Ciencias computacionales

Propedeutico: Matemáticas Discretas.

INAOE

Contents

Material multimedia recomendado:

Grafos:

- https://www.youtube.com/watch?v=pzca71UtH-A&list=PL5098BF5A01819B3B
- https://www.youtube.com/watch?v=bMuREgDMhK4&index=2&list=PL5098BF5A01819B3B
- https://www.youtube.com/watch?v=EvKh9pZSl98&list=PL5098BF5A01819B3B&index=5
- https://www.youtube.com/watch?v=IgJ9_jrhhNI&list=PL5098BF5A01819B3B&index=6
- https://www.youtube.com/watch?v=fyDfJzwF87Y&index=9&list=PL5098BF5A01819B3B
- https://www.youtube.com/watch?v=K6wiuOfAg38&list=PL5098BF5A01819B3B&index=12
- https://www.youtube.com/watch?v=kUy4L1P49jA&index=13&list=PL5098BF5A01819B3B

1 Grafos.

1.1 Definiciones básicas

Los grafos son estructuras discretas que constan de vértices y aristas que conectan entre si esos vértices. Por lo tanto un grafo G costa de dos partes:

1) Un conjunto $V = V(G)$ cuyos elementos se denominan vértices, puntos o nodos de G.
2) Un conjunto $E = E(G)$ de pares de vértices distintos denominados aristas de G.

Hay dos tipos básicos de grafos: grafos no dirigidos y gafos dirigidos.

Grafo dirigido

Sea V un conjunto finito no vació, y sea la relación binaria $E \subseteq V x V$. El par ordenado (V, E) es un grafo dirigido sobre V, o digrafo, donde V es el conjunto de vértices o nodos y E es su conjunto de aristas. Escribimos $G = (V, E)$ para denotar tal digrafo.

En la Figura 1 se puede ver cómo se representan los grafos dirigidos o dígrafos, con vértices $V = \{A, B, C\}$ y aristas $E = \{(B, A), (A, C), (C, A), (C, B)\}$.

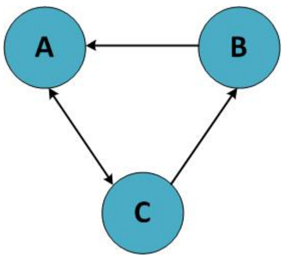


Figure 1: Grafo dirigido

La dirección de una arista se indica al colocar una flecha dirigida sobre ella como se muestra en la figura. para cualquier arista, por ejemplo (B, A) decimos que el vértice B es origen o fuente, mientras que el vértice A es el termino o vértice terminal. En el caso de tener un flecha en los dos sentidos, se dice que el vértice A es origen de vértice C y al mismo tiempo el vértice C es origen de A.

Grafo no dirigido

Cuando no importa la dirección de las aristas, la estructura $G = (V, E)$, donde E es ahora un conjunto de pares no ordenados sobre V, es decir el conjunto de aristas representa una relación simétrica binaria, donde si V_j y V_k son vértices cualesquiera del conjunto de vértices V de un grafo, $(V_j, V_k) \in E \longrightarrow (V_k, V_j) \in E$. Decimos que tenemos un grafo no dirigido.

En la Figura 2 se puede ver cómo se representan los grafos no dirigidos, con vértices $V = \{A, B, C, D\}$ y aristas $E = \{(A, B), (B, C), (C, D), (D, A)\}$.

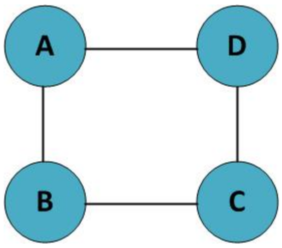


Figure 2: Grafo no dirigido

En un grafo no dirigido, hay aristas no dirigidas, donde una arista como por ejemplo (A, B) representa $\{(A, B), (B, A)\}$, pues son una relación simétrica binaria (no ordenada).

Otras definiciones

En un grafo $G = (V, E)$ dirigido o no dirigido, los vértices u y v son **adyacentes** o vecinos si hay una arista $e = \{u, v\}$. En este caso, u y v se denominan **extremos** de e, y se dice que e conecta o une u y v, o también que la arista e es **incidente** (o que incide) en cada uno de sus extremos u y v.

Por ejemplo como se muestra en la figura 3, para la arista $e = (A, B)$, decimos que la arista es incidente en los extremos (vértices A y B) y el vértice A es adyacente a B, así como B es adyacente a A.

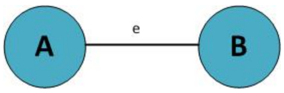


Figure 3: Grafo

Dos aristas asociadas al mismo par de vértices son aristas paralelas o multiaristas; una arista incidente en un sólo vértice es un ciclo: un vértice que no es incidente en ninguna arista es un vértice aislado. En la figura 4, se ilustran estas definiciones.

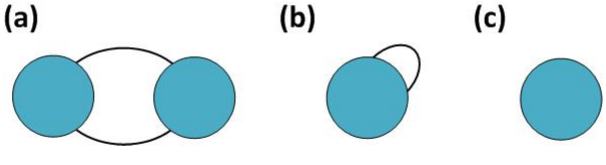


Figure 4: Ejemplos: a) aristas paralelas, b) ciclos y c) vértice aislado

Subgrafos

Considere un grafo $G = G(V, E)$. Un grafo $H = H(V', E')$, se denomina subgrafo de G si los vértices y las aristas de H están contenidas en los vértices y en las aristas de G; es decir, si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. En particular:

i) Un subgrafo $H(V', E')$ de G(V, E) se denomina subgrafo inducido por sus vértices V' si su conjunto de aristas E' contiene todas las aristas en G cuyos puntos extremos pertenecen a los vértices en H.

ii) Si v es un vértice en V, entonces $G - v$ es el subgrafo de G obtenida al eliminar v de G y al eliminar todas las aristas en G que contienen a v.

iii) Si e es una arista en G, entonces $G - e$ es el subgrafo de G obtenido al eliminar la arista e de G.

En la figura 5 se muestra en (a) un grafo, del cual tanto (b) como (c) son subgrafos de (a). Dado que el conjunto de vértices del grafo (b) es subconjunto de los vértices del grafo (a) $\{A, B, C, D\} \subset \{A, B, C, D, E\}$ y lo mismo sucede para las aristas $\{e_1'\} \subset \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, por lo tanto decimos que el grafo (b) es un subgrafo de (a) y lo mismo sucede para el subgrafo (c)

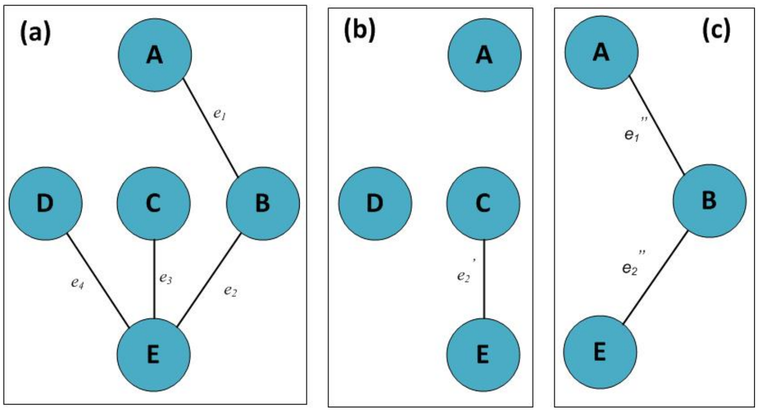


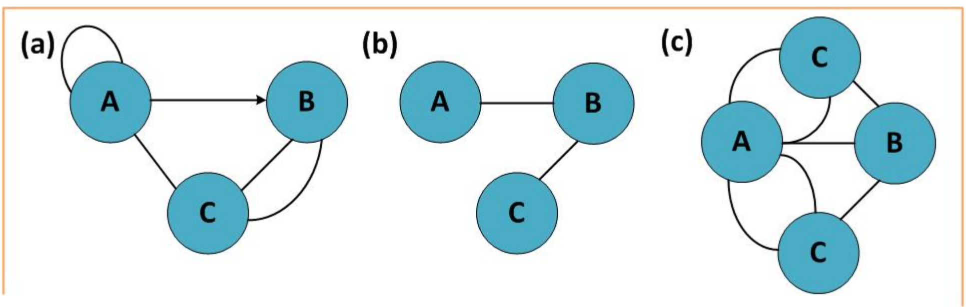
Figure 5: Subgrafos

Tipos de grafos

Además de los dos grafos básicos, dirigidos y no dirigidos, hay otros tipos de grafos, tales como:

- **Grafos de cadena:** son un tipo de grafo híbrido formado por aristas dirigidas y no dirigidas.
- **Grafos simple:** Es un tipo de grafo el cual no incluye ciclos ni aristas paralelas.
- **Multigrafo:** Son grafos con dos o más aristas que pueden conectar a un mismo vértice
- **Grafos completo:** Es un grafo con aristas entre cada par de vértices.
- **Grafo bipartito:** Son grafos que se pueden dividir en dos subconjuntos disjuntos de vértices, donde cada una de las aristas conecta un vértice del primer conjunto con uno del segundo.
- **Grafo pesado:** Es un grafo que tiene pesos asociados a vértices y/o aristas.

En la Figura 6 se muestran la representación de los distintos tipos de grafos



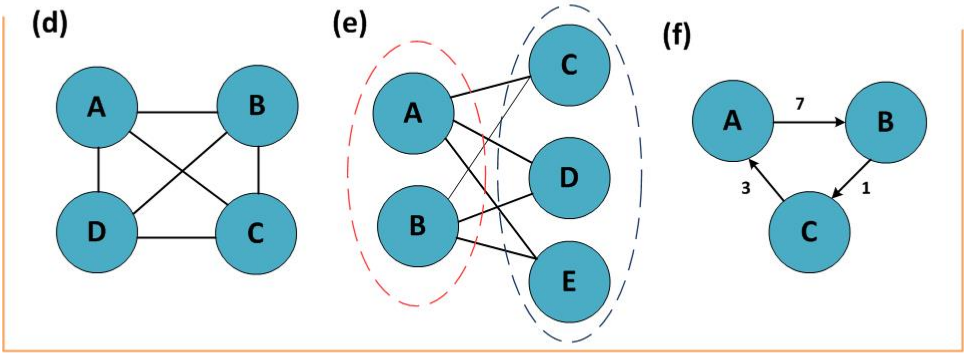


Figure 6: tipos de grafos: a)grafo de cadena, b) grafo simple, c) multigrafo, d) grafo completo, e) grafo bipartito, f) grafo pesado

1.2 Caminos

Definición Sean x, y vértices (no necesariamente distintos) de un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Un camino $x - y$ en G es una sucesión alternada finita (sin lazos) de vértices y aristas de G, que comienza en el vértice x y termina en el vértice y; que contiene las n aristas $e_i = x_{i-1}, xi$ donde $1 \leq i \leq n$.

$$x = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, \cdots, e_{n-1}, x_{n-1}, e_n, x_n = y$$

La longitud n de un camino es el número de aristas que hay en el camino (Si $n = 0$, no existen aristas, $x = y$, y el camino se denomina trivial).

En la Figura 7, se muestra un camino de F a C el cual es de longitud 6 y se puede representar por medio de sus vértices como la secuencia $\{F, B, D, E, A, B, C\}$ o a traves de sus aristas $\{(F, B), (B, D), (D, E), (E, A)$ $, (A, B), (B, C)\}$.

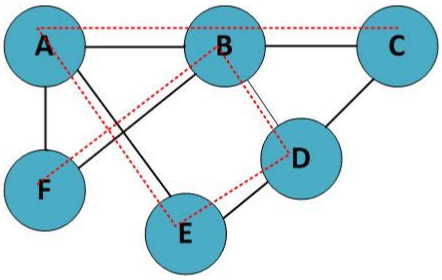


Figure 7: Camino de F a C

Cualquier camino $x - y$ no trivial donde $x = y$ es un **camino cerrado**. En caso contrario, el camino es abierto como el mostrado en la figura 7.

En la Figura 8 se muestra un camino cerrado pues sin importar que vértice tomemos el camino empieza en él y termina en él ($x = y$). Por ejemplo para el camino que comienza en el vértice A tendríamos $\{A, E, D, B, F, A\}$, donde el vértice inicial es también el vértice final, por lo tanto el camino es cerrado.

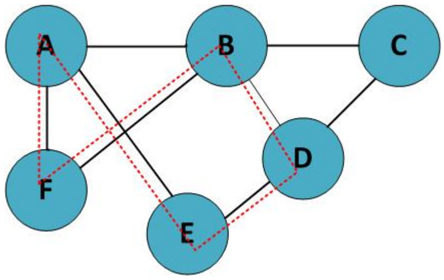


Figure 8: Camino cerrado

Cuando ningún vértice del camino $x - y$ se presenta más de una vez, el camino es un camino simple. En la Figura 9 se muestra el camino simple A-E de longitud cuatro, que va de $\{A, F, B, D, E\}$.

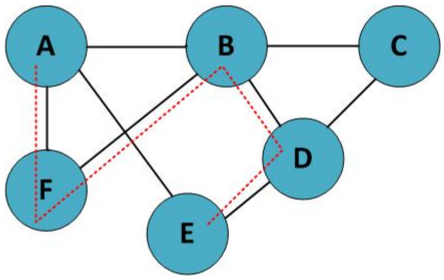


Figure 9: Camino simple

Recorridos

Sean x, y vértices de un grafo $G = (V, E)$. Si no se repite alguna arista en el camino $x - y$, entonces el camino es un recorrido $x - y$. Por ejemplo el camino simple mostrado en la Figura 9, también es un recorrido. Sin embargo el camino A-B mostrado en la Figura 10 de igual forma es un recorrido apresar de no ser un camino simple.

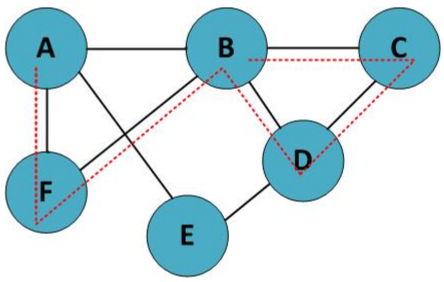


Figure 10: Recorrido

Circuitos

Sean x, y vértices de un grafo $G = (V, E)$, donde $x = y$. Si no se repite alguna arista en el camino $x - y$, entonces existe un circuito $x - y$. En otras palabras podemos decir que un circuito es un recorrido donde el vértice inicial es también el final (recorrido cerrado). En la Figura 11 se muestra un circuito en el grafo, pues sin importar que vértice tomemos el camino empieza en él y termina en él, sin repetir ninguna arista

Ciclos

Sean x, y vértices de un grafo $G = (V, E)$, donde $x = y$. Cuando ningún vértice del camino $x - y$

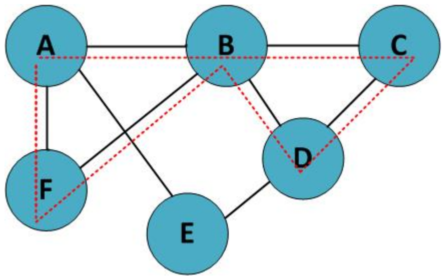


Figure 11: Circuito

se presenta más de una vez tenemos un ciclo, es decir un ciclo es un camino simple cerrado. En la Figura 12 se tiene un ciclo pues la trayectoria corresponde a un camino simple donde el vértice inicia es también el final.

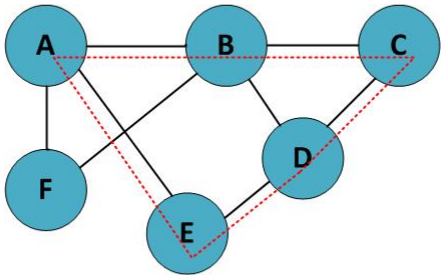


Figure 12: Ciclo

1.3 Conectividad

Un grafo $G = (V, E)$ es conexo si para cualquier par de vértices u, y v existe un camino en G que los une, es decir un camino con extremos u y v. En la Figura 13 se muestra un grafo G con vértices $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ y aristas $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, del cual se pueden formar dos subgrafos $W = (\{A, B, C, D, E\}, \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\})$ y $Z = (\{F.G.H\}, \{e_6, r_7\})$. Se puede afirmar que el grafo G no es conexo pues no existe un camino del vértice A con el vértice F, dado que si existe un solo par de vértices sin camino el grafo no es conexo. Sin embargo los subgrafos W y Z si son conexos pues existe un camino entre cualquier par de vértices que lo forman.

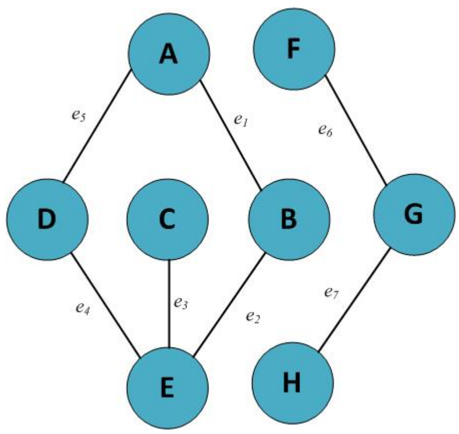


Figure 13: Grafo conexo

Un grafo G está conectado si hay una trayectoria entre cada par de vértices distintos en G. Si un grafo G no está conectado, cada parte sí esté conectada se llama un componente conexa de G.

Entre las diferentes trayectorias que podemos encontrar en un grafo se encuentran cominos, recorridos, circuitos y ciclos.

En la Tabla 1 se muestra un resumen de las trayectorias mencionadas anteriormente donde se muestra la definición de éstas de una manera más simplificada.

Table 1: Resumen trayectorias

Vértice(s), repetido(s)	**Arista(s), repetida(s)**	**Abierto**	**Cerredo**	**Nombre**
Si	Si	Si		Camino
Si	Si		Si	Camino cerrado
Si	No	Si		Recorrido
Si	No		Si	Circuito
No	No	Si		Camino simple
No	No		Si	Ciclo

1.4 Grafos Eulerianos y Hamiltonianos

Sea G un grafo o multigrafo no dirigido. Para cualquier vértice v de G, el grado de v, que se denota *grad(v)*, es el número de aristas en G que son incidentes con v. Cuando $grad(v) = 0$ se dice que v es un vértice aislado. en la Figura 14 se muestra un multigrafo no dirigido donde el grado del vértice B es $grad(B) = 6$, pues seis aristas inciden sobre él. Observe que cuando se presentan lazos en un vértice se consideran como dos incidencias

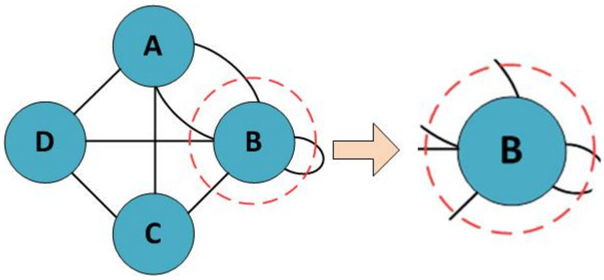


Figure 14: Grado de un vértice

La sucesión de grados de un grafo se obtiene ordenando en forma creciente los grados de todos los vértices. Puesto que cada arista se cuenta dos veces al contar los grados de los vértices de G, se tiene el siguiente resultado:

En todo grafo G=(V, E) se cumple

$$\sum_{v \in V} grad(v) = 2|E| \quad (1)$$

Según la ecuación 1, para el grafo de la Figura 14 se tiene que

$$grad(A) + grad(B) + grad(C) + grad(D) = 16$$

Lo cual se puede comprobar al sumar los grados de cada vértice del grafo. Un vértice es par o impar si su grado es un número par o impar. Por lo que para el grafo de la Figura 14 los vértices A y B son pares, mientras que los vértices C y D son impares.

Caminos y circuitos Eulerianos

Definición Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo no dirigido sin vértices aislados. Un circuito Euleriano es un circuito en G que recorra cada arista del grafo exactamente una vez. Un recorrido abierto de A a B en G que recorre cada arista de G exactamente una vez, se llamará camino Euleriano.

En la Figura 15 a) se muestra un camino Euleriano que va de A a B (A-B-C-D-A-B), mientras que en la Figura 15 b) se muestra un circuito de Euleriano.

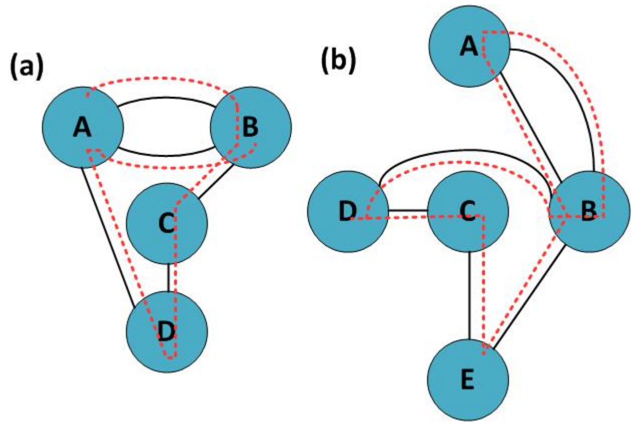


Figure 15: Camino y circuito Euleriano

Podemos determinar si un grafo contiene un recorrido Euleriano si cumple con lo siguiente:

- Si un grafo conexo tiene más de dos nodos con grado impar, no existe un recorrido Euleriano.
- Si existen exactamente dos vértices de grado impar, el grafo se puede recorrer, el recorrido Euleriano ha de empezar en uno de los dos vértices de grado impar y terminar en el otro; por lo tanto el grafo contiene un camino Euleriano.
- Si no existen vértices de grado impar, el grafo se puede recorrer. El recorrido Euleriano siempre será cerrado, es decir será un circuito Euleriano.

Grafos Hamiltonianos

En el análisis anterior sobre los grafos Eulerianos se recalcaron las aristas recorridas; aquí la atención se centra en la visita de vértices. Un camino Hamiltoniano en un grafo G, es un recorrido que visita todos los vértices en G exactamente una vez. Si el recorrido es cerrado se tiene un circuito Hamiltoniano. Observe que un recorrido Euleriano recorre cada arista exactamente una vez, aunque puede repetir vértices, mientras que un recorrido Hamiltoniano visita cada vértice exactamente una vez, pero no puede repetir aristas y no tiene que pasar por todas.

Dado lo anterior se tiene la siguiente definición. Si $G = (V, E)$ es un grafo o multigrafo con $|V| \geq 3$, decimos que G tiene un circuito Hamiltoniano si existe un circuito en G que contenga cada vértice de V y un camino Hamiltoniano es un camino simple de G que contiene todos los vértices.

En la Figura 16 se proporciona un ejemplo de camino Hamiltoniano (figura 16 a)) y un circuito Hamiltoniano (Figura 16 b)).

Aunque resulta evidente que sólo los grafos conexos pueden ser Hamiltonianos, no hay ningún criterio simple para decidir si un grafo contiene un recorrido Hamiltoniano o no.

1.5 Grafos bipartitos y cliqués

Grafos bipartitos

Un grafo G es bipartido si sus vértices V pueden dividirse en dos subconjuntos M y N tales que cada arista de G une un vértice de M con un vértice de N.

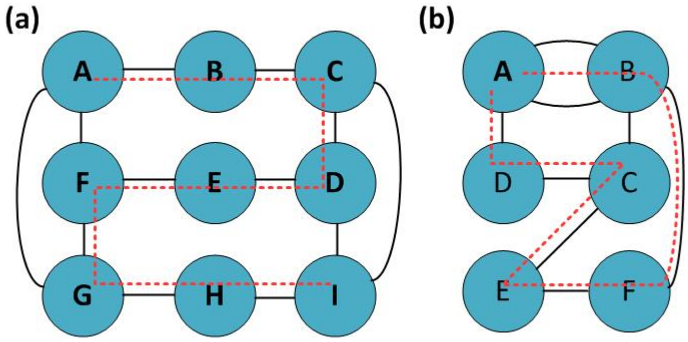


Figure 16: Camino y circuito Hamiltoniano

Definición Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito si $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y cada arista de G es de la forma $\{a, b\}$ con $a \in V_1$ y $b \in V_2$. Si cada vértice de V_1 está unido con los vértices de V_2, se tiene un grafo bipartito completo. En este caso, si $V_1 = m$, $V_2 = n$, el grafo se denota con $K_{m,n}$.

En la Figura 17 se muestra en la parte (a) un grafo bipartito, pues satisface la definición para $V_1 = \{A, B\}$ y $V_2 = \{C, D, E\}$ donde estos subconjuntos están relacionados mediante aristas. En lo que respecta al grafo de la parte (b) se tiene un grafo bipartito completo $K_{3,3}$, pues cada vértice del subconjunto $V_1 = \{A, B, C\}$ se une mediante aristas a cada vértice del subconjunto $V_2 = \{D, E, F\}$

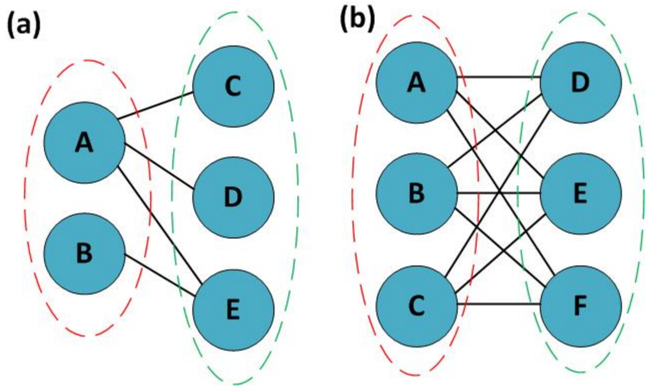


Figure 17: Grafos bipartitos

Cliqués

Un conjunto completo, W_c es un subconjunto de vértices de G que induce un subgrafo completo de G. En otras palabras es un subconjunto de vértices de G de modo que cada par de nodos en este subgrafo es adyacente.

Un cliqué, C, es un subgrafo del grafo G inducido por un conjunto completo que es máximo; Es decir, no hay ningún otro conjunto completo en G que contenga a C.

En la Figura 18 se muestra un grafo con vértices $V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ el cual consta de cinco cliqués $C_1 = \{A, B\}$, $C_2 = \{G.E\}$, $C_3 = \{E, D, F\}$, $C_4 = \{B, C, D, E\}$ y $C_5 = \{A, G\}$, donde cada uno de estos subgrafos corresponde a un grafo completo. Observe que cada vértice en un grafo es parte de al menos un cliqué; Así, el conjunto de cliqués de un grafo siempre cubre todos los vértices del grafo G.

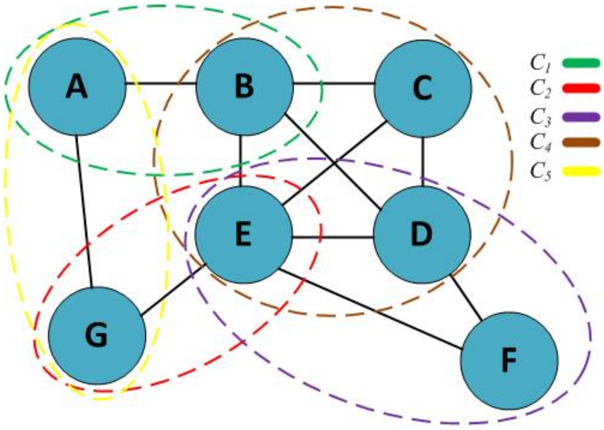


Figure 18: Cliques

1.6 Grafos planares

Definición Un grafo o multigrafo G es plano si podemos dibujar G en el plano de modo que sus aristas se intersequen sólo en los vértices de G. Este dibujo de G se conoce como una inmersión de G en el plano.

En la Figura 19 se muestran grafos planos. El primeros Figura (a) es plano dado que sus aristas no se cruzan, excepto en los vértices. El grafo de la figura (b) parece un grafo no plano puesto que las aristas $\{A, C\}$ y $\{B, D\}$ se cruzan en un punto que no es un vértice, sin embargo, podemos trazar nuevamente este grafo como se muestra en la figura (c), donde éste es equivalente al grafo (b) y en consecuencia el grafo (b) es plano.

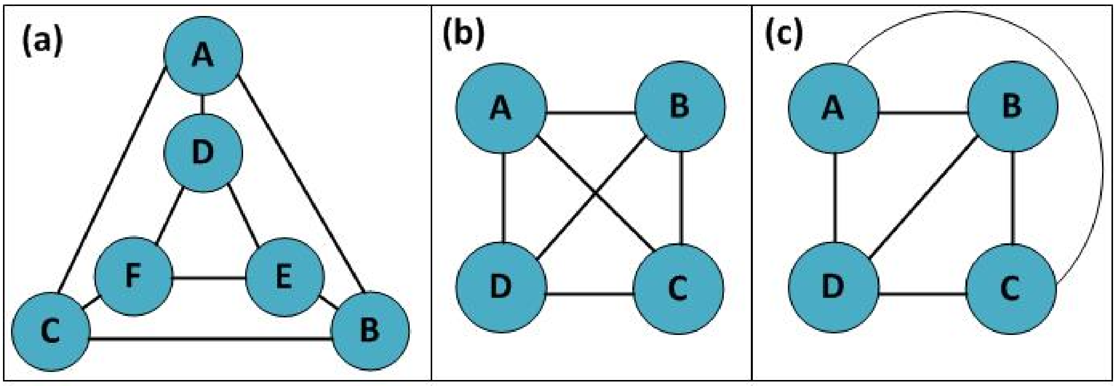


Figure 19: Grafos planares

1.7 Árboles

Si un grafo es un árbol, escribimos T en ves de G para enfatizar esta estructura. Algunas propiedades de los árboles en general son:

- Si a, b son vértices distintos en un árbol $T = (V, E)$, entonces hay un único camino simple que conecta estos vértices
- En cualquier árbol $T = (V, E)$ se cumple que el número de vértices es igual al número de aristas mas uno $|V| = |E| + 1$
- Para cualquier árbol $T = (V, E)$, si $|V| \geq 2$, entonces T tiene al menos dos vértices terminales (hojas)

Árboles no dirigidos.

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido sin lazos. El grafo G es un árbol no dirigido si G es conexo y no contiene ciclos. En la Figura 20 se muestran dos grafos (a) y (b), donde el grafo (a) coresponde a un árbol no dirigido , mientras que el grafo (b) no corresponde a un árbol pues existe un ciclo mediante los vértices $\{A, B\}$,$\{B, C\}$,$\{C, A\}$.

En un árbol no dirigido existen dos tipos de vértices

i) Vértices terminales de grado 1

ii) Vértices internos de grado mayor a 1

En el árbol de la Figura 20 a) los vértices $V = \{A, B, F, E\}$, son vértices terminales pues son de grado 1 y los vértices $V = \{C, D\}$, son vértices internos pues ambos son de grado 3. Los vértices terminales también se les llama hojas.

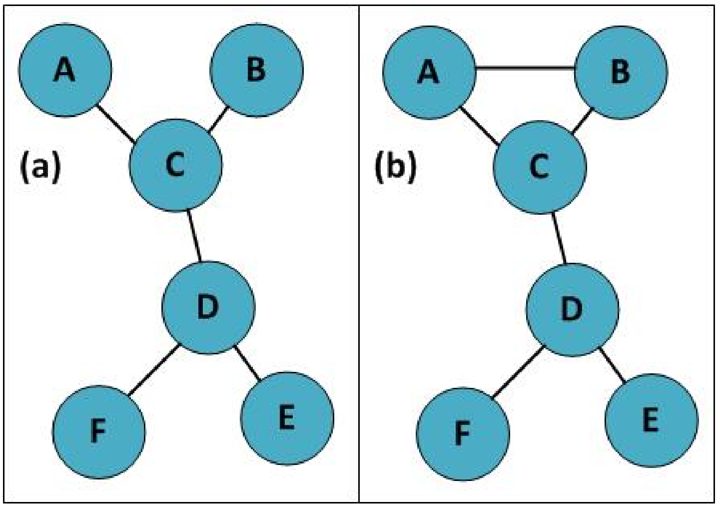


Figure 20: Árbol no dirigido

Árboles dirigidos

Dado G un grafo dirigido, G es un árbol dirigido si el grafo no dirigido asociado es un árbol. Existen dos tipos de arboles dirigidos a) Árbol con una sola raíz o árbol dirigido simple y b) Poliárbol o árbol dirigido con múltiples raíces. G es un árbol simple si existe un único vértice r en G, talque el grado de entrada de $r = grad_e(r) = 0$ y para todos los demás vértices v el grado de entrada de v es $grad_e(v) > 1$. G es un poliárbol si existe mas de un vértice r, es decir que tenga mas de una raíz.

En la Figura 21 se muestra en a) un poliárbol dado que el vértice A y D son raíces ya que ambos tienen su grado de entrada cero, mientras que en la figura b) se muestra un árbol dirigido simple, pues el vértice A es la única raíz dado su grado de entrada cero.

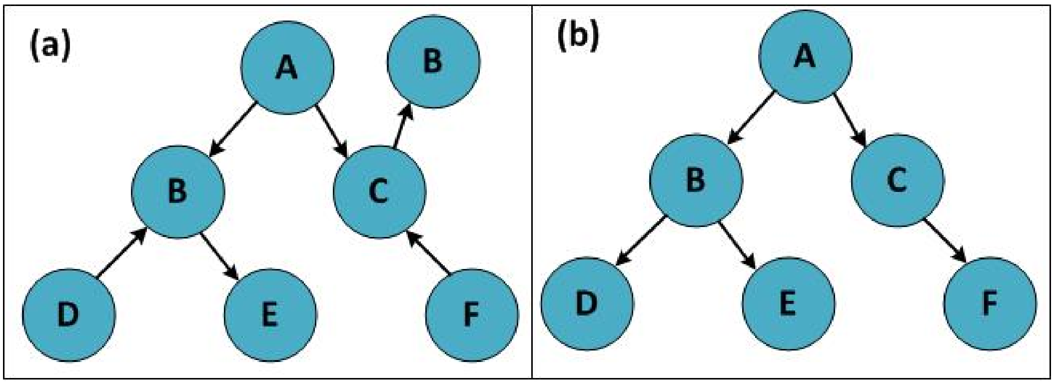


Figure 21: Árboles dirigidos

Algunas terminologías relevantes en los árboles dirigidos son las siguientes:

- **Raíz:** vértice con grado de entrada 0
- **Hoja:** vértice con grado de salida 0
- **Rama:** caminos desde la raíz hasta las hojas
- **Hijo/Padre:** arco de A a B, A es padre de B y B es hijo de A
- **Hermanos:** tienen el mismo padre
- **Descendientes/Ascendientes:** trayectoria de A a B, A es ascendiente de B y B es descendiente de A
- **Subárbol con A raíz:** A y todos sus descendientes
- **Subárbol de A:** subárbol con hijo de A como raíz

En el árbol de la Figura 22 se puede apreciar A que es la raíz, el subconjunto de vértices $\{E, F, J, K, H, I\}$ son las hojas,el subconjunto de vértices $\{B, C, D, G\}$ pertenecen a ramas, el vértice B es padre de E y F (hijos) al igual que C es padre de G, D es padre de H e I y G es padre de J y K;los subconjuntos de vértices $\{B, C, D\}$ son hermanos al igual que $\{E, F\}$, $\{H, I\}$ y $\{J, K\}$; C es ascendiente de los hermanos J,K y estos son sus descendientes.

en el grafo también se tiene tres subarboles con raíz A,C y D y finalmente un subarbol de C con raíz G.

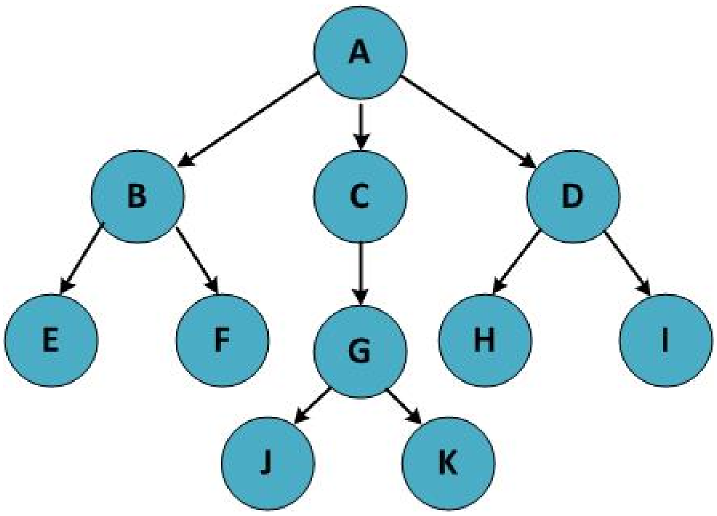


Figure 22: Árbol con raíz

1.8 Isomorfismo entre grafos

Se dice que los grafos $G(V, E)$ y $G^*(V^*, E^*)$ son isomorfos si existe una correspondencia uno a uno $f : V \longrightarrow V^*$ (función biyectiva) tal que $\{u, v\}$ es una arista de G si y sólo si $\{f(u), f(v)\}$ es una arista de G^*. Normalmente no se establece ninguna diferencia entre grafos isomorfos (aun cuando sus diagramas puedan "parecer diferentes").

En la Figura 23, se muestran dos grafos los cuales son isomorfos dado que la correspondencia de vértices de ambos grafos mantiene las adyacencias entre cada par de vértices de los grafos.

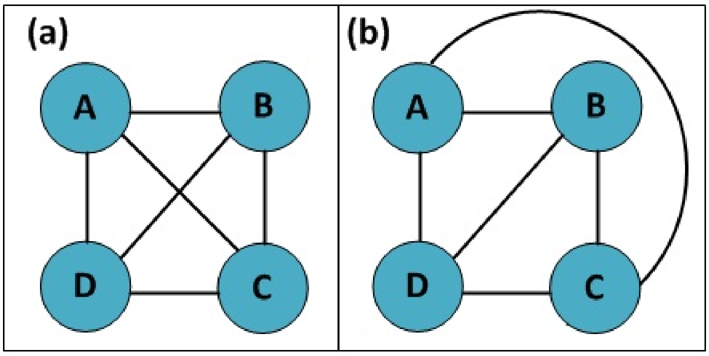


Figure 23: Grafos isomorfos

References

[1] R. Johnsonbaugh and M. G. Osuna, *Matemáticas discretas.* Pearson Educación, 2005.

[2] R. Grimaldi, *Matemáticas discreta y combinatoria: introducciún y aplicaciones.* Pearson Educación, 1998.

[3] K. H. Rosen and J. M. P. Morales, *Matemática Discreta y sus Aplicaciones.* 2004.

[4] L. E. Sucar, *Probabilistic Graphical Models.* Springer, 2015.

[5] S. Lipschutz and M. L. Lipson, *Matemáticas discretas.* McGraw Hill, 2007.