"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Completación proalgebraica de variedades tóricas normales y la correspondencia órbitas-conos

Autor:
Humberto Abraham Martínez Gil

Director:
Dr. Genaro Hernández Mada

Esta tesis cumple con los requisitos
para el grado de **Maestro en Ciencias (Matemáticas)**

Hermosillo, Sonora, México — Junio 2022

SINODALES

Dr. Pedro Luis del Ángel Rodríguez
Centro de Investigación en Matemáticas

Dr. Martín Eduardo Frias Armenta
Universidad de Sonora

Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa
Universidad de Sonora

Dr. Genaro Hernández Mada
Universidad de Sonora

Índice general

Introducción **V**

1. Variedades tóricas **1**
1.1. Nociones básicas sobre variedades algebraicas 1
1.1.1. Variedades afines 1
1.1.2. Variedades algebraicas 6
1.2. Variedades tóricas afines 9
1.3. Variedades tóricas normales 15
1.3.1. Conos y abanicos 15
1.3.2. Construcción de variedades tóricas normales 17

2. El solenoide algebraico **22**
2.1. Definición y propiedades básicas 22
2.2. Estructura de laminación 29

3. Completación proalgebraica de variedades tóricas normales **34**
3.1. El toro proalgebraico 34
3.2. Definición de la completación proalgebraica de variedades tóricas 36
3.2.1. Caso afín 36
3.2.2. Caso general 37
3.3. La correspondencia órbitas-conos 39

Bibliografía **45**

Introducción

Dado un conjunto dirigido $(I, \preceq)$, un *sistema proyectivo* en una categoría $\mathcal{C}$ consiste en una colección de objetos $\{X_i\}_{i\in I}$ y morfismos

$$f_{i,j} : X_j \to X_i \quad \forall i \preceq j,$$

que cumplen condiciones de compatibilidad (ver definición 2.1.2). En el caso particular, cuando los objetos de un sistema proyectivo son variedades algebraicas y los morfismos son mapeos algebraicos es llamado *variedad proalgebraica.* Estas han mostrado tener utilidad en distintas áreas de las matemáticas, una de las más conocidas viene dada por M. Gromov en [7] y [8], donde se estudia la dinámica de un mapeo algebraico $f : V \to V$ considerando el sistema proyectivo

$$\cdots \xleftarrow{f} V \xleftarrow{f} V \xleftarrow{f} \cdots$$

Asociado a cualquier sistema proyectivo, tenemos la noción de *límite proyectivo* (ver definicion 2.1.3). En algunas categorías (grupos abelianos, anillos, espacios topológicos, entre otros) el límite proyectivo

$$\varprojlim X_i$$

de un sistema proyectivo siempre existe.

Dada una variedad tórica normal X, para cada $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $n \mid m$, podemos definir

$$p_{m,n} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

dada por $z \mapsto z^{m/n}$. Estas a su vez inducen mapeos algebraicos

$$q_{m,n} : X \to X,$$

y definen un sistema proyectivo. El límite proyectivo de éste, denotado por $X_{\mathbb{Q}}$, es llamado *completación proalgebraica* de la variedad tórica X.

En la primera parte de [1] de A. Verjovsky y J.M. Burgos, se estudia precisamente el límite $X_{\mathbb{Q}}$ de un sistema proyectivo de variedades tóricas normales. Más particularmente, describen su categoría de haces vectoriales. El objetivo principal de esta tesis es poder dar una descripción geométrica de $X_{\mathbb{Q}}$, obteniendo resultados análogos a los ya conocidos sobre variedades tóricas normales. A continuación describimos la estructura de este trabajo.

En el primer capítulo se presentan algunas nociones básicas sobre las *variedades afines* (complejas) y *variedades algebraicas* (complejas) en general. Luego, se introduce el concepto de *variedad tórica* como una variedad X dotada con la acción de un *toro algebraico* T (ver definición 1.2.8), así como distintas formas de construirlas. Resultará de especial intereés la construcción a partir de *abanicos*, en cuyo caso se obtienen variedades tóricas *normales*.

En el segundo capítulo se define el *solenoide algebraico* $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ como un límite proyectivo de toros 1-dimensionales, y se estudian algunas propiedades de éste. Veremos que el solenoide algebraico tiene estructura de *laminación*, en el sentido de [11].

En el tercer capítulo, empezamos introduciendo el concepto de *toro proalgebraico* $(\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}})^r$, que resulta ser el límite proyectivo de toros algebraicos $(\mathbb{C}^*)^r$. La estructura de laminación en el solenoide algebraico $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ permite obtener también una estructura de laminación en $(\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}})^r$.
Luego, generalizamos al caso de las variedades tóricas normales para obtener así la *completación proalgebraica* de una variedad tórica normal. El hecho de que la variedad tórica X viene dotada con una acción de su toro T, implica que su completación $X_{\mathbb{Q}}$ admite una acción de la completación $T_{\mathbb{Q}}$ del toro.
Cuando $X^{\mathcal{F}}$ es la variedad asociada al abanico $\mathcal{F}$, existe una biyección entre las órbitas de la acción de su toro algebraico T y los conos $\sigma \in \mathcal{F}$, y más aún, cada una de estas órbitas es por sí misma un toro algebraico. El resultado principal de este trabajo (teorema 3.3.5) muestra que hay una biyección entre las órbitas en $X_{\mathbb{Q}}$ de la acción del toro $T_{\mathbb{Q}}$ y los conos en el abanico $\mathcal{F}$, y además órbitas de dicha acción son a su vez toros proalgebraicos.

Capítulo 1

Variedades tóricas

1.1. Nociones básicas sobre variedades algebraicas

En este capítulo presentamos las herramientas básicas para definir y construir variedades tóricas. Se trata de material clásico de variedades algebraicas, por lo que omitimos las pruebas de los resultados pero el lector puede consultar [9] y [5] para los detalles. Más aún, a menos que se especifique lo contrario nos restringiremos a trabajar con variedades definidas sobre el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

1.1.1. Variedades afines

Consideremos el espacio afín $\mathbb{C}^n$ (en principio como un conjunto). Los elementos del anillo de polinomios $A := \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ se pueden pensar como funciones de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}$. De esta manera, dado un subconjunto $T \subseteq A$, se define el **conjunto de ceros** de T, como el subconjunto del espacio afín donde se anulan todos los elementos de T, denotado

$$\mathbf{V}(T) := \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n \mid f(a_1, ..., a_n) = 0 \text{ para todo } f \in T\}.$$

Nótese que si (T) representa al ideal de A generado por los elementos de T, entonces $\mathbf{V}(T) = \mathbf{V}((T))$. Más aún, el Teorema de la base de Hilbert implica que cualquier ideal de A tiene un número finito de generadores. Así, $\mathbf{V}(T)$ se puede expresar como los ceros en común que tiene el conjunto finito de polinomios que generan a (T).

Definición 1.1.1. Un subconjunto V de $\mathbb{C}^n$ es una **variedad afín** (compleja) si existe un subconjunto $T \subseteq A$ tal que $V = \mathbf{V}(T)$.

Observación 1.1.2. En algunas referencias, como por ejemplo en [9], el término *variedad afín* se refiere a subconjuntos de la forma $V = \mathbf{V}(T)$ que además tienen la propiedad de ser irreducibles (ver definición 1.1.6).

La siguiente proposición, la cual se sigue de las propiedades de los ideales en el anillo A, nos permite definir una topología en el espacio afín $\mathbb{C}^n$.

Proposición 1.1.3. *La unión de dos variedades afines es nuevamente una variedad afín. La intersección de una familia de variedades afines es una variedad afín. El espacio completo y el vacío son variedades afines* □

Se define entonces la **topología de Zariski** en el espacio afín $\mathbb{C}^n$, tomando como subconjuntos abiertos los complementos de las varidades afines. Por tanto, toda variedad afín V tiene una topología inducida por la de Zariski en $\mathbb{C}^n$, además de por supuesto la topología inducida por la usual en $\mathbb{C}^n$.

Dada variedad afín $V \subset \mathbb{C}^n$, se tiene asociado el ideal

$$\mathbf{I}(V) := \{f \in A \mid f(p) = 0 \text{ para todo } p \in V\}$$

del anillo de polinomios A. Se define el **anillo coordenado** de V como el cociente

$$\mathbb{C}[V] := A/\mathbf{I}(V),$$

cuyos elementos pueden ser intepretados como funciones polinomiales definidas en V que toman valores en $\mathbb{C}$, es decir, hay una biyección entre $\mathbb{C}[V]$ y el conjunto

$$\{f : V \to \mathbb{C} \mid f \in A\}.$$

Nótese que $\mathbb{C}[V]$ es de hecho una $\mathbb{C}$-álgebra, lo que quiere decir que tiene estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial, y ésta es compatible con su estructura de anillo. Más aún, este tipo de $\mathbb{C}$-álgebras pueden caracterizarse de la siguiente manera:

Proposición 1.1.4. *Una $\mathbb{C}$-álgebra R es isomorfa al anillo coordenado de una variedad afín V si y sólo si R es una $\mathbb{C}$-álgebra finitamente generada sin elementos nilpotentes no nulos.* □

Los ideales de $\mathbb{C}[V]$ se corresponden con subconjuntos de V de acuerdo a las siguientes:

Definición 1.1.5. Sea V una variedad afín.

(i) Para cualquier ideal I de $\mathbb{C}[V]$, se define

$$\mathbf{V}_V(I) := \{p \in V \mid f(p) = 0 \text{ para todo } f \in I\}.$$

Al conjunto $\mathbf{V}_V(I)$ le llamaremos **subvariedad** de V definida por I.

(ii) Para cada subconjunto $W \subseteq V$, se define el ideal asociado

$$\mathbf{I}_V(W) := \{f \in \mathbb{C}[V] \mid f(p) = 0 \text{ para todo } p \in W\}.$$

Como veremos en la proposición 1.1.8, las correspondencias anteriores definen biyecciones, al restringirnos a ideales radicales. Más aún, los ideales primos se corresponden a subconjuntos irreducibles:

Definición 1.1.6. Un subconjunto no vacío V de un espacio topológico X es **irreducible**, si éste no puede ser expresado como la unión $V = V_1 \cup V_2$ de dos subconjuntos propios, cada uno de ellos cerrado en V. El conjunto vacío no se considera irreducible.

Ejemplo 1.1.7.

- El espacio afín es irreducible.
- Los subconjuntos unipuntuales del espacio afín son irreducibles.
- Cualquier subconjunto abierto no vacío de un espacio irreducible, es irreducible y denso.

- Si V es un subconjunto irreducible de X, su cerradura $\overline{V}$ en X es también irreducible.

Proposición 1.1.8. *Sea $V \subseteq \mathbb{C}^n$ una variedad afín.*

(i) (Nullstellensatz para $\mathbb{C}[V]$). Si I es cualquier ideal de $\mathbb{C}[V]$, entonces

$$\mathbf{I}_V(\mathbf{V}_V(I)) = \sqrt{I} =: \{[f] \in \mathbb{C}[V] \mid [f]^m \in I \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Las correspondencias

$$\{\text{Subvariedades afines } W \subseteq V\} \underset{\mathbf{V}_V}{\overset{\mathbf{I}_V}{\rightleftarrows}} \{\text{Ideales radicales } I \subseteq \mathbb{C}[V]\}$$

son biyecciones que invierten las inclusiones y son inversas una de la otra. Más aún, una subvariedad es irreducible si y sólo si su ideal asociado es primo.

(iii) Bajo la corresponencia en (ii), puntos de V se corresponden con ideales maximales de $\mathbb{C}[V]$.

La demostración de esta proposición se encuentra en [4], teorema 5, § 4, cap 5. □

Sea V una variedad afín y $p \in V$. De la proposición anterior tenemos que

$$\{f \in \mathbb{C}[V] \mid f(p) = 0\}$$

es un ideal maximal de $\mathbb{C}[V]$. Más aún, todos los ideales maximales del anillo $\mathbb{C}[V]$ son de esta forma. Por esta razón podemos escribir

$$V = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[V]),$$

donde $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[V])$ denota el conjunto de ideales maximales de $\mathbb{C}[V]$. De esta manera podemos definir de manera abstracta el concepto de variedad afín como $\mathrm{Spec}(R)$, donde R es una $\mathbb{C}$-álgebra que satisface las condiciones de la proposición 1.1.4.

Observación 1.1.9. En general, para un anillo A (conmutativo con 1), se define su espectro $\mathrm{Spec}\, A$ como el conjunto de ideales primos, y se le puede dotar con una topología de Zariski (ver por ejemplo [9]), para la cual los puntos cerrados de $\mathrm{Spec}\, A$ se corresponden con los ideales maximales de A. En este trabajo nos centraremos en un estudio geométrico, donde solamente nos interesarán los puntos cerrados de una variedad. Por esta razón usamos esta notación para el conjunto de ideales maximales.

Ahora definiremos la noción de dimensión para variedades afines. Podemos dar una definición para espacios topológicos en general:

Definición 1.1.10. Sea X es un espacio topológico. Se define la **dimensión** de X, denotada $\dim X$, como el supremo de todos los enteros n, tal que existe una cadena

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n$$

de subconjuntos distintos, irreducibles y cerrados de X. Se define además la **dimensión** de una variedad afín, como la dimensión de ésta como espacio topológico.

Ejemplo 1.1.11.

- La dimensión del espacio afín $\mathbb{C}^n$ (con la topología de Zariski) es n.
- Si U es un abierto de una variedad afín V entonces dim $U =$ dim $\overline{U}$.

Las variedades que nos interesan principalmente en este trabajo tienen la propiedad de ser *normales*. Para definir esta propiedad necesitamos la siguiente:

Definición 1.1.12. Sea R un dominio entero con campo de fracciones K. Diremos que R es **integralmente cerrado** si cada elemento de K que es raíz de un polinomio mónico en $R[x]$ pertenece a R.

Ejemplo 1.1.13.

- Cualquier dominio de factorización única es integralmente cerrado.
- Si R es integralmente cerrado y S es cualquier subconjunto multiplicativo de R, se cumple que la localización R_S es integralmente cerrado.

Definición 1.1.14. Una variedad afín irreducible V es **normal**, si su anillo coordenado $\mathbb{C}[V]$ es integralmente cerrado.

Ejemplo 1.1.15. El espacio afín $\mathbb{C}^n$ es una variedad afín normal ya que su anillo coordenado, el anillo de polinomios $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$, es un dominio de factorización única.

A continuación veremos que algunos subconjuntos abiertos de Zariski en una variedad afín $V \subset \mathbb{C}^n$ son por sí mismos variedades afines. Sean $f \in \mathbb{C}[V] - \{0\}$ y

$$V_f := \{p \in V \mid f(p) \neq 0\} = V - \mathbf{V}(f)$$

claramente es abierto en V. La notación $\mathbf{V}(f)$ tiene sentido ya que los ceros de f en V coniciden con los ceros en V de cualquier representante de f. Supongamos que $\mathbf{I}(V)$ está generado por los polinomios $f_1, ., , , f_s$ y consideremos una nueva variable w. Entonces

$$W := \mathbf{V}(f_1, ..., f_s, 1 - fw) \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$$

es una variedad afín, y la proyección $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ envía de manera biyectiva a W en el abierto V_f. De esta manera podemos identificar a V_f con la variedad afín $W \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$.

Cuando V es irreducible, se puede probar que $V_f = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[V]_f)$, donde $\mathbb{C}[V]_f$ es la localización en f del anillo coordenado de V, es decir,

$$\mathbb{C}[V]_f = \{g/f^r \in \mathbb{C}(V) \mid g \in \mathbb{C}[V], r \geq 0\},$$

con $\mathbb{C}(V)$ el campo de fracciones del dominio entero $\mathbb{C}[V]$ (o campo de funciones racionales).

Ejemplo 1.1.16. El **toro n-dimensional** es el abierto

$$(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}^n - \mathbf{V}(x_1 \cdots x_n) \subseteq \mathbb{C}^n,$$

y es una variedad afín normal e irreducible con anillo coordenado

$$\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]_{x_1 \cdots x_n} = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}].$$

Definición 1.1.17. Dada una variedad afín $V = \operatorname{Spec}(R)$ y un abierto de Zariski $U \subseteq V$, se dice que una función $\phi : U \to \mathbb{C}$ es **regular** si para todo $p \in U$, existe $f_p \in R$ tal que $p \in V_{f_p}$ y $\phi|_{V_{f_p}} \in R_{f_p}$. Entonces se define el anillo

$$\mathscr{O}_V(U) = \{\phi : U \to \mathbb{C} \mid \phi \text{ es regular}\}.$$

La condición $p \in V_{f_p}$ significa que $f_p(p) \neq 0$, y al decir $\phi|_{V_{f_p}} \in R_{f_p}$ se refiere a que

$$\phi = \frac{a_p}{f_p^{m_p}}$$

para algún $a_p \in R$ y $m_p \geq 0$.
Cuando $U = V$ se cumple que $\mathscr{O}_V(V) = R$, es decir, el anillo de funciones regulares en V es precisamente el anillo coordenado de V.

Definición 1.1.18. Sean V_1, V_2 variedades afines y $U_1 \subseteq V_1, U_2 \subseteq V_2$ abiertos de Zariski. Una función $\Phi : U_1 \to U_2$ es un **morfismo** si la correspondencia

$$\phi \mapsto \phi \circ \Phi$$

define un homomorfismo de anillos

$$\Phi^* : \mathscr{O}_{V_2}(U_2) \to \mathscr{O}_{V_1}(U_1).$$

Algunas propiedades de los morfismos entre variedades afines son las siguientes (para la demostración ver [9])

Proposición 1.1.19.

- *Si U es una abierto en una variedad afín V, entonces*

$$\mathscr{O}_V(U) = \{\phi : U \to \mathbb{C} \mid \phi \textit{ es morfismo}\},$$

  es decir, las funciones regulares en U son precisamente los morfismos de U en $\mathbb{C}$.

- *La composición de dos morfismos es un morfismo y la identidad en una variedad afín V es un morfismo.*

- *La inclusión $W \subseteq U$ entre dos abiertos en una variedad afín V es un morfismo.*

- *Los morfismos son funciones continuas en la topología de Zariski.*

□

Observemos que el segundo punto de la proposición anterior establece que esta noción de morfismo nos permite definir la categoría de variedades afines. En esta categoría tenemos la siguiente noción de isomorfismo:

Definición 1.1.20. Diremos que un morfismo $\Phi : U_1 \to U_2$ es un **isomorfismo** si Φ es biyectivo y su inverso $\Phi^{-1} : U_2 \to U_1$ es un morfismo.

Si $V_i = \mathrm{Spec}(R_i)$ es una variedad afín, para $i = 1, 2$, y $\Phi : V_1 \to V_2$ es un morfismo, entonces se induce un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\Phi^* : R_2 \to R_1$. Recíprocamente, un morfismo entre los anillos coordenados induce un morfismo entre las respectivas variedades afines (tomando la imagen inversa de los ideales maximales en R_1). Más aún, tenemos la siguiente:

Proposición 1.1.21. *Dos variedades afines V_1, V_2 son isomorfas si y sólo si sus anillos coordenados los son como $\mathbb{C}$-álgebras.*

□

1.1.2. Variedades algebraicas

Definiremos ahora el concepto de *variedad algebraica* (compleja), la cual se obtiene al "pegar" variedades afines complejas. Consideremos una colección finita $\{V_\alpha\}_\alpha$ de variedades afines. Supongamos que para cada pareja α, β tenemos abiertos de Zariski $V_{\beta,\alpha} \subseteq V_\alpha$ e isomorfismos $g_{\beta,\alpha} : V_{\beta,\alpha} \to V_{\alpha,\beta}$ que satisfacen las siguientes condiciones de compatibilidad:

(i) $V_{\alpha,\alpha} = V_\alpha$ y $g_{\alpha,\alpha} = Id_{V_\alpha}$;

(ii) $g_{\alpha,\beta} = g_{\beta,\alpha}^{-1}$ para todo α, β; y

(iii) $g_{\beta,\alpha}(V_{\beta,\alpha} \cap V_{\gamma,\alpha}) = V_{\alpha,\beta} \cap V_{\gamma,\beta}$ y $g_{\gamma,\alpha} = g_{\gamma,\beta} \circ g_{\beta,\alpha}$ en $V_{\beta\alpha} \cap V_{\gamma,\alpha}$ para todo α, β, γ.

Sea $Y = \bigsqcup_\alpha V_\alpha$ y definimos la relación de equivalencia $\sim$ en Y como $a \sim b$ si y sólo si $a \in V_\alpha$, $b \in V_\beta$ para alguna pareja α, β con $g_{\beta,\alpha}(a) = b$. Construimos entonces al espacio cociente $X := Y/\sim$ dotado con la topología cociente inducida. Al espacio X se le denomina **variedad algebraica compleja** (o simplemente variedad).

Observación 1.1.22. Para cada α, sea

$$U_\alpha = \{[x] \in X : x \in V_\alpha\},$$

el cual es un abierto en X y la correspondencia $x \mapsto [x]$ define un homeomorfismo $V_\alpha \cong U_\alpha$, el cual permite dotar a U_α con estructura de variedad afín. Así, X localmente se mira como una variedada afín y a los abiertos U_α se les denomina **piezas afines** de X.

Como en el caso afín, una variedad X viene equipada con dos topologías: la usual inducida en cada pieza afín; y la topología de Zariski, cuyos subconjuntos abiertos de Zariski son precisamente aquellos que se restringen a abiertos de Zariski en cada pieza afín. Los subconjuntos cerrados de Zariski son llamados **subvariedades** de X.

Observación 1.1.23. Notemos que una variedad algebraica X es en particular un espacio topológico, por lo que podemos hablar de variedades irreducibles (definición 1.1.6) y de su dimensión $\dim X$ (definición 1.1.10)

Sea U un abierto de Zariski de una variedad X, y sea $W_\alpha := h_\alpha^{-1}(U \cap U_\alpha) \subseteq V_\alpha$, donde h es el homeomorfismo descrito en la observación 1.1.22. Una función $f : U \to \mathbb{C}$ es **regular** si

$$f \circ h_\alpha|_{W_\alpha} : W_\alpha \to \mathbb{C}$$

es regular para todo α. Las condiciones de compatibilidad aseguran que ésto esta bien definido, por lo que podemos considerar el anillo de funciones regulares en U

$$\mathscr{O}_X(U) := \{\phi : U \to \mathbb{C} \mid \phi \text{ es regular}\}.$$

Definición 1.1.24. Sea p un punto en una variedad X. Para U_1, U_2 vecindades de p, decimos que dos funciones regulares $f_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ y $f_2 : U_2 \to \mathbb{C}$ son **equivalentes**, denotado $f_1 \sim f_2$, si existe una vecindad $U \subseteq U_1 \cap U_2$ de p tal que $f_1|_U = f_2|_U$. Esto define una relación de equivalencia y definimos el **anillo local de** X **en** p como

$$\mathscr{O}_{X,p} := \{f : U \to \mathbb{C} \mid U \text{ es una vecindad de } p \text{ en } X\}/\sim$$

Observación 1.1.25. Para cada punto p en una variedad X, el anillo $\mathscr{O}_{X,p}$ es en efecto un anillo local, y su único ideal maximal es

$$\mathbf{m}_p = \{\phi \in \mathscr{O}_{X,p} \mid \phi(p) = 0\}.$$

Si $X = \mathrm{Spec}(R)$ es afín e irreducible, entonces su anillo coordenado R es integralmente cerrado si y sólo si el anillo local $\mathscr{O}_{X,p}$ es integralmente cerrado para todo $p \in X$ (proposición 3.0.11 de [5]).

La segunda parte de esta observación permite definir la noción de normalidad para una variedad algebraica cualquiera.

Definición 1.1.26. Sea X una variedad algebraica compleja, entonces X es **normal** si es irreducible y el anillo local $\mathscr{O}_{X,p}$ es integralmente cerrado para todo $p \in X$.

Se tiene la siguiente proposición inmediata.

Proposición 1.1.27. *Sea X una variedad irreducible cubierta por abiertos afines V_α. Entonces X es normal si y sólo si cada V_α es normal.*

□

Ejemplo 1.1.28. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la acción de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ dada por

$$\lambda \cdot (z_0, ..., z_n) := (\lambda z_0, ..., \lambda z_n),$$

para $\lambda \in \mathbb{C}^*$ y $(z_0, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. Se define el **espacio proyectivo** $\mathbb{P}^n$, como el espacio de órbitas

$$(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*,$$

en el cual, la clase de $(z_0, ..., z_n)$ se denota por $[z_0; ...; z_n]$.
Si $p = [z_0; ...; z_n]$, entonces cualquier $(n+1)$-tupla en la órbita p, es llamado **conjunto de coordenadas homogéneas** de p.
Consideramos a $\mathbb{P}^n$ con la topología inducida por la de Zariski en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ y definimos, para cada $i = 0, ..., n$, el abierto

$$U_i := \{[z_0; ...; z_n] \in \mathbb{P}^n \mid z_i \neq 0\}.$$

Estos cubren completamente al espacio proyectivo, cada uno homeomorfo a $\mathbb{C}^n$ vía

$$[z_0; ...; z_n] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, ..., \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, ..., \frac{z_n}{z_i}\right)$$

para $i = 0, ..., n$. Por lo tanto, cada

$$U_i = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}\left[\frac{x_0}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}\right]\right)$$

es una variedad afín. Para $i \neq j$, "pegamos" estas copias de $\mathbb{C}^n$ como sigue. Tenemos subconjuntos abiertos

$$(U_i)_{\frac{x_j}{x_i}} \subseteq U_i \quad , \quad (U_j)_{\frac{x_i}{x_j}} \subseteq U_j$$

e isomorfismos

$$g_{j,i} : (U_i)_{\frac{x_j}{x_i}} \to (U_j)_{\frac{x_i}{x_j}}$$

ya que ambos dan el mismo conjunto abierto $U_i \cap U_j$ en $\mathbb{P}^n$. De esta manera, el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es una variedad normal de dimensión n (ejercicio 2.7, cap. I, de [9]).

En la sección 1.3 veremos que el espacio proyectivo es una *variedad tórica*

Definición 1.1.29. Sean X, Y variedades con cubiertas afines $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $Y = \bigcup_\beta U'_\beta$. Un **morfismo** $\Phi : X \to Y$ es una función Zariski continua tal que la restricción

$$\Phi|_{U_\alpha \cap \Phi^{-1}(U'_\beta)} : U_\alpha \cap \Phi^{-1}(U'_\beta) \to U'_\beta$$

es un morfismo en el sentido de la Definición 1.1.18, para todo α, β. Un morfismo

$$\Phi : X \to Y$$

se denomina **isomorfismo** si es biyectivo y su inverso $\Phi^{-1} : Y \to X$ es un morfismo.

Observación 1.1.30. Se puede probar que la definición de morfismo es independiente de las cubiertas abiertas afines. También, una función $\phi : X \to \mathbb{C}$ es un morfismo si y sólo si ϕ es una función regular en X, i.e. $\phi \in \mathscr{O}_X(X)$.

Concluiremos esta sección definiendo el producto de dos variedades. Esta es una manera de construir una nueva variedad a partir de dos ya dadas:

Ejemplo 1.1.31. Sean

$$V_1 \subseteq \mathbb{C}^m = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1, ..., x_m]), \quad V_2 \subseteq \mathbb{C}^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[y_1, ..., y_n])$$

variedades afines y supongamos que $\mathbf{I}(V_1) = \langle f_1, ..., f_s \rangle$ y $\mathbf{I}(V_2) = \langle g_1, ..., g_l \rangle$. En principio, los polinomios f_i dependen de $x_1, ..., x_m$ y los polinomios g_j dependen de $y_1, ..., y_n$, pero considerando tanto a f_i como a g_j como polinomios en las variables $x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_m$, es posible definir la variedad afín

$$V_1 \times V_2 = \mathbf{V}(f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_l) \subseteq \mathbb{C}^{m+n}.$$

En general, si $X = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$, $Y = \bigcup_{\beta} U'_\beta$ son variedades, es posible definir una nueva variedad $X \times Y$ "pegando" los productos $U_\alpha \times U'_\beta$ de la siguiente manera: para cada U_α existe un abierto $U_{\alpha',\alpha} \subset U_\alpha$ e isomorfismos

$$g_{\alpha',\alpha} : U_{\alpha',\alpha} \xrightarrow{\cong} U_{\alpha,\alpha'}$$

para todo α'. De igual forma, para cada U'_β existe un abierto $U'_{\beta',\beta} \subset U'_\beta$ e isomorfismos

$$g_{\beta',\beta} : U_{\beta',\beta} \xrightarrow{\cong} U_{\beta,\beta'}$$

para todo β'. Entonces la función

$$g_{\alpha',\alpha} \times g_{\beta',\beta} : U_{\alpha',\alpha} \times U_{\beta',\beta} \to U_{\alpha,\alpha'} \times U_{\beta,\beta'}$$

es un isomorfismo que satisface las condiciones de pegado en la definición de variedad para cualesquiera $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$.

1.2. Variedades tóricas afines

Un **toro** (algebraico), es por definición cualquier variedad afín T isomorfa a $(\mathbb{C}^*)^n$ para algún n. Como $(\mathbb{C}^*)^n$ es un grupo abeliano mediante la multiplicación componente a componente, cualquier toro T adquiere una estructura de grupo mediante dicho isomorfismo. Asociados a cada toro hay dos grupos: el de *caracteres* y el de *subgrupos de un parámetro*.

Definición 1.2.1.

1. Un **caracter** de un toro T, es un morfismo de variedades $\chi : T \to \mathbb{C}^*$ que es además un homomorfismo de grupos.

2. Un **subgrupo de un parámetro** de un toro T, es un morfismo de variedades

$$\lambda : \mathbb{C}^* \to T$$

que es además un homomorfismo de grupos.

Ejemplo 1.2.2. Si $T = (\mathbb{C}^*)^n$, cada $m = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n$ define un caracter

$$\chi^m : (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C}^*$$

dado por

$$\chi^m(t_1, ..., t_n) = t_1^{a_1} ... t_n^{a_n}.$$

Más aún, dicha correspondencia entre puntos de $\mathbb{Z}^n$ y caracteres de $T = (\mathbb{C}^*)^n$ es biyectiva (obs. 22.5.4 [14]). Por tanto, el conjunto de caracteres de $(\mathbb{C}^*)^n$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango n, con la operación inducida

$$\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}, \ m, m' \in \mathbb{Z}^n.$$

Por otra parte, cada $u = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{Z}^n$ define un subgrupo de un parámetro

$$\lambda^u : \mathbb{C}^* \to (\mathbb{C}^*)^n$$

del toro n-dimensional, dado por

$$\lambda^u(t) = (t^{b_1}, ..., t^{b_n}).$$

Así como en el caso de los caracteres, la correspondencia

$$u \mapsto \lambda^u$$

es biyectiva, y por lo tanto los subgrupos de un parámetro del toro n-dimensional forman un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango n.

Definición 1.2.3. Le llamaremos **látice** a cualquier $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango finito.

En general, si $\phi : T \xrightarrow{\cong} (\mathbb{C}^*)^n$ es un isomorfismo de variedades que le da estructura de toro a T y M es el conjunto de caracteres de T, entonces se tiene una correspondencia biyectiva

$$M_n \to M, \quad \chi^m \mapsto \chi^m \circ \phi,$$

donde M_n representa el látice de caracteres de $(\mathbb{C}^*)^n$. Por tanto, dado cualquier toro T, sus caracteres forman un látice de rango igual a la dimensión de T. De manera análoga, el conjunto N de subgrupos de un parámetro forma un látice de rango igual a la dimensión de T.

Dado un toro T, es posible definir de manera natural un emparejamiento bilineal

$$\langle \, , \, \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$$

de la siguiente manera: si χ^m es un caracter y λ^u un subgrupo de un parámetro de T, la composición $\chi^m \circ \lambda^u : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ es un caracter de $\mathbb{C}^*$, el cual está dado por $t \mapsto t^l$ para algún $l \in \mathbb{Z}$. Entonces podemos definir

$$\langle m, u \rangle := l.$$

Ejemplo 1.2.4. Si $T = (\mathbb{C}^*)^n$, $m = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n$ y $u = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{Z}^n$, entonces

$$\langle m, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

i.e., el emparejamiento es el producto interior usual.

El emparejamiendo que hemos definido identifica a N con $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ y a M con $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$. Por tanto, todo toro T tiene asociados dos látices duales entre sí: el de caracteres M y el de subgrupos de un parámetro N.

Notación. Dado $m = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n$, escribiremos $m \in M$ identificando m con el caracter $\chi^m : T \to \mathbb{C}^*$, descrito anteriormente. Similarmente, si $u \in \mathbb{Z}^n$, escribimos $u \in N$ refiriéndonos al subgrupo de un parámetro $\lambda^u : \mathbb{C}^* \to T$.

Proposición 1.2.5. *Sea N un látice de rango n y $M := Hom_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ su dual. Entonces, para cualquier $\mathbb{Z}$-módulo A se tienen isomorfismos de $\mathbb{Z}$-módulos*

$$N \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong A^n =: \bigoplus^n A \cong Hom_{\mathbb{Z}}(M, A).$$

Demostración. Supongamos que el conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ es una base para N. Cualquier elemento $x \in N \otimes_{\mathbb{Z}} A$ tiene una representación única de la forma $x = \sum_{i=1}^n e_i \otimes a_i$, con $a_i \in A$. Definimos

$$N \otimes_{\mathbb{Z}} A \to A^n, \quad \sum_{i=1}^n e_i \otimes a_i \mapsto (a_1, ..., a_n),$$

el cual claramente es un isomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos.
Por otro lado, como N es isomorfo a su dual $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ vía la correspondencia

$$\sum_{i=1}^n u_i e_i \mapsto (e_i \mapsto u_i)$$

con $u_i \in \mathbb{Z}$, se tiene que M es un látice de rango n. Sea $\{e_1^*, ...e_n^*\}$ base para M. Definimos

$$\psi : A^n \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A), \quad (a_1, ..., a_n) \mapsto (e_i^* \mapsto a_i).$$

Claramente ψ es un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos y

$$\overline{\psi} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, A) \to A^n, \quad \gamma \mapsto (\gamma(e_1^*), ..., \gamma(e_n^*))$$

es su inverso. □

Observación 1.2.6. Dado un toro T con látice de subgrupos de un parámetro N, el resultado anterior implica que se obtiene un isomorfismo

$$N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong T,$$

dado por

$$u \otimes t \mapsto \lambda^u(t).$$

De esta manera, se acostumbra escribir un toro como T_N. También, si M es el látice de caracteres del toro T_N se obtiene el isomorfismo

$$T_N \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*)$$

dado por $t \mapsto (m \mapsto \chi^m(t))$.

El siguiente es un resultado que nos ayudará a probar la proposición 1.2.9. Su demostración se puede encontrar en [10], § 16.

Lema 1.2.7.

(a) Sea $\Phi : T_1 \to T_2$ un morfismo entre dos toros que es además un homomorfismo de grupos. Entonces la imagen de Φ es un toro cerrado en T_2.

(b) Sea T un toro y sea $H \subseteq T$ una subvariedad irreducible de T que es además un subgrupo. Entonces H es un toro.

$\square$

Definición 1.2.8. Una **variedad tórica**, es una variedad irreducible X que contiene un toro $T \cong (\mathbb{C}^*)^n$ como un abierto de Zariski, y tal que la acción natural de T en sí mismo se extiende a una acción algebraica de T sobre X (i.e., tal que $T \times X \to X$ es un morfismo de variedades).

El espacio afín $\mathbb{C}^n$ y el toro n-dimensional $(\mathbb{C}^*)^n$ son ejemplos de variedades tóricas afines.

Una manera de construir variedades tóricas afines es mediante puntos en algún látice como veremos a continuación.

Proposición 1.2.9. *Sea T_N un toro con látice de caracteres M y $\mathscr{A} = \{m_1, ..., m_s\} \subseteq M$. Consideremos el morfismo*

$$\Phi_{\mathscr{A}} : T_N \to \mathbb{C}^s, \quad t \mapsto (\chi^{m_1}(t), ..., \chi^{m_s}(t)). \tag{1.1}$$

Sea $X^{\mathscr{A}}$ la cerradura de Zariski en $\mathbb{C}^s$ de la imagen de $\Phi_{\mathscr{A}}$. Entonces $X^{\mathscr{A}}$ es una variedad tórica afín cuyo toro tiene látice de caracteres $\mathbb{Z}\mathscr{A} \subseteq M$, siendo éste el sublátice de M generado por $\mathscr{A}$. En particular, la dimensión de $X^{\mathscr{A}}$ es igual al rango de $\mathbb{Z}\mathscr{A}$.

Demostración. (prop. 1.1.8 de [5]) Nótese primero que $\Phi_{\mathscr{A}}$ es efectivamente un morfismo ya que el mapeo inducido

$$\Phi^*_{\mathscr{A}} : \mathbb{C}[x_1, ..., x_s] \to \mathbb{C}[T_N], \quad x_i \mapsto \chi^{m_i}$$

es un homomorfismo de anillos. Además, como la imagen de $\Phi_{\mathscr{A}}$ está completamente contenida en el toro s-dimensional, por el lema 1.2.7 (a) la imagen $T := \Phi_{\mathscr{A}}(T_N)$ es un toro cerrado en $(\mathbb{C}^*)^s$. Entonces existe una subvariedad A de $\mathbb{C}^s$ tal que $T = A \cap (\mathbb{C}^*)^s$, lo cual implica que $T \subseteq X^{\mathscr{A}} \subseteq A$. Así,

$$X^{\mathscr{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s \subseteq A \cap (\mathbb{C}^*)^s = T.$$

Por tanto $T = X^{\mathscr{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$ (la otra contención es obvia), de donde sigue que T es un abierto de $X^{\mathscr{A}}$. Más aún, T es irreducible ya que es un toro, y en consecuencia $X^{\mathscr{A}}$ es también irreducible.

Veamos ahora la acción de T que, como en particular es un subgrupo de $(\mathbb{C}^*)^s$, la acción de éste en sí mismo se extiene de manera natural a $\mathbb{C}^s$. Así, cada $t \in T$ induce un morfismo $\mathbb{C}^s \to \mathbb{C}^s$ dado por $z \mapsto t \cdot z$ que mapea variedades en variedades. Entonces,

$$T = t \cdot T \subseteq t \cdot X^{\mathscr{A}}$$

muestra que $t \cdot X^{\mathscr{A}}$ es una variedad que contiene a T. Por tanto $X^{\mathscr{A}} \subseteq t \cdot X^{\mathscr{A}}$ para cada $t \in T$. Reemplazando t por t^{-1} tenemos que $X^{\mathscr{A}} = t \cdot X^{\mathscr{A}}$. En conclusión $X^{\mathscr{A}}$ es una variedad tórica.

Sólo resta calcular el látice de caracteres $M(T)$ de T. Como $T = \Phi_{\mathscr{A}}(T_N)$, el morfismo $\Phi_{\mathscr{A}}$ da lugar al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T_N \arrow[r, "\Phi_{\mathscr{A}}"] \arrow[dr] & (\mathbb{C}^*)^s \\
& T \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

el cual induce el siguiente diagrama en los látices de caracteres

$$\begin{tikzcd}
M & \mathbb{Z}^s \arrow[l, "\widehat{\Phi}_{\mathscr{A}}"'] \arrow[d] \\
& M(T) \arrow[ul, hook]
\end{tikzcd} \quad ,$$

donde el homomorfismo de $\mathbb{Z}^s$ a $M(T)$ es sobreyectivo (coro 22.5.4 [14]). Como

$$\widehat{\Phi}_{\mathscr{A}} : \mathbb{Z}^s \to M$$

envía la base estándar $e_1, ..., e_s$ en $m_1, ..., m_s$ se sigue que la imagen de $\widehat{\Phi}_{\mathscr{A}}$ es $\mathbb{Z}\mathscr{A}$. De la conmutatividad del diagrama se tiene el isomorfismo $M(T) \cong \mathbb{Z}\mathscr{A}$. $\square$

Otra manera equivalente de construir variedades tóricas afines es mediante semigrupos afines:

Definición 1.2.10. Un **semigrupo afín** es un conjunto S junto con una operación binaria asociativa y un elemento neutro, que satisface las siguientes propiedades:

(i) La operación binaria en S es conmutativa. Escribiremos la operación como $+$ y el elemento neutro como 0. Así, un conjunto finito $\mathscr{A} \subseteq S$ induce el conjunto

$$\mathbb{Z}_{\geq 0}\mathscr{A} := \left\{ \sum_{m \in \mathscr{A}} a_m m \mid a_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\} \subseteq S.$$

(ii) S es finitamente generado, es decir, existe un conjunto finito $\mathscr{A} \subseteq S$ tal que $\mathbb{Z}_{\geq 0}\mathscr{A} = S$.

(iii) S se puede encajar en algún látice M.

Dado un semigrupo afín S, se define el álgebra $\mathbb{C}[S]$ como el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con base los elementos de S, y donde la multiplicación es inducida por la estructura de semigrupo de S. De manera concreta, si pensamos en M como el látice de caracteres de un toro T_N entonces

$$\mathbb{C}[S] = \left\{ \sum_{m \in S} c_m \chi^m : c_m \in \mathbb{C}, c_m = 0 \text{ para todos salvo una cantidad finita de } m\text{´s} \right\},$$

y la multiplicación inducida es

$$\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}.$$

Obsérvese que si $S = \mathbb{Z}_{\geq 0}\mathscr{A}$ para $\mathscr{A} = \{m_1, ..., m_s\}$, entonces $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, ..., \chi^{m_s}]$.

Ejemplo 1.2.11. Si $e_1, ..., e_n$ es base de un látice M, entonces como semigrupo afín M es generado por $\mathscr{A} = \{\pm e_1, ..., \pm e_n\}$. Tomando $t_i = \chi^{e_i}$ se tiene el anillo de polinomios

$$\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}].$$

Nótese que $\mathbb{C}[M]$ es el anillo coordenado del toro T_N.

Proposición 1.2.12. *Sea $S \subseteq M$ un semigrupo afín.*

(a) $\mathbb{C}[S]$ es un dominio entero y es una $\mathbb{C}$-álgebra finitamente generada.

(b) Spec$(\mathbb{C}[S])$ es una variedad tórica afín cuyo toro tiene látice de caracteres $\mathbb{Z}S$, y si $S = \mathbb{Z}_{\geq 0}\mathscr{A}$ para algún conjunto finito $\mathscr{A} \subseteq M$, entonces Spec$(\mathbb{C}[S]) = X^{\mathscr{A}}$.

Demostración. (prop. 1.1.4 de [5]) Como ya vimos, $S = \mathbb{Z}_{\geq 0}\mathscr{A}$ para $\mathscr{A} = \{m_1, ..., m_s\} \subseteq S$ implica que $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, ..., \chi^{m_s}]$, por lo que $\mathbb{C}[S]$ es una $\mathbb{C}$-álgebra finitamente generada. Además, es claro que $\mathbb{C}[S] \subseteq \mathbb{C}[M]$, y por el ejemplo 1.2.11, se sigue que $\mathbb{C}[S]$ es un dominio entero.

Para (b), pensemos en M como el látice de caracteres de un toro T_N. En particular $\mathscr{A} = \{m_1, ..., m_s\} \subseteq M$, de manera que es posible definir el morfismo

$$\Phi_{\mathscr{A}} : T_N \to \mathbb{C}^s$$

dado por $t \mapsto (\chi^{m_1}(t), ..., \chi^{m_s}(t))$. Entonces se induce un homomorfismo en los anillos coordenados

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathscr{A}}^* : \mathbb{C}[x_1, ..., x_s] &\to \mathbb{C}[M] \\ x_i &\mapsto \chi^{m_i}, \end{aligned}$$

que es además un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras. Se puede probar que Ker $\Phi_{\mathscr{A}}^* = \mathbf{I}(X^{\mathscr{A}})$. Obsérvese que Im $\Phi_{\mathscr{A}}^* = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, ..., \chi^{m_s}] = \mathbb{C}[S]$, de manera que el anillo coordenado de la variedad tórica $X^{\mathscr{A}}$ es

$$\mathbb{C}[X^{\mathscr{A}}] = \mathbb{C}[x_1, ..., x_s]/\mathbf{I}(X^{\mathscr{A}}) = \mathbb{C}[x_1, ..., x_s]/\text{Ker } \Phi_{\mathscr{A}}^* \cong \text{Im } \Phi_{\mathscr{A}}^* = \mathbb{C}[S].$$

Por tanto, $X^{\mathscr{A}} = \text{Spec}(\mathbb{C}[X^{\mathscr{A}}]) = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$. Ésto prueba que Spec$(\mathbb{C}[S])$ es una variedad tórica afín

Finalmente, como S es generado por $\mathscr{A}$ como semigrupo, entonces el sublátice $\mathbb{Z}S$ de M generado por S es igual al sublátice $\mathbb{Z}\mathscr{A}$ generado por $\mathscr{A}$. En consecuencia, el toro de $X^{\mathscr{A}} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ tiene látice de caracteres $\mathbb{Z}S$. □

El resultado anterior muestra que cualquier semigrupo afín da lugar a una variedad tórica afín, lo destacable es que todas las variedades tóricas afines surgen de esta manera.

Teorema 1.2.13. *Sea V una variedad afín. Entonces V es una variedad tórica si y sólo si $V =$ Spec$(\mathbb{C}[S])$ para algún semigrupo afín S.*

La idea central de la prueba es que si T_N es el toro de la variedad tórica afín V, entonces el subconjunto de caracteres de T_N que se pueden extender a funciones polinomiales en V, forman un semigrupo afín finitamente generado, cuya álgebra generada por éstos es el anillo coordenado de V, es decir, si $S = \{m \in M : \chi^m \in \mathbb{C}[V]\}$ entonces $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[V]$. Los detalles en [5], teo 1.1.17. □

1.3. Variedades tóricas normales

Las variedades tóricas de interés para nosotros son aquellas que tienen la propiedad de ser normales. En el caso de las afines, todas ellas se obtienen a partir de *conos*, que a su vez dan lugar a semigrupos afines en algún látice. El caso general, a partir de *abanicos*, que son colecciones de conos que satisfacen ciertas propiedades. En la siguiente sección describiremos estos dos conceptos. Las demostraciones para los resultados en esta sección se encuentran en el apéndice de [13].

1.3.1. Conos y abanicos

Para un látice arbitrario N de rango n (i.e., $N \cong \mathbb{Z}^n$) y $M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ su látice dual, se tiene un mapeo canónico $\mathbb{Z}$-bilineal

$$\langle\ ,\ \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}.$$

Mediante la extensión de los escalares al campo $\mathbb{R}$ de los números reales, se obtienen espacios vectoriales reales n-dimensionales $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ y $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ con emparejamiento $\mathbb{R}$-bilineal $\langle\ ,\ \rangle : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$.

Definición 1.3.1. Un subconjunto σ de $N_{\mathbb{R}}$ es llamado **cono poliédrico y racional** si existe un número finito de elementos $u_1, ..., u_s$ de N tales que

$$\begin{aligned}\sigma &= \mathbb{R}_{\geq 0}u_1 + ... + \mathbb{R}_{\geq 0}u_s \\ &:= \{a_1u_1 + ... + a_su_s \mid a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}.\end{aligned}$$

Si además satisface $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$, diremos que σ es **fuertemente convexo**, donde $-\sigma := \{-u : u \in \sigma\}$.

La condición de convexidad fuerte $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ significa que σ no contiene subespacios de $N_{\mathbb{R}}$ no nulos. Mientras que la condición de ser racional quiere decir que σ es generado por elementos en el látice N.

Definición 1.3.2. Dado un cono poliédrico y racional σ, se define su **dimensión** $\dim \sigma$, como la dimensión del subespacio $\mathbb{R}\sigma = \sigma + (-\sigma)$ de $N_{\mathbb{R}}$ generado por σ. Se define además su **cono dual** en $M_{\mathbb{R}}$ como

$$\sigma^{\vee} := \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle m, u\rangle \geq 0 \text{ para todo } u \in \sigma\}.$$

Dicho dual resulta ser un cono poliédrico y racional (no necesariamente fuertemente convexo aún cuando σ lo sea). Además satisface $(\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$, por ello el nombre de cono dual. Si σ es fuertemente convexo, entonces $\sigma^{\vee} + (-\sigma^{\vee}) = M_{\mathbb{R}}$, de manera que $\dim \sigma^{\vee} = n$.

Definición 1.3.3. Un subconjunto τ de σ, es una **cara** de σ, denotado $\tau \preceq \sigma$, si éste es de la forma $\tau = \sigma \cap m^{\perp}$ para algún $m \in \sigma^{\vee}$, donde

$$m^{\perp} = \{u \in N_{\mathbb{R}} : \langle m, u\rangle = 0\}$$

es el hiperplano determinado por m.

En particular, tomando $m = 0 \in M_{\mathbb{R}}$ se tiene que σ es una cara de sí mismo. El siguiente lema es una herramienta que será muy útil en el capítulo 3.

Lema 1.3.4. *Sea τ una cara de un cono poliédrico y racional σ. Si $v, w \in \sigma$ y $v + w \in \tau$, entonces $v, w \in \tau$.* □

La relación entre caras de σ y $\sigma^\vee$ es la siguiente.

Proposición 1.3.5. *Sea σ un cono poliédrico y racional en $N_{\mathbb{R}}$ y $\tau \preceq \sigma$. Definimos*

$$\tau^\perp := \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u\rangle = 0 \text{ para todo } u \in \tau\}.$$

Sea $\tau^* := \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ entonces

(i) *τ^* es cara de $\sigma^\vee$.*

(ii) *La función $\tau \mapsto \tau^*$ es una correspondencia biyectiva que invierte las inclusiones entre caras de σ y las caras de $\sigma^\vee$.*

(iii) *$dim\ \tau^* + dim\ \tau = n$.*

□

De (iii) obtenemos que si σ es un cono poliédrico, racional y además fuertemente convexo, entonces la cara "más pequeña" de éste es de dimensión cero, es decir, el cono 0 en $N_{\mathbb{R}}$ (el cono generado por el elemento $0 \in N_{\mathbb{R}}$) es cara de σ.

Por otro lado, las caras de un cono poliédrico, racional y fuertemente convexo σ satisfacen las siguientes propiedades:

(a) Cada cara de σ es un cono poliédrico, racional y fuertemente convexo.

(b) La intersección de cualesquiera dos caras de σ es nuevamente una cara de σ.

(c) Las caras de cualquier cara de σ son también caras de σ.

Definición 1.3.6. Un **abanico** en $N_{\mathbb{R}}$, es una colección $\mathcal{F}$ de conos poliédricos, racionales y fuertemente convexos en $N_{\mathbb{R}}$ tales que

(a) Para todo $\sigma \in \mathcal{F}$, cada cara de σ pertenece a $\mathcal{F}$.

(b) Para cualesquiera $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{F}$, la intersección $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara de cada uno, y por tanto un elemento de $\mathcal{F}$.

Más aún, diremos que un abanico $\mathcal{F}$ es **completo** si $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{F}} \sigma = N_{\mathbb{R}}$.

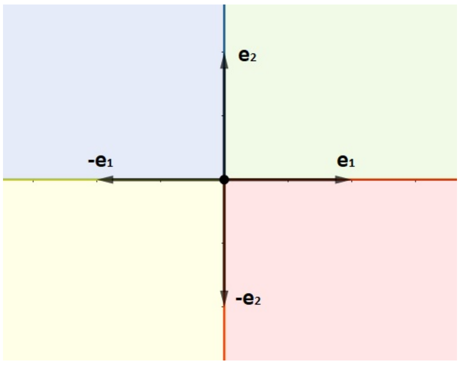
Ejemplo 1.3.7.

1. Cualquier cono poliédrico, racional y fuertemente convexo $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ junto con todas sus caras forman un abanico en $N_{\mathbb{R}}$.

2. En $\mathbb{R}$, los conos $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot 1$, $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-1)$ junto con su intersección (el origen) forman un abanico.

3. En $\mathbb{R}^2$, el abanico obtenido a partir de los conos generado por los vectores $(1,0), (0,1)$ y $(-1,-1)$.

4. En En $\mathbb{R}^2$, el abanico obtenido a partir de los conos generados por los vectores $(1,0),(0,1),(-1,0)$ y $(0,-1)$.



1.3.2. Construcción de variedades tóricas normales

Lo que resta de este capítulo se especificará la referencia precisa de cada uno de los resultados sin demostración. Describiremos cómo se construye una variedad tórica normal a partir de un abanico.

Dado un cono poliédrico y racional $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$, se define el semigrupo

$$S^{\sigma} := \sigma^{\vee} \cap M = \{m \in M : \langle m, u\rangle \geq 0 \text{ para todo } u \in \sigma\} \subseteq M.$$

De hecho este semigrupo es finitamente generado, resultado conocido como el lema de Gordan (prop. 1.2.17 [5]). De esta manera S^{σ} es un semigrupo afín y, en consecuencia $X^{\sigma} := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S^{\sigma}])$ es una variedad tórica afín (proposición 1.2.12). Si además, σ es fuertemente convexo tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3.8. *Sea $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ un cono poliédrico, racional y fuertemente convexo con semigrupo afín $S^{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$. Entonces*

$$X^{\sigma} := \mathit{Spec}(\mathbb{C}[S^{\sigma}]) = \mathit{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap M])$$

es una variedad tórica afín normal con toro $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$, por tanto dim X^{σ} = dim $N_{\mathbb{R}}$. Más aún, cualquier variedad tórica afín normal se obtiene de esta manera.

Para la demostración ver [5], teorema 1.2.18 y teorema 1.3.5. □

Ejemplo 1.3.9. Consideremos el cono $\sigma = 0$ en $N_{\mathbb{R}}$. Obsérvese que su cono dual $\sigma^{\vee} = M_{\mathbb{R}}$ y por tanto

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S^{\sigma}]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap M]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M]) = T_N.$$

Los que sigue es ver que dado un látice y un abanico en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial asociado a éste, las variedades tóricas afines normales correspondientes a los conos que lo constituyen, cumplen con los requerimientos necesarios para construir una variedad tórica normal.

Proposición 1.3.10. *Sea σ un cono poliédrico y racional en $N_{\mathbb{R}}$ y sea $m \in S^{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$. Entonces $\tau = \sigma \cap m^{\perp}$ es un cono poliédrico y racional. Todas las caras de σ son de esta forma y*

$$S^{\tau} = S^{\sigma} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-m).$$

Por tanto, $\mathbb{C}[S^{\tau}] = \mathbb{C}[S^{\sigma}]_{\chi^m}$.

Para la demostración ver [6], proposición 2, cap. 1, sec. 1.2. □

Teorema 1.3.11. *Sea $\mathcal{F}$ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$. Entonces la colección de variedades tóricas afines y normales $X^{\sigma} = \mathit{Spec}(\mathbb{C}[S^{\sigma}])$, $\sigma \in \mathcal{F}$, dan lugar a una variedad tórica normal $X^{\mathcal{F}}$.*

Demostración. Consideremos la colección de variedades tóricas afines

$$\{X^{\sigma}\}_{\sigma \in \mathcal{F}} = \{\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S^{\sigma}])\}_{\sigma \in \mathcal{F}}.$$

Sean σ_1 y σ_2 cualesquiera dos conos en $\mathcal{F}$ y $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$. El lema de separación 1.2.13 en [5] implica que es posible encontrar $m \in \sigma_1^{\vee} \cap (-\sigma_2^{\vee}) \cap M$ tal que $\tau = \sigma_1 \cap m^{\perp} = \sigma_2 \cap m^{\perp}$. Por la proposición 1.3.10, $X^{\tau} = (X^{\sigma_1})_{\chi^m} = (X^{\sigma_2})_{\chi^{-m}}$. Así,

$$X^{\sigma_1} \supseteq (X^{\sigma_1})_{\chi^m} = X^{\tau} = (X^{\sigma_2})_{\chi^{-m}} \subseteq X^{\sigma_2}. \tag{1.2}$$

De esta manera, se tiene un isomorfismo

$$g_{\sigma_2,\sigma_1} : (X^{\sigma_1})_{\chi^m} \to (X^{\sigma_2})_{\chi^{-m}} \tag{1.3}$$

que es simplemente la identidad en X^τ. Estos ismorfismos satisfacen las condiciones de pegado de las variedades afines X^σ a lo largo de las subvariedades $(X^\sigma)_{\chi^m}$ en la definición de variedad algebraica, y por tanto obtenemos una variedad $X^\mathcal{F}$ asociada al abanico $\mathcal{F}$.
Ahora, como cada cono en $\mathcal{F}$ es en particular fuertemente convexo, se tiene que $\{0\} \subseteq N$ es cara de todo $\sigma \in \mathcal{F}$. Así,

$$T_N = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M]) \subseteq X^\sigma$$

para todo σ. Estos toros se identifican mediante el pegado, de manera que $T_N \subseteq X^\mathcal{F}$. Además, el toro T_N actúa en cada X^σ, y como los isomorfismos de pegado g_{σ_2,σ_1} son la identidad en las intersecciones, la acción está bien definida en éstas. Por tanto se tiene una acción algebraica de T_N en $X^\mathcal{F}$.
La variedad $X^\mathcal{F}$ es irreducible ya que cada pieza afín X^σ lo es. Más aún, por el teorema 1.3.8 y la proposición 1.1.27, $X^\mathcal{F}$ es normal. □

Observación 1.3.12. Dado un abanico $\mathcal{F}$ en $N_\mathbb{R}$, la variedad tórica $X^\mathcal{F}$ tiene dos propiedades que resultan ser muy convenientes al vizualizarla con la topología usual:

(a) La imagen de la diagonal $\Delta : X^\mathcal{F} \to X^\mathcal{F} \times X^\mathcal{F}$ es cerrada en $X^\mathcal{F} \times X^\mathcal{F}$ en la topología de Zariski (teo. 3.1.5 [5]). En general, a cualquier variedad que satisfaga esta propiedad se le denomina **separada**.

(b) $X^\mathcal{F}$ es compacta en la topología usual si y sólo si $\mathcal{F}$ es completo (teo. 3.1.19 [5]).

Teorema 1.3.13. *Una variedad es separada si y sólo si es Hausdorff en la topología usual.* □

El gran resultado, consecuencia del teorema de Sumihiro (teo. 3.1.7 [5]) es el siguiente.

Teorema 1.3.14. *Sea X una variedad tórica separada con toro T_N. Entonces existe un abanico $\mathcal{F}$ en $N_\mathbb{R}$ tal que $X \cong X^\mathcal{F}$.* □

Los siguientes dos resultados nos dan una descripción alternativa de una variedad tórica, la cual será de gran utilidad en el capítulo 3 para definir su completación proalgebraica.

Proposición 1.3.15. *Sea $V = Spec(\mathbb{C}[S])$ la variedad tórica afín asociada al semingrupo afín $S \subseteq M$. Hay una correspondencia biyectiva entre los puntos $p \in V$ (ideales maximales de $\mathbb{C}[S]$) y los homomorfismos de semigrupos $(S,+) \to (\mathbb{C},\cdot)$. Más aún, mediante esta biyección, el toro T de V se corresponde con el subconjunto de homomorfismos de semigrupos $S \to \mathbb{C}^*$.*

Demostración. En la primera parte sólo daremos la correspondencia y su inversa, para los detalles ver teorema 1.3.1 [5]).
Definimos la función

$$V \to \mathrm{Hom}_{sg}(S,\mathbb{C}) \quad , \quad p \mapsto (m \mapsto \chi^m(p) \in \mathbb{C}).$$

Esto tiene sentido ya que $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[V]$. Yendo en la otra dirección, supongamos que el conjunto $\mathscr{A} = \{m_1, ..., m_s\}$ genera al semigrupo S. Definimos entonces

$$\mathrm{Hom}_{sg}(S,\mathbb{C}) \to V = X^\mathscr{A} \subseteq \mathbb{C}^s \quad , \quad \gamma \mapsto (\gamma(m_1), ..., \gamma(m_s)).$$

Se puede probar que efectivamente $(\gamma(m_1), ..., \gamma(m_s))$ es un punto en $X^{\mathscr{A}}$ y que ambas definiciones son inversas la una de la otra.

Para la segunda afirmación, recordemos de la proposición 1.2.9 que el toro T de $V = X^{\mathscr{A}}$ tiene látice de caracteres $\mathbb{Z}\mathscr{A} \supseteq S = \mathbb{Z}_{\geq 0}\mathscr{A}$. Además, por la observación 1.2.6 tenemos

$$T \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\mathscr{A}, \mathbb{C}^*)$$

y un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{sg}(S, \mathbb{C}^*) & \\ T \arrow[u] \arrow[r, "\cong", "t\mapsto(m\mapsto\chi^m(p))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\mathscr{A}, \mathbb{C}^*) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, es suficiente probar que la correspondencia

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\mathscr{A}, \mathbb{C}^*) \to \mathrm{Hom}_{sg}(S, \mathbb{C}^*)$$

$$\gamma \mapsto \gamma|_S$$

determina un isomorfismo de grupos.
Como $\mathscr{A} = \{m_1, ..., m_s\}$ genera al semigrupo S, el conjunto

$$\{m_1, -m_1, ..., m_s, -m_s\}$$

genera a $\mathbb{Z}\mathscr{A}$ como semigrupo. Así, si $\gamma : \mathbb{Z}\mathscr{A} \to \mathbb{C}^*$ es tal que $\gamma(m_i) = 1$ para todo $i = 1, ..., s$, entonces, $\gamma(-m_i) = (\gamma(m_i))^{-1} = 1$ para todo $i = 1, ..., s$ y por tanto $\gamma \equiv 1$. Luego, para cualquier $\gamma : S \to \mathbb{C}^*$ homomorfismo de semigrupos, podemos extender a un homomorfismo $\tilde{\gamma} : \mathbb{Z}\mathscr{A} \to \mathbb{C}^*$ definiendo $\tilde{\gamma}(-m_i) := (\gamma(m_i))^{-1}$ para todo i y se tiene el resultado. $\square$

Observación 1.3.16. Dado un cono poliédrico, racional y fuertemente convexo $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$, la acción de $t \in T_N$ en $\gamma \in \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}) = X^\sigma$, se corresponde con el homomorfismo de semigrupos

$$t \cdot \gamma : S^\sigma \to \mathbb{C}$$

dado por $(t\cdot\gamma)(m) = \chi^m(t)\gamma(m)$. Más aún, como toro $T_N \subseteq X^\sigma$ se identifica con el subconjunto $\mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}^*) \subseteq \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}) \simeq X^\sigma$, la acción de $\mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}^*)$ en $\mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C})$ es simplemente la multiplicación usual de funciones.

Sea $\mathcal{F}$ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$. Para cualesquiera $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{F}$ y $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ se tiene que $S^{\sigma_1}, S^{\sigma_2} \subseteq S^\tau$ y por tanto homomorfismos inyectivos (consecuencia proposición 1.3.10)

$$\mathrm{Hom}_{sg}(S^{\sigma_1}, \mathbb{C}) \hookleftarrow \mathrm{Hom}_{sg}(S^\tau, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{sg}(S^{\sigma_2}, \mathbb{C})$$

dados por la restricción, los cuales se corresponden con los morfismos inyectivos en (1.3.2). Consideremos entonces la unión ajena

$$\bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{F}} \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C})$$

y en ésta la siguiente relación: $(\gamma_1 : S^{\sigma_1} \to \mathbb{C}) \sim (\gamma_2 : S^{\sigma_2} \to \mathbb{C})$ si y sólo si existe $\tau \preceq \sigma_1 \cap \sigma_2$ y un homomorfismo de semigrupos $\gamma : S^{\tau} \to \mathbb{C}$, tal que $\gamma|_{S^{\sigma_1}} = \gamma_1$ y $\gamma|_{S^{\sigma_2}} = \gamma_2$.

Dicha relación es de equivalencia ya que viene inducida por los isomorfismos g_{σ_2,σ_1} en (1.3) y resulta claro el siguiente resultado.

Proposición 1.3.17. *Sea un abanico $\mathcal{F}$ en $N_{\mathbb{R}}$. Entonces se tiene una biyección*

$$X^{\mathcal{F}} \simeq \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{F}} Hom_{sg}(S^{\sigma}, \mathbb{C}) / \sim .$$

Observemos que la proposición anterior nos da una definición alternativa de una variedad tórica asociada a un abanico $\mathcal{F}$ como variedad. Podemos también dotarla con la acción del toro, como describimos a continuación.

Dado un abanico $\mathcal{F}$ en $N_{\mathbb{R}}$, en la segunda parte de la prueba de la Proposición 1.3.15, se mostró que cualquier homomorfismo de semigrupos $S^{\sigma} \to \mathbb{C}^*$ se puede extender de manera única a un homomorfismo de grupos $\tilde{\gamma} : M \to \mathbb{C}^*$ para todo $\sigma \in \mathcal{F}$. Así, el toro

$$\bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{F}} \mathrm{Hom}_{sg}(S^{\sigma}, \mathbb{C}^*) / \sim$$

de $X^{\mathcal{F}}$ es precisamente el toro $T_N = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*)$ y tenemos la acción

$$T_N \times X^{\mathcal{F}} \to X^{\mathcal{F}} \text{ dada por } \tilde{\gamma} \cdot [\gamma] = [\tilde{\gamma}|_{S^{\sigma}} \cdot \gamma], \tag{1.4}$$

con $\gamma : S^{\sigma} \to \mathbb{C}$.

Ejemplo 1.3.18. Consideremos el abanico $\mathcal{F}$ en $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ del ejemplo 1.3.7(2), es decir,

$$\mathcal{F} = \{\sigma_0 = \{0\}, \sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot 1, \sigma_2 = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-1)\} \subset \mathbb{R}.$$

De esta manera $S^{\sigma_0} = \mathbb{Z}$, $S^{\sigma_1} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $S^{\sigma_2} = \mathbb{Z}_{\leq 0}$ y

$$\mathrm{Hom}_{sg}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*,$$

$$\mathrm{Hom}_{sg}(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C},$$
$$\mathrm{Hom}_{sg}(\mathbb{Z}_{\leq 0}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}.$$

Dado que los únicos puntos que se relacionan en el pegado son aquellos que yacen en los toros $\mathbb{C}^*$, tenemos que

$$X^{\mathcal{F}} = \mathbb{C}^* \cup \{p\} \cup \{q\} = \mathbb{C} \cup \{p\} \cong \mathbb{P}^1.$$

De manera similar, $\mathbb{P}^2$ y $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ son las variedades asociadas a los abanicos del ejemplo 1.3.7 (3) y (4) respectivamente.

Más generalmente, si $\{e_1, ..., e_n\}$ es la base canónica para $N = \mathbb{Z}^n$ y $e_0 := -e_1 - ... - e_n$, entonces la variedad tórica asociada al abanico en $\mathbb{R}^n$ que consiste de los conos generados por cualquier subconjunto propio de $\{e_0, e_1, ..., e_n\}$ es precisamente $\mathbb{P}^n$ (sección 1.4 de [6]).

Capítulo 2

El solenoide algebraico

En la primer sección de este capítulo presentamos las definiciones de *sistemas* y *límite proyectivos* en categorías en general. Para un estudio más detallado sobre éstos, ver [12]. Estos nos servirán para dar definir el soleonoide algebraico, el cual será de utilidad en el resto del trabajo. Posteriormente, en la segunda sección del capítulo estudiaremos el concepto de laminación y probaremos que el solenoide algebraico tiene una estructura natural de laminación.

2.1. Definición y propiedades básicas

Para dar la definición del solenoida algebraico necesitamos la noción de límite proyectivo, para el cual a su vez necesitamos las siguientes:

Definición 2.1.1. Un conjunto parcialmente ordenado $(I, \preceq)$ es un **conjunto dirigido** si para cualesquiera $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \preceq k$ y $j \preceq k$.

Definición 2.1.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un **sistema proyectivo** en la categoría $\mathcal{C}$ consiste en:

- Un conjunto dirigido $(I, \preceq)$ llamado **conjunto de índices**,
- Para cada $i \in I$, un objeto $X_i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,
- Para cada $i \preceq j$, un morfismo $f_{i,j} : X_j \to X_i$ tal que $f_{i,i} = 1_{X_i}$ para todo $i \in I$ y $f_{i,k} = f_{i,j} \circ f_{j,k}$ siempre que $i \preceq j$ y $j \preceq k$

Denotamos un sistema proyectivo como $\{X_i, f_{i,j}, I\}_{i \preceq j}$, o simplemente $\{X_i, f_{i,j}\}_{i \preceq j}$ cuando es claro cual es el conjunto de índices. Los objetos X_i son llamados **términos** y los morfismos $f_{i,j}$ **morfismos de conexión**.

Definición 2.1.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\{X_i, f_{i,j}, I\}_{i \preceq j}$ un sistema proyectivo en $\mathcal{C}$. El límite del sistema proyectivo, llamado **límite proyectivo**, es un objeto $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ junto con una colección de morfismos

$$\{p_i : X \to X_i \mid i \in I\}$$

en $\mathcal{C}$ que conmutan con los morfismos de conexión, y que además satisfacen la siguiente propiedad universal: Para cualquier otro objeto $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y colección de morfismos

$$\{q_i : Y \to X_i \mid i \in I\}$$

en $\mathcal{C}$ que conmutan con los morfismos de conexión, existe un único morfismo

$$f : Y \to X$$

tal que $p_i \circ f = q_i$ para todo $i \in I$. El siguiente diagrama ilustra esta definición.

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddl, bend right, "q_j"'] \arrow[ddr, bend left, "q_i"] & \\
 & X \arrow[dl, "p_j"'] \arrow[dr, "p_i"] & \\
X_j \arrow[rr, "f_{i,j}"] & & X_i
\end{tikzcd}$$

Denotamos el límite proyectivo del sistema $\{X_i, f_{i,j}, I\}_{i \preceq j}$ como $\varprojlim_{f_{i,j}} X_i$.

Observación 2.1.4. Si el límite proyectivo de un sistema proyectivo existe, éste es único salvo isomorfismos (§5.1, coro. 1, [12]).

El límite proyectivo de cualquier sistema proyectivo existe en las siguientes categorías: Conjuntos, grupos, grupos abelianos, anillos, espacios topológicos. Más aún, en cada uno de estos casos está dado por

$$\varprojlim_{f_{i,j}} X_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \mid f_{i,j}(x_j) = x_i \text{ para todo } i \preceq j \right\}.$$

Ejemplo 2.1.5. La colección de grupos finitos $\{\mathbb{Z}/j\mathbb{Z}\}_{j \in \mathbb{N}}$ junto con los homomorfismos naturales $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ siempre que n divida a m, forman un sistema proyectivo cuyo límite es **la completación profinita de los enteros**, denotado

$$\widehat{\mathbb{Z}} := \left\{ (\overline{a_j})_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/j\mathbb{Z} \mid a_m \equiv a_n (\text{mód } n) \text{ siempre que } n|m \right\}.$$

Ejemplo 2.1.6. Sea p un número primo. Similar al ejemplo anterior, la colección de anillos finitos $\{\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}\}_{i \in \mathbb{N}}$ junto con los homomorfismos naturales $\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, forman un sistema proyectivo cuyo límite, denotado $\mathbb{Z}_p$, es **el anillo de los enteros p-ádicos**.

El ejemplo fundamental que trabajaremos es el siguiente. Primeramente observemos que $\mathbb{N}$ tiene un orden parcial dado por la relación de divisibilidad. Luego, para cada pareja $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $n|m$ (n divide a m) se define el mapeo cubriente

$$p_{n,m} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^{m/n}.$$

Esto determina un sistema proyectivo de espacios cubrientes $\{\mathbb{C}^*, p_{n,m}\}_{n|m}$ cuyo límite proyectivo es el **solenoide algebraico**

$$\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} := \left\{ (z_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{C}^* \mid z_m^{m/n} = z_n \text{ siempre que } n|m \right\},$$

el cual es un grupo abeliano topológico con la multiplicación componente a componente y la topología que definen las proyecciones canónicas

$$\pi_n : \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}^*,$$

dadas por $\pi_n((z_j)_{j\in\mathbb{N}}) = z_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (veremos en la proposición 2.1.9 que éstas son sobreyectivas). Para ser más precisos en esto último, si

$$\mathcal{C}_n := \{\pi_n^{-1}(U) \mid U \text{ es abierto de } \mathbb{C}^*\},$$

entonces la colección

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$$

es una subbase para una topología en el solenoide algebraico, ésto quiere decir que los abiertos en $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ son uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{C}$. Dicha topología tiene la propiedad de ser la más gruesa (con la "menor cantidad" de abiertos), para la cual las proyecciones canónicas son continuas.

Observación 2.1.7. En lo anterior, consideramos a $\mathbb{C}^*$ con la topología usual de $\mathbb{C}$. De manera completamente análoga, en el ejemplo 2.1.5, la completación profinita de los enteros $\widehat{\mathbb{Z}}$ es un grupo abeliano topológico, donde cada término $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ está dotado de la topología discreta. Con esta topología, la completación $\widehat{\mathbb{Z}}$ admite una inclusión natural de los enteros $\mathbb{Z}$ cuya imagen es densa [15]. Frecuentemente escribiremos $\mathbb{Z} \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$ pensando en la imagen de los enteros bajo dicha inclusión .

A continuación vamos a estudiar algunas propiedades del solenoide algebraico para posteriormente generalizarlas a variedades tóricas normales en el siguiente capítulo.

Nótese que cada punto en $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ es una sucesión de la forma $(r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}}$, cuyos elementos satisfacen $(r_m e^{i\theta_m})^{m/n} = r_n e^{i\theta_n}$ siempre que $n|m$. Con esta descripción es posible definir para cada $k \in \mathbb{N}$, una acción de $\widehat{\mathbb{Z}}$ en $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ de la siguiente manera:

$$(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \cdot (r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} := \left(r_j e^{i\left(\theta_j + \frac{2\pi k a_j}{j}\right)} \right)_{j\in\mathbb{N}}, \tag{2.1}$$

donde $\overline{a_j} \in \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.
Vamos a verificar primero que el valor de la acción no depende de la elección de los representantes a_j´s. Si para cada $j \in \mathbb{N}$, $\overline{a_j} = \overline{b_j}$ entonces existe un entero r tal que $a_j = b_j + jr$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} r_j e^{i\left(\theta_j + \frac{2\pi k a_j}{j}\right)} &= r_j e^{i\left(\theta_j + \frac{2\pi k (b_j + jr)}{j}\right)} \\ &= r_j e^{i\left(\theta_j + \frac{2\pi k b_j}{j}\right) + i2\pi k r} \\ &= r_j e^{i\left(\theta_j + \frac{2\pi k b_j}{j}\right)}, \end{aligned}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.
Ahora probaremos que $(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \cdot (r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$. En efecto, si $n|m$ entonces

$$a_m \equiv a_n \pmod{n}$$

(i.e., $a_m = a_n + nl$ para algún entero l), y

$$\begin{aligned} p_{n,m}\left(r_m e^{i\left(\theta_m + \frac{2\pi k a_m}{m}\right)}\right) &= \left(r_m e^{i\left(\theta_m + \frac{2\pi k a_m}{m}\right)}\right)^{m/n} \\ &= r_n e^{i\theta_n} e^{i\left(\frac{2\pi k(a_n+nl)}{n}\right)} \\ &= r_n e^{i\left(\theta_n + \frac{2\pi k a_n}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Proposición 2.1.8. *La acción (2.1) es continua.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Probaremos que para cada $n \in \mathbb{N}$ la acción

$$\cdot_n : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \qquad (\overline{a}, re^{i\theta}) \mapsto re^{i\left(\theta + \frac{2\pi k a}{n}\right)}$$

es continua. En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ y $U \subset \mathbb{C}^*$ un abierto. Para cada $a \in \{0, ..., n-1\}$, definimos el abierto

$$U_n^{(a)} := \left\{ re^{i\theta} \in \mathbb{C}^* \mid re^{i\left(\theta + \frac{2\pi k a}{n}\right)} \in U \right\} \subseteq \mathbb{C}^*.$$

Entonces

$$\cdot_n^{-1}(U) = \left\{ (\overline{a}, re^{i\theta}) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^* \mid re^{i\left(\theta + \frac{2\pi k a}{n}\right)} \in U \right\} = \bigcup_{a=0}^{n} (\{\overline{a}\} \times U_n^{(a)}),$$

que claramente es abierto.
Ahora consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\rho_n \times \pi_n"'] & \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "\pi_n"] \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^* \arrow[r, "\cdot_n"'] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

donde $\rho_n : \widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ denota la proyección canónica. Si U es cualquier abierto en $\mathbb{C}^*$, se sigue que la imagen inversa del subbásico $\pi_n^{-1}(U)$ bajo la acción $\cdot$ en (2.1) es precisamente el abierto $(\rho_n \times \pi_n)^{-1}(\cdot_n^{-1}(U))$ en $\widehat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$, y se sigue el resultado. □

Proposición 2.1.9. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces la proyección $\pi_k : \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}^*$ es un epimorfismo de grupos. Más aún, la acción (2.1) para dicho k, respeta las fibras de π_k, i.e., que para cada punto $z \in \mathbb{C}^*$, si $(r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \pi_k^{-1}(z)$, entonces*

$$(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \cdot (r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} = \left(r_j e^{i\left(\theta_j + \frac{2\pi k a_j}{j}\right)} \right)_{j\in\mathbb{N}} \in \pi_k^{-1}(z)$$

para todo $(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \widehat{\mathbb{Z}}$.

Demostración. Si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ entonces definimos la sucesión $\left(r^{k/j} e^{ik\theta/j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ que claramente es un elemento del solenoide algebraico y $\pi_k((r^{k/j} e^{ik\theta/j})_{j\in\mathbb{N}}) = z$.
Para la segunda afirmación, sea $(r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \pi_k^{-1}(z)$. Entonces para cualquier $(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \widehat{\mathbb{Z}}$

$$\pi_k\left((\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \cdot (r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}}\right) = \pi_k\left(\left(r_j e^{i\left(\theta_j + \frac{2\pi k a_j}{j}\right)}\right)_{j\in\mathbb{N}}\right) = r_k e^{i\left(\theta_k + \frac{2\pi k a_k}{k}\right)} = r_k e^{i\theta_k} = z.$$

□

El caso de mayor interés para este trabajo es cuando $k = 1$ que, por la proposición anterior para cada $z \in \mathbb{C}^*$, se tiene una acción continua

$$\widehat{\mathbb{Z}} \times \pi_1^{-1}(z) \to \pi_1^{-1}(z) \text{ dada por } (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \cdot (r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} = \left(r_j e^{i\left(\theta_j + \frac{2\pi a_j}{j}\right)} \right)_{j\in\mathbb{N}}, \tag{2.2}$$

con $(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \widehat{\mathbb{Z}}$ y $(r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \pi_1^{-1}(z)$.

Lema 2.1.10. *La acción (2.2) es libre y transitiva.*

Demostración. Veamos primero que la acción es libre. Sean $(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}}, (\overline{b_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \widehat{\mathbb{Z}}$ y supongamos que existe $(r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \pi_1^{-1}(z)$ tal que

$$(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \cdot (r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} = (\overline{b_j})_{j\in\mathbb{N}} \cdot (r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}}.$$

Entonces

$$\left(r_j e^{i\left(\theta_j + \frac{2\pi a_j}{j}\right)} \right)_{j\in\mathbb{N}} = \left(r_j e^{i\left(\theta_j + \frac{2\pi b_j}{j}\right)} \right)_{j\in\mathbb{N}},$$

lo cual ocurre si y sólo si para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $l_j \in \mathbb{Z}$ tal que $(a_j/j) - (b_j/j) = l_j$. Se sigue que $\overline{a_j} = \overline{b_j}$ en $\mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, y por lo tanto la acción es libre.

Ahora veamos que la acción es transitiva. Sean $(r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}}, (s_j e^{i\beta_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \pi_1^{-1}(z)$. Obsérvese que como $r_1 e^{i\theta_1} = s_1 e^{i\beta_1} = z$, se tiene que $r_1 = s_1$. Más aún, para cada $j > 1$, $r_j e^{i\theta_j}$ y $s_j e^{i\beta_j}$ deben ser cada uno alguna raíz j-ésima de z, es decir, existen $l_j, l'_j \in \{0, ..., j-1\}$ tales que

$$r_j e^{i\theta_j} = r_1^{1/j} e^{i\left(\frac{\theta_1 + 2\pi l_j}{j}\right)}, \qquad s_j e^{i\beta_j} = s_1^{1/j} e^{i\left(\frac{\beta_1 + 2\pi l'_j}{j}\right)},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, de donde se tiene que $(r_j)_{j\in\mathbb{N}} = (s_j)_{j\in\mathbb{N}} = (r_1^{1/j})_{j\in\mathbb{N}}$. Así,

$$(r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} = \left(r_1^{1/j} e^{i\left(\frac{\theta_1 + 2\pi l_j}{j}\right)} \right)_{j\in\mathbb{N}}, \qquad (s_j e^{i\beta_j})_{j\in\mathbb{N}} = \left(r_1^{1/j} e^{i\left(\frac{\beta_1 + 2\pi l'_j}{j}\right)} \right)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Por las condiciones de compatibilidad en el solenoide si $n|m$, entonces

$$(r_m e^{i\theta_m})^{m/n} = \left(r_1^{1/m} e^{i\left(\frac{\theta_1 + 2\pi l_m}{m}\right)} \right)^{m/n} = r_1^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta_1 + 2\pi l_m}{n}\right)} = r_n e^{i\left(\frac{\theta_1 + 2\pi l_n}{n}\right)},$$

por lo que $l_m \equiv l_n (\text{mód } n)$ y, análogamente $l'_m \equiv l'_n (\text{mód } n)$. Definimos la sucesión $(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} := (l'_j)_{j\in\mathbb{N}} - (l_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \widehat{\mathbb{Z}}$, donde $l_1 = 0$ y $l'_1 = 0$, la cual satisface

$$(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \cdot (r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} = (s_j e^{i\beta_j})_{j\in\mathbb{N}}.$$

□

El hecho de que la acción (2.2) sea libre y transitiva tiene como consecuencia los siguientes resultados.

Proposición 2.1.11. *Sea $z \in \mathbb{C}^*$. Entonces, para cada $(r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \pi_1^{-1}(z)$ se tiene un homeomorfismo*

$$\phi : \widehat{\mathbb{Z}} \to \pi_1^{-1}(z)$$

dado por

$$\phi((\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}}) = (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \cdot (r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} = \left(r_j e^{i\left(\theta_j + \frac{2\pi a_j}{j}\right)} \right)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Demostración. Sea $(r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \pi_1^{-1}(z)$. Del lema 2.1.10 se sigue que dicha correspondencia es biyectiva, mientras que la continuidad se sigue de que la acción (2.2) es continua.
Para ver que ϕ es abierta, basta probar que la imagen bajo ésta de cualquier elemento de la subbase para la topología de $\widehat{\mathbb{Z}}$ es abierta.
Sea $\rho_k : \widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ la proyección canónica y $\overline{a} \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Entonces $\rho_k^{-1}(\overline{a})$ es un subbásico en la topología de $\widehat{\mathbb{Z}}$. Por las condiciones de compatibilidad en el solenoide algebraico se tiene que $\pi_k(\phi(\rho_k^{-1}(\overline{a}))) = r_k e^{i\left(\theta_k + \frac{2\pi a}{k}\right)} \in \mathbb{C}^*$ es una raíz k-ésima de z.
Sea $V \subseteq \mathbb{C}^*$ cualquier vecindad abierta de $r_k e^{i\left(\theta_k + \frac{2\pi a}{k}\right)}$ que no contenga ninguna otra raíz k-ésima de z. Entonces $\phi(\rho_k^{-1}(\overline{a})) \subseteq \pi_k^{-1}(V)$, y por tanto

$$\phi(\rho_k^{-1}(\overline{a})) = \pi_k^{-1}(V) \cap \pi_1^{-1}(z)$$

es abierto en $\pi_1^{-1}(z)$. $\square$

Proposición 2.1.12. *La proyección $\pi_1 : \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}^*$ determina un $\widehat{\mathbb{Z}}$-fibrado principal.* [3]

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}^*$ y U_z vecindad de z simplemente conexa. Definimos

$$\phi_z : U_z \times \widehat{\mathbb{Z}} \to \pi_1^{-1}(U_z) \quad \text{como} \quad (re^{i\theta}, (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}}) \mapsto (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \cdot (r^{1/j} e^{i\theta/j})_{j\in\mathbb{N}}, \tag{2.3}$$

para algún $\theta \in [0, 2\pi)$. Probaremos que la función ϕ_z es un homeomorfismo.
Primeramente observamos que como la acción (2.2) es transitiva (por el lema 2.1.10), entonces ϕ_z es sobreyectiva.
Ahora probaremos que ϕ_z es inyectiva. Sean $w_1, w_2 \in U_z$ y $(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}}, (\overline{b_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \widehat{\mathbb{Z}}$.

- Si $w_1 = w_2$ y $(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \neq (\overline{b_j})_{j\in\mathbb{N}}$, es claro que $\phi_z(w_1, (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}}) \neq \phi(w_2, (\overline{b_j})_{j\in\mathbb{N}})$.
- Si $w_1 \neq w_2$, se sigue de la segunda parte de la proposición 2.1.9 y del hecho que las fibras son disjuntas, que $\phi_z(w_1, (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}}) \neq \phi_z(w_2, (\overline{b_j})_{j\in\mathbb{N}})$.

Para ver que ϕ_z es continua, basta que la función $f : U_z \to \pi_1^{-1}(U_z)$ dada por

$$f(re^{i\theta}) = (r^{1/j} e^{i\theta/j})_{j\in\mathbb{N}}$$

sea continua, ya que ϕ_z es la composición de las funciones en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^{-1}(U_z) \times \widehat{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\cdot"] & \pi_1^{-1}(U_z) \\
U_z \times \widehat{\mathbb{Z}} \arrow[u, "f \times \mathrm{Id}"] \arrow[ur, "\phi_z"'] &
\end{tikzcd}$$

donde el mapeo en la parte superior del diagrama es la restricción de la acción (2.1). En efecto pues si $B := \pi_k^{-1}(W) \cap \pi_1^{-1}(U_z)$ es cualquier subbásico en la topología de $\pi_1^{-1}(U_z)$, donde W es abierto en $\mathbb{C}^*$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$f^{-1}(B) = \left\{re^{i\theta} \in U_z \mid r^{1/k}e^{i\theta/k} \in W\right\}$$

es abierto en U_z. Para ver que ϕ_z es abierta, consideremos $\rho_k^{-1}(\overline{a})$ cualquier subbásico en la topología de $\widehat{\mathbb{Z}}$, donde $\overline{a} \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, y $\rho_k : \widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ es la proyección canónica. Si W es cualquier abierto en U_z (conexo sin pérdida de generalidad), entonces $W \times \rho_k^{-1}(\overline{a})$ es abierto en $U_z \times \widehat{\mathbb{Z}}$. Definimos el abierto

$$W_k := \{r^{1/k}e^{i\beta/k} \in \mathbb{C}^* \mid re^{i\beta} \in W\} \subseteq \mathbb{C}^*,$$

de donde se sigue que el conjunto

$$\overline{a} \cdot W_k := \left\{r^{1/k}e^{i\left(\frac{\beta+2\pi a}{k}\right)} \in \mathbb{C}^* \mid re^{i\beta} \in W\right\} \subseteq \mathbb{C}^*$$

es abierto. Afirmamos que

$$\phi_z(W \times \rho_k^{-1}(\overline{a})) = \pi_k^{-1}(\overline{a} \cdot W_k) = \pi_k^{-1}(\overline{a} \cdot W_k) \cap \pi_1^{-1}(W) = \pi_k^{-1}(\overline{a} \cdot W_k) \cap \pi_1^{-1}(U_z).$$

En efecto, las últimas dos igualdades se tienen de las contenciones

$$\pi_k^{-1}(\overline{a} \cdot W_k) \subseteq \pi_1^{-1}(W) \subseteq \pi_1^{-1}(U_z),$$

mientras que $\phi_z(W \times \rho_k^{-1}(\overline{a})) \subseteq \pi_k^{-1}(\overline{a} \cdot W_k)$ es obvio. Sea $(r_je^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \pi_k^{-1}(\overline{a} \cdot W_k)$, entonces

$$r_1e^{i\theta_1} \in W \text{ y } r_ke^{i\theta_k} = r_1^{1/k}e^{i\left(\frac{\theta_1+2\pi a}{k}\right)}.$$

En particular $(r_je^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}}, (r_1^{1/j}e^{i\theta_1/j})_{j\in\mathbb{N}} \in \pi_1^{-1}(r_1e^{i\theta_1})$. Del lema 2.1.10 que $\widehat{\mathbb{Z}}$ actúa libre y transitivamente en la fibra $\pi_1^{-1}(r_1e^{i\theta_1})$, existe un único $(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \widehat{\mathbb{Z}}$ tal que

$$(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \cdot (r_1^{1/j}e^{i\theta_1/j})_{j\in\mathbb{N}} = (r_je^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}},$$

y de la relación $r_ke^{i\theta_k} = r^{1/k}e^{i\left(\frac{\theta_1+2\pi a}{k}\right)}$, necesariamente $(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \rho_k^{-1}(\overline{a})$. Así,

$$\phi_z(r_1e^{i\theta_1}, (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}}) = (r_je^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}}.$$

Por tanto ϕ_z es abierta y se tiene el resultado. □

Consideremos el elemento $1 \in \mathbb{C}^*$. Por la proposición 2.1.11, para cada elemento en la fibra $\pi_1^{-1}(1) \subset \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$, hay un homeomorfismo

$$\widehat{\mathbb{Z}} \to \pi_1^{-1}(1).$$

En particular para $(1_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \pi_1^{-1}(1)$ se tiene una sucesión exacta de grupos

$$0 \to \widehat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{C}^* \to 1,$$

donde $\phi : \widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ es el homomorfismo

$$(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \mapsto (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \cdot (1_j)_{j\in\mathbb{N}} = \left(e^{\frac{2\pi i a_j}{j}} \right)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Tenemos así el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} = \varprojlim \mathbb{C}^* \arrow[r] & \dots\ \mathbb{C}^* \arrow[r, "p_{n,m}"] & \mathbb{C}^* \arrow[r] & \dots\ \mathbb{C}^* \\
\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, hook, "\phi"] & \dots\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, hook, "\overline{a}\mapsto e^{2\pi i a/m}"'] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, hook, "\overline{a}\mapsto e^{2\pi i a/n}"'] & \dots\{0\} \arrow[u, hook, "\overline{0}\mapsto 1"']
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

En la construcción del solenoide algebraico, la restricción de los morfismos de conexión $p_{n,m} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ a S^1 determinan un mapeo cubriente siempre que $n|m$, de manera que podemos considerar el sistema proyectivo $\{S^1, p_{n,m}|_{S^1}\}_{n|m}$. Definimos entonces

$$\varprojlim_{p_{n,m}|_{S^1}} S^1 := S^1_{\mathbb{Q}},$$

el cual grupo abeliano topológico llamado **solenoide adélico**. Obsérvese que se tiene una inclusión canónica

$$S^1_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}},$$

de donde se sigue que la restricción $\pi_1|_{S^1_{\mathbb{Q}}} : S^1_{\mathbb{Q}} \to S^1$ tiene fibras homeomorfas a la completación $\widehat{\mathbb{Z}}$. Más aún, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.1.13. *La restricción de la proyección canónica $\pi_1|_{S^1_{\mathbb{Q}}} : S^1_{\mathbb{Q}} \to S^1$ determina un $\widehat{\mathbb{Z}}$-fibrado principal.*

Demostración. Sea $z \in S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$. Entonces existe un abierto U_z en $\mathbb{C}^*$ alrededor de z y un homeomorfismo $\phi_z : U_z \times \widehat{\mathbb{Z}} \to \pi_1^{-1}(U_z)$. Como $U_z \cap S^1$ es abierto en S^1, el conjunto

$$\pi_1^{-1}(U_z \cap S^1) = \pi_1^{-1}(U_z) \cap S^1_{\mathbb{Q}} = \pi_1^{-1}|_{S^1_{\mathbb{Q}}}(U_z)$$

es abierto en $S^1_{\mathbb{Q}}$. Así, la restricción

$$\phi_z|_{S^1_{\mathbb{Q}}} : (U_z \cap S^1) \times \widehat{\mathbb{Z}} \to \pi_1^{-1}|_{S^1_{\mathbb{Q}}}(U_z)$$

es un homeomorfismo. $\square$

2.2. Estructura de laminación

Tanto el solenoide algebraico, como el solenoide adélico tienen una estructura de **laminación**. Usaremos la siguiente definición, tomada de [11].

Definición 2.2.1. Una **laminación producto** r-dimensional es un espacio topológico de la forma $U \times T$, donde U es abierto en $\mathbb{R}^r$ y T un espacio topológico llamado **transversal**. Los subespacios de la forma

$$U \times \{t\},\ t \in T,$$

son llamados **hojas locales**. Una función entre dos laminaciones producto es llamada **laminar** si es continua y mapea hojas locales en hojas locales. Una **laminación** r-dimensional es un espacio topológico de Hausdorff $\mathcal{X}$ junto con una cubierta abierta $\{\mathcal{U}_\alpha\}_\alpha$ que satisfacen los siguientes:

(i) Para todo $x \in \mathcal{X}$, existe $\mathcal{U}_\alpha \ni x$ y un homeomorfismo

$$\phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times T$$

sobre una laminación producto r-dimensional.

(ii) Para cualesquiera $\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_\beta$ la **función de transición**

$$\phi_{\beta,\alpha} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_{\phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)} : \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \to \phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$$

es laminar.

Los homeomorfismos ϕ_α son llamados **cartas locales**, los correspondientes abiertos $\mathcal{U}_\alpha$ **cajas de flujo** y, los conjuntos $\phi_\alpha^{-1}(U_\alpha \times \{t\})$ **hojas locales** de $\mathcal{X}$.

Una consecuencia de que $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ sea un $\widehat{\mathbb{Z}}$-fibrado principal es el siguiente resultado.

Proposición 2.2.2. *El solenoide algebraico $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ es una laminación 2-dimensional.*

Demostración. Definimos los abiertos en $\mathbb{C}^*$

$$U_1 = \mathbb{C}^* - \left\{re^{2\pi i} \in \mathbb{C}^* \mid r > 0\right\} \text{ y } U_2 = \mathbb{C}^* - \left\{re^{\pi i} \in \mathbb{C}^* \mid r > 0\right\}.$$

Nótese que éstos satisfacen $U_1 \cup U_2 = \mathbb{C}^*$ y $U_1 \cong U_2 \cong \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Dado que la proyección $\pi_1 : \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}^*$ es sobreyectiva, si $\mathcal{U}_1 := \pi_1^{-1}(U_1)$ y $\mathcal{U}_2 := \pi_1^{-1}(U_2)$ entoces $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$. Por la prueba de proposición 2.1.12, se tienen homeomorfismos

$$\phi_1^{-1} : U_1 \times \widehat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_1 \text{ y } \phi_2^{-1} : U_2 \times \widehat{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}_2.$$

El homeomorfismo inverso

$$\phi_2 : \mathcal{U}_2 \xrightarrow{\cong} U_2 \times \widehat{\mathbb{Z}}$$

de ϕ_2^{-1} está dado de la siguiente manera: Si $(r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_2$, se sigue del lema 2.2 que existe un único $(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \in \widehat{\mathbb{Z}}$ tal que

$$(\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \cdot (r_1^{1/j} e^{i\theta_1/j})_{j\in\mathbb{N}} = (r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}},$$

entonces $\phi_2((r_j e^{i\theta_j})_{j\in\mathbb{N}}) = (r_1 e^{i\theta_1}, (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}})$. El inverso ϕ_1 de ϕ_1^{-1} se define de manera similar. Así, el homeomorfismo

$$\begin{aligned} \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = (U_1 \cap U_2) \times \widehat{\mathbb{Z}} &\to \pi_1^{-1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \to (U_1 \cap U_2) \times \widehat{\mathbb{Z}} = \phi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \\ (re^{i\theta}, (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}}) &\mapsto (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}} \cdot (r^{1/j} e^{i\theta/j})_{j\in\mathbb{N}} \mapsto (re^{i\theta}, (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}}) \end{aligned}$$

es trivialmente una función laminar. Por tanto $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ es una laminación 2-dimensional. $\square$

De la prueba anterior, cada elemento $(\overline{a_j})_j \in \widehat{\mathbb{Z}}$ determina un par de hojas locales de $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$:

$$\begin{aligned} L_{1,(\overline{a_j})_j} &:= \phi_1^{-1}(U_1 \times \{(\overline{a_j})_j\}) = \left\{ \left(r^{1/j} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi a_j}{j}\right)} \right)_j \in \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \mid re^{i\theta} \in U_1 \right\}, \\ L_{2,(\overline{a_j})_j} &:= \phi_2^{-1}(U_2 \times \{(\overline{a_j})_j\}) = \left\{ \left(r^{1/j} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi a_j}{j}\right)} \right)_j \in \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \mid re^{i\theta} \in U_2 \right\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Estas hojas locales se relacionan con:

Definición 2.2.3. Definimos la **hoja base** en $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ como la imagen del homomorfismo de grupos $\nu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ dado por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} = \varprojlim \mathbb{C}^* \arrow[r] & ...\mathbb{C}^* \arrow[r, "p_{m,n}"] & \mathbb{C}^* \arrow[r] & ...\mathbb{C}^* \\ (\mathbb{C},+) \arrow[u, hook, "\nu"] \arrow[r] & ...(\mathbb{C},+) \arrow[u, "z\mapsto e^{i(z/m)}"'] \arrow[r, "="] & (\mathbb{C},+) \arrow[u, "z\mapsto e^{i(z/n)}"'] \arrow[r, "="] & ...(\mathbb{C},+) \arrow[u, "z\mapsto e^{iz}"'] \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

es decir, $\nu(z) = \left(e^{i(z/j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$, y comparando con el diagrama 2.4, $\nu(2\pi l) = \phi(l)$ para cualquier entero l.

Proposición 2.2.4. *El homomorfismo ν definido arriba es un monomorfismo de grupos continuo.*

Demostración. Para ver que es inyectivo, supongamos que $(e^{i(z/j)})_{j\in\mathbb{N}} = (1_j)_{j\in\mathbb{N}}$ para algún $z \in \mathbb{C}$. Entonces para todo $j \in \mathbb{N}$ existe $k_j \in \mathbb{Z}$ tal que $z = 2\pi j k_j$, de donde se sigue que $z \in \mathbb{R}$. Existe $J \in \mathbb{N}$ tal que

$$|k_J| = \left|\frac{z}{2\pi J}\right| < 1,$$

por lo que $k_J = 0$. Obsérvese que jk_j es un entero fijo para todo j, de manera que $Jk_J = jk_j = 0$ para todo j y por tanto $z = 0$.

Para la continuidad, si $\pi_k^{-1}(U)$ es cualquier subbásico para la topología de $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$, donde U es abierto en $\mathbb{C}^*$, entonces el conjunto

$$\nu^{-1}(\pi_k^{-1}(U)) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid e^{i(z/k)} \in U\right\}$$

es abierto en $\mathbb{C}$ (es la imagen inversa de U bajo la composición $z \mapsto e^{iz} \mapsto e^{i(z/k)}$). $\square$

Proposición 2.2.5. *La hoja base $\nu(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ conexo por trayectorias.*

Demostración. Como $\mathbb{C}$ es conexo por trayectorias, para cualquier número complejo z, existe $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continua tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = z$. Entonces la composición $\nu \circ f : [0,1] \to \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ es una trayectoria que une a los puntos $(e^{i(z/j)})_{j\in\mathbb{N}}$ y $(1_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Por tanto $\nu(\mathbb{C})$ es conexo por trayectorias.

Para ver que $\nu(\mathbb{C})$ es denso, sea $\pi_k^{-1}(U)$ cualquier subbásico para la topología de $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$, donde U es abierto en $\mathbb{C}^*$ y sea $w \in U$. Dado de la función exponencial $z \mapsto e^z$ es sobreyectiva de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}^*$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $w = e^z = e^{i(z/i)}$. Entonces

$$\nu(kz/i) = \left(e^{i\left(\frac{kz/i}{j}\right)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \pi_k^{-1}(U).$$

Por tanto $\nu(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$. □

La inclusión natural $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ permite definir la **hoja base** en $S^1_{\mathbb{Q}}$ como la imagen de la restricción $\nu|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to S^1_{\mathbb{Q}}$, es decir, la imagen del monomorfismo definido en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} S^1_{\mathbb{Q}} = \varprojlim S^1 \arrow[r] & ...S^1 \arrow[r, "p_{m,n}"] & S^1 \arrow[r] & ...S^1 \\ (\mathbb{R},+) \arrow[r] \arrow[u, hook, "\nu|_{\mathbb{R}}"] & ...(\mathbb{R},+) \arrow[r, "="] \arrow[u, "t\mapsto e^{it/m}"'] & (\mathbb{R},+) \arrow[r, "="] \arrow[u, "t\mapsto e^{it/n}"'] & ...(\mathbb{R},+) \arrow[u, "t\mapsto e^{it}"'] \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

Así como en el solenoide algebraico, la hoja base $\nu(\mathbb{R})$ es un subconjunto denso de $S^1_{\mathbb{Q}}$ conexo por trayectorias.

Tenemos la siguiente relación de la hoja base en el solenoide algebraico, con las hojas locales (2.5):

Lema 2.2.6. *$L_{1,a} \cup L_{2,a} = \nu(\mathbb{C})$ para todo $a \in \mathbb{Z} \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$. Más aún, si $x \in \widehat{\mathbb{Z}} - \mathbb{Z}$ entonces $L_{k,x} \cap \nu(\mathbb{C}) = \emptyset$ para $k = 1, 2$. En este sentido, la hoja base es una **hoja global** de $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Si $\left(r^{1/j}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi a}{j}\right)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \in L_{1,a} \cup L_{2,a}$, entonces existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $e^y = r$ ya que la función exponencial real

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$$

es sobreyectiva. Definimos $z := (\theta + 2\pi a) - iy \in \mathbb{C}$. Así,

$$\nu(z) = (e^{i(z/j)})_{j\in\mathbb{N}} = \left(e^{y/j}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi a}{j}\right)}\right)_{j\in\mathbb{N}} = \left(r^{1/j}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi a}{j}\right)}\right)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Recíprocamente, si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, entonces

$$\nu(z) = (e^{i(z/j)})_{j\in\mathbb{N}} = (e^{-y/j}e^{ix/j})_{j\in\mathbb{N}} = \left(e^{-y/j}e^{i\left(\frac{(x-2\pi a)+2\pi a}{j}\right)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \in L_{1,a} \cup L_{2,a}$$

ya que $e^{-y} \in \mathbb{R}_{>0}$.

Para la segunda afirmación, supongamos sin pérdida de generalidad que $p \in L_{1,x} \cap \nu(\mathbb{C})$, con $x = (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Entonces para algún $z = x + iy \in \mathbb{C}$ y algún $re^{i\theta} \in U_1$ se tiene que

$$p = (e^{i(z/j)})_{j\in\mathbb{N}} = (e^{-y/j}e^{ix/j})_{j\in\mathbb{N}} = \left(r^{1/j}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi a_j}{j}\right)}\right)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Esto ocurre si y sólo si $e^{-y} = r$ y para todo $j \in \mathbb{N}$ existe $k_j \in \mathbb{Z}$ tal que

$$2\pi k_j + \frac{x}{j} = \frac{\theta + 2\pi a_j}{j},$$

es decir, $2\pi(jk_j - a_j) = \theta - x$ para todo j. Se sigue que $jk_j - a_j := c \in \mathbb{Z}$ para todo j. Así, $\overline{a_j} = \overline{c}$ en $\mathbb{Z}/j\mathbb{Z}$ para todo j, y por tanto $(\overline{a_j})_j = (\overline{c})_j \in \mathbb{Z} \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$. □

En general, cualquier laminación $\mathcal{L}$ se descompone en una unión disjunta de **hojas globales** de la siguiente manera: Dos puntos x, y pertenecen a la misma hoja global si existe una sucesión de hojas locales $L_0, ..., L_k$ tal que $x \in L_0$, $y \in L_k$ y $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 0, ..., k-1$ [11].

Veremos a continuación que es posible *trasladar* la hoja base en el solenoide algebraico de tal manera que su estructura de laminación está determinada por copias densas de $\mathbb{C}$ que a su vez son disjuntas. Sea $x \in \widehat{\mathbb{Z}}$ y definamos la función continua

$$\nu_x : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}},$$

$$\nu_x(z) = x \cdot \nu(z). \tag{2.8}$$

Obsérvese que ν_x es inyectiva ya que ν lo es y además, si $x = (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}}$ y $z = u+iv$ entonces

$$x\cdot\nu(z) = (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}}\cdot(e^{i(z/j)})_{j\in\mathbb{N}} = (\overline{a_j})_{j\in\mathbb{N}}\cdot(e^{-v/j}e^{iu/j})_{j\in\mathbb{N}} = \left(e^{-v/j}e^{i\left(\frac{u+2\pi a_j}{j}\right)}\right)_{j\in\mathbb{N}} = \left(e^{i\left(\frac{z+2\pi a_j}{j}\right)}\right)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Proposición 2.2.7. *Para cada $x \in \widehat{\mathbb{Z}}$ se satisface que $\nu_x(\mathbb{C}) = L_{1,x} \cup L_{2,x}$. Si $x \in \widehat{\mathbb{Z}} - \mathbb{Z}$ entonces $\nu_x(\mathbb{C}) \cap \nu_y(\mathbb{C}) = \emptyset$ para todo $y \in \widehat{\mathbb{Z}}$.*

Demostración. Por el lema 2.2.6, $L_{1,a} \cup L_{2,a} = \nu(\mathbb{C})$ para todo $a \in \mathbb{Z} \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$. Además, para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\nu(z) = a \cdot \nu(z - 2\pi a) = \nu_a(z - 2\pi a)$$

y

$$\nu_a(z) = a \cdot \nu(z) = \nu(z + 2\pi a)$$

para todo $a \in \mathbb{Z} \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$, por lo que $\nu_a(\mathbb{C}) = \nu(\mathbb{C}) = L_{1,a} \cup L_{2,a}$ para todo $a \in \mathbb{Z} \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$. De la descripción de las hojas locales (2.5) es claro que si $x \in \widehat{\mathbb{Z}} - \mathbb{Z}$ entonces $\nu_x(\mathbb{C}) = L_{1,x} \cup L_{2,x}$.

Sean ahora $x \in \widehat{\mathbb{Z}} - \mathbb{Z}$ y $y \in \widehat{\mathbb{Z}}$. Del lema 2.2.6 se sigue que si $y \in \mathbb{Z} \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$ entonces $\nu_x(\mathbb{C}) \cap \nu_y(\mathbb{C}) = \emptyset$. Además, es sencillo ver que si $y \in \widehat{\mathbb{Z}} - \mathbb{Z}$ y además $\nu_x(\mathbb{C})$ y $\nu_y(\mathbb{C})$ se intersectan en algún punto, necesariamente $x = y$. $\square$

De la proposición anterior se tiene que

$$\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} = \bigcup_{x\in\widehat{\mathbb{Z}}} \nu_x(\mathbb{C}) = \left(\bigsqcup_{x\in\widehat{\mathbb{Z}}-\mathbb{Z}} \nu_x(\mathbb{C})\right) \sqcup \nu(\mathbb{C}),$$

y dado que cada hoja global $\nu_x(\mathbb{C})$ se puede descomponer en una unión de hojas locales, la laminación de $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ está totalmente determinada por éstas. Para cada $x \in \widehat{\mathbb{Z}}$ diremos que la imagen $\nu_x(\mathbb{C})$ es una **traslación** de la hoja base $\nu(\mathbb{C})$, la traslación dada por el elemento x. En este sentido, las traslaciones de la hoja base determinan la estructura de laminación del solenoide algebraico.

De la misma manera, traslaciones $\nu_x(\mathbb{R})$ de la hoja base $\nu(\mathbb{R})$ en el solenoide adélico $S^1_{\mathbb{Q}}$ por elementos $x \in \widehat{\mathbb{Z}}$, determinan una estructura de laminación para éste.

Capítulo 3

Completación proalgebraica de variedades tóricas normales

3.1. El toro proalgebraico

Definición 3.1.1. Para cada $r \in \mathbb{N}$, el grupo $(\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}})^r = \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \times ... \times \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ (r veces), es llamado **toro proalgebraico**.

Sea T_N un toro con látice de caracteres M. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \cdot)$ exacto por la izquierda (i.e., transforma morfimos inyectivos en morfismos inyectivos) en la categoría de grupos al diagrama (2.4) obtenemos los sistemas proyectivos

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) \arrow[r, "p^*_{n,m}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) \arrow[r] & ... \\
... \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, hook, "\varphi \mapsto e^{2\pi i \varphi/m}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, hook, "\varphi \mapsto e^{2\pi i \varphi/n}"'] & ...
\end{tikzcd}$$

Por la proposición 1.2.5 y la observación 1.2.6 se tiene la sucesión exacta

$$0 \to \widehat{\mathbb{Z}}^r \to (T_N)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\pi_1} T_N \to 1, \tag{3.1}$$

donde r es el rango de M y

$$(T_N)_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}})$$

es llamado **completación proalgebraica** del toro T_N, el cual es un grupo isomorfo al toro proalgebraico $(\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}})^r$.

Cuando identificamos a T_N con $(\mathbb{C}^*)^r$, cada homomorfismo

$$p^*_{n,m} : (\mathbb{C}^*)^r \to (\mathbb{C}^*)^r$$

está dado por

$$(t_1, ..., t_r) \mapsto (t_1^{m/n}, ..., t_r^{m/n})$$

que claramente es un morfismo de variedades siempre que $n|m$. Más aún, si pensamos en $(\mathbb{C}^*)^r$ con la topología usual, cada uno de estos homomorfismos determina un cubriente de $(\mathbb{C}^*)^r$ y por tanto de T_N. Así, el toro proalgebraico es precisamente un límite proyectivo de variedades tóricas, donde los morfismos de conexión son mapeos cubrientes. Una consecuencia de las proposiciones 2.1.12 y 2.2.2 es la siguiente.

Teorema 3.1.2. *Sea T_N un toro con látice de caracteres M. Entonces $(T_N)_{\mathbb{Q}}$ es una laminación de dimensión igual a dos veces el rango de M (con la topología inducida por la biyección $T_N \simeq (\mathbb{C}^*)^{rankM}$, este último con la usual).*

Demostración. Supongamos que el látice M tiene rango r. Entonces $T_N \simeq (\mathbb{C}^*)^r$ y en consecuencia $(T_N)_{\mathbb{Q}} \simeq (\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}})^r$. Si $t = (x_1, ..., x_r) \in (\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}})^r$, entonces para cualquier abierto de la forma

$$U^{(1)} \times ... \times U^{(r)} \subseteq (\mathbb{C}^*)^r$$

que contiene al punto $(\pi_1(x_1), ..., \pi_1(x_r))$, con $U^{(j)} \cong \mathbb{C}$ para cada $j = 1, ..., r$ y

$$\pi_1 : \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}^*$$

la proyección canónica, se tiene un homeomorfismo

$$\phi_t : \pi_1^{-1}(U^{(1)}) \times ... \times \pi_1^{-1}(U^{(r)}) \xrightarrow{\cong} (U^{(1)} \times \widehat{\mathbb{Z}}) \times ... \times (U^{(r)} \times \widehat{\mathbb{Z}}) = (U^{(1)} \times ... \times U^{(r)}) \times \widehat{\mathbb{Z}}^r$$

dado en cada componente como el inverso del homeomorfismo (2.3) en la prueba de la proposición 2.1.12.
En particular, para los abiertos

$$U_1 = \mathbb{C}^* - \left\{re^{2\pi i} \in \mathbb{C}^* \mid r > 0\right\} \text{ y } U_2 = \mathbb{C}^* - \left\{re^{\pi i} \in \mathbb{C}^* \mid r > 0\right\}$$

en $\mathbb{C}^*$ y la cubierta

$$\mathcal{C} := \{\pi_1^{-1}(U_{k_1}) \times ... \times \pi_1^{-1}(U_{k_r}) \mid k_j = 1, 2\}$$

de $(\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}})^r \simeq (T_N)_{\mathbb{Q}}$, las funciones de transición

$$\phi_{i,j} : \phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \to \phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$$

para cada par $\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_j \in \mathcal{C}$, son simplemente la identidad como en la prueba de la proposición 2.2.2, y por tanto son laminares. □

Si ahora, aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \cdot)$ al diagrama (2.6) obtenemos la **hoja base** en $(T_N)_{\mathbb{Q}}$ dada por la imagen del monomorfismo

$$\nu^* : \mathbb{C}^r \to (T_N)_{\mathbb{Q}}$$

que, haciendo la identificación $(T_N)_{\mathbb{Q}} \simeq (\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}})^r$, para $(z_1, .., z_r) \in \mathbb{C}^r$

$$\nu^*(z_1, ..., z_r) = \nu^r(z_1, .., z_r) = ((e^{i(z_1/j)})_j), ..., (e^{i(z_r/j)})_j)).$$

Se sigue de la proposición 2.2.5 que la hoja base $\nu^*(\mathbb{C}^r)$ es la componente conexa por trayectorias del neutro en $(T_N)_{\mathbb{Q}}$ y es un subconjunto denso de éste. Más aún, traslaciones de $\nu^*(\mathbb{C}^r)$ por elementos de $\widehat{\mathbb{Z}}^r$ determinan la misma estructura de laminación para $(T_N)_{\mathbb{Q}}$ obtenida en la prueba del teorema 3.1.2.

3.2. Definición de la completación proalgebraica de variedades tóricas

En la siguiente sección extenderemos la noción de completación proalgebraica de un toro al caso de cualquier variedad tórica afín normal. A partir de aquí, consideraremos solamente conos poliédricos, racionales y fuertemente convexos, por lo que nos referiremos a ellos simplemente como conos.

3.2.1. Caso afín

Obsérvese que los morfismos de conexión $p_{n,m} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ en la construcción del solenoide algebraico se extienen de manera natural a todo el plano complejo $\mathbb{C}$. Tenemos entonces el sistema proyectivo $\{\mathbb{C}, p_{n,m}\}_{n|m}$ cuyo límite

$$\mathbb{C}_{\mathbb{Q}} := \varprojlim_{p_{n,m}} \mathbb{C}$$

es un semigrupo multiplicativo, ya que cada $p_{n,m}$ es un homomorfismo de semigrupos. Por otro lado, si σ es un cono en $N_{\mathbb{R}}$ con semigrupo afín $S^\sigma = \sigma^\vee \cap M$, por la proposición 1.3.15 se tiene una identificación

$$X^\sigma = \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}).$$

Esto motiva la siguiente definición, la cual se obtiene cambiando $\mathbb{C}$ por $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$.

Definición 3.2.1. Sea σ un cono en $N_{\mathbb{R}}$ con semigrupo afín $S^\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Definimos la **completación proalgebraica** de la variedad tórica afín X^σ como

$$X^\sigma_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}).$$

Nos será de utilidad interpretar a esta completación algebraica como un límite de la forma

$$X^\sigma_{\mathbb{Q}} = \varprojlim X^\sigma.$$

Para ver esto, consideremos $\gamma \in X^\sigma_{\mathbb{Q}}$. Nótese que se induce una colección $\{\gamma_j : S^\sigma \to \mathbb{C}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de homomorfismo de semigrupos tales que $(\gamma_m(s))^{m/n} = \gamma_n(s)$ para todo $s \in S^\sigma$ siempre que $n|m$. Esto determina una correspondencia biyectiva

$$X^\sigma_{\mathbb{Q}} \to \varprojlim_{q_{n,m}} \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}), \qquad \gamma \mapsto (\gamma_j)_{j \in \mathbb{N}},$$

donde

$$q_{n,m} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S^\sigma, \mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S^\sigma, \mathbb{C}), \qquad \gamma \mapsto p_{n,m} \circ \gamma$$

es un morfismo de variedades. Por tanto, $X^\sigma_{\mathbb{Q}}$ es un límite proyectivo de variedades tóricas. Más aún, mediante esta biyección podemos dotar a $X^\sigma_{\mathbb{Q}}$ con la topología que definen las proyecciones canónicas

$$\pi_j : \varprojlim_{q_{n,m}} \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}),$$

ya sea con la usual o la de Zariski en cada X^σ.

La completación proalgebraica $X^\sigma_{\mathbb{Q}}$ viene dotada con una acción del toro proalgebraico $(T_N)_{\mathbb{Q}}$. En efecto, recordemos de la observación 1.3.16 que si T_N es el toro de X^σ con látice de caracteres M, entonces se tiene una inclusión canónica $T_N = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) \cong \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}^*) \subseteq \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}) = X^\sigma$ y por tanto

$$(T_N)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}) \cong \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}) = X^\sigma_{\mathbb{Q}}.$$

De esta manera, hay una acción natural de $(T_N)_{\mathbb{Q}}$ en $X^\sigma_{\mathbb{Q}}$ dada por la multiplicación usual de funciones. Más aún, como la acción de $T_N = \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}^*)$ en $X^\sigma = \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C})$ está dada por la multiplicación de funciones y es claro que es complatible con los morfismos $q_{n,m}$, la acción de $(T_N)_{\mathbb{Q}}$ en $X^\sigma_{\mathbb{Q}}$ viene inducida por la acción de T_N en X^σ.

3.2.2. Caso general

Consideremos un abanico $\mathcal{F}$ en $N_{\mathbb{R}}$ y la colección de completaciones proalgebraicas

$$\{X^\sigma_{\mathbb{Q}}\}_{\sigma\in\mathcal{F}} = \{\mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}_{\mathbb{Q}})\}_{\sigma\in\mathcal{F}}.$$

Similar al caso clásico, si $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{F}$ y $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ entonces se tienen un homomorfismos inyectivos

$$X^{\sigma_1}_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Hom}_{sg}(S^{\sigma_1}, \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}) \hookleftarrow \mathrm{Hom}_{sg}(S^\tau, \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{sg}(S^{\sigma_2}, \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}) = X^{\sigma_2}_{\mathbb{Q}} \tag{3.2}$$

dados por la restricción. Así, a partir de la proposición 1.3.17, de la misma manera en la que se "pegan" las variedades afines $\{X^\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{F}}$ para dar lugar a la variedad tórica $X^{\mathcal{F}}$, definimos en

$$\bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{F}} \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}_{\mathbb{Q}})$$

la relación de equivalencia: $(\gamma_1 : S^{\sigma_1} \to \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}) \sim (\gamma_2 : S^{\sigma_2} \to \mathbb{C}_{\mathbb{Q}})$ si y sólo si existe $\tau \preceq \sigma_1 \cap \sigma_2$ y un homomorfismo $\gamma : S^\tau \to \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$ tal que y $\gamma|_{S^{\sigma_1}} = \gamma_1$ y $\gamma|_{S^{\sigma_2}} = \gamma_2$.

Definición 3.2.2. Sea $\mathcal{F}$ un abanico en $N_{\mathbb{R}}$. Definimos la **completación proalgebraica** de la variedad tórica $X^{\mathcal{F}}$ como

$$X^{\mathcal{F}}_{\mathbb{Q}} := \bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{F}} \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}_{\mathbb{Q}})/\sim .$$

dotada con la topología cociente.

Análogo al caso afín, para cada pareja $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n|m$ definimos

$$q_{n,m} : X^{\mathcal{F}} = \bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{F}} \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C})/\sim \to \bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{F}} \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C})/\sim = X^{\mathcal{F}}$$

$$[\gamma] \mapsto [p_{n,m} \circ \gamma],$$

donde $p_{n,m} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es el homomorfismo de semigrupos $z \mapsto z^{m/n}$ en el límite proyectivo $\varprojlim_{p_{n,m}} \mathbb{C}$ y la relación de equivalencia $\sim$ dada en el comentario anterior a la proposición

1,3,17. Cada $q_{n,m}$ está bien definida ya que si $\gamma : S^\tau \to \mathbb{C}$ es un homomorfismo que extiende a $\gamma_1 : S^{\sigma_1} \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : S^{\sigma_2} \to \mathbb{C}$, con $\tau \preceq \sigma_1 \cap \sigma_2$, entonces la composición $p_{n,m} \circ \gamma$ extiende a las composiciones $p_{n,m} \circ \gamma_1$ y $p_{n,m} \circ \gamma_2$. En particular las funciones $q_{n,m}$ son morfismos de variedades y continuas en la topología usual, por lo que podemos considerar el límite proyectivo

$$\varprojlim_{q_{n,m}} X^{\mathcal{F}}$$

en la categoría de espacios topológicos. Más aun, la correspondencia

$$\Phi : X^{\mathcal{F}}_{\mathbb{Q}} \to \varprojlim_{q_{n,m}} X^{\mathcal{F}}, \quad [\gamma] \mapsto ([\gamma_j])_{j\in\mathbb{N}}, \tag{3.3}$$

determina un homeomorfismo, donde $\{\gamma_j : S^\sigma \to \mathbb{C}\}_{j\in\mathbb{N}}$ es la colección de homomorfismos de semigrupos inducidos por el representante γ de $[\gamma]$ los cuales satisfacen

$$(\gamma_m(s))^{m/n} = \gamma_n(s)$$

para todo $s \in S^\sigma$ siempre que $n|m$ [2].

Veamos ahora que hay una acción natural de $(T_N)_{\mathbb{Q}}$ en $X^{\mathcal{F}}_{\mathbb{Q}}$. Dado un abanico $\mathcal{F}$ en $N_{\mathbb{R}}$ tenemos que

$$(T_N)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}) \cong \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}) = X^\sigma_{\mathbb{Q}}$$

para todo $\sigma \in \mathcal{F}$ y todos estos toros proalgebraicos se identifican entre sí mediante el pegado, es decir,

$$(T_N)_{\mathbb{Q}} \simeq \bigsqcup_{\sigma\in\mathcal{F}} \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}})/\sim .$$

De esta manera, si $\tilde{\gamma} \in (T_N)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}})$ y $[\gamma : S^\sigma \to \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}] \in X^{\mathcal{F}}_{\mathbb{Q}}$ entonces

$$\tilde{\gamma} \cdot [\gamma] = [\tilde{\gamma}|_{S^\sigma} \cdot \gamma]. \tag{3.4}$$

Por otro lado, la acción de T_N en $X^{\mathcal{F}}$ en (1.4) es compatible con los morfismos $q_{n,m}$ ya que si $n|m$, $\tilde{\gamma_m} \in T_N = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*)$ y $[\gamma_m : S^\sigma \to \mathbb{C}] \in X^{\mathcal{F}}$, entonces

$$\begin{aligned} q_{n,m}(\tilde{\gamma_m} \cdot [\gamma_m]) &= q_{n,m}([\gamma|_{S^\sigma} \cdot \gamma]) \\ &= [p_{n,m} \circ (\tilde{\gamma}|_{S^\sigma} \cdot \gamma)] \\ &= [(p_{n,m} \circ \tilde{\gamma}|_{S^\sigma}) \cdot (p_{n,m} \circ \gamma)] \\ &= q_{n,m}([\tilde{\gamma}_m|_{S^\sigma}]) \cdot q_{n,m}([\gamma_m]). \end{aligned}$$

Esto implica que el límite $\varprojlim_{q_{n,m}} T_N$ actúa en el límite $\varprojlim_{q_{n,m}} X^{\mathcal{F}}$. Por último, mediante el homeomorfismo (3.3), el toro proalgebraico $(T_N)_{\mathbb{Q}}$ se identifica con $\varprojlim_{q_{n,m}} T_N$ y resulta claro que las respectivas acciones se corresponden entre sí. Por tanto la acción (3.4) viene inducida por la acción de T_N en $X^{\mathcal{F}}$.

Ejemplo 3.2.3. Consideremos los abanicos en el ejemplo 1.3.7(2), (3), (4). Según vimos en el ejemplo 1.3.18, las variedades tóricas obtenidas a partir de esos abanicos son $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$ y $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, respectivamente. La completación proalgebraica de éstas se denota por $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}, \mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ y $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$.

3.3. La correspondencia órbitas-conos

En esta sección estudiaremos las órbitas de la acción de $(T_N)_{\mathbb{Q}}$ en la completación proalgebraica $X^{\mathcal{F}}_{\mathbb{Q}}$. El resultado principal, análogo al caso clásico para la variedad tórica $X^{\mathcal{F}}$, mostrará que hay una biyección entre las $(T_N)_{\mathbb{Q}}$-órbitas de $X^{\mathcal{F}}_{\mathbb{Q}}$ y los conos en el abanico $\mathcal{F}$. Los resultados y pruebas en el caso clásico se encuentran en § 3.2 de [5].

Dado un cono σ en $N_{\mathbb{R}}$, se tiene el punto en $X^\sigma = \mathrm{Hom}_{sg}(S^\sigma, \mathbb{C})$ definido por el homomorfismo de semigrupos

$$m \in S^\sigma \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } m \in S^\sigma \cap \sigma^\perp = \sigma^\perp \cap M, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Efectivamente es un homomorfismo de semigrupos ya que $\sigma^\perp = \sigma^\vee \cap \sigma^\perp$ es una cara de $\sigma^\vee$ (proposición 1.3.5), en consecuencia, si $m, m' \in S^\sigma$ y $m + m' \in S^\sigma \cap \sigma^\perp$ entonces $m, m' \in S^\sigma \cap \sigma^\perp$ (lema 1.3.4). Este punto es denotado por γ^σ y es llamado **el punto especial** (o distinguido) en X^σ correspondiente al cono σ. Dicho punto tiene la propiedad de permanecer fijo bajo la acción del toro T_N si y sólo si $\dim \sigma = \dim N_{\mathbb{R}}$ (corolario 1.3.3 [5]). Obsérvese que si τ es una cara de σ (i.e., $\tau \preceq \sigma$) entonces $\gamma^\tau \in X^\sigma$, ya que $\sigma^\perp \subseteq \tau^\perp$.

Lo especial de los puntos γ^σ en una variedad tórica se ve reflejado en el siguiente resultado (teorema 3.2.6 de [5])

Teorema 3.3.1. *(La correspondencia entre conos y T_N-órbitas) Sea $X^{\mathcal{F}}$ la variedad tórica asociada al abanico $\mathcal{F}$ en $N_{\mathbb{R}}$. Entonces*

(a) Se tiene una corresponencia biyectiva

$$\{\textit{Conos } \sigma \in \mathcal{F}\} \longleftrightarrow \{T_N\textit{-órbitas en } X^{\mathcal{F}}\}$$
$$\sigma \longleftrightarrow T_N \cdot \gamma^\sigma.$$

(b) Supongamos que $\dim N_{\mathbb{R}} = r$. Para cada cono $\sigma \in \mathcal{F}$, la óribta $T_N \cdot \gamma^\sigma$ es un toro de dimensión $r - \dim \sigma$.

(c) Para cada $\sigma \in \mathcal{F}$, la variedad afín X^σ es la unión de órbitas

$$X^\sigma = \bigcup_{\tau \preceq \sigma} T_N \cdot \gamma^\tau.$$

Con la finalidad de obtener una versión proalgebraica del resultado anterior, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.3.2. Sea σ cono en $N_{\mathbb{R}}$. Definimos el punto en $X^\sigma_{\mathbb{Q}}$ como el homomorfismo de semigrupos $\gamma^\sigma_{\mathbb{Q}} : S^\sigma \to \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$ dado por $\gamma^\sigma_{\mathbb{Q}}(m) := (\gamma^\sigma_j(m))_{j \in \mathbb{N}}$, $m \in S^\sigma$, donde γ^σ_j es el punto especial en X^σ para todo $j \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\gamma^\sigma_{\mathbb{Q}}(m) = \begin{cases} (1_j)_j & \text{si } m \in S^\sigma \cap \sigma^\perp = \sigma^\perp \cap M, \\ (0_j)_j & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Le llamaremos a $\gamma^\sigma_{\mathbb{Q}}(m)$ **el punto especial** en $X^\sigma_{\mathbb{Q}}$ asociado al cono σ.

Dicho punto tiene la propiedad de permanecer fijo bajo la acción del toro $(T_N)_{\mathbb{Q}}$ si y sólo si dim $\sigma =$ dim $N_{\mathbb{R}}$ y si $\tau \preceq \sigma$ entonces $\gamma^{\tau}_{\mathbb{Q}} \in X^{\sigma}_{\mathbb{Q}}$ ya que en cada componente satisface ambas propiedades.

El siguiente resultado es la versión proalgebraica del lema 3.2.4 en [5].

Lema 3.3.3. *Sean N y M látices duales entre sí con emparejamiento*

$$\langle\ ,\ \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}.$$

Sean además σ un cono en $N_{\mathbb{R}}$ y N_σ el sublátice de N generado por los elementos en $\sigma \cap N$ (i.e., $N_\sigma = \mathbb{Z}(\sigma \cap N)$). Entonces $N(\sigma) := N/N_\sigma$ es un látice con látice dual

$$\sigma^{\perp} \cap M = \{m \in M \mid \langle m, u\rangle = 0 \text{ para todo } u \in \sigma\}.$$

Por tanto se tiene un isomorfismo natural

$$(T_{N(\sigma)})_{\mathbb{Q}} = Hom_{\mathbb{Z}}(\sigma^{\perp} \cap M, \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}) \cong N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}.$$

Demostración. Obsérvese primero que $N(\sigma)$ es un grupo abeliano finitamente generado, por lo que si probamos que es libre de torsión, entonces tendremos que es un látice por el Teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados. Dicho ésto, sea $u \in N$ y supongamos que para algún $k > 1$, $ku \in N_\sigma$. Nótese que

$$N_\sigma = \mathbb{Z}(\sigma \cap N) = (\sigma \cap N) - (\sigma \cap N) = \{u_1 - u_2 \mid u_1, u_2 \in \sigma \cap N\},$$

ya que $\sigma \cap N$ es un semigrupo. Así, existen $u_1, u_2 \in \sigma \cap N$ tales que $ku = u_1 - u_2$. En particular, $u_1, u_2 \in \sigma$, lo cual implica que

$$u + u_2 = \frac{1}{k}u_1 + \frac{k-1}{k}u_2 \in \sigma \cap N,$$

de donde se sigue que $u = (u + u_2) - u_2 \in N_\sigma$. Por tanto $N(\sigma)$ es libre de torsión y, en consecuencia es un látice.

Por otro lado, el emparejamiento entre M y N induce un emparejamiento

$$\langle\ ,\ \rangle' : \sigma^{\perp} \cap M \times N(\sigma) \to \mathbb{Z}$$

dado por $\langle m, [u]\rangle' = \langle m, u\rangle$, $m \in \sigma^{\perp} \cap M$, $[u] \in N(\sigma)$. Dicho emparejamiento está bien definido ya que si $w = u + v$ para algún $v \in N_\sigma$, entonces

$$\langle m, w\rangle = \langle m, u + v\rangle = \langle m, u\rangle + \langle m, v\rangle = \langle m, u\rangle.$$

Definimos

$$\begin{aligned} \psi : \sigma^{\perp} \cap M &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N(\sigma), \mathbb{Z}) \\ m &\mapsto ([u] \mapsto \langle m, [u]\rangle'). \end{aligned}$$

En particular $\sigma^{\perp} \cap M$ es un grupo y es claro que ψ es un homomorfismo de grupos. Probaremos que ψ es de hecho un isomorfismo de grupos. En efecto, supongamos que $\psi(m) \equiv 0$ para algún $m \in \sigma^{\perp} \cap M$, es decir,

$$\langle m, [u]\rangle' = \langle m, u\rangle = 0,$$

para todo $[u] \in N(\sigma)$, de donde se sigue que $m = 0$ y por tanto ψ es inyectiva.
Luego, sea

$$\alpha : N(\sigma) \to \mathbb{Z}$$

un homomorfimo de grupos. Mediante la composición con la proyección canónica, obtenemos un homomorfismo

$$\tilde{\alpha} : N \to \mathbb{Z}$$

dado por $\tilde{\alpha}(u) = \alpha([u])$ para todo $u \in N$. Dado que la identificación entre M y $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ es mediante el emparejamieto natural entre M y N, es posible encontrar $m \in M$ tal que $\alpha([u]) = \tilde{\alpha}(u) = \langle m, u \rangle$, para todo $u \in N$. Más aún, cualquier $x \in \sigma$ es de la forma

$$x = a_1 u_1 + ... + a_k u_k,$$

con $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $u_i \in \sigma \cap N$, en consecuencia,

$$\langle m, x \rangle = a_1 \langle m, u_1 \rangle + ... + a_k \langle m, u_k \rangle = a_1 \alpha([u_1]) + ... + a_k \alpha([u_k]) = 0.$$

Esto implica que $m \in \sigma^{\perp} \cap M$ y por tanto ψ es sobreyectivo.

Por último, si los conjuntos $\{e_1, ..., e_k\}$ y $\{e_1^*, ..., e_k^*\}$ son bases de $N(\sigma)$ y $\sigma^{\perp} \cap M$ respectivamente, entonces por la Proposición 1.2.5 tenemos el isomorfismo

$$(T_{N(\sigma)})_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^{\perp} \cap M, \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}^*) \xrightarrow{\cong} N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}^*$$

dado por $\alpha \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{k} e_i \otimes \alpha(e_i^*)$. □

El lema anterior nos ayudará a probar que la órbita $(T_N)_{\mathbb{Q}} \cdot \gamma_{\mathbb{Q}}^{\sigma}$ asociada a cada punto especial es un toro proalgebraico. Más precisamente tenemos la siguiente:

Proposición 3.3.4. *Sea σ cono poliédrico, racional y fuertemente convexo en $N_{\mathbb{R}}$. Si $(\mathcal{O}(\sigma))_{\mathbb{Q}} := (T_N)_{\mathbb{Q}} \cdot \gamma_{\mathbb{Q}}^{\sigma}$ entonces*

$$\begin{aligned}(\mathcal{O}(\sigma))_{\mathbb{Q}} &= \{\gamma : S^{\sigma} \to \mathbb{C}_{\mathbb{Q}} \mid \gamma(m) \neq (0_j)_j \Leftrightarrow m \in \sigma^{\perp} \cap M\} \\ &\simeq Hom_{\mathbb{Z}}(\sigma^{\perp} \cap M, \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}^*) \\ &= (T_{N(\sigma)})_{\mathbb{Q}}.\end{aligned}$$

Demostración. La prueba es una completa analogía a la demostración de lema 3.2.5 en [5].

Sea $\mathcal{O}' := \{\gamma : S^{\sigma} \to \mathbb{C}_{\mathbb{Q}} \mid \gamma(m) \neq (0_j)_j \Leftrightarrow m \in \sigma^{\perp} \cap M\}$ y obsérvese que $\sigma^{\perp} \cap M \subseteq S^{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$. De hecho, $\sigma^{\perp} \cap M$ es un grupo con la misma operación que S^{σ}. Así, si $\gamma \in \mathcal{O}'$, entonces la restricción $\gamma|_{\sigma^{\vee} \cap M} : \sigma^{\vee} \cap M \to \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}^*$ es homomorfismo de grupos. Recíprocamente, si $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^{\perp} \cap M, \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}^*)$, entonces la función

$$m \in S^{\sigma} \mapsto \begin{cases} \alpha(m) & \text{si } m \in S^{\sigma} \cap \sigma^{\perp} = \sigma^{\perp} \cap M, \\ (0_j)_j & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es un homomorfismo de semigrupos y en consecuencia un elemento en $\mathcal{O}'$. Por tanto $\mathcal{O}' \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^{\perp} \cap M, \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}^*)$.

Consideremos ahora la sucesión exacta

$$0 \to N_\sigma \to N \to N(\sigma) \to 0.$$

Haciendo producto tensorial con $\mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ obtenemos un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos (grupos) sobreyectivo

$$N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \to N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \to 0.$$

En particular, $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ actúa en $N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ de manera transitiva. Mediante los isomorfismos

$$N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}) = (T_N)_{\mathbb{Q}} \text{ y } N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}) = (T_{N(\sigma)})_{\mathbb{Q}},$$

la acción de $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ en $N(\sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}$ se corresponde con la acción

$$(T_N)_{\mathbb{Q}} \times (T_{N(\sigma)})_{\mathbb{Q}} \to (T_{N(\sigma)})_{\mathbb{Q}}$$

dada por $\gamma \cdot \alpha = (\gamma|_{\sigma^\perp \cap M})\alpha$. Se sigue que ésta última es también transitiva. Por otro lado, obsérvese que $\mathcal{O}'$ es invariante bajo la acción de $(T_N)_{\mathbb{Q}}$ descrita en (3.4) y además contiene al punto especial $\gamma^\sigma_{\mathbb{Q}}$. Más aún, la acción de $(T_N)_{\mathbb{Q}}$ es compatible con la biyección

$$(T_{N(\sigma)})_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}) \simeq \mathcal{O}'.$$

Por tanto, $\gamma^\sigma_{\mathbb{Q}}(m) \in \mathcal{O}'$ implica que $\mathcal{O}(\sigma)_{\mathbb{Q}} = \mathcal{O}'$. □

Ahora podemos probar el resultado principal de este trabajo, el cual es análogo al teorema 3.3.1 para variedades tóricas.

Teorema 3.3.5. *(La correspondencia entre conos y $(T_N)_{\mathbb{Q}}$-órbitas) Sea $\mathcal{F}$ abanico en $N_{\mathbb{R}}$ y $X^{\mathcal{F}}_{\mathbb{Q}}$ la completación proalgebraica de la variedad tórica $X^{\mathcal{F}}$. Entonces*

(a) Se tiene una corresponencia biyectiva

$$\begin{aligned} \{\textit{Conos } \sigma \in \mathcal{F}\} &\longleftrightarrow \{(T_N)_{\mathbb{Q}}\textit{-órbitas en } X^{\mathcal{F}}_{\mathbb{Q}}\} \\ \sigma &\longleftrightarrow (\mathcal{O}(\sigma))_{\mathbb{Q}} \simeq \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*_{\mathbb{Q}}). \end{aligned}$$

(b) Supongamos que dim $N_{\mathbb{R}} = r$. Para cada cono $\sigma \in \mathcal{F}$, la órbita $(\mathcal{O}(\sigma))_{\mathbb{Q}}$ es una laminación de dimensión igual a $2(r - \dim \sigma)$.

(c) Para cada $\sigma \in \mathcal{F}$ la completación $X^\sigma_{\mathbb{Q}}$ es la unión de órbitas

$$X^\sigma_{\mathbb{Q}} = \bigcup_{\tau \preceq \sigma} (\mathcal{O}(\tau))_{\mathbb{Q}}.$$

Demostración. La inyectividad en (a) es clara a partir de la proposición 3.3.4. Para la sobreyectividad, sea $\mathcal{O}$ una $(T_N)_{\mathbb{Q}}$-órbita de $X^{\mathcal{F}}_{\mathbb{Q}}$. Obsérvese que como

$$X^{\mathcal{F}}_{\mathbb{Q}} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{F}} X^\sigma_{\mathbb{Q}},$$

si $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{F}$, entonces de (3.2) los elementos de $X_{\mathbb{Q}}^{\sigma_1}$ que se relacionan con los elementos de $X_{\mathbb{Q}}^{\sigma_2}$ son precisamente los elementos de $X_{\mathbb{Q}}^{\sigma_1 \cap \sigma_2}$, es decir,

$$X_{\mathbb{Q}}^{\sigma_1} \cap X_{\mathbb{Q}}^{\sigma_2} = X_{\mathbb{Q}}^{\sigma_1 \cap \sigma_2}.$$

Más aún, cada $X_{\mathbb{Q}}^{\sigma}$ es invariante bajo la acción (3.4) del toro $(T_N)_{\mathbb{Q}}$. Por tanto, existe un único cono minimal[1] $\sigma \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{O} \subseteq X_{\mathbb{Q}}^{\sigma}$. Probaremos que $\mathcal{O} = (\mathcal{O}(\sigma))_{\mathbb{Q}}$ y tendremos (a). En efecto, sea $\gamma \in \mathcal{O}$ y consideremos el conjunto

$$S := \{m \in S^\sigma \mid \gamma(m) \neq (0_j)_j\}.$$

Obsérvese que si $\pi_j : \mathbb{C}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}$ es la proyección canónica para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces

$$S = \{m \in S^\sigma \mid \gamma(m) \neq (0_j)_j\} = \{m \in S^\sigma \mid (\pi_j \circ \gamma)(m) \neq 0\}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $S = \Gamma \cap M$ para alguna cara Γ de $\sigma^\vee$ (ejercicio 3.2.6 [5]). Por la proposición 1.3.5, existe una cara τ de σ tal que $\Gamma = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$. Así,

$$S = \Gamma \cap M = \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M,$$

implica que $\gamma \in X_{\mathbb{Q}}^{\tau}$, de donde se sigue que $\tau = \sigma$ por la minimalidad de σ. De esta manera

$$S = \sigma^\perp \cap M$$

y por la proposición 3.3.4 se tiene que $\gamma \in (\mathcal{O}(\sigma))_{\mathbb{Q}}$. Por tanto $\mathcal{O} = (\mathcal{O}(\sigma))_{\mathbb{Q}}$ ya que dos órbitas son iguales, o bien, disjuntas.

Para (b) obsérvese que el toro $T_{N(\sigma)}$ tiene látice de caracteres $\sigma^\perp \cap M$ y

$$\operatorname{rank}\,(\sigma^\perp \cap M) = \dim \sigma^\perp.$$

Además, mediante la biyección en la proposición 1.3.5 entre las caras de σ y las caras de $\sigma^\vee$, la cara $\sigma^\perp$ de $\sigma^\vee$ se corresponde con el cono σ y

$$\dim \sigma^\perp = r - \dim \sigma.$$

Así, por la proposición 3.3.4 y el teorema 3.1.2, la órbita $(\mathcal{O}(\sigma))_{\mathbb{Q}} \simeq (T_{N(\sigma)})_{\mathbb{Q}}$ es una laminación de dimensión $2(r - \dim \sigma)$.

Para (c), sabemos que $X_{\mathbb{Q}}^{\sigma}$ es una unión de órbitas. Si τ es una cara de σ se tiene que

$$(\mathcal{O}(\tau))_{\mathbb{Q}} \subset X_{\mathbb{Q}}^{\tau} \subset X_{\mathbb{Q}}^{\sigma}.$$

Recíprocamente, de manera análoga a la prueba de (a), cualquier órbita $\mathcal{O}$ contenida en $X_{\mathbb{Q}}^{\sigma}$ es de la forma $\mathcal{O} = (\mathcal{O}(\tau'))_{\mathbb{Q}}$ para alguna cara τ' de σ. $\square$

[1] minimal en el sentido de que si $\mathcal{O} \subset X_{\mathbb{Q}}^{\tau}$ para alguna cara τ de σ, entonces $\tau = \sigma$.

Bibliografía

[1] Burgos, J., and Verjovsky, A. Adelic toric varieties and adelic loop groups. *arXiv:2001.07997v2* (2021).

[2] Burgos, J. M., and Verjovsky, A. Proalgebraic toric completion of toric varieties. *arXiv preprint arXiv:2001.07997* (2020).

[3] Cohen, R. L. The topology of fiber bundles lecture notes. *Standford University* (1998).

[4] Cox, D., Little, J., and OShea, D. *Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Springer Science & Business Media, 2013.

[5] Cox, D. A., Little, J. B., and Schenck, H. K. *Toric varieties*, vol. 124. American Mathematical Soc., 2011.

[6] Fulton, W. *Introduction to Toric Varieties.(AM-131), Volume 131*. Princeton university press, 2016.

[7] Gromov, M. Endomorphisms of symbolic algebraic varieties. *Journal of the European Mathematical Society 1*, 2 (1999), 109–197.

[8] Gromov, M. Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps: I. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry 2*, 4 (1999), 323–415.

[9] Hartshorne, R. *Algebraic geometry*, vol. 52. Springer Science & Business Media, 2013.

[10] Humphreys, J. E. *Linear algebraic groups*, vol. 21. Springer Science & Business Media, 2012.

[11] Lyubich, M., and Minsky, Y. Laminations in holomorphic dynamics. *Journal of Differential Geometry 47*, 1 (1997), 17–94.

[12] Mardešic, S., and Segal, J. *Shape theory: the inverse system approach*. Elsevier, 1982.

[13] Oda, T. *Convex bodies and algebraic geometry: an introduction to the theory of toric varieties*. Springer, 1983.

[14] Tauvel, P., and Rupert, W. *Lie algebras and algebraic groups*. Springer, 2005.

[15] Wilson, J. S. *Profinite groups*, vol. 19. Clarendon Press Oxford, 1998.