1/12$ a $E = 1/8$ s několika počátečními podmínkami.

Heteroklinické orbity jsou tedy zřejmé z Obr. 1.3 při energii $E = 1/8$ mezi body e a f . Avšak při energii $E = 1/12$ již tyto orbity nepozorujeme. To souvisí s periodičností řešení e a f . Homoklinické orbity jsme v našem příkladu nehledali.

Pro formulaci *KAM teoremu* je třeba rozlišit a definovat trajektorie uzavřené – periodické a neuzavřené – *kvaziperiodické*, kdy tato vlastnost trajektorií je tranzitivní mezi oběmi dynamickými systémy generovanými (1.33) a Poincarého zobrazením. K vyšetření periodičnosti, resp. *kvaziperiodičnosti* trajektorie je nutné získat frekvence ω_1 a ω_2 v rovinách $q_1 \times p_1$ a $q_2 \times p_2$. Bližší informace nalezneme čtenář v [1]. Pro naše potřeby předpokládejme, že jsme dané frekvence získali a poté lze již zadefinovat jednoduché kritérium.

Definice: Trajektorii nazveme periodickou pokud platí, že $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$. Pokud tomu tak není, tj. $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$, pak je daná trajektorie kvaziperiodická.

Daná definice má však i kvantitativní charakter, jelikož můžeme rozlišovat *míru iracionality* daného čísla $a \notin \mathbb{Q}$. Vytvořme řetězový zlomek jako

$$a = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}, \quad (1.34)$$

kde $a_0 \in \mathbb{Z}$ a a_1, a_2, \dots je posloupnost přirozených čísel. Zápis čísla a ve formě (1.34) je jednoznačný a zkráceně ho značíme $[a_0; a_1, a_2, \dots]$. Číslo a je hůře aproximovatelné racionálním číslem, čím menší jsou členy v posloupnosti a_1, a_2, \dots . Např. číslo $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$ je dobře aproximovatelné zlomkem $\frac{22}{7}$ a je to dáno právě číslem $a_4 = 292$ v rozvoji. Naopak zlatý řez $\phi = 1.61803\dots$ je *nejvíce iracionální*, protože jeho řetězový zlomek je $\phi = [1; 1, 1, 1, \dots]$. Vyzýváme čtenáře k nahlédnutí do [3].

Na Obr. 1.3 s energií $E = 1/12$ pozorujeme heteroklinické orbity mezi body e, f a jinými. Těmito význačnými body prochází zároveň periodické orbity systému (1.33) s poměrem frekvencí $\omega_1^p/\omega_2^p \in \mathbb{Q}$, ke kterým právě spějí heteroklinické orbity. Ze

spojitosti řešení DS vůči počátečním podmínkám budou mít heteroklinické orbity pro $t \rightarrow \infty$, již v rámci (1.33), poměr frekvencí $\omega_1/\omega_2 \sim \omega_1^p/\omega_2^p$.

Zmiňme, že složitost invariantních podmnožin \mathbb{R}^4 , resp. \mathbb{R}^{2n} je značná, ať už se jedná o invariantní tóry s průniky na Poincarého řezu a, d a b, c , či okolí periodických trajektorií procházejících e, f . Invariantní torus je spojen s právě jednou trajektorií, ať periodickou nebo kvaziperiodickou. Různé invariantní tóry jsou navíc vnořeny do sebe, což pozorujeme jako soustředné křivky na Obr. 1.3 při $E = 1/12$.

V nadcházejícím teorému mluvíme o tzv. *chaotických* a *regulárních oblastech*. Myslíme tím zejména podmnožiny $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$, kterými prochází trajektorie Hamiltonovského systému (1.33). Pokud chování všech trajektorií protínajících \mathcal{M} je chaotické, poté \mathcal{M} nazýváme chaotickou oblastí. Pokud všechny trajektorie nejsou chaotické, poté oblast nazýváme regulární. Více informací nalezne čtenář opět v [1].

Fixováním energie Hamiltonovského systému $E = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ definujeme třídu řešení (1.33), jejichž počáteční podmínky $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0$ splňují $E = H(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$. Změnou energie získáme pouze třídu řešení s jinými počátečními podmínkami.

Pro diskrétní dynamický systém v rámci Poincarého řezu však můžeme energii Hamiltonovského systému $E \in \mathbb{R}^+$ chápat jako vnější bifurkační parametr. Řez je definován na rovině $q_2 \times p_2$ při $q_1 = 0$ a p_1 je dopočteno z integrálu pohybu $E = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Při zvýšení energie většinu závislosti absorbuje proměnná p_1 , která je pro Poincarého řez irelevantní. V rovině $q_2 \times p_2$ můžeme říct, že trajektorie podléhají bifurkaci, i když víme, že pro Hamiltonovský systém v \mathbb{R}^{2n} vykreslujeme pouze jiná řešení.

Následující teorém lze proto interpretovat jako kvalitativní tvrzení o bifurkaci vůči změně energie E diskrétního dynamického systému na Poincarého řezu, který je ovšem indukovaný Hamiltonovským systémem.

KAM teorém: Uvažujme Hamiltonovský systém s malou poruchou ve formě nelineárních členů. Diskrétní dynamický systém v rámci Poincarého řezů bude mít bifurkace pro $E \in \mathbb{R}^+$, což je energie $E = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Pro nízké energie, tj. $E \rightarrow 0$ pozorujeme regulární chování na Poincarého řezu a Lebesquova míra chaotických oblastí jde k nule. Při zvyšování energie E se začnou regulární oblasti měnit v chaotické, které lze modelovat pomocí tzv. *Cantorova diskontinua*. Nejdéle přetrvávají kvaziperiodické trajektorie s *nejvíce iracionálními* podíly frekvencí, naopak nejdříve se změni periodické trajektorie. Pokud $E \rightarrow +\infty$ bude celý systém chaotický.

Bez důkazu.

Pro bližší informace k samotnému teorému vyzýváme čtenáře k nahlédnutí do [1].

Kapitola 2

Hydrodynamika

Vycházejme v našem odvození z hydrostatiky, kde zavedeme tenzor napětí. Dospějeme k pohybovým rovnicím pro kontinuum v nejnižších řádech. Ukážeme, jak konstruovat pohybové rovnice i ve vyšších řádech pomocí rozvoje hydrodynamického gradientu.

Kontinuum lze popisovat dvěma způsoby pomocí *Lagrangeovy metody*, nebo *Eulerovy metody*. První je vhodnější pro popis deformací zejména pevných těles, naopak druhá pro kontinuum s volnými konstituenty.

V Lagrangeově metodě uvažujeme v čase $t = 0$ rozložení konstituentů kontinua a dle jejich polohy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ je indexujeme, kde rozumíme \mathbb{R}^{2n} fázovým prostorem a \mathbb{R}^n jeho prostorovou částí. V tomto smyslu poloha konstituenta (vektor posunutí), který byl v čase $t = 0$ v \mathbf{x} , je $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ a jeho rychlost $\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t)$. Tedy sledujeme přímo trajektorie konstituentů, což pro popis kapalin není nejvýhodnější.

Eulerova metoda je poněkud přímější. Zde uvažujeme pole rychlostí $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ a interpretujeme ho jako rychlost konstituenta nacházející se v čase t v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Nyní nemá smysl uvažovat konkrétní polohu konstituenta, pouze objem, který kontinuum zaujímá a dané rychlostní pole. Tento přístup je pro kapalinu zjevně výhodnější a budeme s ním formulovat další teorii.

Stav systému je oproti předešlé kapitole určen objemem kontinua $V = V(t)$ a rychlostí $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, kde $\mathbf{x} \in V$. Jedná se zde o spojitý nekonečně dimenzonální dynamický systém.

2.1 Hydrostatika

Uvažujme objem kontinua V ohraničeného uzavřenou plochou f . V rovnováze požadujeme, aby výslednice vnějších sil \mathbf{F} a výsledný moment sil \mathbf{M} působících na

objem V byly nulové, tj. ve složkách

$$F_i = \int_V \mathcal{F}_i dV + \oint_f \mathcal{T}_i df = 0, \quad (2.1)$$

$$M_i = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \mathcal{F}_k dV + \oint_f \varepsilon_{ijk} x_j \mathcal{T}_k df = 0, \quad (2.2)$$

kde \mathcal{F}_i jsme označili i -tou složkou objemových sil a \mathcal{T}_i plošných sil. Tyto dvě složky jsou na sobě nezávislé.

Objemové síly působí přímo na uvažovaný objem $dV \subset V$ a nezávisí na silovém působení v okolí dV . Tyto síly jsou zpř středkovány silovými poli prostupujícími kontinuum (např. elektromagnetické, gravitační ...). Tečné síly jsou vztaženy pouze k silovému působení na hranici objemu f , a to zejména *kontaktním způsobem*. Mají vliv i uvnitř kontinua, jelikož uvažují vazby mezi sousedními elementy objemu. Tento fakt bude zřejmější po zavedení *tenzoru napětí*.

2.1.1 Tenzor napětí

Definice: Tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ definujeme vztahem

$$\boldsymbol{\mathcal{T}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}, \text{ resp. ve složkách } \mathcal{T}_i = \sigma_{ik} n_k, \quad (2.3)$$

kde \boldsymbol{n} je normálový vektor k dané plošce.

Známe-li tenzor napětí a normálu k plošce, jsme schopni dopočítat povrchové síly působící na plošku. Tenzor napětí je definován však i uvnitř objemu, tím odráží vnitřní projevy povrchových sil. Charakterizuje přenos impulzu v médiu. Jsme schopni pro libovolnou plošku v objemu V s normálou \boldsymbol{n} explicitně vypočítat důsledek působení plošných sil jako $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$.

Zapíšeme nyní vztah (2.1) s tenzorem napětí a navíc použijeme Stokesovu větu ve druhém integrálu, tj.

$$F_i = \int_V \mathcal{F}_i dV + \oint_f \sigma_{ik} df_k = \int_V \left(\mathcal{F}_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right) dV = 0,$$

kde $df_k = n_k df$. Uvážíme-li, že objem V může být libovolný, tak musí platit

$$\mathcal{F}_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (2.4)$$

což představuje tři rovnice statické rovnováhy. Ve stejném postupu vycházejícího z vektorového zápisu (2.1) narazíme na operaci $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$, jelikož

$$\oint_f \boldsymbol{\mathcal{T}} df = \oint_f \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} df = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV$$

a jedná se o divergenci tenzoru napětí.

Poznámka ke značení: Divergenci tenzoru $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ řádu $n > 1$ značíme $\nabla \cdot \mathbf{T}$. Je definována jako

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{e}_i$$

a jedná se o tenzor $n-1$ řádu. Využili jsme Einsteinovy sumační konvence. Předpokládáme, že bazické vektory \mathbf{e}_i jsou na prostoru nezávislé, tedy neuvažujeme zakřivený prostor.

Gradient tenzoru $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ řádu n značíme $\nabla \mathbf{T}$ a je tenzorem řádu $n+1$. Platí pro něj

$$\nabla \mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_i} \otimes \mathbf{e}_i.$$

Pro tenzor druhého řádu $\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ a tenzor prvního řádu $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$ (vektor rychlosti) máme divergenci

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{Tr}(\nabla \mathbf{v}), \\ \nabla \cdot \mathbf{T} &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = T_{ij,i} \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

Pro gradient

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = v_{i,k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k, \\ \nabla \mathbf{T} &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k = T_{ij,k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k. \end{aligned}$$

Nyní lze rovnice statické rovnováhy (2.4) zapsat vektorově jako

$$\mathcal{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (2.5)$$

Využijme druhou podmínku hydrostatiky – celkový moment sil \mathbf{M} je nulový. V (2.2) upravme plošný integrál:

$$\begin{aligned} \oint_f \varepsilon_{ijk} x_j \mathcal{T}_k df &= \oint_f \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} df_l = \\ &= \int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j \sigma_{kl}) dV = \int_V \varepsilon_{ijk} (\delta_{jl} \sigma_{kl} + x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}) dV = \\ &= \int_V \varepsilon_{ijk} (\sigma_{kj} + x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}) dV = \int_V \varepsilon_{ijk} (\sigma_{kj} - x_j \mathcal{F}_k) dV, \end{aligned} \quad (2.6)$$

kde v poslední rovnosti jsme využili rovnice statické rovnováhy (2.4), resp. (2.5). Dosazením (2.6) do (2.2) získáme

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV = 0 \implies \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} = 0.$$

Což je podmínka symetričnosti tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$. Spolu se třemi rovnicemi statické rovnováhy (2.5) tvoří základní soubor rovnic v rámci hydrostatiky.

2.2 Transportní teorém

Ještě před odvozením hydrodynamických pohybových rovnic se zaměříme na doplňkové vztahy – transportní rovnice se zdrojovými členy $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ pro tenzorovou veličinu $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)$ řádu k . Může se jednat o hustotu, baryonové číslo, či relativistický tenzor energie a hybnosti, tedy proměnné vystupující v pohybových rovnicích.

Tenzorová veličina $\boldsymbol{\psi}$ je definována uvnitř \tilde{V} a na povrchu f celého objemu kapaliny V , tj. $\tilde{V} = V \setminus f$. Její integrální součet má proto totální časovou derivaci rovnu

$$\frac{d}{dt} \int_V \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) dV = \int_V \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) dV = \int_{\tilde{V}} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) dV + \oint_f \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) df, \quad (2.7)$$

kde jsme explicitně rozepsali zdroje $\boldsymbol{\xi}$ na objemové $\boldsymbol{\mu}$ a povrchové $\boldsymbol{\nu}$. Pro zachovávanou veličinu tedy

$$\frac{d}{dt} \int_V \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) dV = \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

Předpokládejme, že k transportu veličiny $\boldsymbol{\psi}$ v objemu V dochází pouze tokem, neuvážujeme transportní jevy jako např. *teleportace*. Zřídla vznikají pouze díky objemovým zdrojům $\boldsymbol{\xi}$, resp. $\boldsymbol{\mu}$.

Odvoďme transportní teorém pro levou část výrazu (2.7), kde objem $V = V(t)$ je vyjádřený ve statické kartézské souřadné soustavě o souřadnicích \mathbf{x} jako

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) dV.$$

Abychom neměli časovou závislost integrační množiny, zvolíme novou souřadnou soustavu spojenou s daným kontinuem (podobná v Lagrangeově metodě) s označením souřadnic \mathbf{x}' . Přejdem k proměnným \mathbf{x}' musíme přidat jakobián transformace $J = |\det(\frac{x_i}{x'_j})|$ do integrandu a přepsat množinu integrace na časově nezávislý objem V' , tj.

$$\frac{d}{dt} \int_{V'} \boldsymbol{\psi}'(\mathbf{x}') J dV',$$

zde rozumíme funkční rovnosti $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}'(\mathbf{x}')$. Nyní již lze zaměnit operace totální časové derivace a integrace

$$\int_{V'} \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\psi}'(\mathbf{x}') J) dV' = \int_{V'} \left(\frac{d\boldsymbol{\psi}'}{dt} J + \boldsymbol{\psi}' \frac{dJ}{dt} \right) dV' = \int_{V'} \left(\frac{d\boldsymbol{\psi}'}{dt} + \frac{\boldsymbol{\psi}'}{J} \frac{dJ}{dt} \right) J dV'.$$

Využijme *Eulerovi identity* – $\frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}'$ [8], kde \mathbf{v}' je rychlost vystupující v příslušných pohybových rovnicích a přepíšme integrál opět do proměnných \mathbf{x}

$$\int_{V'} \left(\frac{d\boldsymbol{\psi}'}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{v}') \boldsymbol{\psi}' \right) J dV' = \int_V \left(\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\psi} \right) dV. \quad (2.9)$$

Získali jsme tedy transportní teorém pro veličinu $\boldsymbol{\psi}$ tvaru

$$\frac{d}{dt} \int_V \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) dV = \int_V \left(\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\psi} \right) dV.$$

Poznámka: Spočteme-li totální časovou derivaci libovolné složky P_j tenzorové proměnné $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ řádu l , s indexem $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_l)$, získáme

$$\frac{dP_j}{dt} = \frac{\partial P_j}{\partial t} + \frac{\partial P_j}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial P_j}{\partial t} + \frac{\partial P_j}{\partial x_k} v_k,$$

resp. vektorově $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{P}$,

kde jsme využili Einsteinovy sumační konvence.

Z předešlé poznámky víme, že $\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\psi$. Navíc platí

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\psi \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\psi + (\nabla \cdot \mathbf{v})\psi,$$

protože

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\psi \otimes \mathbf{v}) &= \nabla \cdot (\psi_{ij} v_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\psi_{ij} v_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k) \\ &= \left(\frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x_k} v_k + \psi_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\psi + (\nabla \cdot \mathbf{v})\psi. \end{aligned}$$

Díky předešlým vztahům můžeme psát

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{d\psi}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\psi \right) dV &= \int_V \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\psi + (\nabla \cdot \mathbf{v})\psi \right) dV = \\ &= \int_V \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{v}) \right) dV = \int_V \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \oint_f (\psi \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} df, \end{aligned}$$

kde jsme použili Stokesovu větu v poslední rovnosti. Formulace známá jako zobecněný transportní teorém tedy je

$$\frac{d}{dt} \int_V \psi dV = \int_V \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \oint_f (\psi \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} df \quad (2.10)$$

S uvážením zdrojů, tj. rovnice (2.7), máme

$$\int_V \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{v}) \right) dV = \int_V \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \oint_f (\psi \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} df = \oint_V \boldsymbol{\xi} dV.$$

Odtud lze zapsat diferenciální tvar (2.7) jako

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{v}) = \boldsymbol{\xi}. \quad (2.11)$$

Pokud transportovaná veličina ψ je hustota ρ a v prostoru neexistují zdroje hmoty, tj. $\boldsymbol{\xi}_\rho(\mathbf{x}) = 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in V$, pak (2.11) zahrnuje i rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.12)$$

Odkazujeme čtenáře na publikaci [8].

2.3 Hydrodynamické pohybové rovnice

Pro odvození pohybových rovnic pro kapalinu vycházejme z rovnic statické rovnováhy (2.5). Dle d'Alembertova principu uvažujme setrvačnou sílu

$$\mathcal{F}^{in} = -\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

působící na konstituenty vztažené k hustotě ρ (zachovávající se veličina). Proti setrvačné síle působí rovnovážné síly o stejné velikosti, tedy

$$-\mathcal{F}^{in} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathcal{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.13)$$

$$\text{resp. ve složkách } -\mathcal{F}_i^{in} = \rho \frac{dv_i}{dt} = \mathcal{F}_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (2.14)$$

což jsou pohybové rovnice pro kapalinu. Ve shodě s tvarem evolučních rovnic z předchozí kapitoly o klasických dynamických systémech máme

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{\rho} (\mathcal{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (2.15)$$

$$\text{resp. ve složkách } \dot{v}_i = \frac{1}{\rho} \left(\mathcal{F}_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right), \quad (2.16)$$

Jedná se o nekonečně dimenzionální dynamický systém v proměnné \mathbf{x} , jedna z metod převedení systému na konečně dimenzionální je vytvořením disjunktních objemů $\Delta \mathbf{x}_j \neq \Delta \mathbf{x}_j(t)$, $j \in \hat{n}$.

Nechť objemy zaujímají větší prostor než samotný objem kapaliny $V = V(t)$, tedy $V \subset \cup_j \Delta \mathbf{x}_j$ pro $\forall t$. Dosazením objemů $\Delta \mathbf{x}_j$ do (2.15) získáme $3n$ evolučních rovnic

$$\dot{\mathbf{v}}(\Delta \mathbf{x}_j) \text{ pro } j \in \hat{n}.$$

Tento přechod k $3n$ dimenzionálnímu klasickému spojitému dynamickému systému nám dovoluje používat metody z předešlé kapitoly. Otázka korespondence je však otevřená. Navíc je třeba uvážit, že v kapitole o klasických dynamických systémech jsme prakticky uvažovali Lagrangeovu metodu popisu, pomocí indexování těles. Oproti indexování prostoru $\Delta \mathbf{x}_j(t)$ jejich možného výskytu.

Pokud vytváříme numerické simulace, setkáváme se s vysokou početní náročností, jelikož $3n \gg 1$.

Stále jsme nestanovili explicitní tvar tenzoru napětí $\boldsymbol{\sigma}$.

2.3.1 Tenzor napětí

Víme, že tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ musí být symetrický a definován uvnitř i na povrchu objemu kapaliny V .

Jelikož popisujeme fyzikální deterministický dynamický systém, tak musí být tenzor napětí závislý pouze na fázových proměnných v daném čase t . Fázové proměnné jsou

rychlost $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, zachovávající se veličiny – zde hustota $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ a popřípadě další termodynamické veličiny $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$. Tenzor napětí je tedy implicitně závislý na prostoru a čase jako $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}, \rho, \varphi)$.

V rámci klasické hydrodynamiky nemůže platit $\boldsymbol{\sigma} \sim \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$, nebo. $\boldsymbol{\sigma} \sim |\mathbf{v}|\mathbf{I}$, protože síly by mohly být různé pro dvě inerciální vztažné soustavy. Tedy by nebyla splněna invariantnost dynamiky, resp. sil vůči pozorovateli.

Z této podmínky uvažujeme zejména gradient rychlosti $\nabla\mathbf{v}$, který je vůči různým inerciálním soustavám invariantní, jelikož uvažuje pouze prostorové rozdíly v rozložení rychlost, avšak né absolutní hodnotu rychlosti.

Gradient rychlosti lze rozdělit na symetrickou a antisymetrickou část \mathbf{S} a \mathbf{A} jako

$$\nabla\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T) + \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^T) = \mathbf{S} + \mathbf{A}.$$

Protože samotný tenzor napětí je symetrický tenzor druhého řádu, předpokládáme pouze symetrickou část gradientu rychlosti \mathbf{S} . Jeden z nejjednodušších tvarů tenzoru napětí je

$$\boldsymbol{\sigma} = \kappa_0\mathbf{I} + \kappa_1\mathbf{S} + \kappa_2\mathbf{S}^2,$$

kde $\kappa_i = \kappa_i(\mathbf{S})$, resp. $\kappa_i = \kappa_i(\text{I}_S, \text{II}_S, \text{III}_S)$. Jak lze vidět v [8] nově definované členy jsou explicitně závislé na symetrickém tenzoru \mathbf{S} jako

$$\begin{aligned} \text{I}_S &\equiv \text{Tr}(\mathbf{S}) = \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \text{II}_S &\equiv \frac{1}{2}(\text{I}_S^2 - \bar{\text{II}}_S), \\ \bar{\text{II}}_S &\equiv \text{Tr}(\mathbf{S}^2), \\ \text{III}_S &\equiv \det(\mathbf{S}). \end{aligned}$$

Lze analogicky aproximovat tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ tenzorovou funkcí $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{S})$ v mocninném rozvoji l -tého řádu symetrické části gradientu rychlosti \mathbf{S} , tj.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}(\mathbf{S}) = \sum_{i=0}^l \kappa_i \mathbf{S}^i. \quad (2.17)$$

Zvyšováním řádu rozvoje l jsme schopni postihnout složitější dynamiku kapaliny blízkosti statické rovnováhy.

2.3.2 Eulerovy rovnice

V nejnižší aproximaci volíme tvar tenzoru napětí jako

$$\boldsymbol{\sigma} = \kappa_0\mathbf{I} = (\alpha + \lambda\text{I}_S)\mathbf{I} = (\alpha + \lambda\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I},$$

kde $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ a $\lambda = \textit{konst.}$ Členy II_S , $\bar{\text{II}}_S$ a III_S neuvažujeme.

Pohybové rovnice dle (2.15), resp. (2.16) jsou

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathcal{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F} + \nabla\alpha + \lambda\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}), \\ \text{resp. ve složkách } \rho \frac{dv_i}{dt} &= \mathcal{F}_i + \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = \mathcal{F}_i + \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k}, \end{aligned}$$

kde pro tenzorovou funkci $\alpha \mathbf{I} = \alpha(\mathbf{x}) \mathbf{I}$ platí

$$\nabla \cdot (\alpha \mathbf{I}) = \nabla \cdot (\alpha \delta_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_k} \delta_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \nabla \alpha.$$

Zajímala by nás fyzikální interpretace funkce $\alpha(\mathbf{x})$.

Neuvažujme objemové síly a předpokládejme nevazkou kapalinu, tj. pro kterou platí $\lambda = 0$. Z d'Alembertova principu, integrací přes celý objem a použitím Stokesovy věty dostáváme

$$\int_V \varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \oint_f \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} df = \oint_f \alpha \mathbf{n} df.$$

Pokud jsou síly v kapalině izotropní, pak je lze popsat jedinou skalární veličinou – tlakem $p = p(\mathbf{x})$, kde síly působící na povrch f objemu V jsou

$$- \oint_f p \mathbf{n} df.$$

Odsud je pro nevazkou kapalinu zřejmý vztah funkce α s tlakem $p(\mathbf{x}) = -\alpha(\mathbf{x})$. Ekvivalence obou veličin je splněna pouze pro velké objemy a blízko hydrostatické rovnováhy. Při dynamických jevech je potřebné zavést tzv. *efektivní tlak* p_{ef} , který odpovídá měřitelnému tlaku. Zavádí se, kvůli konvenci ve značení $p = -\alpha$.

Tedy při zmíněných předpokladech je $\boldsymbol{\sigma} = \text{diag}(-p, -p, -p)$. Plošnou sílu působící na plošku \mathbf{n} lze spočítat jako $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n}$, což odpovídá představě o izotropním tlaku, kdy nezáleží na orientaci plošky \mathbf{n} , ale pouze na její velikosti. Vidíme, že tenzor napětí postihuje lokální interakce v médiu.

Eulerovy pohybové rovnice pro nevazkou kapalinu jsou

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \mathcal{F} - \nabla p, \quad (2.18)$$

Eulerovy pohybové rovnice pro vazkou kapalinu jsou

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \mathcal{F} - \nabla p + \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (2.19)$$

Vybranou pohybovou rovnicí je třeba ještě doplnit o rovnici kontinuity pro hustotu ϱ a stavovou rovnici $p = p(\varrho)$ svazující tlak a hustotu. Odtud máme tři pohybové rovnice pro složky rychlosti, rovnici kontinuity (2.12) a stavovou rovnici pro pět neznámých \mathbf{v}, p, ϱ , což dohromady tvoří nekonečně dimenzionální dynamický systém v proměnné $\mathbf{x} \in V$. Pro konzervativní systémy můžeme navíc uvažovat i zákon zachování energie.

Je zřejmé, že model (2.18) splývá pro nevazkou kapalinu $\lambda = 0$ a nestlačitelnou kapalinu $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

2.3.3 Navierova-Stokesova rovnice

Dalším zobecněním v rámci rozvoje (2.17) je tenzor napětí ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = \kappa_0 \mathbf{I} + \kappa_1 \mathbf{S} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{S} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T), \quad (2.20)$$

kde $\mu = \textit{konst.}$ Zde tedy značíme $p = -\alpha$.

Pro potřeby odvození pohybových rovnic ukažme, že

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j \right) = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \mathbf{e}_i = \Delta \mathbf{v},$$

kde se zřejmě přes index j sčítá. Navíc

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{v})^T = \nabla \cdot \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \right) = \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{e}_i = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

Díky předešlým vztahům lze již snadno odvodit pohybovou rovnici pro tenzor napětí tvaru (2.20) jako

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathcal{F} - \nabla p + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v}, \quad (2.21)$$

$$\text{resp. ve složkách } \varrho \frac{dv_i}{dt} = \mathcal{F}_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}. \quad (2.22)$$

V tomto případě uvažujeme obecně stlačitelnou kapalinu a rovnici (2.21), resp. (2.22) nazýváme Navierovou-Stokesovou.

Soubor evoluční zákonů pro stlačitelnou kapalinu ve vyšším řádu rozvoje hydrodynamického gradientu je tedy Navierova-Stokesova rovnice (2.21), stále rovnice kontinuity (2.12) a stavová rovnice $p = p(\varrho)$. Popřípadě zákon zachování energie.

Kapitola 3

Relativistická hydrodynamika

Nyní budeme formulovat relativistickou hydrodynamiku v čtyř-dimenzionální časoprostoru tak, aby v nerelativistické limitě korespondovala s klasickým hydrodynamickým popisem z předešlé kapitoly.

Relativistickou hydrodynamiku chápeme jako efektivní makroskopickou teorii pole, kde sledujeme kolektivní dynamiku a nezabýváme se jednotlivými částicovými interakcemi.

Náš zájem je především směřován k modelování vývoje kvark-gluonového plazmatu (QGP), které vzniká v ultrarelativistických jaderných srážkách na RHIC či LHC. Vzniknuvší kvark-gluonové plazma (horká jaderná hmota) je krátce žijící médium (10 fm/c $\sim 10^{-22}$ s) mezi dvěma se po srážce vzdalujícími jádery. Při rozpínání a chladnutí nastává *hadronizace* QGP a vytvořené hadrony jsou zaznamenány detektory, z čehož dále usuzujeme o dynamice vývoje QGP.

Setkali jsme se již s analogiemi jaderné hmoty a tekutiny, např. u kapkového modelu jádra. Je otázkou, do jaké míry lze popsat dynamické chování horké jaderné hmoty pomocí hydrodynamiky, resp. relativistické hydrodynamiky. Ukazuje se, že studované QGP má při svém vzniku geometricky složitě distribuovanou energii s velkými gradienty, což vyžaduje formulaci relativistické hydrodynamiky daleko od statické rovnováhy. V rámci klasické hydrodynamiky by to znamenalo, že v rozvoji (2.17) musíme uvažovat členy vyšších řádů, což však vede na divergenci rozvoje v gradientech.

Dále v textu používáme přirozené jednotky, kdy $\hbar = c = k_B = 1$ a metrický tenzor tvaru $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Neuvažujeme tepelné ani kvantové fluktuace ve smyslu *flukтуаčně disipačního teoremu*.

3.1 Tenzor energie a hybnosti

Jelikož v časoprostoru jsou obecně svázány proměnné energie a hybnosti např. u čtyřvektoru rychlosti u^μ , tak lze očekávat, že zobecnění tenzoru napětí σ_{ik} bude tenzor rozměru 4×4 a kromě prostorové části σ_{ik} implikující změny hybnosti (rychlosti),

bude obsahovat i členy vázající změny hustoty energie a hybnosti.

Jak víme [7], tak pro systém popsán Lagrangeovou hustotou \mathcal{L} jsou Lagrangeovy pohybové rovnice tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0, \quad (3.1)$$

kde index $a \in \hat{n}$ značí danou obecnou souřadnici q_a a $q_{a,\mu} \equiv \frac{\partial q_a}{\partial x^\mu}$. Vynásobením n rovnic (3.1) proměnnou $q_{a,\nu}$ a jejich sečtením získáme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} q_{a,\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} \right) q_{a,\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} q_{a,\nu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} \frac{\partial q_{a,\nu}}{\partial x^\mu},$$

což lze přepsat

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} \frac{\partial q_a}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} \frac{\partial q_{a,\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} q_{a,\nu} \right). \quad (3.2)$$

Protože zřejmě $\frac{\partial q_{a,\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial q_{a,\mu}}{\partial x^\nu}$, lze levou stranu (3.2) chápat jako $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu}$ a tedy

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} q_{a,\nu} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) = 0. \quad (3.3)$$

Jak vidíme v (3.3), tak levá strana připomíná definici hustoty energie kontinua. Zjistíme, že vztahy (3.3) pro $\nu = 0, 1, 2, 3$ odpovídají zákonům zachování energie ($\nu = 0$) a hybnosti ($\nu = 1, 2, 3$).

Definujme nyní symetrický tenzor energie a hybnosti

$$T_\nu^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} q_{a,\nu} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L},$$

kde tedy požadujeme jeho zachování dle vztahu (3.3)

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_\nu^\mu = 0, \quad \text{resp.} \quad \partial_\mu T^{\nu\mu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.4)$$

a značíme $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Zobecněním tenzoru napětí σ_{ik} pro relativistický rámec přecházíme k tenzoru energie a hybnosti $T^{\mu\nu}$. V [7] lze vidět, že prostorová část tenzoru energie a hybnosti je klasický tenzor napětí, tj. $T_{ik} = \sigma_{ik}$, kde $i, k = 1, 2, 3$.

Pohybové rovnice (3.4) jsou však odvozeny pouze pro přímočaré Minkowského souřadnice, ale nezahrnují případ obecných křivočarých souřadnic, proto je nutné zavést *kovariantní derivaci*.

3.1.1 Kovariantní derivace

Mějme obecné křivočaré souřadnice \mathbf{x} s bazickými vektory $\mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_\mu(\mathbf{x})$, které jsou tedy na prostoročase závislé. Konkrétní souřadnici x_μ odpovídá daný bazický vektor \mathbf{e}_μ , proto kovariantní derivací $\nabla_\mu \equiv \nabla_{\mathbf{e}_\mu}$ vektoru $\mathbf{v} = v^\nu \mathbf{e}_\nu$ ve směru \mathbf{e}_μ rozumíme

$$\nabla_\mu \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (v^\nu \mathbf{e}_\nu) = \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} \mathbf{e}_\nu + v^\nu \frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (3.5)$$

Pro přímočaré souřadnice je $\frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu} = 0$. Avšak pro křivočaré souřadnice je $\frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu}$ opět vektor, který je roven lineární kombinaci bazických vektorů, zde využijeme tzv. Christoffelových symbolů $\Gamma_{\nu\mu}^\sigma$ jako

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\nu}{\partial x^\mu} = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \mathbf{e}_\sigma. \quad (3.6)$$

Nyní lze v (3.5) s přeznačením indexů $\nu \leftrightarrow \sigma$ psát

$$\nabla_\mu \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + v^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu \right) \mathbf{e}_\nu. \quad (3.7)$$

Christoffelovy symboly $\Gamma_{\sigma\mu}^\nu$ jsou explicitně závislé na volbě obecných souřadnic \mathbf{x} , kdy druhý člen v (3.7) kompenzuje zakřivení souřadnic. Z (3.7) vidíme, že kovariantní derivace působí na vektor po složkách, čehož využijeme při působení na tenzor obecného řádu.

Uvědomme si z (3.7), jak působí kovariantní derivace na složky vektoru

$$\nabla_\mu v^\nu = \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + v^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu,$$

proto analogicky je kovariantní derivace složky $T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l}$ obecného tenzoru \mathbf{T} rovna

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l} = & \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l} + \\ & + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T^{\mu_1\lambda\dots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_l} + \dots \\ & - \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\lambda\nu_2\dots\nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\lambda\dots\nu_l} - \dots \end{aligned}$$

Navíc kovariantní derivace dvou tenzorů \mathbf{w} , \mathbf{m} v tenzorovém součinu je

$$\nabla_\mu (\mathbf{w} \otimes \mathbf{m}) = (\nabla_\mu \mathbf{w}) \otimes \mathbf{m} + \mathbf{w} \otimes (\nabla_\mu \mathbf{m}). \quad (3.8)$$

Přepíšme pohybové rovnice (3.4) do kovariantního tvaru

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.9)$$

kde $\nabla_\mu = \nabla_{\mathbf{e}_\mu}$ a \mathbf{e}_μ je bazický vektor obecných souřadnic. Pohybová rovnice (3.9) postihuje případ kapaliny izolované od vnějších sil. Pokud bychom uvažovali vnější objemové síly ξ^ν , tak je nutné tyto síly přidat na pravou stranu rovnice (3.9), tj.

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \xi^\nu.$$

3.1.2 Rozvoj tenzoru energie a hybnosti

V klasické hydrodynamice jsme pro tenzor napětí sestavili rozvoj a konkrétně mocninný v gradientu rychlosti. Pro relativistický případ vytvořme efektivní rozvoj tenzoru energie a hybnosti

$$T^{\mu\nu} = T_{(0)}^{\mu\nu} + T_{(1)}^{\mu\nu} + \dots, \quad (3.10)$$

kde stavebními bloky bude rychlost u_μ , hustota energie ϵ a metrický tenzor $g_{\mu\nu}$, navíc v kombinaci s *prostoropodobnou částí kovariantní derivace* (koresponduje s

klasickým gradientem). V rozvoji nemusíme uvažovat gradienty tlaku, kvůli stavové rovnici $p = p(\epsilon)$.

Relativistickou rychlost u_μ nyní můžeme uvažovat přímo při konstrukci tenzoru energie a hybnosti, tj. $T^{\mu\nu} \sim u^\mu u^\nu$, oproti klasické hydrodynamice s tenzorem napětí a rychlostí, kdy nemohlo platit $\sigma_{ik} \sim v_i v_k$, či $\sigma_{ik} \sim |\mathbf{v}| \delta_{ik}$. Část tenzoru energie a hybnosti úměrná $u^\mu u^\nu$ je lorentzovsky invariantní a její stopa se zachovává, protože $\text{Tr}(u^\mu u_\mu) = u^\mu u_\mu = -1$.

Pro izolovanou ideální kapalinu (bez viskozity) vede již nultý řád tenzoru energie a hybnosti na příslušné pohybové rovnice $\nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = 0$. Pro neideální kapalinu platí, že čím více členů z rozvoje (3.10) zahrneme do pohybových rovnic (3.9), tím přesněji postihneme dynamiku, avšak stále musíme být blízko statické rovnováhy. Dále od statické rovnováhy, kdy jsou gradienty větší, nemusí být rozvoj (3.10) konvergentní, jak bude ukázáno později.

3.2 Relativistické Eulerovy rovnice

Odvoďme explicitní tvar nultého řádu tenzoru energie a hybnosti $T_{(0)}^{\mu\nu}$. V nejnižším řádu uvažujme pouze skalární funkce $a = a(x_\mu)$ a $b = b(x_\mu)$, rychlost $u^\mu = u^\mu(x_\mu)$ a metrický tenzor $g^{\mu\nu}$. Nejjednoduší tvar tenzoru energie a hybnosti v nultém řádu je poté

$$T_{(0)}^{\mu\nu} = a(c_1 u^\mu u^\nu + c_2 g^{\mu\nu}) + b(c_3 u^\mu u^\nu + c_4 g^{\mu\nu}), \quad (3.11)$$

kde tedy c_1, c_2, c_3, c_4 jsou konstanty. Lze ověřit, že u_μ je vlastní vektor (3.11).

V lokálně klidové soustavě (*LKS*) blízko statické rovnováhy, předpokládáme efektivní tvar tenzoru energie a hybnosti

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_{LKS} = \text{diag}(\epsilon, p, p, p), \quad (3.12)$$

který je odvozen z mikroskopické teorie – relativistické kinetické teorie, kdy p rozumíme tlakem.

V lokálně klidové soustavě má vektor rychlosti tvar $u_{LKS}^\mu = (1, \mathbf{0})$. Proto tenzoru energie a hybnosti (3.11) je

$$T_{(0)LKS}^{\mu\nu} = \text{diag}(a(c_1 - c_2) + b(c_3 - c_4), ac_2 + bc_4, ac_2 + bc_4, ac_2 + bc_4). \quad (3.13)$$

Porovnáním obou výrazů (3.12) a (3.13) zjistíme, že $\epsilon + p = ac_1 + bc_3$, $p = ac_2 + bc_4$, a proto explicitní tvar tenzoru energie a hybnosti v nultém řádu je

$$T_{(0)}^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (3.14)$$

Před výpočtem pohybových rovnic dle zachování tenzoru energie a hybnosti (3.9) zavedme *prostoropodobné* a *časopodobné projektory*.

Projektor: Definujme prostoropodný projektor

$$\Delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu. \quad (3.15)$$

Naší motivací je, že v lokálně klidové soustavě je prostorobodobný projektor $\Delta_{LKS}^{\mu\nu} = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$, protože $g_{LKS}^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ a $u_{LKS}^\mu u_{LKS}^\nu = \text{diag}(1, 0, 0, 0)$. Časopodobný projektor by mohl být definován jako $u^\mu u^\nu$, je však výhodnější uvažovat pouze u^ν . Uvědomme si, že v lokálně klidové soustavě s Minkowského souřadnicemi získáme při kontrakci u_{LKS}^ν s vektorem časopodobný skalár tentýž, který je jedinou nenulovou složkou po aplikaci $u_{LKS}^\mu u_{LKS}^\nu$. Projektory jsou na sebe kolmé $\Delta_\mu^\nu u_\nu = 0$ a je splněna relace $\Delta_\mu^\nu \Delta_{\nu\rho} = \Delta_{\mu\rho}$.

Projektory využijme k přepsání nultého řádu rozvoje tenzoru energie a hybnosti (3.14) jako

$$T_{(0)}^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu u^\nu + p \Delta^{\mu\nu} \quad (3.16)$$

a k rozložení pohybových rovnic na časopodobnou a prostorobodobnou část

$$u_\nu \nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.17)$$

$$\Delta_\nu^\rho \nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.18)$$

Zjistíme, že pro (3.17) máme

$$\begin{aligned} u_\nu \nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} &= -u^\mu \nabla_\mu \epsilon - \epsilon \nabla_\mu u^\mu + \epsilon u^\mu u_\nu \nabla_\mu u^\nu + p u_\nu \nabla_\mu \Delta^{\mu\nu} = \\ &= -(\epsilon + p) \nabla_\mu u^\mu - u^\mu \nabla_\mu \epsilon = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

kde jsme použili identitu $u_\nu \nabla_\mu u^\nu = \frac{1}{2} \nabla_\mu u_\nu u^\nu = -\frac{1}{2} \nabla_\mu 1 = 0$. Pro prostoropodnou projekci pohybových rovnic (3.18) získáme

$$\begin{aligned} \Delta_\nu^\rho \nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} &= \epsilon \Delta_\nu^\rho u^\mu \nabla_\mu u^\nu + \Delta^{\mu\rho} \nabla_\mu p + p \Delta_\nu^\rho u^\mu \nabla_\mu u^\nu = \\ &= (\epsilon + p) u^\mu \nabla_\mu u^\rho + \Delta^{\mu\rho} \nabla_\mu p = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

kde platí $\Delta_\nu^\rho u^\mu \nabla_\mu u^\nu = g_\nu^\rho u^\mu \nabla_\mu u^\nu = u^\mu \nabla_\mu g_\nu^\rho u^\nu = u^\mu \nabla_\mu u^\rho$.

Projekce derivace: Zavedme výhodný zápis tzv. časopodobné a prostoropodné derivace

$$D \equiv u^\mu \nabla_\mu, \quad \nabla_\perp^\rho \equiv \Delta^{\rho\mu} \nabla_\mu, \quad (3.21)$$

kdy $\nabla_\mu = u_\mu D + \nabla_\mu^\perp$ a platí $\nabla_\mu u^\mu = (u_\mu D + \nabla_\mu^\perp) u^\mu = (u_\mu u^\nu \nabla_\nu + \nabla_\mu^\perp) u^\mu = \nabla_\mu^\perp u^\mu$, protože $u^\nu u_\mu \nabla_\nu u^\mu = 0$.

S použitím (3.21) přepíšme Eulerovy relativistické rovnice (3.19) a (3.20) do finálního tvaru

$$D\epsilon + (\epsilon + p) \nabla_\mu^\perp u^\mu = 0, \quad (\epsilon + p) D u^\rho + \nabla_\perp^\rho p = 0 \quad (3.22)$$

Rovnice (3.22) jsou čtyři vztahy pro pět neznámých ϵ, p, u^μ , kdy u^μ představuje pouze tři nezávislé proměnné, kvůli $u^\mu u_\mu = -1$. Pro úplnost uvažujme stavovou rovnici $p = p(\epsilon)$, která je odvozena z mikroskopické teorie. Dle aplikace bychom mohli uvažovat např. i baryonové číslo spolu s jeho zákonem zachování.

3.2.1 Limitní přechod ke klasickým Eulerovým rovnicím

Víme, že pro čtyřrychlost u^μ a klasickou rychlost \mathbf{v} platí

$$u^\mu = \gamma(\mathbf{v}) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \xrightarrow{|\mathbf{v}| \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^2) \quad (3.23)$$

V nerelativistické limitě $|\mathbf{v}| \rightarrow 0$ operátory projekce derivace přejdou na

$$D = u^\mu \nabla_\mu = u^0 \partial_0 + u^i \partial_i \xrightarrow{|\mathbf{v}| \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^2), \quad (3.24)$$

$$\nabla_\perp^i = \Delta^{i\mu} \nabla_\mu \xrightarrow{|\mathbf{v}| \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^2), \quad (3.25)$$

$$\nabla_\perp^0 = \Delta^{0\mu} \nabla_\mu \xrightarrow{|\mathbf{v}| \rightarrow 0} 0 + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^2). \quad (3.26)$$

Pro platnost (3.25) a (3.26) si uvědomme, že při $|\mathbf{v}| \rightarrow 0$ jsou nerelativistické souřadné soustavy blízké lokálně klidové soustavě, kde již známe explicitní tvar projektorů. Hustota energie ϵ při $|\mathbf{v}| \rightarrow 0$ odpovídá hustotě klidové hmoty $\epsilon \sim \rho c^2$ (resp. hustotě, $c = 1$) a předpokládáme, že je mnohem větší než tlak v kapalině, tj. $\epsilon \gg p$.

S využitím vztahů (3.23)-(3.26) přepíšme Eulerovy relativistické rovnice (3.22) v nerelativistické limitě jako

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \epsilon + \epsilon \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla(\epsilon \mathbf{v}) = 0, \quad (3.27)$$

$$\epsilon \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \epsilon \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p. \quad (3.28)$$

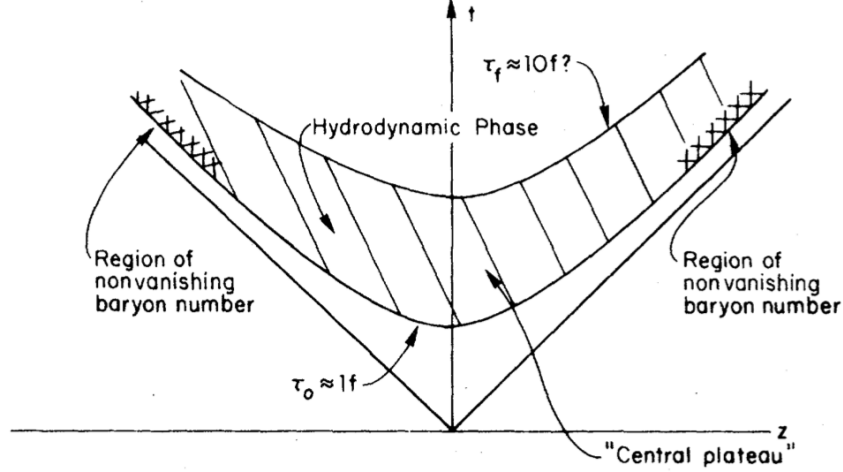
kdy (3.27) odpovídá rovnici kontinuity (2.12) a (3.28) klasickým Eulerovým rovnicím pro nevazkou kapalinu (2.18).

3.2.2 Bjorkenův model

Nyní se zabývejme nejjednodušším modelem pro popis hydrodynamické fáze QGP v regionu centrální rapidity vzniklého v ultrarelativistických jaderných srážkách na RHIC či LHC. QGP nacházející se v meziprostoru po srážce se vzdalujících jader je v tzv. hydrodynamické fázi mezi časy $\tau_0 \simeq 1 \text{ fm}/c$ a $\tau_h \simeq 10 \text{ fm}/c$. Ke konci života QGP nastává hadronizace – fázový přechod, kdy lze stále využít hydrodynamického popisu s příslušnou novou stavovou rovnicí. V $\tau_h \simeq 10 \text{ fm}/c$ i hadronový plyn *vymrzne*.

V rámci Bjorkenova scénáře je vývoj modelován jako jednodimenzionální expanze ve výhodných Milneho souřadnicích. Bude využito Eulerových relativistických pohybových rovnic (3.22) se zjednodušujícími předpoklady:

- Pohyb jader je podél osy z , jádra jsou homogenní a nekonečně rozlehlá ve směrech os x a y , čímž zanedbáváme závislost stavových proměnných na x, y .
- Bjorkenův tok – jednodimenzionální expanze ve směru osy z , kdy pro konkrétní část kontinua je kolektivní rychlost konstantní a rovna počáteční rychlosti $v_0^z \sim z/t$.



Obrázek 3.1: Vývoj QGP v centrální rapiditě s naznačenou hydrodynamickou fází. [11]

- Zavedme Milneho souřadnice s vlastním časem $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$ a rapiditou $\eta = \text{arctanh}(\frac{z}{t})$. Fázové proměnné ϵ, p jsou funkcemi pouze vlastního času τ , protože konkrétní část kontinua má konstantní rychlost $v^z = v_0^z$, odkud i rapiditu $\eta = \text{arctanh}(\frac{v^z t}{t}) = \text{arctanh}(v^z)$. Čtyřrychlost má tvar

$$u^\mu = (u^\tau, u^x, u^y, u^\eta) = \left(\frac{d\tau}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{d\eta}{d\tau} \right) = (1, 0, 0, 0).$$

Pro Milneho souřadnice mějme metrický tenzor tvaru $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, \tau^2)$ a jediné nenulové Christoffelovy symboly

$$\Gamma_{\eta\tau}^\eta = \Gamma_{\tau\eta}^\eta = \frac{1}{\tau}, \quad \Gamma_{\eta\eta}^\tau = \tau,$$

jak lze náhlednout v [10]. Uvědomme si, že nyní je $D = u^\mu \nabla_\mu = \nabla_\tau$ a $\Delta_\nu^\mu = g_\nu^\mu + u^\mu u_\nu = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$, proto $\nabla_\perp^\mu = (0, \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{d\eta})$.

Zapišme Eulerovy relativistické rovnice (3.22) v Milneho souřadnicích a s předešlými předpoklady, tím získáme

$$\begin{aligned} D\epsilon + (\epsilon + p)\nabla_\mu^\perp u^\mu &= \nabla_\tau \epsilon + (\epsilon + p)\nabla_\eta u^\eta = \nabla_\tau \epsilon + (\epsilon + p)\Gamma_{\tau\eta}^\eta = \\ &= \frac{d\epsilon}{d\tau} + \frac{\epsilon + p}{\tau} = 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$(\epsilon + p)Dw^\rho + \nabla_\perp^\rho p = (\epsilon + p)\nabla_\tau w^\rho + \nabla_\perp^\rho p = \nabla_\perp^\rho p = 0, \quad (3.30)$$

kde se přes indexy τ, η nesčítá. Jelikož $p = p(\tau)$, tak je rovnice (3.30) identicky splněna, tj. s využitím zavedených symetrií, kdy ∇_\perp^ρ skutečně derivuje pouze přes prostorodobné proměnné η, x, y .

Z (3.29) máme tedy rovnici

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = -\frac{\epsilon + p}{\tau}. \quad (3.31)$$

Uvažujeme-li i stavovou rovnici $p = p(\epsilon)$, tak lze převést (3.31) v jediný evoluční zákon pro energii ϵ .

3.3 Relativistická Navierova-Stokesova rovnice

Vytvořme další člen efektivního rozvoje (3.10), a to prvního řádu $T_{(1)}^{\mu\nu}$, který přináší již do systému disipaci. K jeho konstrukci můžeme uvažovat gradienty ∇_μ^\perp stavových proměnných ϵ, u^μ v přípustných tvarech

$$\nabla_\mu^\perp u^\mu, \quad \nabla_\mu^\perp \epsilon, \quad \nabla_\mu^\perp u_\nu, \quad (3.32)$$

tyto stavební bloky (3.32) kombinujeme se členy z nultého řádu ϵ, u^μ a $g^{\mu\nu}$, resp. $\Delta^{\mu\nu}$. Né všechny kombinace lze však uvažovat, jelikož očekávaná hodnota tenzoru energie a hybnosti splňuje *Landaouvu definici rychlosti* [14]

$$u_\mu \langle T^{\mu\nu} \rangle = -\epsilon u^\nu.$$

Jak lze vidět v (3.16), tak $u_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = -\epsilon u^\nu$, proto nutně musí $u_\mu T_{(1)}^{\mu\nu} = 0$. Této podmínice vyhovují členy $\Delta_{\mu\nu} \nabla_\lambda^\perp u^\lambda$, $\nabla_\mu^\perp u_\nu$ a $\nabla_\nu^\perp u_\mu$. Jelikož je tenzor energie a hybnosti symetrický, zavedme symetrickou kombinaci předcházejících dvou bloků $\nabla_\perp^{(\mu} u^{\nu)} = \frac{1}{2}(\nabla_\perp^\mu u^\nu + \nabla_\perp^\nu u^\mu)$. Ukazuje se být výhodné využívat dvě lineární kombinace z $\nabla_\perp^{(\mu} u^{\nu)}$, $\Delta_{\mu\nu} \nabla_\lambda^\perp u^\lambda$, a to

$$\Delta_{\mu\nu} \nabla_\lambda^\perp u^\lambda, \quad \sigma^{\mu\nu} = 2\nabla_\perp^{(\mu} u^{\nu)} - \frac{2}{3}\Delta_{\mu\nu} \nabla_\lambda^\perp u^\lambda,$$

kdy má $\sigma^{\mu\nu}$ nulovou stopu, tj. $g_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = 0$. Nyní lze zapsat příspěvek prvního řádu rozvoje tenzor energie a hybnosti (3.10) jako

$$T_{(1)}^{\mu\nu} = -\xi \sigma^{\mu\nu} - \zeta \Delta_{\mu\nu} \nabla_\lambda^\perp u^\lambda, \quad (3.33)$$

kde $\xi(\epsilon), \zeta(\epsilon)$ jsou hydrodynamické koeficienty *prvního řádu* závislé na hustotě energie ϵ .

Pohybové rovnice získáme jako

$$\nabla_\mu (T_{(0)}^{\mu\nu} + T_{(1)}^{\mu\nu}) = 0,$$

což ekvivalentně $\nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = -\nabla_\mu T_{(1)}^{\mu\nu}$. Odkud v časopodobné a prostoropodobné projekci

$$D\epsilon + (\epsilon + p)\nabla_\lambda^\perp u^\lambda = \frac{\xi}{2}\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \zeta(\nabla_\lambda^\perp u^\lambda)^2 \quad (3.34)$$

$$(\epsilon + p)Du^\alpha + \nabla_\perp^\alpha p = \nabla_\nu^\alpha \nabla_\mu (\xi\sigma^{\mu\nu} + \zeta\nabla_\lambda^\perp u^\lambda). \quad (3.35)$$

V odvození sme využili identity $u_\mu \nabla_\nu \sigma^{\mu\nu} = \nabla_\nu(0) - \sigma^{\mu\nu} \nabla_\nu u_\mu = -\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$, protože $u_\mu \sigma^{\mu\nu} = 0$. Navíc zřejmě $\Delta^{\mu\nu} \nabla_\nu^\perp u_\mu = \nabla_\perp^\mu u_\mu$.

Rovnice (3.34), (3.35) nazýváme relativistickými Navierovými-Stokesovými rovnicemi. Nejsou však tak využívané oproti jejich nerelativistickým protějškům, protože nejsou kauzální – dovolují šíření *kolektivních módů* rychleji, než je rychlost světla ve vakuu.

3.3.1 Limitní přechod ke klasické Navierovi-Stokesovi rovnici

V rámci limitního přechodu k nerelativistickým rovnicím využijeme stejných argumentů a vztahů (3.23)-(3.26) jako pro Eulerovy rovnice. Po menších úpravách lze poté zapsat relativistické Navierovy-Stokesovy rovnice (3.34), (3.35) v nerelativistické limitě

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \epsilon + \epsilon \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla(\epsilon \mathbf{v}) = 0, \quad (3.36)$$

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \epsilon(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \epsilon \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \xi \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\xi\right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (3.37)$$

První rovnice (3.36) má nulovou pravou stranu, protože dané členy v (3.34) jsou kvadratické v rychlostech, a tím zanedbatelné. Vidíme, že (3.36) odpovídá rovnici kontinuity (2.12) a rovnice (3.37) koresponduje s klasickou Navierovou-Stokesovou rovnicí (2.21).

3.4 Smykové a objemové napětí, efektivní tlak

Je zřejmé, že nyní jsme schopni systematicky přidávat členy vyšších řádu do rozvoje (3.10) a získávat příslušné pohybové rovnice popisující hydrodynamiku přesněji v blízkosti statické rovnováhy. Obecně se proto zavádí zápis, kdy jsme rozdělily korekce k nultému řádu tenzoru energie a hybnosti $T_{(0)}^{\mu\nu}$ na část s nulovou stopou $\pi^{\mu\nu}$ a nenulovou stopou $\Delta^{\mu\nu}\Pi$. Očekávaná hodnota tenzoru energie a hybnosti v libovolném řádu je

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = T_{(0)}^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu}\Pi, \quad \text{kde} \quad (3.38)$$

$$\pi^{\mu\nu} = T_{(1)}^{<\mu\nu>} + T_{(2)}^{<\mu\nu>} + \dots, \quad 3\Pi = T_{(1)\mu}^{\mu} + T_{(2)\mu}^{\mu} + \dots \quad (3.39)$$

Nově definované členy $\pi^{\mu\nu}, \Pi$ nazýváme smykovým, resp. objemovým napětím a rovnice (3.39) jejich konstituentními rovnicemi. Horním označením indexů $A^{<\mu\nu>}$ rozumíme

$$A^{<\mu\nu>} \equiv \frac{1}{2} \Delta^{\mu\lambda} \Delta^{\nu\rho} (A_{\lambda\rho} + A_{\rho\lambda}) - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta^{\lambda\rho} A_{\lambda\rho}.$$

Lze se přesvědčit, že např. $\sigma^{\mu\nu} = 2\nabla^{<\mu} u^{\nu>}$ s využitím vztahu $\Delta^{\mu\lambda} \Delta^{\nu\rho} \nabla_{\lambda}^{\perp} u_{\rho} = \nabla_{\perp}^{\mu} u^{\nu}$.

Z (3.38) vidíme, že prostoropodobné diagonální prvky tenzoru energie a hybnosti v nultém řádu $T_{(0)}^{ii}$ (přes i nebudeme sčítat) získávají korekce

$$\langle T^{ii} \rangle = T_{(0)}^{ii} + \pi^{ii} + \Delta^{ii}\Pi,$$

kdy $T_{(0)}^{ii}$ představuje tlak ve statické rovnováze $p(\epsilon)$. V lokálně klidové soustavě zadefinujeme efektivní fenomenologický tlak $p_{eff}^{(i)}$ v i -tém směru jako

$$p_{eff}^{(i)} \equiv p + \pi_{LKS}^{ii} + \Pi. \quad (3.40)$$

Tento efektivní tlak $p_{eff}^{(i)}$ odpovídá pozorovatelnému tlaku v tekutině a obecně již není izotropní. Otázkou je, zdali se mohou členy π_{LKS}^{ii} a Π považovat za pouhé korekce, protože dále od statické rovnováhy jsou srovnatelné s tlakem p .

3.5 Divergence hydrodynamického rozvoje dále od statické rovnováhy

Do teď jsme uvažovali pouze tekutiny v blízkosti statické rovnováhy, tj. při malých gradientech, kdy $T_{(0)}^{\mu\nu}$ byl hlavním členem rozvoje (3.10) a ostatní členy $T_{(1)}^{\mu\nu}, T_{(2)}^{\mu\nu}, \dots$ obsahující gradienty stavových proměnných byly zanedbatelné. Přidáváním i vyšších členů, jako například $T_{(1)}^{\mu\nu}$ u Navierových-Stokesových rovnic ((3.34),(3.35)) jsme pouze přesněji popisovali evoluci systému blízko statické rovnováhy. Otázkou je, zdali je rozvoj (3.10) vhodný pro popis systému také dále od statické rovnováhy.

Podmínku malých gradientů lze formulovat jako [10]

$$\lambda_{svd} \ll L, \text{ resp. } \text{Kn} \ll 1, \quad (3.41)$$

kde λ_{svd} je střední volná dráha konstituentů, L je velikost systému a $\text{Kn} \equiv \frac{\lambda_{svd}}{L}$ je tzv. Knudsendovo číslo.

Hydrodynamické modely jsou často podmíněny splněním (3.41), stejně jako pro námi využívaný rozvoj (3.10). Ukazuje se totiž, že pokud podmínka (3.41) neplatí, tak jsou příspěvky vyšších řádu $T_{(1)}^{\mu\nu}, T_{(2)}^{\mu\nu}, \dots$ srovnatelné s $T_{(0)}^{\mu\nu}$, což vede nutně k divergenci hydrodynamického rozvoje (3.10). Dokonce platí, že $T_{(n)}^{\mu\nu}/T_{(n-1)}^{\mu\nu} \simeq n$ a příspěvky vyšších řádů tedy rostou faktoriálně s n .

Faktoriální růst lze ozřejmit rozvahou o počtu uvažovaných členů v příspěvku n -tého řádu $T_{(n)}^{\mu\nu}$. Tehdy její část s nulovou stopou $T_{(n)}^{\langle\mu\nu\rangle}$ obsahuje gradienty $\nabla_{\mu_1}^\perp, \nabla_{\mu_2}^\perp, \dots, \nabla_{\mu_n}^\perp$ stavových proměnných, kde μ_1, \dots, μ_n jsou indexy ke kontrakci. Počet kombinací kontrakcí gradientů $\nabla_{\mu_1}^\perp, \nabla_{\mu_2}^\perp, \dots, \nabla_{\mu_n}^\perp$ je $(n-2)!$, kdy právě přes dva indexy μ a ν se nesčítá.

Jedna z možností konvergence rozvoje (3.10) dále od statické rovnováhy je exponenciální potlačení příspěvků vyšších řádů. Tato metoda se nazývá *Borelovská sumace* [12], zde se jí však již nebudeme blíže věnovat. Jinou možností je *MIS teorie*, která je nastíněna dále.

3.6 Hydrodynamický atraktor v MIS teorii

V této kapitole chceme naznačit odvození *hydrodynamického atraktoru*, který charakterizuje vývoj QGP při jádro-jaderných srážkách. Jdeme zde po stopách článku [13], kdy detailnější odvození učiníme až v dalších následujících pracích.

Zaměříme se na Müllerovu-Israelevu-Stewartovu teorii (MIS), kterou posléze využijeme v rámci Bjorkenova scénáře. Ukážeme, že dané pohybové rovnice obsahují univerzální asymptotické řešení – *hydrodynamický atraktor*.

Vycházejme z *Landauovy-Lifschitzovy formulace* [14] pro střední hodnotu tenzoru energie a hybnosti

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \epsilon u^\mu u^\nu + p \Delta^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu},$$

kde smykový tenzor je zadán jako

$$\Pi^{\mu\nu} = -\xi\sigma^{\mu\nu}. \quad (3.42)$$

Problém nastává s kauzalitou indukovaných pohybových rovnic, stejně jako u relativistických Navierových-Stokesových rovnic (3.34), (3.35). Nepomůže ani přidání členů vyšších řádů do smykového tenzoru (3.42).

Právě MIS teorie řeší tento nedostatek zavedením doplňkové rovnice pro smykový tenzor

$$(\tau_{\Pi}D + 1)\Pi^{\mu\nu} = -\xi\sigma^{\mu\nu} + \dots, \quad (3.43)$$

kde vynechané členy vyšších řádů na pravé straně lze dohledat v [16] a na $\Pi^{\mu\nu}$ se nahlíží jako na další veličinu s fenomenologickou relaxační rovnicí (3.43). Pokud bychom se nyní dostali do statické rovnováhy, tj. pravá strana (3.43) je nulová (gradienty rychlosti jsou nulové $\implies \sigma^{\mu\nu} = 0$ atd.), pak se dle (3.43) smykový tenzor exponenciálně utlumuje na škále relaxačního času τ_{Π} . Oproti instantnímu vymizení jako v rovnici (3.42). V rámci MIS teorie máme tedy pět evolučních rovnic $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ a (3.43) pro veličiny u^{μ} , ϵ a $\Pi^{\mu\nu}$.

Využijme Milneho souřadnic τ, η, x, y v rámci Bjorkenova scénáře, který díky svým symetriím (viz. kapitola 3.2.2) zjednodušuje pohybové rovnice plynoucí z MIS teorie na

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = \dot{\epsilon} = -\frac{\epsilon + p}{\tau} + \phi = -\frac{4}{3}\frac{\epsilon}{\tau} + \phi, \quad (3.44)$$

$$\dot{\phi} = \frac{4\xi}{\tau\tau_{\Pi}} - \frac{\lambda_1\phi^2}{2\xi^2\tau_{\Pi}} - \frac{4\phi}{3\tau} - \phi, \quad (3.45)$$

kde jsme využili stavové rovnice $p = \frac{1}{3}\epsilon$ pro nehmotný relativistický plyn, transportní koeficient λ_1 je zaveden v [16] a $\phi \equiv -\Pi_y^y$ je jediný nezávislý prvek smykového tenzoru.

V *konformní teorii* transportní koeficienty splňují

$$\tau_{\Pi} = \frac{C_{\tau_{\Pi}}}{T}, \quad \lambda_1 = C_{\lambda_1} \frac{\xi}{T}, \quad \xi = C_{\xi}s,$$

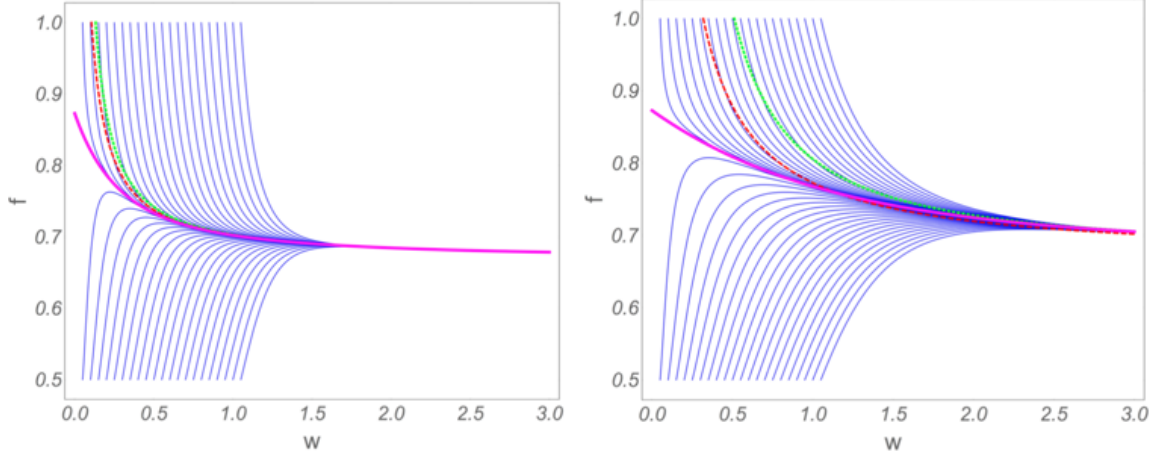
kde jsme využili úměry $\epsilon \sim T^4$ s teplotou T a s je hustota entropie. Konstanty $C_{\tau_{\Pi}}, C_{\lambda_1}, C_{\xi}$ jsou bezrozměrné a pomocí *hydrodynamické-gravitační dualitě* lze dopočítat jejich hodnoty [17], avšak dále položíme $C_{\lambda_1} = 0$ pro zjednodušení pohybových rovnic.

Z (3.44) a (3.45) lze odvodit jedinou diferenciální rovnici druhého řádu v teplotě

$$\tau C_{\tau_{\Pi}} \frac{\ddot{T}}{T} + 3\tau C_{\tau_{\Pi}} \left(\frac{\dot{T}}{T}\right)^2 + \left(\frac{11C_{\tau_{\Pi}}}{3T} + \tau\right)\dot{T} - \frac{4C_{\xi}}{9\tau} + \frac{4C_{\tau_{\Pi}}}{9\tau} + \frac{1}{3}T = 0.$$

Zavedme bezrozměrné proměnné

$$w = \tau T, \quad f = \tau \frac{\dot{w}}{w},$$



Obrázek 3.2: Modré linie jsou numerické řešení rovnice (3.46), kdy růžová křivka reprezentuje numericky spočtený hydrodynamický atraktor. Červená, resp. zelená přerušovaná křivka odpovídá řešení v prvním a druhém řádu, které musí divergovat pro nízké časy – situace daleko od statické rovnováhy. Levý graf využívá parametrů z $\mathcal{N} = 4$ SYM teorie, doporučujeme čtenáři nahlédnout do [13].

poté přechází dle [13] na tvar

$$C_{\tau_{\text{II}}} w f \frac{\partial f}{\partial w} + 4C_{\tau_{\text{II}}} f^2 + \left(w - \frac{16C_{\tau_{\text{II}}}}{3} \right) f - \frac{4C_{\xi}}{9} + \frac{16C_{\tau_{\text{II}}}}{9} - \frac{2w}{3} = 0, \quad (3.46)$$

Ukazuje se, že pro velké časy τ , tj. velké w lze nalézt řešení (3.46) ve formě mocninového rozvoje v $\frac{1}{w}$, máme tedy *ANSATZ* $f(w) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k w^{-k}$. Dosazením do (3.46) získáme výsledek

$$f(w) = \frac{2}{3} + \frac{4C_{\xi}}{9w} + \frac{8C_{\xi}C_{\tau_{\text{II}}}}{27w^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{w^3}\right), \quad (3.47)$$

kdy je důležitou vlastností (3.47), že poruchy od tohoto řešení jsou exponenciálně utlumeny na škále τ_{II} [13]. To naznačuje existenci hydrodynamického atraktoru.

Pro nízké hodnoty w lze nalézt stabilní řešení

$$f(w) = \frac{2\sqrt{C_{\tau_{\text{II}}}} + \sqrt{C_{\xi}}}{3\sqrt{C_{\tau_{\text{II}}}}} + \mathcal{O}(w). \quad (3.48)$$

Tyto analytické řešení (3.47) a (3.48) pohybové rovnice (3.46) ctí numerické řešení na Obr. 3.2, kde lze vidět exponenciální přibližování k danému hydrodynamickému atraktoru.

Závěr

V této práci jsme prezentovali definice a některé pokročilé metody z analýzy klasických nelineárních dynamických systémů. Naší motivací je jejich budoucí využití v hydrodynamických modelech popisujících evoluci QGP vzniknuvší na RHIC, či LHC. Detailněji jsme popsali kvalitativní chování Hamiltonovských systémů při zvyšování energie, kdy pozorujeme bifurkaci diskrétního dynamického systému na Poincarého řezu a vznik deterministického chaosu. Jako ilustraci jsme zvolili dvoudimenzionální harmonický oscilátor, jehož pohybové rovnice jsme řešili numericky v rozhraní Matlab. Poukázali jsme na neideálnost implementovaných řešičů (ode113) vzhledem k numerické disipaci. Bylo překvapivé, že většina zvolených trajektorií byla i přes velké chyby v určení energie stabilní.

Budováním klasické hydrodynamiky ve druhé kapitole jsme dospěli až k Navierovi-Stokesovi rovnici a nastínili postup získání pohybových rovnic vyšších řádů. V rámci procedury jsme využili předpokladu malých gradientů (blízko statické rovnováhy) a hydrodynamického rozvoje analogicky jako u relativistické hydrodynamiky.

U teorie relativistické hydrodynamiky pro ultrarelativistické jaderné srážky jsme narazili na potřebu popisu situací i dále od statické rovnováhy. Tento fakt vede na divergentní hydrodynamický rozvoj, proto je nutné využít přístupu MIS teorie, či Borelovské sumace. Oběma způsobům se chceme věnovat v dalších pracích spolu s hydrodynamickými simulacemi. Proto je tato prezentovaná práce spíše teoretickým podkladem pro následující připravovanou aplikaci, kdy se pokusíme využít i metod z první kapitoly.

Jsem potěšen, že jsem mohl nahlédnout spíše na teoretické než experimentální aspekty výzkumu QGP vzhledem k oboru experimentální jaderné a částicové fyziky, který studuji. Pro mne, jako experimentálního fyzika, je to další důležitý krok k hlubšímu porozumění souvislostí dané problematiky.

Literatura

- [1] VERHULST, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 1990
- [2] BENEŠ, M. *Matematické Modelování Nelineárních Systémů*. FJFI, ČVUT. Poznámky z výuky. Zimní semestr 2019-2020
- [3] CENCINI, M., F. CECCONI, A. VULPIANI *From Simple Models to Complex Systems*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2010.
- [4] BERGLUND, N. *Geometrical Theory of Dynamical Systems*. Zürich. Lecture Notes Winter Semester 2000-2001
- [5] HORÁK, J., L. KRLÍN, A. RAIDL. *Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace*. Praha. Academia. 2003.
- [6] TANCJUROVÁ, J. *Analýza nelineárních dynamických systémů vykazujících chaotické chování s atraktorem typu „dvojitý svitek“*. [online] [15.6.2019] Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=148629
- [7] ŠTOLL, I., J. TOLAR *Teoretická fyzika*. Skripta. Vydavatelství ČVUT. 1982.
- [8] SLATTERY, J. C. *Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua*. Huntington, N.Y., 2d ed. edition, 1971
- [9] MAS, A. F. *Hydrodynamics*. University of Vigo. International Max Planck Research School. 2008.
- [10] ROMATSCHKE, P., U. ROMATSCHKE *Relativistic Fluid Dynamics In and Out of Equilibrium*. [arXiv:1712.05815v3](https://arxiv.org/abs/1712.05815)
- [11] BJORKEN, J. D. *Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region*. Physical Review C. 10.1103/PhysRevD.27.140
- [12] HARDY, G. H. *Divergent Series*. American Mathematical Society. 2000
- [13] HELLER, P. M., SPALIŃSKI, M. *Hydrodynamics beyond the Gradient Expansion: Resurgence and Resummation*. [arXiv:1503.07514v2](https://arxiv.org/abs/1503.07514)
- [14] LANDAU, L. D., E. M. LIFSHITZ *Fluid Mechanics, Second Edition: Volume 6*. Course of Theoretical Physics. 1987

- [15] SUNIL, J., C. CHANDRODOY, J. AMARESH, P. SUBRATA, H. ULRICH
Exact solutions and attractors of higher-order viscous fluid dynamics for Bjorken flow. Physical Review C. 100. 10.1103/PhysRevC.100.034901.
- [16] BAIER, R., P. ROMATSCHKE, D. T. SON, A. O. STARINETS, M. A. STEPHANOV
Relativistic viscous hydrodynamics, conformal invariance, and holography. BI-TP 2007/29
- [17] BHATTACHARYYA, S., V. E. HUBENY, S. MINWALLA, M. RANGAMANI
Nonlinear Fluid Dynamics from Gravity. TIFR/TH/07-44. 2008