UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Posgrado en Matemáticas

Cubiertas buenas equivariantes y sistemas de Cartan-Eilenberg en K-teoría

T E S I S

Que para obtener el grado académico de:

Maestro en Ciencias
(Matemáticas)

Presenta:

Alejandro Dueñas Osuna

Director de tesis: Dr. Jesús F. Espinoza

Hermosillo, Sonora, México   Diciembre de 2014

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Complejos celulares

1.1.1. Definiciones

Definiremos notación para los siguientes conjuntos, los cuales serán muy útiles en esta sección:

1. el disco n-dimensional
$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\},$$
2. el interior del disco n-dimensional
$$int(D^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\},$$
3. la esfera n-dimensional
$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\},$$

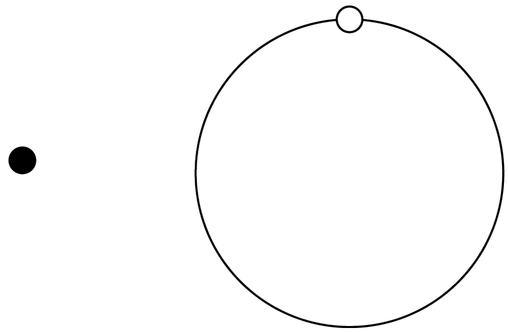
definimos $S^{-1} = \phi$ y $D^0 = \{*\}$.

Definición 1.1.1. *Una n-celda es un espacio homeomorfo a $int(D^n)$ y decimos que la celda tiene dimensión n.*

Definición 1.1.2. *Una descomposición celular de un espacio X es una familia $\xi = \{e_\alpha : \alpha \in I\}$ de subespacios de X tal que cada e_α es una celula y $X = \bigsqcup_{\alpha \in I} e_\alpha$.*

El n-esqueleto de X es un subespacio $X^n = \bigsqcup_{\alpha \in I \,:\, dim(e_\alpha) \leq n} e_\alpha$

Ejemplo 1.1.3. Consideremos S^1 y veamos que una de su descomposicón celular esta dada por



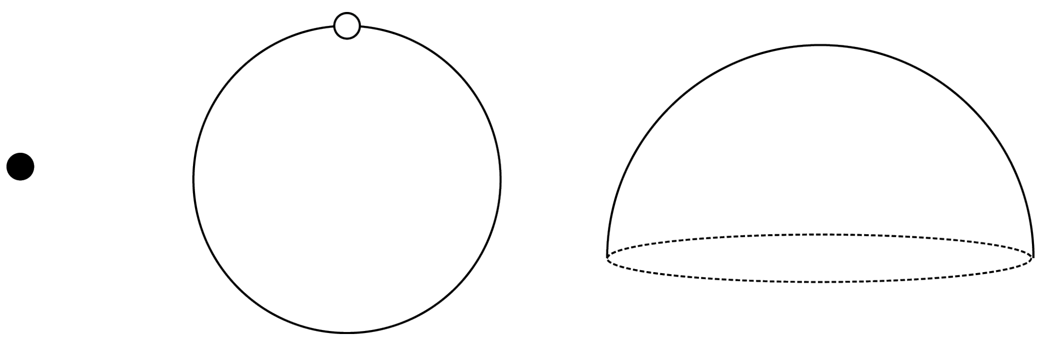
$$e_0 = \{*\} \qquad e_1 = S^1 \backslash \{*\} = S^1 \backslash e_0,$$

luego la descomposición celular queda de la siguiente manera:

$$S^1 = e_0 \bigsqcup e_1.$$

Los n-esqueletos son $X^0 = e_0$ y $X^1 = e_0 \bigsqcup e_1$, lo cuales cumplen $X^0 \subset X^1 = S^1$.

Ejemplo 1.1.4. Demos una descomposición celular para S^2:

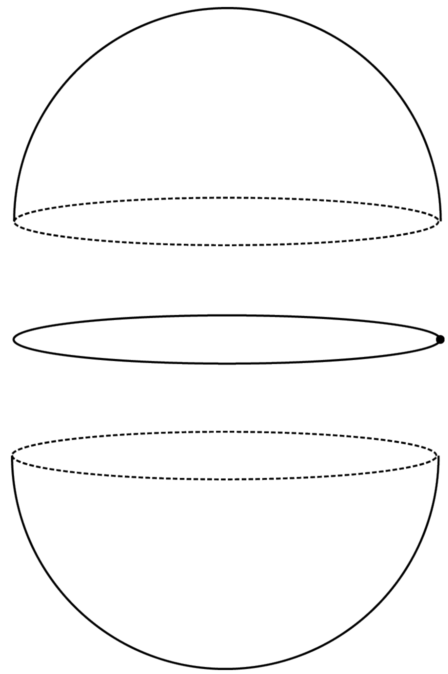


$$e_0 = \{*\}, \quad e_1 = S^1 \backslash e_0, \quad e_2 = D^2 \backslash \partial D^2,$$

luego la descomposicón celular es:

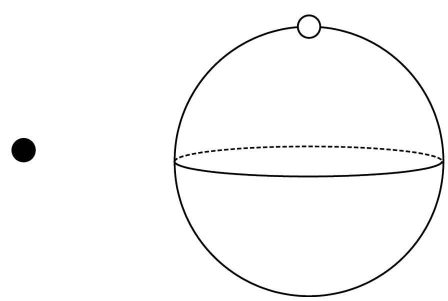
$$S^2 = e_0 \bigsqcup e_1 \bigsqcup e_2^{(1)} \bigsqcup e_2^{(2)},$$

donde el supra índice advierte un cambio en la orientación de las celulas, quedando de la siguiente manera,



Luego los n-esqueletos son $X^0 = e_0$, $X^1 = e_0 \bigsqcup e_1$ y $X^2 = e_0 \bigsqcup e_1 \bigsqcup e_2^{(1)} \bigsqcup e_2^{(2)}$, que cumple con $X^0 \subset X^1 \subset X^2 = S^2$.

Ejemplo 1.1.5. Otra descomposición celular para S^2 es $e_0 \bigsqcup e_2$.



Vemos que en el ejemplo anterior $S^1 \subset S^2$ celularmente mientras que en este ejemplo $S^1 \not\subset S^2$ celularemente, ya que $e_1 \not\subset S^2$.

Definición 1.1.6. *A la pareja* (X, ξ)*, donde* X *es un espacio Hausdorff y* ξ *es su descomposición celular, que cumple los siguientes axiomas:*

1. *(función característica) Para cada* n*-celda* $e \in \xi$ *existe una aplicación* $\Phi_e : D^n \longrightarrow X$ *restringiendo a un homomorfismo* $\Phi_e \mid_{int(D^n)}(int\ D^n) = e$ *y* $\Phi_e(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$ *bajo la función* Φ_e*,* S^{n-1} *es la frontera del* D^n*,*

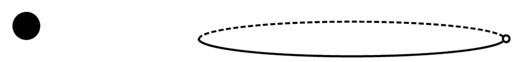
2. *(cerradura finita) Para toda celula* $e \in \xi$ *la clausura* $\bar{e}$*, intersecta solo a un número finito de otras celulas en* ξ*,*

3. *(topológia débil) un subconjunto* $A \subseteq X$ *es cerrado si y sólo si* $A \cap \bar{e}$ *es cerrado en* X *para cada* $e \in \xi$*,*

se le llama **complejo CW***.*

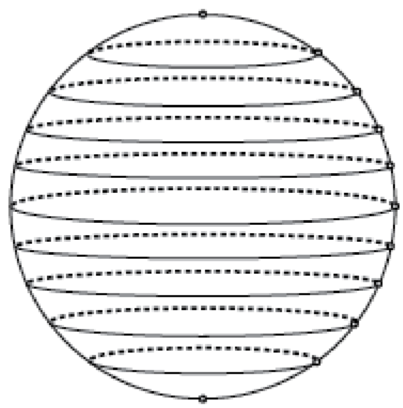
Podremos decir de manera general que un complejo CW es una formada topológica de pegar partes básicas, de ahí que lleva su nombre, **C** por **closure-finite** (cierre-finito), y el **W** por **weak topology** (topología débil).

Ejemplo 1.1.7. Demos la siguiente descomposición celular para S^2



$$e_0 = \{*\}, \qquad e_1 = S^1 \backslash e_0,$$

la cual nos da como resultado



obteniendo la descomposición celular de la siguiente manera:

$$S^2 = e_0^S \bigsqcup e_0^N \bigsqcup_{\alpha \in (0,1)} (e_0^{(\alpha)} \bigsqcup e_1^{(\alpha)})$$

veamos que no es un complejo CW, verifiquemos cada uno de los axioma:

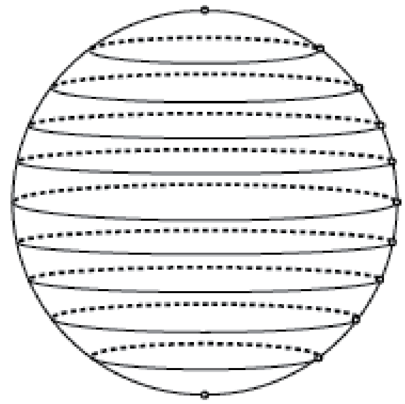
1. (función característica)

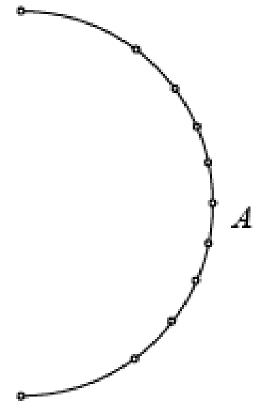
$$\begin{aligned} \phi_\alpha(\partial D^1) &= \phi_\alpha(S^0) \\ &= e_0^{(\alpha)} \\ &\subset X^0, \end{aligned}$$

2. (cerradura finita)

$$\begin{aligned} \overline{e_0^\alpha} &= e_0^\alpha \\ \overline{e_1^\alpha} &= e_0^\alpha \bigsqcup e_1^\alpha \end{aligned}$$

3. (topológia débil) consideremos A el conjunto no cerrado que se muestra en la siguiente figura





luego

$$\overline{e_0^\alpha} \bigcap A = \begin{cases} e_0^\alpha \\ \phi \end{cases}$$

$$\overline{e_1^\alpha} \bigcap A = \begin{cases} e_0^\alpha \\ \phi \end{cases}$$

los cuales son cerrados, pero A no lo es, por lo tanto, la descomposición celular no es un complejo CW.

Lema 1.1.8. *Sea (X, ξ), donde X es un espacio Hausdorff junto con su descomposición celular ξ. Si (X, ξ) satisface el axima del función característico, entonces se tiene que*

$$\bar{e} = \Phi_e(D^n)$$

para alguna celula $e \in \xi$. En particular $\bar{e}$ es un subespacio compacto de X y la frontera celular $\bar{e} \setminus e = \Phi_e(S^{n-1})$ en X^{n-1}.

Lema 1.1.9. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *el par (X', ξ') es un complejo CW,*
2. *el subconjunto X' es cerrado en X,*
3. *la clausura $\bar{e} \subseteq X'$ para cada $e \in \xi'$, donde $\bar{\xi}$ es la clausura de e en X.*

Definición 1.1.10. *Sean (X, ξ) y (X', ξ') dos complejos CW. Entonces (X', ξ') es llamado subcomplejo de (X, ξ) si se satisfacen las condiciones del lema anterior.*

Corolario 1.1.11. *Sea (X, ξ) es un complejo CW, entonces*

1. *Sea $\{A_i : i \in I\}$ una familia de subcomplejos de (X, ξ), entonces $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ y $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ son subcomplejos de (X, ξ),*
2. *el n-esqueleto X^n es un subcomplejo de (X, ξ) para cada $n \geq 0$,*
3. *sea $\{e_i : i \in I\}$ una familia arbitraria de n-celdas en ξ, entonces $X^{n-1} \bigcup (\bigcup\limits_{i \in I} e_i)$ es un subcomplejo.*

1.2. Variedades

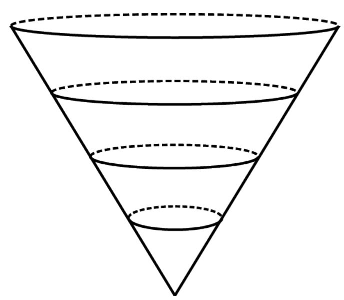
Decimos que un espacio topológico M es una variedade topológica si:

1. M es un espacio Hausdorff o T_2,
2. M tiene una base segundo numerable
3. M es localmente Euclideano, es decir, para cada $x \in M$ existe una vecindad abierta de M, U, y un homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, donde V es una abierto en $\mathbb{R}^n$, para algún n. Si además n es la misma para cada $x \in M$, diremos que $dim\ M = n$.

Veamos los siguientes ejemplos

Ejemplo 1.2.1. El ejemplo más clásico de variedad diferencial es $\mathbb{R}^n$, ya que por definición del espacio es Hausdorff, su base numerable son todas las bolas abiertas de radio racional y centradas en todas las coordenadas racionales. Por último es totalmente Euclideano y por lo tanto es localmente Euclideano, por tanto R^n es una variedad.

Ejemplo 1.2.2. Sea $\mathcal{C}$ un cono truncado, probemos que es una variedad topológica:



1. Dado que $\mathcal{C}$ es un subespacio de un espacio métrico $(\mathbb{R}^3)$ entonces es T_2.
2. La restricción a la base númerable de $\mathbb{R}^3$ induce una base numerable para la topología relatia a $\mathcal{C}$.
3. Sea $\varphi : (x, y, \sqrt{x^2+y^2}) \longmapsto (x, y) \subset \mathbb{R}^2$, la proyección en la primera y segunda componente, φ es biyectiva y continua. Por lo tanto φ es homeomorfismo y $\mathcal{C}$ es localmente euclideano.

Por lo tanto $\mathcal{C}$ es una variedad topológica.

Ejemplo 1.2.3. Todo superficie en $\mathbb{R}^3$ es una variedad, 2 dimensional.

Sea M una variedad topológica de dimensión n. Una carta de coordenadas o sistema de coordenadas, es una pareja alrededor de $x \in M$ (U, φ), donde $x \in U$ es un abierto en M y $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo. Asignamos n coordenadas para cada $q \in U$

$$\varphi(q) = (x^1(q), \ldots, x^n(q)) \subset \mathbb{R}^n,$$

donde cada $x^i(q)$ es una función real en U, la i-esima función coordenada.

Supongamos que q esta en dos cartas coordenadas (U,φ), (V,ψ), entonces q tiene dos representaciones, es decir, $\varphi(q) = (x^1(q),\dots,x^n(q))$ y $\psi(q) = (y^1(q),\dots,y^n(q))$, dado que ambas funciones son homeomorfismo, definen el siguiente homeomorfismo

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

el dominio y el rango corresponden a los puntos en la intersección $U \cap V$. Podemos ver las coordenas en determinadas por $\psi \circ \varphi^{-1}$ por las funciones continuas

$$y^i = h^i(x^1,\dots,x^n) \text{ para } i = 1,\dots,n$$

las y-coordenadas estan determinadas por las x-coordenadas. De manera similar las coordenadas de $\varphi \circ \psi^{-1}$ estan determinadas por x-coordenadas, expresado de la siguiente manera

$$x^i = g^i(y^1,\dots,y^n) \text{ para } i = 1,\dots,n.$$

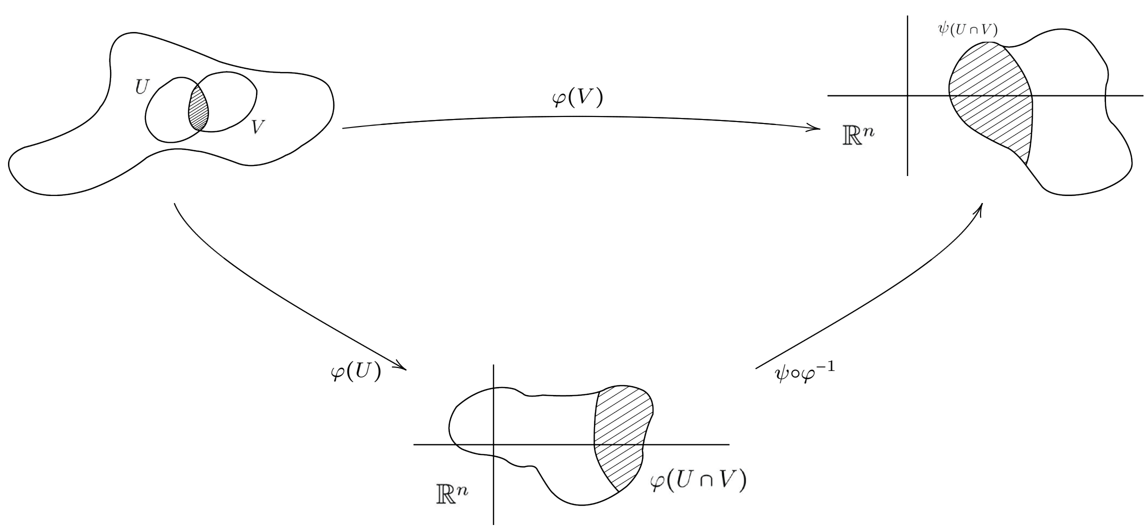
Podemos observar que $\varphi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$ son homeomorfismos y uno son inversos uno del otro. De manera equivalente las funciones continuas $h^i(x)$ y $g^j(y)$ para $ij = 1,\dots,n$ se aplican como inversas, es decir,

$$\begin{aligned} h^i(g^1(y),\dots,g^n(y)) &= y^i \text{ para } i = 1,\dots,n \\ g^j(h^1(x),\dots,h^n(x)) &= x^j \text{ para } j = 1,\dots,n. \end{aligned}$$

Así para cada punto de la variedad topológica M se encuentra en una gran colección de cartas coordenas, pero podemos superponer cada dos cartas y obtener un cambio de coordenas de una carta a otra.

Por lo tanto, podemos dar la siguiente definición

Definición 1.2.4. *Decimos que (U,φ) y (V,ψ) son C^∞-compatibles o simplemente compatibles, si $U \cap V$ no vacio implica que las funciones $h^i(x)$ y $g^i(y)$ dan un cambio de coordenadas, o equivalentemente $\varphi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$ son difeomordismos de conjuntos abiertos $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ de $\mathbb{R}^n$, lo cual se puede seguir en el siguiente diagrama.*



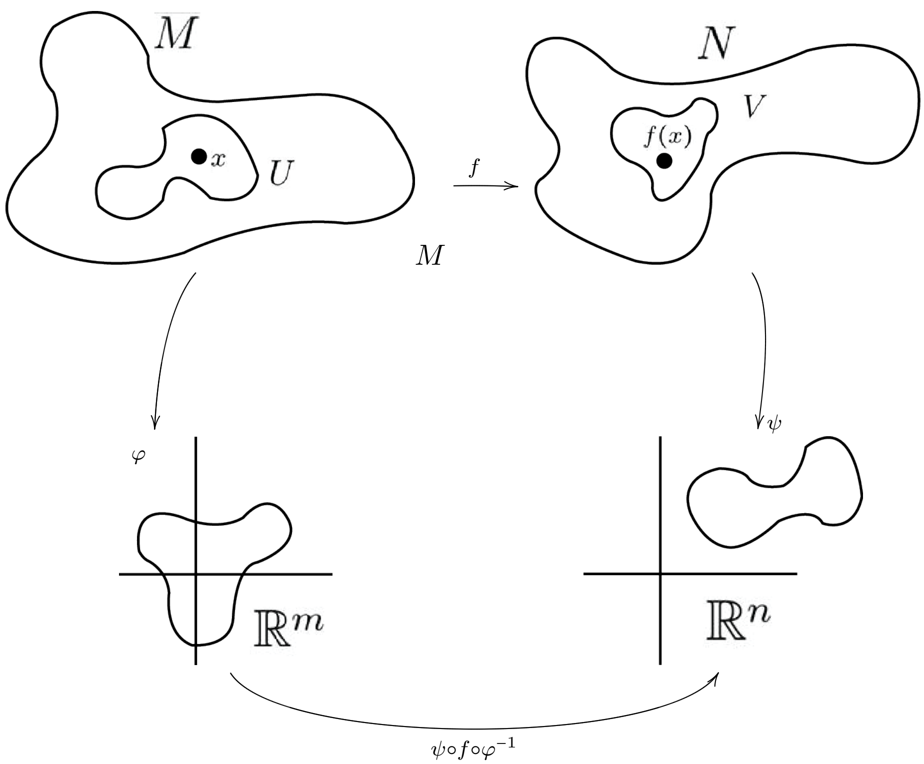
Una estructura diferencial de una variedad topológica M es una familia de cartas compatibles $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = M$, algunas veces a este conjunto se le conoce como **atlas**, si además existe alguna carta coordenada $(V, \psi) \in \mathcal{U}$ compatible con cada una de las cartas de $\mathcal{U}$.

Ejemplo 1.2.5. El espacio $\mathbb{R}^n$ es una estructura diferencial. Lo cual es claro ya que la única carta (U, φ) es aquella donde $\varphi = id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, por ende su atlas coincide con su relación de equivalencia.

Teorema 1.2.6. *Sea M un espacio Hausdorff segundo numerable. Si $V = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ es una cubierta de M por cartas coordenas compatibles, entonces existe una única estructura diferencial que contiene a estas cartas coordenadas.*

Por último, decimos que una variedad topológica es una variedad diferecicial, si esta cuenta con una estructura diferencial.

Sean M y N variedades diferenciales y $f : M \longrightarrow N$ una función. Decimos que f es diferenciable en $x \in M$ si para cada carta (U, φ) de M y cada carta $(V_{f(x)}, \psi)$ de N se tiene la siguiente composición:



es decir,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

es diferenciable en x. Si esto sucede para toda $x \in M$ se dice que f es diferenciable en M. Si además f es biyectiva y f^{-1} es diferenciable, decimos que f es un difeomorfismo.

Ejemplo 1.2.7. El espacio de matrices con coeficientes reales $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathcal{R})$, dotado con la topología inducida por la funcoión biyectiva $\varphi : \mathcal{M}_{n\times m}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{R}^{n\cdot m}$ tal que $\varphi((a_{ij})) = (a_{11}, \cdot, a_{1m}, \cdot, a_{n1}, \cdot, a_{nm})$. Es claro ver que es una variedad topol ógica y que $(\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}), \varphi)$

es una carta de dimensión $n \cdot m$ tal que cubre a $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ y por el teorema 1.2.6 existe una única estructura diferencial que contiene a $(\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}), \varphi)$, por lo tanto el espacio $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ es una variedad diferncial.

Ejemplo 1.2.8. Un subconjunto abierto U de una vaiedad diferencial M es una variedad con estructura diferencial, la cual consiste de las cartas coordenadas (V', ψ') restrigiendo a la carta coordenada (V, ψ) de M de la siguiente forma

$$\begin{aligned} V' &= V \cap U \\ \psi' &= \psi|_{V\cap U}. \end{aligned}$$

Esto proprciona una cubierta de U por la topología de las cartas coordenadas, las cuales son compatibles y por ende define una estructura diferencia en U, a la cual se le llama subvariedad de M.

Para ilustrar una subvariedad veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.9. Consideremos $U = Gl(n, \mathbb{R}) \subset M = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sabemos que el *det* A es una función polinomial de entradas a_{ij}, por tanto identificamos a A con $\mathbb{R}^{n^2}$. U es un conjunto abierto, ya que su complemento es un conjunto cerrado, por lo tanto tenemos que $GL(n, \mathbb{R})$ es una subvariedad de $M_n(\mathbb{R})$.

Teorema 1.2.10. *Sea M y N variedades diferenciales de dimensiones m y n respectivamente. Entonces $M \times N$ es una variedad de dimensión $m+n$ con una estructura diferencial determinada por las cartas coordenadas de la forma $\{(U \times V, \varphi \times \psi)\}$, donde (U, φ) y (V, ψ) son las cartas coordenadas en M y N respectivamente, además $\varphi \times \psi(p, q) = (\varphi(p), \psi(q))$ en $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\{(V_\beta, \psi_\delta)\}_{\gamma\in\Gamma}$ los atlas de las variedades M y N respectivamente. Definamos el siguiente función para el producto cartesiano $U_\alpha \times V_\delta$ de la siguietne forma:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \times \psi_\delta : \quad U_\alpha \times V_\delta &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^{m+n} \\ (p, q) &\longmapsto \quad (\varphi_\alpha(p), \psi_\delta(q)) \end{aligned}$$

Entonces $\{(U_\alpha \times V_\delta, \varphi_\alpha \times \psi_\delta) : (\alpha, \delta) \in \Lambda \times \Delta\}$ es un atlas para el producto $M \times N$. Observamos que la imagen $\varphi_\alpha \times \psi_\delta(U_\alpha \times V_\delta)$ es un abierto en $\mathbb{R}^{m+n}$, ya que es producto finito de abiretos en R^{m+n}. La función $\varphi_\alpha \times \psi_\delta$ es biyectiva, por ser φ_α y ψ_δ funciones biyectivas. Por lo tanto $(U_\alpha \times V_\delta, \varphi_\alpha \times \psi_\delta)$ es una carta coordenada sobre $M \times N$.

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} \bigcup_{(\alpha,\delta)\in\Lambda\times\Delta} \varphi_\alpha \times \psi_\delta(U_\alpha \times V_\delta) &= \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \varphi_\alpha(U_\alpha) \right) \times \left(\bigcup_{\delta\in\Delta} \psi_\delta(V_\delta) \right) \\ &= M \times N. \end{aligned}$$

Ahora veamos que el cambio de una carta coordenada a otra es diferenciable. Sean $(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)$ y $(U_\gamma \times V_\delta, \varphi_\gamma \times \psi_\delta)$ cartas coordenadas de $M \times N$ tales que $(U_\alpha \times V_\beta) \cap (U_\gamma \times V_\delta) \neq \phi$, entonces $U_\alpha \cap U_\gamma) \neq \phi$ y $V_\beta \cap V_\delta \neq \phi$, lo que implica que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\gamma^{-1}$ y $psi_\beta \circ \psi_\delta^{-1}$ son diferenciales.

Por último el cambio de coordenadas de queda de la siguiente manera:

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta) \circ (\varphi_\gamma \times \psi_\delta)^{-1} \quad = \quad (\varphi_\alpha \circ (\varphi_\gamma)^{-1}) \times (\psi_\beta \circ (\psi_\delta)^{-1}).$$

Por tanto el producto $M \times N$ es una variedad diferencial de dimensión $m + n$ con sus carta coordenadas de la forma $\{U \times V, \varphi \times \psi\}$. □

Definición 1.2.11. *Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta de un espacio topológico X. Una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$ es una colección de funciones continuas $f_\alpha : X \longrightarrow [0,1]$, con $\alpha \in \Lambda$, tales que*

i) $Sop(f_\alpha) \subset U_\alpha$, para todo α, donde $Sop(f_\alpha) = \overline{\{x \in X : f_\alpha(x) \neq 0\}}$,

ii) $\sum\limits_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x) = 1$, para toda $x \in X$.

Lema 1.2.12. *Sea $\mathcal{U} = \{U_1, U_2 \ldots, U_n\}$ una cubierta abierta de un espacio topológico normal X. Entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{V} = \{V_1, V_2 \ldots, V_n\}$ tal que $\overline{V_i} \subset U_i$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Demostración. Probaremos que para cualquier subíndice $i = 1, \ldots, n$ existe un abierto V_i con $\overline{V_i} \subset U_i$ y tal que $\{U_1, \ldots, U_{i-1}, V_i, U_{i+1}, \ldots, U_n\}$ es una cubierta (abierta) de X.

Sin pérdida de generalidad sea $i = 1$ y $C_1 = \left(\bigcup\limits_{i=2}^{n} U_i\right)^c$, entonces vemos que C_1 cerrados y $C_1 \subset U_1$. Luego C_1 y $(U_1)^c$ son cerrados y disjuntos. Como X es normal, existen abiertos disjuntos V_1 y O_1 tales que $C_1 \subset V_1$ y $(U_1)^c \subset O_1$, entonces $\overline{V_1} \subset U_1$ y $\{V_1, U_2, \ldots, U_n\}$ cubre a X. □

Lema 1.2.13. *Todo cubierta abierta finita de un espacio topológico normal, tiene una partición de la unidad asociada.*

Demostración. Sea X un espacio normal y sea $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ una cubierta abierta de X. Entonces, existen cubiertas abiertas $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ y $\mathcal{W} = \{W_1, W_2 \ldots, W_3\}$ tales que para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se tiene que $\overline{W_i}$ y $\overline{V_i} \subset U_i$.

Por el Lema de Uryhson, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ existe $\psi_i : X \longrightarrow [0,1]$ continua con $sop(\psi_i) \subset V_i$ y $\psi_i = 1$ sobre W_i.

Entonces $\psi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i(x) \neq 0$ para toda $x \in X$. Es fácil probar que $\{f_i\}_{i=1}^n$ con $f_i(x) = \dfrac{\psi_i(x)}{\psi(x)}$ es una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$. □

Teorema 1.2.14. *Toda m-variedad compacta M se incrusta en algún $\mathcal{R}^n$.*

Demostración. Sea M una variedad compacta de dimensión m. Sea $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ una cubierta abierta de X tal que cada U_i se incrusta en $\mathbb{R}^m$ mediante $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Como toda variedad compacta es un espacio normal, existe una partición de la unidad $\{f_i\}_{i=1}^n$ subordinada a $\mathcal{U}$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ sea $g_i : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

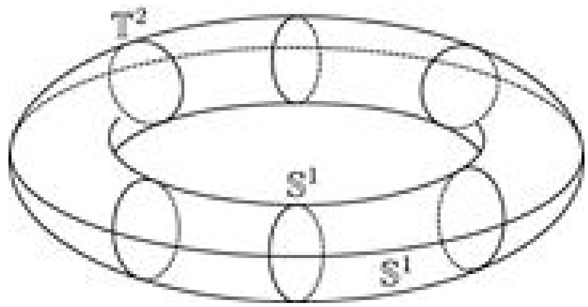
$$g_i(x) = \begin{cases} h_i(x) f_i(x) & \text{si } x \in U_i \\ 0 & \text{si } x \notin U_i \end{cases},$$

luego sea $F : M \to \mathbb{R}^{n+m}$ definida por

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x), g_1(x), \ldots, g_n(x)),$$

la cual es una incrustación. □

Ejemplo 1.2.15. El toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, más generalmente, $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1$, el n-producto de círculos es un variedad diferencial obtenida como un producto cartesiano.



1.3. Elementos de topología equivariante

1.3.1. G-espacios y funciones equivariantes

Sea G un grupo topológico con unidad e, sea X un espacio topologico y supogamos que que tenemos definido una acción izquierda (derecha) $\cdot : G \times X \longrightarrow X$ como $\cdot(g,x) = gx$, entonces llamaremos a X un G-espacio izquiedo (derecho) siempre que exista está acción.

Cuando X es un G-espacio derecho podemos definir $(g,x) \mapsto g^{-1}x$, dando una acción izquierda. El resto del trabajo trabajaremos con G-espacios izquiedas, refiriendonos a ellos como **G-espacio**.

Una función f entre dos G-espacios X e Y, $f : X \longrightarrow Y$, es llamada una **G-función** o una función equivariante, si $f(g \cdot_X x) = g \cdot_Y f(x)$ para todo $g \in G$ y para todo $x \in X$, en adelante se usara indistintamente la acción $\cdot$ esperando no cause confución. Con la composición de funciones obtenemos la categoría $\mathbf{G-Top}$, donde los objetos son los G-espacios y los morfismos son G-funciones entre los objetos.

Escribimos $\mathrm{Hom}_{G-Top}(X,Y)$ o $\mathrm{Hom}_G(X,Y)$ a el conjunto de G-funciones equivariantes de X a Y, a este conjunto tambien se le denota $\mathcal{C}_1(X,Y)$ en un sentido categoríco (cf. A.1). El conjunto $\mathrm{Hom}_G(X,Y)$ es un subespacio topológico del espacio $\mathrm{Hom}_{Top}(X,Y)$ con la siguietente topología:

Sea X un espacio localmente Hausdorff y Y un espacio Hausdorff entonces definimos

$$M(K,U) = \{f : X \longrightarrow Y : f \text{ es continua y } f(K) \subset U\},$$

donde K es un subconjunto compacto de X y U un subconjunto abierto de Y.

El conjunto $M(K,U)$ forma una subbase para los conjuntos abiertos y genera la topología conocida como **topología compacto-abierto**.

Podemos definir la conjugación de la G-acción en el espacio $\mathrm{Hom}_{Top}(X,Y)$ como $(g,f) \mapsto g \cdot f$ y $(g \cdot f)(x) = gf(g^{-1}x)$, con esta acción el conjunto $\mathrm{Hom}_{Top}(X,Y)$ es un objeto en $G - Top$, esto es llamado el interior Hom y es denotado por $\underline{\mathrm{Hom}}_{Top}(X,Y)$, a demás el mismo conjunto denota al espacio topológico con la topología compacto abierto.

Para algún subgrupo cerrado H de G definimos el **conjunto de puntos fijos o sistema de puntos fijos** H de X como

$$X^H = \{x \in X : hx = x \text{ para toda } h \in H\}.$$

El tipo de homotopía equivariante de X está completamente determinado poe el sistema de puntos fijos $\{X^H : H \leq G\}$.

Dados G-espacios X e Y, consideremos el G-espacio $\underline{\mathrm{Hom}}_{Top}(X,Y)$ con la G-acción conjugada.

Entonces un G-punto fijo f en $\underline{\mathrm{Hom}}_{Top}(X,Y)$ tiene la propiedad $gf(g^{-1}x) = f(x)$ o equivalentemente $gf(x) = f(gx)$ para todo $g \in G$ y $x \in X$. Es decir, f es una G-función. Reciprocamente una G-función $f : X \longrightarrow Y$ es claramente fijado por G, cuando es visto como un elemento de $\underline{\mathrm{Hom}}_{Top}(X,Y)$.

Por lo tanto tenemos que $\underline{\mathrm{Hom}}_{G-Top}(X,Y) = (\underline{\mathrm{Hom}}_{Top}(X,Y))^G$.

Veamos los siguientes resultados topológicos.

Teorema 1.3.1. *Sea X un espacio Hausdorff localemnte compacto, Y, Z arbitrarios espacios Hausdorff. Dada una función $f : X \times Y \longrightarrow Z$, definiendo para cada $y \in Y$ $f_y : X \longrightarrow Z$ como $f_y(x) = f(x,y)$. Entonces f es continuo y sólo si se cumple las dos siguientes condiciones:*

a) cada f_y es continua y

b) la función $Y \longrightarrow \{g : X \longrightarrow Z : g$ es continua$\}$ que manda a y a f_y es continua.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que f es continua, entonces

a) f_y es la composción de $X \longrightarrow X \times Y \longrightarrow Z$ dada por la inclusión $x \hookrightarrow (x,y)$ con f,

b) sea $y \in Y$ dado y sea $f_y \in M(K,U)$, con $K \subset X$ y $U \subset Z$. Es suficiente probar que existe una vecindad W de $y \in Y$ tal que $y' \in W$, entonces $f_{y'} \in M(K,U)$, lo cual probará la condición de continuidad para una subbase.

Para $x \in K$ existe vecindades abiertas $V_x \subset X$ y $W_x \subset Y$ de y tales que $f(V_x \times W_x) \subset U$. Por compacidad de X tenemos existen $x_1, \ldots, x_n$ tales que $K \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n} = V$, de manera analoga para $W = W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_n}$. Entonces $f(K \times W) \subset f(V \times W) \subset U$. Luego como $y' \in W$, entonces $f_{y'} \in M(K,U)$ como deseamos probar.

($\Leftarrow$) Supongamos que se cumplen las condiciones *a*) y *b*), entonces f s la composición de funciones $X \times Y \longrightarrow \{g : X \longrightarrow Z : g$ es continua$\} \times X$ tomando (x,y) y enviandolo a (f_y, x) y como es composición de funciones contunuas, entonces f es una función continua.

$\square$

Podemos observar que el teorema implica que una homotopía $X \times I \longrightarrow Y$, con X localmente compacto, es la misma cosa que $I \longrightarrow \{g : X \longrightarrow X : g$ es continua$\}$ en $\{g : X \longrightarrow X : g$ es continua$\}$.

Proposición 1.3.2. *Sea X, Y, Z G-espacios Hausdorff y X, Y son G-espacio localmente compactos, entonces existe un G-homoemorfismo natural*

$$\Phi : \underline{\mathrm{Hom}}_{Top}(X \times Y, Z) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{Top}(X, \underline{\mathrm{Hom}}_{Top}(Y,Z)),$$

donde Φ esdefinido por $(\Phi(f))(x)(y) = f(x,y)$ para todo $f : X \times Y \longrightarrow Z$, $x \in X$ e $y \in Y$.

Demostración. Consideremos solamente a X, Y espacos Hausdorf y localmente compactos, y Z un espacio Hausdorf, entonces por el teorema anterior tenemos una asignación $\Phi \longmapsto \Phi^* : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ biyectiva donde definimos $\Phi^*(y)(x) = \Phi(x,y) = \Phi_y(x)$, entonces es suficiente probar que su inversa es continua para asi tener el isomorfismo.

Sea $U \subset Z$ abierto y $K \subset X$, $K' \subset Y$ conjuntos compactos. Entonces

$$\begin{aligned} \Phi \in M(K \times K', U) &\iff [y \in K',\ x \in K,\ \text{entonces } \Phi_y(x) = \Phi(y,x) \in U] \\ &\iff [y \in K',\ \text{entonces } \Phi_y(x) \in M(K,U)] \\ &\iff [\Phi^* \in M(K', M(K,U))]. \end{aligned}$$

Así $K \times K'$ es una base de vecindad para $X \times Y$. Por lo tanto la $M(K \times K', U)$ forman una subbase para la topología de $\{\Phi : X \times Y \longrightarrow Z : \Phi \text{ es continua}\}$ y por tanto Φ es un isomorfismo, a este resultado se le conoce como la **ley exponencial**.

Ahora veamos que pasa con la G -acción en los espacios y conjuntos Hom, para probar que Φ es una función equivariante

$$\begin{aligned} (\Phi(g \cdot f))(x)(y) &= (g \cdot f)(x,y) \\ &= gf(g^{-1}x, g^{-1}y) \\ &= g\left[f(g^{-1}x, g^{-1}y)\right] \\ &= g\left[(\Phi(f))(g^{-1}x)(g^{-1}y)\right] \\ &= g\left[(\Phi(f))(g^{-1}x)\right](g^{-1}y) \\ &= \left[g \cdot \Phi(f)(g^{-1}x)\right](y) \\ &= \left[g \cdot \Phi(f)(x)\right](y) \\ &= \left[g \cdot \Phi(f)\right](x)(y), \end{aligned}$$

por lo tanto $(\Phi(g \cdot f))(x)(y) = [g \cdot \Phi(f)](x)(y)$, lo que implica que Φ es un G-Homeomortfismo. ☐

Corolario 1.3.3. *Sea X, Y, Z G-espacios Hausdorff e Y un G-espacio localmente compacto y Φ un homeomorfismo de $\underline{\text{Hom}}_{Top}(X \times Y, Z)$ a $\underline{\text{Hom}}_{Top}(X, \underline{\text{Hom}}_{Top}(Y,Z))$, entonces existe un homeomorfismo*

$$\Psi : \underline{\text{Hom}}_{G-Top}(X \times Y, Z) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{G-Top}(X, \underline{\text{Hom}}_{Top}(Y,Z)).$$

Demostración. Si $\Phi : X \longrightarrow Y$ es un G-homeomorfismo, entonces $\Psi = \Phi : X^G \longrightarrow Y^G$ es un homeomorfismo. ☐

Con el teorema y corolario anterior vemos que la ley exponcial también es valida en las categorías $Top(X,Y)$ y $G_{Top}(X,Y)$.

Proposición 1.3.4. *Sea X un G-espacio y sea A un espacio con la G-acción trivial. Entonces hay los siguientes homeomorfismos naturales:*

i) $\underline{\text{Hom}}_{G-Top}(A, X) \cong \underline{\text{Hom}}_{Top}(A, X^G)$,

ii) $\underline{\text{Hom}}_{G-Top}(A, X) \cong \underline{\text{Hom}}_{Top}(X/G, A)$.

Demostración. i) Sea $f \in \underline{\mathrm{Hom}}_{G-Top}(A,X)$, entonces $g \cdot f(a) = f(g \cdot a)$, pero ya que la acción en A es trivial se tiene que $g \cdot f(a) = f(a)\underline{\mathrm{Hom}}_{Top}(A,X^G)$. Ahora $h \in \underline{\mathrm{Hom}}_{Top}(A,X^G)$, entonces que $g \cdot h(a) = h(a) \in \underline{\mathrm{Hom}}_{G-Top}(A,X)$.

Por lo tanto $\underline{\mathrm{Hom}}_{G-Top}(A,X) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{Top}(A,X^G)$

ii) Sea $f \in \underline{\mathrm{Hom}}_{G-Top}(A,X)$ y $\Phi \in \underline{\mathrm{Hom}}_{Top}(X/G,A)$, consideremos los espacios cocientes X/G y $A/G = A$, por tener la acción trivial, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & A \\ X/G, \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

donde p es la proyección X en el espacio cociente. Por tanto es claro poder establecer un homeomorfismo.

□

Proposición 1.3.5. *Si G es un grupo compacto y $H < G$ un subgrupo cerrado, entonces para algún G-espacio X existe una transformación natural*

$$\Phi : X^H \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{G-Top}(G/H,X),$$

donde Φ envía $a \in X^H$ a $f_a : G/H \longrightarrow X$ con $f_a(gH) = ga$. La inversa de Φ envía $f \in \underline{\mathrm{Hom}}_{G-Top}(G/H,X)$ a $f(H)$.

Demostración. Sea $a : X^H \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_G(G/H,X)$ definida como $a(x)(gH) \mapsto gx$ □

Si $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ es una colección de G-espacios, entonces el producto $\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$ es un G-espacio bajo la acción diagonal

$$(g,(X_\alpha)_{\alpha \in J}) \longmapsto (gX_\alpha)_{\alpha \in J}.$$

Sea $I = [0,1]$ con la G-acción trivial derecha. Dos G-funciones $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ son llamados G-homotópicos si existe una G-función continuo $F : X \times I \longrightarrow Y$, tal que $F(x,0) = f_0(x)$ y $F(x,1) = f_1(x)$, donde $X \times I$ llevaa la acción diagonal. F es es llamado un G-homotópica de f_0 a f_1. Cuando la acción en I es trivial la función $f_t : X \longrightarrow Y$ con $x \longmapsto F(x,t)$ es equivariante para toda $t \in I$. Como en el caso no equivariante, la realación de ser G-homotópicas es una relación de equivalencia. Por lo cual denotaremos por $[X,Y]_G$ a las clases de G-funciones X a Y y $[f]$ denota un representante de la clase G-homotópica, representando $f : X \longrightarrow Y$.

La categoría homotópica $\mathbf{hG-Top}$ es tal que sus objetos son los mismos en G-Top y los morfismos son las clases G-homotópicas de G-funciones entre G-espacios.

Sea X un espacio topológico, recordemos el espacio cociente CX, el cono del espacio X $CX = X \times I / X \times \{1\}$. Si en este espacio X tenemos una G-acción, entonces el cono es un G-espacio con la G-acción diagonal. Sea A subconjunto de X y para cualquier G-función $f : A \longrightarrow X$, el cono C_f es el siguiente espacio cociente:

$$C_f = X \bigcup_f CA = X \bigsqcup CA / \sim,$$

donde ~ es la relación de equivalencia generada por $(a,0) \sim f(a)$ para toda $a \in A$.

Si $A = X$ y $f = id$, entonces $C_{id} = X \bigcup\limits_{id} CX = X \bigsqcup CX/\sim$, donde relacionamos $(x,0) \sim x$ para todo $x \in X$.

Definición 1.3.6. *Una G-función $f : A \longrightarrow X$ es un* **cofibrado equivariante** *o* **G-cofibrado** *si este satisface la* **propoiedad de extensión homotópica (G-HEP)***, es decir, para algún G-espacio Y y G-funciones $\Psi : X \longrightarrow Y$, $\Phi : A \times I \longrightarrow Y$, se satisface que $\Phi \circ i_0 = \Psi \circ f$ existe una G-función $\tilde{\Phi} : X \times I \longrightarrow Y$ tales que hacen comutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "f"'] & & A \times I \arrow[dl, "\Phi"] \arrow[dd, "f\times id"] \\
& Y & \\
X \times \{0\} \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[rr, "i_0"'] & & X \arrow[ul, "\tilde{\Phi}"']
\end{tikzcd},$$

donde $i_0(x) = (x,0)$.

Definición 1.3.7. *Un* **G-espacio basado***, (X,x), es un G-espacio con un punto base $x \in X$ y el cual es un punto fijo.*

Nos referimos a X como un G-espacio basado, siempre que exita un punto base en X.

Si Z es algún G-espacio, definimos Z_+ como la unión disjunta de Z con un punto +, el cual es un G-punto fijo y $\{+\}$ tiene la G-acción trivial, tal que hace a Z_+ un G-espacio basado. El G-espacio Z_+ tiene la topología compactificación a un punto.

Definimos la topología compactificación a un punto como ...

Ejemplo 1.3.8. Sea $\mathbb{R}$, y sea $+ =$, entonces

$$R_+ =$$

Definición 1.3.9. *Si (X,x_0) y (Y,y_0) son G-espacios basados, entonces una G-funciónmapeo $f : X \longrightarrow Y$ es entonces una* **G-función basado** *si f manda puntos basados en puntos basados, es decir, $f(x_0) = y_0$.*

La colección de G-espacios basados y G-funciones basados forma la categoría $\mathbf{G\text{-}Top^0}$.

Definición 1.3.10. *La* **cuña o punto unión** *de (X,x_o) e (Y,y_0) G-espacios basados esta definida de manera similar a la cuña de espacios, es decir, es el espacio cociente de la unión ajena de los espacios X e Y y cociente la relación de identificación x_0 con y_0.*

Esto es un G-espacio y es G-homeomorfismo a el G-subespacio $X \times \{x_0\} \sqcup Y \times \{y_0\}$ del producto $X \times Y$.

Definición 1.3.11. *El* **smash** *$X \bigwedge Y$ es el cociente entre $X \times Y / X \bigvee Y$, es decir, es colapsar el espacio $X \times Y$ a los puntos base $X \bigvee Y$.*

Definición 1.3.12. *Sea X e Y G-espacios basados, definimos una G-homotopía basada F entre dos G-funciones $f_0,\ f_1 : X \longrightarrow Y$, esto es una G-función basado, $F : X \bigwedge I_+ \longrightarrow Y$ tal que $F(x,0) = f_0(x)$ y $F(x,1) = f_1(x)$, donde $X \bigwedge I_+$ es un G-espacio basado obtenido de colapsar $X \times I$ al punto base $\{x_0\} \times I$.*

Con la definición anterior definimos la **categoría homotópica $\mathbf{hG-Top^0}$** tiene como objetos a los G-espacios basados y sus morfismos las clases de G-homotopías basadas de G-funciones basados (los cuales escribiremos como $[X,Y]_G^0$, donde las G-funciones van de X a Y).

Definición 1.3.13. *Sea (X, x_0) un G-espacio basado, entonces el* **cono reducido CX** *es el G-espacio cociente siguiente*

$$CX = X \times I/(\{x_0\} \times I \bigcup X \times \{1\}),$$

donde $\{x_0\} \times I \cup X \times \{1\}$ colapsa al punto base.

El **cono reducido** *de una G-función basado f,* $\mathbf{C}_f$ *donde $f : A \longrightarrow X$, es definido como*

$$C_f = X \bigcup_f CA = X \bigsqcup CA/\sim.$$

La definición de G-cofibración basada es de manera natural como en la definición 1.3.6, es decir, todos las funciones y espacios en el diagrama son basados.

1.3.2. Complejos celulares equivariantes

Como hemos visto anteriormente ene la teoría de no-equivariancia complejos CW puede extenderse a el caso equivariante.

Sea $\mathbb{D}^n$ el disco unitario en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{S}^{n-1}$ el círculo unitario en $\mathbb{R}^n$, ambos espacios tienen la G-acción trivial. El interior de $\overset{o}{\mathbb{D}}{}^n = \mathbb{D}^n \backslash \mathbb{S}^{n-1}$ es el **disco abierto n-dimensional**.

Definición 1.3.14. *Sea G un grupo y H subgrupo de G una* **n-celda equivariante de tipo G/H** *es el producto de G-espacio $G/H \times \mathbb{D}^n$.*

La diferencia fundamental de una n-celda equivariante y una no-equivariante es el grupo G/H que tomamos.

Definición 1.3.15. *Un* **complejo CW equivariante** *o* **complejo G** $- CW$ *X es un G-espacio X junto con una* **filtación** *$\{X^n : n > 0\}$ de X tal que:*

i) X^0 es la unión disjuntas de órbitas G/H y por inducción, X^n es obtenido de X^{n-1} al pegar n-celdas equivariante $G/H_\alpha \times \mathbb{D}^n$ vía la G-función pegado $\Phi_\alpha : G/H_\alpha \times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$. Es decir, X^n es el espacio cociente

$$X^{n-1} \bigcup_{\bigsqcup \Phi_\alpha} \left(\bigsqcup_\alpha G/H_\alpha \times \mathbb{D}^n \right),$$

$\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ **es una familia subgrupos cerrados de** G

ii) $X = \bigcup_n X^n$ y X tiene la topología débil con respecto a $\{X^n\}$, es decir, un subconjunto $A \subset X$ es cerrado (abierto) si y sólo si $A \bigcap X^n$ es cerrado (abierto) en X^n para toda n.

Observemos que la condición $i)$ esta dada por el cono de funcón de la familia $\{\Phi_\alpha\}$, por definición de cono de Φ_α tenemos que

$$\begin{aligned} C_{\Phi_\alpha} &= X^{n-1} \bigcup_{\Phi_\alpha} C(G/H_\alpha \times \mathbb{S}^{n-1}) \\ &= X^{n-1} \bigcup_{\Phi_\alpha} (G/H_\alpha \times \mathbb{D}^{n-1}), \end{aligned}$$

Entonces cuando consideramos el cono de cada Φ_α de la familia $\{\Phi_\alpha\}$ tendremos que

$$\begin{aligned} C_{\{\Phi_\alpha\}} &= C_{\Phi_\alpha} \bigsqcup \cdots \bigsqcup C_{\Phi_\alpha} \\ &= \left(X^{n-1} \bigcup_{\Phi_\alpha} (G/H_\alpha \times \mathbb{D}^{n-1}) \right) \bigsqcup \cdots \bigsqcup \left(X^{n-1} \bigcup_{\Phi_\alpha} (G/H_\alpha \times \mathbb{D}^{n-1}) \right) \\ &= X^{n-1} \bigcup_{\bigsqcup \Phi_\alpha} \left(\bigsqcup_\alpha G/H_\alpha \times \mathbb{D}^{n-1} \right). \end{aligned}$$

Haciendo una analogía a lo ya visto en los complejos CW.

$i)$ Para cada n el espacio X^n es un G-subespacio cerrado de X y es llamado el **n-esqueleto** de X.

Si existe algún n tal que $X = X^n$ y $X \neq X^{n-1}$, entonces decimos que X tiene dimensión n. A esta propiedad se le conoce como **minimalidad**.

$ii)$ Para cada celda equivariante $G/H_\alpha \times \mathbb{D}^n$ hay una **función caracteristica** $\Psi_\alpha G/H_\alpha \times \mathbb{D}^n \longrightarrow X$ en una extención de las funciones de pegado $\Phi_\alpha : G/H_\alpha \times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$, es decir, Ψ_α es la composición

$$G/H_\alpha \times \mathbb{D}^n \xhookrightarrow{\Phi} X^{n-1} \coprod (\textstyle\coprod_\alpha G/H_\alpha \times \mathbb{D}^n) \xrightarrow{q} X^n \hookrightarrow X,$$

donde q es la función cociente definido en X^n. La imagen $\Psi_\alpha(G/H_\alpha \times \mathbb{D}^n)$ y $\Psi_\alpha(G/H_\alpha \times \overset{o}{\mathbb{D}}{}^n)$ las llamaremos **n- celda cerrada y abierta respectivamente**. Denotaremos $\Psi_\alpha(G/H_\alpha \times \mathbb{D}^n)$ por $e^n_{H_\alpha}$ y $\Psi_\alpha(G/H_\alpha \times \overset{o}{\mathbb{D}}{}^n)$ por $int(e^n_{H_\alpha})$.

$iii)$ La topología débil en X es equivalentemente caracterizada por lo siguiente:

un subconjunto de $B \subset X$ es cerrado si y sólo si la intersección de B y alguna n-celda cerrada es cerrada en n-celda, es decir, $B \cap e^n_{H_\alpha}$ es cerrado en $e^n_{H_\alpha}$ para cada n-celda equivariante $e^n_{H_\alpha}$.

Un G-espacio A de un complejo $G-CW$ X es llamado un **G-subcomplejo** si A es una unión de algunas celdas cerradas en X, es decir, si una celda abierta $int(e^n_{H_\alpha})$ intersecta a A no tirvialmente, entonces todas las celdas cerradas $e^n_{H_\alpha}$ estan contenidas en A.

Es fácil ver que A es un complejo $G-CW$. Si A es un subcomplejo, entonces llamamos a la pareja (X, A) complejo $G-CW$.

Proposición 1.3.16. *Sea X un complejo $G-CW$, entonces la órbita X/G es un complejo CW no equivariante con n-esqueleto X^n/G.*

La siguiente propiedad una conexión entre la equivariancia y los complejos CW, donde G es un grupo discreto.

Sea G un grupo discreto, sea X un G-espacio y un complejo CW no equivariante. Una **G-acción regular** en X es una G-acción que satisface:

i) para cada celda abierta $int(e^n_{H_\alpha})$ y cada $g \in G$, la transtalación izquierda $g \cdot int(e^n_{H_\alpha})$ es tambien una celda abierta en X,

ii) si $int(e^n_{H_\alpha}) \cap g \cdot int(e^n_{H_\alpha}) \neq \varnothing$, entonces g fija puntos del conjunto $int(e^n_{H_\alpha}) \cap g \cdot int(e^n_{H_\alpha})$.

Proposición 1.3.17. *Sea G un grupo discreto y X un complejo CW no equivarnate. Si existe una G-acción regular en X, entonces X es un complejo $G - CW$ con n-esqueleto X^n.*

Demostración. X^n es un G-subespacio de X, donde X tiene la topología débil respecto a X^n, X^n es obtenido apartir de pegar n-celdas a X^{n-1}. Dado que X es un complejo CW, entonces

$$\begin{tikzcd} J \times \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & X^{n-1} \arrow[d] \\ J \times \mathbb{D}^n \arrow[r, "\Psi"] & X^n \end{tikzcd}$$

con J un conjunto discreto y $J \times \mathbb{S}^{n-1} = \bigsqcup_{j \in J} \mathbb{S}^{n-1}$. El grupo G actúa en el conjunto de n-celdas y por lo tanto actúa en J. Rescribamos a J como la unión disjunta de órbitas J_α, con $\alpha \in A$, y elegimos G-isomorfismos $G/H_\alpha \cong J_\alpha$, $gJH_\alpha \longmapsto gj_\alpha$ para cada $j_\alpha \in J_\alpha$.

Para $s \in \overset{0}{\mathbb{D}}{}^n$ y $h \in H_\alpha$ tenemos $h\Psi(j_\alpha, s) = \Psi(hj_\alpha, s)$, por la condición *ii)* se vale para toda $s \in \overset{0}{\mathbb{D}}{}^n$ y por continuidad se extiende para todo $s \in \mathbb{D}^n$. Por lo tanto, tenemos G-funciones continuos

$$\Psi_\alpha : G/H_\alpha \times \mathbb{D}^n \longrightarrow X^n,$$

bien definidos, dados por $(gH_\alpha, s) = g\Psi(j_\alpha, s)$. De manera análoga tenemos $\varphi_\alpha : G/H_\alpha \times \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$.

Utilizamos los φ_α y Ψ_α para construir las G-funciones φ' y Ψ' y probar que tales G-funciones hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup_{\alpha \in A} G/H_\alpha \times \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, hook] & X^{n-1} \arrow[d, hook] \\ \bigsqcup_{\alpha \in A} G/H_\alpha \times \mathbb{D}^{n-1} \arrow[r, "\Psi'"] & X^n. \end{tikzcd}$$

Supongamos que $f : X^n \longrightarrow Z$ es dado y que los funciones $f|_{X^{n-1}}$ y $\{gH_\alpha\} \times \mathbb{D}^n \xrightarrow{\Psi'} X^n \xrightarrow{f} Z$ son continuos. Como $\mathbb{D}^n$ es compacto, entonces la función $\Psi'|_{\{gH_\alpha\} \times \mathbb{D}^n}$ es una identificación lo que implica que f es continua en $\Psi'|_{\{gH_\alpha\} \times \mathbb{D}^n}$, pero estas son las n-celdas cerradas X^n y por tanto f es continua. $\square$

Capítulo 2

Una cubierta buena equivariante de una G- variedad diferencial

Recordemos que una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de una variedad diferencial M es llamada una **cubierta buena** si todas las intersecciones finitas no vacías $U_{\alpha_0 \cdot s \alpha_n} = U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}$ son contraíbles.

Como mencionábamos anteriormente, R. Boot y L.-W. Tu demuestran (cf. [3, Teo. 5.1]) que toda variedad diferencial M tiene una cubierta buena dada por discos convexos geodésicos asociados a una métrica Riemanniana sobre M. En este capítulo extenderemos tal resultado al caso donde está presente una acción de un grupo de Lie compacto G sobre la variedad M. Seguiremos las ideas establecidas por H. Yang en [22], en donde se demuestra dicho resultado para la acción de un grupo finito.

2.1. Complejos simpliciales

Estableceremos en primer lugar la notación y terminología necesaria para este capítulo. En esta sección proporcionamos algunos hechos generales sobre *complejos simpliciales*, teoría que puede consultarse en los siguientes textos: [20], [7], [13], [17], [4] y [18], entre otros.

Si $\{v_0, \ldots, v_n\}$ es un conjunto afín independiente de un espacio euclidiano, entonces el subespacio

$$s = \langle v_0, \ldots, v_n \rangle := \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i : \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0 \right\},$$

es llamado el *n-simplejo* generado por $\{v_i\}$. Denotaremos su *conjunto de vértices* por $\mathrm{Vert}(s) := \{v_0, \ldots, v_n\}$.

Una cara s' de s es un simplejo tal que $\mathrm{Vert}(s') \subset \mathrm{Vert}(s)$.

Definición 2.1.1. *Un complejo simplicial (geométrico) K es una colección de simplejos en un espacio euclidiano tal que:*

i) si $s \in K$, entonces cada cara de s también está en K,

ii) si $s, t \in K$, entonces $s \cap t = \varnothing$ o bien, es una cara de s y t.

Para un complejo simplicial K, escribimos como $\mathrm{Vert}(K)$ el conjunto de vértices de K, es decir, el conjunto de 0-simplejos de K. La dimensión de K es definida por $\dim K = \sup\{\dim(s) : s \in K\}$. Decimos que K es *localmente finito* si cada punto $x \in |K| = \bigcup\{s : s \in K\} \subset \mathbb{R}^n$ tiene una vecindad que intersecta sólo una cantidad finita de simplejos de K (cf. [16, p. 69]), y decimos que K es *finito* si solamente contiene una cantidad finita de simplejos.

Asumiremos en el resto de este trabajo que todos los complejos simpliciales considerados son localmente finitos.

Un *subcomplejo simplicial* L de K es un subconjunto de K tal que L es por si mismo un complejo simplicial. Es claro que un subconjunto $L \subset K$ es un subcomplejo si y sólo si, todo simplejo en K que es una cara de un simplejo en L, es también un simplejo en L.

Ejemplo 2.1.2. Dado un n-simplejo s, denotamos por $\overline{s}$ el conjunto de todas las caras de s y, por $\dot{s}$ el conjunto de todas las caras propias de s. Si $n = 0$, entonces $\dot{s} = \varnothing$.

Entonces $\overline{s}$ y $\dot{s}$ son complejos simpliciales de dimensión n y $n-1$, respectivamente. El conjunto $s^\circ = s - \dot{s}$ es llamado un n-simplejo abierto.

Ejemplo 2.1.3. Si K es un complejo simplicial, entonces su n-esqueleto K^n es un complejo simplicial que consta de todos los simplejos en K de dimensión menor o igual a n.

Dado un complejo simplicial K, llamamos al subespacio $|K| := \bigcup_s \{s : s \in K\} \subset \mathbb{R}^n$, el *poliedro asociado* o *espacio subyacente* de K.

Definición 2.1.4. *Un espacio topológico X es llamado un poliedro si existe un homeomorfismo $h : |K| \xrightarrow{\cong} X$ para algún complejo simplicial K. La pareja (K, h) es llamada una triangulación de X.*

Sea K un complejo simplicial y sea $x \in |K|$. Denotaremos por $K(x)$ al (único) simplejo más pequeño de K que contiene a x.

Si v es un vértice de K, la *estrella (abierta)* de v se define por

$$\mathrm{st}_K(v) = \{x \in |K| : v \in K(x)\}.$$

Proposición 2.1.5. *Sea K un complejo simplicial. Entonces $x \in \mathrm{st}_K(v)$ si y sólo si, $v \in K(x)$ y para $x, y \in |K|$, $y \in K(x)$ implica $K(y) \subset K(x)$.*

Demostración. Sea $x \in \mathrm{st}_K(v)$, entonces $v \in K(x)$.

Sean $x, y \in |K|$, tales que $y \in K(x)$, ya que $K(y)$ es el simplejo más pequeño que contiene a y, entonces se sigue que $K(y) \subset K(x)$.

Por otra lado, sea $y \in \mathrm{st}_K(v)$ y como $K(y) \subset K(x)$, cuando $y \in K(x)$, entonces $v \in K(x)$, lo que implica que $x \in \mathrm{st}_K(v)$. □

Proposición 2.1.6. *Si $\{v_0, \ldots, v_n\}$ son vértices de un complejo simplicial K, entonces $\bigcap_i \mathrm{st}_K(v_i) \neq \varnothing$ si y sólo si $\langle v_0, \ldots, v_n\rangle$ es un simplejo de K.*

Demostración. Sea $x \in \bigcap_i \mathrm{st}_K(v_i)$ si y sólo si $v_i \in K(x)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, se sigue por el resultado anterior que $v_i \in K(x)$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Lo que implica que el conjunto $v_0, \ldots, v_n$ es un simplejo de $K(x)$, por lo tanto es un simplejo de K. □

Observación. 2.1.7. Para cualquier simplejo s de un complejo simplicial K es contraíble, ya que tenemos que la familia $\{f_\alpha\}$ con $\alpha \in [0,1]$, definida como $f_\alpha(s) = \alpha s$, entonces $f_0(s) = 0$ y $f_1(s) = s$. Por lo tanto, s es contraíble.

El siguiente resultado muestra que el conjunto de estrellas abiertas es una cubierta buena de un complejo simplicial. En particular, esto es una prueba alternativa de la existencia de una cubierta buena para una variedad diferencial, ya que toda variedad admite una triangulación (cf. [21]). La razón es que dada una variedad diferencial $\mathcal{M}$ y un complejo simplicial K, de a misma dimensión, existe un homeomorfismo $h : |K| \longrightarrow \mathcal{M}$ y apartir de la existencia $\mathcal{U}_K = \{\mathrm{st}_K(v) : v \in \mathrm{Vert}(K)\}$, la cual es una cubierta buena de K, construimos la cubierta buena para $\mathcal{M}$ como $\mathcal{U}_{\mathcal{M}} = \{U_v\}_{v\in\mathrm{Vert}(K)}$, donde $U_v = h(\mathrm{st}_K(v))$.

Teorema 2.1.8. *Sea K un complejo simplicial localmente finito. Entonces, para cada vértice v de K,*

$$\mathrm{st}_K(v) = \bigcup_{\substack{s\in K\\ v\in\mathrm{Vert}(s)}} s^\circ$$

Más aún, el conjunto

$$\mathcal{U} = \{\mathrm{st}_K(v) : v \in \mathrm{Vert}(K)\}$$

es una cubierta buena para K.

Demostración. Si K es un complejo simplicial, entonces, $|K|$ es la unión disjunta de todos los simplejos abiertos s°, con $s \in K$. Se sigue que para cada $x \in |K|$, $x \in (K(x))^\circ$. Luego, para cualquier par de simplejos s, t en un complejo simplicial K, la intersección de sus interiores es vacia, cuando s no es identicamente t. Incluso cuando s es cara de t.

Sea

$$A = \bigcup_{\substack{s\in K\\ v\in\mathrm{Vert}(s)}} s^\circ$$

si $x \in \mathrm{st}_K(v)$, entonces por la Proposición 2.1.5 se tiene que $v \in K(x)$, de modo que $v \in \mathrm{Vert}(K(x))$ y por lo tanto $x \in A$. Así $\mathrm{st}(v) \subset A$.

Por otra parte, elegimos $x \in s^\circ$ tal que s contiene a v y como $K(x)$ es el simplejo más pequeño que contiene a v, entonces $s = K(x)$. Luego como $v \in \mathrm{Vert}(s)$ implica que $v \in \mathrm{Vert}(K(x)) \subset K(x)$. Luego $A \subset \mathrm{st}_K(v)$ para cualquier $x \in \mathrm{st}_K(v)$ y s. Por lo tanto, $A = \mathrm{st}_K(v)$.

Definimos $\mathcal{U}$ como el conjunto de subconjuntos abiertos de $|K|$, el cual cubre a $|K|$. Más aún, dado un conjunto finito de elementos $U_i = \mathrm{st}_K(v_i)$ en $\mathcal{U}$ para $i =, \ldots, n$, entonces

$$\begin{aligned} U_0 \cap \cdots \cap U_n &= \mathrm{st}_K(v_0) \cap \cdots \cap \mathrm{st}_K(v_n) \\ &= \{x \in K : v_0, \ldots, v_n \in K(x)\} \\ &= \bigcup_{\substack{s\in K\\ v\in\mathrm{Vert}(s)}} s^\circ \end{aligned}$$

y como $U_0 \cap \cdots \cap U_n$ es un subcolmplejo simpliciales de K, entonces $U_0 \cap \cdots \cap U_n$ es contraíble por la Observación 2.1.7. □

2.2. Aproximación simplicial

Definición 2.2.1. *Sean K y L complejos simpliciales*

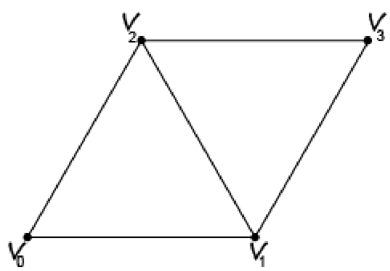
1. *Una* **función simplicial** $f : K \longrightarrow L$ *es una función tal que* $f : |K| \longrightarrow |L|$ *es continua, la cual envía* $\mathrm{Vert}(K)$ *en* $\mathrm{Vert}(L)$ *y es lineal en cada simplejo de K, es decir,* $f\left(\sum_i \lambda_i v_i\right) = \sum_i \lambda_i f(v_i)$. *Dada una función continua* $\varphi : |K| \longrightarrow |L|$, *si* $f(x) \in L(\varphi(x))$ *para cada* $x \in |K|$, *entonces f es llamada una* **aproximación simplicial** *a* φ.

2. *Una* **subdivisión** *de K es un complejo simplicial K' tal que $|K'| = |K|$ y cada simplejo s' de K' esta contenido en algún simplejo de K. Una* **subdivisión baricéntrica** *de K es un complejo simplicial K' cuyos vértices son los simplejos de K y los simplejos de K' son el conjunto $\langle s_0, \ldots, s_n \rangle$ tal que s_i son simplejos de K con*

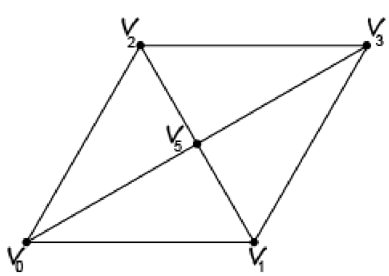
$$s_0 \subset \cdots \subset s_n,$$

   es decir, cada s_i es cara de s_{i+1}, para $i = 0, \ldots, n-1$.

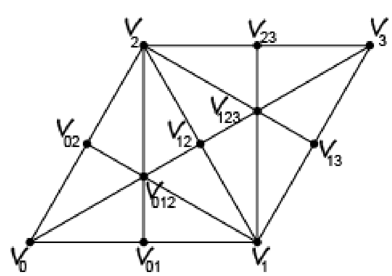
Ejemplo 2.2.2. Sea K el siguiente complejo simplicial



los siguientes complejos simpliciales son una subdivisión y una subdivisión baricéntrica, respectivamente, del complejo simplicial anterior K.



Subdivisión



Subdivisión baricéntrica

De la definición anterior es fácil ver que si $f : K \longrightarrow L$ es una función simplicial, entonces para cualquier $\{v_0, \ldots, v_n\}$ que genera un simplejo en K, se sigue que $\{f(v_0), \ldots, f(v_n)\}$ genera un simplejo en L.

Proposición 2.2.3. *Sean K y L complejos simpliciales finitos.*

1. *Si $f : K \longrightarrow L$ es una función simplicial, entonces $f(K(x)) = L(f(x))$ y $f(\mathrm{st}_K(v)) \subset \mathrm{st}_L(f(v))$ para todo $x \in |K|$ y $v \in \mathrm{Vert}(K)$.*

2. *Una función simplicial $f : K \longrightarrow L$ es una aproximación simplicial a $\varphi : |K| \longrightarrow |L|$ si y sólo si, $\varphi(\mathrm{st}_K(v)) \subset \mathrm{st}_L(f(v))$ para todo vértice v de K.*

Demostración.

1. Sea $s = \langle v_0, \dots, v_n\rangle$ un simplejo de K y para cualquier elemento x en s, se tiene que $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$ con $\lambda_i > 0$. Como f es una función simplicial, entonces $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(v_i)$. Luego $L(f(x)) = \langle f(v_0), \dots, f(v_n)\rangle = f\langle v_0, \dots, v_n\rangle = f(K(x))$. Por lo tanto, $L(f(x)) = f(K(x))$.

   Así tenemos que $f(x) \in \mathrm{st}_L(f(v))$ y para algún x arbitrario, tenemos que $f(\mathrm{st}_K(v)) \subset \mathrm{st}_L(f(v))$.

2. Sea f una aproximación simplicial a φ, entonces $f(x) \in L(\varphi(x))$ para toda $x \in |K|$. Elijamos $x \in \mathrm{st}_K(v)$, se sigue que $v \in K(x)$, por lo cual $f(v) \in f(K(x)) = L(f(x)) \subset L(\varphi(x))$, por la Proposición 2.1.5.

   Luego $\varphi(x) \in \mathrm{st}_L(f(v))$ y así tenemos que $\varphi(\mathrm{st}_K(v)) \subset \mathrm{st}_L(f(v))$.

   Por otra parte, elegimos $x \in |K|$ y sea $K(x) = \langle v_0, \dots, v_n\rangle$, entonces $x \in \mathrm{st}_K(v_i)$ para toda i, por la Proposición 2.1.5.

   Por hipótesis tenemos que $\varphi(x) \in \varphi(\mathrm{st}_K(v_i)) \subset \mathrm{st}_L(f(v_i))$ para toda i. Se sigue que $f(v_i) \in L(\varphi(x))$ para toda i. Por lo tanto, tenemos que $f(x) \in \langle f(v_0), \dots, f(v_n)\rangle \subset L(\varphi(x))$. Así $f(x) \in L(\varphi(x))$, lo cual prueba que f es una aproximación simplicial a φ.

□

Definición 2.2.4. *Dado un un complejo simplicial K de dimensión qn definimos la cero subdvisión baricéntrica ($K^{(0)}$) como K, la primera subdivisión baricéntrica ($K^{(1)}$) como K', de manera recursiva definimos la q-ésima subdivisión baricéntrica ($K^{(q)}$) como $K^{(q-1)}$. Además tenemos que $|K^{(n)}| = |K|$.*

Definimos al **máximo diámetro de un simplejo** de K, $m(K) = \max\{diam(s) : s \in K :\}$, una propiedad interesante de $m(K)$ y útil para nuestro siguiente resultado es la siguiente (la cual se puede revisar su demostración en [5, Lema 17.3, p. 226])

$$m\left(K'\right) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right) m(K).$$

Entonces

$$m\left(K''\right) \leq \frac{n}{n+1} m(K') \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 m(K).$$

Así para la q-ésima subdivisión baricéntrica de K tenemos que

$$m\left(K^{[q]}\right) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^q m(K).$$

Por lo tanto, $m\left(K^{[q]}\right) \longrightarrow 0$, cuando $q \longrightarrow \infty$, por lo cual tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.5. *Sean K y L complejos simpliciales finitos y sea $\varphi : |K| \longrightarrow |L|$ una función continua. Entonces existe un entero $q \geq 0$ y $f : K^{(q)} \longrightarrow L$ una aproximación simplicial a φ.*

Demostración. Sea $\{w_i\}$ el conjunto de vértices de L y sea $U_i = \varphi^{-1}(\mathrm{st}_L(w_i))$, notemos que esta es una cubierta para $|K|$. Sea δ un número de Lebesgue de esta cubierta.

Luego para cualquier conjunto A en K se tiene que $diam(A) < \delta$, lo cual implica que $A \subset U_i$ para algún i. Sea q un número entero tal que $m(K^{[q]}) < \delta/2$ y consideremos esta q-ésima subdivisión como el punto de partida, es decir, consideremos $K = K^{[q]}$, para lo cual $m(K) < \delta/2$.

Sea v un vértice de K y $x \in \mathrm{st}_K(v)$, entonces $v \in K(x)$, por lo cual $dist(v, x) \leq mesh(K)$. Luego, $diam(\mathrm{st}_K(v)) < 2 \cdot \delta/2 = \delta$, lo que implica que, $\mathrm{st}_K(v) \subset U_i$ para algún i, es decir, $\varphi(\mathrm{st}_K(v)) \subset \mathrm{st}_L(w_i)$ para algún i.

Definimos $f(v)$ como aquel w_i que cumple lo anterior, es decir,

$$\varphi(\mathrm{st}_K(v)) \subset \mathrm{st}_L(f(v)).$$

De modo que el conjunto $\mathrm{Vert}(K)$ es envíado a el conjunto $\mathrm{Vert}(L)$ con la función f. Sea $\langle v_0, \ldots, v_n \rangle \in K$, entonces $\bigcap\{\mathrm{st}_K(v_i)\} \neq \varnothing$, así

$$\varnothing \neq \varphi(\bigcap \mathrm{st}_K(v_i)) \subset \bigcap \varphi(\mathrm{st}_K(v_i)) \subset \bigcap \mathrm{st}_L(\varphi(v_i)).$$

Por lo tanto, $\bigcap \mathrm{st}_L(\varphi(v_i)) \neq \varnothing$ y por la Proposición 2.1.6 $\langle f(v_0), \ldots, f(v_n) \rangle$ es un simplejo de L, lo cual prueba que f es una función simplicial.

Ahora, consideremos $x \in K$ y $K(x) = \langle v_0, \ldots, v_n \rangle$, entonces $x \in \mathrm{st}_K(v_i)$ y esto implica que

$$\varphi(x) \in \varphi(\mathrm{st}_K(v_i)) \subset \mathrm{st}_L(f(v_i)).$$

Por lo tanto, $f(v_i) \in L(\varphi(x))$ y así f es una aproximación simplicial a φ. $\square$

2.3. Complejos simpliciales equivariantes

Consideraremos una acción de un grupo G en un complejo simplicial K.

Definición 2.3.1. *Sea G un grupo finito.*

1. *Un* **G-complejo simplicial** *consiste de un simplejo K junto con una G-acción en K talque para cada $g \in G$ la función $g : K \longrightarrow K$ es un homeomorfismo simplicial.*

2. *Un G-complejo simplicial K es un* **G- complejo simplicial regular** *si satisface las siguiente condiciones:*

   (R_1) si los vértices v y gv pertecen a el mismo complejo simplicial, entonces $v = gv$,

   (R_2) si $s = \langle v_0, \ldots, v_n \rangle$ es un simplejo de K y $s' = \langle g_0 v_0, \ldots, g_n v_n \rangle$, donde $g_i \in G$ para $i = 0, \ldots, n$, es también un simplejo de K, entonces existe un $g \in G$ tal que $g v_i = g_i v_i$ para $i = 0, \ldots, n$.

De la definición anterior podemos remarcar:

a) si K es un G-complejo simplicial, entonces el subespacio adyacente $|K|$ lleva a una G-acción tal que $|K|$ es un G-espacio,

b) la condición (R_2) implica la condición (R_1), ya que si v y gv pertenecen a algún complejo simplicial, se tiene que $\langle v, v\rangle$ y $\langle v, gv\rangle$ son simplejos de K, entonces para algún $g' \in G$, $v = g'v = gv$.

Proposición 2.3.2. *Sea K un G-complejo simplicial. Entonces, para todo vértice v de K y algún $g \in G$, tenemos*

$$\mathrm{st}_K(gv) = g(\mathrm{st}_K(v)).$$

Demostración. Sea $g \in G$, elegimos $x \in \mathrm{st}_K(gv)$, por la Proposición 2.1.5, tenemos que $gv \in K(x)$. Entonces, por la Proposición 2.2.3 vemos que $v \in g^{-1}(K(x)) = K(g^{-1}x)$. Nuevamente usando la Proposición 2.1.5, se tiene que, $g^{-1}x \in \mathrm{st}_K(v)$, lo que implica que, $gv \in g(K(x)) = K(gx)$, lo que es equivalente a decir que, $gx \in \mathrm{st}_K(gv)$. □

La siguiente proposición prueba que algún G-complejo simplicial después de pasar por la segunda subdivisión baricéntrica es un G-complejo simplicial regular.

Proposición 2.3.3. *Si K es un G-complejo simplicial, entonces la acción inducida en la subdivisión K' satisface (R_1). Si (R_1) se cumple para K, entonces (R_2) se cumple para K'.*

Demostración. Elijamos un vértice s de K', s es un simplejo de K. Si s y gs pertenece a un mismo simplejo de K', entonces, s es una cara de gs o viceversa. Pero como s y gs tiene la misma dimensión, tenemos que, $s = gs$.

Supongamos que K satisface (R_1), probaremos que se cumple (R_2) para K' por inducción sobre n.

Supongamos que $\langle s_0, \dots, s_n\rangle$ es un simplejo de K' tal que $s_0 \subset s_1 \dots \subset s_{n-1} \subset s_n$, donde $\dim s_i < \dim s_{i+1}$ para $i = 0, \dots, n-1$, y cada simplejo s_i está en K; además supongamos que $\langle g_0 s_0, \dots, g_n s_n\rangle$ es también un simplejo de K'. Por hipótesis, existe un $g \in G$ con $gs_i = g_i s_i$ para $0 \leq i < n$. Al multiplicar por g^{-1} a $\langle g_0 s_0, \dots, g_n s_n\rangle$ se tiene que

$$\left\langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, g^{-1} g_n s_n \right\rangle,$$

el cual es un un simplejo de K'.

Luego $s_{n-1} \subset (s_n \cap g^{-1} g_n s_n)$ y por la condición (R_1) se tiene que, g actúa de trivialmente en el simplejo $s \cap gs$ para algún $g \in G$, ya que para algún vértice v de $s \cap gs$, se sigue que $\langle v, gv\rangle \subset gs$, tal que $v = gv$, lo que implica que $g^{-1} g_n$ actúa trivialmente en s_{n-1}, por lo tanto, actúa trivialmente en s_i para toda $i < n$.

Por último, tenemos que $g_n s_i = gs_i = g_i s_i$ para toda $i < n$, es decir, $g_n s_i = g_i s_i$ para toda i. □

Para un subgrupo H de G, definimos $K^H := |K|^H$, como el conjunto de puntos fijos de $|K|$ fijado por H. Consideremos para la siguiente proposición a K un G-complejo y su subcomplejo K^H.

Proposición 2.3.4. *Sea K un G-complejo simplicial regular,*

1. *para cualquier subgrupo $H \leq G$, K^H es un subcomplejo simplicial no quivariante de K,*

2. *para* $x \in K^H$, $K^H(x) = K(x)$. *Más aún, si* v *es un vértice de* K^H, *entonces*

$$\mathrm{st}_{K^H}(v) = \mathrm{st}_K(v) \cap K^H.$$

Demostración.

1. Sea $K^H = \bigcap_{h \in H} |K|^h$, entonces es suficiente probar que para cualquier $h \in H$, $|K|^h$ es un subcomplejo simplicial. Elegimos $x \in |K|^h$ y consideremos $hK(x) = K(x)$. En particular, esto implica que para cualquier vértice v de $K(x)$, hv y v estan en el mismo simplejo $K(x)$ y así por la regularidad de K tenemos que $hv = v$.

   Por la linealidad de la acción de h en $K(x)$ se tiene que cada punto en $K(x)$ es fijado por h. Es decir, $K(x) \subset |K|^h$, luego $|K|^h$ es una colección de simplejo de K, lo cual satisface las condiciones $i)$ y $ii)$ en la Definición 2.1.1, por lo tanto, $|K|^h$ en efecto es un subcomplejo simplicial de K.

2. Por la prueba anterior tenemos que si $x \in K^H$, entonces, $K(x) \subset K^H$. Dado que $K^H(x)$ es el más pequeño simplejo de K^H que contiene a x, se tiene que $K^H(x) \subset K(x)$.

   Por otra parte, el conjunto $K^H(x)$, visto como un simplejo de K^H, es también un simplejo de K que contine x y por definición de $K(x)$ se tiene que $K(x) \subset K^H(x)$.

   Por lo tanto, $K^H(x) = K(x)$ si $x \in K^H$. Entonces, se sigue la siguiente relación de equivalencia.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{st}_{K^H}(v) &\Leftrightarrow x \in K^H \text{ y } v \in K^H(x) \\ &\Leftrightarrow x \in K^H \text{ y } v \in K(x) \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{st}_K \cap K^H. \end{aligned}$$

□

2.4. Cubiertas buenas equivariantes

Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de un G-espacio paracompacto X. Entonces para algún $g \in G$ el conjunto

$$g\mathcal{U} := \{gU_\alpha : U_\alpha \in \mathcal{U}\}$$

es aún una cubierta abierta de X. Si $g\mathcal{U} = \mathcal{U}$ para todo g, decimos que $\mathcal{U}$ es **G- invariante** o simplemente **invariante**. En este caso existe una acción inducida de G en el conjunto de índices I definida por $g\alpha$, el único índice que satisface $U_{g\alpha} = gU_\alpha$.

Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in J}$ son dos cubiertas abiertas de X, entonces

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{U_\alpha \cap V_\beta : U_\alpha \in \mathcal{U},\ V_\beta \in \mathcal{V}\}$$

es una cubierta abierta tal que refina a $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$. Notemos que

$$\bigcap_{g \in G} g\mathcal{U}$$

es una cubierta abierta invariante y a su vez refina a $\mathcal{U}$, ya que es la intersección finita de conjuntos abiertas, luego para cualquier $h \in G$ tenemos que

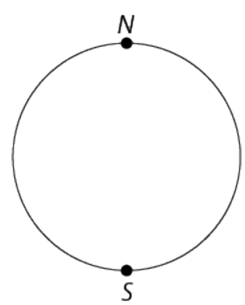
$$\begin{aligned} h \bigcap_{g \in G} g\mathcal{U} &= \bigcap_{g \in G} hg\mathcal{U} \\ &= \bigcap_{\tilde{g} \in G} \tilde{g}\mathcal{U}, \end{aligned}$$

así esta es una cubierta abierta. Por último, tenemos que

$$\bigcap_{g \in G} g\mathcal{U} = \{g_1 U_{\alpha_1} \cap g_n U_{\alpha_n} : U_i \in \mathcal{U} \text{ para } i = 1, \ldots, n\},$$

por lo cual tenemos un refinamiento para $\mathcal{U}$. Más aún, $\bigcap_{g \in G} g\mathcal{U}$ es localmente finito si $\mathcal{U}$ lo es. Esto para cada espacio paracompacto, las cubiertas invariantes localmente finitas y cofinitas en el conjunto de todas las cubiertas de X.

Ejemplo 2.4.1. Sea $G = \{\omega^0, \omega^1, \omega^2\}$, raíces cúbicas de la unidad de la unidad y sea $X = \mathbb{S}^1$, de donde destacaremos dos puntos N y S.



Consideremos la siguiente cubierta abierta, $\mathcal{U} = \{U_N, U_S\}$, para $\mathbb{S}^1$.

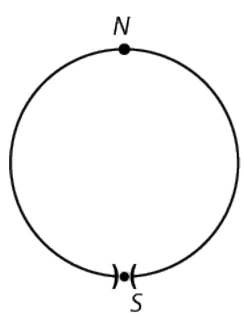


Figura 2.1: U_N

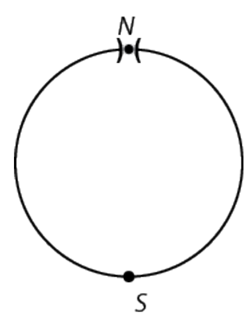


Figura 2.2: U_S

Ahora apliquemos la acción de G sobre la cubierta $\mathcal{U}$, obteniendo así:

$\omega^0 U_N$ $\qquad$ $\omega^0 U_S$

Figura 2.3: El elemento ω^0 actuando en la cubierta $\mathcal{U}$

$\omega^1 U_N$ $\qquad$ $\omega^1 U_S$

Figura 2.4: El elemento ω^1 actuando en la cubierta $\mathcal{U}$

$\omega^2 U_N$ $\qquad$ $\omega^2 U_S$

Figura 2.5: El elemento ω^3 actuando en la cubierta $\mathcal{U}$

Por último, observemos la siguiente cubierta abierta, invariante y que refina a $\mathcal{U}$.

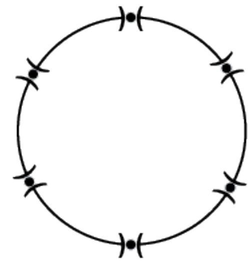


Figura 2.6: El conjunto de abiertos dado por $\bigcap_{i=0}^{2} \omega^i \mathcal{U}$

Ahora sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta invariante localmente finita de X y sea

$$f = \{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$$

es una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$. Entonces f es llamada una G-partición de la unidad si $f_{g\alpha}(gx) = f_\alpha(x)$ para toda g, x y α.

Supongamos que $f = \{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es alguna partición de la unidad subordinada a la cubierta invariante $\mathcal{U}$, definimos

$$\tilde{f}_\alpha(x) = \frac{1}{|G|} \sum_g f_{g\alpha}(gx).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \Lambda} \tilde{f}_\alpha(x) &= \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_g f_{g\alpha}(gx) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_g \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} f_{g\alpha}(gx) \right) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_g 1 \\
&= \frac{|G|}{|G|} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\{\tilde{f}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una partición de la unidad.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{h\alpha}(hx) &= \frac{1}{|G|} \sum_g f_{g(h\alpha)}(g(hx)) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_g f_{(gh)\alpha}((gh)x) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_k f_{k\alpha}(kx) \\
&= \tilde{f}_\alpha(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tilde{f}_{k\alpha}(x) = \tilde{f}_\alpha(x)$, es decir, $\{\tilde{f}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una G-partición de la unidad.

Definición 2.4.2. *Sea Δ la categoría cuyos objetos son conjuntos finitos ordenados* $[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}$ *para algún entero* $n \geq 0$*, y sus morfismos son funciones no decrecientes.*

Si $\mathcal{A}$ es alguna categoría, un **objeto simplicial A** en $\mathcal{A}$ es un funtor contravariante de Δ a $\mathcal{A}$, es decir, $A \in \mathcal{A}^{\Delta^{op}}$ (escribimos a $A([n])$ como A_n para reducir terminos). De manera similar, un objeto cosimplicial B en $\mathcal{A}$ es un funtor covariante de Δ a $\mathcal{A}$, es decir, $B \in \mathcal{A}^{\Delta}$ (nuevamente escribimos a $B([n])$ como B^n). Esta es una categoría $S\mathcal{A}$ cuyos objetos son objetos simpliaciles en $\mathcal{A}$ y sus morfismos son transformaciones naturales.

Ejemplo 2.4.3. Si $\mathcal{A}$ es la categoría **Sets** en la categoría S**Sets** los objetos son llamados conjuntos simpliciales. Similarmente, si $\mathcal{A}$ es la categoría es **Ab** tenemos la categoría S**Ab** donde los objetos son grupos abelianos simpliciales. Análogamente, si $\mathcal{A}$ es la categoría **Top**, entonces S**Top** consta de espacios simpliciales.

2.5. Realización geométrica asociada a una G-cubierta

Definición 2.5.1. *Sea A un conjunto simplicial. Para cada $n \geq 0$, dotamos A_n con la topología discreta. La* **realización geométrica** $|A|$ *de A se definie como el espacio cociente*

$$|A| := \left(\coprod_{n \geq 0} A_n \times \Delta^n \right) / \sim,$$

donde Δ^n es el n-simplejo estándar y la relación de equivalencia está dada por

$$(f^*(x), t) \sim (x, f_*(t)),$$

con $f : [m] \longrightarrow [n]$ una función no decreciente, $x \in A_n$ y $t \in \Delta^m$.

Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de un espacio topológico X. Si el conjunto de índices $\{\alpha\}_{\alpha \in I}$ está ordenado, le asocia el siguiente conjunto simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{U}) : \Delta \longrightarrow$ Sets para algún entero no negativo n, sea $\mathcal{N}(\mathcal{U})_n$ el conjunto de todas las $(n+1)$-tuplas ordenadas $(a_0, \ldots, a_n)$ de índices, posiblemente incluyendo repeticiones, tal que

$$U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n} \neq \varnothing.$$

Para cada función no decreciente $f : [m] \longrightarrow [n]$, con $f^* = \mathcal{N}(\mathcal{U})(f) : \mathcal{N}(\mathcal{U})_n \longrightarrow \mathcal{N}(\mathcal{U})_m$ definida por

$$f^*(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_{f(0)}, \ldots, \alpha_{f(m)}).$$

Se sigue que $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ es un conjunto simplicial y llamaremos a éste el **nervio** de la cubierta $\mathcal{U}$. Si $\sigma^n = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{N}(\mathcal{U})_n$, es decir, denotado por U_{σ^n} o $U_{\alpha_0 \cdots \alpha_n}$ a la intersección no vacía $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}$.

Existe un complejo simplicial $\mathrm{Comp}(\mathcal{N}(\mathcal{U}))$ asociado al nervio de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ cuyos vértices $\{v_\alpha\}$ están en correspondencia uno a uno con el conjunto de índices $\{\alpha : \alpha \in I\}$. Un conjunto $\{v_{\alpha_0}, \ldots, v_{\alpha_n}\}$ es un simplejo de $\mathrm{Comp}(\mathcal{N}(\mathcal{U}))$ si y sólo si $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n} \neq \varnothing$, es decir, si y sólo si $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{N}(\mathcal{U})_n$.

Similarmente, definimos el espacio simplicial $\mathcal{N}^{\mathbf{Top}}(\mathcal{U})$. Sea

$$\mathcal{N}^{\mathbf{Top}}(\mathcal{U})_n = \coprod_{\sigma^n \in \mathcal{N}(\mathcal{U})_n} U_{\sigma^n}$$

con la topología de la unión ajena. Para cada función no decreciente $f : [m] \longrightarrow [n]$, el morfismo $f^* := \mathcal{N}^{\mathbf{Top}}(\mathcal{U})_n(f) : \mathcal{N}^{\mathbf{Top}}(\mathcal{U})_n \longrightarrow \mathcal{N}^{\mathbf{Top}}(\mathcal{U})_m$ es defido por

$$f^*|_{U_{\sigma^n}} : U_{\sigma^n} \longrightarrow U_{\alpha_{f(0)}\cdots\alpha_{f(m)}},$$

dado con la inclusión o la función identidad.

Definición 2.5.2. *Una cubierta abierta invariante $\mathcal{U}$ de un G-espacio X es una* **G-cubierta regular** *si el complejo simplicial asociado a su nervio* $\mathrm{Comp}(\mathcal{N}(\mathcal{U}))$ *es un G-complejo simplicial regular, esto es, si satisface las siguietne dos condiciones:*

(RC$_1$) *para $U_\alpha \in \mathcal{U}$ y $g \in G$, si $U_\alpha \cap gU_\alpha \neq \varnothing$ entonces $U_\alpha = gU_\alpha$,*

(RC$_1$) *si $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ y $g_0, \ldots, g_n \in G$ y las intersecciones $U_0 \cap \cdots \cap U_n$ y $g_0U_0 \cap \cdots \cap g_nU_n$ son no vacías, entonces existe $g \in G$ tal que $gU_i = g_iU_i$ para toda $i \leq n$.*

Teorema 2.5.3. *Sea X un G-espacio paracompacto, con G un grupo finito. Entonces las G-cubiertas localmente finitas, regulares de X, son cofinales en el conjunto de cubiertas abiertas de X.*

Demostración. Elijamos una cubierta invariante $\mathcal{U}$ de X. Sea $Comp(\mathcal{N}(\mathcal{U}))$ es el complejo simplicial asociado al nervio de $\mathcal{U}$. Entonces $Comp(\mathcal{N}(\mathcal{U}))$ es un G-complejo simplicial. Sea $f = \{f_\alpha\}$ es una G- partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$ y sea $\overline{f} : X \longrightarrow |Comp(\mathcal{N}(\mathcal{U}))|$ asociados por el mapeo

$$\overline{f}(x) = \sum_\alpha f_\alpha(x)v_\alpha.$$

Observemos que $\overline{f}$ esta bien definida como G-mapeo, ya que es finita $f_\alpha = 0$ y

$$\begin{aligned}
\overline{f}(gx) &= \sum_\alpha f_\alpha(gx)v_\alpha \\
&= \sum_{g^-1\alpha} f_\alpha(g^-1gx)v_\alpha \\
&= \sum_\alpha f_{g^{-1}\alpha}(x)v_\alpha \\
&= g\sum_\alpha f_{g^{-1}\alpha}(x)g^{-1}v_\alpha \\
&= g\sum_\alpha f_\alpha(x)v_\alpha \\
&= g\overline{f}(x),
\end{aligned}$$

para alguna función de X a un poliedro $f : X \longrightarrow |K|$, $f^{-1}(\mathrm{st}_K)$ denota la cubierta abierta de X por imagenes inversas de estellas abiertas de vértices de K. Supongamos que K es un G- complejo y que f es equivariante. Entonces $f^{-1}(\mathrm{st}_K)$ es una cubierta invariante por la Proposición 2.3.2. Más aún, si K es un G-complejo regular entonces $f^{-1}(\mathrm{st}_K)$ es una G cubierta regular. Ya que si $U_0 \cap \cdots \cap U_n \neq \varnothing \neq g_0U_0 \cap \cdots \cap g_nU_n$, donde $U_i = f^{-1}(\mathrm{st}_K(v_i))$, entonces por la Porposición 2.1.6 $\langle v_0, \ldots, v_n\rangle$ y $\langle g_0v_0, \ldots, g_nv_n\rangle$ son simplejo de K. La regularidad de K implica que $f^{-1}(\mathrm{st}_K)$ es regular.

Al definir $\overline{f} : X \longrightarrow |Comp(\mathcal{N}(\mathcal{U}))|$, tenemos que $\overline{f}^{-1}(\mathrm{st}_{Comp(\mathcal{N}(\mathcal{U}))})$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. De hecho, para algún α, $\overline{f}^{-1}(\mathrm{st}_{Comp(\mathcal{N}(\mathcal{U}))}(v_\alpha)) = f_\alpha^{-1}((0,1]) \subset U_\alpha$. Sea L la segunda subdivisión baricéntrica de $Comp(\mathcal{N}(\mathcal{U}))$ tal que $|L| = |Comp(\mathcal{N}(\mathcal{U}))|$ y L es un G-complejo regular por la Proposición 2.3.3. Entonces $\mathcal{V} = \overline{f}^{-1}(\mathrm{st}_L)$ es una G-cubierta regular tal que refina a $\mathcal{U}$. $\square$

Teorema 2.5.4. *Sea X una G-variedad diferencial suave. Entonces*

1. *existe un G-complejo simplicial regular K y una triangulación suave equivariante $h : K \longrightarrow X$,*

2. *si $h : K \longrightarrow X$ y $h_1 : L \longrightarrow X$ son triangulaciones suaves equivariantes de X existe subdiviciones equivariantes K' y L' de K y L, respectivamente, tal que K' y L' son G-isomorfismos.*

La demostración se puede consultar [12].

Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un G-espacio abierto X. Para algún subgrupo H de G y $\alpha \in I$, definimos $U_\alpha^H = U_\alpha \cap X^H = \{x \in U_\alpha : hx = x \text{ para toda } h \in H\}$. Denotemos por $\mathcal{U}^H$ a la colección de $\{U_\alpha^H\}_{\alpha \in I}$. Es claro que $\mathcal{U}^H$ es una cubieta de X^H.

Definición 2.5.5. *La cubierta $\mathcal{U}$ es llamada una* **cubierta buena equivariante** *de X si esta es una G-cubierta regular y $\mathcal{U}^H$ es una cubierta buena de X^H para todo subgrupo $H \leq G$.*

Teorema 2.5.6. *Cada G-variedad suave tiene una cubierta buena equivariante. Más aún, las cubiertas buenas equivariantes son cofinales en el conjunto de cubiertas abiertas de una G-variedad X.*

Demostración. Por el Teorema 2.5.4 y sin pérdida de generalidad, supongamos que X es el espacio subyacente de un G-complejo simplicial regular de K. Consideremos la cubierta abierta

$$\mathcal{M} = \{\mathrm{st}_K(v) : v \in \mathrm{Vert}(K)\}.$$

Por la Proposición 2.3.2, $\mathcal{M}$ es G-invariante. Más aún, $\mathcal{M}$ es una G-cubierta regular, lo cual se sigue de si tomamos $U = \mathrm{st}_K(v) \in \mathcal{M}$ y $g \in G$ con $\varnothing \neq U \cap gU = \mathrm{st}_K(v) \cap \mathrm{st}_K(gv)$, que se sigue de $\langle v, gv \rangle$ es un simplejo en K por la Proposición 2.1.6. La regularidad de K implica que $v = gv$ y por lo tanto, $U = gU$.

Si para $i = 0, \ldots, n$, $U_i = \mathrm{st}_K(v_i)$ en $\mathcal{M}$ y g_i en G tal que $U_0 \cap \cdots \cap U_n$ y $g_0 U_0 \cap \cdots \cap g_n U_n = \mathrm{st}_K(g_0 v_0) \cap \cdots \cap \mathrm{st}_K(g_n v_n)$ son no vacíos, nuevamente por la Proposición 2.1.6 existen dos simplejos en K, $\langle v_0, \ldots, v_n \rangle$ y $\langle g_0 v_0, \ldots, g_n v_n \rangle$ y como K es regular existe $g \in G$ talque $gv_i = g_i v_i$ para toda i, lo que es equivalente a $gU_i = g_i U_i$ para toda i. Entonces por la Definición 2.5.2 $\mathcal{M}$ es una G-cubierta regular.

Para algún subgrupo H de G, la Proposición 2.3.4-(1) prueba que K^H es un subcomplejo simplicial de K y X^H es homeomorfo a K^H. Elegimos $U = \mathrm{st}_K(v)$ en $\mathcal{M}$. Consideremos la intersección $U \cap K^H = \mathrm{st}_K(v) \cap K^H$. Si $v \in \mathrm{Vert}(K^H)$, entonces por la Proposición 2.3.4-(2), $U \cap K^H = \mathrm{st}_{K^H}(v)$. Si $v \notin K^H$, es claro que $U \cap K^H = \varnothing$. Supongamos que $U \cap K^H \neq \varnothing$ y elijamos $x \in U \cap K^H$. Entonces $x \in U = \mathrm{st}_K(v)$ implica que $v \in K(x)$, por la Proposición 2.1.5 y $x \in K^H$da $K(x) \subset K^H$ por la Proposición 2.3.4-(2). Así $v \in K^H$, contradiciendo la hipótesis de $v \notin K^H$. Entonces

$$\mathcal{M}^H = \{U \cap K^H : U \in \mathcal{M}\} = \{\mathrm{st}_{K^H}(v) : v \in \mathrm{Vert}(K^H)\},$$

y por lo tanto, $\mathcal{M}^H$ es una cubierta buena de K^H, por el Teorema 2.1.8.

Notemos que una subdivisión baricéntrica de un G-complejo regular es también regular. Entonces para alguna cubierta abierta dada $\mathcal{U}$ de X, existe un entero m tal que la m-ésima subsivisión baricéntrica $K^{(m)}$ de K tiene las propiedades de que $\mathcal{V} = \{\mathrm{st}_{K^{(m)}}(v) : v \in \mathrm{Vert}(K^{(m)})\}$ refina a $\mathcal{U}$, que $\mathcal{V}$ es aún una cubierta buena equivariante, ya que $\mathcal{V}$ es nuevamente el conjunto de estrellas abiertas del G-complejo regular $K^{(m)}$, lo cual prueba la cofinalidad de las cubiertas buenas equivariante en el conjunto de cubiertas abiertas de X. $\square$

Si K es un G-complejo simplicial, entonces el espacio de órbita K/G tiene la estructura de un complejo simplicial ordinario, es decir, no equivariante, donde los vértices de K/G son definidos como las órbitas $\overline{v} = Gv$ de la acción de G en los vértices v de K, $\overline{s} = \langle \overline{v}_0, \dots, \overline{v}_n \rangle$ sería un simplejo de K/G si y sólo si, existen representantes v_i de $\overline{v}_i$ tales que $s = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ es un simplejo de K.

Por la definición de K/G, la proyección natural

$$\begin{array}{rcl} \pi : K & \longrightarrow & K/G \\ v & \mapsto & Gv = \overline{v} \end{array}$$

es una función simplicial, cada simplijeo de K es enviado homeomorfamente en el correspondiente simplejo imagen en K/G. Además si K es un G-complejo regular y si $s = \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ y $s' = \langle v'_0, \dots, v'_n \rangle$ son simplejos de K que definen el mismo simplejo $\overline{s}$ de K/G, entonces $\langle v_0, \dots, v_n \rangle = g \langle v'_0, \dots, v'_n \rangle$ para algún $g \in G$. Así el conjunto de todos los simplejos sobre un simplejo dado $\overline{s}$ de K/G forman una órbita de un simplejo s de K que se proyecta sobre $\overline{s}$.

Ahora consideremos la cubierta buena $\mathrm{st}_{K/G}$ de K/G. El conjunto $\mathcal{U}' = \pi^{-1}(\mathrm{st}_{K/G})$ es una cubierta abierta de K. Veamos que para cada vértice v de K,

$$\pi^{-1}(\mathrm{st}_{K/G}(\overline{v})) = \coprod_{g \in G} \mathrm{st}_K(gv). \tag{2.1}$$

Sean $g, g' \in G$. Si $\mathrm{st}_k(gv) \cap \mathrm{st}_K(g'v) \neq \varnothing$, entonces $\langle gv, g'v \rangle$ es un simplejo en K, por la Proposición 2.1.6 y por lo tanto, $gv = g'v$ por la Definición 2.3.1-(2.(R1)). Por lo tanto, $\mathrm{st}_K(gv) = \mathrm{st}_K(g'v)$ o bien son ajenos, para $g, g' \in G$. Así el lado derecho de 2.1 es la unión ajena de estrellas abiertas.

Para obtener la igualdad, elejimos $x \in \mathrm{st}_K(gv)$ para algún g, entonces $gv \in K(x)$ y $\overline{v} = \pi(gv) \in \pi(K(x)) = K/G(\pi(xX))$ por la Proposición 2.2.3. Por lo tanto, $\pi(x) \in \mathrm{st}_{K/G}(\overline{v})$ lo cual prueba que $\coprod_{g \in G} \mathrm{st}_K(gv) \subset \pi^{-1}(\mathrm{st}_{K/G}(\overline{v}))$.

Por otra parte, elejimos $x \in \pi^{-1}(\mathrm{st}_{K/G}(\overline{v}))$ y sea $K(x) = \langle w_0, \dots, w_n \rangle$. Por el Teorema 2.1.8 existe una única expresión $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i w_i$ con $\lambda_i \geq 0$ para $i = 0, \dots, n$. Aplicando π tenemos que $\pi(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overline{w}_i$. Esto prueba $K/G(\pi(x)) = \langle \overline{w}_0, \dots, \overline{w}_n \rangle$, ya que $x \in \pi^{-1}(\mathrm{st}_{K/G}(\overline{v}))$, $\pi(x) \in \mathrm{st}_{K/G}(\overline{v})$ y por lo tanto, $\overline{v} \in K/G(\pi(x)) = \langle \overline{w}_0, \dots, \overline{w}_n \rangle$, lo que implica que $\overline{v} = \overline{w}_i$, es decir, $w_i = gv$ para algún $g \in G$. Por lo tanto, $gv \in K(x)$ y $x \in \mathrm{st}_K(gv)$, lo que prueba la otra contención.

Corolario 2.5.7. *Sea X una G-variedad diferencial. Entonces existe una cubierta abierta de subespacios G-invariantes tal que cada intersección finita de elementos en esta cubierta abierta es homeomorfa a la órbita de un espacio contraíble, es decir, un espacio de la forma $G/H \times D$, donde H es un subgrupo de G y D es contraíble.*

Demostración. Por el Teorema 2.5.6, la G-variedad diferencial X tiene una cubierta buena $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ tal que cada U_α es la estrella de un vértice $v_\alpha \in \mathrm{Vert}(K)$. Aquí K es un G-complejo regular. Definimos una nueva cubierta abierta $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ definidos por $V_\alpha = \bigcup_{g\in G} g(\mathrm{st}_K(v_\alpha))$. Entonces V_α es G- invariante y cada intersección finita $V_{\alpha_0} \cap \cdots \cap V_{\alpha_p}$ es homeomorfa a $G/H \times D$ donde D es el espacio contraíble $\mathrm{st}_{K/G}(\overline{v}_{\alpha_0}) \cap \cdots \cap \mathrm{st}_{K/G}(\overline{v}_{\alpha_p})$. □

2.6. Realización gruesa asociada a un G-complejo celular

El nervio de una cubierta buena equivariante tiene gran información de la estructura G-homotópia de X.

Definición 2.6.1. *Sea A un espacio simplicial. La* **realización geométrica gruesa** *de A es el espacio topológico*

$$\|A\| := \left(\coprod_{n\geq 0} A_n \times \Delta^n \right) / \sim$$

donde Δ^n es el n-simplejo estándar y la relación es $(\partial_i(x), t) \sim (x, \partial^i(t))$, para $\partial^i : \Delta^n \longrightarrow \Delta^{n+1}$ la inclusión como la i-ésima cara y $\partial_i : A_{n+1} \longrightarrow A_n$ la funcón cara para A.

Si A es un G-espacio simplicial, entonces la realización gruesa $\|A\|$ lleva naturalmente a una G-acción tal que $\|A\|$ es un G-espacio.

Una función simplicial f entre espacios simpliciales A y A' induce una función $\|f\| : \|A\| \longrightarrow \|A'\|$. Si f es una G-función simplicial entre G-espacios simpliciales, entonces $\|f\|$ es una G-función entre G-espacios topológicos.

Proposición 2.6.2. *Sea A y A' espacios simpliciales y sea $f : A \longrightarrow A'$ una función simplicial.*

1. *Si $f_n : A_n \longrightarrow A'_n$ es una equivalencia homotópica para toda n, entonces $\|f\| : \|A\| \longrightarrow \|A'\|$ es una equivalencia homotópica.*

2. *$\|A \times A'\|$ es homotópicamente equivalente a $\|A\| \times \|A'\|$.*

3. *La i-ésima función de degeneraión $\eta_i : [n] \longrightarrow [n-1]$ induce una función $s_i : A_{n-1} \longrightarrow A_n$ y s_i manda A_{n-1} en A_n como una retracción. Si la inclusión $s_i(A_{n-1}) \hookrightarrow A_n$ es una cofibración cerrada para toda i y n, entonces $\|A\| \longrightarrow |A|$ es una equivalencia homotopíca.*

La demostración se puede consultar [19].

Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cubierta abierta de un espacio topológico X. Si $\sigma^n = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{N}(\mathcal{U})_n$, denotamos por U_{σ^n} a la intersección finita no vacía $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}$. Sea $X_{\mathcal{U}}$ la ralización geométrica gruesa $\|\mathcal{N}^{\mathbf{Top}}(\mathcal{U})\|$, es decir,

$$X_{\mathcal{U}} = \left(\coprod_{\substack{n\geq 0 \\ \sigma^n \in \mathcal{N}(\mathcal{U})_n}} U_{\sigma^n} \times \Delta^n_{\sigma^n} \right) / \sim$$

donde $\Delta^n_{\sigma^n}$ es el n-simplejo estándar con vértices $\{v_{\alpha_0}, \ldots, v_{\alpha_n}\}$ y la relación de equivalencia es $(\partial_i(x), t) \sim (x, \partial^i(t))$, donde $\partial^i : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$ es la i-ésima función cara y ∂_i es la inclusión $U_{\alpha_0\ldots\alpha_n} \longrightarrow U_{\alpha_0\ldots\widehat{\alpha}_i\alpha_n}$. Sea $\pi : \coprod_{\sigma^n} (U_{\sigma^n} \times \eta_{\ \sigma^n}) \longrightarrow X_{\mathcal{U}}$ la proyección en el cociente.

Proposición 2.6.3. *Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una cubierta abierta localmente finita de un espacio paracompacto X, entonces la realización geométrica gruesa $X_{\mathcal{U}} = \|\mathcal{N}^{\mathbf{Top}}(\mathcal{U})\|$ es homotópicamente equivalente a X.*

Demostración. Para cada $\sigma^n = (\alpha_0 \dots \alpha_n) \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$, sea p_{σ^n} la composición de funciones $U_{\sigma^n} \times \Delta^n_{\sigma^n} \xrightarrow{p_1} U_{\sigma^n} \hookrightarrow X$, donde p_1 es la proyección en la primera componente. El conjunto de funciones p_{σ^n} induce una función

$$p : \coprod_{\substack{n \geq 0 \\ \sigma^n \in \mathcal{N}(\mathcal{U})_n}} (U_{\sigma^n} \times \Delta^n_{\sigma^n}) \longrightarrow X$$

Se sigue que la función p preserva la relación de equivalencia, por lo cual existe una función única $q : X_{\mathcal{U}} \longrightarrow X$ tal que $q\pi = p$.

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\sigma^n}(U_{\sigma^n} \times \Delta^n_{\sigma^n}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ X_{\mathcal{U}} \arrow[ur, dashed, "q"'] & \end{tikzcd}$$

Para cada punto $x \in X$, sea $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$ el conjunto de todos los índices tal que $x \in U_{\alpha_i}$, es decir, $x \notin U_\alpha$ para toda $\alpha \neq \alpha_0, \dots, \alpha_n$. Este conjunto es finito, ya que la cubierta es localmente finita. Entonces la preimagen $q^{-1}(x)$ es justamente el n-simplejo $\{x\} \times \Delta^n_{\alpha_0 \dots \alpha_n}$. Por lo tanto, cada punto en $q^{-1}(x)$ puede ser representado como $\{x\} \times \sum_{i=1}^{n} t_i v_\alpha$, donde $t_i \geq 0$ y $\sum t_i = 1$.

Como X es paracompacto, existe una partición de la unidad subordinada $\{f_\alpha\}$ a la cubierta $\{U_\alpha\}$. En particular, $sop(f_\alpha) \subset U_\alpha$ para cada α. Tomemos $x \in X$ y $\alpha = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$ el conjunto de todos los índices tales que $x \in U_{\alpha_i}$. Entonces el conjunto de α tal que $f_\alpha(x) > 0$ es un subconjunto de $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$ y por lo tanto, es finito. Consideremos una función $s : X \longrightarrow \coprod_{\sigma^n} U_{\sigma^n} \times \Delta^n_{\sigma^n}$, $x \longmapsto \{x\} \times \sum f_{\alpha_i}(x) v_{\alpha_i} \in U_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \times \Delta^n_{\alpha_0 \dots \alpha^n} \subset \coprod_{\sigma^n} U_{\sigma^n} \times \Delta^n_{\sigma^n}$, y sea $r : X \longrightarrow X_{\mathcal{U}}$ la composicion de $\pi \circ s$. Claramente $q \circ r = Id_X$.

Verificaremos que $r \circ q \simeq id_{X_{\mathcal{U}}}$, supongamos x pertenece al conjunto $U_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$ y no pertenece a otro U_α. Entonces los puntos $y = \{x\} \times \sum t_i v_{\alpha_i}$ y $r(q(y)) = \{x\} \times \sum f_{\alpha_i}(x) v_{\alpha_i}$ pertenece al simplejo con vértices $v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_n}$. Así $r(q(y))$ es llevado homotópiamente a y a lo largo del segmento que une estos puntos. □

Proposición 2.6.4. *Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una cubierta buena de un espacio topológico X, entonces la realización gruesa $X_{\mathcal{U}} = \|\mathcal{N}^{Top}(\mathcal{U})\|$ es homotópicamente equivalente a la realización normal $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ del geométrica $\mathcal{N}(\mathcal{U})$.*

Demostración. De la Proposición 2.6.2-(1), se sigue que si $\mathcal{U}$ es una cubierta buena, entonces $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}$ es homotópicamente equivalente a la realización gruesa $\|\mathcal{N}(\mathcal{U})\|$ con la topología discreta.

Por otra parte, como conjuntos simpliciales $\|\mathcal{N}(\mathcal{U})\|$ es homotópicamente equivalente a $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ por la Proposición 2.6.2-(3). □

Corolario 2.6.5. *Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una cubierta buena localmente finita de un espacio paracompacto X, entonces la realización geométrica $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ del nervio $\mathcal{N}(\mathcal{U})$es homotópicamente equivalente a X.*

Lema 2.6.6. *Si A es un G-espacio simplicial, entonces la realización $|A|$ y $\|A\|$ heredan la G-acciones tal que*

$$|A^H| = |A|^H \text{ y } \|A^H\| = \|A\|^H$$

para todo subgrupo H de G.

Demostración. La inclusión $A^H \hookrightarrow A$ induce una función bien definida

$$\coprod_n \left(A_n^H \times \Delta^n\right) / \sim \longrightarrow \coprod_n \left(A_n \times \Delta^n\right) / \sim$$

cuyas imagenes son fijadas por H. Por otra parte, si $a \in |A|^H$ (o $a \in \|A\|^H$), entonces a es la clase de equivalencia de un elemento $(x,t) \in A_i^H \times \Delta^i$ para algún i, lo que indica $a \in |A^H|$ (o $a \in \|A^H\|$). □

Teorema 2.6.7. *Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una cubierta buena localmente finita de un G-complejo celular de X, entonces la realización geométrica $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ del nevio $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ es G-homotópicamente equivalente a X.*

Demostración. La realización $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ es un G-espacio, ya que $\mathcal{U}$ es G-invariante. Con la estructura natural de un complejo celular en una realización, $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ llega a ser un G-complejo celuar. Por lo tanto, es suficiente probar que $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|$ es débilmente G-homotopicamente equivalente a X, para lo cual probaremos que para algún subgrupo H de G, $|\mathcal{N}(\mathcal{U})|^H$ es homotópicamente equivalente a X^H.

Por definición, si $\mathcal{U}$ es una cubierta buena equivariante de X, entonces $\mathcal{U}^H$ es una cubierta buena de X^H, así por el Corolario 2.6.5 $|\mathcal{N}(\mathcal{U}^H)|$ es homotópicamente equivalente a X^H. Pero $N(\mathcal{U}^H) = \mathcal{N}(\mathcal{U})^H$ y por el Lema 2.6.6, tenemos

$$|\mathcal{N}(\mathcal{U})|^H = |\mathcal{N}(\mathcal{U})^H| = |\mathcal{N}(\mathcal{U}^H)| \simeq X^H.$$

□

Concluyendo, para cada G-variedad diferencial suave, existe una cubierta buena equivariante tal que la realización geométrica del nervio de esta cubierta es G-homotópicamente equivalente a la G-variedad diferencial.

Capítulo 3

Sucesiones espectrales y sistemas de Cartan-Eilenberg en K-teoría

3.1. ¿Qué son las sucesiones espectrales?

El tema de las sucesiones espectrales tiene una reputación de ser difícil para el principiante. Incluso G.W. Whitehead (citado en [14]) dijo: "La maquinaria de sucesiíon espectrales, derivada de la obra algebraica de Lyndon y Koszul, parecía complicada y oscura para muchos topologos".

David Eisenbud [8] sugiere que esto se debe a que el tema de las sucesiones espectrales es elemental, pero la noción de sucesión espectral de un complejo involucra tantos objetos e índices que lo hacen parecer a primera repulsivo."

Comenta Chow en [6] que otros matemáticos hacen quejas similares por la cantidad de subíndices y superíndices y en mi propia explicación, las sucesiones espectrales a menudo no se enseña de la forma como se ha llegado a la definición. Por ejemplo, un excelente artículo de John McCleary ([14]) dice el lector necesita familiarizarse con la manipulación de estos objetos sin el problema de sus orígenes."

Sin una comprensión de las sucesiones espectrales, uno se encuentra de forma natural con estos misterios. Por el contrario, si uno no ve de donde vienen la notación no debería ser un obstáculo.

Una buena referencia sobre la historia de las sucesiones espectrales y cómo se inventaron es [15].

Afin de presentar una introducción sencilla de la teoría sucesiones espectrales asumimos en esta sección las siguientes hipótesis: Todos los grupos considerados seran espacios vectoriales de dimensión finita. Todos los grupos de cadenas son de dimensión finita y todas las filtraciones (explicadas más adelante) tienen un número finito de niveles. Estas hipótesis no se tienen en generalmente.

3.1.1. Complejos graduados

Los complejos de cocadenas que surgen "manera natural" frecuentemente se tiene una estructura extra, además de un operador de cofrontera. Ciertas clases de estructuras extra son particularmente comúnes, de modo que tiene sentido encontrar un método sistemático para explotar tales caracteristicas.

Consideremos el siguiente ejemplo, supongamos que tenemos el siguiente complejo de cocadenas

$$\cdots \xrightarrow{d^{p-2}} C^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} C^{p} \xrightarrow{d^{p}} C^{p+1} \xrightarrow{d^{p+1}} \cdots,$$

el cual es "graduado", es decir, que cada C^p se descompone en una suma directa

$$C^p = \bigoplus_{q=1}^{n} C^{p,q}.$$

más aun el operador cofrontera d respeta a la graduación, en el sentido de que $dC^{p,q} \subset C^{p+1,q}$ para toda p y q. Entonces la graduación no permite encontrar la cohomología por pequeñas partes: calculando la homología en cada grado de manera independiente y luego sumarla, para así tener la cohomología del complejo inicial.

Desafortunadamente, en la práctica no siempre podemos tener una graduación en nuestro complejo, lo que tenemos en su lugar es un **complejo filtrado**, es decir, cada C^p tiene una sucesión anidada de submódulos

$$0 = C^{p,0} \subset C^{p,1} \subset \cdots \subset C^{p,n} = C^p$$

y el operador cofrontera respecta la filtración en la sucesión en el sentido de

$$dC^{p,q} \subset C^{p+1,q}, \tag{3.1}$$

para toda p y q (el índice q es llamado el grado de la filtación).

Lo anterior sólo tiene sentido si $0 \leq q \leq n$, pero atravez de este trabajo, consideremos índices más alla de la frontera, asumiendo que los objetos en cuestión son cero, por ejemplo $C^{-1} = 0$.

El complejo filtrado no es exactamente el mismo que el complejo gradiado original, pero es sufientemente similar. Por lo cual nos podemos preguntar ¿Existe una manera similar de descomponer los grupos de cohomología de un complejo filtrado en una suma directa? La respuesta es si, pero su realización es sorprendentemente complicada

El siguiente analisis nos llevará al concepto de sucesiones espectrales. Empecemos trantando ingenuamente de reducir este problema a problemas más pequeõs ya resueltos previamente de complejos graduados. Para esto debemos expresar cada C^p como una suma directa. Observemos que C^p no necesariamente es la suma de $C^{p,q}$, de hecho, $C^{p,n}$ es todo C^p. Sin embargo C^p es un espacio vectorial de dimensión finita, por lo cual podemos obtener un espacio isomormo a C^p mediante su cociente por cualquier subespacio U y luego agregando como sumando directo con U, es decir, $C^p \cong (C^p/U) \oplus U$. En particular podemos considerar $U = C^{p,n-1}$, entonces podemos repetir este proceso para "descomponer" a el mismo U en un sumando directo y continuar hasta concluir. Más formalmente, definimos

$$E_0^{p,q} := C^{p,q}/C^{p,q-1}, \tag{3.2}$$

para todo p y q. Entonces

$$C^p \cong \bigoplus_{q=1}^{n} E_0^{p,q}. \tag{3.3}$$

La ventaja de esta descomposicón de sumandos directos es que el operador cofrontera d induce naturalmente un operador

$$d^0 : \bigoplus_{q=1}^{n} E_0^{p,q} \longrightarrow \bigoplus_{q=1}^{n} E_0^{p+1,q},$$

tal que $d^0 E_0^{p,q} \subset E_0^{p+1,q}$ para todo p y q.

Esto se debe a que dos elementos de $C^{p,q}$ que difieren por un elemento en $C^{p,q-1}$ son enviado a elementos de $C^{p+1,q-1}$ que difiere de un elemento $dC^{p,q-1} \subset C^{p+1,q-1}$ debido a (3.1). Por lo tanto, obtenemos un complejo graduado que se descompone en n partes como se sigue en el siguiente diagrama, el cual es llamado la página cero,

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d^0} & E_0^{p-1,n} & \xrightarrow{d^0} & E_0^{p,n} & \xrightarrow{d^0} & E_0^{p+1,n} & \xrightarrow{d^0} & \cdots \\
\cdots & \xrightarrow{d^0} & E_0^{p-1,n-1} & \xrightarrow{d^0} & E_0^{p,n-1} & \xrightarrow{d^0} & E_0^{p+1,n-1} & \xrightarrow{d^0} & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\cdots & \xrightarrow{d^0} & E_0^{p-1,1} & \xrightarrow{d^0} & E_0^{p,1} & \xrightarrow{d^0} & E_0^{p+1,1} & \xrightarrow{d^0} & \cdots
\end{array} \tag{3.4}$$

Ahora definimos $E_1^{p,q}$ como el q-ésimo elemento graduado de la cohomología de este complejo:

$$E_1^{p,q} := H^d(E_0^{p,q}) = \frac{ker\ d^0 : E_0^{p,q} \longrightarrow E_0^{p+1,q}}{im\ d^0 : E_0^{p-1,q} \longrightarrow E_0^{p,q}}. \tag{3.5}$$

Pensando aún ingenuamente podriamos esperar que

$$\bigoplus_{q=1}^{n} E_1^{p,q} \tag{3.6}$$

sean la cohomología de nuestro complejo original. Desafortunadamente esto es demasiado fácil para ser verdad. Aunque cada termino en el complejo $\left(\bigoplus_q E_0^{p,q}, d^0\right)$, conocido como el complejo graduado asociado de nuestro complejo filtrado (C^p, d) original, es isomorfo al correspondiente termino de nuestro complejo original. Esto no garantiza que los dos complejos serán isomorfos como complejos de cocadenas. Así, aunque $\bigoplus_q E_1^{p,q}$ corresponde a la cohomología del complejo graduado asociado, puedo no corresponder a la cohomología de nuestro complejo original.

El complejo graduado asociado está estrechamente relacionado con el complejo original, que incluso su cohomología no es exactamente lo que deseamos, esta representación una aproximación razonablemente buena. Examinamos cuidadosamente para ver si podemos arreglar el problema para manter las cosas lo más simples posibles. Consideremos el caso $n = 2$, entonces el arreglo en el diagrama (3.4) sólo tiene dos niveles, que llamaremos el ”superior” $(q = 2)$ y el “inferior” $(q = 1)$.

El grupo de cohomología H^p que realmente queremos Z^p/B^p, donde Z^p es el espacio de cociclos en C^p y B^p es el espacio de cofronteras en C^p. Como C^p es filtrado, existe una filtración natural en Z^p y B^p:

$$0 = Z^{p,0} \subset Z^{p,1} \subset Z^{p,2} = Z^p \quad \text{y} \quad 0 = B^{p,0} \subset B^{p,1} \subset B^{p,2} = Z^p.$$

Queremos encontrar un camino natural para la descomposición H^p en una suma directa. Como C^p no es una suma directa de $C^{p,1}$ y $C^{p,2}$, ya que observamos que Z^p/B^p no es la suma directa de $Z^{p,1}/B^{p,1}$ con $Z^{p,2}/B^{p,2}$. Nuevamente podemos usar el mismo truco de tomar el cociente por el nivel "inferior"y entonces agregando como sumando directo al nivel "inferior", quedando la suma directa como

$$\begin{aligned}\frac{Z^p}{B^p} &\cong \frac{Z^p + C^{p,1}}{B^p + C^{p,1}} \bigoplus \frac{Z^d \cap C^{p,1}}{B^p \cap B^{p,1}} \\ &= \frac{Z^{p,2} + C^{p,1}}{B^{p,2} + C^{p,1}} \bigoplus \frac{Z^{p,1}}{B^{p,1}}.\end{aligned}$$

Ahora, podriamos esperar ingenuamente que

$$E_1^{p,2} \cong \frac{Z^{p,2} + C^{p,1}}{B^{p,2} + C^{p,1}} \tag{3.7}$$

y

$$E_1^{p,1} \cong \frac{Z^{p,1}}{B^{p,1}}. \tag{3.8}$$

y que incluso el númerador y el denominador en (3,7) y (3,8) sean precisamente los cociclos y cofronteras en la definición de la ecuación (3.5) de $E_1^{p,q}$. Ya que la expresión (3.6) nos daría una descomposición de los sumandos directos de H^d. Desafortunadamente, en general, (3.7) y (3.8) no se satisfacen y es necesario hacer algunos ajustes.

Veamos primero el nivel "inferio" en $E_1^{p,1}$. Los cociclos de $E_1^{p,1}$ son los ciclos en $E_0^{p,1}$ y las cofronteras son la imagen I del operador

$$d^0 : E_0^{p,1} \longrightarrow E_0^{p+1,1}.$$

El espacio de cociclos en $E_0^{p,1}$ es $Z^{p,1}$, el cual es el númerador de la ecuación (3.8). Sin embargo la imagen I no es $B^{p,1}$, pues $B^{p,1}$ es la parte de B^d contenida en $C^{p,1}$ y mientras que está contiene a I, pero también puede contener otras "cosas". Especificamente el operador d puede llevar algunos elementos $x \in C^{p+1}$ del nivel "superior" a el nivel "inferior" mientras que en I sólo pertenecerán las de los elementos que inicialmente estaban en el nivel "inferior". Por lo tanto, $Z^{p,1}/B^{p,1}$, es un cociente de $E_1^{p,1}$.

Ahora veamos el nivel "superior" en $E_1^{p,2}$. En este caso el espacio cofronteras de $E_2^{p,2}$ es $B^{p,2} + C^{p,1}$, el cual corresponde al denominador de la ecuacioón (3.7). Sin embargo, el espacio de cociclos en este caso es el kernel K del operador

$$d^0 : E_0^{p,2} \longrightarrow E_0^{p+1,2},$$

el cual por definición de E_0, es el operador

$$d^0 : \frac{C^{p,2}}{C^{p,1}} \longrightarrow \frac{C^{p+1,2}}{C^{p+1,1}}.$$

Así vemos que K no sólo contiene cocadenas que bajo el operador d son envíadas a 0, si no también contiene cualquier cocadaena que bajo el operador d es envíada del nivel "inferior" a $C^{p+1,1}$.

En contraste, los eslementos de $Z^{p,2}+C^{p,1}$ son más especiales: sus cofronteras son cofrotneras de cocadenas que vienen en de $C^{p,1}$. Por lo tanto,

$$\frac{Z^{p,2}+C^{p,1}}{B^{p,2}+C^{p,1}}$$

es un subespacio de $E_1^{p,2}$, el subespacio de elementos cuyas cofronteras son las cofronteras de elementos de $C^{p,1}$. Intuitivamente, el problema es que el complejo graduado asociado sólo "ve" la actividad que se límita a un solo nivel horizontal, todo por encima y por abajo de este nivel es ignorado. Pero en el complejo original, el operador cofrontera d lleva las cosas hacia abajo uno o más niveles (este no puede subir uno o más niveles porque d respeta filtraciones) de modo que debe hacerse alguna corrección para niveles intermedios.

El surgimiento de la sucesión espectral. El hecho interesante que hace que la herramienta de sucesiones espectrales funcione es que ambas de las correcciones comentados anteriormente en la cohomología de grupos de $E_1^{p,q}$ pueden verse como grupos de cohomología de grupos de cohomología.

Notemos que d induce un operador natural, el cual lo llamaremos d^1 de $E_1^{p,2}$ a $E^1_{p+1,1}$ para toda p, pues la cofrontera de cualquier elemento en $E_1^{p,2}$ es un cociclo que pertenece en $C^{p+1,1}$ y así esto define un elemento en $E_1^{p+1,1}$. Los hechos principales, para $n=2$, son los siguientes:

Hecho 1 Si tomamos $E_1^{p,1}$ y formamos su cociente por la imagen de d^1, entonces obtenemos $\dfrac{Z^{p,1}}{B^{p,1}}$. Para ver esto, sólo basta verificar que la imagen de d^1 corresponde a todas las cofronteras que pertenecen a $C^{p,1}$.

Hecho 2 El kernel de d^1 es un subespacio de $E_1^{p,2}$ isomorfismo a $\dfrac{Z^{p+1,2}+C^{p+1,1}}{B^{p+1,2}+C^{p+1,1}}$

De nuevo solo basta verificar que el kernel consiste de solo aquellos elementos cuya cofrontera es igual a una cofrontera de algún elemento de $C^{p+1,1}$. Podemos visualizar estos hechos en el siguiente diagrama, llamada la página uno,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr, "d^1"] & 0 \arrow[dr, "d^1"] & 0 \arrow[dr, "d^1"] & 0 \arrow[dr, "d^1"] & 0 \\
\cdots \arrow[dr, "d^1"] & E_1^{p-1,2} \arrow[dr, "d^1"] & E_1^{p,2} \arrow[dr, "d^1"] & E_1^{p+1,2} \arrow[dr, "d^1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[dr, "d^1"] & E_1^{p-1,1} \arrow[dr, "d^1"] & E_1^{p,1} \arrow[dr, "d^1"] & E_1^{p+1,1} \arrow[dr, "d^1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[dr, "d^1"] & E_1^{p-1,0} \arrow[dr, "d^1"] & E_1^{p,0} \arrow[dr, "d^1"] & E_1^{p+1,0} \arrow[dr, "d^1"] & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd} \tag{3.9}$$

El diagrama (3.11) es una colección de complejos de cocadenas, estos no se encuentran de manera horizontal como en el esquema (3.4), si no que se inclina hacia abajo en un angulo de 45° y cada complejo tiene sólo dos terminos no tirviales. (Recordemos que nuestra convención de indexación es diferente de la mayoria de los autores, por lo tanto, se verán “asimetricas” relativas al diagrama (3.2)).

Si ahora definimos $E_2^{p,q}$ como la cohomología, es decir,

$$E_2^{p,q} := H^d(E_1^{p,q}) = \frac{ker\ d^1 : E_1^{p,q} \longrightarrow E_1^{p+1,q-1}}{im\ d^1 : E_1^{p-1,q+1} \longrightarrow E_1^{p,q}}, \tag{3.10}$$

entonces de los hechos 1 y 2 se sigue que $E_2^{p,1} \oplus E_2^{p,2}$ es la cohomología correcta de nuestro complejo filtrado original.

Para el caso $n = 2$, esto termina la historia. Así la sucesión $\mathbf{E_0}, \mathbf{E_1}, \mathbf{E_2}$ es la sucesión espectral de nuestro complejo filtrado cuando $n = 2$. Podemos considerar E_1 una aproximación de primer orden de la cohomología deseada y E_2 como una aproximación de segundo orden, la cual (cuando $n = 2$) no sólo es una aproximación, sin o es la respuesta correcta.

¿Qué pasa si $n > 2$? Las definiciones (3.2), (3.5) y (3.10) aún tienen sentido, pero ahora E_2 no nos daría la cohomología correcta, porque E_2 sólo tiene encuenta las iteraciones entre niveles adyacentes en el diagrama (3.4), pero d potencialmente puede llevar las cosas a dos o más niveles. Por lo tanto, necesitamos considerar terminos adicionales $E_3, E_4, \ldots, E_n$. Por ejemplo, para definir E_3, podemos verificar que d induce un operador natural, llamado d^2 de $E_2^{p,q}$ a $E_2^{p+1,q-2}$ para todo p y q. Se obtiene un diagrama similar a (3.11), con la diiferencia de (E_2, d^2) en lugar de (E_1, d^1) y con cada flecha bajando dos niveles en lugar de uno, quedando así la página 2.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[ddr, "d^2"] & 0 \arrow[ddr, "d^2"] & 0 \arrow[ddr, "d^2"] & 0 \arrow[ddr, "d^2"] & 0 \arrow[ddr, "d^2"] & 0 \arrow[ddr, "d^2"] & \cdots \\
\cdots \arrow[ddr, "d^2"] & 0 \arrow[ddr, "d^2"] & 0 \arrow[ddr, "d^2"] & 0 \arrow[ddr, "d^2"] & 0 \arrow[ddr, "d^2"] & 0 \arrow[ddr, "d^2"] & \cdots \\
\cdots \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p-2,3} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p-1,3} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p,3} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p+1,3} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p+2,3} \arrow[ddr, "d^2"] & \cdots \\
\cdots \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p-2,2} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p-1,2} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p,2} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p+1,2} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p+2,2} \arrow[ddr, "d^2"] & \cdots \\
\cdots \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p-2,1} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p-1,1} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p,1} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p+1,1} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p+2,1} \arrow[ddr, "d^2"] & \cdots \\
\cdots \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p-2,0} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p-1,0} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p,0} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p+1,0} \arrow[ddr, "d^2"] & E_2^{p+2,0} \arrow[ddr, "d^2"] & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots
\end{tikzcd} \tag{3.11}$$

Entonces $E_3^{p,q}$ es el $ker\ d^2 / im\ d^2$ en $E_2^{p,q}$. En general, tenemos que E_r tiene flechas que decendiente r niveles, las cuales son etiquetadas por $d_{p,q}^r$ de $E_r^{d,p}$ a $E_r^{d+1,p-r}$ y así E_{r+1} es definido como la cohomología de (E^r, d^r). Se puede verificar que para todo n, $H^d \cong \bigoplus_p E_n^{p,q}$ es una generalización conceptual directa de las ideas que ya hemos visto, cf. [14]

En analisis, el valor de tener una serie de aproximaciones convergiendo a una cantidad de interés es familiar para todo matemático. Esta aproximación es especialmente valioso cuando el primer par de términos contiene la mayor parte de la información.

Observemos que resultados similares se aplican a las sucesiones espectrales. Un fenómeno común es en el que una cantidad grande de $E_r^{p,q}$ y/o los operadores cofrontera d^r se anula para valores pequeños de r.

Esto hace que la sucesión espectral se estabilizae o colapse rápidamente, permitiendo que sea realitivamente fácil calcular la cohomología. Ilustrando este hecho bosquejando la prueba de la [11, Demostración 2].

Esto está lejos de ser una aplicación "popular" de sucesiones espectrales, pero tiene gran ventaja de requerir muy pocos conocimientos preliminares para entenderlo.

3.2. Aplicación

El objetivo de este trabajo es mostrar de manera explícita la construcción de un sistema de Cartan-Eilenberg para los grupos de K-teoría equivariante de una G-variedad diferencial, con G un grupo finito. Dicho sistema define una sucesión espectral cuya segunda página es dada por la cohomología de Čech asociada a la pregavilla de los grupos locales de representaciones. El contenido del resto de este capítulo se encuentra en el artículo [9].

3.3. Sistemas de Cartan-Eilenberg

A continuación presentaremos la construcción general de un sistema de Cartan-Eilenberg (cf. [2]) y [14, p. 59]). Mostramos también algunos ejemplos clásicos.

Sea $\mathscr{H} = \{H(p,q)\}$ una familia de módulos, uno por cada pareja de enteros (p,q) tales que $\infty \leq p \leq q \leq \infty$. La familia $\mathscr{H}$ es llamada un *sistema de Cartan-Eilenberg* si satisface los siguientes axiomas:

CE-1. Existen homomorfismos

$$\eta : H(p', q') \to H(p,q)$$

si $p \leq p'$ y $q \leq q'$.

CE-2. Para una terna de enteros $-\infty \leq p \leq q \leq r \leq \infty$ existe un homomorfismo de conexión.

CE-3. La aplicación $H(p,q) \to H(p,q)$ está dada por la identidad.

CE-4. Si $p \leq p' \leq p''$ y $q \leq q' \leq q''$, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H(p'',q'') \arrow[rr] \arrow[dr] & & H(p,q) \\
& H(p',q') \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

CE-5. Para $p \leq p'$, $q \leq q'$ y $r \leq r'$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H(p',q') \arrow[r] \arrow[d] & H(q',r') \arrow[d] \\ H(p,q) \arrow[r] & H(q,r) \end{tikzcd}$$

CE-6. Para $-\infty \leq p \leq q \leq r \leq \infty$, la siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \longrightarrow H(q,r) \longrightarrow H(p,r) \longrightarrow H(p,q) \xrightarrow{\delta} H(q,r) \longrightarrow \cdots$$

CE-7. Para cada q fijo,

$$H(q,q) \longrightarrow H(q-1,q) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H(p,q) \longrightarrow H(p-1,q) \longrightarrow \cdots$$

tiene como límite directo a $H(-\infty,q)$.

Denotamos por $H(p)$ a $H(p,\infty)$ y por H a $H(-\infty,\infty)$. Definimos

$$\begin{aligned} Z_r^p &= \operatorname{Im}\left(H(p,p+r) \to H(p,p+1)\right) \\ B_r^p &= \operatorname{Im}\left(H(p-r+1,p) \to H(p,p+1)\right) \\ E_r^p &= Z_r^p/B_r^p \end{aligned}$$

Lo anterior define una sucesión espectral que cuando converge, lo hace a H.

Ejemplo 3.3.1 (Módulos diferenciales filtrados)**.** Todo módulo graduado A con diferencial d y filtración F^pA, define un sistema de Cartan-Eilenberg mediante $H(p,q) = H(F^pA/F^qA)$. ▽

Ejemplo 3.3.2. Sea X un espacio topológico y $\{X^p\}$ una familia de subespacios definida para todo entero p, tal que $X^p \subset X^{p+1}$, $X^{-\infty} = \varnothing$ y $X^\infty = X$. Definimos

$$H(p,q) = \sum_n H^n(X^q, X^p),$$

donde $H^n(X^q,X^p)$ corresponden a los grupos de cohomología de la pareja (X^q,X^p) respecto a alguna teoría de cohomología fija. En este caso, la familia $\mathscr{H} = \{H(p,q)\}$ no siempre define un sistema da Cartan-Eilenberg, siendo el axioma (**CE-7**) el que no necesariamente se satisface. Sin embargo, en el caso de cohomología celular H^* y complejos CW con filtración por esqueletos, dicha familia $\mathscr{H}$ define efectivamente un sistema de Cartan-Eilenberg (cf. [4]). ▽

3.4. K-teoría equivariante

En esta sección introducimos la definición del funtor de K-teoría equivariante, sus grupos relativos y superiores, y sus correspondientes propiedades cohomológicas. El contenido de esta sección está basado en [10] y [11].

A lo largo de estas notas, G denotará un grupo finito y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo separable de dimensión infinita.

La K-teoría topológica compleja fue introducida por M. F. Atiyah y F. Hirzebruch (cf. [4]) alrededor de 1959, basándose en el trabajo de A. Grothendieck y R. Bott. Fue definida en un sentido geométrico, a saber, como la construcción de Grothendieck aplicada al monoide de clases de isomorfismo de haces vectoriales complejos de rango finito. Ésta viene a ser el primer ejemplo de una teoría de cohomología generalizada, es decir, una teoría que satisface todos los axiomas de Eilenberg-Steenrod para una teoría de cohomología (cf. [6]), excepto el axioma de la dimensión. Como tal, por el Teorema de Representabilidad de Brown, es representable y de manera independiente Atiyah y Jänich probaron que un modelo para su correspondiente Ω-espectro está dado por el espacio de operadores de Fredholm $\mathrm{Fred}(\mathcal{H})$, sobre un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita $\mathcal{H}$.

Más precisamente, del Teorema de Atiyah-Jänich tenemos que la K-teoría de un complejo celular finito X satisface

$$K^0(X) \cong [X, \mathrm{Fred}(\mathcal{H})].$$

De manera análoga, se define la K-teoría equivariante de un espacio en la presencia de una acción (cf. [13] y [14]).

Definición 3.4.1. *Sean G un grupo finito y X un G-complejo celular finito. La K-teoría G-equivariante de X se define como el grupo*

$$K_G(X) := \pi_0\left(C(X; \mathrm{Fred}(\mathcal{H}_G))^G\right),$$

cuyos elementos corresponden a clases de homotopía de funciones G-equivariantes de X a $\mathcal{H}_G := \mathcal{H} \otimes L^2(G)$.

La G-acción sobre $\mathrm{Fred}(\mathcal{H}_G)$ *está dada mediante la G-acción en $\mathcal{H}_G$.*

Es importante señalar que el modelo de $\mathrm{Fred}(\mathcal{H}_G)$ considerado aquí[1] consiste del conjunto de parejas de operadores de Fredholm (A, B) tales que $AB-1$ y $BA-1$ son compactos, con la topología sobre $\mathrm{Fred}(\mathcal{H}_G)$ inducida por el encaje

$$(A, B) \longmapsto (A, B, AB-1, BA-1)$$

en $\mathcal{B}\times\mathcal{B}\times\mathcal{K}\times\mathcal{K}$, con $\mathcal{B}$ el espacio de operadores acotados en $\mathcal{H}_G$ con la topología compacto-abierto y $\mathcal{K}$ el espacio de operadores compactos con la topología de la norma.

3.4.1. El grupo de representaciones lineales

Veamos el caso particular de la K-teoría G-equivariante del espacio que consta de sólo un punto. Para ello recordaremos brevemente la definición del grupo de representaciones. Para una exposición más detallada puede consultarse [cap. III,10], así como el enfoque presentado en [Sec. 6,14].

Si V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, una aplicación $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ es llamada una *representación (lineal)* de G si $\rho(x)\rho(y) = \rho(xy)$, para todos $x, y \in G$ y $\rho(1) = \mathrm{Id}_V$.

Dos representaciones $\rho_1 : G \to \mathrm{Aut}(V_1)$ y $\rho_2 : G \to \mathrm{Aut}(V_2)$ se dicen ser linealmente equivalentes si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $f : V_1 \to V_2$ tal que $\rho_2(g) = f\rho_1(g)f^{-1}$ para todo $g \in G$.

Es fácil ver que podemos tomar la suma directa de cualesquiera dos representaciones lineales y ésta es nuevamente una representación lineal. Esta suma se extiende de manera obvia a las clases de equivalencia lineal.

[1] En [1], M. Atiyah y G. Segal denotan este espacio por $\mathrm{Fred}'(\mathcal{H}_G)$.

Definición 3.4.2. *Definimos $M(G)$ como el monoide de clases de isomorfismos lineales de representaciones lineales de G, respecto a la suma directa. Denotamos por $R(G)$ el grupo de Gothendieck asociado a $M(G)$.*

Por otro lado, si $T : \mathcal{H}_G \longrightarrow \mathcal{H}_G$ es un operador de Fredholm G-equivariante, entonces los subespacios $\operatorname{Ker} T$ y $\operatorname{Coker} T$ son de manera natural G-representaciones de dimensión finita, y su diferencia es un elemento del grupo $R(G)$, lo cual induce el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} ind : K_G(*) & \to & R(G) \\ T & \longmapsto & \operatorname{Ker} T - \operatorname{Coker} T \end{array}$$

De hecho el homomorfismo ind es un isomorfismo.

3.4.2. Grupos relativos y superiores de K-teoría equivariante

Para definir los grupos relativos de K-teoría equivariante (cf. [2]) usaremos la construcción del espacio fibra homotópica.

Recordemos que si $\varphi : A \longrightarrow B$ es cualquier aplicación continua, su fibra homotópica es definida como

$$E_\varphi := \{(a, f) \in A \times B^{[0,1]} \mid f(0) = \varphi(a)\}.$$

Tal espacio tiene la propiedad de que la aplicación $E_\varphi \longrightarrow B$ definida por $ev_1 : (a, f) \longmapsto f(1)$ es una fibración (cf. [10]), cuya fibra es denotada por F_φ y es llamada la fibra homotópica de f, la cual explícitamente está dada por

$$(F_\varphi)_{b_0} = \{(a, f) \in A \times B^{[0,1]} \mid f(0) = \varphi(a), f(1) = b_0\}$$

para algún punto base $b_0 \in B$.

Definición 3.4.3. *Sea G un grupo finito y (X, A) una G-pareja complejos celulares. Entonces, dada la aplicación de restricción*

$$C(X; \operatorname{Fred}(\mathcal{H}_G))^G \xrightarrow{\text{res}} C(A; \operatorname{Fred}(\mathcal{H}_G))^G ,$$

y $F_{\text{res}}(X, A)$ la correspondiente fibra homotópica, definimos los grupos relativos de K-teoría equivariante por

$$K_G(X, A) := \pi_0(F_{\text{res}}(X, A)).$$

Por otro lado, como el elemento $\operatorname{Id} \in \operatorname{Fred}(\mathcal{H}_G)$ es fijado bajo $U(\mathcal{H}_G)$, se sigue que $C(X; \operatorname{Fred}(\mathcal{H}_G))^G$ tiene un punto base distinguido y podemos hablar sobre grupos superiores de homotopía.

Definición 3.4.4. *Sea G un grupo finito y (X, A) una G-pareja de complejos celulares. Definimos*

$$K_G^{-i}(X) := \pi_i(C(X; \operatorname{Fred}(\mathcal{H}_G))^G).$$

Asimismo, definimos

$$K_G^{-i}(X, A) := \pi_i(F_{\text{res}}(X, A))$$

con $F_{\text{res}}(X, A)$ la fibra homotópica de la restricción

$$C(X; \operatorname{Fred}(\mathcal{H}_G))^G \xrightarrow{\text{res}} C(A; \operatorname{Fred}(\mathcal{H}_G))^G .$$

3.4.3. Propiedades cohomológicas

Los grupos de K-teoría equivariante satisfacen ciertas propiedades, de tal manera que le dan una estructura de teoría de cohomología generalizada. La demostración de estas propiedades puede consultarse en el artículo G. Segal [10].

Sea G-$\mathbf{Top}_2$ la categoría cuyos objetos consisten de parejas de G-complejos celulares (X, A). En la categoría G-$\mathbf{Top}_2$, un morfismo $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ consiste en una aplicación G-equivariante $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, entre parejas de G-complejos celulares.

De modo que tenemos una aplicación G-equivariante entre los correspondientes espacios de funciones $C(X, A; \mathrm{Fred}(\mathcal{H}_G)) \longrightarrow C(Y, B; \mathrm{Fred}(\mathcal{H}_G))$ que desciende a un homomorfismo al nivel de los grupos de homotopía (Definición 3.4.4) y por lo tanto, tenemos el homomorfismo

$$f^* : K_G^{-i}(X, A) \longrightarrow K_G^{-i}(Y, B).$$

Una homotopía entre dos aplicaciones $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ es una aplicación

$$(X, A) \times [0, 1] \longrightarrow (Y, B)$$

con $\pi : (X, A) \times [0, 1] \longrightarrow (X, A)$ dada por la proyección, tal que la restricción a $(X, A) \times \{0\}$ es f y la restricción a $(X, A) \times \{1\}$ es g.

La correspondencia

$$K_G^{-i} : (X, A) \longmapsto K_G^{-i}(X, A)$$

es un funtor homotópico contravariante de la categoría G-$\mathbf{Top}_2$ a la categoría de grupos abelianos.

El funtor de K-teoría equivariante satisface las siguientes propiedades cohomológicas:

Invarianza homotópica. Si $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, son aplicaciones homotópicas, entonces

$$f^* = g^* : K_G^{-i}(Y, B) \longrightarrow K_G^{-i}(X, A).$$

Sucesión exacta larga. Existe la siguiente sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow K_G^{-i}(X, A) \longrightarrow K_G^{-i}(X) \longrightarrow K_G^{-i}(A) \longrightarrow K_G^{-i+1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow K_G^{0}(X, A) \longrightarrow K_G^{0}(X) \longrightarrow K_G^{0}(A)$$

Aditividad. Si $(X, A) = \coprod_\lambda (X_\lambda, A_\lambda)$, entonces

$$K_G^{-i}(X, A) \xrightarrow{\cong} \prod_\lambda K_G^{-i}(X_\lambda, A_\lambda)\ .$$

Escisión. Si $Z \subset A$ es un G-subcomplejo celular contenido en el interior de A, entonces

$$K_G^{-i}(X, A) \xrightarrow{\cong} K_G^{-i}(X \smallsetminus Z, A \smallsetminus Z)\ .$$

El axioma de la dimensión para una teoría de cohomología $\mathfrak{h}^*$ establece que $\mathfrak{h}^n(*) = 0$ para $n \neq 0$. Sin embargo, en el caso de los grupos de K-teoría equivariante esto no se cumple, pues de hecho el Teorema de Periodicidad de Bott establece que

$$K_G^{-i}(X) \cong K_G^{-i-2}(X). \tag{3.12}$$

Este resultado se sigue por la existencia de una equivalencia homotópica entre $\mathrm{Fred}(\mathcal{H}_G)$ y $\Omega^2\mathrm{Fred}(\mathcal{H}_G)$ la cual, al ser $U(\mathcal{H})$-equivariante (cf. [11]), induce una equivalencia homotópica entre $\mathrm{Fred}(\mathcal{H}_G)$ y $\Omega^2\mathrm{Fred}(\mathcal{H}_G)$ de la cual se sigue el isomorfismo (3.12).

Debido a esta propiedad de periodicidad, esta teoría no puede cumplir el axioma de la dimensión que caracteriza a una teoría de cohomología, sagún los axiomas de Eilenberg-Maclane, pero al cumplir el resto de los axiomas antes enlistados y usando Periodicidad de Bott para definir los K-grupos para todo entero mediante

$$K_G^i(X,A) = \begin{cases} K_G^0(X,A) & \text{si } i \text{ es par,} \\ K_G^{-1}(X,A) & \text{si } i \text{ es impar,} \end{cases}$$

se sigue que la K-teoría equivariante es una teoría de cohomología generalizada sobre la categoría G-$\mathbf{Top}_2$.

En la siguiente sección se presentará una filtración del G-espacio X asociada a una cubierta, de tal manera que la sucesión espectral inducida por el correspondiente sistema de Cartan-Eilenberg converge a la K-teoría equivariante de X y además, los términos iniciales son relativamente más sencillos respecto a la filtración por esqueletos; ésto último se presentará en la Sección 3.6.

3.5. La filtración asociada a una cubierta

Dado el G-espacio X y

$$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=0}^{\mathbf{N}} \tag{3.13}$$

una G-cubierta finita de subconjuntos abiertos de X, construiremos un espacio asociado $W_{\mathcal{U}}$ de tal manera que $K_G^*(W_{\mathcal{U}}) \cong K_G^*(X)$.

La construcción de este espacio fue dada por G. Segal en [3]y [11].

Sea $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ el nervio de la cubierta $\mathcal{U}$, esto es, un complejo simplicial finito cuyos simplejos son los subconjuntos de la forma $\{0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_n \leq \mathbf{N}\}$ tales que

$$U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_n} \neq \varnothing,$$

y $|N_{\mathcal{U}}|$ su realización geométrica. Así mismo, usaremos la notación

$$U_{\sigma^n} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_n}.$$

Definimos $W_{\mathcal{U}}$ como el subespacio abierto

$$\bigcup_{0 \leq i \leq N} U_{\sigma^n} \times |\sigma^n| \tag{3.14}$$

del producto $X \times |N_{\mathcal{U}}|$ y $w : W_{\mathcal{U}} \longrightarrow X$ la proyección en el primer factor.

Por otro lado, sea X_p el conjunto de puntos $x \in X$ que se encuentran contenidos en al menos $p+1$ *elementos distintos* de $\mathcal{U}$, esto es, $x \in U_{\sigma^p}$ para algún σ^p. Como la cubierta es finita, con $\mathbf{N}$ elementos, se tiene que $X_p = \varnothing$ para $p \geq \mathbf{N}$, esto es,

$$X_{\mathbf{N}} = X_{\mathbf{N}+1} = X_{\mathbf{N}+2} = \cdots = \varnothing.$$

De tal manera que tenemos una filtración de X por subespacios,

$$X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_{\mathbf{N}-1} \supset X_{\mathbf{N}} = \varnothing,$$

la cual, mediante $w : W_{\mathcal{U}} \longrightarrow X$ induce una filtración sobre $W_{\mathcal{U}}$, a saber, $W_p = w^{-1}(X_p)$. De modo que tenemos el diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
\coprod(U_{\sigma^p}, U_{\sigma^p} \cap X_{p+1}) \times |\sigma^p| \arrow[r] \arrow[d] & (W_p, W_{p+1}) \arrow[d] \\
\coprod(U_{\sigma^p}, U_{\sigma^p} \cap X_{p+1}) \arrow[r] & (X_p, X_{p+1})
\end{tikzcd}$$

cuyas aplicaciones horizontales son dadas por homeomorfismos relativos G-equivariantes y la aplicación vertical de la izquierda del diagrama es una G-equivalencia homotópica.

De lo anterior, se sigue que

$$K_G^*(W_p, W_{p+1}) \cong K_G^*(X_p, X_{p+1})$$

para todo p. Luego, como los grupos $E_1^{p,q} = K_G^{p+q}(W_p, W_{p+1}; P)$ son triviales para $p \geq \mathbf{N}$ y para $p < 0$, se sigue que el primer término de la sucesión espectral que éstos definen, está localizada en $\mathbf{N}$ columnas en el plano cartesiano, desde la columna $p = 0$ hasta la columna $p = \mathbf{N} - 1$. Luego, las diferenciales

$$d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$$

son todas triviales para $r \geq \mathbf{N}$ y por lo tanto la sucesión espectral converge en el término $\mathbf{N}$.

Así, hemos demostrado el siguiente resultado.

Lema 3.5.1. $K_G^*(W_{\mathcal{U}}) \cong K_G^*(X)$.

Este lema es importante para la demostración del Teorema 3.6.1 que se presenta en la siguiente sección.

3.6. Sucesión espectral para K-teoría equivariante

En esta sección mostraremos cómo el sistema de Cartan-Eilenberg asociado a la K-teoría equivariante del espacio $W_{\mathcal{U}}$ relativo a la G-cubierta de X define una sucesión espectral cuya segunda página es dada por la cohomología de Čech asociada a la pregavilla de los grupos locales de K-teoría.

Teorema 3.6.1. *Sea G un grupo finito y X un G-complejo celular finito. Dada una G-cubierta finita $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=0}^{\mathbf{N}}$ de subconjuntos abiertos de X, existe una sucesión espectral $E_r^{p,q}$ tal que*

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(\mathcal{U}, \check{\mathcal{K}}^q)$$

y convergente a $K_G^{p+q}(X)$, donde $\check{\mathcal{K}}^q$ es la pregavilla $U \mapsto K_G^q(U)$.

Demostración. Al espacio $W_{\mathcal{U}}$, definido en (3.14), podemos asociarle una filtración

$$W^0 \subset W^1 \subset \cdots \subset W_{\mathcal{U}}$$

dada por

$$W^p := \bigcup_{0 \le i \le p} U_{\sigma^i} \times |\sigma^i|,$$

esto es, la imagen inversa del p-esqueleto de $|N_{\mathcal{U}}|$. A esta filtración le corresponde un sistema de Cartan-Eilenberg y en consecuencia una sucesión espectral convergiendo a $K_G^*(W_{\mathcal{U}})$ cuyo primer término está dado por $K_G^{p+q}(W^p, W^{p-1})$. Luego, a fin de reformular este primer término y poder expresarlo en forma más explícita aplicamos el funtor $K_G^*(-)$ a la sucesión

$$X \longleftarrow \coprod U_{\sigma^0} \leftleftarrows \coprod U_{\sigma^1} \Lleftarrow \coprod U_{\sigma^2} \cdots$$

donde las flechas son dadas por inclusión y obtenemos la sucesión

$$K_G^*(X) \longrightarrow \prod K_G^*(U_{\sigma^0}) \rightrightarrows \prod K_G^*(U_{\sigma^1}) \Rrightarrow \prod K_G^*(U_{\sigma^2}) \cdots$$

donde los morfismos en la sucesión son dados por restricciones.

Definimos

$$E_1^{p,q} = K_G^q(A_p), \text{ donde } A_p := \coprod U_{\sigma^p}.$$

Luego, si Δ^p es el p-simplejo estándar y $\dot{\Delta}^p$ su $(p-1)$-esqueleto, de la terna $(A_p \times \Delta^p, A_p \times \dot{\Delta}^p, A_p \times \Delta^{p-1})$ obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K_G^{p+q-1}(A_p \times \dot{\Delta}^p, A_p \times \Delta^{p-1}) \longrightarrow K_G^{p+q}(A_p \times \Delta^p, A_p \times \dot{\Delta}^p) \longrightarrow 0,$$

esto es, un isomorfismo

$$K_G^{p+q}(A_p \times \Delta^p, A_p \times \dot{\Delta}^p) \cong K_G^{p+q-1}(A_p \times \dot{\Delta}^p, A_p \times \Delta^{p-1}),$$

y usando el principio de escisión en la pareja $(A_p \times \dot{\Delta}^p, A_p \times \Delta^{p-1})$, tenemos

$$K_G^{p+q-1}(A_p \times \dot{\Delta}^p, A_p \times \Delta^{p-1}) \cong K_G^{p+q-1}(A_p \times \Delta^{p-1}, A_p \times \dot{\Delta}^{p-1})$$

en consecuencia

$$K_G^{p+q}(A_p \times \Delta^p, A_p \times \dot{\Delta}^p) \cong K_G^{p+q-1}(A_p \times \Delta^{p-1}, A_p \times \dot{\Delta}^{p-1})$$

e inductivamente, se sigue que

$$E_1^{p,q} \cong K_G^{p+q}(A_p \times \Delta^p, A_p \times \dot{\Delta}^p).$$

Luego, de las propiedades cohomológicas de la K-teoría equivariante y la equivalencia homotópica relativa $(A_p \times \Delta^p, A_p \times \dot{\Delta}^p) \longrightarrow (W^p, W^{p-1})$, se sigue que,

$$E_1^{p,q} \cong K_G^{p+q}(W^p, W^{p-1}).$$

Por lo tanto, de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} E_1^{p,q} \arrow[r, "d_1^{p,q}"] \arrow[d, "\cong"'] & E_1^{p+1,q} \arrow[d, "\cong"] \\ K_G^{p+q}(W^p, W^{p-1}) \arrow[r, "\delta_1^{p,q}"] & K_G^{p+q+1}(W^{p+1}, W^p) \end{tikzcd}$$

obtenemos que la sucesión espectral $E_r^{p,q}$ converge a $K_G^*(W_{\mathcal{U}})$.

Finalmente, si $\check{\mathcal{K}}^q$ es la pregavilla $U \mapsto K_G^q(U)$, entonces por definición se sigue que

$$E_2^{p,q} \cong \check{H}^p(\mathcal{U}, \check{\mathcal{K}}^q).$$

□

Del teorema anterior se deduce que $d_2 = 0$ y entonces $E_2 = E_3$.

Por otro lado, si G es finito y X es una G-variedad diferencial, podemos tomar una cubierta abierta equivariantemente contraíble $\mathcal{U}$ y cuyas intersecciones arbitrarias no vacías sean también G-contráctiles, entonces para cada abierto $U_i \in \mathcal{U}$ se tiene

$$\lambda_i : K_G(U_i) \xrightarrow{\cong} R(G_i)$$

con G_i el subgrupo de isotropía de U_i; y en una doble intersección $U_i \cap U_j$,

$$\begin{tikzcd} K_G(U_i) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_i"', "\cong"] & K_G(U_i \cap U_j) \arrow[d, "\lambda_{ij}"', "\cong"] & K_G(U_j) \arrow[l] \arrow[d, "\lambda_j"', "\cong"] \\ R(G_i) \arrow[r] & R(G_{ij}) & R(G_j) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

de modo que si los morfismos en el renglón inferior son tomados de tal manera que hacen conmutar cada diagrama, entonces son dados por res : $R(G_i) \longrightarrow R(G_{ij})$. Sobre las intersecciones múltiples se cumplen las propiedades análogas.

De lo anterior, tenemos un morfismo de cadenas

$$\begin{tikzcd} K_G^*(X) \arrow[r] & \prod K_G^*(U_{\sigma^0}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod K_G^*(U_{\sigma^1}) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & \prod K_G^*(U_{\sigma^2}) \cdots \arrow[d] \\ & \prod R(G_{\sigma^0}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod R(G_{\sigma^1}) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \prod R(G_{\sigma^2}) \cdots \end{tikzcd} \tag{3.15}$$

de tal manera que las correspondientes cohomologías de Čech son isomorfas y en consecuencia la sucesión espectral inducida por este complejo de cadenas converge a $K_G^{p+q}(X)$ y por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.6.2. *Sea G un grupo finito y X un G-complejo celular finito. Entonces existe una sucesión espectral $E_r^{p,q}$ tal que*

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} \check{H}^p(\mathcal{U}, R(-)) & \text{si } q \text{ es par} \\ 0 & \text{si } q \text{ es impar} \end{cases}$$

y convergente a $K_G^{p+q}(X)$.

Apéndices

Apéndice A

Elementos de Teoría de Categorías

El concepto de categoría fue introducido por Samuel Eilenberg y Saunder Mac Lane en 1942, fue un paso importante a la teoría de homología.

El desarrollo de la teoría se debe a la necesidad del álgebra homológica y más tarde a necesidades axiomáticas en la geometría algebraica.

A.1. Categorías

Definición A.1.1. *Se dice que $\mathcal{C}$ es una categoría si tiene:*

1. *una clase de objetos la cual denotaremos con $\mathcal{C}_0$,*
2. *para todo par de objetos de $\mathcal{C}_0$, digamos A, $B \in \mathcal{C}_0$, tendremos un conjunto de morfismos de A en B, el cual denotaremos por $\mathcal{C}(A,B)$ ó $\mathcal{C}_1(A,B)$,*
3. *para todo A, B, $C \in \mathcal{C}_0$ y para todo morfismo $f \in \mathcal{C}(A,B)$ y $g \in \mathcal{C}(B,C)$ se cumplen las siguientes propiedades:*
   a) *existe $h \in \mathcal{C}(A,C)$ tal que $h = g \circ f$, se tiene una ley de composición, es decir,*
   $$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}(A,B) \times \mathcal{C}(B,C) & \longrightarrow & \mathcal{C}(A,C) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f, \end{array}$$
   b) *$k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f$ para todo $k \in \mathcal{C}(A,C)$,*
   c) *para cada $A \in \mathcal{C}_0$ existe un morfismo $I_A \in \mathcal{C}(A,A)$ tal que para todo $f \in \mathcal{C}(A,B)$ y $g \in \mathcal{C}(B,A)$ se tiene que*
   $$f \circ I_A = f \quad y \quad I_A \circ g = g.$$

Ejemplo A.1.2. A continuación presentaremos algunos ejemplos clasicos de categorías, en los cuales solamente especificaremos los objetos y morfismos de las distintas categorías.

1. La categoría **Sets**, que consta de todos los conjuntos y aplicaciones entre ellos.
2. La categoría **Top**, que consta de todos los espacios topológicos y aplicaciones continuas entre ellos.

3. La categoría **Gr**, que consta de todos los grupos y los morfismos entre ellos.

4. La categoría **Ab**, que consta de todos los grupos abelianos y sus morfismos son los homomorfismos entre éstos.

5. La categoría **An**, que consta de todos los anillos y sus morfismos son las aplicaciones entre éstos.

6. La categoría $\mathbf{An_c}$, que contiene a todos los anillos conmutativos y sus morfismos son las aplicaciones contrinuas entre ellos.

7. La categoría $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, donde $(\mathcal{P}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Los objetos serán los elementos de $\mathcal{P}$ y los morfismos están determinados para cualesquiera dos objetos $X,\ Y \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}_0}$, de la siguiente forma:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(X,\ Y) = \begin{cases} (X, Y) & \text{si } X \leq Y, \\ \phi & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

8. Dada una categoría $\mathcal{C}$, definimos a la categoría opuesta $\mathcal{C}^{op}$ como aquella categoría que consta de los mismos objetos de $\mathcal{C}$, pero los morfismos para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}_0$ son $\mathcal{C}(B, A)$.

9. La categoría $\mathbf{Mod}_R$ de todos los módulos derechos sobre un anillo R con unidad, junto con sus homomorfismos de módulo. Análogamente para los módulos izquierdos, ${}_R\mathbf{Mod}$.

Ejemplo A.1.3. Sea G un grupo. La categoría de los espacios topológicos en donde G actúa, denotada por $G - \mathbf{Top}$, es aquella en la cual los objetos son los G-espacios y los morfismos son las funciones continuas equivarinates.

Observamos que si la acción de G es trivial, entonces la categoría $G - \mathbf{Top}$ coincide con la categoría **Top**.

Ejemplo A.1.4. Sea G un grupo, $X = \{x\}$ un conjunto con un solo elemento, sobre el cual actúa G. Definimos la categoría $\mathcal{G}$, donde los objetos es el elemnto x y los morfismos están determinados por los elementos de G.

Ahora observemos que efectivamente es una categoría:

- probaremos que existe un elemento $h \in G$ tal que para cada $g_1,\ g_2 \in G$ se cumple la ley de composición descrita en la definicón. Sean $g_1,\ g_2 \in G$, $x \in X$ entonces

$$\begin{aligned} (g_1,\ g_2)(x) &= g_1 \cdot g_2 \cdot x \\ &= (g_1 \circ g_2) \cdot x \end{aligned}$$

  luego definimos $g = g_1 \circ g_2$, teniendo así

$$(g_1,\ g_2)(x) = g \cdot x,$$

- ahora probemos que se cumple la ley de asociatidad. Sean $g_1,\ g_2,\ g_3 \in G,\ x \in X$ entonces

$$\begin{aligned}(g_1,\ g_2 \circ g_3)(x) &= g_1 \cdot (g_2 \circ g_3) \cdot x \\ &= g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot x \\ &= (g_1 \circ g_2,\ g_3)(x),\end{aligned}$$

- por último probaremos que existe un morfismo I tal que

$$g \circ I = g \text{ y } g \circ I = g.$$

Sean $e, g \in G$, $x \in X$ entonces

$$\begin{aligned}(g,e)(x) &= g \cdot e \cdot x \\ &= (g \circ e) \cdot x \\ &= g \cdot x \\ &= g(x)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(e,g)(x) &= e \cdot g \cdot x \\ &= (e \circ g) \cdot x \\ &= g \cdot x \\ &= g(x),\end{aligned}$$

haciendo $I = e$ tenemos lo que se buscaba probar, donde $\circ$ es la operacion en G.

Antes de introducir la noción de funtor, esto es, aplicaciones entre categorías, introduciremos la siguiete noción.

Definición A.1.5. *Dada una categoría $\mathcal{C}$, diremos que $A \in \mathcal{C}_0$ es:*

1. **inicial** *si para todo $B \in \mathcal{C}_0$, si existe un único morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$,*
2. **final** *si para todo $B \in \mathcal{C}_0$, si existe un único morfismo $f \in \mathcal{C}(B, A)$,*
3. **cero** *si es inicial y final a la vez.*

Definición A.1.6. *Dada una categoría $\mathcal{C}$ y objetos $A,\ B \in \mathcal{C}_0$, diremos que un morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ es un:*

1. **monomorfismo** *si para todo $C \in \mathcal{C}_0$ y para todos $g,\ h \in \mathcal{C}(C, A)$, $f \circ g = f \circ h$ implica que $g = h$,*
2. **epimorfismo** *si para todo $C \in \mathcal{C}_0$ y para todos $g,\ h \in \mathcal{C}(B, C)$, $g \circ f = h \circ f$ implica $g = h$,*
3. **isomorfismo** *si existe $g \in \mathcal{C}(B, A)$ tal que $f \circ g = I_B$ y $g \circ f = I_A$,*
4. **endomorfismo** *si $A = B$,*
5. **automorfismo** *si f es un isomorfismo y $A = B$.*

A.2. Funtores

De la misma manera como relacionamos los elementos de la categoría con morfismos entre ellos, deceamos relacionar una categorías con otra, para lo cual se tiene la siguiente definición.

Definición A.2.1. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías. Un* **funtor covariante** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *es una regla de asociación que cumple lo siguiente:*

1. *para cada objeto $A \in \mathcal{C}_0$ hay un objeto $A' \in \mathcal{C}'_0$ tal que $F(A) = A'$,*

2. *para cada morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ hay un morfismo en $\mathcal{C}'(F(A), F(B))$,*

$$F(f) : F(A) \to F(B)$$

tal que

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad y \quad F(1_A) = 1_{A'}$$

Definición A.2.2. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías. Un* **funtor contravariante** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *es una regla de asociación que cumple lo siguiente:*

1. *para cada objeto $A \in \mathcal{C}_0$ hay un objeto $A' \in \mathcal{C}'_0$ tal que $F(A) = A'$*

2. *para cada morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ hay un morfismo en $\mathcal{C}'(F(B), F(A))$,*

$$F(f) : F(B) \to F(A)$$

tal que

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f) \quad y \quad F(1_A) = 1_{A'}$$

Ejemplo A.2.3. Los siguientes dos ejemplos son básicos en esta teoría.

1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, entonces $I : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ el funtor identidad, es un funtor covariante.

2. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ una subcategoría $\mathcal{C}$, definimos el funtor inclusión $i : \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ de manera obvia. Este funtor es covariante.

El siguiente ejemplo lo hemos desarrallodo más ya que será útil para el desarrollo de este trabajo.

Ejemplo A.2.4. Sea $\mathcal{C}$, donde los objetos son los subconjuntos finitos y los morfismos estan dados por inclusiones. $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \mathcal{N}_1)$, donde $\mathcal{N}_1$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Definiremos el siguiente funtor. Sea $A \in C_0$ y $\#(A)$ la cardinalidad del conjunto entonces:

$$F : A \quad \longrightarrow \quad \#(A).$$

Lo cual implica que si $A \subset B$ entonces $\#(A) < \#(B)$, claramente observamos que F es un funtor covariante.

Ejemplo A.2.5. Sea X, Y un G-conjuntos y H-conjunto respectivamente. Definimos la categoría $\mathcal{C} = [X/G]$, donde los objetos son los elementos de X y los morfismos como la acción de G en X, de manera análoga para $\mathcal{D} = [Y/H]$, entonces defineremos el funtor entre las categorías de la siguiente manera

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}.$$

Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función ϕ-equivariante, donde $\phi : G \longrightarrow H$ es un morfismo de grupos y $g : (G \times X) \longrightarrow (H \times Y)$, entonces sea $a,\ b \in G$ se sigue el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dd, bend right, "ba"'] & f(x) \arrow[d, "\phi(a)"] \arrow[dd, bend left, "\phi(ba)"] \\
a \cdot x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "b"'] & f(a \cdot x) \arrow[d, "\phi(b)"] \\
b \cdot (a \cdot x) \arrow[r, "f"] & f(b \cdot (a \cdot x))
\end{tikzcd}$$

observemos que $f(a \cdot x) = \phi(a) \cdot f(x)$, ya que f es $\phi -$ equivariante, luego

$$\begin{aligned}
f(b \cdot (a \cdot x)) &= \phi(b) \cdot f(a \cdot x) \\
&= \phi(b) \cdot (\phi(a) \cdot f(x)) \\
&= (\phi(b)\phi(a)) \cdot f(x) \\
&= (\phi(ba)) \cdot f(x),
\end{aligned}$$

lo cual muestra que F es un funtor covariante.

Definición A.2.6. *Dados dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, diremos que un funtor covariante $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es:*

1. **pleno** *si para todos $A, B \in \mathcal{C}_0$, $F|_{\mathcal{C}(A,B)}$ es sobreyectivo,*
2. **fiel** *si para todo $A, B \in \mathcal{C}_0$, $F|_{\mathcal{C}(A,B)}$ es inyectivo,*
3. **plenamente fiel** *si para todo $A, B \in \mathcal{C}_0$, $F|_{\mathcal{C}(A,B)}$ es biyectivo,*
4. **denso** *si para todo $A' \in \mathcal{D}_0$, existe $A \in \mathcal{C}_0$ tal que B es isomorfismo a $F(A)$.*

Diremos que un funtor covariante $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es isomorfismo categorico si existe $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $G \circ F = I_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G = I_{\mathcal{D}}$.

A.3. Transformaciones naturales

Definición A.3.1. *Sea $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dos funtores, una transformación natural t de F a G es una colección de morfismos $t_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ en $\mathcal{D}$, tal que para cualequier morfimo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$, $G(f) \circ t_A = t_B \circ F(f)$, es decir, hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "t_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

entonces se le llama a $t_A : F(A) \longrightarrow G(B)$ natural en A.

Definición A.3.2. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funtores y $t : F \longrightarrow G$ una transformación natural. Diremos que t es equivalencia natural o isomorfismo natural si $t_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ es un isomorfismo para todo $A \in \mathcal{C}$. Si pasa lo anterior F y G se dicen equivalentes en forma natural.*

Definición A.3.3. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funtores y $t : F \longrightarrow G$ una transformación natural. Diremos que F es equivalencia si existe un funtor $G : \mathcal{D} \longrightarrow C$ tal que $G \circ F, 1 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ son equivalentes de forma natural y $F \circ G, 1 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ también son equivalentes en forma natural. Si F es una equivalencia, diremos que las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son equivalentes.*

Diremos que una categoría es una categoría pequeña si su clase de objetos es un conjunto.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña y $\mathcal{D}$ cualquier categoría, podemos hablar de la categoría de todos los funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y lo denotaremos $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Ejemplo A.3.4. Retomando el ejemplo A.2.5, sean $F, G : [X/G] \longrightarrow [Y/H]$ funtores, tales que $F = (f, \phi)$ y $G = (g, \psi)$ $(f, g : X \longrightarrow Y$ y $\phi, \psi : G \longrightarrow H)$. Sea $\eta : F \longrightarrow G$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, "\phi(a)"] \arrow[d, "\eta_x"'] & f(a \cdot x) & = \phi(a) \cdot f(x) \\ g(x) \arrow[r, "\psi(a)"] & g(a \cdot x) \arrow[from=u, "\eta_{a \cdot x}"] & = \psi(a) \cdot g(x) \end{tikzcd}$$

es decir,

$$\psi(a) \cdot \eta_x(f(x)) = \eta_{a \cdot x}(\phi(A) \cdot f(x)),$$

o de manera equivalente,

$$\psi(a) \cdot g(x) = g(a \cdot x).$$

Por lo tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \overset{\circ}{f(x)} \arrow[r, bend left, "\phi(a)"] \arrow[dd, bend right, "\eta"'] & \phi(a)\overset{\circ}{\cdot} f(x) \arrow[dd, bend left, "\eta_{a\cdot x}"] \\
\overset{\circ}{x} \arrow[r, bend left, "a"] & a \overset{\circ}{\cdot} x \arrow[ur, bend left, "(f{,}\phi)"] \arrow[dr, bend right, "(g{,}\psi)"'] & & \\
 & & \overset{\circ}{g(x)} \arrow[r, bend right, "\psi(a)"'] & \psi(a)\overset{\circ}{\cdot} g(x)
\end{tikzcd}
$$

En el siguientes definiciones aplicaremos los conceptos de categoría, funtor y transformación natural.

Definición A.3.5. *Si X es un espacio topológico, una* **pregavilla** *sobre X es una pareja de familias $(\mathcal{F}, r)$ que consta de:*

1. *una familia $\mathcal{F} = \{f(U) : U$ es abierto en $X\}$*
2. *una familia de $r = \{r_V^U : f(U) \longrightarrow f(V),$ con $U \subset V$ conjuntos abiertos de $X\}$ tal que cumple las siguientes propiedades:*

   a) $r_U^U = 1_U$,

   b) $r_W^U \circ r_W^V$ *si U, V, W son abiertos tales que $W \subset V \subset U$.*

   Se suele escribir $\mathcal{F}$ en vez de $(\mathcal{F}, r)$, los homomorfismos r_V^U se llaman **homomorfismos de restricción**.

Definición A.3.6. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son pregavillas sobre X, entonces un* **morfismo de pregavillas**

$$h : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

es una colección de aplicaciones

$$\{h_U : \mathcal{F}(U) : longrightarrow \mathcal{G}(U) : U \text{ es un abierto en } X\}$$

tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "h_U"] \arrow[d, "r_V^U"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "r_V^U"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "h_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}
$$

Definición A.3.7. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son pregavillas de un grupo X, diremos que $\mathcal{F}$ es una* **subpregavilla** *de $\mathcal{G}$, lo denotaremos $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, si se cumple lo siguiente:*

1. *para cada abierto $U \in X$, $\mathcal{F}(U) \subset \mathcal{G}(U)$ es un subgrupo,*
2. *si $U \subset V$ son abiertos de X, entonces el morfismo $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ es la restricción del morfismo $\mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(V)$.*

Definición A.3.8. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son pregavillas de un grupo X y $\mathcal{F}$ es una subpregavilla de $\mathcal{G}$, la* **pregavilla cociente**, *$\mathcal{G}/\mathcal{F}$, esta dada por:*

1. *para cada abierto $U \subset X$, definimos*
$$(\mathcal{G}/\mathcal{F})(U) := \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U),$$
2. *si $V \subset U$ son abiertos de X, los morfismos $\mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(V)$ y $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ inducen un morfismo $(\mathcal{G}/\mathcal{F})(U) \longrightarrow (\mathcal{G}/\mathcal{F})(V)$.*

Notemos que si $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de pregavillas, entonces:

1. $ker f \subset \mathcal{F}$ e una subpregavilla,
2. $im f \subset \mathcal{G}$ es una subpregavilla,
3. $coker f = G/im f$ es una pregavilla cociente.

Definición A.3.9. *Una pregavilla $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X es llamada* **gavilla** *si para cualquier conjunto abierto $U \subset X$ y cualquier familia de subconjuntos abiertos $\{U_i\}_{i\in I} = \{U_i : U_i \subset U\}$ tal que $\{U_i\}_{i\in I}$ cubre a U, se satisface las siguietes condiciones:*

1. *si $s, t \in \mathcal{F}(U)$ y $r^U_{U_i}(s) = r^U_{U_i}(t)$ para toda $i \in I$, entonces $s = t$,*
2. *si $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ para $i \in I$ y si para cada $i, j \in I$ tal que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, se tiene que*
$$r^{U_i}_{U_i \cap U_j}(si) = r^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j),$$
entonces existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $r^U_{U_i}(s) = s_i$ para toda i.

Para consultar más información ver [10].

Bibliografía

[1] M. F. Atiyah and G. Segal. Twisted K-Theory. *Ukr. Mat. Visn.*, 1(3):287–330, 2004.

[2] N. Barcenas, J. Espinoza, M. Joachim, and B. Uribe. Classification of twists in equivariant k-theory for proper and discrete actions. *http://arxiv.org/abs/1202.1880*, Febrero 2012.

[3] R. Bott and L. W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology.* 82. 1982.

[4] G. E. Bredon. Introduction to compact transformation groups. *Pure and Applied Mathematics*, 46, 1972.

[5] G. E. Bredon. *Topology and Geometry.* 139. 1993.

[6] T. Y. Chow. You could have invented spectral sequences. *Notices of the AMS*, 2006.

[7] A. Dold. *Albrecht Dold*, volume 200. Fundamental Principles of Mathematical Sciences, 1980.

[8] D. Eisenbud. *Commutative Algebra With a View Toward Algebraic Geometry.* 1995.

[9] Espinoza, et. al. Sistemas de Cartan-Eilenberg en K-teoría equivariante torcida. *preprint*, 2014.

[10] L. V. García. El teorema de riemann-roch. pages 16–18, 2010.

[11] P. Hanlon. A note on the homology of singned posets. *J. Algebraic Combin. 5*, pages 245–250, 1996.

[12] S. Illman. Smooth equivariant triangulations of g-manifolds for g a finite group. *Math. Ann.*, 233(3), 1978.

[13] S. MacLane. *Homology.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 1975.

[14] J. McCleary. *User's Guide to Spectral Sequences.* Wilmington, Delaware (U.S.A.), 1985.

[15] J. McCleary. A history of spectral sequences: Origins to 1953, in history of topology. *North Holland*, pages 631–663, 1999.

[16] J. R. Munkres. *Elementary differential topology: Lectures given at Massachusetts Institute of Technology, Fall 1961*, volume 54. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1966.

[17] V. V. Prasolov. *Elements of combinatorial and differential topology*, volume 74. Graduate Studies in Mathematics, 2004.

[18] J. J. Rotman. *An introduction to algebraic topology*, volume 119. Graduate Texts in Mathematics, 1988.

[19] G. Segal. Categories and cohomology theories. *Topology*, 13:293–312, 1974.

[20] Spanier and Edwin H. *Algebraic Topology.* 1981.

[21] J. H. C. Whitehead. On c^1-complexes. *Ann. of Math.*, 41(2):809–824, 1940.

[22] H. Yang. Equivariant Bredon Cohomology and Čech hypercohomology. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 82:161–182, 2011.