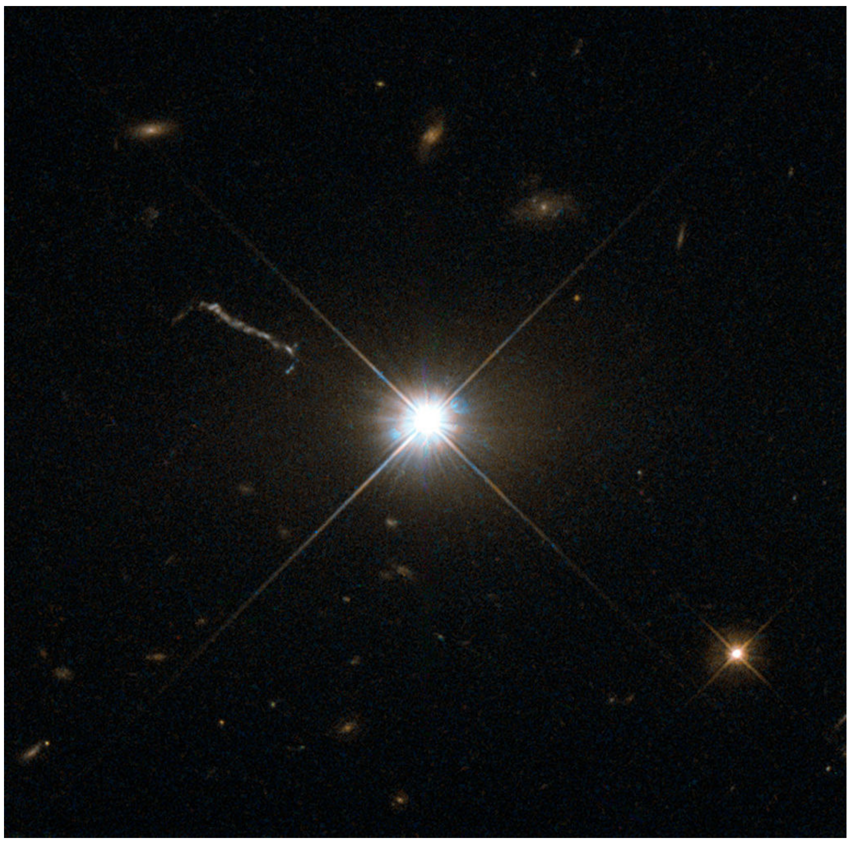
14 L'EXPANSION DE L'UNIVERS

Dans le spectre du quasar 3C 273, la raie spectrale de l'hydrogène, normalement à 656,1 nm, est à 761,1 nm. Quel était le facteur d'échelle de l'univers quand la lumière de ce quasar, arrivant à nous aujourd'hui, a été émise ?



en.wikipedia.org/wiki/3C_273

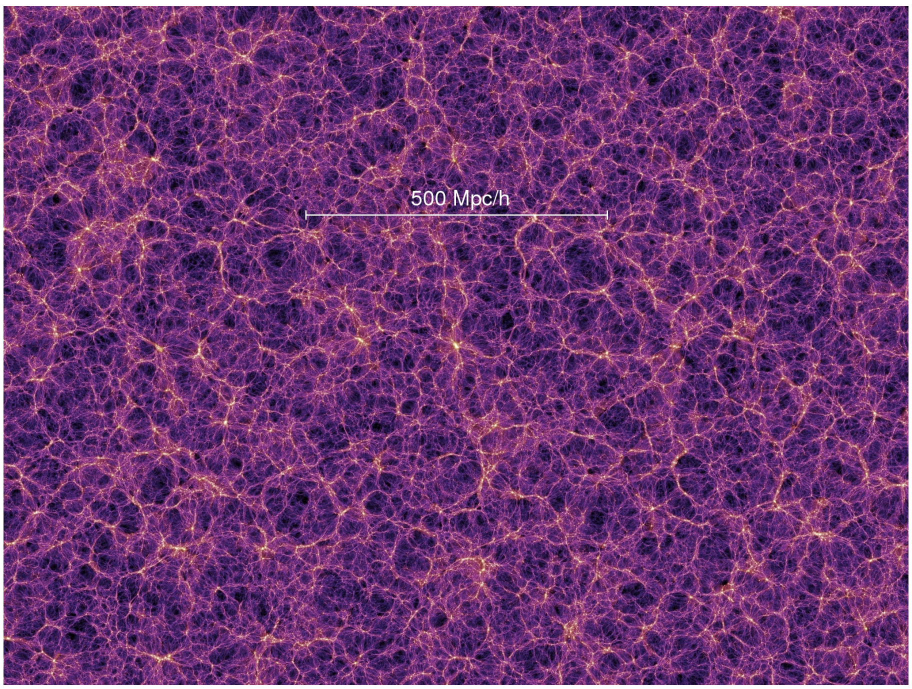
Découvrez comment résoudre ce problème dans ce chapitre.

14.1 DESCRIPTION DE L'EXPANSION

L'univers et la relativité générale

À partir de 1917, quelques rares physiciens tentent de déterminer l'évolution de l'univers à partir des équations de la relativité générale découverte par Einstein. Ce sont des cosmologistes.

Ça peut sembler difficile de calculer l'évolution de tout l'univers vu sa complexité, mais on fait quelques simplifications pour y arriver. Par exemple, on suppose que toute la matière est répartie uniformément dans l'univers, ce qui est assez correct quand on se rappelle l'image montrant la superstructure de l'univers.



www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/millennium/

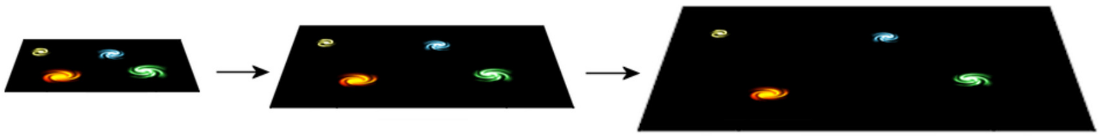
Il y a bien quelques grumeaux ici et là, mais c'est quand même assez uniforme.

À partir d'un univers supposé uniforme, on peut obtenir plusieurs solutions selon ce qu'on choisit de mettre dans cet univers.

Un univers en expansion

Les cosmologistes se rendent vite compte que pratiquement tous les modèles obtenus avec la relativité sont des modèles où l'univers est en expansion (ou en contraction).

L'expansion de l'univers signifie que l'univers est de plus en plus grand et les galaxies s'éloignent toutes les unes des autres avec le temps. L'image suivante nous montre ce qui se passe sur une période de plusieurs milliards d'années dans un univers en expansion ayant seulement deux dimensions (comme une feuille). L'univers garde exactement la même structure, mais les galaxies sont plus éloignées les unes des autres.



nothingnerdy.wikispaces.com/E6+GALAXIES+AND+THE+EXPANDING+UNIVERSE

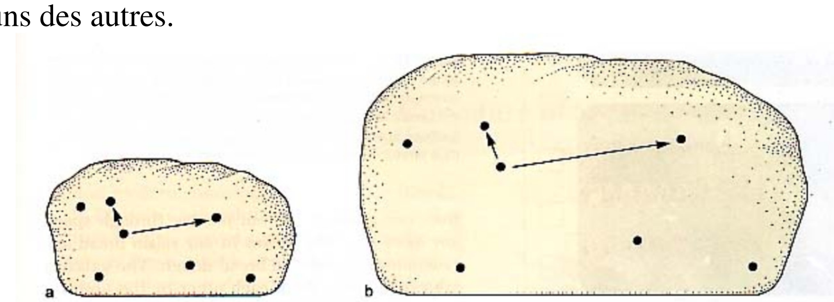
Cette expansion change uniquement la distance entre les galaxies. La taille des galaxies reste la même, la taille du Système solaire reste la même et la taille de la Terre reste la même.

En relativité, l'espace entre les galaxies prend une importance capitale. Il y a une expansion parce que cet espace gonfle lentement. En gonflant ainsi, l'espace entraine avec lui tout ce qu'il contient. Ainsi, selon la relativité, les galaxies ne se déplacent pas l'espace à cause de l'expansion. Les galaxies s'éloignent les unes des autres simplement parce que l'espace gonfle et les entraine dans son gonflement.

Prenons une analogie pour un univers en deux dimensions. C'est comme si on collait des dessins de galaxies sur un ballon qu'on gonfle. En gonflant le ballon, les dessins de galaxie s'éloignent les unes des autres en étant entrainés par l'étirement de la surface du ballon. Ainsi, les galaxies s'éloignent les unes des autres, sans se déplacer par rapport à la surface du ballon, qui représente ici l'espace.

theeternaluniverse.blogspot.ca/2009/08/how-should-we-view-universes-expansion.html

On utilise aussi l'analogie du pain aux raisins pour illustrer l'expansion de l'univers. On imagine un pain aux raisins qui cuit. Pendant la cuisson, le pain gonfle, ce qui éloigne les raisins les uns des autres.



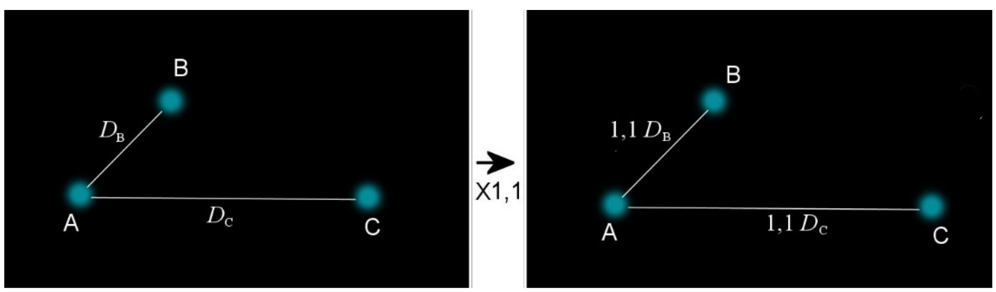
web.njit.edu/~gary/202/Lecture23.html

Le gonflement du pain pendant la cuisson est l'équivalent de l'expansion de l'univers. La mie du pain représente l'espace et les raisins représentent les galaxies. Pendant la cuisson du pain, la mie gonfle, ce qui éloigne les raisins les uns des autres. Les raisins ne se déplacent pas dans la mie pour s'éloigner les uns des autres, c'est la mie qui gonfle qui les éloigne sans qu'ils se déplacent dans la mie.

C'est exactement ce qui se passe dans l'univers. **L'espace entre les galaxies gonfle avec l'expansion, ce qui éloigne les galaxies les unes des autres sans que celles-ci se déplacent dans l'espace.**

La loi de Hubble-Lemaître

Avec l'expansion, les distances entre les galaxies augmentent toutes du même facteur durant le même temps. Par exemple, l'image suivante montre comment changent les distances quand l'expansion fait grandir l'univers de 10 % (1,1 fois plus grand que maintenant). On voit que les distances entre les galaxies sont alors 1,1 fois les distances actuelles.



Une telle expansion signifie que les autres galaxies s'éloignent de la nôtre avec une vitesse proportionnelle à leur distance. Pour montrer cela, considérons les trois galaxies A (la nôtre), B et C de la figure. Ces galaxies sont initialement à une certaine distance les unes des autres. Puis, l'univers prend lentement de l'expansion, de sorte que les distances sont toutes augmentées de 10 % au bout d'un certain temps T.

Calculons maintenant les vitesses de chacune de ces galaxies selon un observateur dans notre galaxie (galaxie A).

La galaxie B était à une distance de D_B et est maintenant à une distance de $1,1D_B$. Elle s'est donc éloignée de $0,1D_B$. La vitesse d'éloignement est donc de

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{\Delta d}{\Delta t} \\ &= \frac{0,1D_B}{T} \\ &= \frac{0,1}{T} D_B \end{aligned}$$

La galaxie C était à une distance de D_C et est maintenant à une distance de $1{,}1D_C$. Elle s'est donc éloignée de $0{,}1D_C$. La vitesse d'éloignement est donc de

$$\begin{aligned} v_C &= \frac{\Delta d}{\Delta t} \\ &= \frac{0{,}1D_C}{T} \\ &= \frac{0{,}1}{T} D_C \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on obtient une vitesse proportionnelle à la distance et la constante de proportionnalité est la même ($0{,}1/T$). Si on appelle cette constante H, on arrive à

La loi de Hubble-Lemaître

$$v = HD$$

H est souvent appelée *la constante de Hubble,* mais on va voir que le taux d'expansion varie avec le temps et qu'il n'est donc pas une constante. Il est donc préférable de l'appeler *le taux d'expansion de Hubble*.

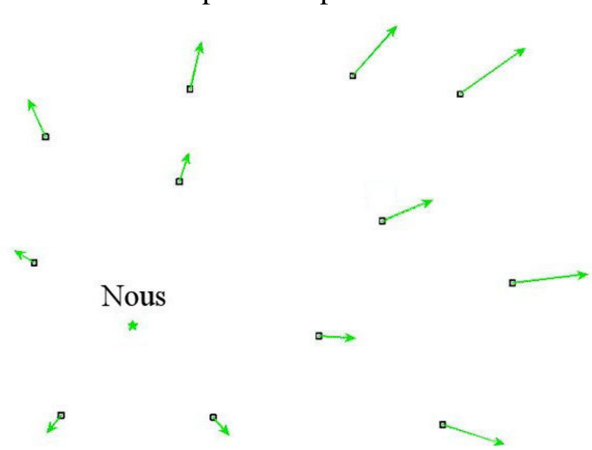
La valeur de H en ce moment est notée H_0 et vaut

Taux d'expansion de Hubble

$$H_0 = 67{,}4 \pm 0{,}5 \, \tfrac{km/s}{Mpc}$$

(En fait, il y a un petit problème avec le taux d'expansion de Hubble depuis quelques années. En améliorant les techniques de mesure, on a diminué les incertitudes sur cette valeur. Or, selon la façon de mesurer, on obtient des valeurs qui sont maintenant incompatibles. La valeur donnée ici est celle obtenue en observant le rayonnement de fond cosmologique qu'on verra au chapitre suivant. Cependant, les mesures faites avec des céphéides lointaines donnent une valeur de 73,0 ± 1,0 km/s/Mpc, qui n'est pas compatible avec la mesure donnée précédemment. Il y a en fait toute une série de méthode qui donne des résultats autour de 73 tout en ayant des incertitudes trop faibles pour atteinte la valeur de 67,4 obtenue avec le rayonnement de fond cosmologique. Une histoire à suivre…)

La loi de Hubble-Lemaître signifie donc qu'on devrait voir toutes les galaxies s'éloigner de nous avec une vitesse proportionnelle à la distance. Ainsi, les galaxies loin de nous s'éloignent plus rapidement de nous.



www.astro.virginia.edu/class/whittle/astr553/Topic16/t16_hubble.html

Exemple 14.1.1

en.wikipedia.org/wiki/File:M104_ngc4594_sombrero_galaxy_hi-res.jpg

Quelle est la vitesse d'éloignement de la galaxie du Sombréro, située à une distance de 29,3 millions d'années-lumière selon la loi de Hubble-Lemaître ?

La distance de cette galaxie, en Mpc est,

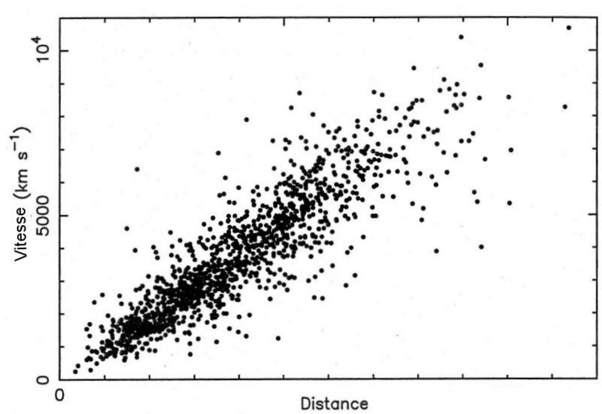
$$\begin{aligned} D &= 29,3 Mal \cdot \frac{1pc}{3,262al} \\ &= 8,98 Mpc \end{aligned}$$

La vitesse d'éloignement selon la loi de Hubble-Lemaître est donc

$$\begin{aligned} v &= 67,4 \tfrac{km/s}{Mpc} \cdot 8,98 Mpc \\ &= 605 \tfrac{km}{s} \end{aligned}$$

La véritable vitesse d'une galaxie peut être un peu différente de ce que donne la loi de Hubble-Lemaître

En fait, la véritable vitesse des galaxies peut être un peu différente de celle donnée par la loi de Hubble-Lemaître. Par exemple, la vitesse d'éloignement de la galaxie du Sombréro est en fait de 1024 km/s, et non pas 605 km/s. Ce graphique montre la vitesse en fonction de la distance pour 1355 galaxies. On voit que les points ne forment pas une droite parfaite. Une partie de cette dispersion vient de l'incertitude sur la distance des galaxies, mais cela n'explique pas tout. Pourquoi les galaxies ne suivent-elles pas exactement la loi de Hubble-Lemaître ?



hendrix2.uoregon.edu/~imamura/123/lecture-1/xpand.html

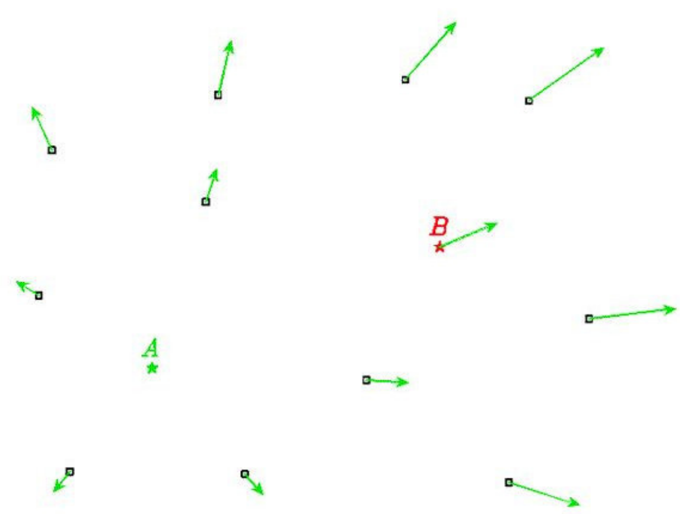
Pour nous aider à trouver la solution, améliorons un peu l'analogie du pain en remplaçant les raisins par des fourmis (qui ne meurent pas même si le pain est dans le four pendant la cuisson). Ces fourmis peuvent se déplacer dans la mie en la mangeant. Toutefois, il y a une certaine limite au rythme auquel une fourmi peut manger, ce qui veut dire qu'il y a une vitesse limite au déplacement des fourmis dans la mie. La vitesse des fourmis selon les autres fourmis est donc une combinaison de deux vitesses : la vitesse due à l'expansion de la mie qui éloigne toutes les fourmis les unes des autres et la vitesse de la fourmi dans le pain, qui peut être dans n'importe quelle direction.

Cette analogie du pain aux fourmis (miam) illustre mieux ce qui se passe dans l'univers. La vitesse d'éloignement des galaxies vient de deux phénomènes bien différents. Chaque galaxie s'éloigne de nous à cause de l'expansion de l'univers (comme le pain qui gonfle). Cette vitesse d'éloignement est alors donnée exactement par la loi de Hubble-Lemaître. Dans ce mouvement, les galaxies sont immobiles dans l'espace, mais le gonflement de l'espace les entraine et les éloigne les unes des autres. Il n'y a pas de limite à cette vitesse. Deux galaxies très éloignées peuvent s'éloigner l'une de l'autre avec une vitesse plus grande que la vitesse de la lumière. On ajoute ensuite à ce mouvement la vitesse de la galaxie dans l'espace (comme la vitesse des fourmis dans le pain). Cette vitesse ajoutée fait que les galaxies ne suivent pas tout à fait la loi de Hubble-Lemaître et c'est pour ça qu'on n'a pas une belle droite sur le graphique de la vitesse d'éloignement en fonction de la distance. La vitesse de la galaxie dans l'espace ne peut toutefois pas dépasser la vitesse de la lumière, tout comme la fourmi ne pouvait pas dépasser une certaine vitesse dans la mie. Ce déplacement se fait à vitesse constante dans une direction et se fait sans aucune résistance (c'est là que l'analogie avec le pain aux fourmis ne fonctionne pas tout à fait parce que les fourmis rencontrent une certaine résistance en de déplaçant dans le pain et pourraient facilement changer de direction, contrairement à ce qui se passe pour les galaxies).

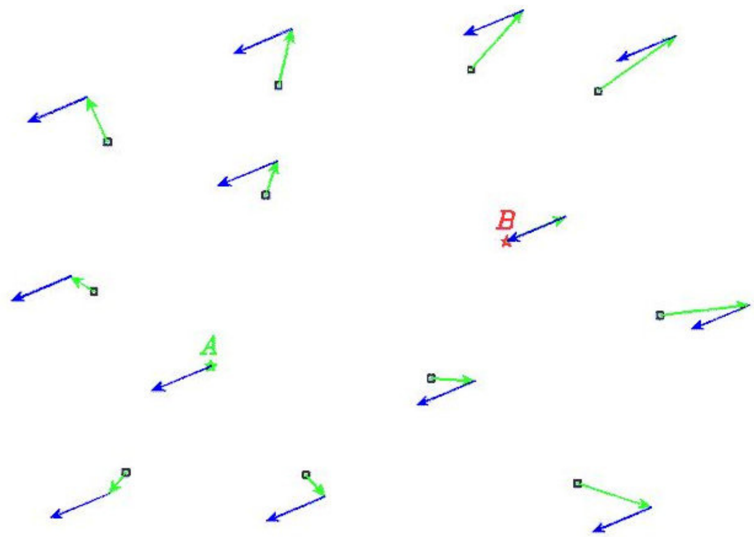
C'est pour cela que la galaxie d'Andromède s'approche de nous. Avec l'expansion de l'univers, elle devrait s'éloigner à 51 km/s, mais comme elle se déplace vers nous dans l'espace à 352 km/s, elle a une vitesse résultante de 301 km/s vers nous. C'est une des seules galaxies pour laquelle la vitesse dans l'espace vers nous est plus grande que la vitesse d'éloignement due à l'expansion de l'univers.

Puisque les galaxies s'éloignent de nous, est-on au centre de l'univers ?

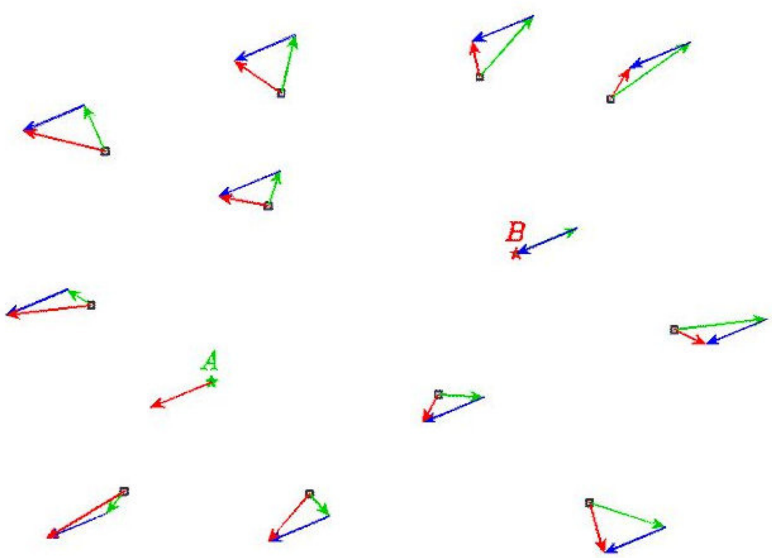
Les galaxies qui s'éloignent toutes de nous n'indiquent pas qu'on est immobile au centre de l'univers et que les galaxies s'éloignent de ce centre. Pour le montrer, examinons cette image de l'univers dans laquelle la Voie lactée est la galaxie A.



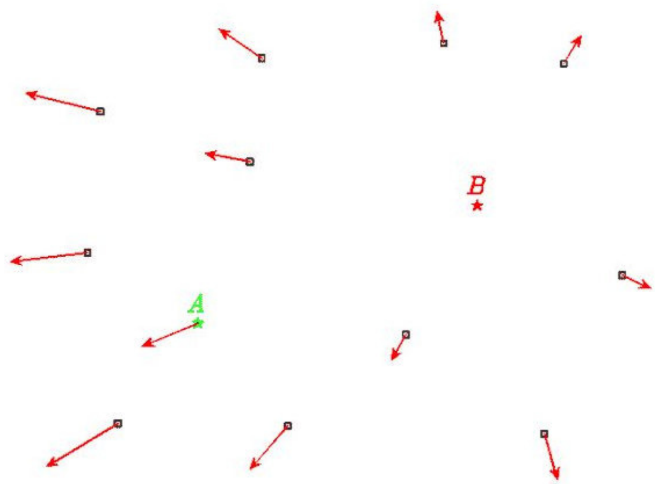
On va maintenant prendre le point de vue d'un observateur dans la galaxie B. Cet observateur peut considérer que sa galaxie est au repos, un point de vue tout aussi bon selon la relativité. Pour prendre ce point de vue, on doit donc se placer dans le référentiel de cette galaxie et lui donner une vitesse nulle. Pour y arriver, il faut faire une transformation de vitesse en ajoutant, à toutes les galaxies, l'inverse de la vitesse de la galaxie B. Cet inverse de la vitesse est représenté par un vecteur en bleu ici.



On va maintenant faire l'addition des vecteurs en bleu et en vert pour trouver la vitesse résultante de chaque galaxie selon l'observateur de la galaxie B. On va montrer cette somme par un vecteur en rouge.



Laissons maintenant uniquement la vitesse résultante pour bien voir le résultat.



Le résultat est assez frappant. L'observateur dans la galaxie B se considère au repos et voit aussi toutes les galaxies s'éloigner de lui avec une vitesse qui augmente avec la distance, ce qui est exactement la même chose que ce que voyait l'observateur dans la galaxie A. En fait, tous les observateurs de l'univers (s'il y en a d'autres) voient tous la même chose, peu importe dans quelle galaxie ils se trouvent. Ils se considèrent tous au repos et voient les autres galaxies s'éloigner d'eux avec une vitesse qui augmente avec la distance. Notre position n'a donc rien de particulier dans l'univers.

Dans l'analogie du pain, les observateurs sur chaque raisin voient la même chose, peu importe sur quel raisin ils sont placés. Ils peuvent se considérer au repos et voient tous les autres raisins s'éloigner avec une vitesse qui augmente avec la distance.

La vitesse due à l'expansion peut dépasser la vitesse de la lumière

La vitesse d'une galaxie par rapport à la nôtre due à l'expansion vient d'un gonflement de l'espace entre nous et la galaxie et non pas d'un mouvement de la galaxie dans l'espace. Si la vitesse de déplacement de la galaxie dans l'espace ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière, celle qui provient de l'expansion n'a pas de limite.

Autres unités pour le taux d'expansion de Hubble

On remarque que dans le taux d'expansion de Hubble, il y a une distance au numérateur et au dénominateur dans les unités.

$$H_0 = 67,4 \frac{km/s}{Mpc}$$

Si on changeait une de ces unités pour qu'elle soit la même que l'autre, elles s'annuleraient. Voyons ce que ça donne. On va changer les mégaparsecs en parsecs, puis les parsecs en années-lumière et finalement les années-lumière en kilomètres.

$$1\tfrac{km/s}{Mpc} = 1\tfrac{km/s}{Mpc} \cdot \frac{1Mpc}{10^6\ pc} \cdot \frac{1pc}{3,26163al} \cdot \frac{1al}{9,46053\times 10^{12}\ km}$$
$$= 3,2409\times 10^{-20}\ s^{-1}$$

On peut aussi changer les secondes en années pour obtenir

$$1\tfrac{km/s}{Mpc} = 3,2409\times 10^{-20}\ s^{-1} \cdot \frac{365,25\cdot 24\cdot 60\cdot 60s}{1a}$$
$$= 1,02273\times 10^{-12}\ a^{-1}$$

Les facteurs de conversion sont donc les suivants.

Facteurs de conversion du taux d'expansion de Hubble

$$1\tfrac{km/s}{Mpc} = 3,2409\times 10^{-20}\ s^{-1}$$
$$1\tfrac{km/s}{Mpc} = 1,02273\times 10^{-12}\ a^{-1}$$
$$1\tfrac{km/s}{Mpc} = 1,02273\times 10^{-3}\ Ga^{-1}$$

Le taux d'expansion de Hubble vaut donc, avec ces unités

$$H_0 = 67,4\tfrac{km/s}{Mpc} = 67,4\cdot 3,2409\times 10^{-20}\ s^{-1} = 2,18\times 10^{-18}\ s^{-1}$$
$$H_0 = 67,4\tfrac{km/s}{Mpc} = 67,4\cdot 1,02273\times 10^{-12}\ a^{-1} = 6,89\times 10^{-11}\ a^{-1}$$
$$H_0 = 67,4\tfrac{km/s}{Mpc} = 67,4\cdot 1,02273\times 10^{-3}\ Ga^{-1} = 6,89\times 10^{-2}\ Ga^{-1}$$

Ces valeurs donnent le pourcentage d'augmentation des longueurs durant le temps spécifié par l'unité. On a donc que les distances entre les galaxies augmentent actuellement au rythme de

2,18 x 10^{-16} % par seconde
6,89 x 10^{-9} % par année
6,89 % par milliard d'années.

Le facteur d'échelle de l'univers (*a*)

On utilise le facteur d'échelle *a* pour décrire l'expansion de l'univers. Ce facteur permet de donner les distances entre les galaxies en fonction du temps.

Par définition, le facteur d'échelle est égal à 1 aujourd'hui.

Le facteur d'échelle aujourd'hui

$$a = 1$$

On donnera la distance entre les galaxies par la formule suivante.

Distance dans l'univers

$$D = a \cdot d$$

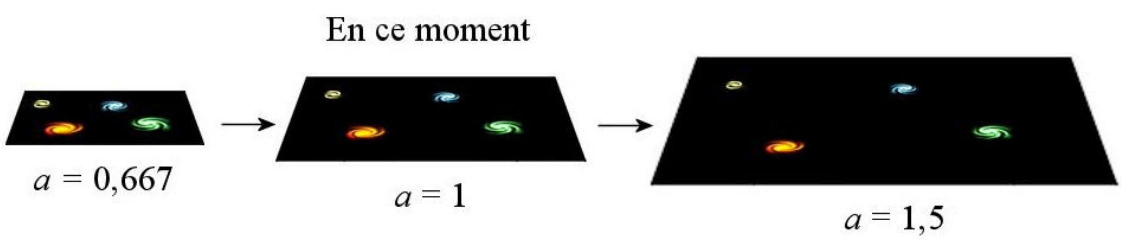
où D est la distance à un certain moment,
a est le facteur d'échelle à un certain moment
et d est la distance actuelle

Comme les galaxies étaient plus près les unes des autres dans le passé, cela veut dire que le facteur d'échelle était inférieur à 1 dans le passé. Un facteur d'échelle de 0,5 signifie que les galaxies étaient toutes deux fois plus près les unes des autres que maintenant. En effet, une galaxie maintenant située à 140 millions d'années était à la distance

$$\begin{aligned} D &= a \cdot d \\ &= 0,5 \cdot 140 Mal \\ &= 70 Mal \end{aligned}$$

quand le facteur d'échelle était de 0,5. On voit facilement qu'elle était alors deux fois plus près.

Comme les galaxies seront plus éloignées les unes des autres dans le futur, cela signifie que le facteur d'échelle sera supérieur à 1 dans le futur. Un facteur d'échelle de 1,5 signifie que les galaxies seront toutes 1,5 fois plus loin les unes des autres que maintenant.

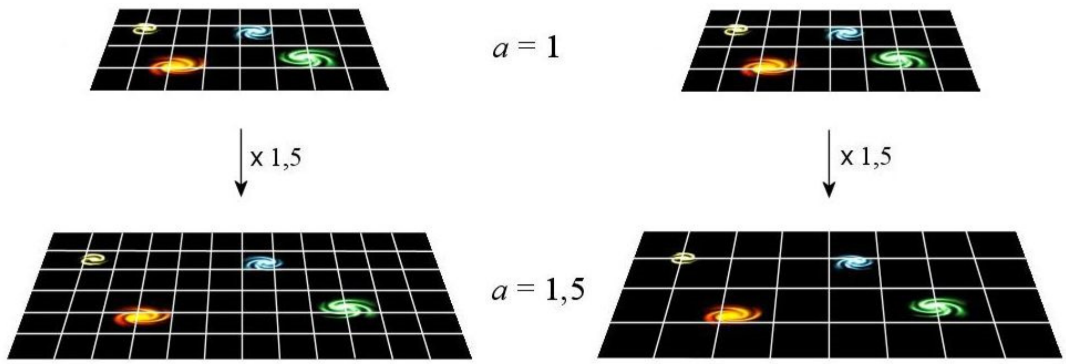


Deux graduations pour mesurer la distance des galaxies

Voici deux façons de mesurer la distance entre les galaxies dans l'univers.

On peut mesurer la distance avec un système d'axes qui garde toujours les mêmes dimensions malgré l'expansion de l'univers. Avec ces axes, on obtient la distance D qui est la véritable distance entre les galaxies.

On peut aussi utiliser un système d'axes qui grandit avec l'expansion de l'univers. Avec ces axes, on obtient la distance d.



Graduation pour mesurer D *Graduation pour mesurer d*

En ce moment (a = 1), les deux graduations sont identiques. Dans le futur, les graduations servant à mesurer D resteront à la même distance les unes des autres, alors que la graduation servant à mesurer d prendra de l'expansion. Quand le facteur d'échelle sera de 1,5, les graduations sur les axes d seront 1,5 plus loin les unes des autres qu'en ce moment. La loi reliant les deux valeurs d et D est

$$D = a \cdot d$$

C'est la même formule qu'auparavant puisque d est aussi la distance actuelle des galaxies.

Avec l'expansion, la valeur de d reste toujours la même. Si une galaxie est à d = 2, alors elle reste toujours à d = 2 puisque la graduation grandit au même rythme que la distance. On peut voir sur la figure que les galaxies gardent les mêmes coordonnées avec les axes mesurant d malgré l'expansion de l'univers. Quant à la valeur de D elle change avec l'expansion. Par exemple, si une galaxie est aujourd'hui à D = 2, elle sera à D = 3 quand le facteur d'échelle sera de 1,5.

Le taux d'expansion de Hubble en fonction du facteur d'échelle

En utilisant ces mesures, on peut trouver le lien entre le taux d'expansion de Hubble et le facteur d'échelle de l'univers. On a

$$v = HD$$

Puisque la vitesse correspond au rythme de changement de la distance, on a

$$\frac{dD}{dt} = HD$$

Puisque la distance est $D = ad$, on arrive à

$$\frac{d\left(ad\right)}{dt} = H\left(ad\right)$$

Comme la distance d d'une galaxie est constante, on a

$$d\frac{da}{dt} = Had$$
$$\frac{da}{dt} = Ha$$

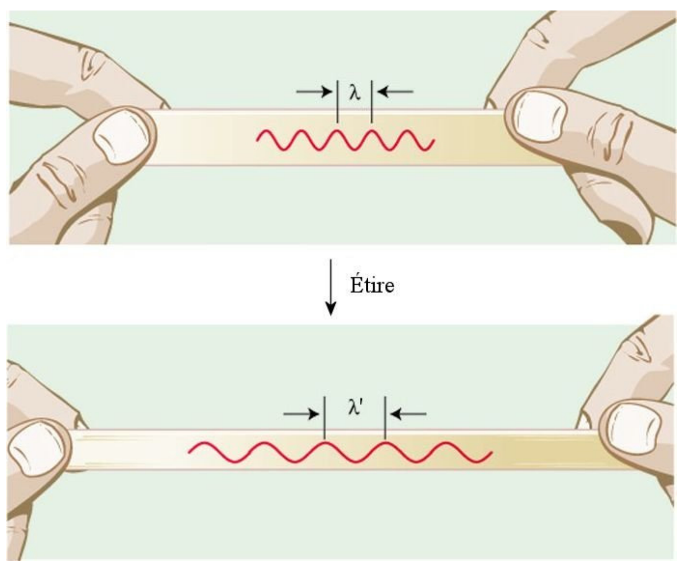
Pour finalement arriver à

Lien entre le taux d'expansion de Hubble et le facteur d'échelle

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$$

14.2 LE DÉCALAGE DES RAIES SPECTRALES

Étirement des ondes avec l'expansion



www.ualberta.ca/~pogosyan/teaching/ASTRO_122/lect30/lecture30.html

Le gonflement de l'univers n'augmente pas seulement les distances entre les galaxies, il étire également les ondes électromagnétiques qui voyagent dans l'espace, ce qui fait augmenter la longueur d'onde. C'est exactement la même chose que ce qui se passe si on dessine une onde sur une bande élastique et qu'on étire la bande.

Ainsi, si le facteur d'échelle double pendant que la lumière va de la source à la Terre, la longueur d'onde sera deux fois plus grande quand la lumière arrivera sur Terre. Plus la source est loin, plus l'univers prend de l'expansion durant le voyage de la lumière et plus la longueur d'onde augmente. Ce décalage vers le rouge est donc plus important pour des sources très éloignées pour lesquelles la lumière voyage très longtemps avant d'arriver jusqu'à nous. L'expansion de l'univers selon la relativité prévoit donc qu'il y a un décalage des raies spectrales vers le rouge et que ce décalage augmente avec la distance de la source.

Erreur fréquente : Penser que le décalage du spectre dû à l'expansion de l'univers est le résultat de l'effet Doppler

Le décalage des raies des galaxies qui s'éloignent de nous à cause de l'expansion de l'univers provient de l'étirement de l'onde par l'expansion pendant qu'elle se déplace vers la Terre. Elle ne provient pas de l'effet Doppler.

Puisque l'onde s'étire avec l'expansion, la longueur d'onde doit être proportionnelle au facteur d'échelle (λ devient deux fois plus grand si le facteur d'échelle est 2, 3 fois plus grand si le facteur d'échelle est 3, et ainsi de suite).

$$\lambda \propto a$$

Cela signifie qu'on doit avoir

$$\lambda = (cst)\, a$$

Si on prend les longueurs d'onde et les facteurs d'échelle à deux moments différents (1 et 2), on a donc

$$\lambda_1 = (cst)\, a_1$$
$$\lambda_2 = (cst)\, a_2$$

Selon la première de ces équations, on a

$$(cst) = \frac{\lambda_1}{a_1}$$

En remplaçant dans la deuxième équation, on arrive à

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{a_1} a_2$$
$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

Regardons quel changement de longueur d'onde on obtient pour de la lumière émise dans le passé et arrivant aujourd'hui sur la Terre. On va donner l'indice *e,* pour les valeurs de longueur d'onde et de facteur d'échelle de l'univers quand la lumière a été émise (*e* pour émission) et l'indice *r* pour quand cette lumière arrive sur Terre (*r* pour réception). On a donc

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a_r}{a_e}$$

La longueur d'onde à l'émission est la longueur d'onde normalement émise par la source. On a donc $\lambda_e = \lambda$. La longueur d'onde à la réception est la longueur d'onde modifiée par l'expansion de l'univers, qu'on appelle, comme toutes les longueurs d'onde modifiées, λ'.

On a donc $\lambda_r = \lambda'$. Finalement, on reçoit la lumière maintenant, ce qui signifie que le facteur d'échelle à la réception est 1. On a donc a_r = 1. Cela nous donne

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{a_e}$$

Comme le décalage des raies spectrales est λ'/λ, on a

Décalage des raies spectrales dû à l'expansion de l'univers

$$\delta = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{a_e}$$

Distance d'une galaxie à partir du décalage

Puisque le décalage augmente si la lumière voyage pendant plus de temps, il doit y avoir un lien entre distance d'une galaxie et le décalage de la lumière arrivant de cette galaxie. On va supposer que le taux d'expansion de Hubble est constant (en réalité, H peut changer, mais il n'aura pas le temps de changer beaucoup si la galaxie est près de nous et que la lumière ne prend pas trop de temps pour arriver jusqu'à nous.).

Auparavant, on avait trouvé que

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$$

En supposant que le taux d'expansion est constant, on peut intégrer pour arriver à

$$\frac{da}{a} = H_0 dt$$
$$\ln(a) = H_0 t + cst$$

La constante d'intégration se trouve en utilisant $a = 1$ à $t = 0$ (on définit donc le $t = 0$ comme étant aujourd'hui). On trouve alors que la constante est nulle. On a donc

$$\ln(a) = H_0 t$$
$$a = e^{H_0 t}$$

Si la valeur de $H_0 t$ est petite (c'est le cas pour les galaxies près de nous), on peut utiliser $e^x \approx 1 + x$ pour arriver à

$$a = H_0 t + 1$$

On peut maintenant utiliser ce résultat dans la formule du décalage spectral. Comme on est maintenant à $t = 0$, la lumière a été émise dans le passé au temps $-t$. On a donc

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{a_e}$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{1 + H_0(-t)}$$
$$\delta = \frac{1}{1 - H_0 t}$$
$$\delta \approx 1 + H_0 t$$

(Pour la dernière ligne, on a utilisé le fait que $(1-x)^{-1} \approx 1 + x$ pour de petites valeurs de x.)

Puisque $z = \delta - 1$, on a

$$z = H_0 t$$

Pour une galaxie à une distance D, le temps nécessaire pour que la lumière arrive est

$$t = D / c$$

et l'équation du décalage devient

$$z \approx \frac{H_0}{c} D$$

Puisque H_0 = 0,0689 Ga^{-1}, on a

$$z \approx \frac{0{,}0689 Ga^{-1}}{c} D$$
$$\approx \frac{1}{14{,}51 Ga \cdot c} D$$

Notez que quand on multiplie un temps en années par la vitesse de la lumière, on obtient une distance en année-lumière. On a donc

Distance à partir du décalage (si $z \ll 1$)

$$z \approx \frac{H_0}{c} D$$
$$z \approx \frac{D}{14{,}51 Gal} \qquad \text{(si } H_0 = 67{,}4 \text{ km/s/Mpc)}$$

(Toutes les approximations faites ici font que cette formule n'est valide que pour de petits z, disons inférieur à 0,1. La véritable relation entre z et D est plus complexe que cela. En gros, cela veut dire que la relation obtenue ici est assez bonne pour des galaxies à moins de 1 milliard d'années-lumière environ.)

Le lien entre le décalage et la distance peut être utilisé pour trouver la distance de galaxies très éloignées.

Exemple 14.2.1

Une raie spectrale ayant normalement une longueur d'onde de 500 nm a une longueur d'onde de 528 nm dans le spectre de la galaxie Cygnus A.

a) Quel est le décalage δ de la lumière reçue ?

Le décalage pour cette galaxie est

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\lambda'}{\lambda} \\ &= \frac{528nm}{500nm} \\ &= 1,054\end{aligned}$$

b) Quel était le facteur d'échelle de l'univers quand la lumière de cette galaxie a été émise ?

Le facteur d'échelle à l'émission était

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{a_e} \\ 1,054 &= \frac{1}{a_e} \\ a_e &= 0,9488\end{aligned}$$

c) Quelle est la distance de cette galaxie ?

La distance est

Version 1

$$\begin{aligned}z &= \frac{H_0}{c} D \\ 0,054 &= \frac{67,4 \frac{km/s}{Mpc}}{300\,000 \frac{km}{s}} \cdot D \\ D &= 240Mpc = 784Mal\end{aligned}$$

Version 2

$$z \approx \frac{D}{14,51Gal}$$

$$0,054 = \frac{D}{14,51Gal}$$
$$D = 784Mal$$

Évidemment, la distance trouvée par la loi de Hubble-Lemaître reste assez approximative. Par contre, c'est la seule façon qu'on a de connaitre la distance des galaxies qui sont tellement éloignées qu'il est impossible d'y voir des céphéides ou même des supernovas.

C'est exactement ce genre de calcul qui laissait croire que les quasars étaient très éloignés de la Terre. Quand on fit le spectre des premiers quasars au début des années 1960, on obtint des résultats surprenants. Personne ne reconnaissait les raies d'émission ou d'absorption du spectre ! En 1963, Maarten Schmidt se rend compte que ces spectres sont tout simplement très décalés vers le rouge. Par exemple, le spectre du quasar 3C 273 est décalé de 16 % (les longueurs d'onde sont 16 % plus grandes que les valeurs de longueurs d'onde normales). Avec un tel décalage de z = 0,16, on trouve que la lumière a été émise quand le facteur d'échelle de l'univers était de 0,862 et que la distance de la galaxie est de 2,36 Gal. (Ce n'est pas exactement la véritable distance parce qu'on sort un peu du domaine de validité de la formule de distance avec un z aussi grand, mais ça donne quand même une idée de l'énorme distance du quasar.)

La découverte de l'expansion par Hubble

Durant les années 20, l'étude de la relativité générale avait permis de déterminer qu'il devait y avoir un tel décalage proportionnel à la distance pour la quasi-totalité des modèles d'univers. Restait à voir si ce décalage existait vraiment.

On avait déjà un indice puisqu'on avait déjà commencé à mesurer le décalage spectral des nébuleuses spirales. En 1914, Vesto Slipher annonçait que la grande majorité des 12 nébuleuses spirales qu'il a examinées montre des spectres décalés vers le rouge. En 1925, il arrivait toujours à cette même conclusion avec un échantillon comprenant maintenant 40 nébuleuses. Toutefois, il aurait été difficile de confirmer les prévisions de la relativité puisqu'on ne connaissait pas la distance de ces nébuleuses spirales et qu'on ne savait même pas que ces nébuleuses étaient en fait des galaxies. (En plus, pratiquement tous les astronomes ignoraient les prévisions de la relativité.)

C'est seulement en 1925 qu'on se rend compte que ces nébuleuses spirales sont en fait d'autres galaxies quand Edwin Hubble parvient à calculer la distance de certaines d'entre elles grâce aux céphéides. Désormais, on pouvait comparer la distance des galaxies et leur décalage spectral. C'est Hubble lui-même qui se lance dans l'étude de cette comparaison en 1928. Étant un des rares astronomes à connaitre la cosmologie relativiste (du moins une partie), il veut vérifier si le décalage augmente effectivement avec la distance des galaxies.

En 1929, Hubble présente ce qu'il obtient avec 46 galaxies (dont 24 pour lesquelles il considère que la distance est assez certaine). Les données montrent que le décalage augmente bel et bien avec la distance. Hubble reste plutôt prudent et il n'interprète pas vraiment le résultat obtenu. En tout cas, il ne le présente pas comme une confirmation de la relativité, mais simplement comme une observation pouvant avoir plusieurs interprétations. La relativité n'est présentée que comme une possibilité parmi d'autres.

Durant la première moitié des années 1930, la grande majorité des astronomes arrivent à la conclusion qu'un univers en expansion est la meilleure explication aux résultats de Hubble. On venait de mettre en évidence que l'univers est en expansion.

14.3 LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Ce que permet d'obtenir la relativité

En relativité, la densité d'énergie (ou de matière, il n'y a pas de différence en relativité générale entre les deux selon la formule $E = mc^2$) et la pression déterminent comment va évoluer l'univers. En partant des équations de densité et de pression de ce qu'il y a dans l'univers (on peut mettre n'importe quoi si on veut), on obtient la valeur des éléments suivants en fonction du temps :

1. Le facteur d'échelle.
2. Le taux d'expansion de Hubble.
3. La courbure de l'univers.

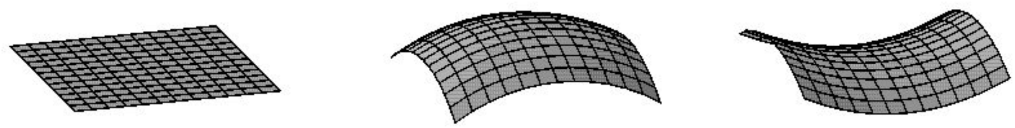
On a déjà expliqué, ce que sont le taux d'expansion de Hubble et le facteur d'échelle, mais pas la courbure de l'univers.

La courbure de l'univers

Il est assez difficile d'expliquer le concept de courbure directement pour un espace en trois dimensions. Pour nous simplifier la tâche, on va donc imaginer qu'on a affaire à un univers ayant uniquement deux dimensions. Dans cet univers, il y a des habitants bidimensionnels. Ces habitants perçoivent les deux dimensions de leur univers, mais ne peuvent percevoir la troisième dimension.

Cet espace en deux dimensions peut alors être représenté par une simple feuille. Nous montrerons ici des feuilles qui ont une certaine taille, donc un bord, ce qui pourrait laisser penser qu'il y a une fin à cet univers. Pour l'instant, voyez cette feuille comme simplement une partie d'un univers plus vaste. Nous reviendrons plus tard à la question de la taille de l'univers.

Il est possible que cette feuille soit courbée. Mathématiquement, il y a trois possibilités de courbure. On peut avoir une courbure négative, nulle ou positive.



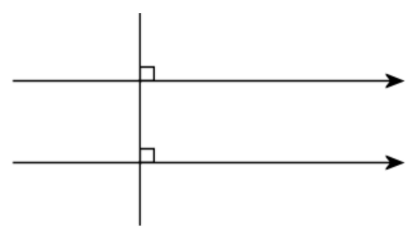
www.astro.ucla.edu/~wright/cosmo_03.htm

Un habitant de cet univers en deux dimensions ne peut percevoir la troisième dimension et il ne peut donc pas percevoir directement que son univers a une courbure dans la troisième dimension. Il existe cependant des façons pour que cet habitant puisse déterminer si la feuille de son univers a une courbure.

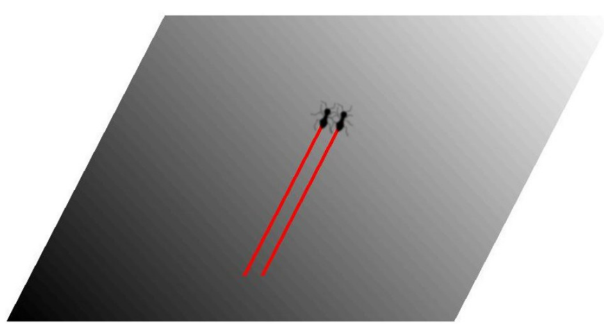
La courbure de l'univers doit être la même partout, car on suppose que l'univers est uniforme. On ne pourrait pas avoir une moitié de l'univers avec une courbure positive et une autre moitié avec une courbure négative.

Les lignes parallèles

Pour tracer des droites parallèles, on prolonge deux droites situées à une certaine distance l'une de l'autre et perpendiculaires à une autre droite.



On sait, selon nos études de géométrie, que si on prolonge ces deux droites, elles resteront toujours à la même distance l'une de l'autre et ne se croiseront jamais. Autrement dit, si deux insectes marchent en lignes droites en partant perpendiculairement à une ligne droite, ils marcheront côte à côte en restant toujours à la même distance l'un de l'autre.

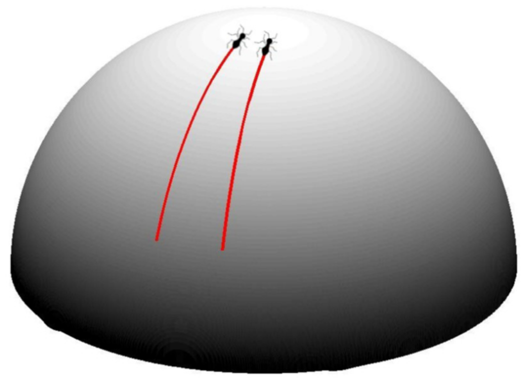

astronomy.nmsu.edu/geas/lectures/lecture28/slide03.html

Ça, c'est ce qui se produit dans un univers plat.

> *Dans un univers plat (courbure nulle), les droites parallèles restent toujours à la même distance l'une de l'autre et ne se croisent pas.*

C'est ce que nous avons appris en géométrie, mais c'est vrai uniquement pour un univers plat. Dans un monde où l'espace est courbé, le résultat est différent.

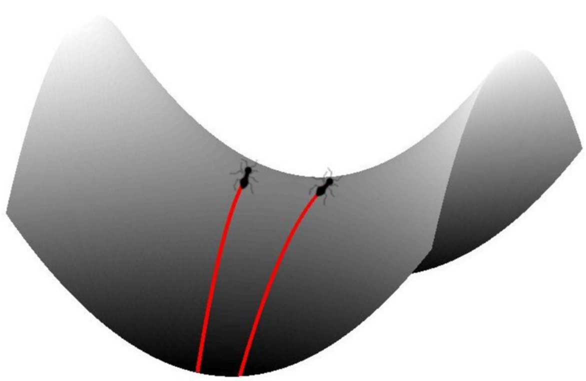
L'univers en deux dimensions à courbure positif est une sphère. Regardons ce qui arrive dans ce cas si nos deux insectes partent perpendiculairement à une droite dans ce monde.



astronomy.nmsu.edu/geas/lectures/lecture28/slide03.html

Les insectes pouvaient partir, par exemple d'une ligne identique à l'équateur à la surface de la Terre. En partant à 90° de cette ligne, les deux insectes se dirigent directement vers le pôle. Dans ce cas, les deux insectes s'approchent l'un de l'autre pendant leur déplacement pour finalement se rencontrer au pôle. On arrive donc à la conclusion suivante.

Dans un univers à courbure positive, les droites parallèles s'approchent l'une de l'autre et finissent par se croiser.



L'univers à deux dimensions à courbure négative ressemble à une selle de cheval ou à une croustille *Pringle*. Regardons ce qui arrive dans ce cas si nos deux insectes partent perpendiculairement à une droite dans ce monde.

astronomy.nmsu.edu/geas/lectures/lecture28/slide03.html

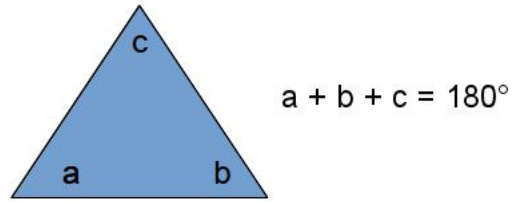
Dans ce cas, la forme de la surface amène les deux insectes à s'éloigner l'un de l'autre pendant qu'elles marchent sur la surface en partant à 90° d'une ligne droite.

Dans un univers à courbure négative, les droites parallèles s'éloignent l'une de l'autre.

L'habitant du monde à deux dimensions, qui ne peut pas percevoir directement la courbure de son monde, peut donc faire l'expérience suivante pour déterminer la courbure de son univers : il trace une ligne droite et trace deux autres lignes droites perpendiculaires à celle-ci. Il prolonge ces droites pour déterminer si elles s'approchent, restent à la même distance ou s'éloignent l'une de l'autre. Si elles s'approchent l'une de l'autre, il vit dans un monde à courbure positive, si elles restent à la même distance l'une de l'autre, il vit dans un monde plat et si elles s'éloignent l'une de l'autre, il vit dans un monde à courbure négative.

<u>*Les triangles*</u>

On sait tous que la somme des angles d'un triangle est de 180°.

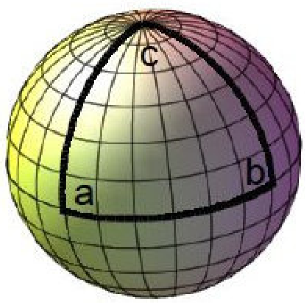


Cependant, ce résultat n'est valide que dans un monde plat.

> *Dans un univers plat (courbure nulle), la somme des angles d'un triangle est de 180°.*

$$a + b + c = 180°$$

La situation est bien différente dans un univers courbé. Regardons ce qui arrive si on trace un triangle sur une surface ayant une courbure positive.



Prenons un triangle un peu particulier pour commencer. Le triangle de la figure a un côté correspondant à l'équateur de la sphère. Aux points a et b, distants d'un quart de la circonférence, deux lignes partent perpendiculairement à l'équateur pour aller se rencontrer au pôle.

Puisque les lignes allant vers le pôle partent perpendiculairement à l'équateur, les angles a et b sont de 90°. Comme les points a et b sont distants d'une distance égale au quart de la circonférence, l'angle c au pôle est également égale à 90°. La somme des angles est donc de 270°.

En fait, sur une surface à courbure positive, on a toujours la situation suivante :

> *Dans un univers à courbure positive, la somme des angles d'un triangle est supérieure à 180°*

$$a + b + c > 180°$$

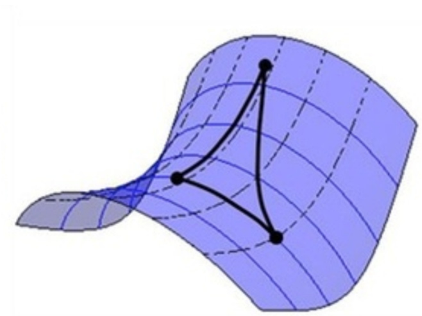
(Voici, en passant, un petit théorème intéressant : L'aire du triangle sur la sphère est donnée par

$$\left(a+b+c-\pi\right)R^2$$

où les angles *a, b* et *c* sont en radians. On voit donc que l'aire dépend de combien la somme des angles $a + b + c$ dépasse 180° (π rad). Plus la somme des angles dépasse 180°, plus l'aire du triangle est grande.)

On pourrait argumenter que cette forme n'est pas vraiment un triangle puisque les côtés sont courbés (ils suivent la courbure de la sphère). Cependant, il faut se rappeler que l'habitant d'un tel monde à deux dimensions ne perçoit pas la troisième dimension. Comme la ligne est courbée dans cette troisième dimension, l'habitant ne perçoit pas cette courbure. Pour lui, les trois côtés du triangle sont des lignes parfaitement droites. La somme des angles plus grande que 180° est l'indice lui permettant de se rendre compte qu'il vit dans un monde à courbure positive.

Dans un monde à courbure négative, c'est l'inverse qui se produit.



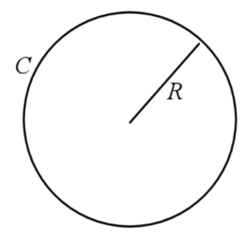
www.quora.com/Physics/What-does-it-mean-that-the-universe-does-not-have-positive-curvature-but-is-flat

Dans un univers à courbure négative, la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180°

$$a + b + c < 180°$$

Notre habitant peut donc déterminer la courbure de son univers ainsi : il trace un grand triangle dans son univers et mesure l'angle aux trois sommets, puis fait la somme de ces angles. Si la somme est de 180°, il vit dans un monde plat. Si la somme est supérieure à 180°, il vit dans un monde à courbure positive et si la somme est inférieure à 180°, il vit dans un monde à courbure négative.

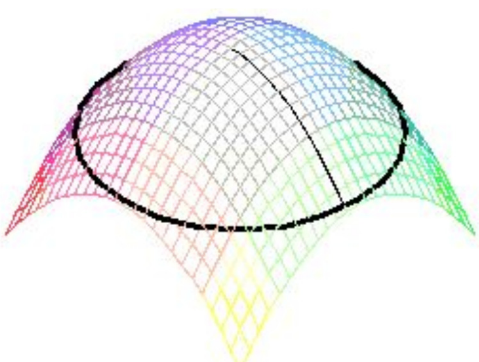
<u>*La circonférence d'un cercle*</u>



Dans un monde plat, la circonférence d'un cercle est égale à 2π fois le rayon.

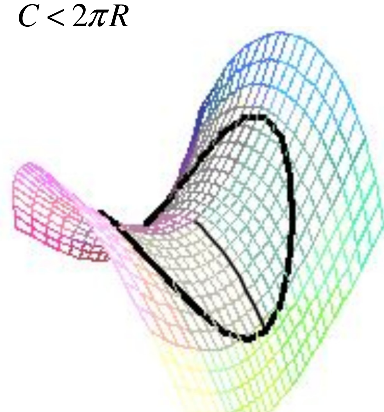
$$C = 2\pi R$$

Cela n'est vrai toutefois que pour un univers plat.



Dans un univers à courbure positive, on voit que la courbure allonge le rayon par rapport à la circonférence. Cela signifie donc que

$$C < 2\pi R$$



Dans un univers à courbure négative, on voit que la courbure allonge le rayon par rapport à l'univers plat, mais elle allonge encore plus la circonférence. Cela signifie donc que dans ce cas

$$C > 2\pi R$$

www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-sphericon2

Notez encore une fois que notre habitant ne perçoit pas que la circonférence monte et descend dans l'univers à courbure négative. Ces oscillations se font dans la troisième dimension, qu'il ne perçoit pas. Pour lui, la circonférence du cercle reste toujours à la même hauteur (en fait, une hauteur nulle puisqu'il n'y a pas de hauteur dans ce monde).

Voici donc comment notre habitant de ce monde en deux dimensions pourrait déterminer la courbure de son espace. Il trace un immense cercle et mesure la circonférence et le rayon de ce cercle. Si la circonférence vaut exactement 2π fois le rayon, il vit dans un univers plat. Si la circonférence vaut moins que 2π fois le rayon, il vit dans un univers à courbure positive et si la circonférence vaut plus que 2π fois le rayon, il vit dans un univers à courbure négative.

<u>Notre monde en trois dimensions</u>

Pour nous, des habitants d'un monde en trois dimensions, nous ne pouvons percevoir directement la courbure de l'univers, tout comme l'habitant du monde en deux dimensions ne pouvait percevoir la courbure de son monde. Cette courbure pourrait être représentée dans une quatrième dimension que l'on ne perçoit pas, mais cela n'est pas obligatoire. D'ailleurs, on ne mentionne pas de telle 4^e dimension spatiale en relativité.

Par contre, nous pouvons faire certains tests qui vont nous permettre de déterminer la courbure de notre univers.

- On peut tracer des lignes parallèles. Si elles s'approchent l'une de l'autre, on vit dans un monde à courbure positive, si elles restent à la même distance l'une de l'autre, on vit dans un monde plat et si elles s'éloignent l'une de l'autre, on vit dans un monde à courbure négative.

- On peut tracer un grand triangle dans l'univers. Si la somme des angles du triangle est de 180°, on vit dans un monde plat. Si la somme est supérieure à 180°, on vit dans un monde à courbure positive et si la somme est inférieure à 180°, on vit dans un monde à courbure négative.

- On peut tracer un grand cercle et mesurer le rayon et la circonférence. Si la circonférence vaut exactement 2π fois le rayon, on vit dans un univers plat. Si la circonférence vaut moins que 2π fois le rayon, on vit dans un univers à courbure positive et si la circonférence vaut plus que 2π fois le rayon, on vit dans un univers à courbure négative.

On dit que Gauss aurait tenté de faire le test du triangle en 1818. Des arpenteurs auraient été chargés de mesurer la distance exacte entre les sommets de 3 montagnes assez éloignées (la plus grande distance aurait été de 107 km). Avec ces mesures, Gauss aurait calculé que la somme des angles du triangle était de 180° et conclu qu'il vivait dans un univers plat. En fait, c'est un mythe et Gauss n'a jamais fait cela. Gauss a bien fait faire l'arpentage, mais tout ça n'avait rien à voir avec la mesure de la courbure de l'espace.

L'équation de la relativité générale

Pour déterminer comment évolue le facteur d'échelle de l'univers en fonction du temps, il faut résoudre les équations de la relativité générale. Toute la relativité générale est basée sur l'équation suivante.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}$$

Cette équation est d'un niveau assez élevé, mais on peut quand même mentionner que $R_{\mu\nu}$ et R sont reliés à la courbure de l'espace. De l'autre côté de l'équation, $T_{\mu\nu}$ est une matrice dans laquelle on retrouve la densité d'énergie et la pression. Cette équation nous permet donc de trouver la courbure de l'espace à partir de la densité et de la pression.

En supposant que l'univers est homogène, on arrive, avec beaucoup d'étapes que nous ne donnerons pas ici vu le niveau de ces mathématiques, aux équations suivantes.

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_m - H^2$$

$$-H^2 - \frac{2}{3} \frac{dH}{dt} - \frac{1}{3} \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} P$$

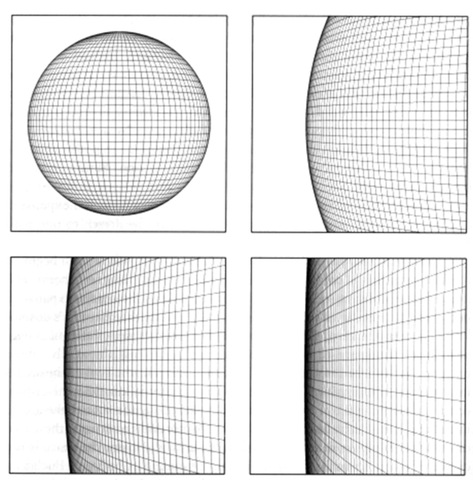
Dans ces équations, a est le facteur d'échelle, ρ_m est la densité de matière, H est le taux d'expansion de Hubble, qui peut varier en fonction du temps, et P est la pression de ce qu'il y a dans l'univers.

La valeur de k dépend de la courbure de l'univers. La courbure de l'univers est donnée par

$$R = \frac{kc^2}{a^2}$$

Si k est nul, la courbure est nulle. Si k est positif, la courbure est positive et si k est négatif, la courbure est négative.

On remarque aussi que la courbure dépend du facteur d'échelle. Plus le facteur d'échelle est grand, plus la courbure diminue et s'approche de 0. Reprenons notre monde à deux dimensions pour illustrer cela et imaginons que la courbure est positive. Avec une courbure positive, cet univers à deux dimensions correspond à la surface d'une sphère. Quand le facteur d'échelle augmente, la sphère grandit. L'image de droite nous montre cette sphère qui grandit à mesure que le facteur d'échelle grandit.



abyss.uoregon.edu/~js/21st_century_science/lectures/lec25.html

On remarque alors que la surface de la sphère est de moins en moins courbée à mesure que la sphère grandit. Cela montre bien que la courbure s'approche de 0 à mesure que le facteur d'échelle augmente.

Nos deux équations sont les deux équations d'un univers homogène que nous utiliserons pour déterminer l'évolution de l'univers selon la relativité. Il ne reste qu'à choisir ce qu'on va mettre dans notre univers.

14.4 LES UNIVERS COMPOSÉS DE MATIÈRE FROIDE

Les conditions particulières de ces modèles

Dans ces modèles d'univers, on considère que la matière est répartie uniformément dans l'univers et qu'elle est froide, assez froide en fait pour que la pression faite par cette matière soit négligeable. Rappelons nos deux équations.

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_m - H^2$$
$$-H^2 - \frac{2}{3}\frac{dH}{dt} - \frac{1}{3}\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}P$$

L'absence de pression rend notre deuxième équation inutile. On devra donc résoudre uniquement l'équation

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_m - H^2$$

Pour résoudre cette équation, il faut savoir comment change la densité de matière en fonction du facteur d'échelle. Puisque la densité est égale à la masse divisée par le volume, on va la calculer en prenant un cube de dimension L x L x L.

$$\rho_m = \frac{m}{L^3}$$

Or, cette matière se retrouve dans un cube de plus en plus grand à mesure que l'univers prend de l'expansion. En fait, les dimensions du cube varient avec le facteur d'échelle et on a

$$L = aL_0$$

où a est le facteur d'échelle et L_0 est la dimension du cube en ce moment. On a donc

$$\begin{aligned}\rho_m &= \frac{m}{L^3}\\ &= \frac{m}{(aL_0)^3}\end{aligned}$$

$$= \frac{m}{a^3 L_0^3}$$

$$= \frac{1}{a^3} \frac{m}{L_0^3}$$

La masse divisée par les dimensions actuelles du cube donne la densité actuelle de la matière.

$$\rho_{m0} = \frac{m}{L_0^3}$$

On a alors

Variation de la densité de matière avec l'expansion de l'univers

$$\rho_m = \frac{1}{a^3} \rho_{m0}$$

Notre équation devient donc

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{a^3} \rho_{m0} - H^2$$

Ensuite, on utilise

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

pour arriver à

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{a^3} \rho_{m0} - \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2$$

En isolant la dérivée, on arrive à

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{m0}}{3} \frac{1}{a} - kc^2}$$

La solution de cette équation dépend du signe de k et donc de la courbure de l'univers (qui, on le verra bientôt, dépend de la densité de matière).

Les solutions de cette équation furent obtenues par Friedmann en 1922 et par George Lemaitre en 1927 (qui ne connaissait pas les travaux de Friedmann).

14.5 LE MODÈLE D'EINSTEIN-DE SITTER

Commençons par développer le modèle le plus simple, c'est-à-dire un univers plat dominé par de la matière froide. Ce modèle simple nous permettra de voir comment on trouve certains résultats en cosmologie. Pour les autres modèles, on donnera uniquement les résultats importants, sachant que les méthodes pour y arriver sont identiques à celles présentées ici.

Ce modèle fut développé en premier par Friedmann en 1922. Toutefois, il fut davantage exploré par Einstein et de Sitter en 1929. C'est pour cela qu'il est connu sous le nom de Einstein-de Sitter

La densité critique

Si la courbure de l'univers est nulle, on a $k = 0$ et notre équation

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_m - H^2$$

devient

$$0 = \frac{8\pi G}{3}\rho_m - H^2$$

On remarque premièrement que cet univers doit avoir une densité très précise qui dépend du taux d'expansion de Hubble. On peut trouver la densité actuelle de l'univers à partir de la valeur actuelle du taux d'expansion.

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_{m0} = H_0^2$$

$$\rho_{m0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\rho_{m0} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \\ &= \frac{3\left(2,18\times10^{-18}s^{-1}\right)^2}{8\pi\left(6,674\times10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\right)} \\ &= 8,53\times10^{-27}\,\frac{kg}{m^3}\end{aligned}$$

Puisqu'un proton a une masse de m_p = 1,673 x 10^{-27} kg, cette densité est de

$$\rho_{m0} = 5,10\,\frac{m_p}{m^3}$$

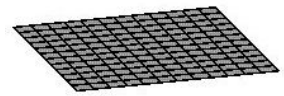
Cette valeur de densité moyenne de l'univers est appelée la densité critique actuelle de l'univers qu'on va noter ρ_{c0}.

Densité critique de l'univers

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$\rho_{c0} = 8,53\times 10^{-27} \tfrac{kg}{m^3} = 5,10 \tfrac{m_p}{m^3} \qquad \text{(si } H_0 = 67,4 \text{ km/s/Mpc)}$$

L'univers empli de matière froide a une courbure nulle uniquement si la densité moyenne actuelle est égale à cette densité critique.



Courbure nulle

Le facteur d'échelle en fonction du temps

On peut ensuite trouver le facteur d'échelle en fonction du temps en faisant la solution de l'équation

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_{m0}}{3}\frac{1}{a} - kc^2}$$

Avec $k = 0$ et une densité égale à la densité critique, on arrive à

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_{c0}}{3}\frac{1}{a}}$$

Cette équation est assez facile à résoudre. En réorganisant, on arrive à

$$\sqrt{a}da = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_{c0}}{3}}dt$$

En intégrant de chaque côté, on arrive à

$$\int \sqrt{a}da = \int \sqrt{\frac{8\pi G\rho_{c0}}{3}}dt$$

$$\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_{c0}}{3}}t + Cst$$

Cette équation permet au facteur d'échelle de prendre une valeur nulle (c'est le cas ici si $t = 0$ et $Cst = 0$). Une valeur nulle du facteur d'échelle correspond à la naissance de l'univers, sur lequel nous reviendrons au chapitre suivant. Si on prend que $t = 0$ à la naissance de l'univers ($a = 0$), cela veut dire que la constante d'intégration est nulle.

En isolant a on arrive à

$$a = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8\pi G\rho_{c0}}{3}}\ t\right)^{\frac{2}{3}}$$

Puisque

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

on peut écrire notre solution sous la forme suivante.

$$a = \left(\frac{3}{2} H_0 \ t\right)^{\frac{2}{3}}$$

Avec la valeur de H_0, on arrive à

$$a = \left(\frac{3}{2}\left(6,89 \times 10^{-2} Ga^{-1}\right) t\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$a = \left(\frac{t}{9,67Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Notre solution est donc

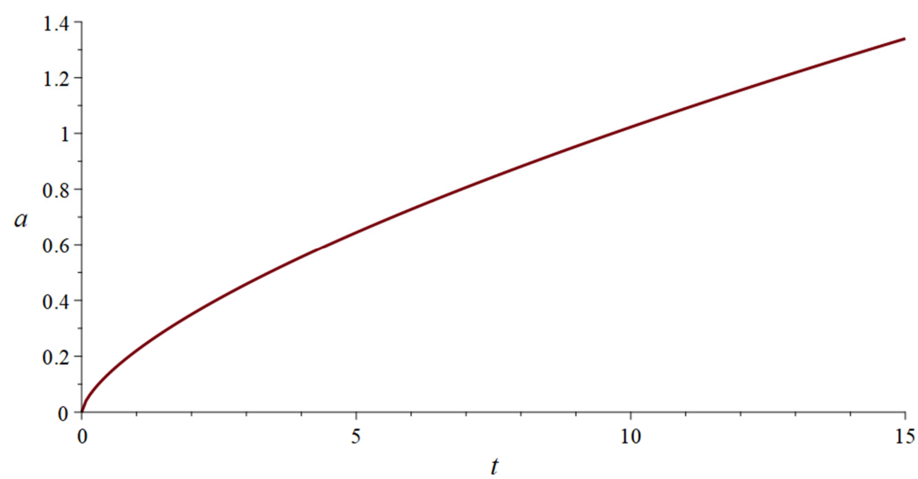
Facteur d'échelle en fonction du temps pour le modèle d'Einstein-de Sitter

$$a = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8\pi G \rho_{m0}}{3}} \ t\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$a = \left(\frac{3}{2} H_0 t\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$a = \left(\frac{t}{9,67Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$ avec H_0 = 67,4 km/s/Mpc

Voici un graphique montrant la valeur du facteur d'échelle en fonction du temps (en Ga) dans le modèle d'Einstein-de Sitter avec H_0 = 67,4 km/s/Mpc.



L'âge de l'univers

Puisque l'univers a maintenant un facteur d'échelle de 1, la valeur actuelle de t, qu'on va appeler t_A pour *temps actuel,* est

$$a = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$1 = \left(\frac{3}{2}H_0 t_A\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t_A = \frac{2}{3H_0}$$

Puisque l'univers est né à $t = 0$, cette valeur est l'âge de l'univers.

Âge de l'univers pour le modèle d'Einstein-de Sitter

$$t_A = \frac{2}{3H_0}$$

$$t_A = 9{,}67Ga$$ avec H_0 = 67,4 km/s/Mpc

L'univers a donc 9,67 milliards d'années si c'est le modèle d'Einstein-de Sitter qui le décrit correctement.

On peut donc écrire ainsi la formule du facteur d'échelle en fonction du temps.

$$a = \left(\frac{t}{t_A}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Exemple 14.5.1

On sait que le décalage des raies du quasar 3C 273 est de 1,16 et que le facteur d'échelle de l'univers était de 0,862 quand la lumière a été émise. Depuis combien de temps voyage cette lumière si on est dans un univers de Einstein-de Sitter ?

L'âge de l'univers à l'émission était

$$a = \left(\frac{t}{9{,}67Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$0{,}862 = \left(\frac{t}{9{,}67Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$0{,}862^{\frac{3}{2}} = \frac{t}{9{,}67Ga}$$

$$0{,}800 = \frac{t}{9{,}67Ga}$$

$$t = 7,74Ga$$

Comme l'âge de l'univers est maintenant de 9,67 Ga, cette lumière a voyagé durant

$$\begin{aligned}\Delta t &= 9,67Ga - 7,74Ga \\ &= 1,93Ga\end{aligned}$$

Notez qu'au départ, Hubble avait obtenu une valeur du taux d'expansion beaucoup plus grande, de l'ordre de 500 km/s/Mpc, parce qu'il avait confondu deux types d'étoiles variables. Avec une telle valeur, l'âge de l'univers est de seulement 1,3 milliard d'années. Il semblait y avoir un formidable désaccord avec l'âge de la Terre qui est de 4,5 milliards d'années (quoiqu'à cette époque, on l'estimait plutôt aux environs de 2 milliards d'années). Comme la Terre ne pouvait pas être plus vieille que l'univers, on explora alors d'autres modèles d'univers (comme on le verra).

Les erreurs de mesure de distance des galaxies ne sont corrigées qu'en 1952 par Walter Baade. Avec la nouvelle calibration des distances, Allan Sandage obtient, en 1958, une valeur du taux d'expansion de Hubble se situant entre 50 et 100 km/s/Mpc, donnant un âge se situant entre 6,5 et 13 milliards d'années (avec le modèle d'Einstein-de Sitter). On obtenait alors un âge de l'univers beaucoup plus plausible.

Toutefois, le problème persistait. À la fin des années 1990, on obtenait un âge de l'univers d'environ 10 milliards d'années avec le modèle d'Einstein-de Sitter alors que les plus vieilles étoiles de l'univers semblaient avoir près de 12 milliards d'années. Toutefois, on ne s'en faisait pas tant que ça. La valeur du taux d'expansion de Hubble était encore plutôt imprécise (entre 50 et 85 km/s/Mpc en 1996) et les modèles donnant l'évolution des étoiles, qui permettaient de déterminer l'âge, n'étaient peut-être pas parfaits.

Le taux d'expansion de Hubble en fonction du temps

Puisque

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$$

Le taux d'expansion de Hubble pour le modèle d'Einstein-de Sitter est

$$\begin{aligned}H &= a^{-1}\frac{da}{dt} \\ &= \left(\left(\frac{t}{t_A}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{t_A}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{t}{t_A}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{t_A}\right)^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{t}{t_A}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{2}{3}\left(\frac{t}{t_A}\right)^{\frac{-1}{3}}\left(\frac{1}{t_A}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{t}{t_A}\right)^{-1}\left(\frac{1}{t_A}\right)$$

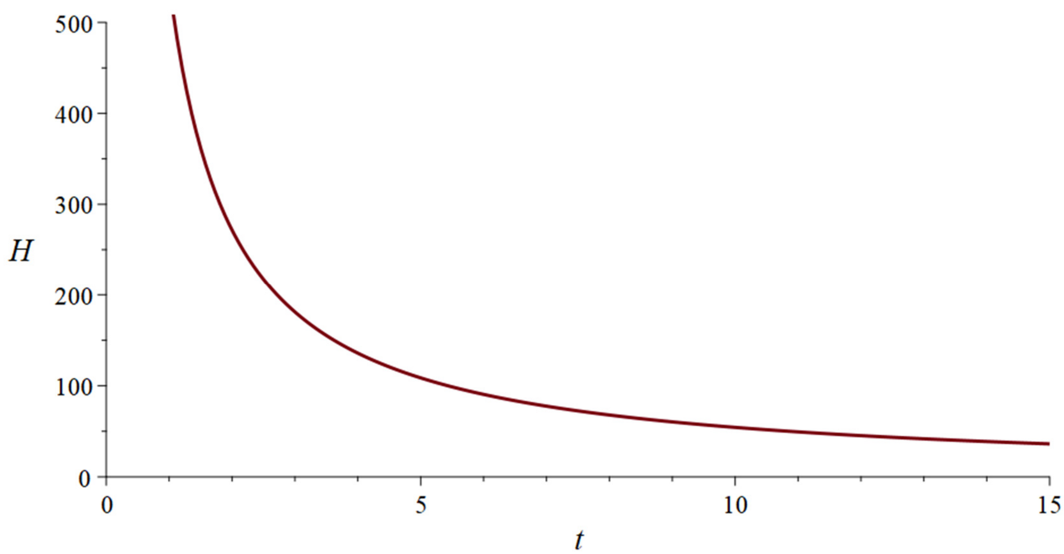
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{t_A}{t}\right)\left(\frac{1}{t_A}\right)$$

Ce qui donne

Taux d'expansion de Hubble en fonction du temps pour le modèle d'Einstein-de Sitter

$$H = \frac{2}{3t}$$

Ainsi, dans ce modèle, la valeur du taux d'expansion de Hubble diminue avec le temps pour atteindre 67,4 km/s/Mpc à un âge de 9,67 Ga et ensuite s'approcher de 0.

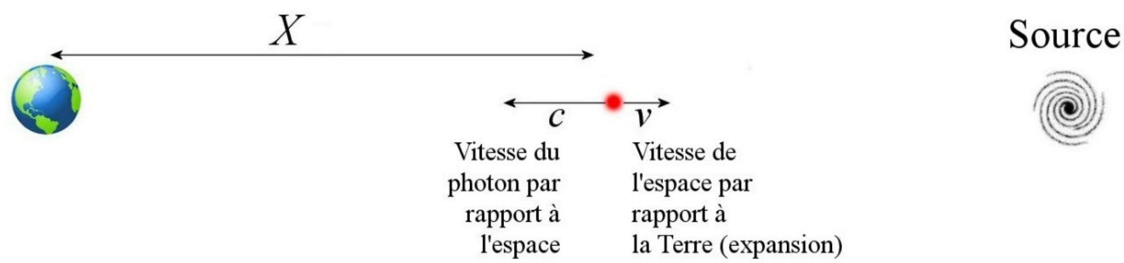


La distance parcourue par un photon durant un certain temps

Supposons qu'une source très distante envoie un photon vers la Terre. Évidemment, ce photon se déplace dans l'espace à la vitesse de la lumière.

Toutefois, ce photon est aussi entrainé par l'expansion de l'univers. Prenons une analogie pour illustrer l'effet de l'expansion. Imaginons que l'univers est empli d'eau et que le photon est comme un poisson nageant vers la Terre à une certaine vitesse. L'expansion de l'univers fait alors la même chose qu'un courant s'opposant au mouvement du photon vers la Terre. Plus on est loin de la Terre, plus la vitesse de ce courant est grande. La vitesse totale du poisson vers la Terre est donc plus petite que s'il n'y avait pas de courant. En fait, la vitesse du poisson est égale à sa vitesse de nage moins la vitesse du courant s'opposant à son mouvement.

La situation est similaire pour le photon. Il se dirige vers nous à la vitesse de la lumière, mais l'expansion de l'univers lui donne aussi une vitesse s'opposant à son mouvement vers la Terre.



On a donc que

$$\frac{dX}{dt} = -(c - v)$$

où X est la distance entre le photon et la Terre. (La dérivée est négative puisque la valeur de X diminue.)

La vitesse d'expansion augmente selon la formule $v = HX$ en accord avec la loi de Hubble-Lemaître. On a donc

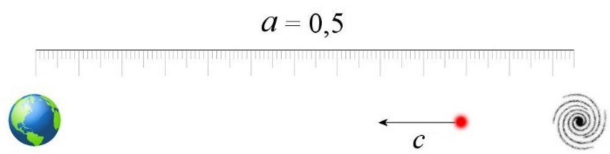
$$\frac{dX}{dt} = -(c - HX)$$

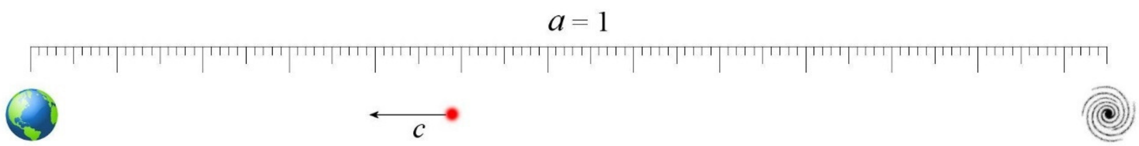
Ensuite, on a vu que la valeur de H change en fonction du temps selon $H = 2/3t$. On a donc

$$\frac{dX}{dt} = -\left(c - \frac{2X}{3t}\right)$$

Il ne reste, dans cette équation, que les variables X et t. On peut alors isoler X pour connaitre la distance entre le photon et la Terre en fonction du temps. Ça semble simple, mais ce ne l'est pas tant que ça, car nous avons affaire à une équation différentielle. Pour ceux qui feront les cours de calcul avancé à la prochaine session, ce sera un jeu d'enfant de résoudre cette équation en la rendant exacte avec un facteur intégrant.

On peut utiliser une autre approche pour trouver plus facilement la distance de la source. Pour y arriver, on va utiliser le système de coordonnées d. On se rappelle que ce système de coordonnées grandit avec l'univers, ce qui fait que les objets ont toujours les mêmes coordonnées, même si l'univers prend de l'expansion. Voici, par exemple, l'axe des x qui mesure la distance d quand le facteur d'échelle est de 0,5 et de 1.





La distance entre la Terre et le photon mesurée avec la graduation d sera notée x alors que celle mesurée avec la graduation D, qui mesure la véritable distance, est notée X.

La vitesse de la lumière est toujours la même. Supposons qu'elle parcourt une certaine distance ΔX durant le temps Δt. On doit alors avoir

$$c = \frac{\Delta X}{\Delta t}$$

Ainsi, la distance mesurée sur la graduation d sera $\Delta X = a\ \Delta x$. On a donc

$$c = \frac{a\Delta x}{\Delta t}$$
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{c}{a}$$

Ainsi, si le facteur d'échelle est de 0,5, x change au rythme de 6×10^8 m/s. C'est normal que ça change deux fois plus vite que normalement parce que l'axe donnant la valeur de x est comprimé par rapport aux vraies distances de sorte que les graduations sont deux fois plus près. Si on prend un temps très petit, on arrive à

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{a}$$

La distance x parcourue par le photon durant le temps dt est donc de

$$dx = \frac{c}{a} dt$$

En intégrant de chaque côté, on arrive à

Distance parcourue par un photon, mesurée avec l'échelle *d*

$$x = \int \frac{c}{a} dt$$

La distance d'une source lumineuse

En prenant des bornes d'intégration allant du temps d'émission du photon (t_e) jusqu'au temps de réception du photon sur Terre (t_r), on trouve la distance parcourue par le photon, mesurée avec la graduation *d,* entre la source et la Terre. Cette distance est évidemment la distance de la source mesurée avec la graduation *d*, qui est la distance actuelle de la source. On a donc

Distance actuelle d'une source lumineuse

$$d = \int_{t_e}^{t_r} \frac{c}{a} dt$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} d &= \int_{t_e}^{t_r} \frac{c}{a} dt \\ &= \int_{a_e}^{a_r} \frac{c}{a} \frac{dt}{da} da \end{aligned}$$

Pour le modèle d'Einstein-de Sitter, on a

$$a = \left(\frac{t}{t_A} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t = t_A a^{3/2}$$

$$dt = \frac{3}{2} a^{1/2} t_A da$$

On arrive donc à

$$\begin{aligned} d &= \int_{a_e}^{a_r} \frac{c}{a} \frac{dt}{da} da \\ &= \int_{a_e}^{a_r} \frac{c}{a} \frac{\frac{3}{2} a^{1/2} t_A da}{da} da \\ &= \frac{3}{2} c t_A \int_{a_e}^{a_r} a^{-1/2} da \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

Distance actuelle d'une source lumineuse dans le modèle d'Einstein-de Sitter

$$d = 3ct_A \left(\sqrt{a_r} - \sqrt{a_e} \right)$$

$$d = 29{,}01 Gal \cdot \left(\sqrt{a_r} - \sqrt{a_e} \right)$$ (Puisque t_A = 9,67 Ga)

On sait que quand on multiplie un temps en années par la vitesse de la lumière, on obtient une distance en année-lumière. Ainsi, dans la 2e équation, on a

$$3ct_A = 3 \cdot c \cdot 9{,}67Ga = 29{,}01Gal$$

Il ne faut pas oublier que la valeur de *d* est la distance actuelle. Si on veut la véritable distance, il faut multiplier cette distance par le facteur d'échelle correspondant au moment où on veut savoir la distance.

Exemple 14.5.2

On sait que le décalage des raies du quasar 3C 273 est de 1,16 et que le facteur d'échelle de l'univers était de 0,862 quand la lumière a été émise. Quelle était la distance de la source quand elle a émis la lumière qu'on reçoit aujourd'hui ?

Puisque le facteur d'échelle à la réception est de 1, la distance actuelle de ce quasar est de

$$\begin{aligned} d &= 29{,}01Gal \cdot \left(\sqrt{a_r} - \sqrt{a_e}\right) \\ &= 29{,}01Gal \cdot \left(1 - \sqrt{0{,}862}\right) \\ &= 2{,}08Gal \end{aligned}$$

(Notez qu'on avait obtenu 2,36 Gal comme approximation précédemment)

La distance au moment de l'émission était donc de

$$\begin{aligned} D_e &= 0{,}862 \cdot 2{,}08Gal \\ &= 1{,}79Gal \end{aligned}$$

On voit que le quasar s'est éloigné de 290 millions d'années-lumière pendant que sa lumière s'est dirigée vers nous.

Exemple 14.5.3

La distance actuelle du quasar 3C 273 est de 2,08 Gal.

a) Dans combien de temps arrivera la lumière émise aujourd'hui par le quasar ?

Puisque la distance actuelle est de 2,08 Gal et que le facteur d'échelle à l'émission est de 1, on a

$$d = 29{,}01Gal \cdot \left(\sqrt{a_r} - \sqrt{a_e}\right)$$

$$2{,}08Gal = 29{,}01Gal \cdot \left(\sqrt{a_r} - \sqrt{1}\right)$$

$$a_r = 1{,}149$$

L'âge de l'univers à ce facteur d'échelle est

$$a = \left(\frac{t}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$1,149 = \left(\frac{t}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t = 11,90Ga$$

Comme la lumière est partie à t = 9,67 Ga, la durée de la trajectoire de la lumière est

$$\Delta t = 11,90Ga - 9,67Ga = 2,23Ga$$

La lumière arrivera donc dans 2,23 milliards d'années

b) Quelle sera la distance du quasar à ce moment ?

La distance sera

$$\begin{aligned} D &= ad \\ &= 1,149 \cdot 2,08Gal \\ &= 2,39Gal \end{aligned}$$

Exemple 14.5.4

Un quasar est actuellement à une distance de 20 Gal. À quel moment la lumière émise à t_e = 1 Ga est arrivé ou arrivera sur Terre ?

Quand l'univers avait seulement 1 milliard d'années, le facteur d'échelle était de

$$\begin{aligned} a_e &= \left(\frac{t}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{1Ga}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 0,220 \end{aligned}$$

On a donc

$$d = 29,01Gal \cdot \left(\sqrt{a_r} - \sqrt{a_e} \right)$$

$$20Gal = 29,01Gal \cdot \left(\sqrt{a_r} - \sqrt{0,220} \right)$$

$$a_r = 1,343$$

Le temps d'arrivée sera donc de

$$a = \left(\frac{t}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$1,343 = \left(\frac{t_r}{9,67Ga} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$t_r = 15,05Ga$$

On ne verra donc pas cette lumière bientôt puisque la lumière arrivera seulement dans 5,38 milliards d'années…

Lors de la réception, la distance de la source sera de

$$\begin{aligned} D &= ad \\ &= 1,343 \cdot 20Gal \\ &= 26,9Gal \end{aligned}$$

Distance d'une galaxie à partir du décalage

On peut facilement obtenir un lien exact entre le décalage des raies z et la distance actuelle. Comme on s'intéresse à la lumière reçue en ce moment dans ce cas, la distance est

$$d = 3ct_A \left(1 - \sqrt{a_e} \right)$$

Comme

$$a_e = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{1+z}$$

on a

Distance actuelle d'une source lumineuse à partir du décalage z dans le modèle d'Einstein-de Sitter

$$d = 3ct_A \left(1 - \sqrt{\frac{1}{1+z}} \right)$$

$$d = 29,01Gal \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{1}{1+z}} \right)$$ (Puisque $t_A = 9,67$ Ga)

C'est le lien exact (aucune approximation) entre la distance et le décalage des raies pour le modèle d'Einstein-de Sitter.

L'équation de la distance à partir de z semble passablement différente de l'approximation obtenue précédemment (valide quand z est petit).

$$z \approx \frac{H_0}{c} D$$

Mais si z est petit, alors la série de Taylor

$$\sqrt{\frac{1}{1+z}} \approx 1 - \tfrac{1}{2} z \qquad \text{(si } z \ll 1\text{)}$$

nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} d &\approx 3ct_A \left(1 - \left(1 - \tfrac{1}{2} z\right)\right) \\ &\approx \frac{3ct_A}{2} z \end{aligned}$$

Puisque

$$t_A = \frac{2}{3H_0}$$

on a

$$d \approx \frac{3c}{2} \frac{2}{3H_0} z$$

$$d \approx \frac{c}{H_0} z$$

$$z \approx \frac{H_0}{c} d$$

L'équation du modèle d'Einstein-de Sitter est donc en accord avec l'approximation obtenue précédemment. (On a d au lieu de D, mais ces deux valeurs sont pratiquement identiques si z est petit.)

Exemple 14.5.5

La galaxie HD1 est la galaxie connue pour laquelle le décalage est le plus grand (29 mai 2023). Son décalage est de z = 13,27. Quelle est la distance actuelle de cette galaxie (selon le modèle d'Einstein-de Sitter) ?

La distance est

$$\begin{aligned} d &= 29{,}01 Gal \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{1}{1+z}}\right) \\ &= 29{,}01 Gal \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{1}{1+13{,}27}}\right) \\ &= 21{,}33 Gal \end{aligned}$$

La lumière qu'on reçoit aujourd'hui de cette galaxie a été émise quand le facteur d'échelle était de 1/14,27 = 0,0701. La lumière a donc été émise quand la distance entre les galaxies était 14,27 fois plus petite qu'en ce moment. La galaxie était donc à seulement 1,49 Gal de nous à ce moment. C'était un univers beaucoup plus compact qu'aujourd'hui. La lumière a ensuite voyagé pendant 9,49 milliards d'années (selon le modèle d'Einstein-de Sitter) avant d'arriver sur Terre.

Distance entre la Terre et un photon émis par une galaxie lointaine

Examinons maintenant des graphiques montrant la distance d'un photon pendant son trajet vers la Terre pour des sources dont la lumière est reçue en ce moment sur Terre.

Comme on reçoit le photon en ce moment, le facteur d'échelle à la réception est 1. La distance d du photon est donc de

$$d = 29,01 Gal \left(1 - \sqrt{a}\right)$$

Comme on veut la véritable distance du photon, on doit multiplier cette distance par le facteur d'échelle, pour obtenir D. On obtient alors

$$D = 29,01 Gal \cdot a \left(1 - \sqrt{a}\right)$$

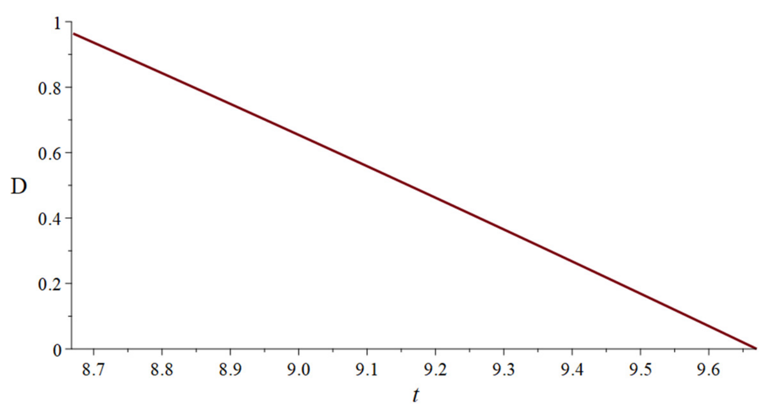
Puisque

$$a = \left(\frac{t}{9,67 Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$

La distance en fonction du temps est

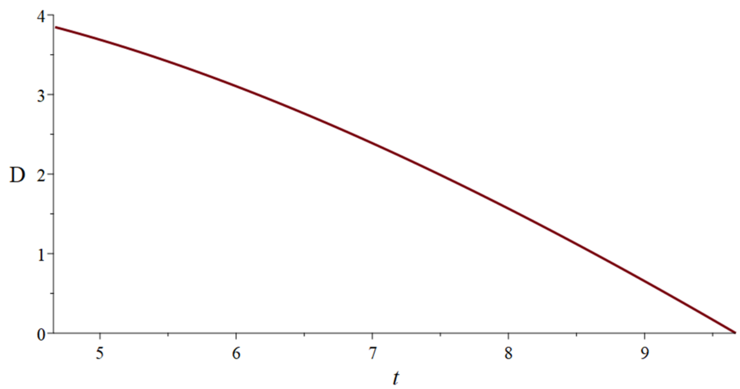
$$D = 29,01 Gal \cdot \left(\frac{t}{9,67 Ga}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \left(\frac{t}{9,67 Ga}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

On va donc examiner le graphique de cette fonction. Commençons par une source ayant émis sa lumière il y a un milliard d'années (donc à t_e = 8,67 Ga).



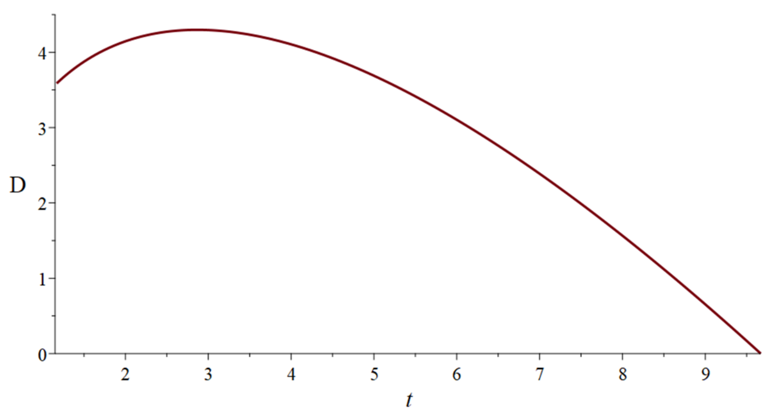
On remarque que le graphique forme pratiquement une droite. La distance d'une source ayant émis sa lumière il y a un milliard d'années (donc à t_e = 8,67 Ga) est pratiquement égale à 1 milliard d'années-lumière. Ça semble logique que la lumière prenne un milliard d'années pour arriver jusqu'à nous à partir d'une source située à 1 milliard d'années-lumière.

Prenons maintenant une source ayant émis sa lumière il y a 5 milliards d'années (donc à t_e = 4,67 Ga)



On remarque alors que la distance de la source était de 3,8 milliards d'années-lumière lors de l'émission. Sans expansion, cette lumière serait arrivée en 3,8 milliards d'années, mais avec l'expansion elle est arrivée en 5 milliards d'années. Ce fut un peu plus long parce que l'expansion s'est opposée au mouvement des photons vers la Terre, ce qui a retardé leur arrivée.

L'effet est encore plus grand si la lumière a été émise vers la Terre il y a 8,5 milliards d'années (donc à t_e =1,17 Ga).



La source était alors à seulement 3,6 milliards d'années-lumière. Ce qui semble surprenant, c'est de voir ces photons s'éloigner de la Terre au départ pour aller jusqu'à un peu plus de 4 milliards d'années-lumière. C'est que l'expansion de l'univers était si rapide à ce moment que l'expansion éloignait les photons situés à cette distance avec une vitesse plus grande que celle de la lumière. Même en se déplaçant vers la Terre dans l'espace à la vitesse de la lumière, les photons s'éloignaient de nous ! Pour reprendre l'analogie du poisson, c'est comme si la vitesse du courant était plus grande que la vitesse du poisson. Le poisson a beau nager vers la Terre, le courant l'éloigne. Cependant, le taux d'expansion de Hubble diminue avec le temps dans le modèle Einstein-de Sitter, de sorte que la vitesse d'expansion à l'endroit où se trouvaient les photons a fini par descendre en bas de la vitesse de la lumière (un peu avant t = 3 Ga) et les photons ont pu commencer à s'approcher de la Terre pour finalement arriver jusqu'à nous aujourd'hui.

La limite de l'univers observable

À la naissance de l'univers, le facteur d'échelle était de $a = 0$. C'est la plus petite valeur de a qu'on peut avoir. Ainsi, la plus grande distance qu'il peut y avoir entre nous et une source qu'on voit aujourd'hui est

$$d = 3ct_A\left(1-\sqrt{0}\right)$$

$$d = 3ct_A$$

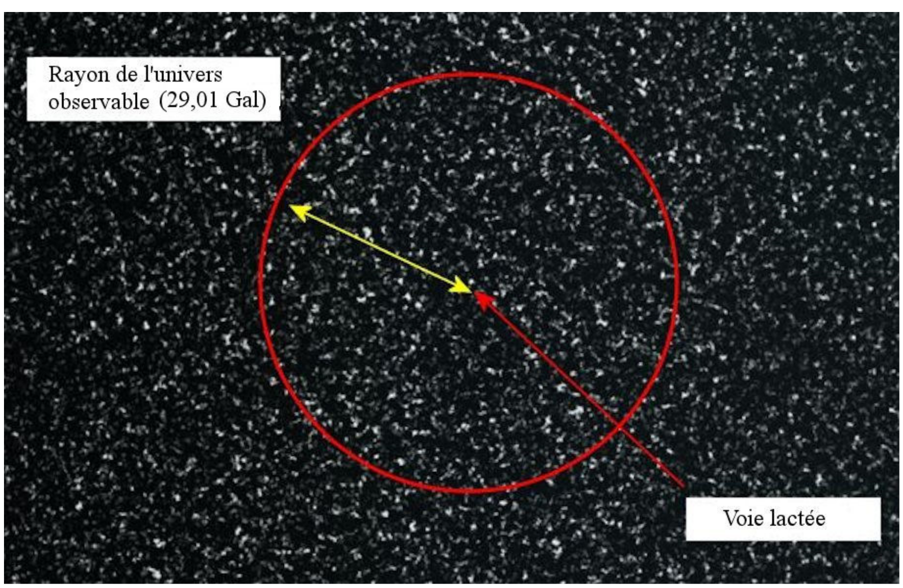
$$d = 29,01 Gal$$

Ainsi, on ne peut pas voir une source située à 30 milliards d'années-lumière de la Terre. Cette source est si loin que la lumière de cette source n'aurait pas encore eu le temps d'atteindre la Terre, même si elle a été émise à la naissance de l'univers. Il y a donc une limite à l'univers observable à partir de la Terre.

Rayon de l'univers observable selon le modèle d'Einstein - de Sitter

d = 29,01 Gal

En théorie, on peut voir tous les objets se situant à moins de 29,01 Gal de la Terre. Cette bulle représente notre univers observable.



Cet univers observable grandit continuellement. Prenons la formule générale pour trouver comment cet univers grandit. La distance de la source lors de l'émission de la lumière est

$$d = 3ct_A\left(\sqrt{a_r} - \sqrt{a_e}\right)$$

Si la lumière est émise le plus tôt possible, on a $a_e = 0$, et la distance parcourue par le photon est

$$d = 3ct_A\sqrt{a_r}$$

Mais puisque

$$a = \left(\frac{t}{t_A}\right)^{\frac{2}{3}}$$

on a

$$d = 3ct_A\left(\frac{t}{t_A}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Rayon de l'univers observable en fonction du temps selon le modèle d'Einstein – de Sitter

$$d = 3ct_A^{2/3}t_r^{1/3}$$

Ceci correspond à la distance actuelle de la galaxie qui sera à la limite de l'univers observable au moment t_r. La véritable distance à ce moment-là varie avec le facteur d'échelle. On a

$$\begin{aligned} D &= a_r d \\ &= a_r 3ct_A^{2/3}t_r^{1/3} \end{aligned}$$

Mais comme

$$a_r = \left(\frac{t_r}{t_A}\right)^{\frac{2}{3}}$$

on a

$$\begin{aligned} D &= a3ct_A^{2/3}t_r^{1/3} \\ &= \left(\frac{t_r}{t_A}\right)^{2/3} 3ct_A^{2/3}t_r^{1/3} \end{aligned}$$

Ce qui nous amène a

Rayon de l'univers observable en fonction du temps selon le modèle d'Einstein – de Sitter

$$D = 3ct_r$$

On remarque que la limite de l'univers observable grandit à trois fois la vitesse de la lumière. Quand l'univers aura 12 milliards d'années, on pourra voir des galaxies qui seront alors à moins 36 milliards d'années-lumière de la Terre.

Exemple 14.5.5

Dans combien de temps un quasar situé en ce moment à 40 Gal sera-t-il dans l'univers observable ?

Avec une distance de d = 40 Gal, le temps de réception de la lumière émise à t = 0 est

$$d = 3ct_A^{2/3}t_r^{1/3}$$
$$40Gal = 3c \cdot (9,67Ga)^{2/3} \cdot t_r^{1/3}$$
$$40Ga \cdot c = 3c \cdot (9,67Ga)^{2/3} \cdot t_r^{1/3}$$
$$40Ga = 3 \cdot (9,67Ga)^{2/3} \cdot t_r^{1/3}$$
$$t_r^{1/3} = 2,938Ga^{1/3}$$
$$t_r = 25,35Ga$$

Ce quasar entrera donc dans l'univers visible dans 15,68 milliards d'années.

Exemple 14.5.6

Quel sera le rayon de l'univers observable dans 3 milliards d'années ?

Le rayon se trouve avec

$$\begin{aligned} D &= 3ct_r \\ &= 3 \cdot c \cdot (12,67Ga) \\ &= 38,01Ga \cdot c \\ &= 38,01Gal \end{aligned}$$

En théorie, on finira par voir toutes les galaxies de l'univers puisque la taille de l'univers observable, mesurée avec la distance actuelle d, augmente continuellement selon la formule

$$d = 3ct_A^{2/3}t_r^{1/3}$$

Plus t_r avance, plus d augmente. Ainsi, on finira par voir toutes les galaxies, peu importe la valeur de leur distance actuelle.

14.6 LES MODÈLES DE FRIEDMANN

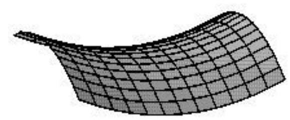
L'univers est décrit par le modèle d'Einstein-de Sitter uniquement si la densité de l'univers est exactement égale à la densité critique. Si la densité est différente (et qu'il ne contient rien d'autre que de la matière froide), il est décrit par un des deux modèles de Friedmann.

La densité est plus petite que la densité critique

On se rappelle la formule

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\frac{1}{a^3}\rho_{m0} - H^2$$

Quand la densité est égale à la densité critique, les deux termes de droite s'annulent mutuellement et la courbure kc^2/a^2 est nulle. Cependant, si la densité est plus petite que la densité critique, le premier terme de droite est plus petit que H^2 et les deux termes ne s'annulent plus. On obtient plutôt un résultat négatif et on a un univers possédant une courbure négative.



Courbure négative

On va écrire cette formule sous une forme un peu plus utile. Pour y arriver, on utilise le rapport entre la densité actuelle et la densité critique notée par le symbole Ω_{m0}.

$$\Omega_{m0} = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{c0}}$$

Pour l'univers ayant une courbure négative, on a $\Omega_{m0} < 1$. (Pour le modèle d'Einstein-de Sitter, on a $\Omega_{m0} = 1$). L'équation devient alors

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\frac{1}{a^3}\Omega_{m0}\rho_{c0} - H^2$$

Mais puisque

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

on a

$$\frac{kc^2}{a^2} = H_0^2\frac{1}{a^3}\Omega_{m0} - H^2$$

De plus, on doit aussi avoir que $a = 1$ quand $H = H_0$. Cela donne

$$\frac{kc^2}{1^2} = H_0^2 \frac{1}{1^3}\Omega_{m0} - H_0^2$$
$$kc^2 = H_0^2\left(\Omega_{m0} - 1\right)$$

L'équation de la relativité prend alors forme suivante.

$$\frac{H_0^2\left(\Omega_{m0} - 1\right)}{a^2} = H_0^2 \frac{1}{a^3}\Omega_{m0} - H^2$$

Cette équation mène alors à

$$H^2 = H_0^2\left(\frac{1}{a^3}\Omega_{m0} - \frac{\Omega_{m0} - 1}{a^2}\right)$$

et donc à

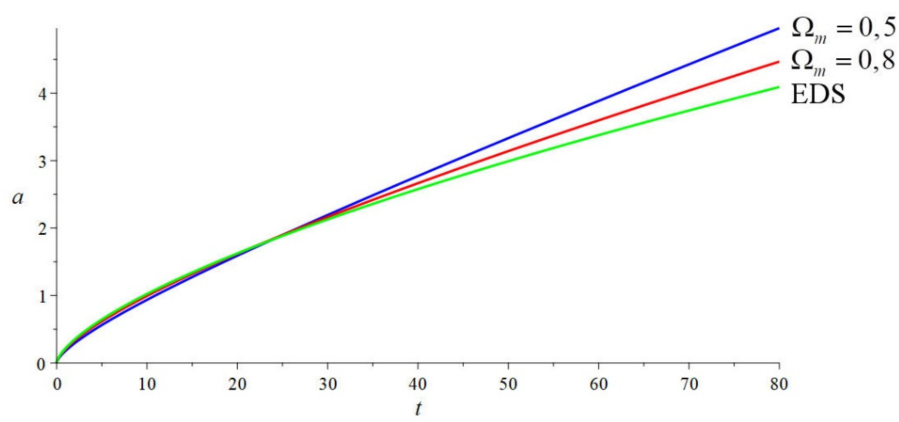
$$\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2\left(\frac{1}{a^3}\Omega_{m0} - \frac{\Omega_{m0} - 1}{a^2}\right)$$
$$\frac{da}{dt} = H_0\sqrt{\frac{1}{a}\Omega_{m0} - \left(\Omega_{m0} - 1\right)}$$

Ainsi, il faut intégrer l'équation suivante pour trouver la valeur de a en fonction du temps.

$$\frac{da}{\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a} - \left(\Omega_{m0} - 1\right)}} = H_0 dt$$

La solution de cette intégrale pour $\Omega_{m0} < 1$ existe, mais elle n'est pas facile à obtenir. (Voyez ce document pour voir la solution de cette équation http://physique.merici.ca/astro/Solutionouvert.pdf)

Voici le graphique du facteur d'échelle en fonction du temps pour le modèle de Friedmann avec $\Omega_m = 0{,}8$ et $\Omega_m = 0{,}5$ et un taux d'expansion de Hubble en ce moment de 67,4 km/s/Mpc.



Dans ces modèles, l'univers prend continuellement de l'expansion comme dans le modèle d'Einstein-de Sitter, mais avec un rythme différent. Dans les modèles de Friedmann avec une densité inférieure à la densité critique, la courbe de a en fonction du temps devient pratiquement une droite pour des valeurs de t élevée.

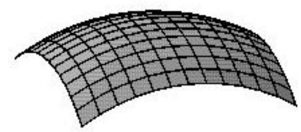
Si la densité était de 0,8 fois la densité critique, l'univers aurait un âge de 10,10 milliards d'années, alors que son âge serait de 10,93 milliards d'années si la densité était la moitié de la densité critique.

La densité est plus grande que la densité critique

Avec la formule

$$\frac{kc^2}{a^2}=\frac{8\pi G}{3}\frac{1}{a^3}\rho_{m0}-H^2$$

on voit que si la densité est plus grande que la densité critique, le premier terme de droite est plus grand que H^2 et les deux termes ne s'annulent plus. On obtient plutôt un résultat positif et on a un univers possédant une courbure positive.



Courbure positive

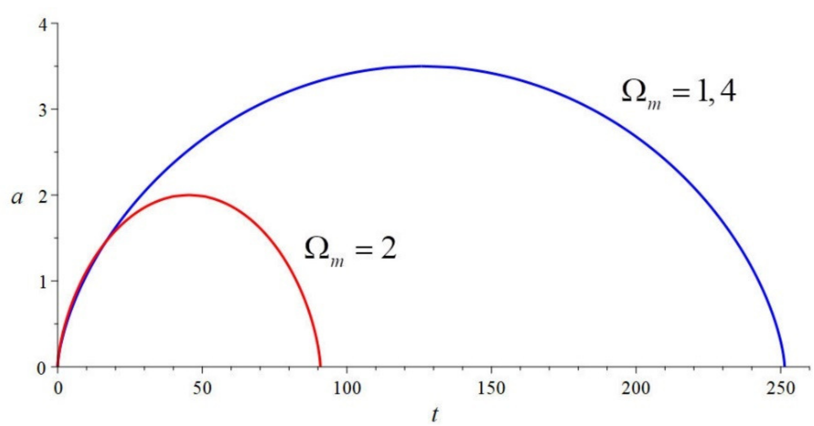
Pour cet univers ayant une courbure positive, on a $\Omega_m > 1$.

L'équation à résoudre reste la même,

$$\frac{da}{\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a}-(\Omega_{m0}-1)}}=H_0dt$$

mais la solution est un peu différente quand $\Omega_{m0} > 1$.
(Voyez ce document pour voir la solution de cette équation
http://physique.merici.ca/astro/Solutionferme.pdf)

Voici le graphique du facteur d'échelle en fonction du temps pour le modèle de Friedmann avec Ω_m = 1,4 et Ω_m = 2 et un taux d'expansion de Hubble en ce moment de 67,4 m/s/Mpc.



Si la densité est 1,4 fois plus grande que la densité critique, l'univers prend de l'expansion jusqu'à atteindre un facteur d'échelle de 3,5 quand l'âge de l'univers est de 125,5 milliards d'années. Puis le facteur d'échelle se met à diminuer et les galaxies commencent à se diriger les unes vers les autres. L'univers disparait après une vie de 251 milliards d'années quand le facteur d'échelle redevient nul. Avec une telle densité, l'univers aurait un âge de 8,96 milliards d'années.

Si la densité est 2 fois plus grande que la densité critique, l'univers prend de l'expansion jusqu'à atteindre un facteur d'échelle de 2 quand l'âge de l'univers est de 45,35 milliards d'années. Puis le facteur d'échelle se met à diminuer et les galaxies commencent à se diriger les unes vers les autres. L'univers disparait après une vie de 90,7 milliards d'années. Avec une telle densité, l'univers aurait un âge de 8,24 milliards d'années en ce moment.

Chose certaine, on peut difficilement imaginer que notre univers ait une densité plus grande que 10 fois la densité critique. Avec une telle densité, l'âge de l'univers serait d'à peine 5 milliards d'années, ce qui ne laisserait pas assez de temps pour que le Soleil se forme et brule de l'hydrogène pendant 4,5 milliards d'années.

Les univers qui reviennent ainsi à une valeur de $a = 0$ s'appellent des univers fermés. Ce modèle porte donc le nom de *modèle de Friedmann fermé*. La contraction de l'univers dans la deuxième moitié de sa vie amène toutes les galaxies à s'approcher les unes des autres jusqu'à ce que les distances entre les galaxies deviennent nulles. Cette mort de l'univers s'appelle le *Big Crunch.*

Les univers dans lesquels a augmente sans cesse s'appellent des univers ouverts. Le modèle de Friedmann où la densité de la matière est inférieure à la densité critique s'appelle donc le *modèle de Friedmann ouvert.*

Taille maximale de l'univers de Friedmann fermé

On peut assez facilement trouver la valeur maximale du facteur d'échelle avec la formule suivante.

$$\frac{da}{dt} = H_0\sqrt{\frac{1}{a}\Omega_{m0} - \left(\Omega_{m0} - 1\right)}$$

Au maximum, a atteint sa valeur maximale et da/dt devient nul et on a alors

$$0 = H_0\sqrt{\frac{1}{a_{\max}}\Omega_{m0} - \left(\Omega_{m0} - 1\right)}$$

$$0 = \frac{1}{a_{\max}}\Omega_{m0} - \left(\Omega_{m0} - 1\right)$$

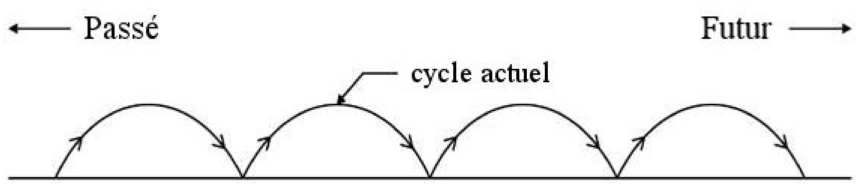
Si on isole a_{max}, on obtient

Valeur maximale du facteur d'échelle dans le modèle de Friedmann fermé

$$a_{\max} = \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0} - 1}$$

L'univers cyclique

Un univers qui disparait après une contraction pourrait très bien recommencer un autre cycle pour faire un autre univers. On pourrait alors obtenir une suite d'expansion et de contraction.



media.radiosai.org/journals/Vol_06/01MAR08/04-musings.htm

On obtient alors un univers cyclique, dont l'existence n'a pas de début et pas de fin. Les premiers à évoquer cette idée sont Friedmann (1922), Takeuchi (1930), Einstein (1931) et Tolman (1931).

14.7 LEQUEL DE CES MODÈLES REPRÉSENTE NOTRE UNIVERS ?

Pour déterminer lequel de ces modèles représente notre univers, on doit évidemment déterminer quelle est la densité moyenne de l'univers. Le rapport de cette densité par rapport à la densité critique nous indiquera lequel de ces trois modèles représente notre univers. Évidemment, il faudrait être pas mal chanceux pour tomber exactement sur la densité critique.

Mesure de la densité

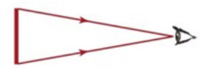
On a vu toutes les techniques utilisées pour déterminer les masses dans l'univers. En utilisant ces données, on arrive à une densité moyenne de 1,61 m_p/m^3, ce qui représente seulement 31,5 % de la densité critique (Ω_m = 0,315) (valeur qui inclut toute la matière sombre qu'on découvre avec la gravitation). Avec une telle densité, l'univers serait décrit par le modèle de Friedmann ouvert, aurait un âge de 11,66 milliards d'années et grandirait sans cesse.

Pourtant, peu de personnes ont pensé que ce modèle était le bon. Pratiquement tous les astrophysiciens s'accordaient pour dire que le modèle d'Einstein-de Sitter devait être le bon. Pourtant, il faut être très chanceux pour que la densité de l'univers soit exactement égale à la densité critique. Pourquoi pensait-on cela alors ?

La largeur angulaire des galaxies

Dans un univers plat, les rayons lumineux voyagent en ligne droite. Si on observe un objet à une distance *D*, la largeur angulaire de l'objet est

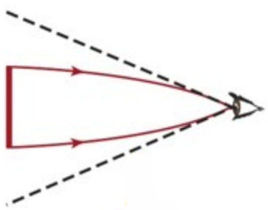
$$\alpha = \frac{d}{D}$$



medium.com/starts-with-a-bang/how-big-is-the-entire-universe-f3fdd468d3db

où *d* est le diamètre de l'objet. (On a fait l'approximation des petits angles tan $\alpha \approx \alpha$.)

Dans un univers à courbure positive (donc un univers de Friedmann fermé), la lumière se déplacera comme on le montre sur la figure de gauche. La largeur angulaire de l'objet



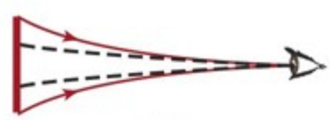
semblera alors plus grande, un peu comme s'il y avait une lentille convergente. Dans ce cas, la largeur angulaire est donnée par

$$\alpha = \frac{d}{R\sin\left(\frac{d}{R}\right)}$$

où *R* est le rayon de courbure de l'univers. Notez que la taille angulaire devient très grande si $d = \pi R$. (La formule donne une taille infinie, mais ce résultat n'est pas vraiment valide puisque l'approximation des petits angles ne tient plus dans ce cas.) Comme on ne voit pas telles galaxies qui ont une taille angulaire immense, on en conclut que le rayon de courbure de l'univers doit être très grand, en tout cas beaucoup plus grand que la grandeur de l'univers visible. On doit donc être assez près d'un univers plat.

Notez qu'avec un univers ayant une courbure négative (donc un univers de Friedmann ouvert), la lumière se déplacera comme on le montre sur la figure de droite. La largeur angulaire de l'objet semblera alors plus petite, un peu comme s'il y avait une lentille divergente. Dans ce cas, la largeur angulaire est donnée par

$$\alpha = \frac{d}{R\sinh\left(\frac{d}{R}\right)}$$



(Ce sinh est un sinus hyperbolique que vous avez sur votre calculatrice. On en reparlera plus loin.) Les galaxies très éloignées sembleraient alors anormalement petites et ce n'est pas ce qu'on observe. Cela indique aussi qu'on doit être assez près de la densité critique.

La densité initiale

On a dit qu'il fallait être assez chanceux pour tomber pile sur la densité critique. En fait, on va montrer ici qu'il faut être tout aussi chanceux pour avoir n'importe quel modèle de Friedmann ouvert ou fermé pouvant correspondre à un univers possible. Pour cela, on va trouver comment change Ω_m avec le facteur d'échelle.

On sait que la densité de matière change avec le facteur d'échelle selon la formule suivante

$$\rho_m = \frac{1}{a^3}\rho_{m0}$$

et que la densité critique est

$$\begin{aligned}\rho_c &= \frac{3H^2}{8\pi G} \\ &= \frac{3H_0^2}{8\pi G}\frac{H^2}{H_0^2} \\ &= \rho_{c0}\frac{H^2}{H_0^2}\end{aligned}$$

Ω_m est donc

$$\begin{aligned}\Omega_m &= \frac{\rho}{\rho_c} \\ &= \frac{\frac{1}{a^3}\rho_{m0}}{\rho_{c0}\frac{H^2}{H_0^2}} \\ &= \frac{1}{a^3}\frac{H_0^2}{H^2}\Omega_{m0}\end{aligned}$$

Pour savoir comment change Ω_m avec a, il nous faut le lien entre H et H_0. On trouve ce lien avec l'équation suivante.

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_m - H^2$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{kc^2}{a^2} &= H^2\left(\frac{8\pi G}{3H^2}\rho_m - 1\right) \\ \frac{kc^2}{a^2} &= H^2\left(\frac{1}{\rho_c}\rho_m - 1\right) \\ \frac{kc^2}{a^2} &= H^2\left(\Omega_m - 1\right) \\ kc^2 &= a^2H^2\left(\Omega_m - 1\right)\end{aligned}$$

Ce résultat signifie que

$$a^2H^2\left(\Omega_m - 1\right) = \text{constante}$$

On peut calculer la valeur de la constante avec les valeurs actuelles.

$$1^2 H_0^2 (\Omega_{m0} - 1) = \text{constante}$$

Le lien entre H et H_0 est donc

$$a^2 H^2 (\Omega_m - 1) = H_0^2 (\Omega_{m0} - 1)$$

En utilisant ce lien entre H et H_0, la densité est

$$\Omega_m = \frac{1}{a^3} \frac{H_0^2}{H^2} \Omega_{m0}$$

$$\Omega_m = \frac{1}{a^3} \frac{a^2 H^2 (\Omega_m - 1)}{H^2 (\Omega_{m0} - 1)} \Omega_{m0}$$

$$\frac{\Omega_m}{\Omega_m - 1} = \frac{1}{a} \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0} - 1}$$

Si on isole Ω_{m0} dans cette équation, on arrive à

$$\Omega_{m0} = \frac{a\Omega_m}{a\Omega_m - (\Omega_m - 1)}$$

Examinons maintenant quelle serait la valeur de Ω_{m0} si l'univers a une certaine valeur de Ω_m à a = 0,001.

Ω_m à a = 0,001	Ω_{m0}
0,9	0,0089
0,9985	0,3996
0,9990	0,4997
0,9995	0,6666
1	1
1,0005	1,9990
1,0010	1001

On constate que la valeur de Ω_m diverge rapidement de 1 à mesure que l'univers prend de l'expansion. Si Ω_m est à peine plus petit que 1 à a = 0,001, alors Ω_{m0} serait nettement inférieur à 1 aujourd'hui et l'univers serait pratiquement vide. Si Ω_m est à peine plus grand que 1 à a = 0,001, alors Ω_{m0} serait nettement supérieur à 1 aujourd'hui ou l'univers aurait fait un Big Crunch et n'aurait jamais atteint a = 1 (c'est pour ça qu'on obtient un Ω_{m0} négatif si Ω_m est plus grand que 1,001001 à a = 0,001). C'est comme un crayon en équilibre sur sa pointe. Il reste en équilibre seulement s'il est parfaitement balancé. S'il y a le moindre écart au départ, le crayon tombe et s'écarte de l'équilibre. Pour l'univers, s'il y a le moindre écart avec une densité critique de 1 au départ, la valeur de la densité critique plus tard s'écarte de plus en plus de 1.

Avec un univers de Friedmann fermé qui aurait maintenant une valeur de Ω_{m0} = 2, on doit avoir Ω_m = 1,0005 quand le facteur d'échelle était de 10^{-3}. Comme on a dit que Ω_{m0} ne peut pas vraiment être supérieur à 10 en ce moment, cela signifie que la valeur maximale de Ω_m doit être au maximum de 1,0009 quand le facteur d'échelle était de 10^{-3}. Avec un univers de Friedmann ouvert qui aurait maintenant une valeur de Ω_{m0} = 0,3, on obtient Ω_m = 0,99767 quand le facteur d'échelle était de 10^{-3}. On voit que n'importe quelle densité plausible de Ω_{m0} nous amène à des valeurs très près de 1 à a = 0,001. Les valeurs de Ω_m seraient encore plus près de 1 si on prenait des valeurs de a encore plus petites.

Ainsi, tous les modèles (plat, ouvert ou fermé) impliquent que l'univers avait la densité critique quand il était très jeune. Ainsi, il faut être aussi chanceux pour avoir un univers plat avec Ω_m = 1 que pour avoir un univers ouvert ou fermé avec n'importe quelle valeur de Ω_m puisqu'il faut toujours avoir la densité critique au départ.

(Notez qu'on peut donner une jolie interprétation de l'équation $a^2H^2\left(\Omega_m - 1\right) = \text{constante}$ https://physique.merici.ca/astro/energie-expansion.pdf)

Conclusion

Ainsi, tous les univers dont la densité actuelle semble raisonnable doivent avoir une densité initiale pratiquement égale à la densité critique. On pense donc qu'il y a un mécanisme quelconque qui a amené la densité de l'univers très jeune à une valeur extrêmement près de la densité critique (mécanisme qu'on verra au chapitre suivant). La densité est si près de la densité critique qu'on en est venu à croire que ce mécanisme amenait nécessairement la densité de l'univers à la densité critique et que c'est donc le modèle d'Einstein-de Sitter qui devait être le bon. Ce fut le modèle privilégié jusqu'en 2000 environ.

Il y avait cependant deux problèmes importants avec le modèle d'Einstein-de Sitter.

1) Le problème de la masse manquante.

   La densité critique est de 5,10 m_p/m^3 alors que la densité observée est de 1,61 m_p/m^3, qui est seulement 31,5 % de la critique. Il y a donc un problème de masse manquante. Près du 2/3 de la masse de l'univers nous échapperait. Ce problème n'est pas le même que celui de la matière sombre. Cette matière sombre fait déjà partie du 31,5 % de la matière qu'on détecte. À ce problème s'ajoutait celui de la matière manquante, ce 68,5 % de la matière qu'on ne parvenait pas à détecter, même pas avec la gravitation.

2) Le problème de l'âge de l'univers.

   L'âge de l'univers dans le modèle d'Einstein-de Sitter est de 9,67 milliards d'années. Or, selon les modèles d'évolution des étoiles, certains amas globulaires auraient un âge de près de 12 milliards d'années. Comment certaines étoiles dans l'univers pouvaient-elles être plus vieilles que l'univers ?

Ces problèmes étaient toujours très présents vers l'an 2000, quand, soudainement, tout a changé.

14.8 LA CONSTANTE COSMOLOGIQUE

L'ajout de la constante

Quand Einstein arrive aux équations de la relativité générale, il en vient à utiliser ses équations pour décrire l'ensemble de l'univers (en 1917). Comme tout le monde pense que l'univers est statique (ni en contraction ni en expansion) à cette époque, Einstein cherche à obtenir un tel univers. Cependant, il constate qu'il est impossible d'obtenir un univers statique avec les équations de la relativité générale qu'il a obtenu.

C'est alors qu'Einstein se rend compte que son équation de la gravitation n'est pas l'équation la plus générale permise par la théorie. En effet, l'équation de la relativité générale est une équation qui doit obéir à plusieurs principes de symétrie et Einstein s'aperçoit que toutes les symétries sont encore respectées si on ajoute une constante Λ à l'équation suivante

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}$$

pour obtenir

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}$$

Cette constante est appelée la *constante cosmologique*. Son effet est opposé à celui de la matière. Alors que la présence de matière cherche à accélérer la contraction de l'univers ou à ralentir son expansion (comme une force d'attraction), la constante cosmologique tend à faire accélérer l'expansion de l'univers ou à ralentir sa contraction (comme une force de répulsion).

La valeur de Λ est relativement petite, ce qui fait en sorte qu'elle ne modifie pas vraiment le calcul des effets gravitationnels sur de petites distances, comme dans le Système solaire, mais elle a des effets importants sur l'univers dans son ensemble.

Le modèle d'Einstein

Voyons comment la constante cosmologique permet d'obtenir un univers statique. Comme la matière cherche à faire contracter l'univers alors que la constante cosmologique cherche à faire grandir l'univers, on peut avoir un équilibre entre les deux et obtenir un taux d'expansion nulle si on choisit bien la valeur de la constante Λ.

Avec la constante cosmologique, les deux équations de l'évolution de l'univers deviennent

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_m + \frac{\Lambda c^2}{3} - H^2$$

$$-H^2 - \frac{2}{3}\frac{dH}{dt} - \frac{1}{3}\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} P_m - \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Comme Einstein veut un univers statique (ce qui veut dire que $H = 0$ et $dH/dt = 0$) rempli de matière froide (ce qui veut dire que $P_m = 0$), il obtient les équations suivantes.

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_m + \frac{\Lambda c^2}{3}$$
$$-\frac{1}{3}\frac{kc^2}{a^2} = -\frac{\Lambda c^2}{3}$$

La 2e équation nous donne

$$\frac{kc^2}{a^2} = \Lambda c^2$$

En utilisant cette valeur dans la 1re équation, on arrive à

$$\Lambda c^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_m + \frac{\Lambda c^2}{3}$$
$$\frac{2\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho_m$$
$$\Lambda = \frac{4\pi G}{c^2}\rho_m$$

Avec cette valeur de Λ, on obtient un univers statique. Il s'agit d'un univers à courbure positive ayant un volume limité. On pourrait calculer que le volume de cet univers est $2\pi^2 R^3$, où $R = \Lambda^{-1/2}$.

Par contre, le modèle statique d'Einstein est instable. La moindre petite perturbation vient briser le fragile équilibre entre contraction et expansion. Par exemple, si, pour une raison quelconque, l'univers d'Einstein prend un peu d'expansion, alors la densité de matière diminue pendant que Λ reste constante. Ainsi, l'expansion provoquée par Λ devient plus grande que la contraction provoquée par la matière et l'univers commence à prendre plus d'expansion, ce qui amplifie encore plus la domination de Λ et qui accélère encore plus l'expansion.

La constante cosmologique fait prendre de l'expansion à l'univers

La constante Λ fait grandir l'univers parce que cette constante fait en sorte que le vide agit exactement comme s'il avait une certaine densité d'énergie qui reste constante malgré l'expansion de l'univers. On parle donc souvent d'*énergie du vide*. (En anglais, on parle de *dark energy*, à ne pas confondre avec la *dark matter*, qui est la matière sombre.) On peut trouver la densité d'énergie du vide à partir de la constante cosmologique avec l'équation

$$\Lambda = \frac{8\pi G\rho_v}{c^2}$$

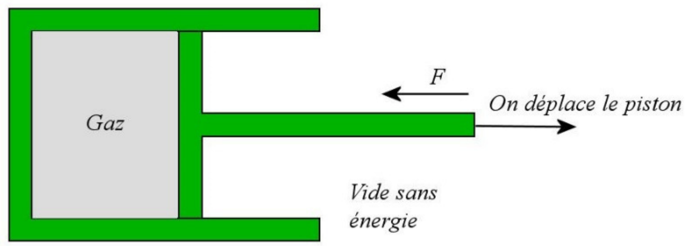
où ρ_v est la densité d'énergie du vide. Cette équation permet de calculer que le modèle d'Einstein est un univers dans lequel la densité d'énergie du vide est égale à la moitié de la densité d'énergie de la matière.

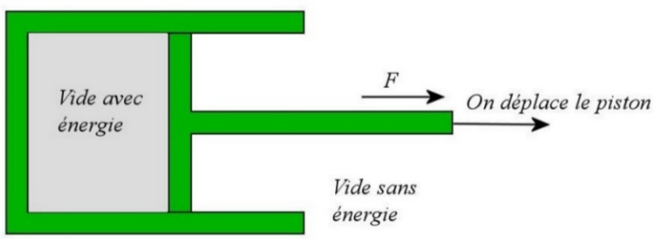
Mais pourquoi cette énergie du vide fait-elle grandir l'univers ? C'est que cette énergie du vide fait une pression négative de

$$P = -\rho_v c^2$$

Pour comprendre comment une pression négative est possible, imaginons qu'on a un piston. Pour commencer, imaginons qu'il y a du gaz dans un réservoir et du vide à l'extérieur. On déplace alors le piston pour augmenter le volume du réservoir.

Le gaz pousse sur la paroi du piston et il faudrait forcer vers la gauche pour retenir le piston, même si on le déplace le piston vers la droite.





www.astro.ucla.edu/~wright/cosmo_constant.html

Imaginons maintenant qu'à l'intérieur du réservoir on a du vide contenant de l'énergie et qu'à l'extérieur du piston, on a du vide ne contenant pas d'énergie du vide. On augmente ensuite le volume de la région contenant de l'énergie en déplaçant le piston.

Puisqu'on augmente la quantité d'énergie présente, il faut donc fournir un travail ce qui signifie qu'il faut tirer sur le piston pour le déplacer. C'est exactement le contraire de ce qu'il faut faire avec le gaz.

Comme le gaz a nécessairement une pression positive et que la force qu'on doit appliquer avec le vide est dans le sens contraire de celle qu'on doit appliquer avec le gaz, cela signifie que le vide contenant de l'énergie fait une pression négative.

Ce signe est important parce que la pression a, tout comme la densité d'énergie, un rôle à jouer en relativité générale pour déterminer l'effet sur le taux d'expansion de l'univers. La matière, qui a une densité d'énergie positive et une pression positive, cherche à faire contracter l'univers (ce qui veut dire qu'elle s'opposer à l'expansion de l'univers). Une densité d'énergie positive cherche aussi à contracter l'univers, mais une pression négative fait le contraire : elle cherche à faire prendre de l'expansion à l'univers. Dans le cas du vide, l'effet de la pression négative est plus grand que celui de la densité d'énergie positive, ce qui fait que la constante cosmologique a pour effet d'introduire un vide qui cherche à faire prendre de l'expansion à l'espace. Alors que la matière cherche à contracter l'univers, l'énergie du vide cherche à dilater l'univers.

Avec l'expansion, la densité d'énergie du vide reste constante pendant que le volume augmente. On a donc l'impression que la quantité d'énergie augmente. Toutefois, la pression négative fait en sorte que l'énergie reste la même avec l'expansion.
https://physique.merici.ca/astro/energie-expansion2.pdf

Interprétation de Λ

On a interprété Λ comme une énergie du vide ici, mais sachez que ce n'est pas la seule interprétation possible.

On peut simplement considérer que Λ est une constante de la nature et qu'elle ne nécessite pas d'explication, tout comme on ne cherche pas à expliquer la valeur de la constante de gravitation G. Si c'est le cas, la valeur de Λ serait définitivement une constante et ne pourrait pas changer en fonction du temps.

On peut considérer que Λ vient de l'énergie du vide, comme on l'a fait précédemment. En physique des particules, il y a effectivement une énergie du vide qui vient de l'énergie minimum de tous les champs présents dans l'univers. Cette énergie minimum n'est pas nulle et on obtient même une densité d'énergie infinie quand on fait le calcul ! Les physiciens ont donc inventé une façon d'obtenir une densité d'énergie nulle avec la *supersymétrie* qui prévoit l'existence de particules supersymétriques pour chacune des particules qui existe. Par exemple, il devrait y avoir une particule supersymétrique associée à l'électron qui s'appellerait le *sélectron* (on ajoute un s devant le nom de la particule). En brisant un peu cette supersymétrie, on pourrait obtenir une valeur d'énergie du vide raisonnable. Le problème, c'est que, pour l'instant, aucune particule supersymétrique n'a été observée. On peut aussi montrer qu'un certain type de particules, appelées les *particules scalaires*, peut imiter parfaitement l'énergie du vide. Il suffirait qu'il y ait un peu de ces particules dans l'univers pour faire le même effet que l'énergie du vide. Comme on n'a pas découvert de particules de ce genre (à part le boson de Higgs), cette idée reste hypothétique. Autrement dit, on n'a pour l'instant aucune idée de l'origine de cette énergie du vide, si c'est bien l'énergie du vide qui est à l'origine de Λ. Notez qu'en attribuant l'origine de Λ à l'énergie du vide, on peut faire des versions dans lesquelles la valeur de Λ peut changer en fonction du temps.

L'effet de Λ pourrait aussi s'expliquer avec une version modifiée de la gravitation. Plusieurs physiciens tentent donc de modifier la relativité générale pour obtenir le même effet, mais sans qu'il y ait de constante cosmologique. Pour l'instant, on a de la difficulté à formuler une théorie qui donne des résultats en accord avec ce qui se passe dans le Système solaire.

Dans ce qui va suivre ici, on va faire comme si Λ était généré par une énergie du vide.

Vie et mort de Λ

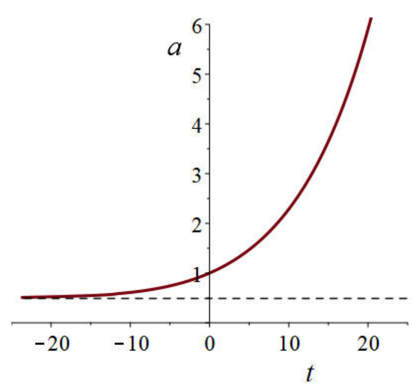
Au début des années 20, tout allait bien. L'ajout de la constante cosmologique permettait d'obtenir un univers statique tel que tous l'imaginaient à cette époque.

Puis, on voit apparaitre les 3 modèles présentés précédemment (Einstein-de Sitter, Friedmann ouvert et Friedmann fermé), trouvés en 1922 par Friedmann et, indépendamment, en 1927 par George Lemaitre. Ces modèles décrivent des univers en expansion ou en contraction, mais personne à l'époque ne pense que ces solutions décrivent véritablement notre univers. En 1927, Einstein, qui connait les travaux de Friedmann et de Lemaître, trouve toujours « abominable » (selon les souvenirs de Lemaître) l'idée d'un univers en expansion. L'univers statique et la constante Λ restent bien en vie.

Quand plusieurs arrivent à la conclusion que la découverte de lien entre le décalage des raies et la distance des galaxies par Hubble montre que l'univers est en expansion au début des années 30, tous les modèles prévoyant une expansion deviennent plausibles.

Comme la constante cosmologique avait été spécifiquement ajoutée pour obtenir un univers statique, plusieurs considèrent que cette constante devient complètement inutile. Einstein n'a jamais vraiment aimé la constante cosmologique. Il a dû l'ajouter à sa théorie pour obtenir un univers statique, mais il a toujours pensé que cette solution n'était pas très élégante. Il est bien content de se débarrasser de cette affreuse constante. (On donne souvent une citation d'Einstein disant que l'ajout de la constante cosmologique a été la plus grande erreur de sa vie. Il est fort probable qu'Einstein n'a jamais dit ça et que c'est Gamow qui a inventé cette histoire.)

Ce dégout de la constante cosmologique par Einstein et par plusieurs physiciens fait en sorte que beaucoup s'intéressent alors aux modèles où il n'y a pas de constante cosmologique. C'est ainsi qu'Einstein et de Sitter développent, à partir de 1931, le modèle de Friedmann ayant la densité critique, qui commence alors à porter le nom de modèle d'Einstein-de Sitter.



D'autres, au contraire, gardent la constante cosmologique et explorent des solutions des équations de la relativité contenant cette constante (l'univers statique n'est pas la seule solution possible avec une constante cosmologique). Parmi ces solutions, notons tout spécialement le modèle de Lemaître-Eddington. Dans ce modèle, l'univers est initialement un univers d'Einstein dans lequel il manque un peu de matière. Cet univers n'est donc pas en équilibre et prend lentement de l'expansion au départ. Plus la matière se dilue avec l'expansion, plus l'effet de l'énergie du vide domine et plus l'expansion s'accélère. Par exemple, voici le graphique du facteur d'échelle d'un univers de Lemaître ayant un facteur d'échelle initiale de 0,5. Dans ce graphique, on est présentement à $t = 0$ et la pente à $t = 0$ correspond au taux d'expansion en ce moment. Dans ce modèle, il y a de l'expansion, mais pas de moment où $a = 0$. On voit que a tend plutôt vers $a = 0{,}5$ quand t tend vers $-\infty$. C'est donc un univers qui a un âge infini.

Lemaître avait proposé ce modèle dès 1927. Toutefois, il avait publié les résultats dans un obscur journal belge et il n'a pratiquement rien fait pour faire connaitre ce modèle. Quand la cosmologie prend soudainement son envol en 1930, le modèle est proposé à nouveau par Eddington et devient le modèle d'Eddington-Lemaître. Reste que dans l'article de 1927, Lemaitre a été le premier à suggérer que notre univers pourrait être en expansion (Friedmann n'a jamais proposé que les solutions qu'il avait obtenues puisse véritablement décrire notre univers).

Toutefois, il y a de moins en moins de cosmologistes qui pensent qu'il y a une constante cosmologique. Le modèle d'Einstein-de Sitter semble assez bien décrire notre univers sans avoir à ajouter cette affreuse constante. Après 1940, il n'y a presque plus aucun cosmologiste qui utilise les équations qui contiennent la constante cosmologique.

Il semblerait que l'ajout de la constante cosmologique a été inutile. Mais l'avenir réservait une surprise.

14.9 LE MODÈLE ACTUEL (Λ_{cdm})

L'observation des supernovas

À la fin des années 1990, on a un nouveau problème avec le modèle d'Einstein-de Sitter. On a vu dans les chapitres précédents qu'on peut mesurer la distance des supernovas de type Ia jusqu'à des distances très élevées. Or, la distance des galaxies très éloignées mesurées par la méthode des supernovas est en désaccord avec la distance de ces galaxies mesurées par le décalage des raies spectrales dans le modèle de Einstein-de Sitter.
Dans un univers plat et statique, l'intensité lumineuse d'une source est donnée par

$$I = \frac{L}{4\pi D^2}$$

Si l'univers prend de l'expansion, cette intensité serait plus petite pour 2 raisons.

Premièrement, l'expansion augmente la longueur d'onde et fait diminuer l'énergie des photons. Puisque la longueur d'onde est multipliée par $1 + z$, l'énergie des photons est divisée par $1 + z$.

Deuxièmement, l'expansion va faire augmenter le temps entre l'arrivée des photons. Si deux photons provenant d'une source sont émis vers la Terre et que le temps entre l'émission des deux photons est de Δt, alors le premier photon a une avance de $c\Delta t$ sur le deuxième photon au départ. À l'arrivée, cette distance sera augmentée à $(1 + z)c\Delta t$ de sorte que le temps entre l'arrivée des deux photons est maintenant de $(1 + z)\Delta t$. Si le temps entre l'arrivée de photons est augmenté d'un facteur $(1 + z)$, alors l'intensité est divisée par $(1 + z)$. Dans un univers en expansion, l'intensité est donc

$$I = \frac{L}{4\pi D^2 (1+z)^2}$$

Nous allons utiliser cette équation pour obtenir la magnitude des étoiles en fonction de la distance et de leur magnitude absolue.

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{0,4(M_{bol} - m_{bol})}$$

$$I_1 = I_2 \cdot 10^{0,4(M_{bol} - m_{bol})}$$

$$\frac{L}{4\pi D^2 (1+z)^2} = \frac{L}{4\pi (10pc)^2} 10^{0,4(M_{bol} - m_{bol})}$$

$$\frac{(10pc)^2}{D^2 (1+z)^2} = 10^{0,4(M_{bol} - m_{bol})}$$

$$\log \frac{(10pc)^2}{D^2 (1+z)^2} = 0,4(M_{bol} - m_{bol})$$

Il n'est pas vraiment nécessaire d'indiquer que c'est la magnitude bolométrique puisqu'on a montré, il y a quelques chapitres, que la différence de magnitude absolue et la magnitude apparente est toujours la même, peu importe le type de magnitude. Si on isole $M - m$, on a

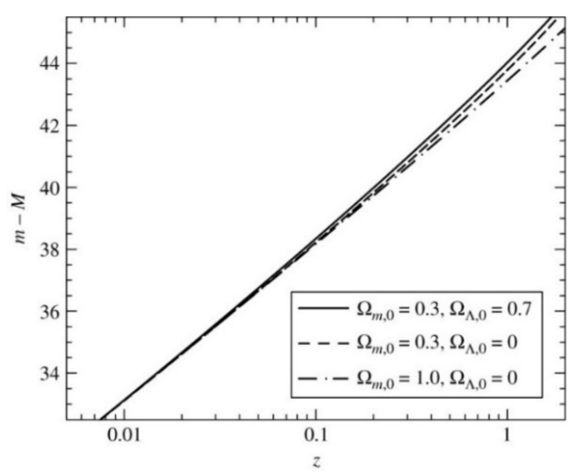
$$M - m = 2,5 \log \left(\frac{10pc}{D(1+z)} \right)^2$$

$$M - m = 5 \log \left(\frac{10pc}{D(1+z)} \right)$$

Ce qui donne

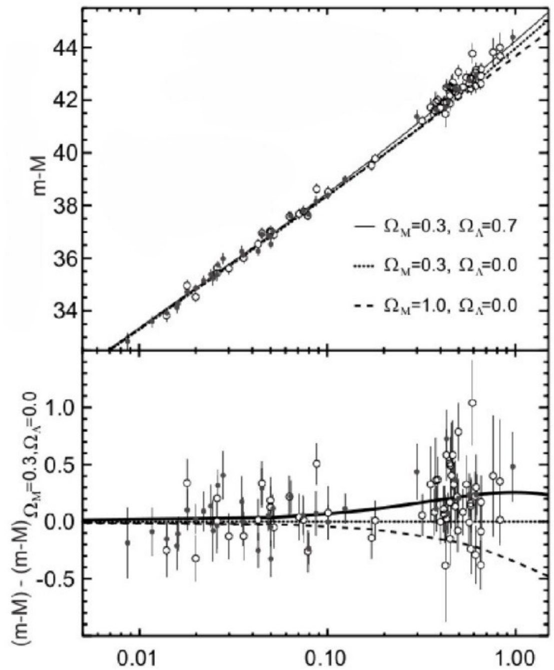
$$m - M = 5 \log \left(\frac{D}{10pc} \right) + 5 \log (1+z)$$

Or, chaque modèle prévoit un lien différent entre D et z, ce qui change le lien entre $m - M$ et z. À droite, on peut voir les graphiques pour quelques modèles.



burro.case.edu/Academics/Astr222/Cosmo/Models/sncosmo.html

Reste à voir ce que donnent les observations. Ce n'est pas très évident de voir l'accord entre les données et un modèle particulier avec le graphique du haut (à gauche). Le graphique du bas montre mieux les différences. Il montre l'écart entre les observations et le modèle $\Omega_m = 0{,}3$ et $\Omega_v = 0$. Les données sont davantage en accord avec un modèle ayant une énergie du vide (la ligne noire pleine qui correspond au modèle $\Omega_m = 0{,}3$ et $\Omega_v = 0{,}7$.) Les données semblent indiquer qu'il y a bel et bien une énergie du vide ! C'était une véritable bombe dans le domaine de la cosmologie. (Notez que d'autres observations viennent supporter cette conclusion. S'il n'y avait que les supernovas, les incertitudes sur les densités seraient bien grandes, comme le graphique le laisse supposer.)



www.researchgate.net/figure/Upper-panel-Hubble-diagram-of-type-Ia-supernovae-measured-by-the-Supernova-Cosmology_fig1_281749036

La densité d'énergie

Il fallait donc ramener la fameuse constante cosmologique. Selon les observations actuelles, on règle tous les problèmes qu'on avait avec le modèle d'Einstein-de Sitter en prenant un modèle ayant les caractéristiques suivantes.

1) La densité totale de l'univers est égale à la densité critique. Les observations donnent une valeur de Ω_{tot} = 1,0007 ± 0,0019. Cela signifie donc que l'univers semble avoir une courbure nulle.

2) La densité d'énergie de la matière représente 31,5 ± 0,7 % de la densité totale (Ω_{m0} = 0,315)

3) La densité d'énergie du vide représente 68,5 ± 0,7 % de la densité totale (Ω_{v0} = 0,685).

La densité d'énergie du vide est donc près de 3 fois plus grande que la densité d'énergie de la matière. Cette densité d'énergie du vide reste quand même assez faible puisqu'elle correspond à seulement $\rho_v = 5{,}83 \times 10^{-27}$ kg/m³. C'est très peu quand on la compare à la densité de la matière sur Terre. Si on fait une sphère allant jusqu'à l'orbite de Neptune, l'énergie du vide dans ce volume correspond à l'énergie de masse d'un objet de 2×10^{12} kg, ce qui correspond à la masse d'une montagne. On en conclut que la constante cosmologique n'a pas beaucoup d'effet sur la gravitation dans le Système solaire. Mais dans tout l'univers, ça commence à représenter beaucoup d'énergie (88 milliards de masses solaires par mégaparsec cube) et l'effet est important pour l'évolution de l'univers.

L'énergie du vide est représentée par la constante cosmologique (Λ). De plus, une bonne partie du 31,5 % de matière est composée de matière sombre froide (ce qui signifie que sa pression est faible). Cela explique le nom du modèle, Λ_{cdm}, où cdm signifie *cold dark matter.*

Évolution du facteur d'échelle

Pour trouver comment évolue notre univers en fonction du temps dans ce nouveau modèle, on doit résoudre l'équation

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_m + \frac{\Lambda c^2}{3} - H^2$$

Mais comme on a

$$\Lambda = \frac{8\pi G \rho_v}{c^2}$$

on arrive à

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_m + \rho_v\right) - H^2$$

On va maintenant remplacer la densité de matière par la formule indiquant comment elle change avec le facteur d'échelle (quant à la densité du vide, elle reste toujours constante). On arrive alors à

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + \rho_{v0}\right) - H^2$$

On va écrire cette formule sous une forme un peu plus utile. Pour y arriver, on va utiliser le rapport entre la densité de matière actuelle et la densité critique (qui sera noté Ω_{m0}) et le rapport entre la densité du vide et la densité critique (qui sera noté Ω_{v0})

$$\Omega_{m0} = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{c0}} \qquad\qquad \Omega_{v0} = \frac{\rho_{v0}}{\rho_{c0}}$$

On a alors

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\Omega_{m0}\rho_{c0}}{a^3} + \Omega_{v0}\rho_{v0}\right) - H^2$$

Mais puisque

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

on a

$$\frac{kc^2}{a^2} = H_0^2\left(\frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_{v0}\right) - H^2$$

Ici, on va faire la solution pour un univers plat (c'est ce qu'on a avec le modèle Λ_{cdm}). Cela signifie que le terme de gauche est nul.

$$0 = H_0^2\left(\frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_{v0}\right) - H^2$$

En utilisant le lien entre le taux d'expansion H et le facteur d'échelle a, on arrive à

$$0 = H_0^2 \frac{1}{a^3}\left(\Omega_{m0} + \Omega_{v0}\right) - \left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2$$

$$0 = H_0^2\left(\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{v0}a^2\right) - \left(\frac{da}{dt}\right)^2$$

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2\left(\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{v0}a^2\right)$$

$$\frac{da}{dt} = H_0\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{v0}a^2}$$

On doit donc résoudre l'équation suivante pour trouver le facteur d'échelle en fonction du temps.

$$\frac{da}{\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_{v0}a^2}} = H_0 dt$$

En intégrant de chaque côté, on obtient la solution suivante.
(Voyez les détails ici si vous le désirez : http://physique.merici.ca/astro/SolutionLcdm.pdf)

Facteur d'échelle en fonction du temps pour le modèle Λ_{cdm}

$$a = \left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$a = \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

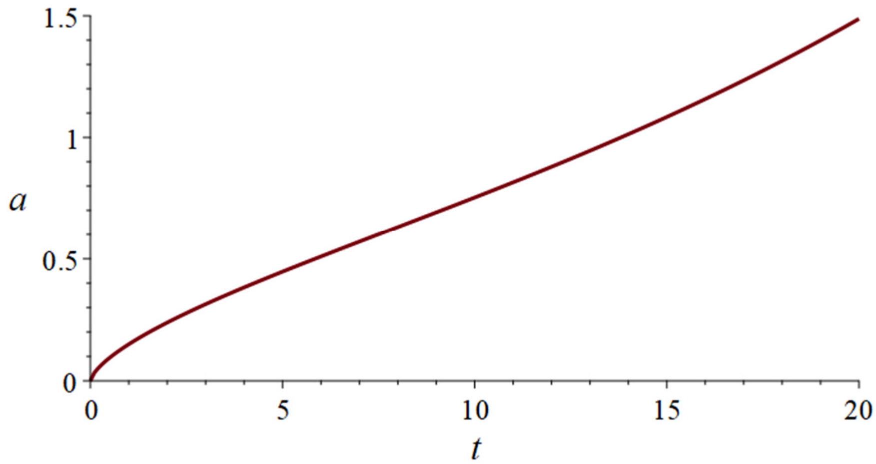
Avec les valeurs de Ω_{m0} = 0,315 Ω_{v0} =0,685 H_0 = 67,4 km/s/Mpc

Vous ne connaissez peut-être pas la fonction sinus hyperbolique (sinh), mais elle n'est pas bien compliquée. Cette fonction est simplement

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

et vous la retrouvez sur toutes les calculatrices scientifiques.

Voici un graphique montrant la valeur du facteur d'échelle de l'univers en fonction du temps.



Au départ, la densité de matière est plus grande que la densité du vide, et on remarque que la pente du graphique diminue et le graphique est concave vers le bas. La matière, qui domine, provoque alors un ralentissement de l'expansion. Toutefois, à mesure que l'univers grandit, la densité de matière diminue (la même matière est répartie dans un univers de plus en plus grand) alors que la densité du vide reste la même. Il arrivera donc un moment où la densité du vide deviendra plus grande que la densité de matière (cela s'est produit quand l'univers avait un peu moins de 8 milliards d'années). À partir de ce moment, l'énergie du vide domine et cause une augmentation du taux d'expansion de l'univers. La courbe du facteur d'échelle devient alors concave vers le haut.

Notez que ce modèle avait déjà été examiné en 1930 par de Sitter (une solution parmi d'autres solutions proposées) et par Lemaître en 1931 ! (Mais pas avec des valeurs précises pour les densités.) Le modèle a eu une certaine popularité dans les années 30 avant que les modèles utilisant la constante cosmologique tombent en disgrâce.

L'âge de l'univers

Puisque l'univers a maintenant un facteur d'échelle de 1, on trouve la valeur de t_A avec

$$1 = \left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}} \sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}} H_0}{2} t_A \right) \right)^{\frac{2}{3}}$$

En isolant t_A, on arrive à

Âge de l'univers pour le modèle Λ_{cdm}

$$t_A = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}}}$$

$$t_A = 13,80Ga$$

Avec les valeurs de Ω_{m0} = 0,315 Ω_{v0} =0,685 H_0 = 67,4 km/s/Mpc

(Notez le $\sinh^{-1}$ qui est la fonction inverse du sinus hyperbolique. Elle est aussi sur votre calculatrice.)

Exemple 14.9.1

Dans combien de temps le facteur d'échelle de l'univers vaudra-t-il 1,5 ?

Si a = 1,5, on a

$$a = \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$1,5 = \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$(1,5)^{\frac{3}{2}} = 0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)$$

$$2,710 = \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)$$

$$\sinh^{-1} 2,710 = \frac{t}{11,69Ga}$$

$$t = 11,69Ga \cdot \sinh^{-1} 2,710$$

$$t = 20,1Ga$$

Comme nous sommes déjà à t_A = 13,8 Ga, nous atteindrons a = 1,5 dans 6,3 Ga.

Le taux d'expansion de Hubble en fonction du temps

Puisque

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$$

Le taux d'expansion de Hubble pour ce modèle est

$$H = \left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t_A\right)\right)^{\frac{-2}{3}} \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t_A\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

On obtient, après simplification.

$$H = \sqrt{\Omega_{v0}} H_0 \frac{\cosh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2} t\right)}{\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2} t\right)}$$

$$= \sqrt{\Omega_{v0}} H_0 \frac{1}{\tanh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2} t\right)}$$

Cette fois, ce sont les fonctions cosinus et tangente hyperboliques (cosh et tanh) que vous ne connaissez peut-être pas. Ces fonctions sont simplement

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

et vous les retrouvez sur toutes les calculatrices scientifiques. En simplifiant, on a donc

Taux d'expansion de Hubble en fonction du temps pour le modèle Λ_{cdm}

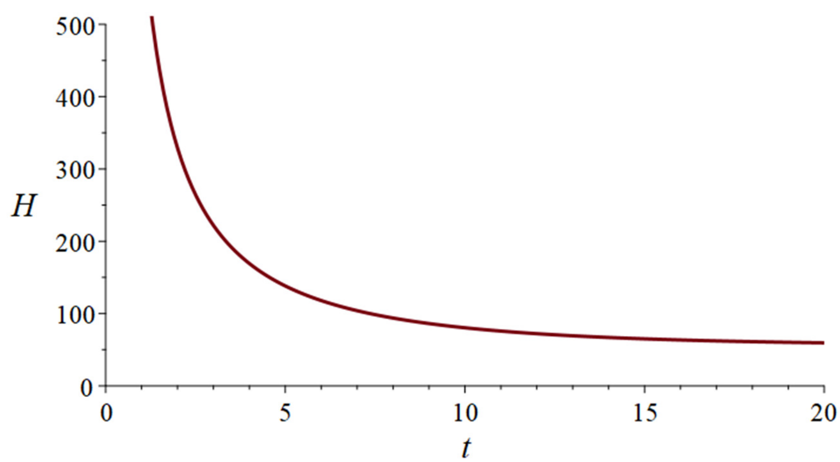
$$H = \sqrt{\Omega_{v0}} H_0 \frac{1}{\tanh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2} t\right)}$$

Avec les valeurs de Ω_{m0} = 0,315 Ω_{v0} =0,685 H_0 = 67,4 km/s/Mpc, on a

$$H = 0{,}0571 Ga^{-1} \cdot \frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11{,}69 Ga}\right)}$$

$$H = 55{,}8 \tfrac{km/s}{Mpc} \cdot \frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11{,}69 Ga}\right)}$$

Voici un graphique du taux d'expansion de Hubble en fonction du temps.



Encore une fois, le taux d'expansion de Hubble diminue en fonction du temps. Toutefois, il ne tend pas vers 0 comme il le faisait dans les modèles d'Einstein-de Sitter et de Friedmann ouvert. Ici, sa valeur tend vers

$$\sqrt{\Omega_{v0}}H_0 = \sqrt{0,685}\cdot 67,4\,\tfrac{km/s}{Mpc}$$
$$= 55,8\,\tfrac{km/s}{Mpc}$$

Exemple 14.9.2

Dans combien de temps le taux d'expansion de Hubble vaudra-t-il 65 km/s/Mpc ?

Si H = 65 km/s/Mpc, on a

$$\begin{aligned}
H &= 55,8\,\tfrac{km/s}{Mpc}\cdot\frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)}\\
65\,\tfrac{km/s}{Mpc} &= 55,8\,\tfrac{km/s}{Mpc}\cdot\frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)}\\
1,164 &= \frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)}\\
0,858 &= \tanh\left(\tfrac{t}{11,69Ga}\right)\\
t &= 11,69Ga\cdot\tanh^{-1}(0,858)\\
t &= 15,1Ga
\end{aligned}$$

(Notez le $\tanh^{-1}$ qui est la fonction inverse de la tangente hyperbolique. Elle est aussi sur votre calculatrice.)

Comme nous sommes déjà à t_A = 13,8 Ga, nous atteindrons cette valeur dans 1,5 Ga.

La distance d'une source lumineuse

On peut trouver la distance d'une source avec l'intégrale suivante.

$$d = \int_{t_e}^{t_r}\frac{c}{a}dt = c\sqrt[3]{\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}}}\int_{t_e}^{t_r}\left(\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t\right)\right)^{-\frac{2}{3}}dt$$

Avec les valeurs de Ω_{m0} = 0,315 Ω_{v0} =0,685 H_0 = 67,4 km/s/Mpc, on a

Distance d'une source pour le modèle Λ_{cdm}

$$d = 1,296\cdot c\int_{t_e}^{t_r}\left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{-\frac{2}{3}}dt$$

Malheureusement, il n'y a pas de solution simple à cette intégrale. (Il y a une solution dans laquelle on retrouve une fonction qui s'appelle la fonction hypergéométrique, mais elle est un peu compliquée.)

On peut quand même trouver la valeur de l'intégrale avec une intégrale numérique. On peut la faire avec le site suivant.
https://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate+1.296*%28sinh%28t%2F11.69%29%29%5E%28-2%2F3%29+from+0+to+13.8
Il ne vous reste qu'à changer les bornes dans « from 0 to 13.80 » pour mettre les temps voulus.

Exemple 14.9.3

On sait que le décalage des raies du quasar 3C 273 est de 1,16 et que le facteur d'échelle de l'univers était de 0,862 quand la lumière a été émise. Quelle est la distance de ce quasar en ce moment ?

Le temps à l'émission de la lumière pour ce quasar est

$$a = \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$0,862 = \left(0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t_e}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$0,862^{3/2} = 0,678 \cdot \sinh\left(\frac{t_e}{11,69Ga}\right)$$

$$1,180 = \sinh\left(\frac{t_e}{11,69Ga}\right)$$

$$t_e = 11,69Ga \cdot \sinh^{-1} 1,180$$

$$t_e = 11,73Ga$$

La distance est donc

$$d = 1,296 \cdot c \int_{11,73}^{13,80} \left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{-\frac{2}{3}} dt$$

Cette intégrale vaut (on change les bornes dans Wolfram pour « 11.73 to 13.80 »)

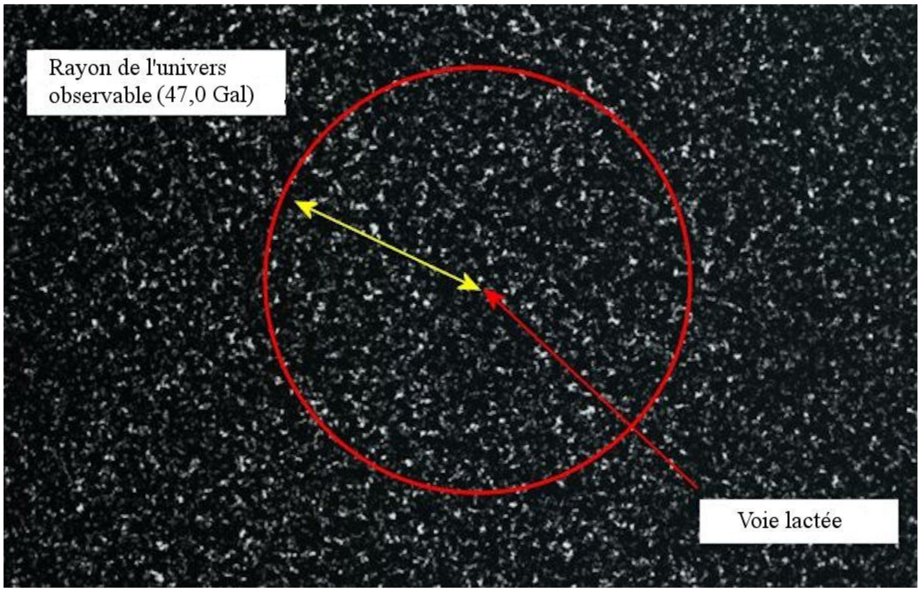
$$d = 2{,}23 \text{ Gal}$$

Notez qu'on avait 2,08 Gal avec le modèle d'Einstein – de Sitter.

La limite de l'univers observable

Si on fait le calcul, une source ayant émis sa lumière à la naissance de l'univers serait maintenant à une distance de 47,0 milliards d'années-lumière. La lumière d'une source plus loin que cette distance n'aurait pas eu le temps d'atteindre la Terre durant les

13,8 milliards d'années de vie de l'univers. Cette distance est donc la limite actuelle de l'univers observable dans le modèle actuel.



Rayon de l'univers observable selon le modèle Λ_{cdm}

$$d = 47{,}0 \text{ Gal}$$

Le modèle avec énergie du vide a cependant quelque chose de bien particulier.

Dans les modèles d'Einstein-de Sitter et de Friedmann ouvert, la lumière d'une source finissait toujours par arriver jusqu'à nous, peu importe sa distance. Puisque le taux d'expansion de Hubble tendait vers 0 avec le temps, la vitesse d'expansion tendait vers 0 et les photons avaient inévitablement une vitesse plus grande que l'expansion à un moment donné et pouvaient alors s'approcher de la Terre. Toutes les sources auraient donc fini par entrer dans l'univers observable, quoique ça pourrait prendre beaucoup de temps pour certaines sources très éloignées.

Dans le modèle actuel, la constante de Hubble diminue pour tendre vers la valeur de 55,8 km/s/Mpc. Or, avec un tel taux d'expansion, on atteint la vitesse de la lumière à une distance de

$$v = HD$$

$$300\,000\tfrac{km}{s} = 55{,}8\tfrac{km/s}{Mpc} \cdot D$$

$$D = 5376 Mpc = 17{,}53 Gal$$

Ainsi, si un photon se retrouve à une distance de la Terre plus grande que 17,53 milliards d'années-lumière, la vitesse d'éloignement due à l'expansion sera toujours plus grande que la vitesse de la lumière et ce photon ne pourra jamais s'approcher de la Terre, exactement comme un poisson qui nage moins vite que le courant ne peut pas remonter une rivière.

Cela fait que certaines sources lumineuses ne seront jamais visibles de la Terre, même si on attendait un temps infini. On peut trouver où se situe cette limite en prenant notre formule de la distance d'une source et en posant $t_e = 0$ (le plus tôt qu'une source peut émettre de la lumière) et $t_r = \infty$ (la lumière a pris beaucoup de temps pour arriver). On arrive à

$$d = c\sqrt[3]{\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}}}\int_0^\infty \left(\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t\right)\right)^{-\frac{2}{3}} dt = 63,7Gal$$

Ainsi, on ne recevra jamais la lumière d'une source située actuellement à plus de 63,7 milliards d'années-lumière. On ne verra jamais ce qui se passe dans tout l'univers situé actuellement à plus de 63,7 milliards d'années-lumière.

Attention, cette distance est mesurée avec le système d'axe d. Ce ne sera donc pas la vraie grandeur de l'univers observable, qui est mesurée avec D. Prenons un exemple pour illustrer, en imaginant qu'on est dans l'univers avec un facteur d'échelle de $a = 100$. L'intégrale nous donne alors un univers observable dont le rayon est $d = 63,6$ Gal. Avec un facteur d'échelle de 100, cela veut dire que la véritable distance de la limite de l'univers observable sera à une distance de

$$D = ad = 100 \cdot 63,6Gal = 6\,360Gal$$

L'univers observable sera donc immense. On pourrait alors penser qu'une galaxie située à 80 Gal de nous en ce moment va se retrouver dans l'univers visible, mais il faut se rappeler que l'expansion va éloigner cette galaxie. Avec un facteur d'échelle de 100, cette galaxie se retrouvera alors à 8 000 Gal de nous. On voit qu'elle est encore à l'extérieur de l'univers observable. On aurait beau attendre très longtemps, l'expansion poussera toujours cette galaxie à l'extérieur de l'univers observable.

L'univers observable dans le futur

Dans le futur, on aura donc des galaxies qui s'éloignent de nous avec un taux d'expansion qui se stabilisera à 55,8 km/s/Mpc et une frontière où l'expansion sera plus rapide que la vitesse de la lumière située à 17,53 Gal de nous. Les galaxies vont donc s'éloigner de nous et aller traverser cette frontière et disparaitre de l'univers observable. Une fois qu'elles auront traversé cette limite, on ne pourra plus jamais les voir. Tranquillement, les galaxies vont donc toutes disparaitre de l'univers observable de sorte qu'il n'y aura plus d'autres galaxies visibles dans l'univers dans environ 100 milliards d'années, à l'exception de notre galaxie, qui sera le résultat de la fusion de la Voie lactée et de la galaxie d'Andromède.

Que voit-on exactement quand la galaxie traverse cette frontière ? Est-ce qu'elle disparait subitement du ciel ? Non, voici plutôt ce qu'on va voir.

1) On va voir une galaxie pour laquelle le temps semble ralentir. En réalité, le temps s'écoule normalement dans cette galaxie, mais comme il faut de plus en plus de temps pour que l'image de la galaxie nous arrive, cela va donner l'impression que

le temps s'écoule au ralenti dans la galaxie. Le temps va donc sembler ralentir jusqu'à se figer sur l'image de la galaxie au moment où elle traverse la limite de l'univers observable.

2) La luminosité de la galaxie diminuera à mesure que la galaxie va s'approcher de la limite de l'univers observable. Il y a bien sûr une diminution d'intensité parce que la galaxie est de plus en plus loin, mais il y en a une aussi parce que le temps semblera ralentir. Comme la lumière prend de plus en plus de temps pour arriver jusqu'à nous, le temps entre l'arrivée des photons augmente continuellement, ce qui veut dire que le nombre de photons reçu par seconde diminue sans cesse. Si on reçoit moins de photons par seconde, cela veut dire que la luminosité de la galaxie baisse. Elle baissera jusqu'à devenir nulle pour l'image de la galaxie qui traverse la limite de l'univers observable.

3) Le décalage des raies va fortement augmenter quand la galaxie va s'approcher de la limite. Puisque les photons prennent de plus en plus de temps à nous arriver, l'augmentation de la longueur d'onde par l'expansion de l'univers sera de plus en plus importante. Le décalage augmentera sans cesse ce qui fera passer le maximum d'émission de la lumière du visible, à l'infrarouge, aux microondes puis aux ondes radio. Quand la galaxie arrive à la limite de l'univers observable, le décalage devient infini et la lumière a une longueur d'onde infinie.

Curieusement, cela ressemble à ce qu'on observe quand de la matière traverse l'horizon d'un trou noir…

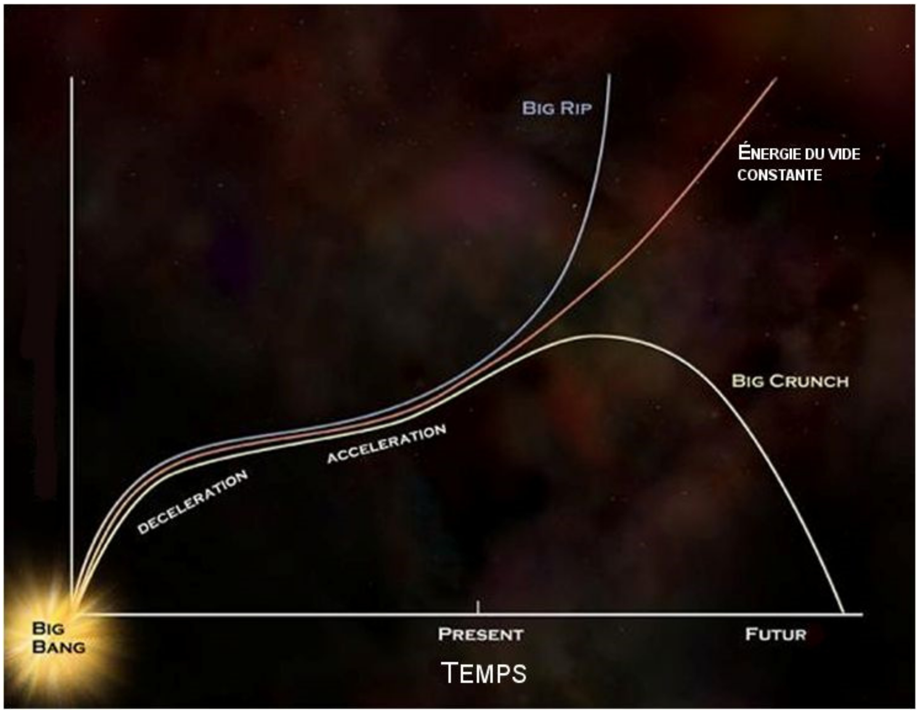
Et si la constante cosmologique n'était pas constante ?

Si on considère Λ comme une simple constante de la nature, elle aura toujours la même valeur. Cela signifie que l'univers prendra toujours de l'expansion et grandira sans cesse, comme on l'a vu sur le graphique du taux d'expansion en fonction du temps pour le modèle Λ_{cdm}. Au bout d'un temps assez long, on se retrouve avec un univers observable vide, avec seulement notre galaxie au centre. On appelle ce résultat le *Big Chill.*

Toutefois, si on suppose qu'une nouvelle particule imite l'effet de la constante cosmologique, alors l'effet de la particule peut changer en fonction du temps et de l'espace, ce qui signifie qu'on pourrait avoir un Λ variable. Voici quelques scénarios possibles si on peut avoir un tel Λ variable.

Si la constante diminue et devient même négative, l'expansion de l'univers va diminuer et pourrait même s'inverser pour devenir une contraction de l'univers qui se terminera quand le facteur d'échelle redeviendra nul et que la distance entre toutes les galaxies devient nulle. On a alors le Big Crunch, un destin déjà envisagé dans l'univers de Friedmann fermé.

Si la constante augmente, l'expansion se fera encore plus rapidement. Si elle augmente assez vite, on pourrait arriver à une situation où l'espace grandit tellement vite que la force de gravitation et les forces électromagnétiques ne pourraient plus garder ensemble les atomes formant les objets. Tous les objets de l'univers seraient déchirés par l'expansion de l'univers et même les électrons des atomes pourraient être arrachés par cette expansion trop rapide. C'est ce qu'on appelle le *Big Rip*.



www.speed-light.info/expanding_universe.htm

14.10 LA TAILLE DE L'UNIVERS

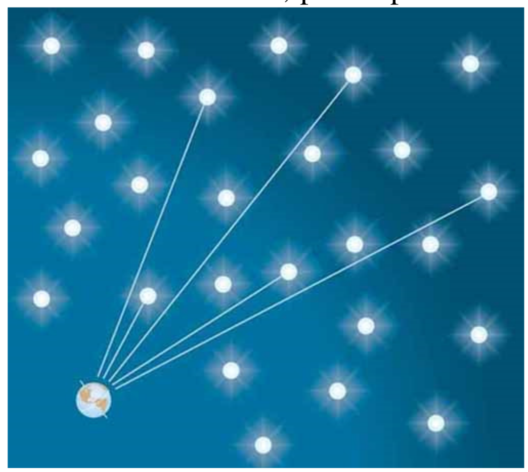
La relativité générale nous renseigne sur la taille de l'univers observable. Que peut-on savoir sur la taille de tout l'univers, à part qu'il est certainement plus grand que l'univers observable ?

Cette question est très ancienne. Déjà au 14^e siècle, Nicolas de Cues affirme que l'univers doit être infini puisque la puissance de Dieu est infinie. Quand on commence à imaginer au 16^e siècle que les étoiles sont comme des soleils très loin de La Terre, certains proposent à leur tour que l'univers est infini. Toutefois, on tombe assez vite sur un paradoxe si on pense que l'univers est infini. (Ce paradoxe est aujourd'hui appelé le paradoxe d'Olbers, du nom d'un astronome vivant au 19^e siècle. Le paradoxe était toutefois connu depuis la fin du 16^e siècle puisque Kepler en parla à cette époque.)

Le paradoxe d'Olbers

Si l'univers était infini, le ciel nocturne ne devrait pas être noir, il devrait avoir une luminosité par unité de surface aussi grande que la surface du Soleil.

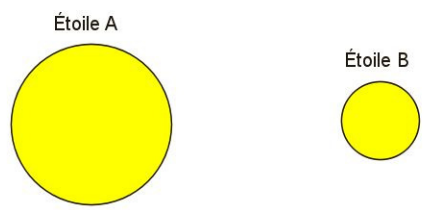
Il en est ainsi parce que dans un univers infini, on doit voir une étoile, peu importe dans quelle direction on regarde. Il est inévitable qu'il y ait une étoile dans une certaine direction si l'univers est infini. Dans l'image de droite, on montre qu'en regardant dans une certaine direction (on en montre trois ici), notre regard tombe sur une étoile. Sur cette image, on peut facilement tracer une ligne partant de la Terre qui n'arrive pas sur une étoile, mais il faut imaginer que cette image est infinie et parsemée d'étoile. Il sera alors impossible de tracer une ligne qui partira de la Terre et qui n'arrivera jamais sur une étoile.



www.crystalinks.com/olber's_paradox.html

C'est une situation similaire à ce qui se passe si vous êtes dans une forêt. Si la forêt est petite, vous pouvez voir à l'extérieur de la forêt parce que vous pouvez voir entre les arbres. Mais si la forêt est très grande, vous ne pouvez pas voir à l'extérieur parce que votre regard arrive inévitablement sur un arbre, peu importe la direction de votre regard.

On pourrait penser que les étoiles très éloignées seront beaucoup moins lumineuses vu de la Terre. C'est vrai, mais l'intensité de lumière par unité de surface angulaire est similaire à celle du Soleil. Pour illustrer cela, prenons deux étoiles identiques. L'étoile A est à une distance D_A de la Terre et l'étoile B est plus éloignée, à une distance D_B. Étant plus loin, le diamètre apparent de l'étoile B sera plus petit vu de la Terre.



L'intensité de lumière par unité de surface de l'étoile A est

$$\frac{I_A}{\text{Aire angulaire}_A} = \frac{I_A}{\pi\theta_A^2}$$

L'étoile B étant deux fois plus loin, l'intensité de la lumière est plus petite. Elle est

$$I_B = \frac{L}{4\pi D_B^2} = \frac{L}{4\pi D_A^2} \cdot \frac{D_A^2}{D_B^2} = I_A \cdot \frac{D_A^2}{D_B^2}$$

Cependant, le diamètre angulaire de l'étoile B est plus petit. Puisque

$$\theta = \frac{\text{diamètre}}{\text{distance}}$$

on a

$$\frac{\theta_A}{\theta_B} = \frac{\frac{diamètre}{D_A}}{\frac{diamètre}{D_B}} = \frac{D_B}{D_A}$$

Cette équation veut simplement dire que si l'étoile B est trois fois plus loin, son diamètre angulaire est trois fois plus petit.

L'intensité de la lumière par unité angulaire de surface de l'étoile B est donc

$$\begin{aligned}\frac{I_B}{\text{Aire angulaire}_B} &= \frac{I_B}{\pi\theta_B^2} \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot I_B\cdot\left(\frac{1}{\theta_B}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\left(I_A\cdot\frac{D_A^2}{D_B^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\theta_A}\cdot\frac{D_B}{D_A}\right)^2 \\ &= \frac{I_A}{\pi\theta_A^2}\end{aligned}$$

Cette intensité est la même intensité par unité de surface que l'étoile A. Puisque l'intensité de la lumière diminue avec le carré de la distance et que la surface angulaire de l'étoile diminue aussi avec le carré de la distance, les deux se compensent exactement et l'intensité de lumière par unité de surface angulaire des deux étoiles est identique. Elle devrait en fait être assez similaire pour toutes les étoiles, incluant le Soleil, ce qui signifie que le ciel nocturne devrait avoir la même luminosité par unité de surface angulaire que la surface du Soleil vu de la Terre.

De toute évidence, ce n'est pas ce qu'on voit. Le ciel nocturne est très noir. C'est le paradoxe d'Olbers : pourquoi le ciel est-il noir alors qu'il devrait être aussi lumineux par unité de surface que la surface du Soleil si l'univers est infini ?

Il y a quelques solutions possibles à ce paradoxe.

1) La solution évidente est que l'univers n'est pas infini. Si notre regard n'arrive pas toujours sur une étoile, c'est que l'univers est limité. C'est exactement la conclusion qu'on tire si on voit à l'extérieur d'une forêt : la forêt n'est pas très grande. Si on voit entre les étoiles, c'est que l'univers n'est pas infini.

2) La poussière interstellaire diminue l'intensité par unité de surface pour les étoiles très éloignées et c'est pour ça que le ciel n'a pas toute la même intensité par unité de surface. Ça semble être une bonne solution, mais elle n'est pas bonne. La poussière qui absorbe l'énergie de la lumière doit, par la conservation de l'énergie, le réémettre un jour ou l'autre. À l'équilibre, la poussière doit émettre autant de rayonnement qu'elle en reçoit et l'intensité par unité de surface reste donc la même.

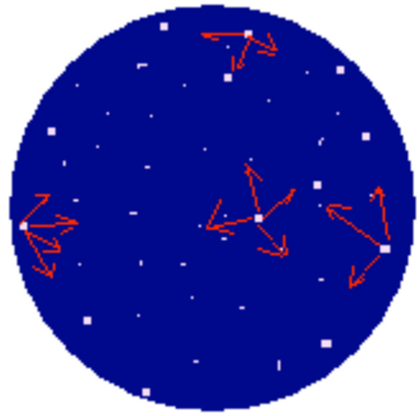
3) L'âge de l'univers est limité. Notre regard arrive effectivement toujours sur une étoile, peu importe la direction qu'on regarde, mais la lumière des étoiles très éloignée n'a pas encore eu le temps d'arriver jusqu'à nous et on ne les voit pas.

Puisqu'on reçoit uniquement la lumière des étoiles qui sont seulement à moins d'une certaine distance, la situation est identique à un univers limité. C'est une solution qui fut proposée, entre autres, par Edgar Allan Poe et Lord Kelvin.

Ainsi, si le ciel est noir, c'est donc que l'univers n'est pas infini, ou que son âge n'est pas infini.

La gravitation de Newton

Newton ne croyait pas que l'univers pouvait être fini parce que si c'était le cas, il s'effondrerait sur lui-même par la force de gravitation. On comprend pourquoi si on examine les forces de gravitation qui s'exercent sur les objets dans un univers fini. Près des bords, il n'y a des forces que d'un seul côté de l'objet et la résultante est une force dirigée vers le centre de l'univers.



www.uni.edu/morgans/astro/course/Notes/section3/new14.html

Plus près du centre, il y a des forces d'attraction dans toutes les directions et la force résultante vers le centre est plus petite. Cette force résultante est nulle uniquement au centre de l'univers, où l'objet est attiré également dans toutes les directions. Ainsi, tous les objets seraient attirés vers le centre et cet univers s'effondrerait sur lui-même.

On pourrait penser qu'on peut empêcher l'effondrement en faisant tourner cet univers pour que la force de gravitation agisse plutôt comme une force centripète. Toutefois, on a vu qu'une telle rotation amènerait plutôt à une structure en disque comme celle des galaxies spirales.

Un univers infini pourrait cependant être à l'équilibre. Dans un tel univers, tous les corps sont attirés également dans toutes les directions, comme l'objet situé au centre de l'univers fini, et la force résultante est toujours nulle. Un univers infini peut être à l'équilibre selon la gravitation de Newton.

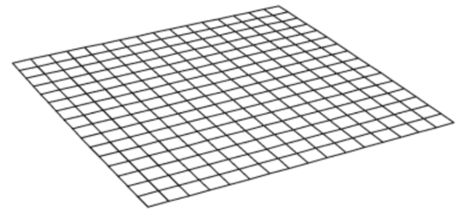
La situation est alors paradoxale. La gravitation de Newton semble indiquer que l'univers était infini et statique, donc infiniment vieux, alors que le paradoxe d'Olbers semble indiquer que l'univers n'était pas infini ou qu'il avait un âge limité. Il est assez difficile de contourner les arguments du paradoxe d'Olbers. Par contre, les arguments de la gravitation de Newton doivent être remplacés par les résultats de la relativité générale.

La relativité générale

Les résultats obtenus grâce à la relativité générale s'accordent beaucoup mieux avec le paradoxe d'Olbers. Tous les modèles montrés ici donnent un âge limité à l'univers aux environs de 10 milliards d'années. Cela est conforme à une des solutions du paradoxe d'Olbers où l'âge de l'univers est limité.

Puisque c'est l'âge de l'univers qui donne la solution du paradoxe d'Olbers, on ne sait toujours pas si l'univers est infini ou non. Mais s'il est fini, qu'est-ce qui y a quand l'univers se termine ? Voyons ce que la relativité nous dit à ce sujet.

Pour illustrer la situation, on va reprendre notre monde en deux dimensions. Dans ce monde, l'univers est une feuille. La figure de droite montre ce monde si la courbure est nulle.

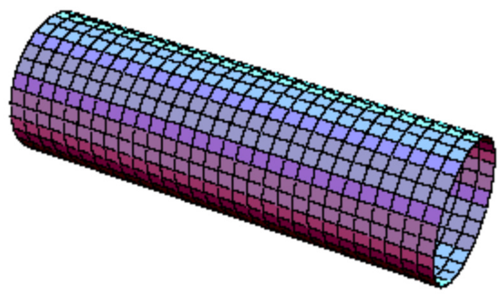


arachnoid.com/gravity/

Dans un univers plat infini, il faut imaginer que cette feuille s'étend à l'infini dans toutes les directions.

La conclusion semble inévitable : si la courbure est nulle, l'univers est infini. On ne voit pas comment on pourrait limiter la taille de l'univers sans changer la courbure de l'univers. Toutefois, c'est possible de limiter la taille de l'univers en gardant une courbure nulle. Il suffit de former un cylindre avec la feuille.

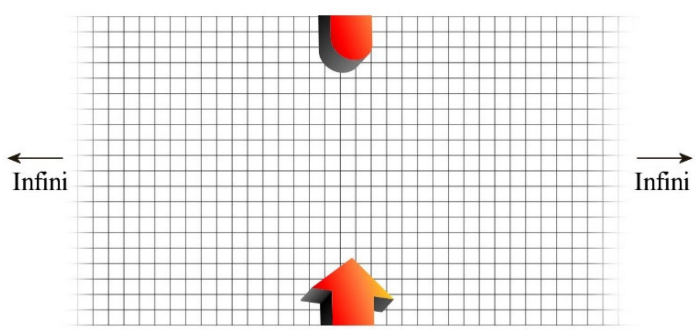
Cette surface vous semble peut-être courbée, mais mathématiquement, sa courbure est nulle. Les lignes parallèles ne se touchent pas, la somme des angles est 180° et la circonférence d'un cercle sur cette surface est π fois plus grande que le diamètre du cercle. Si la courbure change, c'est qu'il faut étirer ou contracter une ou plusieurs parties de la surface. Pour plier ainsi la surface, il n'y a pas eu d'étirement ni de contraction nulle part sur cette surface.



www.maths.manchester.ac.uk/~kd/geomview/geometry.html

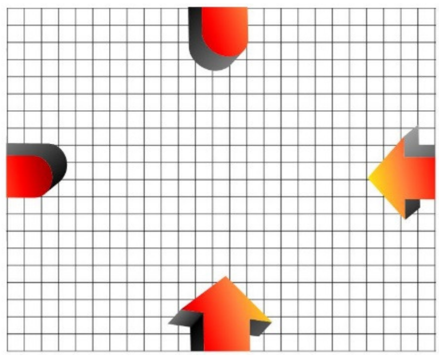
L'univers plat en deux dimensions pourrait donc avoir cette structure en forme de cylindre infini. Cela voudrait dire qu'il est infini dans une direction (qu'on va appeler x), mais limité dans une autre direction (qu'on va appeler y).

Voyons ce qui se passe dans un tel univers. Cet univers est équivalent à la situation suivante.



Cette image montre que l'univers est infini en *x*, mais limité en *y*. Dans cet univers, on revient au bas de la grille quand on sort en haut, comme le fait la flèche. Il en est ainsi parce qu'on revient à notre point de départ quand on fait le tour du cylindre. En se déplaçant dans cette direction des *y*, un habitant de cet univers reviendrait donc sans cesse au point de départ chaque fois qu'il fait le tour du cylindre.

En fait, on peut avoir une telle situation en *x* aussi. C'est impossible à représenter graphiquement par un objet en trois dimensions. Il faudrait alors connecter les deux bouts du cylindre pour former un genre de beigne, mais pour faire cela, il faut étirer une partie de la surface, signe qu'on change la courbure. Toutefois, on peut montrer mathématiquement que cette situation est possible tout en gardant une courbure nulle. On a alors l'univers plat en deux dimensions suivant.

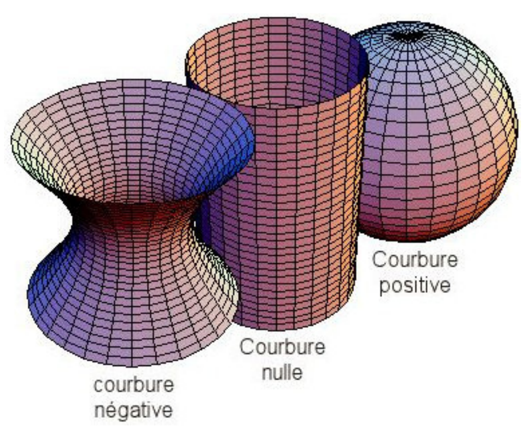


Dans ce monde, on revient aussi continuellement à la même place quand on se déplace en *x* ou en *y*. La flèche nous montre qu'en sortant à gauche on revient à droite. La distance à parcourir pour revenir au même point en *x* n'est pas nécessairement la même que celle à parcourir en *y*.

Il y a d'ailleurs quelques jeux vidéos qui sont ainsi, quand on sort de l'écran en haut, on revient en bas et quand on sort à droite, on revient à gauche. Le célèbre Pac Man vivait dans un tel monde.
http://www.youtube.com/watch?v=cVH1mCc5EvU
Le petit vaisseau et les astéroïdes du jeu *asteroid* vivaient aussi dans un tel monde.
http://www.youtube.com/watch?v=WYSupJ5r2zo

Nous avons maintenant un univers plat à deux dimensions et qui n'est pas infini. Ce monde n'est pas infini, mais n'a pas de bord. On ne peut pas arriver au bout de l'univers.

On peut faire ce genre de connexion d'un côté à l'autre de l'univers, peu importe si la courbure de l'univers est négative, nulle ou positive, comme le montre cette figure.

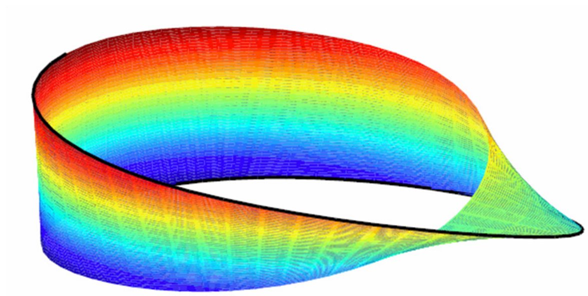


www.storyofmathematics.com/19th_gauss.html

La situation est similaire en trois dimensions. Chacune des 3 dimensions peut être infinie ou se refermer sur elle-même. Si elle est infinie, on ne revient jamais au même point en se déplaçant dans cette direction. Si elle se referme, on revient continuellement au point de départ en se déplaçant dans cette direction. On pourrait donc quitter la Terre, aller toujours en ligne droite et revenir à la Terre. Avec un télescope assez puissant, on pourrait voir la Terre en regardant dans cette direction, à condition qu'elle se trouve dans l'univers observable bien sûr. Pour l'instant, aucun indice ne laisse croire que la distance à parcourir avant de revenir à la Terre est plus petite que la taille de l'univers observable. Si c'était le cas, on pourrait observer le même objet en regardant dans des directions diamétralement opposées.

Pour l'instant, on n'a aucune idée si l'univers se referme ainsi sur lui-même ou s'il est infini, la question reste ouverte.

Une autre possibilité selon la relativité générale



www.mathworks.com/help/curvefit/multivariate-tensor-product-splines.html

Il existe une autre façon de connecter les deux côtés de l'univers à deux dimensions. On inverse la feuille avant de la connecter à l'autre côté de la feuille. On obtient alors le résultat montré à droite.

On crée alors un univers possédant une torsion. Dans cet univers, on revient également à notre point de départ quand on se déplace en ligne droite dans la direction où on a fait la connexion, mais quand on revient à notre point de départ, on est maintenant inversé par rapport à ce qu'on était quand on a commencé notre voyage. Un astronaute allant en ligne droite dans un univers connecté avec une telle torsion reviendrait sur Terre, mais il serait alors à l'envers par rapport à ce qu'il était lors de son départ. Son cœur serait à droite, son foie à gauche. Remarquez que lui se trouverait normal et il penserait que ce sont tous les habitants de la Terre qui sont inversés…

Si ça semble bizarre, rassurez-vous puisque rien n'indique pour l'instant qu'il y ait de telles torsions dans notre univers.

RÉSUMÉ DES ÉQUATIONS

La loi de Hubble-Lemaître

$$v = HD$$

Taux d'expansion de Hubble

$$H_0 = 67,4 \tfrac{km/s}{Mpc}$$

Facteurs de conversion du taux d'expansion de Hubble

$$1\,\tfrac{km/s}{Mpc} = 3,2409 \times 10^{-20}\,s^{-1}$$

$$1\,\tfrac{km/s}{Mpc} = 1,02273 \times 10^{-12}\,a^{-1}$$

$$1\,\tfrac{km/s}{Mpc} = 1,02273 \times 10^{-3}\,Ga^{-1}$$

Le facteur d'échelle aujourd'hui

$$a = 1$$

Distance dans l'univers

$$D = a \cdot d$$

où D est la distance à un certain moment,
a est le facteur d'échelle à un certain moment
et d est la distance actuelle

Lien entre le taux d'expansion de Hubble et le facteur d'échelle

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}$$

Décalage des raies spectrales dû à l'expansion de l'univers

$$\delta = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{a_e}$$

Distance à partir du décalage (si $z \ll 1$)

$$z \approx \frac{H_0}{c} D$$

$$z \approx \frac{D}{14,51 Gal} \qquad \text{(si } H_0 = 67,4 \text{ km/s/Mpc)}$$

Variation de la densité de matière avec l'expansion de l'univers

$$\rho_m = \frac{1}{a^3}\rho_{m0}$$

Densité critique de l'univers

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$\rho_{c0} = 8,53 \times 10^{-27}\,\tfrac{kg}{m^3} = 5,10\,\tfrac{m_p}{m^3} \qquad \text{(si } H_0 = 67,4 \text{ km/s/Mpc)}$$

Facteur d'échelle en fonction du temps pour le modèle d'Einstein-de Sitter

$$a=\left(\frac{t}{9,67Ga}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Âge de l'univers pour le modèle d'Einstein-de Sitter

$$t_A=9,67Ga$$

Taux d'expansion de Hubble en fonction du temps pour le modèle d'Einstein-de Sitter

$$H=\frac{2}{3t}$$

Distance actuelle d'une source lumineuse dans le modèle d'Einstein-de Sitter

$$d=29,01Gal\cdot\left(\sqrt{a_r}-\sqrt{a_e}\right)$$

Distance actuelle d'une source lumineuse à partir du décalage *z* dans le modèle d'Einstein-de Sitter

$$d=29,01Gal\cdot\left(1-\sqrt{\frac{1}{1+z}}\right)$$

Rayon de l'univers observable (en ce moment) selon le modèle d'Einstein-de Sitter

$$d=29,01\text{ Gal}$$

Rayon de l'univers observable en fonction du temps selon le modèle d'Einstein-de Sitter

$$d=3ct_A^{2/3}t_r^{1/3}$$

$$D=3ct_r$$

Valeur maximale du facteur d'échelle dans le modèle de Friedmann fermé

$$a_{\max}=\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}-1}$$

Facteur d'échelle en fonction du temps pour le modèle Λ_{cdm}

$$a=\left(\sqrt{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{v0}}}\sinh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$a=\left(0,678\cdot\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

Âge de l'univers pour le modèle Λ_{cdm}

$$t_A = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{\Omega_{v0}}{\Omega_{m0}}}$$

$$t_A = 13,80Ga$$

Taux d'expansion de Hubble en fonction du temps pour le modèle Λ_{cdm}

$$H = \sqrt{\Omega_{v0}}H_0 \frac{1}{\tanh\left(\frac{3\sqrt{\Omega_{v0}}H_0}{2}t\right)}$$

$$H = 55,8\tfrac{km/s}{Mpc}\cdot\frac{1}{\tanh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)}$$

Distance actuelle d'une source lumineuse pour le modèle Λ_{cdm}

$$d = 1,296\cdot c\int_{t_e}^{t_r}\left(\sinh\left(\frac{t}{11,69Ga}\right)\right)^{-\frac{2}{3}}dt$$

https://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate+1.296*%28sinh%28t%2F11.69%29%29%5E%28-2%2F3%29+from+0+to+13.8

Rayon de l'univers observable selon le modèle Λ_{cdm}

$$d = 47,0 \text{ Gal}$$

EXERCICES

14.1 L'expansion de l'univers

1. Une galaxie est à 300 Mal de nous. À quelle vitesse s'éloigne-t-elle ?

2. En 1929, Hubble avait obtenu une valeur de 500 km/s/Mpc pour le taux d'expansion de l'univers. Quelle est la valeur de ce taux d'expansion en Ga^{-1} ?

14.2 Le décalage des raies spectrales

3. Les raies spectrales de la galaxie elliptique géante M87 ont un décalage de z = 0,00436. Quelle est la distance de cette galaxie selon la loi de Hubble-Lemaître ?

4. À quelle longueur d'onde se retrouve la raie spectrale de l'hydrogène normalement à 656,11 nm dans le spectre d'une galaxie située à 600 millions d'années-lumière de nous ?

5. Dans le spectre du quasar PKS 2000-330, la raie spectrale de l'hydrogène, normalement à 656,1 nm, est à 3136,2 nm. Quel était le facteur d'échelle de l'univers quand la lumière de ce quasar, arrivant à nous aujourd'hui, a été émise ?

14.4 Les univers composés de matière froide

6. Quelle était la densité de l'univers quand le facteur d'échelle était de $a = 0{,}6$ si elle est de 5,10 m_p/m^3 aujourd'hui ?

14.5 Le modèle d'Einstein–de Sitter

Pour toutes ces questions, on fait comme si c'était le modèle d'Einstein-de Sitter qui décrivait correctement l'univers.

7. Quelle serait la densité critique de l'univers si le taux d'expansion de Hubble était de $H_0 = 100$ km/s/Mpc ?

8. Dans combien de temps le facteur d'échelle sera-t-il de $a = 2$?

9. Quelle sera la valeur du facteur d'échelle dans 1 milliard d'années ?

10. Quelle était la densité de l'univers quand il avait un âge de 2 milliards d'années ?

11. Dans combien de temps le taux d'expansion de Hubble sera-t-il de $H = 30$ km/s/Mpc ?

12. Quelle sera la valeur du taux d'expansion de Hubble dans 1 milliard d'années ?

13. Le décalage des raies du quasar PKS 2000-330 est de $z = 3{,}78$.
    a) Depuis combien de temps voyage cette lumière ?
    b) Quelle est la distance actuelle de ce quasar ?
    c) Quelle était la distance de ce quasar quand il a émis la lumière qu'on reçoit aujourd'hui ?

d) Dans combien de temps recevra-t-on la lumière que ce quasar émet en ce moment ?
e) Quelle sera la distance du quasar quand on recevra la lumière qu'il émet aujourd'hui ?
f) Quand recevra-t-on ou a-t-on reçu la lumière que ce quasar a émise quand l'univers avait un âge de 5 milliards d'années ?

14. Une galaxie est à 45 milliards d'années-lumière de la Terre.

a) Dans combien de temps va-t-elle entrer dans l'univers observable ?
b) Quelle sera la distance de la galaxie à ce moment ?

15. Dans ce problème, on va imaginer un univers dans lequel il n'y a que des photons. Dans ce cas, la formule de la relativité générale donne

$$\frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_r - H^2$$

où ρ_r est la densité d'énergie de la radiation (c'est-à-dire les photons). Avec des photons, la densité d'énergie diminue selon la formule

$$\rho_r = \frac{\rho_{r0}}{a^4}$$

(La densité diminue avec a^3 parce que l'énergie est diluée par l'expansion et aussi avec a parce que l'étirement de la longueur d'onde fait diminuer l'énergie.)

a) Sachant tout cela, trouvez la formule donnant le facteur d'échelle en fonction du temps pour un univers plat contenant seulement des photons.
b) Quel serait l'âge d'un tel univers qui a un facteur d'échelle de 1 ?

14.6 Les modèles de Friedmann

16. Quelle est la valeur maximale du facteur d'échelle pour un univers de Friedmann fermé avec $\Omega_{m0} = 1{,}2$?

14.9 Le modèle actuel (Λ_{cdm})

17. Quelle sera la valeur du facteur d'échelle dans 1 milliard d'années ?

18. Dans combien de temps le facteur d'échelle sera-t-il de $a = 2$?

19. Quelle était la densité de matière de l'univers quand il avait un âge de 2 milliards d'années ?

20. Quel était l'âge de l'univers quand la densité de matière était égale à la densité du vide ?

21. Quelle sera la valeur du taux d'expansion de Hubble dans 1 milliard d'années ?

22. Supposons qu'un jour, on trouve un objet dans l'univers ayant un âge de 20 milliards d'années. On pourrait alors ajuster le modèle cosmologique pour que l'univers ait au moins cet âge. Quel devrait être la valeur de Ω_v pour que l'univers ait cet âge, si on garde le même taux d'expansion de Hubble et un univers plat ?
(Ça ne sera pas facile d'isoler Ω_v. Peut-être pourriez-vous utiliser un ordinateur pour trouver la solution de l'équation finale. Par exemple, vous pouvez utiliser ce site http://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+3x2%2Bx-7%3D4x. Sur ce site, une racine s'écrit sqrt(x).)

23. Dans Wikipédia, il est écrit que le quasar ULAS J1120+0641, ayant un décalage de z = 7,085, est à une distance de 28,85 Gal. Quelle est la distance selon le modèle Λ_{cdm} présentez ici ?
(Utilisez https://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate+1.296*%28sinh%28t%2F11.69%29%29%5E%28-2%2F3%29+from+0+to+13.8)

RÉPONSES

14.2 L'expansion de l'univers

1. 6202 km/s
2. 0,511 Ga^{-1}

14.2 Le décalage des raies spectrales

3. 19,4 Mpc = 63,2 Mal
4. 683,2 nm
5. 0,2092

14.4 Les univers composés de matière froide

6. 23,6 m_p/m^3

14.5 Le modèle d'Einstein-de Sitter

7. 1,879 x 10^{-26} kg/m³ = 11,23 m_p/m^3
8. 17,68 Ga
9. 1,068
10. 119 m_p/m^3
11. 12,06 Ga
12. 61,1 km/s/Mpc
13. a) 8,74 Ga b) 15,74 Gal c) 3,29 Gal d) 25,83 Ga e) 37,5 Gal
    g) On la recevra dans 13,87 Ga
14. a) dans 26,42 Ga b) 108,3 Gal
15. a) $a = \sqrt{2H_0 t}$ b) 7,26 Ga

14.6 Les modèles de Friedmann

16. 6

14.9 Le modèle actuel (Λ_{cdm})

17. 1,070
18. 11,16 Ga
19. 118 m_p/m^3
20. 10,30 Ga
21. 65,4 km/s/Mpc
22. 0,928
23. 28,85 Gal