MAT250 : Topología

Referencias

① Allen Hatcher, "Algebraic Topology"

② Oscar Randall-Williams, "Algebraic Topology"

③ Haynes Miller, "Lectures on Algebraic Topology"

Parte I : Grupo fundamental y Revestimientos topológicos

§1. Motivación y Preliminares

La topología moderna (ie, topología algebraica) busca construir "functores" desde la categoría de espacios topológicos a la categoría de grupos (o módulos sobre un anillo, etc): un functor covariante (resp. contravariante) es una regla $\mathcal{F}$ tal que:

① A todo X esp. topológico asocia un grupo $\mathcal{F}(X)$.

② A toda $f: X \to Y$ continua asocia $\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ (resp. $\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$) morfismo de grupos tal que $\mathcal{F}(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(X)}$ y $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ (resp. $= \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$).

En particular, si $f: X \xrightarrow{\sim} Y$ homeo. entonces $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(Y)$ son isomorfos.

Ejemplo: Sea $i \in \mathbb{N}$. Más adelante construiremos el functor covariante de "homología" $X \mapsto H_i(X, \mathbb{Z})$ y calcularemos para $S^n \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$ que

$$H_i(S^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } 0 = i = n \\ \mathbb{Z} & \text{si } 0 = i < n \\ 0 & \text{si } 0 < i < n \\ \mathbb{Z} & \text{si } 0 < i = n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases}$$

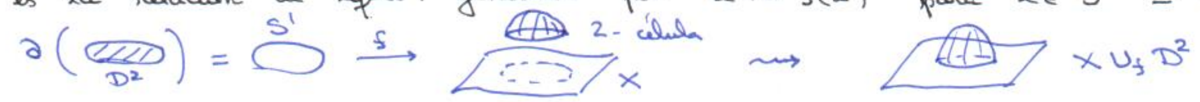
Esto implica que si $n \neq m$ entonces $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$ (Brouwer, 1912): si $n \neq m$, entonces $H_m(S^n) \not\cong H_m(S^m)$ y luego S^n no es homeo. a S^m. Por otro lado, si $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ entonces sus compactificaciones de Alexandrov, S^n y S^m, serían homeo ↯.

⚠ Convención: En todo el curso, una función continua será llamada "mapeo".

Lema del pegado: Sea $f: X \to Y$ función arbitraria entre esp. top y sean $F_1, F_2 \subseteq X$ cerrados tales que $F_1 \cup F_2 = X$. Entonces, f continua $\Leftrightarrow$ $f|_{F_1}$ y $f|_{F_2}$ son continuas.

Dem: ($\Rightarrow$) Por definición ✓ ($\Leftarrow$) Veamos que $\forall\, C \subseteq Y$ cerrado se tiene $f^{-1}(C)$ cerrado: Como $f^{-1}(C) \cap F_i \overset{\mathrm{def}}{=} (f|_{F_i})^{-1}(C)$, este último es cerrado en F_i (pues $f|_{F_i}$ continua) y luego es cerrado en X (pues $F_i \subseteq X$ cerrado). Así, $f^{-1}(C) \overset{\mathrm{def}}{=} (f^{-1}(C) \cap F_1) \cup (f^{-1}(C) \cap F_2)$ cerrado ✓ ∎

Construcción: Dados X esp. top. y $f: S^{n-1} \to X$ continua, el espacio obtenido agregando una n-célula a X mediante f es el esp. top. cociente $X \cup_f D^n := (X \sqcup D^n)/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equiv. generada por $x \sim f(x)$ para $x \in S^{n-1} \overset{\mathrm{def}}{=} \partial D^n \subseteq D^n$.



Def: Un complejo celular (finito) es un esp. top. X obtenido mediante:

① Un 0-esqueleto X^0 dado por un conj. finito con la topología discreta.

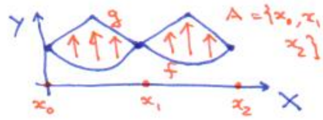
② Dado el $(n-1)$-esqueleto X^{n-1}, se obtiene el n-esqueleto X^n agregando finitas n-células mediante mapas $\{f_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}\}_{\alpha \in I}$, ie, $X^n := \left(X^{n-1} \sqcup \bigsqcup_{\alpha \in I} D^n_\alpha\right)/\sim$ donde $x \in S^{n-1}_\alpha \subseteq D^n_\alpha \sim f_\alpha(x) \in X^{n-1}$.

③ El último paso $d \in \mathbb{N}$ define $X := X^d$, y definimos $\dim(X) := d$.

§2. Homotopía

⚠ **Convención**: En todo el curso, escribiremos $I := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ (con su topología usual).

Def: Sean $f, g: X \to Y$ mapeos. Una homotopía de f a g es un mapeo $H: X\times I \to Y$ tq $H(x,0)=f(x)$ y $H(x,1)=g(x)$; en tal caso escribimos $f \simeq_H g$ (o simplemente $f\simeq g$). Más aún, si $A\subseteq X$ subconj, decimos que H es una homotopía relativa a A si además $H(a,t)=f(a)=g(a)$ $\forall a\in A$ y $\forall t\in I$, y escribimos $f \simeq g$ rel A.



Prop: "Homotópicas rel. A" es una relación de equivalencia.

Dem: ① $f\simeq f$ rel A: Para $f: X\to Y$ consideramos $H: X\times I\to Y$, $(x,t)\mapsto f(x)$ $\forall t$, i.e., $H: X\times I \xrightarrow{pr_X} X \xrightarrow{f} Y$ composición de funciones continuas, y luego continua.
Además, $H(x,0) \overset{def}{=} f(x) \overset{def}{=} H(x,1)$ y luego $f\simeq_H f$ rel A para cualquier $A\subseteq X$ subconj ✓

② $f\simeq_H g$ rel A $\Rightarrow$ $g\simeq f$ rel A: sea $\widetilde H(x,t)=H(x,1-t)$ mapeo tal que $\widetilde H(x,0)=H(x,1)\overset{def}{=}g(x)$, $\widetilde H(x,1)=H(x,0)\overset{def}{=}f(x)$ y $\widetilde H(a,t)=H(a,1-t)=f(a)=g(a)$ $\forall a\in A$ ✓

③ $f\simeq_H g$ rel A, $g\simeq_{H'} h$ rel A $\Rightarrow$ $f\simeq h$ rel A: sea $H'': X\times I\to Y$ la función

$$H''(x,t) := \begin{cases} H(x,2t), & 0\le t\le 1/2\\ H'(x,2t-1), & 1/2\le t\le 1\end{cases} \quad \text{con } H(x,2\cdot\tfrac12) \overset{def}{=} g(x) \overset{def}{=} H'(x,0)=H'(x,2\cdot\tfrac12-1).$$

Además, H'' es continua gracias al Lema del pegado ($H''|_{X\times[0,\frac12]}$ y $H''|_{X\times[\frac12,1]}$ continuas) ✓ ■

Def: Un mapeo $f: X\to Y$ es una equivalencia homotópica si $\exists\, g: Y\to X$ mapeo tal que $g\circ f\simeq Id_X$ y $f\circ g\simeq Id_Y$; decimos que X es homotópicamente equiv. a Y, i.e., $X\simeq Y$.

Ejemplo: $S^1\simeq \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ pues si $i: S^1\hookrightarrow \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ inclusión y $r:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to S^1$, $x\mapsto \frac{x}{|x|}$ entonces $r\circ i \overset{def}{=} r|_{S^1} = Id_{S^1}$ y $i\circ r: \mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $x\mapsto \frac{x}{|x|}$ verifica $i\circ r\simeq_H Id_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}$ con $H: (\mathbb{R}^2\setminus\{0\})\times I\to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $(x,t)\mapsto \frac{x}{t+(1-t)\cdot|x|}$.

Ejemplo: $\{0\}\simeq\mathbb{R}^n$ pues si $i:\{0\}\hookrightarrow\mathbb{R}^n$ inclusión y $r:\mathbb{R}^n\to\{0\}$, $x\mapsto 0$, entonces $r\circ i = Id_{\{0\}}$ y $i\circ r\simeq_H Id_{\mathbb{R}^n}$ con $H:\mathbb{R}^n\times I\to\mathbb{R}^n$, $(x,t)\mapsto tx$.

Terminología: X esp. top. es contractible si $X\simeq\{*\}$ homotópico a 1 punto (eg. $X=\mathbb{R}^n$)

Lema útil: Sean $f_0,f_1: X\to Y$ con $f_0\simeq_H f_1$ y $g_0,g_1: Y\to Z$ con $g_0\simeq_G g_1$. Entonces, $g_0\circ f_0: X\to Z$ es homotópico a $g_1\circ f_1: X\to Z$.

Dem: $g_0\circ f_0 \simeq_{H'} g_0\circ f_1$ con $H' := g_0\circ H$ y $g_1\circ f_1\simeq_{H''} g_0\circ f_1$ con $H'' := G\circ(f_1\times Id_I)$ ✓ ■

Caso particular:
$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & Y \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd} \overset{f\simeq g}{\Rightarrow} h\circ f\simeq h\circ g \text{ y } f\circ i\simeq g\circ i.$$

Teorema: La equivalencia homotópica es una relación de equivalencia:
① $X\simeq X$ para todo esp. top. X.
② $X\simeq Y \Rightarrow Y\simeq X$.
③ $X\simeq Y$, $Y\simeq Z \Rightarrow X\simeq Z$.

Dem: Para ①, considerar $f=g=Id_X$ ✓. Para ②, si $f:X\to Y$ y $g: Y\to X$ con $f\circ g\simeq Id_Y$, $g\circ f\simeq Id_X$, entonces $g: Y\to X$ es equiv. homotópica ✓ Para ③, consideramos mapas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[r, bend left, "f'"] & Z \arrow[l, bend left, "g'"] \end{tikzcd} \quad \text{con } f\circ g\simeq Id_Y,\ g\circ f\simeq Id_X,\ \text{y con } f'\circ g'\simeq Id_Z,\ g'\circ f'\simeq Id_Y$$

$\Rightarrow (g\circ g')\circ(f'\circ f) = g\circ(g'\circ f')\circ f \simeq g\circ Id_Y\circ f = g\circ f\simeq Id_X$ y $(f'\circ f)\circ(g\circ g')\simeq Id_Z$ ✓ ■

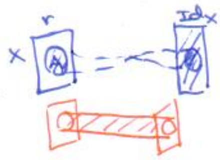
⚠ Muchas de las construcciones en Topología Algebraica permiten diferenciar espacios top. "módulo homotopía".

Def: Sea X esp. top. y $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subesp. Decimos que un mapeo $r : X \to A$ es:

① Un *retracto* de X a A si $r|_A = \mathrm{Id}_A$.

② Un *retracto de deformación* de X a A si $r|_A = \mathrm{Id}_A$ y $i \circ r \simeq \mathrm{Id}_X$.

③ Un *retracto fuerte* de X a A si $r|_A = \mathrm{Id}_A$ y $i \circ r \simeq \mathrm{Id}_X$ rel A.



Obs: ① Todo retracto de deformación define una equivalencia homotópica $A \simeq X$.

② Un retracto arbitrario *no* es una equiv. homotópica! Eg. $A = \{x_0\} \overset{i}{\hookrightarrow} X$, y $r : X \to \{x_0\}$
Aquí, i es equiv. homotópica $\iff X$ es contractible.

§3. Caminos y Lazos

Consideramos X espacio topológico fijo.

Def: Sean $x_0, x_1 \in X$. Un *camino* de x_0 a x_1 es un mapeo $\gamma : I \to X$ tq $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. Si $x_0 = x_1$, decimos que γ es un *lazo* basado (o con punto base) en x_0.

Construcción: Sea γ camino de x_0 a x_1, y sea γ' camino de x_1 a x_2. Se define el *producto* (o concatenación) de γ con γ' como el camino de x_0 a x_2 dado por

$$(\gamma \cdot \gamma')(t) := \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma'(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

⚠ El producto $\gamma \cdot \gamma'$ se "dibuja" de izquierda a derecha!

Se define el *camino inverso* γ^{-1} de x_1 a x_0 como $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$.

Se define el *lazo constante* c_{x_0} en x_0 como $c_{x_0}(t) := x_0 \ \forall t \in I$.

Obs importante: Las construcciones anteriores implican que hay una rel. de equiv. en X dada por
$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} \exists \text{ un camino en } X \text{ desde } x \text{ a } y.$$

Def: Las clases de equiv. de $\sim$ son llamadas *componentes conexas por caminos* y el conjunto (cociente) de dichas clases se denota $\pi_0(X)$. Decimos que X es *conexo por caminos* si hay sólo *una* comp. conexa por caminos.

Prop: Todo mapeo $f : X \to Y$ induce una función $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$, $[x] \mapsto [f(x)]$ que verifica: ① Si $f \simeq_H g$, entonces $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.
② Para mapeos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z$ se tiene $\pi_0(h \circ f) = \pi_0(h) \circ \pi_0(f)$
③ $\pi_0(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\pi_0(X)}$

ie, "$\pi_0 : \mathrm{Top} \to \mathrm{Conj}$ es un functor covariante".

Dem: $\pi_0(f)$ está bien definida pues si $[x] = [x'] \in \pi_0(X)$ entonces $\exists \gamma : I \to X$ camino de x a x', y luego $f \circ \gamma : I \to Y$ es un camino de $f(x)$ a $f(x')$, ie, $[f(x)] = [f(x')]$ en $\pi_0(Y)$. Como ② y ③ son verificados por def, basta probar ①: Para $x \in X$ fijo, $H(x, \cdot) : I \to Y$ es un camino de $f(x)$ a $g(x)$ y luego $[f(x)] = [g(x)] \in \pi_0(Y)$ ∎

Corolario: Si $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ equiv. homotópica, $\pi_0(f) : \pi_0(X) \xrightarrow{1:1} \pi_0(Y)$ es una biyección. ∎

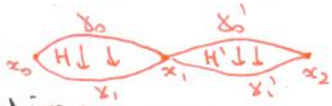
Dem: Por functorialidad, $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$ y $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X \Rightarrow \pi_0(f) \circ \pi_0(g) = \mathrm{Id}_{\pi_0(Y)}, \pi_0(g) \circ \pi_0(f) = \mathrm{Id}_{\pi_0(X)}$

Ejemplos: ① Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ conjunto finito *discreto* con $n \geq 2$, entonces X *no* es contractible (ie, $X \not\simeq \{*\}$): Todo camino $\gamma : I \to X$ es constante y luego $\pi_0(X) \cong X$ tiene cardinal $n \geq 2$, mientras que $\pi_0(\{*\}) \cong \{*\}$ tiene cardinal 1.

② Sea $A = \{x_1, \dots, x_n\} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^m$ conj. finito de puntos, con $n \geq 2$, entonces $\nexists\, r : \mathbb{R}^m \to A$ retracto: sino $r \circ i = \mathrm{Id}_A$ implica una factorización $\mathrm{Id}_{\pi_0(A)} : \pi_0(A) \cong A \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(\mathbb{R}^m) \simeq \{*\} \xrightarrow{\pi_0(r)} \pi_0(A) \cong A$ pero $\pi_0(i) : A \to \{*\}$ *no* puede ser inyectiva!

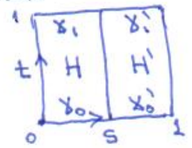
Def: Dos caminos $\gamma, \gamma' : I \to X$ desde x_0 a x_1 son <u>homotópicos</u> (como caminos) si son homotópicos relativos a $A = \{0,1\} \subseteq I$ (i.e, $\gamma(0) = \gamma'(0) = x_0$ y $\gamma(1) = \gamma'(1) = x_1$ están fijos durante la homotopía), y escribimos $\gamma \simeq \gamma'$.

Lema del producto: Si $\gamma_0 \underset{H}{\simeq} \gamma_1$ son caminos de x_0 a x_1 y $\gamma_0' \underset{H'}{\simeq} \gamma_1'$ son caminos de x_1 a x_2, entonces $\gamma_0 \cdot \gamma_0' \simeq \gamma_1 \cdot \gamma_1'$ son caminos homotópicos de x_0 a x_2.



Dem: Como $H(1,t) = x_1 = H'(0,t)$ $\forall t \in I$, dichas homotopías definen

$$H'' : I \times I \to X, \quad (s,t) \mapsto \begin{cases} H(2s,t) & , 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ H'(2s-1,t) & , \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$



función continua (Lema del pegado). Así:

$H''(\cdot,0) \overset{def}{=} (\gamma_0 \cdot \gamma_0')(\cdot)$, $H''(\cdot,1) \overset{def}{=} (\gamma_1 \cdot \gamma_1')(\cdot)$, $H''(0,t) \overset{def}{=} x_0$, $H''(1,t) \overset{def}{=} x_1$ ■

De manera completamente análoga (Ejercicio) se prueba:

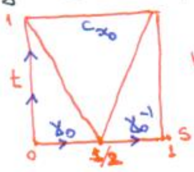
Prop: Sea $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 : I \to X$ caminos de x_0 a x_1, x_1 a x_2 y x_2 a x_3, resp. Entonces:

① $(\gamma_0 \cdot \gamma_1) \cdot \gamma_2 \simeq \gamma_0 \cdot (\gamma_1 \cdot \gamma_2)$ de x_0 a x_3.

② $\gamma_0 \cdot c_{x_1} \simeq \gamma_0 \simeq c_{x_0} \cdot \gamma_0$ de x_0 a x_1.

③ $\gamma_0 \cdot \gamma_0^{-1} \simeq c_{x_0}$ de x_0 a x_0 y $\gamma_0^{-1} \cdot \gamma_0 \simeq c_{x_1}$ de x_1 a x_1.

Eg.



$$H(s,t) = \begin{cases} \gamma_0(2s), & s \in \left[0, \frac{1-t}{2}\right] \\ \gamma_0(1-t), & s \in \left[\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}\right] \\ \gamma_0(2-2s), & s \in \left[\frac{1+t}{2}, 1\right] \end{cases}$$

§4. <u>Grupo fundamental</u>

Terminología: En todo lo que sigue, un <u>espacio basado</u> es (X, x_0) donde X esp. top. y donde $x_0 \in X$. (punto base). Un mapeo de espacios basados $f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ es un mapeo $f : X \to Y$ tal que $f(x_0) = y_0$. Además, diremos que una homotopía relativa a $A := \{x_0\} \subseteq X$ es una <u>homotopía basada en x_0</u>. Por §3, tenemos:

Teorema/Def: Sea (X,x_0) un espacio basado, y sea $\pi_1(X,x_0)$ el conjunto de clases de equiv. homotópicas $[\gamma]$ de lazos $\gamma : I \to X$ basados en x_0. Entonces, el producto $[\gamma]\cdot[\gamma'] := [\gamma \cdot \gamma']$ y $e := [c_{x_0}]$ dotan a $\pi_1(X,x_0)$ de estructura de grupo, llamado <u>grupo fundamental</u> de (X,x_0)

Veamos que $\pi_1 : (\mathrm{Top},*) \to \mathrm{Grupos}$ define un functor covariante:

Prop: Todo mapeo basado $f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ induce una función $\pi_1(f) : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ dada por $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ tal que:

① $\pi_1(f)$ es un morfismo de grupos.

② Si $f \simeq g$ mapeos homotópicos basados en $x_0 \in X$, entonces $\pi_1(f) = \pi_1(g)$.

③ Para mapeos basados $(X,x_0) \xrightarrow{f} (Y,y_0) \xrightarrow{h} (Z,z_0)$ se tiene $\pi_1(h \circ f) = \pi_1(h) \circ \pi_1(f)$.

④ $\pi_1(Id_X) = Id_{\pi_1(X,x_0)}$.

Dem: Como $\gamma \simeq \gamma'$ como caminos implica $f \circ \gamma \simeq f \circ \gamma'$, $\pi_1(f)$ está bien definida. Para ① notamos que $f \circ c_{x_0} \overset{def}{=} c_{y_0}$ y $f \circ (\gamma \cdot \gamma') \overset{def}{=} (f \circ \gamma) \cdot (f \circ \gamma')$ ✓ Para ②, notamos que como $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ entonces $f \simeq g$ rel $\{x_0\}$ implica $f \circ \gamma \simeq g \circ \gamma$ rel $\{0,1\}$ ✓ ③ y ④ por def ✓ ■

Notación: Sea $u : I \to X$ un camino de x_0 a x_1. Entonces, definimos el <u>cambio de punto base</u> inducido por u mediante el isomorfismo de grupos

$$u_\# : \pi_1(X,x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,x_1), \ [\gamma] \mapsto [u^{-1} \cdot \gamma \cdot u]$$

con inversa $u_\#^{-1} \overset{def}{=} (u^{-1})_\#$.

Usando los resultados de §3, notamos que el cambio de punto base verifica que:

Prop: Sea $u : I \to X$ un camino de x_0 a x_1. Entonces, $u_\#$ cumple:

1. Si $u \simeq u'$ como caminos de x_0 a x_1, entonces $u_\# = u'_\#$.
2. $(c_{x_0})_\# = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}$
3. Si $v : I \to X$ camino de x_1 a x_2, entonces $(u \cdot v)_\# = v_\# \circ u_\#$ (ie, $(\cdot)_\#$ contravariante)
4. Si $x_0 = x_1$ entonces $u_\#$ es el automorfismo de $\pi_1(X,x_0)$ dado por conjugación por $[u] \in \pi_1(X,x_0)$.
5. Sea $f : X \to Y$ mapeo y sean $y_0 := f(x_0)$, $y_1 := f(x_1)$ entonces hay un diagrama conmutativo

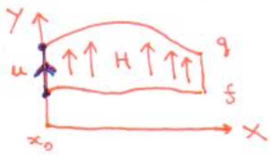
$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "\pi_1(f)"] \arrow[d, "u_\#", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[d, "\cong"', "(f\circ u)_\#"] \\ \pi_1(X,x_1) \arrow[r, "\pi_1(f)"] & \pi_1(Y,y_1) \end{tikzcd}$$

, ie, $(f\circ u)_\# \circ \pi_1(f) = \pi_1(f) \circ u_\#$.

Dem: ① - ④ quedan como Ejercicio. Para ⑤, notamos que si $[\gamma] \in \pi_1(X,x_0)$ entonces tenemos
$$((f\circ u)_\# \circ \pi_1(f))([\gamma]) \overset{\text{dy}}{=} (f\circ u)_\#([f\circ\gamma]) \overset{\text{dy}}{=} [(f\circ u)^{-1}\cdot(f\circ\gamma)\cdot(f\circ u)] \overset{\text{dy}}{=} [f\circ(u^{-1}\cdot\gamma\cdot u)] \overset{\text{dy}}{=} \pi_1(f)(u_\#([\gamma]))$$ ■

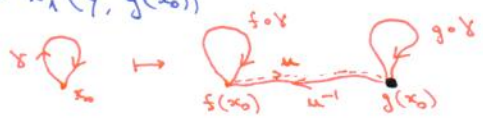
⚠ Los grupos $\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1)$ no son canónicamente isomorfos (hay que elegir u).

Construcción: Sea $H : X \times I \to Y$ una homotopía de $f : X \to Y$ a $g : X \to Y$ y sea $x_0 \in X$ un punto base. Entonces, $u := H(x_0, \cdot) : I \to Y$ es un camino de $f(x_0)$ a $g(x_0)$ en Y.



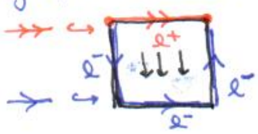
y hay un diagrama natural

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[d, "u_\#", "\cong"'] \\ \pi_1(X,x_0) \arrow[ur, "\pi_1(f)"] \arrow[r, "\pi_1(g)"] & \pi_1(Y, g(x_0)) \end{tikzcd} \quad (\star)$$



Lema: El diagrama $(\star)$ es conmutativo, ie, $u_\# \circ \pi_1(f) = \pi_1(g)$.

Dem: Sea $\gamma : I \to X$ un lazo basado en x_0 y sea $F : I\times I \xrightarrow{\gamma\times \mathrm{Id}_I} X \times I \xrightarrow{H} Y$ composición. Sea $\ell^+ : I \to I\times I$, $s \mapsto (s,1)$ camino entre $(0,1)$ y $(1,1)$ y sea $\ell^- : I \to I \times I$ camino entre $(0,1)$ y $(1,1)$ obtenido al concatenar $s \mapsto (0, 1-s)$, $s \mapsto (s,0)$ y $s \mapsto (1,s)$:



Consideremos $L : I\times I \to I \times I$, $(s,t) \mapsto t\cdot \ell^-(s) + (1-t)\,\ell^+(s)$ homotopía entre ℓ^+ y ℓ^- como caminos entre $(0,1)$ y $(1,1)$.

$\Rightarrow F\circ\ell^+ \simeq F\circ \ell^-$ como caminos entre $F(0,1) \overset{\text{dy}}{=} H(x_0,1) \overset{\text{dy}}{=} g(x_0)$ y $F(1,1) \overset{\text{dy}}{=} H(x_0,1) = g(x_0)$.

Basta entonces observar que $[F\circ \ell^+] \underset{t=1}{\overset{\text{dy}}{=}} [g\circ\gamma]$ y $[F\circ\ell^-] \underset{\text{Ejer.}}{\overset{\text{dy}}{=}} [u^{-1}\cdot\underset{t=0}{(f\circ\gamma)}\cdot u]$ ■

Teorema: Sea $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ equivalencia homotópica y sea $x_0 \in X$. Entonces,
$\pi_1(f) : \pi_1(X,x_0) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(Y, f(x_0))$, $[\gamma] \mapsto [f\circ\gamma]$ es un isomorfismo.

Dem: Sea $g : Y \to X$ con $f\circ g \underset{H}{\simeq} \mathrm{Id}_Y$ y $g \circ f \underset{H'}{\simeq} \mathrm{Id}_X$. Consideramos $u' : I \to X$ dado por $t \mapsto H'(x_0, 1-t)$ con $u'(0) \overset{\text{dy}}{=} x_0$ y $u'(1) \overset{\text{dy}}{=} (g\circ f)(x_0)$. $\overset{\text{Lema}}{\Rightarrow} u'_\# \circ \pi_1(\mathrm{Id}_X) = \pi_1(g\circ f) = \pi_1(g)\circ\pi_1(f)$ y luego (como $u'_\#$ isomorfismo), $\pi_1(f)$ inyectiva y $\pi_1(g) : \pi_1(Y, f(x_0)) \twoheadrightarrow \pi_1(X, (g\circ f)(x_0))$ sobre.

Veamos que $\pi_1(g)$ inyectiva ($\Rightarrow \pi_1(f) = (\pi_1(g))^{-1} \circ u'_\#$ isom ✓): Consideramos $u : I \to Y$ dado por $t \mapsto H(f(x_0), 1-t)$ con $u(0) \overset{\text{dy}}{=} f(x_0)$ y $u(1) \overset{\text{dy}}{=} (f\circ g)(f(x_0)) =: y_1$.
$\overset{\text{Lema}}{\Rightarrow} u_\# \circ \pi_1(\mathrm{Id}_Y) = \pi_1(f\circ g) = \pi_1(f)\circ\pi_1(g)$ con $\pi_1(f) : \pi_1(X, (g\circ f)(x_0)) \to \pi_1(Y, y_1) \Rightarrow \pi_1(g)$ iny ■

Def: Un esp. top. X es simplemente conexo si $\pi_0(X) \cong \{*\}$ y si $\pi_1(X,x_0) \cong \{1\}$ $\forall x_0 \in X$.

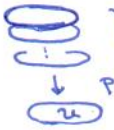
Ejemplo: Si X es contractible entonces X simplemente conexo (eg. $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) \cong \{1\}$).

Lema útil: X simplemente conexo $\Leftrightarrow$ $\forall x_0, x_1 \in X$ existe una única clase homotópica de $\gamma : x_0 \rightsquigarrow x_1$

Dem: $(\Rightarrow)$ Si $\gamma, \gamma' : I \to X$ son caminos de x_0 a x_1 $\Rightarrow [\gamma^{-1}\cdot\gamma'] \in \pi_1(X,x_0) = \{[c_{x_0}]\}$ y luego $\gamma^{-1}\cdot\gamma' \simeq c_{x_0}$, ie, $\gamma \simeq \gamma'$ ✓ $(\Leftarrow)$ X es conexo por caminos por hipótesis. Además, si γ es un lazo en x_0 entonces (como c_{x_0} también lo es) $\gamma \simeq c_{x_0}$, ie, $\pi_1(X,x_0) \cong \{1\}$ ■

§5. Revestimientos topológicos

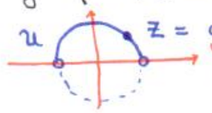
Def: Un revestimiento (o "covering") de un esp. top X es un mapeo $p:\tilde{X}\to X$ tal que $\forall x\in X$ existe $x\in\mathcal{U}$ vecindad abierta tal que $p^{-1}(\mathcal{U})=\bigsqcup_{\alpha\in I}V_\alpha$ unión disjunta de abiertos $V_\alpha\subseteq\tilde{X}$ tales que $p|_{V_\alpha}:V_\alpha\xrightarrow{\sim}\mathcal{U}$ son homeomorfismos; decimos que dicho abierto $\mathcal{U}\subseteq X$ trivializa $p:\tilde{X}\to X$ en $x\in\mathcal{U}\subseteq X$.



Ejemplos: ① Todo homeo. es un revestimiento.

② Si $p:\tilde{X}\to X$, $q:\tilde{Y}\to Y$ revestimientos, entonces $p\times q:\tilde{X}\times\tilde{Y}\to X\times Y$ revestimiento.

③ Sea $S^1\cong\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}\subseteq\mathbb{C}$ y $p:\mathbb{R}\to S^1$, $t\mapsto e^{2\pi i t}$. Consideremos el abierto $\mathcal{U}=\mathcal{U}_{y>0}:=\{x+iy\in S^1,\ y>0\}$:



$\Rightarrow p^{-1}(\mathcal{U})=\bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}}]j,j+\frac{1}{2}[$ y $p|_{]j,j+\frac{1}{2}[}:]j,j+\frac{1}{2}[\to\mathcal{U}$ es continua biyectiva con inversa continua $\mathcal{U}\to]j,j+\frac{1}{2}[$, $x+iy\mapsto j+\arccos(x)/2\pi$ ✓

El mismo cálculo en $\mathcal{U}_{y<0}$, $\mathcal{U}_{x<0}$ y $\mathcal{U}_{x<0}$ muestra que $p:\mathbb{R}\to S^1$ es un revestimiento.

④ Sea $S^1\cong\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}\subseteq\mathbb{C}$ y $p:S^1\to S^1$, $z\mapsto z^n$. Si $\xi:=e^{2\pi i/n}$ y para $y\in S^1$ fijamos $z_0\in S^1$ raíz n-ésima de y (ie, $z_0^n=y$) entonces $p^{-1}(y)=\{z_0,\xi z_0,\xi^2 z_0,\dots,\xi^{n-1}z_0\}$.
Si $V_0:=\{z\in S^1,\ 0<\arg(z/z_0)<2\pi/n\}$, ie, "$\measuredangle z\in]\measuredangle z_0,\measuredangle \xi z_0[$"
y $V_i:=\xi^i V_0$ para $i\in\{0,1,\dots,n-1\}$ $\Rightarrow p^{-1}(S^1\setminus\{y\})=\bigsqcup_{i=0}^{n-1}V_i$ y además $p|_{V_i}:V_i\xrightarrow{\sim}S^1\setminus\{y\}$ es un homeomorfismo (dilata el sector circular), ie, p revestimiento.

⑤ Plano proyectivo real: En $S^2\subseteq\mathbb{R}^3$ consideramos la rel. de equiv. $\sim$ generada por $x\sim -x$ y $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}):=S^2/\sim$. Veamos que el mapeo cociente $p:S^2\twoheadrightarrow\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es un revestimiento: sea $V:=\{(x,y,z)\in S^2,\ z\neq 0\}$ y $\mathcal{U}:=p(V)$. Como $p^{-1}(\mathcal{U})=V$ abierto, $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es abierto. Escribamos $V=V_{z<0}\sqcup V_{z>0}$ y construyamos una inversa de $f=p|_{V_{z>0}}:V_{z>0}\to\mathcal{U}$ (idem para $V_{z<0}$): Por definición de topología cociente de $\mathcal{U}=V/\sim$, una función continua $g:\mathcal{U}\to V_{z>0}$ es una función $\tilde{g}:V\to V_{z>0}$ continua y constante en las clases de equiv. Así, $\tilde{g}:V\to V_{z>0}$, $(x,y,z)\mapsto(x,y,z)$ si $z>0$ (resp. $(-x,-y,-z)$ si $z<0$) induce $g=f^{-1}$.

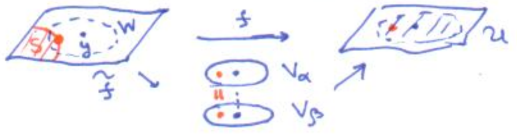
Def: Sea $p:\tilde{X}\to X$ un revestimiento y $f:Y\to X$ un mapeo. Un levantamiento de f resp. a p es un mapeo $\tilde{f}:Y\to\tilde{X}$ tal que $p\circ\tilde{f}=f$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\exists\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Lema: Sea $p:\tilde{X}\to X$ revestimiento y sean $\tilde{f}_0,\tilde{f}_1:Y\to\tilde{X}$ levantamientos de un mapeo $f:Y\to X$ resp. a p. Entonces, $S:=\{y\in Y,\ \tilde{f}_0(y)=\tilde{f}_1(y)\}$ es abierto y cerrado en Y. En part, si Y es conexo entonces $S=\emptyset$ o $S=Y$.

Dem: S abierto: Sea $y\in S$ y $\mathcal{U}\subseteq X$ abierto con $f(y)\in\mathcal{U}$ y con $p^{-1}(\mathcal{U})=\bigsqcup_{\alpha\in I}V_\alpha$. Como $\tilde{f}_0(y)=\tilde{f}_1(y)$, pertenecen al mismo $V_\alpha\subseteq\tilde{X}$ abierto. Así, en $W:=\tilde{f}_0^{-1}(V_\alpha)\cap\tilde{f}_1^{-1}(V_\alpha)\subseteq Y$ tenemos $p|_{V_\alpha}\circ\tilde{f}_0|_W\overset{\text{def}}{=}f|_W\overset{\text{def}}{=}p|_{V_\alpha}\circ\tilde{f}_1|_W\underset{\text{homeo.}}{\overset{p|_{V_\alpha}}{\Longrightarrow}}\tilde{f}_0=\tilde{f}_1$ en W, ie, $y\in W\subseteq S$ vecindad abierta ✓

S cerrado: Sea $y\in\bar{S}$ y sup. $y\notin S$, ie, $\tilde{f}_0(y)\neq\tilde{f}_1(y)$. Sea $\mathcal{U}\subseteq X$ abierto con $f(y)\in\mathcal{U}$ y con $p^{-1}(\mathcal{U})=\bigsqcup_{\alpha\in I}V_\alpha$. Como $\tilde{f}_0(y)\neq\tilde{f}_1(y)$, $\tilde{f}_0(y)\in V_\alpha$ y $\tilde{f}_1(y)\in V_\beta$ con $\alpha\neq\beta$, y además $W:=\tilde{f}_0^{-1}(V_\alpha)\cap\tilde{f}_1^{-1}(V_\beta)\subseteq X$ es una vecindad abierta de $y\in\bar{S}$ que por ende cumple $W\cap S\neq\emptyset$.
$\Rightarrow V_\alpha\cap V_\beta\neq\emptyset$ por definición de S y pues $p|_{V_\alpha}:V_\alpha\xrightarrow{\sim}\mathcal{U}$, $p|_{V_\beta}:V_\beta\xrightarrow{\sim}\mathcal{U}$ son homeos ↯ ✓ ■



Lema técnico (Levantamiento de homotopías): Sea $p: \tilde{X} \to X$ revestimiento y sean $f_0, f_1 : Y \to X$ mapeos. Entonces, para toda homotopía $H: Y \times I \to X$ de f_0 a f_1 y todo levantamiento $\tilde{f}_0$ de f_0 resp. a p, existe una única homotopía $\tilde{H}: Y \times I \to \tilde{X}$ tal que:

① $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{f}_0(\cdot)$, y

② $p \circ \tilde{H} = H$

Dem: Ver A. Hatcher página 30 (cf. O. Randal-Williams Lemma 3.1.9). ■

Al considerar $Y = \{*\}$ en el Lema anterior obtenemos:

Corolario (Levantamiento de caminos): Sea $p: \tilde{X} \to X$ revestimiento, $\gamma: I \to X$ un camino y $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tal que $p(\tilde{x}_0) = \gamma(0)$. Entonces, existe un único camino $\tilde{\gamma}: I \to \tilde{X}$ tal que

① $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$, y

② $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$

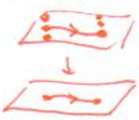
Corolario: Sea $p: \tilde{X} \to X$ revestimiento y sean $\gamma_0, \gamma_1 : I \to X$ caminos de x_0 a x_1 en X, y sean $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1 : I \to \tilde{X}$ los levantamientos a $\tilde{X}$ partiendo en $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Luego, si $\gamma_0 \simeq_H \gamma_1$ como caminos entonces $\tilde{\gamma}_0 \simeq_{\tilde{H}} \tilde{\gamma}_1$ como caminos. En part, $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$ es el mismo punto.

Dem: Sea $\tilde{H}: I \times I \to \tilde{X}$ el levantamiento de la homotopía H con $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{\gamma}_0(\cdot)$. Entonces:

① $\tilde{H}(\cdot, 1)$ es un levantamiento de γ_1 partiendo en $\tilde{x}_0$ y luego (unicidad!) es $\tilde{\gamma}_1$.

② $H(0, \cdot)$ y $H(1, \cdot)$ son caminos constantes y luego $\tilde{H}(0,\cdot)$ y $\tilde{H}(1,\cdot)$ también. ■

Prop: Sea X esp. top. conexo por caminos y $p: \tilde{X} \to X$ un revestimiento. Entonces, todas las fibras $p^{-1}(x)$, con $x \in X$, están en biyección. El cardinal $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de las fibras es el grado del revestimiento y decimos que $p: \tilde{X} \xrightarrow{n:1} X$ es un "revestimiento n a 1".



Dem: Sea $\gamma: I \to X$ camino de x_0 a x_1, y para $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ sea $\tilde{\gamma}_{y_0}$ el único levantamiento de γ partiendo en $y_0 \in \tilde{X}$. Consideremos la función "punto final" dada por $\varphi_\gamma : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$, $y_0 \mapsto \tilde{\gamma}_{y_0}(1)$. y similarmente $\varphi_{\gamma^{-1}} : p^{-1}(x_1) \to p^{-1}(x_0)$. Así, para $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ tenemos $\varphi_{\gamma^{-1}}(\varphi_\gamma(y_0)) =$ punto final de $(\widetilde{\gamma^{-1}})_{z_0}$ con $z_0 = \tilde{\gamma}_{y_0}(1)$, ie, punto final de $(\widetilde{\gamma \cdot \gamma^{-1}})_{y_0} \underset{\text{corolario}}{=}$ punto final de $(\widetilde{c_{x_0}})_{y_0} \overset{\text{def}}{=} y_0$. Así, $\varphi_{\gamma^{-1}} \circ \varphi_\gamma = Id_{p^{-1}(x_0)}$ y similarmente $\varphi_\gamma \circ \varphi_{\gamma^{-1}} = Id_{p^{-1}(x_1)}$ ■

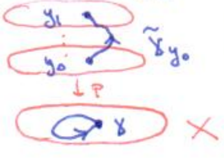
Ejemplo: La proyección $p: S^2 \twoheadrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es un revestimiento de grado 2.

Lema útil: Sea (X, x_0) espacio basado, $p: \tilde{X} \to X$ revestimiento y sea $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Entonces, el morfismo de grupos $\pi_1(p): \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$ es inyectivo.

Dem: Sea $\tilde{\gamma}: I \to \tilde{X}$ un lazo en $\tilde{x}_0$ tal que $\pi_1(p)([\tilde{\gamma}]) = [c_{x_0}]$, ie, $\gamma := p \circ \tilde{\gamma} \simeq_H c_{x_0}$. Sea $\tilde{H}$ el levantamiento de H partiendo de $\tilde{\gamma}$, entonces $\tilde{H}$ es una homotopía de $\tilde{\gamma}$ a un levantamiento de c_{x_0}, ie, a $c_{\tilde{x}_0}$ (unicidad!), ie, $[\tilde{\gamma}] = [c_{\tilde{x}_0}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. ■

Construcción fundamental: Sea (X, x_0) espacio basado y $p: \tilde{X} \to X$ revestimiento. Dado un lazo $\gamma: I \to X$ en $x_0 \in X$, la función "punto final" $\varphi_\gamma : p^{-1}(x_0) \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x_0)$, $y_0 \mapsto \tilde{\gamma}_{y_0}(1)$ es una biyección y (por el Corolario anterior) sólo depende de la clase de homotopía de γ. Más aún, se verifica que si γ' es otro lazo en $x_0 \in X$ entonces $\varphi_{\gamma \cdot \gamma'} \overset{\text{dy}}{=} \varphi_{\gamma'} \circ \varphi_\gamma$, ie,

Hay una acción (derecha!) de $\pi_1(X, x_0)$ en $p^{-1}(x_0)$:



$\boxed{y_1 \overset{\text{def}}{=} \gamma \cdot y_0}$

Teorema: Sea X esp. top. conexo por caminos y sea $p:\tilde X\to X$ revestimiento. Para todo $x_0\in X$:

① $\pi_1(X,x_0)$ actúa transitivamente en $p^{-1}(x_0)$ $\iff$ $\tilde X$ es conexo por caminos.

② El estabilizador de $y_0\in p^{-1}(x_0)$ es $\mathrm{Im}(\pi_1(p):\pi_1(\tilde X,y_0)\to\pi_1(X,x_0))\le \pi_1(X,x_0)$.

③ Si $\tilde X$ es conexo por caminos, hay una biyección $\pi_1(X,x_0)/\pi_1(p)(\pi_1(\tilde X,y_0)) \xrightarrow{1:1} p^{-1}(x_0)$.

→ "acción por monodromía"

Dem: ① ($\Leftarrow$): Sean $y_0,y_1\in p^{-1}(x_0)$ y sea $\tilde\gamma: I\to\tilde X$ camino de y_0 a y_1 ($\tilde X$ conexo por caminos). Luego, $\gamma:=p\circ\tilde\gamma$ es un lazo en $x_0\in X$ y $\tilde\gamma$ es su levantamiento partiendo en y_0, y así $y_1 \overset{\text{def}}{=} [\gamma]\cdot y_0$ ✓ Para ($\Rightarrow$): Si existieran $y_0,y_1\in\tilde X$ en diferentes componentes por caminos, elegimos $\gamma:I\to X$ camino de $p(y_0)$ a $p(y_1)$ y un levantamiento $\tilde\gamma$ partiendo en y_0. Así, $\tilde\gamma$ es un camino en $\tilde X$ de y_0 a cierto $z_0\in\tilde X$ donde $p(z_0)\overset{\text{def}}{=}p(y_1)$. Sin embargo, la acción de $\pi_1(X,x_0)$ en $p^{-1}(x_0)$, con $x_0=p(z_0)=p(y_1)$, es transitiva y luego $\exists\,\tilde\delta$ camino entre y_1 y z_0 ↯

Para ②: Si $[\gamma]\cdot y_0=y_0$ entonces el levantamiento $\tilde\gamma$ que comienza en y_0 también termina en y_0 i.e., $\tilde\gamma$ lazo en y_0 y $\gamma=p\circ\tilde\gamma$, i.e., $[\gamma]=\pi_1(p)([\tilde\gamma])\in \mathrm{Im}(\pi_1(p):\pi_1(\tilde X,y_0)\to\pi_1(X,x_0))$. Recíprocamente, si $[\tilde\gamma]\in\pi_1(\tilde X,y_0)$ entonces $\tilde\gamma$ es el único levantamiento de $\gamma:=p\circ\tilde\gamma$ partiendo en y_0 y luego $[\gamma]\cdot y_0 \overset{\text{def}}{=} y_0$ (punto final de $\tilde\gamma$) ✓ ③ se deduce de la Teoría de grupos ✓ ■

Def: Un revestimiento $p:\tilde X\to X$ es un revestimiento universal si $\tilde X$ es simplemente conexo, i.e., $\pi_0(\tilde X)=\{*\}$ y $\pi_1(\tilde X,\tilde x_0)\cong\{1\}$.

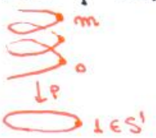
Corolario: Sea $p:\tilde X\to X$ un revestimiento universal, entonces cada $\tilde x_0\in p^{-1}(x_0)$ determina una biyección $\ell:\pi_1(X,x_0)\xrightarrow{\sim}p^{-1}(x_0)$, $[\gamma]\mapsto[\gamma]\cdot\tilde x_0$

⚠ La biyección ℓ permite definir una estructura de grupo en $p^{-1}(x_0)$: si $y_0,y_1\in p^{-1}(x_0)$ entonces $y_0\cdot y_1:=\ell(\ell^{-1}(y_0)\cdot\ell^{-1}(y_1))$ se obtiene eligiendo un camino $\tilde\gamma:I\to\tilde X$ desde el punto $\tilde x_0$ (fijo!) a y_1 y considerando $\tilde\eta$ el levantamiento del lazo $p\circ\tilde\gamma$ en x_0 tal que $\tilde\eta$ parte en y_0, y así $\ell(\ell^{-1}(y_0)\cdot\ell^{-1}(y_1))\overset{\text{def}}{=}\tilde\eta(1)$.

§6. Cálculo de $\pi_1(S^1,1)$

Teorema: Sea $\gamma:I\to S^1$, $t\mapsto e^{2\pi i t}$ lazo en $1\in S^1$. Entonces, $\pi_1(S^1,1)\xrightarrow{\sim}(\mathbb Z,+)$, $[\gamma]\mapsto 1$ isomorf.

Dem: Sea $p:\mathbb R\to S^1$, $t\mapsto e^{2\pi i t}$ un revestimiento universal de S^1 (pues $\pi_1(\mathbb R,x_0)\simeq\{1\}$), con $p^{-1}(1)=\mathbb Z\subseteq\mathbb R$ y elijamos $\tilde x_0:=0\in\mathbb Z$ punto base para la biyección $\ell:\pi_1(S^1,1)\xrightarrow{\sim}\mathbb Z$.



Para calcular $\ell^{-1}(m)$ elegimos un camino $\tilde\gamma_m:I\to\mathbb R$ de 0 a m (eg. $\tilde\gamma_m(t)=mt$) y luego $\ell^{-1}(m)=[p\circ\tilde\gamma_m]$ da m vueltas al rededor de 1. Así, tenemos que $\ell(\ell^{-1}(n)\cdot\ell^{-1}(m))=$ final del levant. de $[p\circ\tilde\gamma_m]$ partiendo en n, i.e., final del camino $I\to\mathbb R$, $t\mapsto n+mt$, i.e., $n+m$ es la suma de enteros ■

Corolario: No existe $r:D^2\to\partial D^2=S^1$ retracto de D^2 a su borde.

Dem: En caso contrario, tenemos $r|_{S^1}=\mathrm{Id}_{S^1}$, i.e., $r\circ i=\mathrm{Id}_{S^1}$ con $i:S^1\hookrightarrow D^2$ inclusión. Por functorialidad $\mathrm{Id}_{\pi_1(S^1,1)}:\pi_1(S^1,1)\cong\mathbb Z\xrightarrow{\pi_1(i)}\pi_1(D^2,1)\cong\{0\}\xrightarrow{\pi_1(r)}\pi_1(S^1,1)\cong\mathbb Z$ ↯ ■

Teorema del punto fijo de Brouwer (1909): Todo mapeo $f:D^2\to D^2$ tiene un punto fijo.

Dem: Si $f(x)\neq x$ $\forall x\in D^2$, definimos $r:D^2\to S^1$, $x\mapsto$ (rayo de $f(x)$ a x) $\cap\, S^1$ que es continua pues f continua y que cumple $r(x)=x$ si $x\in\partial D^2=S^1$ ↯ ■

⚠ Veremos que lo anterior es un caso particular del Teorema del punto fijo de Lefschetz, el cual requiere de grupos de homología, y fue probado por Solomon Lefschetz (1926).

§7. Revestimientos universales

En esta sección estudiaremos la existencia y unicidad de revestimientos universales. Sea X esp. topológico.

⚠ Observación: sea $x_0 \in X$ y sea $p: \tilde{X} \to X$ un revestimiento universal. Sea $x_0 \in \mathcal{U} \subseteq X$ vecindad abierta que trivializa a p, i.e., $p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ y $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}$ homeo. $\forall \alpha \in I$. Entonces: Para cada $\alpha \in I$, todo lazo en x_0 contenido en $\mathcal{U}$ (i.e, $\gamma: I \to \mathcal{U}$) se levanta a un lazo $\tilde{\gamma}_\alpha: I \to V_\alpha$ en $\tilde{x}_\alpha := V_\alpha \cap p^{-1}(x_0)$, i.e, $\pi_1(p): \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_\alpha) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$ envía $[\tilde{\gamma}_\alpha]$ en $[\gamma]$. Como $\tilde{X}$ simplemente conexo, $[\tilde{\gamma}_\alpha] = [c_{\tilde{x}_\alpha}]$ y luego $[\gamma] = [c_{x_0}]$. Esto motiva la sgte:

Def: Un esp. topológico X es semi-localmente simplemente conexo (slsc) si $\forall x \in X$ existe una vecindad abierta $x \in \mathcal{U}_x \subseteq X$ tal que todo lazo en x contenido en $\mathcal{U}_x$ es contractible en X.

Construcción: sea (X, x_0) espacio basado, sea $p: \tilde{X} \to X$ un revestimiento universal, y sea $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Como $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \simeq \{1\}$, para todo $y \in \tilde{X}$ existe una única clase $[\gamma_y]$ homotópica de caminos entre $\tilde{x}_0$ e y, y así $[p \circ \gamma_y]$ es una clase homotópica "canónica" de caminos de x_0 a $p(y)$: y es el punto final del levantamiento de $[p \circ \gamma_y]$ partiendo en $\tilde{x}_0$:

$$\tilde{X} \xrightarrow[\sim]{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{clases de homot. de caminos en } X \\ \text{partiendo en } x_0 \end{array} \right\}, \quad y \longmapsto [p \circ \gamma_y]$$

y luego podemos usar el lado derecho de la biyección para construir $\tilde{X}$:

Teorema: Sea X espacio top. conexo por caminos, localmente conexo por caminos (i.e, $\forall x \in X$ y todo abierto $x \in \mathcal{U} \subseteq X$, $\exists x \in V$ abierto con $V \subseteq \mathcal{U}$ y $\pi_0(V) \cong \{*\}$), y semi-localmente simpl. conexo. Entonces, existe $p: \tilde{X} \to X$ revestimiento con $\tilde{X}$ simplemente conexo.

Idea de Dem (cf. A. Hatcher, Theorem 1.38, pág 67): Sea $x_0 \in X$ fijo en todo lo que sigue. Consideramos el conjunto $\tilde{X} := \{$clases de homot. de caminos en X partiendo en $x_0\}$ y definimos $p: \tilde{X} \to X$ por $p([\gamma]) := \gamma(1)$. Basta probar que $\tilde{X}$ puede ser dotado de una topología tal que p es un revestimiento y tal que $\tilde{X}$ sea simplemente conexo:

1° Considerar $\mathcal{B} := \{\mathcal{U} \subseteq X$ abierto conexo por caminos con $\operatorname{Im}(\pi_1(\mathcal{U}, x) \to \pi_1(X, x))$ trivial $\forall x \in \mathcal{U}\}$ que es una base para la top. de X pues es slsc y localmente conexo por caminos.

2° Si $x, y \in \mathcal{U} \in \mathcal{B}$, $\exists \gamma: I \to \mathcal{U}$ camino de x a y, y todos esos caminos son homot. en X. Luego, para $[\alpha] \in \tilde{X}$ y $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ tal que $\alpha(1) \in \mathcal{U}$ podemos definir el conjunto $(\alpha, \mathcal{U}) := \{[\beta] \in \tilde{X},\ [\beta] = [\alpha \cdot \alpha'] \text{ con } \alpha': I \to \mathcal{U} \text{ camino partiendo en } \alpha(1)\}$

y dichos conjuntos forman una base para una topología para $\tilde{X}$.

3° p es continua pues si $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ y $[\alpha] \in p^{-1}(\mathcal{U})$ entonces $[\alpha] \in (\alpha, \mathcal{U}) \subseteq p^{-1}(\mathcal{U})$ con $\alpha' = c_{\alpha(1)}$.

4° $p|_{(\alpha,\mathcal{U})}: (\alpha, \mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}$ es un homeo: sobreyectiva pues $\pi_0(\mathcal{U}) = \{*\}$, inyectiva pues si $[\beta], [\beta'] \in (\alpha, \mathcal{U})$ tienen el mismo punto final entonces difieren por un lazo en $\mathcal{U}$ y luego $[\beta] = [\beta']$ pues $\operatorname{Im}(\pi_1(\mathcal{U}, x) \to \pi_1(X, x))$ trivial, y además $p((\beta, V)) \overset{\text{!}}{=} V$, i.e, p mapea abiertos ✓

5° $p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{[\alpha] \text{ con } \alpha(1) \in \mathcal{U}} (\alpha, \mathcal{U})$: si $[\gamma] \in (\alpha, \mathcal{U}) \cap (\beta, \mathcal{U})$ entonces $[\gamma] = [\alpha \cdot \alpha'] = [\beta \cdot \beta']$ y luego $[\alpha] = [\beta \cdot \beta' \cdot (\alpha')^{-1}]$ con $\beta' \cdot (\alpha')^{-1}: I \to \mathcal{U}$ y así $[\alpha] \in (\beta, \mathcal{U})$. Así, $[\delta] = [\alpha \cdot \alpha''] \in (\alpha, \mathcal{U})$ se escribe como $[\delta] = [\beta \cdot \beta' \cdot (\alpha')^{-1} \cdot \alpha'']$ y luego $[\delta] \in (\beta, \mathcal{U})$ ✓ similar: $(\beta, \mathcal{U}) \subseteq (\alpha, \mathcal{U})$ ✓✓

6° Si $\tilde{x}_0 := [c_{x_0}] \in \tilde{X}$, entonces $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \{1\}$: si $\gamma: I \to X$ camino partiendo en x_0, su levantamiento $\tilde{\gamma}: I \to \tilde{X}$ partiendo en $\tilde{x}_0$ es $s \mapsto [t \mapsto \gamma(st)]$, terminando en $[\gamma] \in \tilde{X}$. Luego, un lazo basado en x_0, $\gamma: I \to X$, que se levanta a $\tilde{\gamma}$ lazo basado en $\tilde{x}_0 = [c_{x_0}]$ debe cumplir $[\gamma] = [c_{x_0}]$, i.e, $\pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \{1\} \leq \pi_1(X, x_0) \underset{\text{inyectivo!}}{\overset{\pi_1(p)}{\Longrightarrow}} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \{1\}$ ■

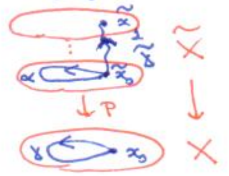
Ejemplo: $p: S^2 \overset{2:1}{\twoheadrightarrow} \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $x \mapsto [x]$ revestimiento universal, y luego $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

§8. La correspondencia de Galois (cf. MAT529 "Aritmética")

Sea (X,x_0) espacio basado y $p:\tilde{X}\to X$ revestimiento. Vimos que para $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ el morfismo $\pi_1(p):\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\hookrightarrow\pi_1(X,x_0)$ inyectivo, i.e., $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\cong \mathrm{Im}(\pi_1(p))\leq\pi_1(X,x_0)$ subgrupo.

Sup. $\tilde{X}$ conexo por caminos y sea $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)$. Si $\tilde{\gamma}:I\to\tilde{X}$ camino de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_1$ y $\gamma:=p\circ\tilde{\gamma}$ lazo en $x_0\in X$, entonces $[\gamma]^{-1}\cdot\pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))\cdot[\gamma]=\pi_1(p)(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1))$ son conjugados.

Así, obtenemos funciones



$\{\text{Revestimientos basados } p:(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to(X,x_0)\}\longrightarrow\{\text{Subgrupos de } \pi_1(X,x_0)\}$

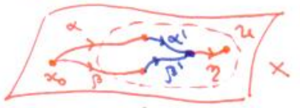
$\{\text{Revestimientos } p:\tilde{X}\to X\}\longrightarrow\{\text{Clases de conjugación de subgr. de } \pi_1(X,x_0)\}$

⚠ En lo que sigue: X esp. top. con $\pi_0(X)\simeq\{*\}$, localmente conexo por caminos y slsc, y $x_0\in X$.

Teorema: Para todo subgrupo $H\leq\pi_1(X,x_0)$ existe un revestimiento basado $p_H:(\tilde{X}_H,\tilde{x}_H)\to(X,x_0)$ tal que $\pi_1(p_H)(\pi_1(\tilde{X}_H,\tilde{x}_H))=H$.

Dem: Sea $p:\tilde{X}=\{\text{clases de homot. de caminos en } X \text{ partiendo en } x_0\}\to X$, $[\gamma]\mapsto\gamma(1)$ revestimiento universal, y consideremos la rel. de equiv. $[\gamma]\sim_H[\gamma']\iff\gamma(1)=\gamma'(1)$ y $[\gamma\cdot(\gamma')^{-1}]\in H$.

Sea $\tilde{X}_H:=\tilde{X}/\sim_H$ espacio cociente y $p_H:\tilde{X}_H\to X$, $[\gamma]_H\mapsto\gamma(1)$.



$\Rightarrow p_H$ revestimiento pues si $[\gamma]=[\alpha\cdot\alpha']\in(\alpha,\mathcal{U})$ y $[\gamma']=[\beta\cdot\beta']\in(\beta,\mathcal{U})$ son tales que $[\gamma]\sim_H[\gamma']\Rightarrow[\gamma\cdot\eta]\sim_H[\gamma'\cdot\eta]$ para todo $\eta:I\to\mathcal{U}$ partiendo de $\gamma(1)=\gamma'(1)$, i.e., $p_H((\alpha,\mathcal{U}))=p_H((\beta,\mathcal{U}))$ en tal caso ✓

Sea $\tilde{x}_H:=[c_{x_0}]_H$ y veamos que $\pi_1(p_H)(\pi_1(\tilde{X}_H,\tilde{x}_H))=H$: $(\supseteq)$ Si $[\gamma]\in H$ entonces, dado que su levantamiento $\tilde{\gamma}$ a $\tilde{X}$ partiendo en $\tilde{x}_0=[c_{x_0}]\in\tilde{X}$ termina en $[\gamma]\in\tilde{X}$, tenemos que el levantamiento de γ a $\tilde{X}_H$ es un lazo basado en $[\gamma]_H=[c_{x_0}]_H\overset{\text{def}}{=}\tilde{x}_H$ ✓ $(\subseteq)$ Considerar $[\gamma]=[p_H\circ\tilde{\gamma}]$ con $\tilde{\gamma}$ lazo en $\tilde{X}_H$ basado en $[c_{x_0}]_H=\tilde{x}_H$. Como el levantamiento de γ a $\tilde{X}$ partiendo de $[c_{x_0}]\in\tilde{X}$ termina en $[\gamma]\in\tilde{X}$, el levantamiento de $\tilde{\gamma}$ a $\tilde{X}$ también! Como $\tilde{\gamma}$ es un lazo en $\tilde{X}_H$, $[c_{x_0}]\sim_H[\gamma]$, i.e., $[\gamma]\in H$ ✓ ■

Teorema (unicidad basada): Sean $p_1:(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)\to(X,x_0)$ y $p_2:(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)\to(X,x_0)$ revestimientos con $\pi_0(\tilde{X}_1)\simeq\pi_0(\tilde{X}_2)\simeq\{*\}$. Entonces,

$\exists\, h:(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)\xrightarrow{\sim}(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$ homeo basado tq $p_2\circ h=p_1\iff\pi_1(p_1)(\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1))=\pi_1(p_2)(\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2))$.

Obs. De manera análoga, si olvidamos puntos base se tiene el mismo resultado, pero en lugar de tener igualdad de subgrupos de $\pi_1(X,x_0)$ se pide que sean conjugados.

Dem del Teorema: $(\Rightarrow)$ Si h existe, $\pi_1(p_1)=\pi_1(p_2)\circ\pi_1(h)\overset{\pi_1(h)}{\underset{\text{isom.}}{\Longrightarrow}}\mathrm{Im}(\pi_1(p_1))=\mathrm{Im}(\pi_1(p_2))$ ✓

$(\Leftarrow)$ Sea $H:=\pi_1(p_1)(\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1))$ y veamos que $\exists\, h:(\tilde{X}_H,\tilde{x}_H)\to(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)$ homeo. basado. Con la notación del Teorema anterior, consideramos $\tilde{p}_1:(\tilde{X},[c_{x_0}])\to(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)$, $[\gamma]\mapsto\tilde{\gamma}(1)$ donde $\tilde{\gamma}$ es el levantamiento de $\gamma:I\to X$ a $\tilde{X}_1$ partiendo en $\tilde{x}_1$. Así:

$\tilde{p}_1([\gamma])=\tilde{p}_1([\gamma'])\overset{\text{def}}{\iff}\tilde{\gamma}$ y $\tilde{\gamma}'$ terminan en el mismo punto en $\tilde{X}_1\iff[\gamma'\cdot\gamma^{-1}]\in\mathrm{Im}(\pi_1(p_1))=H$, i.e., $[\gamma]\sim_H[\gamma']$ y luego $\tilde{p}_1$ induce una biyección continua $h:(\tilde{X}_H,\tilde{x}_H)\xrightarrow{\sim}(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1)$ que es abierta pues $p_1:\tilde{X}_1\to X$ y $p_H:\tilde{X}_H\to X$ son homeo. locales ■

§9. Grupos libres y producto amalgamado

Necesitaremos un poco de Teoría de Grupos para calcular grupos fundamentales, que usaremos sin pruebas: Sea $S:=\{s_\alpha\}_{\alpha\in I}$ conjunto, llamado alfabeto ("generadores") y $S^{-1}:=\{s_\alpha^{-1}\}_{\alpha\in I}$ otro conjunto con $S\cap S^{-1}=\emptyset$. Una palabra (quizás vacía) es una sucesión de símbolos $w=x_1\cdots x_m\in T:=S\cup S^{-1}$.

Decimos que w es reducida si no contiene $s_\alpha\cdot s_\alpha^{-1}=:(\,)=:1$ ni $s_\alpha^{-1}\cdot s_\alpha=:(\,)=:1$; toda palabra puede reducirse omitiendo dichas palabras.

Eg. $S = \{a,b,c\}$ y $T \overset{\text{def}}{=} \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}\}$, con $w = ab^3c^{-1}a^{-1}c$ palabra reducida en S.

Def: El <u>grupo libre</u> $F(S)$ en el alfabeto S es el grupo de palabras reducidas en S, con la operación de concatenar palabras y con $1 = ()$ como la identidad.

<u>Prop. Universal de $F(S)$</u>: Sea $i : S \hookrightarrow F(S)$, $s_\alpha \mapsto s_\alpha$. Entonces, para todo grupo G hay una biyección

$$\left\{\begin{matrix}\text{Morfismos de grupos}\\ \varphi : F(S) \to G\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{matrix}\text{Funciones}\\ f : S \to G\end{matrix}\right\}, \quad \varphi \mapsto \varphi \circ i \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & G \\ F(S) \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto, dada f se define $\varphi = \varphi_f$ como $\varphi(s_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{\alpha_m}^{\varepsilon_m}) := f(s_{\alpha_1})^{\varepsilon_1} \cdots f(s_{\alpha_m})^{\varepsilon_m}$.

Def: Sea $R \subseteq F(S)$ subconj ("relaciones"). Definimos el grupo $\langle S ; R \rangle$ como el cociente $F(S)/\langle\langle R \rangle\rangle$ donde $\langle\langle R\rangle\rangle \trianglelefteq F(S)$ es el subgrupo normal dado por:

$$\langle\langle R \rangle\rangle := \{ (r_1^{\varepsilon_1})^{g_1} \cdots (r_m^{\varepsilon_m})^{g_m},\ r_i \in R,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\},\ g_i \in F(S) \} \quad \text{y donde } s^g := g^{-1} s g.$$

⚠ <u>Intuición</u>: Las palabras en $R = \{r_\beta\}_{\beta \in J}$ son $\equiv 1$, y escribimos $\langle S ; r_\beta = 1\ \forall \beta \in J \rangle$

<u>Propiedad Universal de $\langle S ; R \rangle$</u>: Para todo grupo G hay una biyección

$$\left\{\begin{matrix}\text{Morfismos de grupos}\\ \varphi : \langle S ; R\rangle \to G\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{matrix}\text{Funciones } f : S \to G\\ \text{tq } f(r) = 1_G\ \forall r \in R\end{matrix}\right\}, \quad \varphi \longmapsto f : S \xhookrightarrow{i} F(S) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \langle S ; R \rangle \xrightarrow{\varphi} G$$

<u>Ejemplos</u>: ⓪ $G \cong \langle G ; R_G \rangle$ con $R_G := \ker(F(G) \to G)$.

① $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \langle a ; a^3 = 1 \rangle$.

② $G = \langle a, b ; a = 1 \rangle \cong H = \langle t ;\ \rangle \cong \mathbb{Z}$.

③ Sea $G := \langle a, b ; ab^{-3} = ba^{-2} = 1 \rangle$ con $b \overset{\text{def}}{=} a^2$ y $a \overset{\text{def}}{=} b^3 = a^6$, i.e., $a^5 = 1$. Así, $G \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Explícitamente: $f : \{a, b\} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $a \mapsto 1$, $b \mapsto 2$ cumple $f(ab^{-3}) \equiv 5 \equiv 0$ y $f(ba^{-2}) \equiv 0$.

Luego, $\exists!\ \varphi_f : G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $[a] \mapsto 1$. Como $|G| \leq 5$ se tiene que φ_f isomorfismo.

⚠ <u>Objetivo</u>: "Pegar grupos a lo largo de un subgrupo común".

<u>Construcción</u>: Sean H, G_1, G_2 grupos y sean $G_1 \xleftarrow{i_1} H \xrightarrow{i_2} G_2$ morfismos de grupos arbitrarios.

Si $G_i = \langle S_i ; R_i \rangle$ (cf. ⓪), se define el <u>producto libre</u> $G_1 * G_2 := \langle S_1 \cup S_2 ; R_1 \cup R_2 \rangle$

Si $j_i : G_i \hookrightarrow G_1 * G_2$ son las inclusiones canónicas, se define el <u>producto libre amalgamado sobre H</u>

$$G_1 *_H G_2 := (G_1 * G_2)/\langle\langle j_1 i_1(h) \cdot (j_2 i_2(h))^{-1},\ \forall h \in H \rangle\rangle \quad \text{y así} \quad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & G_1 \arrow[d] \\ G_2 \arrow[r] & G_1 *_H G_2 \end{tikzcd} \quad \text{es conmutativo.}$$

<u>Ejemplo</u>: Sean $G_1 = \langle x \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle x ;\ \rangle$, $G_2 = \langle y \rangle$, $H = \langle a \rangle$ (todos $\cong \mathbb{Z}$). Consideremos los morfismos $i_1 : H \to G_1$, $a \mapsto x^2$ y $i_2 : H \to G_2$, $a \mapsto y^3$, entonces $G_1 *_H G_2 \overset{\text{def}}{=} \langle x, y ; x^2 = y^3 \rangle$

<u>Prop. Universal de $G_1 *_H G_2$</u>: Sean $G_1 \xleftarrow{i_1} H \xrightarrow{i_2} G_2$ morfismos y K un grupo. Hay una biyección

$$\left\{\begin{matrix}\text{Morfismos de grupos}\\ \varphi : G_1 *_H G_2 \to K\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{matrix}\text{Morfismos de grupos } \varphi_1 : G_1 \to K\\ \text{y } \varphi_2 : G_2 \to K \text{ tq } \varphi_1 \circ i_1 = \varphi_2 \circ i_2\end{matrix}\right\}, \quad \varphi \longmapsto (\varphi_1 := \varphi \circ j_1, \varphi_2 := \varphi \circ j_2).$$

§10. Teorema de Seifert - van Kampen

Sea X esp. top. y sean $A, B \subseteq X$ subespacios con $x_0 \in A \cap B \neq \emptyset$. Las inclusiones inducen morfismos

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(A, x_0) \arrow[d] \\ \pi_1(B, x_0) \arrow[r] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

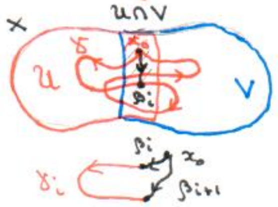
y luego (por §9), $\exists!$ morfismo inducido $\varphi : \pi_1(A, x_0) *_{\pi_1(A \cap B, x_0)} \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

<u>Teorema</u> (Seifert 1931, van Kampen 1933): Sea X esp. top. y sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq X$ abiertos tales que $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ es conexo por caminos. Entonces, para todo $x_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ el morfismo de grupos inducido por las inclusiones $\pi_1(\mathcal{U}, x_0) *_{\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x_0)} \pi_1(\mathcal{V}, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0)$ es un <u>isomorfismo</u>

Dem: El grupo del enunciado es $\pi_1(\mathcal{U},x_0) * \pi_1(V,x_0) / \text{Amal}$, con Amal el subgrupo normal generado por las relaciones amalgamadas $i_*([\gamma])\, j_*([\gamma])^{-1}$ con $i: \mathcal{U}\cap V \hookrightarrow \mathcal{U}$, $j: \mathcal{U}\cap V \hookrightarrow V$ y con $i_* = \pi_1(i)$, $j_* = \pi_1(j)$. Buscamos $\varphi: \pi_1(\mathcal{U},x_0) * \pi_1(V,x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(X,x_0)$ sobreyectivo con $\ker(\varphi) = \text{Amal}$:

Sea $w = u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots u_m v_m \in \pi_1(\mathcal{U},x_0) * \pi_1(V,x_0)$ con $u_i \in \pi_1(\mathcal{U},x_0)$, $v_i \in \pi_1(V,x_0)$, definimos $\varphi(w) := a_* u_1 \cdot b_* v_1 \cdots a_* u_m \cdot b_* v_m$ morfismo, con $a: \mathcal{U} \hookrightarrow X$, $b: V \hookrightarrow X$, $a_* = \pi_1(a)$, $b_* = \pi_1(b)$.

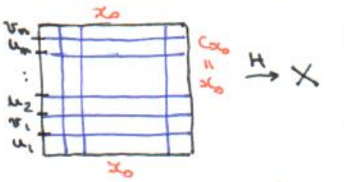
<u>φ sobreyectivo</u>: Sea $\gamma: I \to X$ lazo en x_0. Como I es compacto, $\exists$ subdivisión finita $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ tq $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ contenido en $\mathcal{U}$ o en V. Si $\gamma_i := \gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ consideramos para $0 \le i \le n$ un camino β_i en $\mathcal{U}\cap V$ desde x_0 a $\gamma(t_i)$, y donde $\beta_0 := c_{x_0} =: \beta_m$. Así, $\beta_{i+1}^{-1} \cdot \gamma_i \cdot \beta_i$ lazos en x_0 contenido en $\mathcal{U}$ o en V.



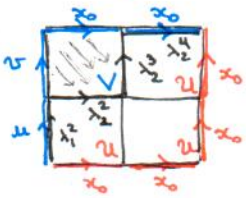
$\Rightarrow (\beta_m^{-1} \gamma_{m-1} \beta_{m-1}) \cdots (\beta_1^{-1} \cdot \gamma_0 \cdot \beta_0) \simeq \beta_m^{-1} \cdot \gamma_{m-1} \cdots \gamma_0 \cdot \beta_0 \simeq \gamma$ ✓

<u>$\ker(\varphi) = \text{Amal}$</u>: $w = u_1 v_1 \cdots u_m v_m \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow a_* u_1 \cdot b_* v_1 \cdots a_* u_m \cdot b_* v_m \underset{H}{\simeq} c_{x_0}$ en X.

Consideremos $H: I\times I \to X$ la homotopía de $\varphi(w)$ a c_{x_0}. Como $I \times I$ compacto, podemos subdividirlo en una malla más fina tal que cada subcuadrado se envíe por H a $\mathcal{U}$ o a V.

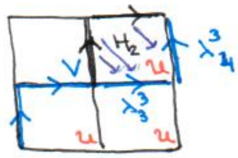


<u>Por conveniencia</u>, nos restringimos al caso de 4 subcuadrados (caso gral. análogo):



Podemos realizar homotopías sucesivas en $\mathcal{U}$ y en V:

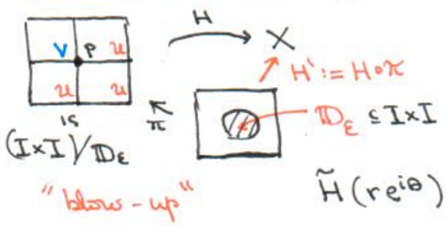
$u v c_{x_0} c_{x_0} := \lambda_1^1 \lambda_2^1 \lambda_3^1 \lambda_4^1 \in \ker(\varphi)$
$\wr H_1$ en $V \rightsquigarrow$ Relaciones en V
$\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \lambda_4^2$
$\wr H_2$ en $\mathcal{U}$
$\lambda_1^3 \lambda_2^3 \lambda_3^3 \lambda_4^3$
$\vdots$
$c_{x_0} c_{x_0} c_{x_0} c_{x_0} \in \ker(\varphi)$



⚠ λ_3^2 es una palabra en V, para aplicar H_2 necesito "convertirla" en una palabra en $\mathcal{U}$. Podemos hacerlo pues λ_3^2 se mapea a $\mathcal{U}\cap V$!

En cada paso usamos: Relaciones en $\mathcal{U}$, Rel. en V, Amal para pasar entre $\mathcal{U}$ y V.

El problema es que los λ_i^k son caminos, no son lazos: Hay que modificar H en cada nodo de la malla y obtener $\tilde{H}$ que envíe los nodos en x_0 ($\Rightarrow \lambda_i^k$ lazos y estamos OK!):



Elegimos un camino δ desde x_0 a $H(p)$ contenido en $\mathcal{U}$, V, o $\mathcal{U}\cap V$ dependiendo de los "vecinos" de p, y definimos la homotopía $\tilde{H}: I\times I \to X$ como $\tilde{H}|_{(I\times I)\setminus \mathbb{D}_\varepsilon} = H'|_{(I\times I)\setminus\mathbb{D}_\varepsilon}$ y como

$$\tilde{H}(re^{i\theta}) := \begin{cases} H(p) & \text{si } r = \varepsilon \\ \delta(r/\varepsilon) & \text{si } 0 < r < \varepsilon \\ x_0 & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

en $\mathbb{D}_\varepsilon$. Reemplazamos H por $\tilde{H}$ ✓ ∎

<u>Ejemplo</u> (La esfera): En $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ consideramos $n = (0,\ldots,0,1)$, $s = (0,\ldots,0,-1) \in S^n$ polos de S^n. Entonces, $\mathcal{U} := S^n \setminus \{n\} \cong V := S^n \setminus \{s\} \cong \mathbb{R}^n$ (compactificación de Alexandrov) y además $\mathcal{U}\cap V \cong$ "Ecuador" $\times\,]-1,1[\; = S^{n-1} \times\,]-1,1[$ es conexo por caminos si $\underline{n \geq 2}$. Así, para $x_0 \in \mathcal{U}\cap V$:

$\overset{S\text{-}vK}{\Rightarrow} \pi_1(S^n,x_0) \cong \pi_1(\mathcal{U},x_0) *_{\pi_1(\mathcal{U}\cap V,x_0)} \pi_1(V,x_0) \cong \{1\} *_{\pi_1(\mathcal{U}\cap V,x_0)} \{1\} \cong \{1\}$, ie, S^n simpl. conexa $\forall n \geq 2$.

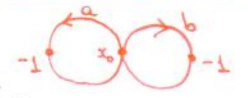
<u>Ejemplo</u> (Espacio proyectivo real): Recordar que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := S^n/\sim$ con $x \sim -x$ y $p: S^n \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es un revestimiento. Dado que $\pi_1(S^n,y_0) \cong \{1\}$ para $\underline{n \geq 2}$, tenemos que p es revest. universal.

$\Rightarrow$ Hay una biyección entre $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}),x_0)$ y el conj. $p^{-1}(x_0)$ de 2 elem, ie, $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}),x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dado que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq S^1$, $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}),x_0) \cong \mathbb{Z}$.

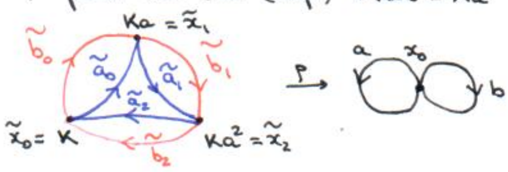
<u>Recuerdo</u>: Sean (X,x_0) e (Y,y_0) espacios basados. El <u>bouquet</u> (o <u>wedge</u>) $X \vee Y$ es el espacio topológico cociente $X \vee Y := (X \sqcup Y)/\sim$ donde $\sim$ es la rel. de equivalencia generada por $x_0 \sim y_0$. Dicho punto común es el punto base de $X \vee Y$. Eg. $S^1 \vee S^1 =$ 

Ejemplo: Consideramos $(S^1,1)$ y formamos $X = S^1 \vee S^1$ con punto base x_0.

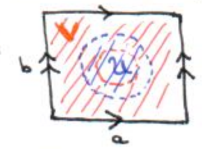


Sean $\mathcal{U} := S^1 \vee (S^1\setminus\{-1\}) \simeq S^1 \vee \{1\}$ y $V := (S^1\setminus\{-1\}) \vee S^1 \simeq \{1\}\vee S^1 \simeq S^1$.
Como $\mathcal{U}\cap V = (S^1\setminus\{-1\})\vee(S^1\setminus\{-1\}) \simeq \{x_0\}$ es contractible, $\pi_1(\mathcal{U}\cap V, x_0)\cong\{1\}$ y luego calculamos
$\pi_1(S^1\vee S^1,x_0) \underset{S\text{-}vK}{\cong} \pi_1(S^1\vee\{1\}) *_{\{1\}} \pi_1(\{1\}\vee S^1) \cong \langle a,b;\rangle \cong \mathbb{Z}*\mathbb{Z} =: F_2$ grupo libre con 2 generad

Ejemplo: Sea $(X,x_0) := (S^1\vee S^1, x_0)$ como antes, con $\pi_1(S^1\vee S^1,x_0)\cong\langle a,b;\rangle\cong\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$.
La función $f:\{a,b\}\to\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $a\mapsto 1$, $b\mapsto 1$ induce $\varphi_f=\varphi:\langle a,b;\rangle \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ morfismo.
con $K:=\ker(\varphi)\le\pi_1(X,x_0)$ de índice 3. La correspondencia de Galois implica la existencia de un único revestimiento $p:(\tilde X_K,\tilde x_0)\to(X,x_0)$ con $\pi_1(p)(\pi_1(\tilde X_K,\tilde x_0)) = K$.
La acción por monodromía induce una biyección $\pi_1(X,x_0)/K$ ($\underset{\text{Noether}}{\cong}\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) $\xrightarrow{\sim} p^{-1}(x_0)$ y luego p revestimiento de grado 3, y podemos identificar $p^{-1}(x_0)\cong\{\tilde x_0\cong K, \tilde x_1\cong Ka, \tilde x_2\cong Ka^2\}$.
⚠ Si $x\in\pi_1(S^1\vee S^1,x_0)=\langle a,b;\rangle$ es una palabra en a y b, por definición, su levantamiento partiendo en $Ky\in p^{-1}(x_0)$ es precisamente Kyx. Así, el levantamiento de: $Ka^3=K$
1) a partiendo en $\tilde x_0=K$ (resp. $\tilde x_1 = Ka$, resp. $\tilde x_2=Ka^2$) termina en $Ka=\tilde x_1$ (resp. $Ka^2=\tilde x_2$, resp. $\tilde x_0$)
2) b partiendo en $\tilde x_0 = K$ (resp. $\tilde x_1$, resp. $\tilde x_2$) termina en $Kb = Ka = \tilde x_1$ pues $ba^{-1}\in K$ (resp. $Kab=Ka^2 = \tilde x_2$, resp. $Ka^2b = Ka^3 = K = \tilde x_0$). Así, $\tilde X$ está dado por:



Ejercicio Dibujar el revestimiento universal de $(S^1\vee S^1,x_0)$ como un grafo infinito donde en cada eje "sale" el camino a, a^{-1}, b, b^{-1}.

Ejemplo (Toro): Sea $T\cong S^1\times S^1\cong$  $\cong$ 

con $\mathcal{U}\simeq\{*\}$ y luego $\pi_1(\mathcal{U},x_0)\cong\{1\}=G_1$, $V\simeq S^1\vee S^1$ y así $\pi_1(V,x_0)\cong\langle a,b;\rangle = G_2$.
Como $\mathcal U\cap V\simeq S^1$ tenemos $\pi_1(\mathcal U\cap V,x_0)\cong\langle c\rangle\cong\mathbb Z = H$. Aquí, $\pi_1(\mathcal U\cap V,x_0)\to\pi_1(V,x_0)$, $c\mapsto aba^{-1}b^{-1}$
y luego $\pi_1(T,x_0)\underset{S\text{-}vK}{\cong} G_1 *_H G_2 \cong\langle a,b; aba^{-1}b^{-1}=1\rangle = \langle a,b; ab=ba\rangle\cong\mathbb Z^2$.

Recuerdo: Sea (X,x_0) espacio basado y $f:(S^{n-1},*)\to(X,x_0)$ mapeo basado. El pegado de $\mathbb D^n\subseteq\mathbb R^n$ a X mediante f es $Y:=X\cup_f\mathbb D^n := (X\sqcup\mathbb D^n)/\sim$ con $\sim$ rel. de equiv. generada por $z\in S^{n-1}=\partial\mathbb D^n \sim f(z)\in X$ para todo $z\in S^{n-1}$. Si $y_0:=[x_0]\in Y$, $i:(X,x_0)\hookrightarrow(Y,y_0)$ induce un morfismo $\pi_1(i):\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$. Con esta notación, tenemos que:

Teorema: ① Si $n\ge3$ entonces $\pi_1(i)$ es un isomorfismo.
② Si $n=2$, y luego $f:(S^1,*)\to(X,x_0)$ induce $[f]\in\pi_1(X,x_0)$, entonces $\pi_1(i)$ sobreyectivo y $\ker(\pi_1(i))$ es el subgrupo normal generado por $[f]$.

Dem: Escribamos $Y=\mathcal U\cup V$ con $\mathcal U:=\operatorname{int}(\mathbb D^n)$ y $V:=X\cup_f(\mathbb D^n\setminus\{0\})$ complemento del centro del disco $\mathbb D^n$. Así, $\mathcal U\cap V\simeq S^{n-1}\times\,]0,1[$ conexo por caminos si $n\ge2$.
Sea $y_1\in\mathcal U\cap V\subseteq\operatorname{int}(\mathbb D^n)$ y $u:I\to\mathbb D^n\setminus\{0\}$ camino de y_0 a y_1.

Para ①, $\mathcal U\cap V\simeq S^{n-1}$ simplemente conexo $\overset{S\text{-}vK}{\Rightarrow}\pi_1(Y,y_1)\cong\pi_1(\mathcal U,y_1)*_{\{1\}}\pi_1(V,y_1)\cong\pi_1(V,y_1)$.
Así, el cambio de punto base $u_\#$ induce $\pi_1(V,y_0)\xrightarrow{\sim}\pi_1(Y,y_0)$ isomorfismo, con $(V,y_0)\xhookrightarrow{\sim}(X,y_0)$ equivalencia homotópica (!) y luego $\pi_1(i)$ isomorfismo ✓ En ②, $\mathcal U\cap V\simeq S^1$ y el morfismo $\mathbb Z\simeq\pi_1(\mathcal U\cap V,y_1)\to\pi_1(V,y_1)$ envía 1 en $u_\#[f]$. Como $\pi_1(\mathcal U,y_1)\cong\{1\}$, $\pi_1(Y,y_1)\underset{S\text{-}vK}{\cong}\pi_1(V,y_1)/\langle\langle u_\#[f]\rangle\rangle$ y tal como antes obtenemos $\pi_1(Y,y_0)\cong\pi_1(X,x_0)/\langle\langle[f]\rangle\rangle$ ■

Corolario: Para todo $G\cong\langle S;R\rangle$ con S y R finitos, $\exists\,(Y,y_0)$ esp. tal que $\pi_1(Y,y_0)\cong G$.

Dem: Sea $(X,x_0)=S^1\vee\dots\vee S^1$ bouquet de $|S|$ círculos, con $\pi_1(X,x_0)\underset{S\text{-}vK}{\cong}\langle S;\rangle\cong F_{|S|}$ grupo libre. Cada $r\in R\subseteq\langle S;\rangle$ es un lazo $\gamma_r:(S^1,1)\to(X,x_0)$ y por el Teo. anterior tenemos un isom. $\pi_1(Y,y_0)\cong\pi_1(X,x_0)/\langle\langle[\gamma_r], r\in R\rangle\rangle\cong\langle S;R\rangle$ donde (Y,y_0) se obtiene pegando los γ_r ■

§11. Grupos de homotopía superiores

Si $n, m \geq 2$, entonces no podemos distinguir S^n de S^m usando el grupo fundamental. Es natural considerar la generalización siguiente de $\pi_1(X,x_0)$:

Sean X, Y esp. top y $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ subespacios. Un mapeo de pares $f:(X,A) \to (Y,B)$ es un mapeo $f: X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$. Una homotopía entre mapeos de pares $f,g:(X,A)\to(X,B)$ es una homotopía $H: X \times [0,1] \to Y$ de f a g tal que $H(A\times[0,1]) \subseteq B$.

Notación: Sea $I^0 := \{*\}$ punto, $I := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ y $I^n = [0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ $\forall n \geq 2$, donde se tiene $\partial I^n \overset{\text{def}}{=} \{(t_1,\dots,t_n) \in I^n$, algún t_i es 0 o $1\}$.

Def: Sea (X,x_0) espacio basado y $n \in \mathbb{N}$, se define el n-ésimo grupo de homotopía por $\pi_n(X,x_0) := \{$clases de homotopía de mapeos $f:(I^n, \partial I^n) \to (X,\{x_0\})\}$.

Ejemplo: Como conjuntos, la definición anterior coincide con $\pi_0(X,x_0) \overset{\text{def}}{=} \pi_0(X)$ (pues $\partial I^0 = \emptyset$) y $\pi_1(X,x_0)$.

Construcción (cf. §3): Sea $n \geq 1$ y $f,g:(I^n,\partial I^n) \to (X,\{x_0\})$ mapeos. Se define el producto de f y g en $\pi_n(X,x_0)$ por
$$(f\cdot g)(t_1,\dots,t_n) := \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{si } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{si } 1/2 \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Teorema: Para todo $n \geq 1$ el producto anterior define una estructura de grupo en $\pi_n(X,x_0)$ con identidad la clase de homotopía de $c_{x_0}: I^n \to X$, $(t_1,\dots,t_n) \mapsto x_0$. Dicho grupo es abeliano $\forall n \geq 2$.

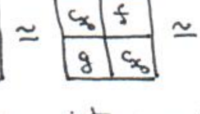
Dem: La misma prueba que en el caso $n=1$ muestra que $\pi_n(X,x_0)$ es un grupo. Si $n \geq 2$, consideramos homotopías: $f\cdot g = \boxed{\begin{array}{c|c} f & g \end{array}} \simeq \boxed{\begin{array}{c|c} f & c_{x_0} \\ \hline c_{x_0} & g \end{array}} \simeq \boxed{\begin{array}{c|c} c_{x_0} & f \\ \hline g & c_{x_0} \end{array}} \simeq \boxed{\begin{array}{c|c} g & f \end{array}} = g \cdot f$, i.e., $\pi_n(X,x_0)$ abeliano ■

Obs: En física de partículas, π_2 y π_3 miden la existencia de "monopolos" y "texturas", respectivamente.

⚠ Los grupos de homotopía superiores comparten algunas propiedades de π_1. Por ejemplo, si $\varphi:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ mapeo basado, entonces $\pi_n(\varphi):\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(Y,y_0)$, $[f]\mapsto[\varphi\circ f]$ es un morfismo que sólo depende de la clase de homotopía de φ y $\pi_n(\psi\circ\varphi) = \pi_n(\psi)\circ\pi_n(\varphi)$, $\pi_n(Id_X) = Id_{\pi_n(X,x_0)}$. En part, si φ equivalencia homotópica entonces $\pi_n(\varphi)$ es un isomorfismo.

El gran problema es que dichos grupos son muy difíciles de calcular y no es verdad que si X es una variedad diferenciable real de $\dim_{\mathbb{R}}(X) = n$ entonces $\pi_i(X,x_0) = 0$ $\forall i > n$, siendo el ejemplo más emblemático la esfera S^n! Eg. $\pi_6(S^2,x_0) \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $\pi_{11}(S^6,x_0)\cong\mathbb{Z}$, etc.

Idea (Riemann 1857, Betti 1871, etc): Solucionar esto olvidando completamente el punto base y el orden en que ocurre el "tiempo". Eg ($n=1$): En lugar de estudiar lazos (i.e., $\pi_1(X,x_0)$) consideraremos imágenes continuas de S^1 en X (i.e., $H_1(X,\mathbb{Z})$ "primer grupo de homología")!

Ejemplo informal (cf. Hatcher pág 99): Sea $X =$ 

con $\pi_1(X,x) \underset{S\text{-}vK}{\cong} \langle ba^{-1}, cb^{-1}, dc^{-1}\rangle \cong \mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$

Olvidar punto base: $ba^{-1} = a^{-1}b$, i.e., "$b-a$"

La notación aditiva sólo detecta la orientación del camino! Diremos que $b-a$ es un 1-ciclo.

Eg. $c-b$, $d-c$, $c+d-a-b$ son 1-ciclos pero $a-b+c$ no lo es.

Sea $C_1(X) := \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c \oplus \mathbb{Z}d \cong \mathbb{Z}^4$ grupo de 1-cadenas, ¿cuándo $\delta \in C_1(X)$ es un 1-ciclo?

Sea $C_0(X) := \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y \cong \mathbb{Z}^2$ grupo de 0-cadenas y sea $\partial_1: C_1(X) \to C_0(X)$ el morfismo de grupos $a \mapsto y-x$, $b\mapsto y-x$, $c\mapsto y-x$, $d \mapsto y-x$. Así, $\delta = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d$ en $C_1(X)$ es un 1-ciclo $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \partial_1(\delta) = (\lambda_1+\dots+\lambda_4)(y-x) = 0$, i.e., $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 0$.

$\Rightarrow$ Los 1-ciclos forman el grupo $H_1(X,\mathbb{Z}) := \ker(\partial_1) = \mathbb{Z}(b-a)\oplus\mathbb{Z}(c-b)\oplus\mathbb{Z}(d-c)\cong\mathbb{Z}^3$ (más fácil de calcular que $\pi_1(x,x)$!), donde hay $b_1(X) := \operatorname{rg} H_1(X,\mathbb{Z}) \overset{\text{def}}{=} 3$ lazos en X.