

Kosmonautika – teorie

J.Kousal, A.Vítek

Kosmonautika - teorie

- **Nebeská mechanika**
 - Newtonovy pohybové zákony, gravitační zákon
 - Keplerovy zákony
 - kosmické rychlosti
 - popis pohybu po elipse
 - anomálie, elementy dráhy
 - pohyb volného setrvačníku
 - moment setrvačnosti, hl.osa
 - reakce na silové působení
- **Reaktivní pohon**
 - impuls, specifický impuls
 - konstrukční číslo
 - Ciolkovského rovnice
- **Manévry**
 - jednoimpulzní manévry
 - změna výšky dráhy, Oberthův efekt
 - změna sklonu dráhy
 - víceimpulzní manévry
 - Hohmannovský transfer
 - setkávací manévry
 - „sféra vlivu“
 - meziplanetární přelety
 - manévry s nízkým tahem
- **Rušený pohyb**
 - nesymetrie g.pole, rušení dalšími tělesy
 - stáčení roviny, precese apsid
 - atmosféra, záření, magnetické pole
- **Speciální případy**
 - významné typy drah
 - GEO, heliosynchronní, Molnija
 - Lagrangeovy body
 - gravitační manévry
 - start nosiče
 - přistávací manévry

Newtonovy zákony

- pohybové zákony
 - 1. zákon setrvačnosti
 - Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo výslednice sil je nulová, pak těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.
 - 2. zákon síly
 - Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.
 - 3. zákon akce a reakce
 - Proti každé akci vždy působí stejná reakce; jinak: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.
 - (4. zákon superpozice)

- gravitační zákon

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

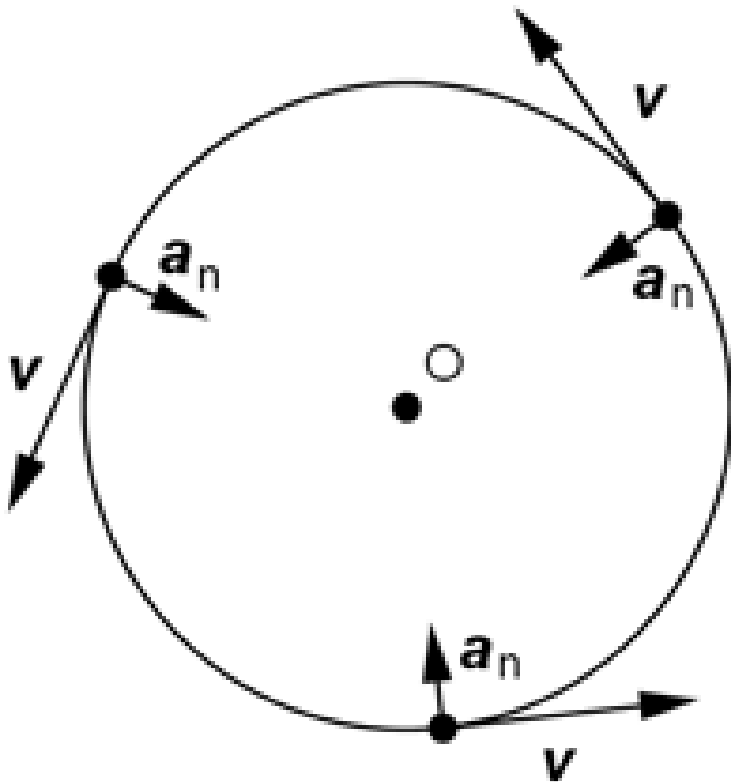
- $\kappa = 6.670 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
- v astrodynamice je obvyklejší nahrazovat součin $\kappa \cdot m_1 = \mu$ (gravitační parametr, někdy označováno GM)

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

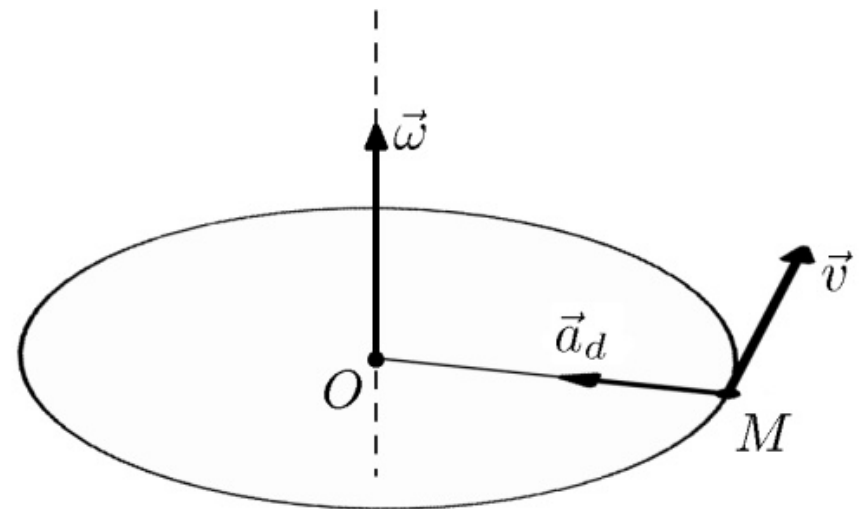
Dostředivé zrychlení, pohyb po kružnici

- dostředivé zrychlení [m.s^{-2}]
- obvodová rychlost [m.s^{-1}]
- úhlová rychlost [$(\text{rad}).\text{s}^{-1}$]

$$a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

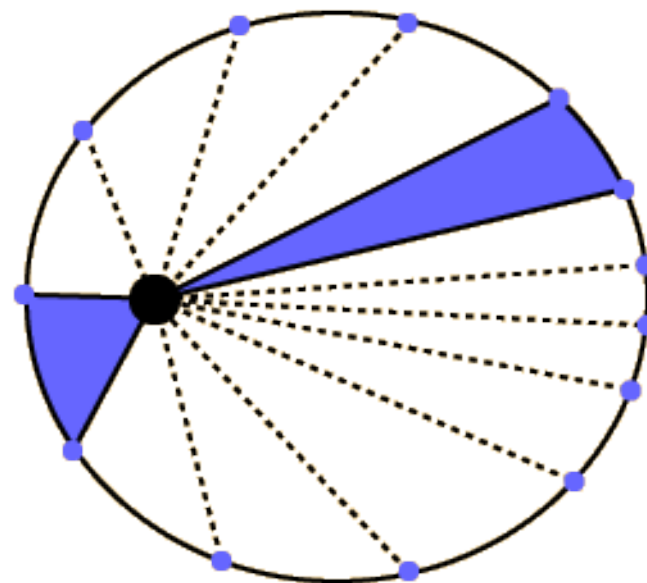


- Perioda
 - $T = 2 \pi / \omega = 2 \pi r / v$
- Frekvence
 - $f = \omega / 2 \pi = v / 2 \pi r$
 - ω = úhlová rychlost
 - v = obvodová rychlost
 - r = poloměr kružnice
- podobně:
 - kolmá složka okamžitého zrychlení x poloměr křivosti



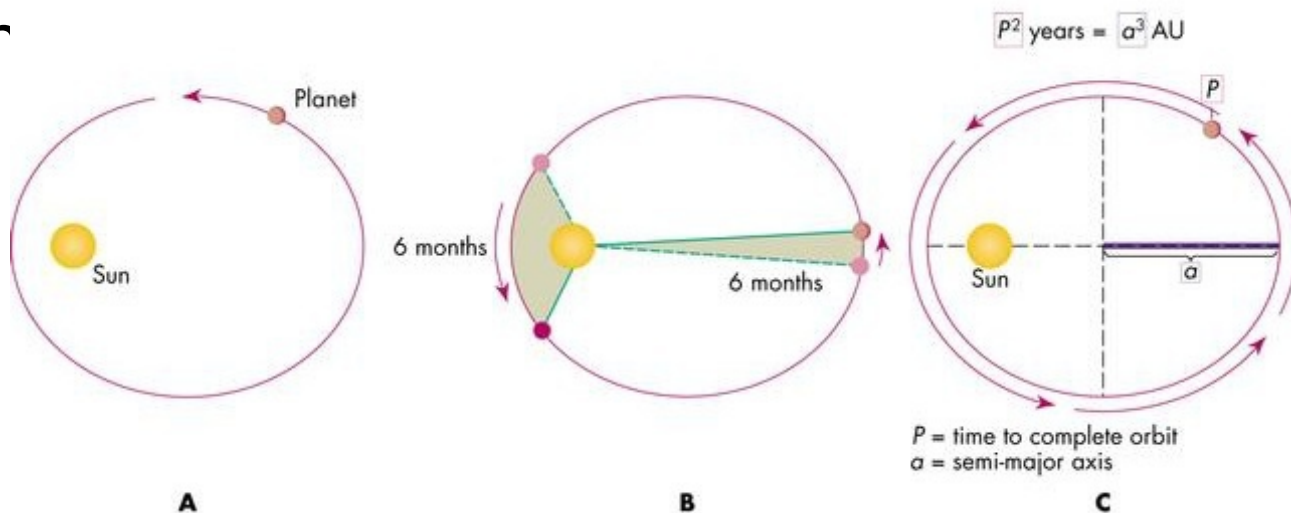
Keplerovy zákony

- 1. Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách (kuželosečkách), v jejichž jednom ohnisku se nachází Slunce
- 2. Plocha, kterou opíše za jednotku času průvodič planety, je konstantní
- 3. Poměry čtverců oběžných dob jsou v poměru třetích mocnin velkých poloos oběžných drah



$$(P_1/P_2)^2 = (a_1/a_2)^3$$

hvězda – planeta =
planeta - družice



Kosmické rychlosti

- 1. k.r. – kruhová rychlost

$$v_k = \sqrt{\mu / r}$$

- na povrchu Země 7905 m/s

- 2. k.r. – úniková nebo parabolická rychlost

$$v_p = \sqrt{2\mu / r} = v_k \sqrt{2}$$

- na povrchu Země 11180 m/s

- 3. k.r. – úniková rychlost ze sluneční soustavy

- ve vzdálenosti 1 AU od Slunce 42,1 km/s

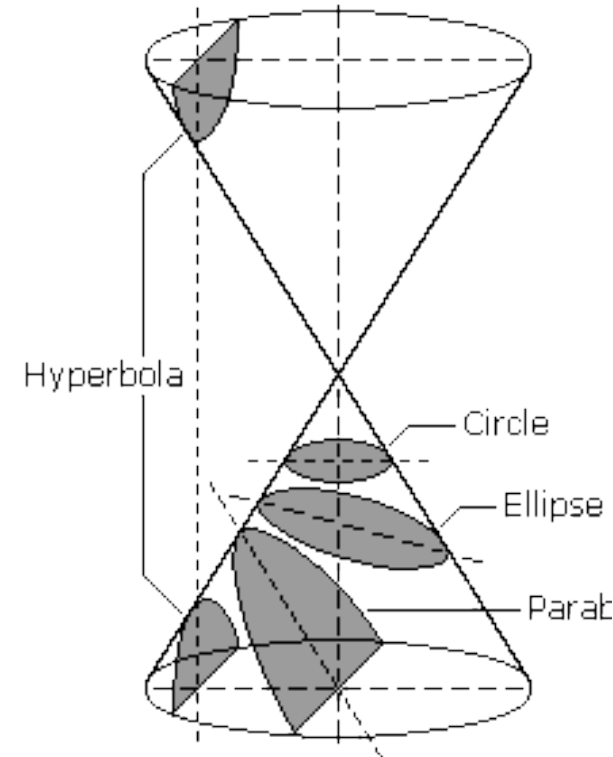
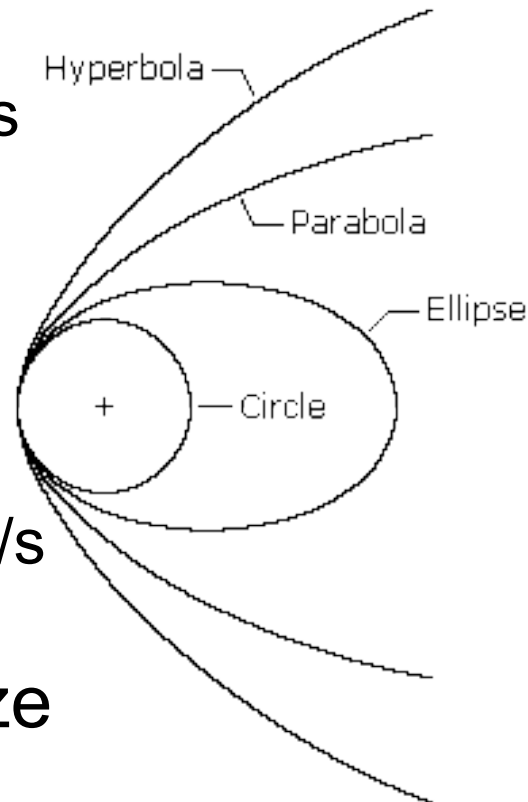
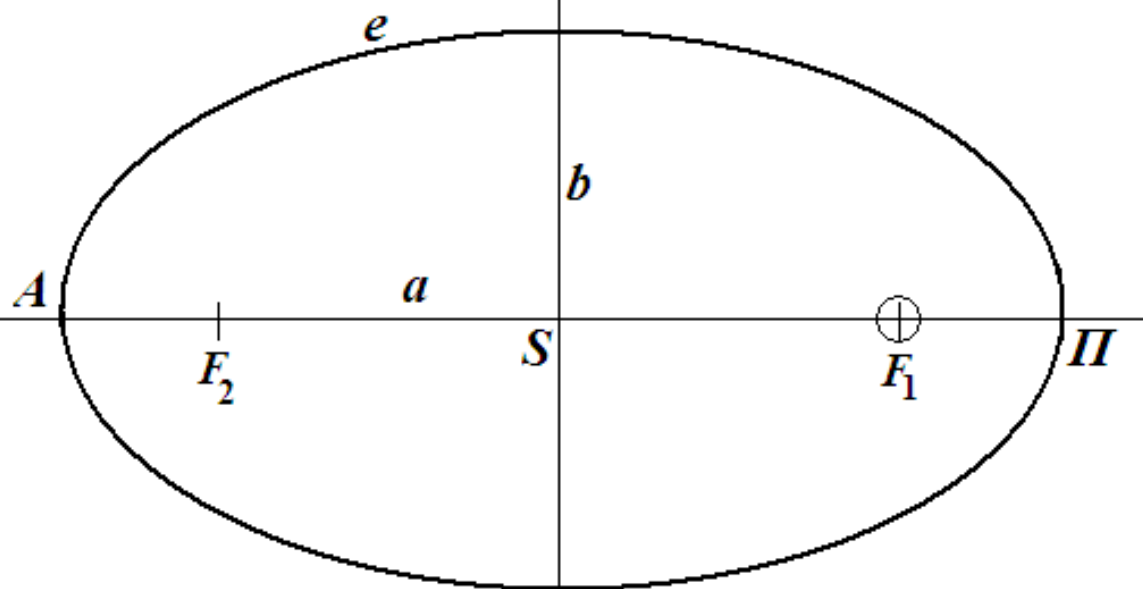


Figure 4.1

Popis pohybu po elipse



e – dráha tělesa (e – elipsa)

F_1 a F_2 – ohniska

$$e = (r_A - r_P) / 2a$$

a – hlavní osa

b – vedlejší osa

A – apocentrum

Π – pericentrum

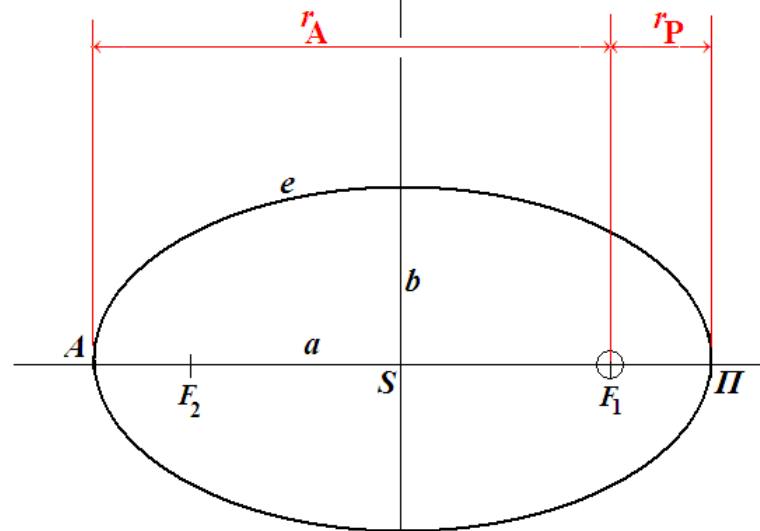
$A + \Pi$ – apsidy

a – přímka apsid



h_A – výška apocentra

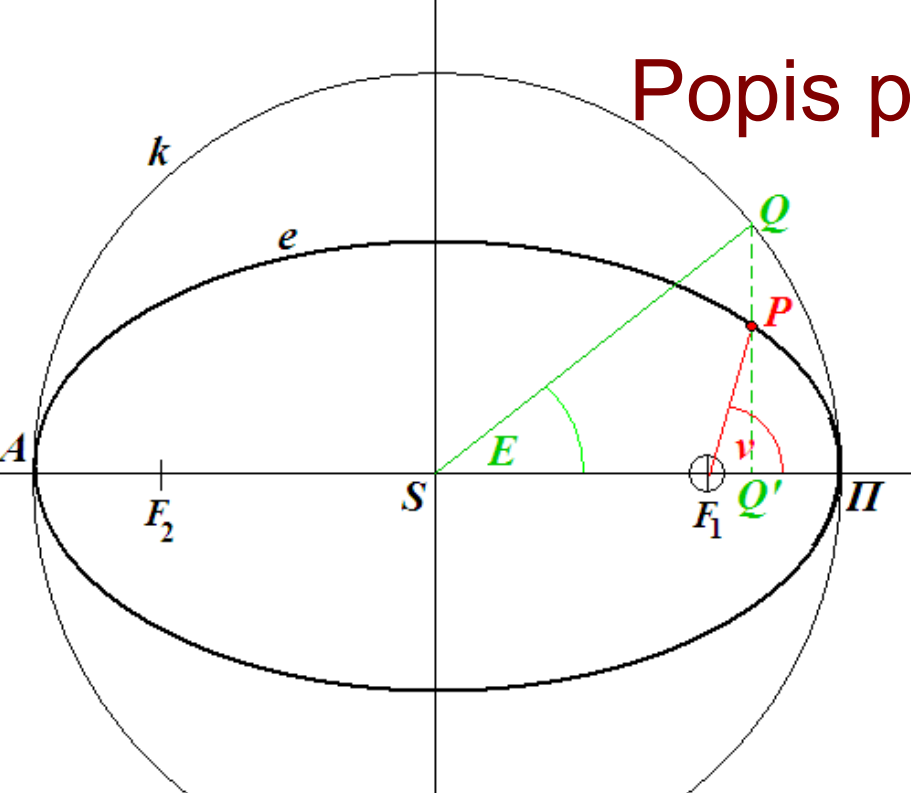
h_P – výška pericentra



r_A – vzdálenost (radiusvektor) apocentra

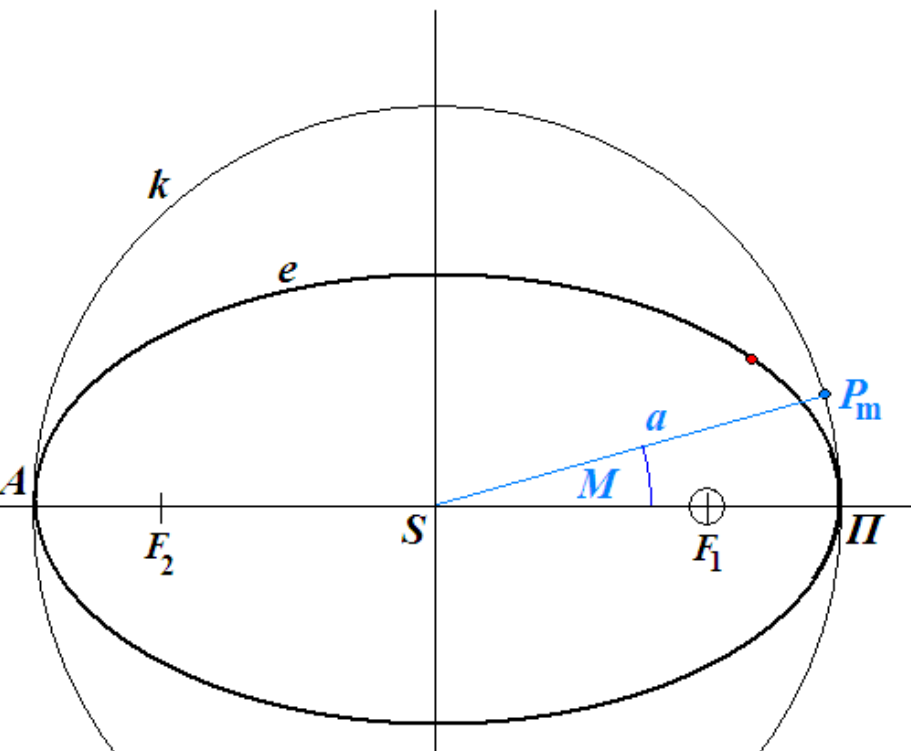
r_P – vzdálenost pericentra

Popis pohybu po elipse



- v – pravá anomálie
- E – excentrická anomálie
- M – střední anomálie

- $M = n (t - t_0)$
– n – střední denní pohyb
- $M = E - e \cdot \sin E$
- $\operatorname{tg} \frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2}E$
- $F_1P = r = a (1 - e \cdot \cos E)$



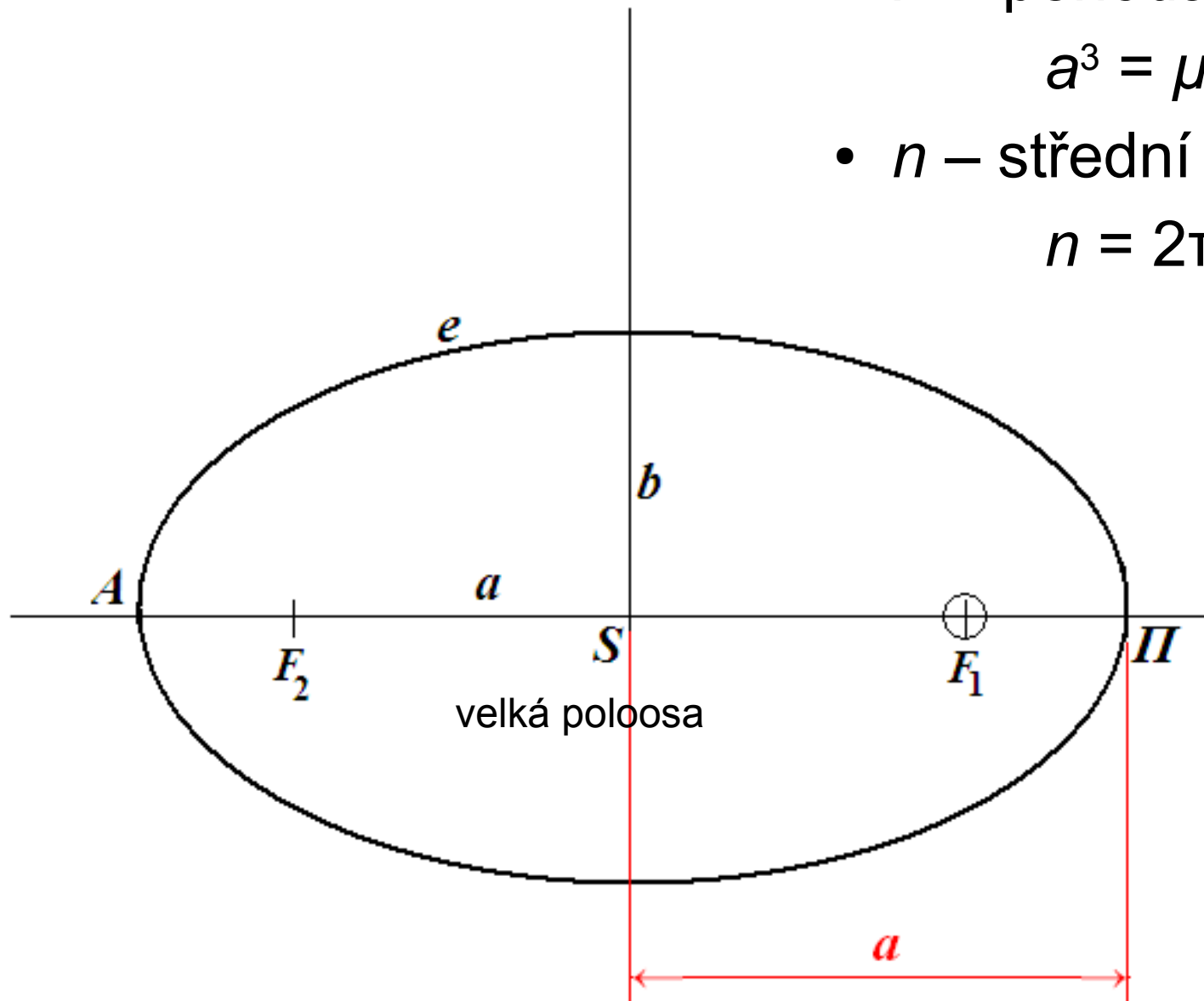
Perioda pohybu

- P – perioda (doba oběhu)

$$a^3 = \mu(P/2\pi)^2$$

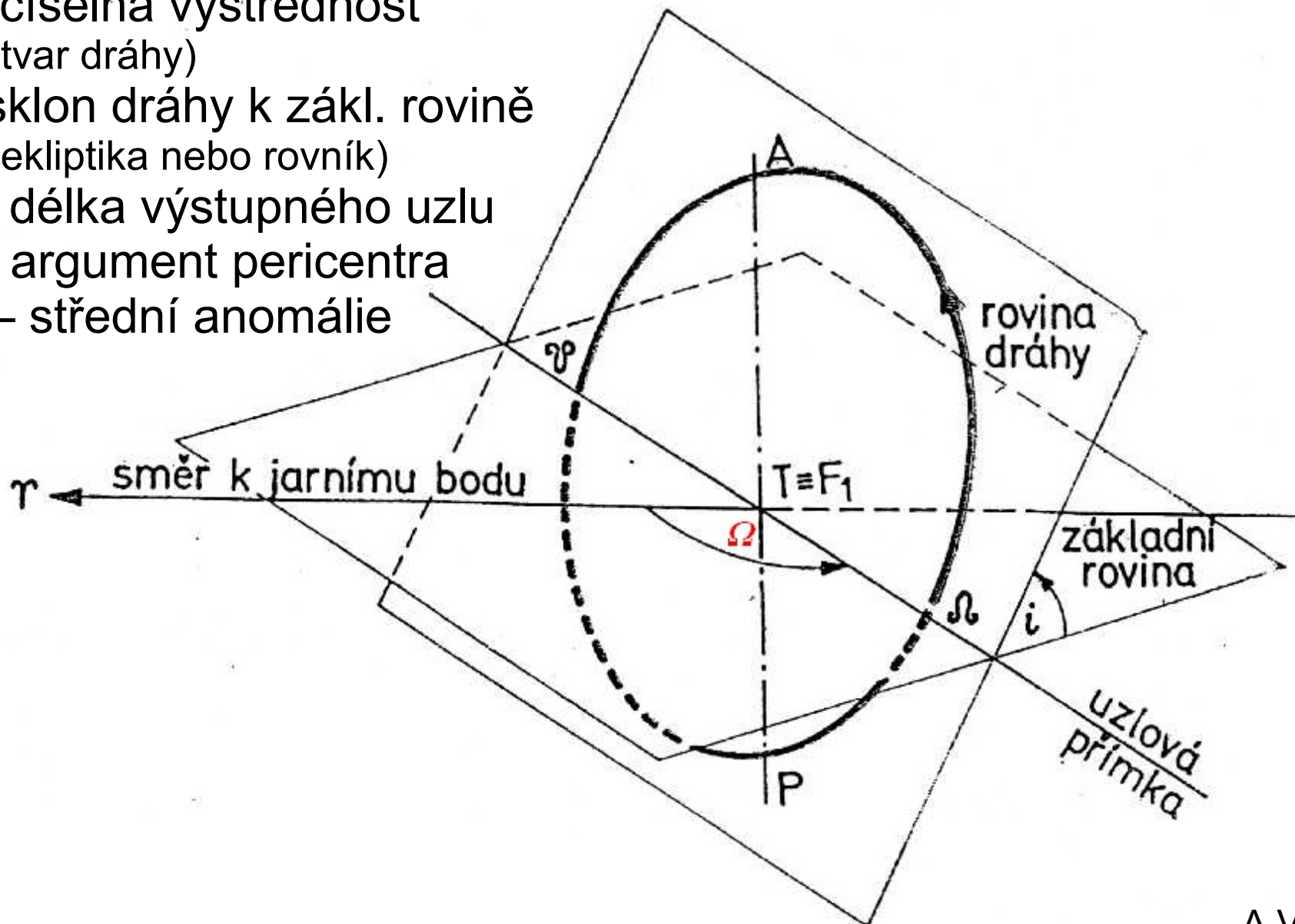
- n – střední (denní) pohyb

$$n = 2\pi/P$$



Elementy dráhy

- a – velká poloosa
 - (velikost dráhy)
- e – číselná výstřednost
 - (tvar dráhy)
- i – sklon dráhy k zákl. rovině
 - (ekliptika nebo rovník)
- Ω – délka výstupného uzlu
- ω – argument pericentra
- M_0 – střední anomálie



Elementy dráhy

- a – velká poloosa
 - (velikost dráhy)
- e – číselná výstřednost
 - (tvar dráhy)
- i – sklon dráhy k zákl. rovině
 - (ekliptika nebo rovník)
- Ω – délka výstupného uzlu
- ω – argument pericentra
- M_0 – střední anomálie

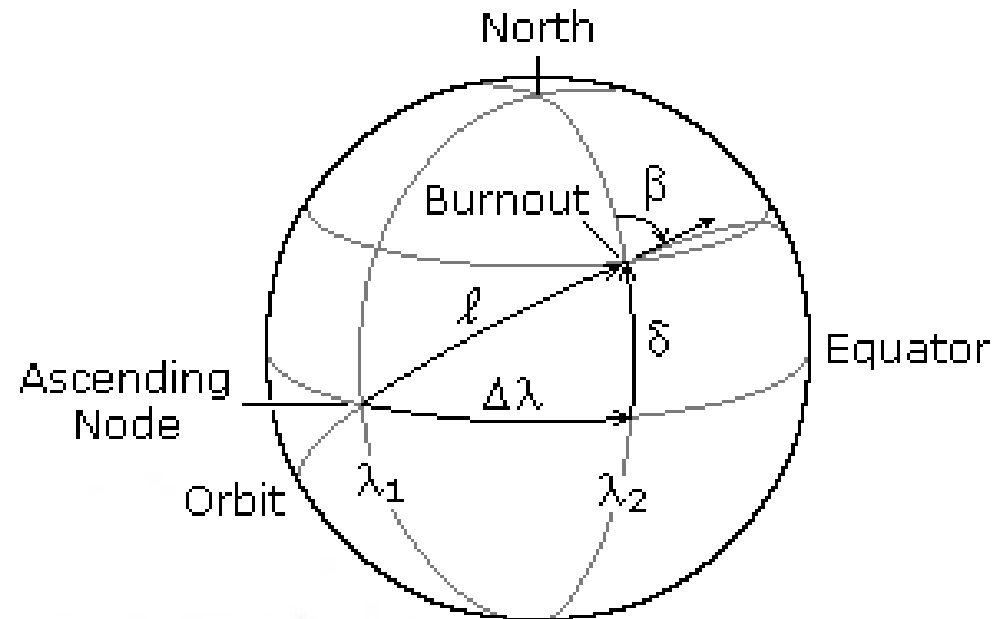
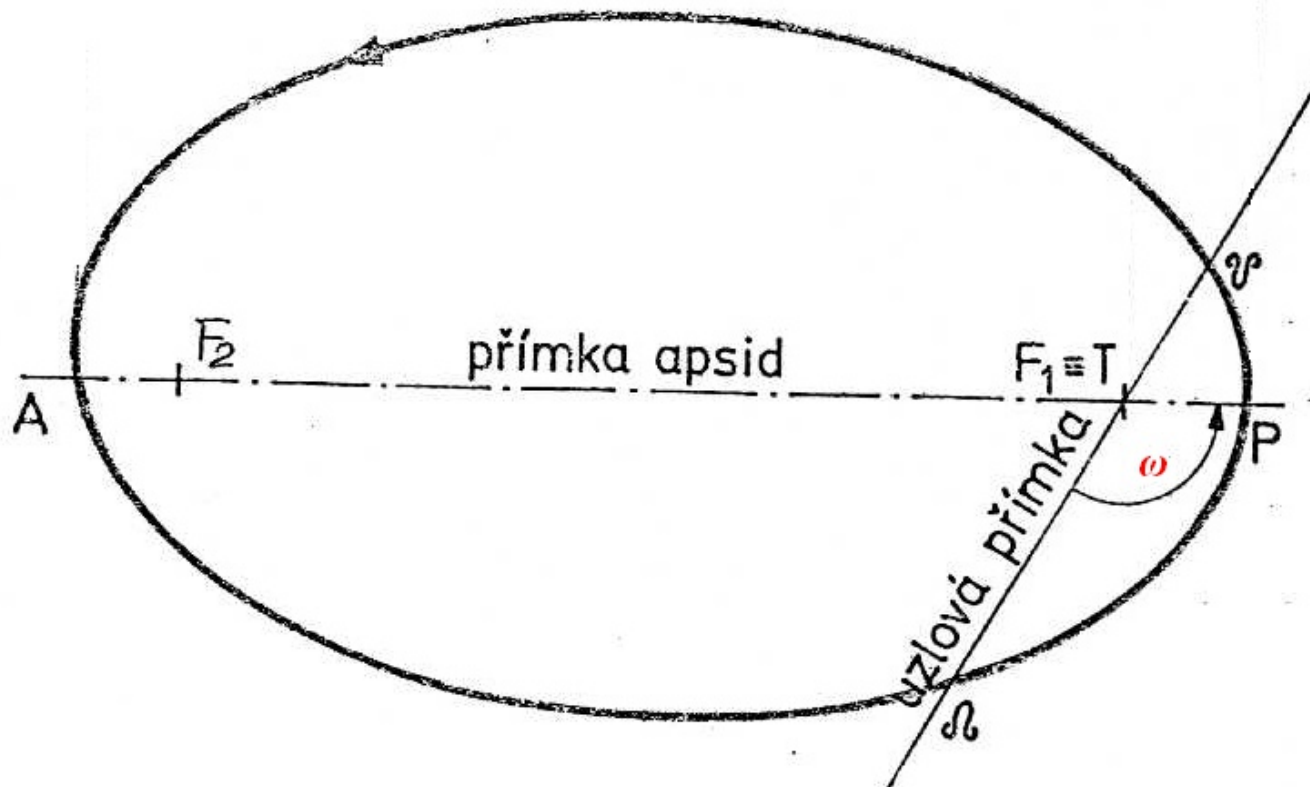


Figure 4.9

nejmenší počáteční sklon dráhy odpovídá zeměpisné šířce startu!



Reaktivní pohon

- zákon akce a reakce + zákon zachování hybnosti

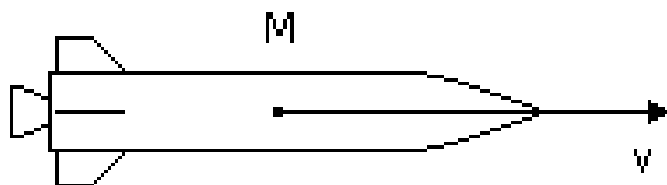
- impuls $[N \cdot s] = [kg \cdot m \cdot s^{-1}]$

$$\Delta J = \int_0^{\tau} F dt = \int_0^{\tau} (dp/dt) dt = \int_0^{\tau} dp = \Delta p = \Delta m \cdot v$$

- tah (=reaktivní síla) $[N]$

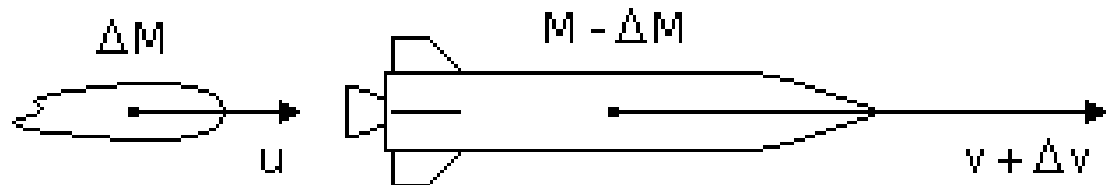
$$F = dp / dt = d(mv)/dt = (dm/dt) \cdot v$$

Time t



(a)

Time $t + \Delta t$



(b)

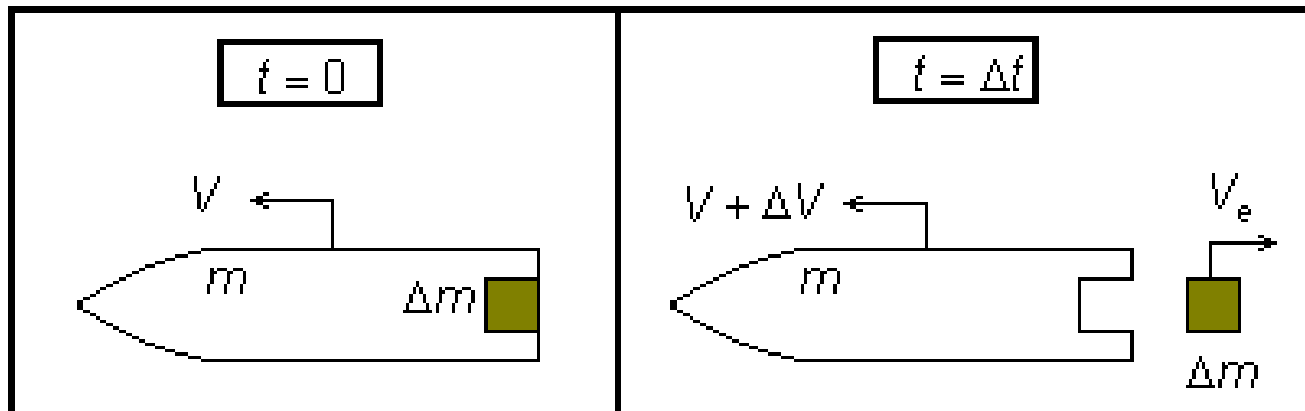
Reaktivní pohon

- Pohyb tělesa s proměnnou hmotností
- Ciolkovského rovnice
 - (Ciolkovskij ji odvodil nezávisle, ale asi ne jako první)

$$\Delta v = v_e \ln (m_0 / m_1)$$

charakteristická (efektivní výtoková) rychlost

hmotnost na konci / na počátku
„konstrukční číslo“

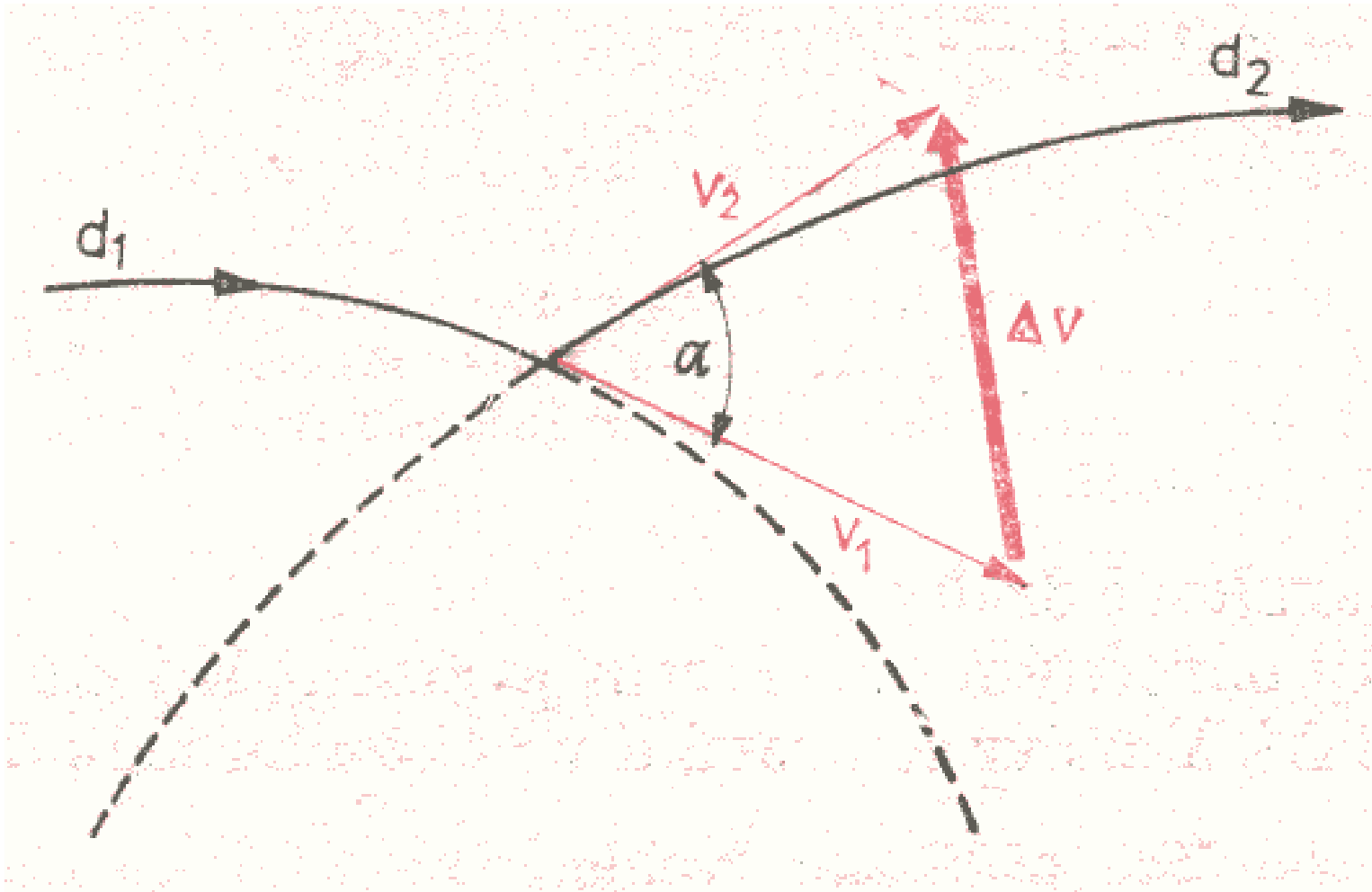


Specifický impuls

- I_{sp} - „impuls na (hmotnostní) jednotku paliva“
- je vlastností zvoleného typu pohonu
- metrická literatura (tah v N)
 - $[m/s] = [N \cdot s / kg]$
 - efektivní výtoková rychlost
 - udává „kolik sekund bude možno vyvozovat tah 1N z 1kg pohonných hmot“
- anglosaská literatura (tah v lbf)
 - [s]
 - udává „kolik sekund bude možno vyvozovat tah 1lbf z 1lb pohonných hmot“
 - přepočít $I_{sp_metric} = g \cdot I_{sp_brit}$ ($g=9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)
- typicky např.
 - chemické pohony $2500\text{-}4500 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$
 - iontové pohony $15000\text{-}50000 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$

Manévry na dráze

Obecný impulsní manévr



Jednoimpulzní manévry

- Koplanární manévry
 - změna výšky apo/pericentra

- $\Delta v =$
 $\sqrt{2u \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{(r_p + r_a)} \right)}$
 $-\sqrt{u/r_p}$

- pro únikovou dráhu

- $\Delta v =$
 $\sqrt{2u/r_p + v_\infty^2} - \sqrt{u/r_p}$

- Oberthův efekt
 - zvýšení dráhy manévrem v pericentru
 - využití kinetické energie paliva letícího s raketou

Jednoimpulzní manévry

- změna sklonu dráhy
- manévr velmi náročný na Δv
- nejvýhodněji v apocentru
 - může být výhodné ho i předtím dočasně zvýšit!
- $\Delta v = \sqrt{2u/r_p} \cdot \sin(\theta/2)$

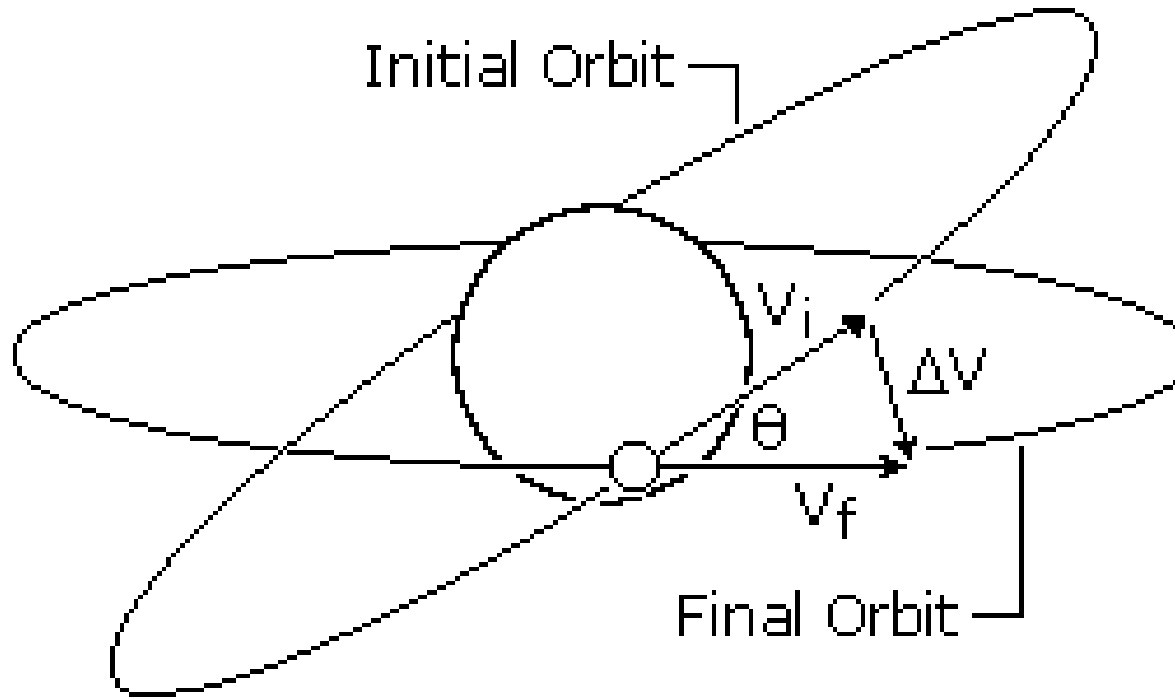


Figure 4.13

Manévry na dráze

- Obecná přechodová dráha
 - pro impulzní manévry je potřeba dodat vektor Δv odpovídající rozdílu vektorů rychlostí drah v místě, kde se kříží

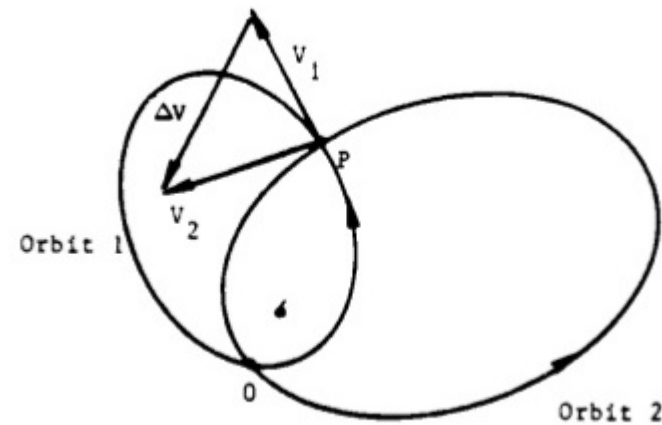
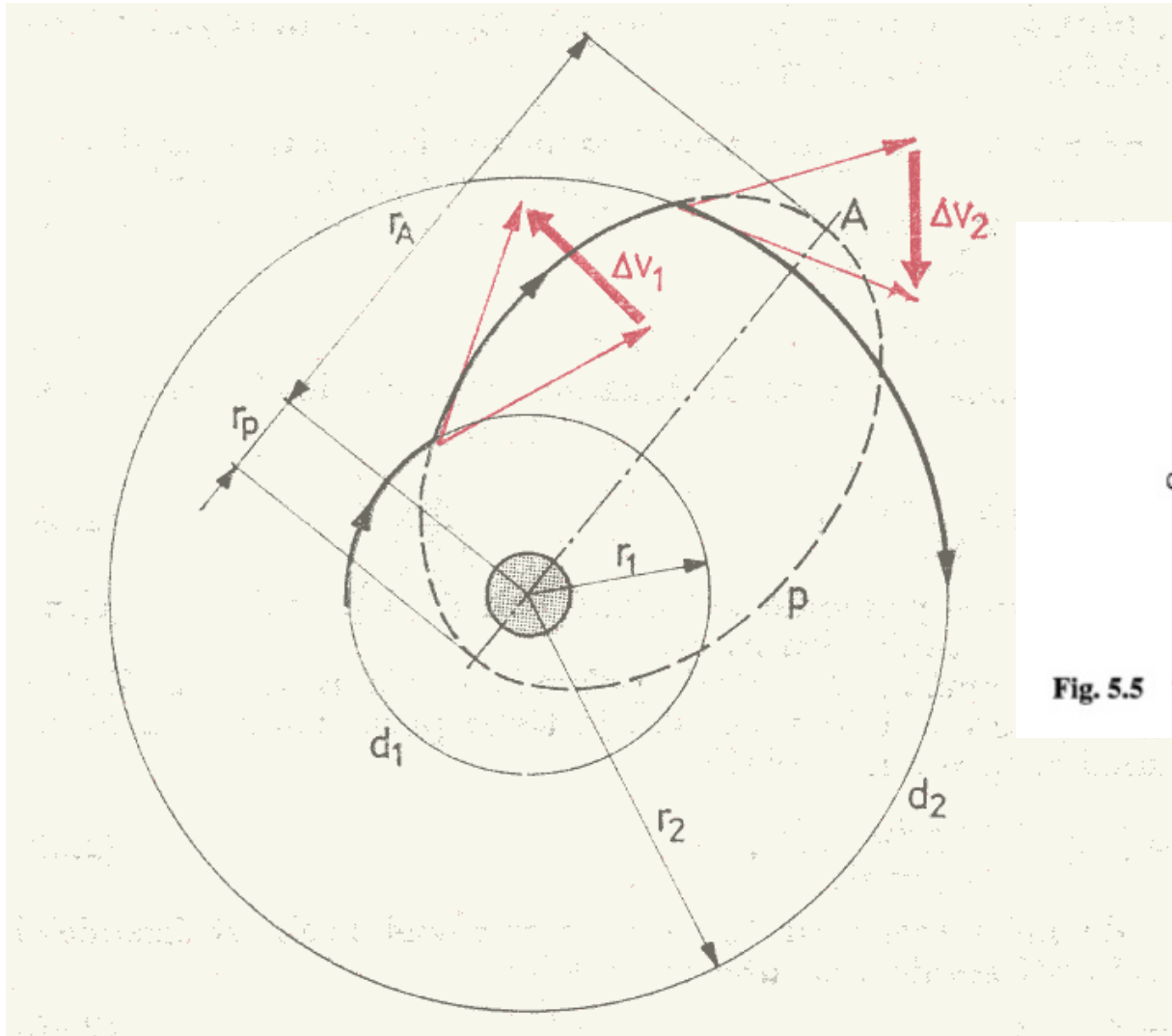


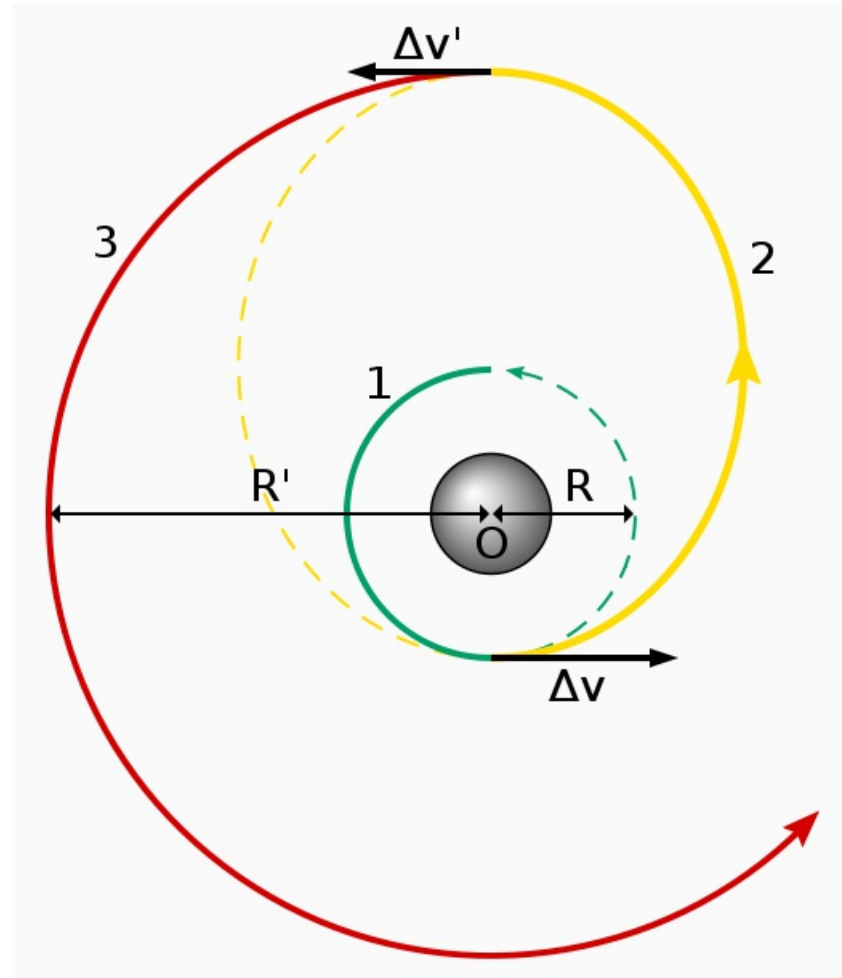
Fig. 5.5 Transfer from orbits 1 to 2; vector difference $\Delta V = V_2 - V_1$.

Manévry na dráze – přechod mezi kruhovými o.d.

- Hohmannova přechodová elipsa
 - dvojimpulzní manévr

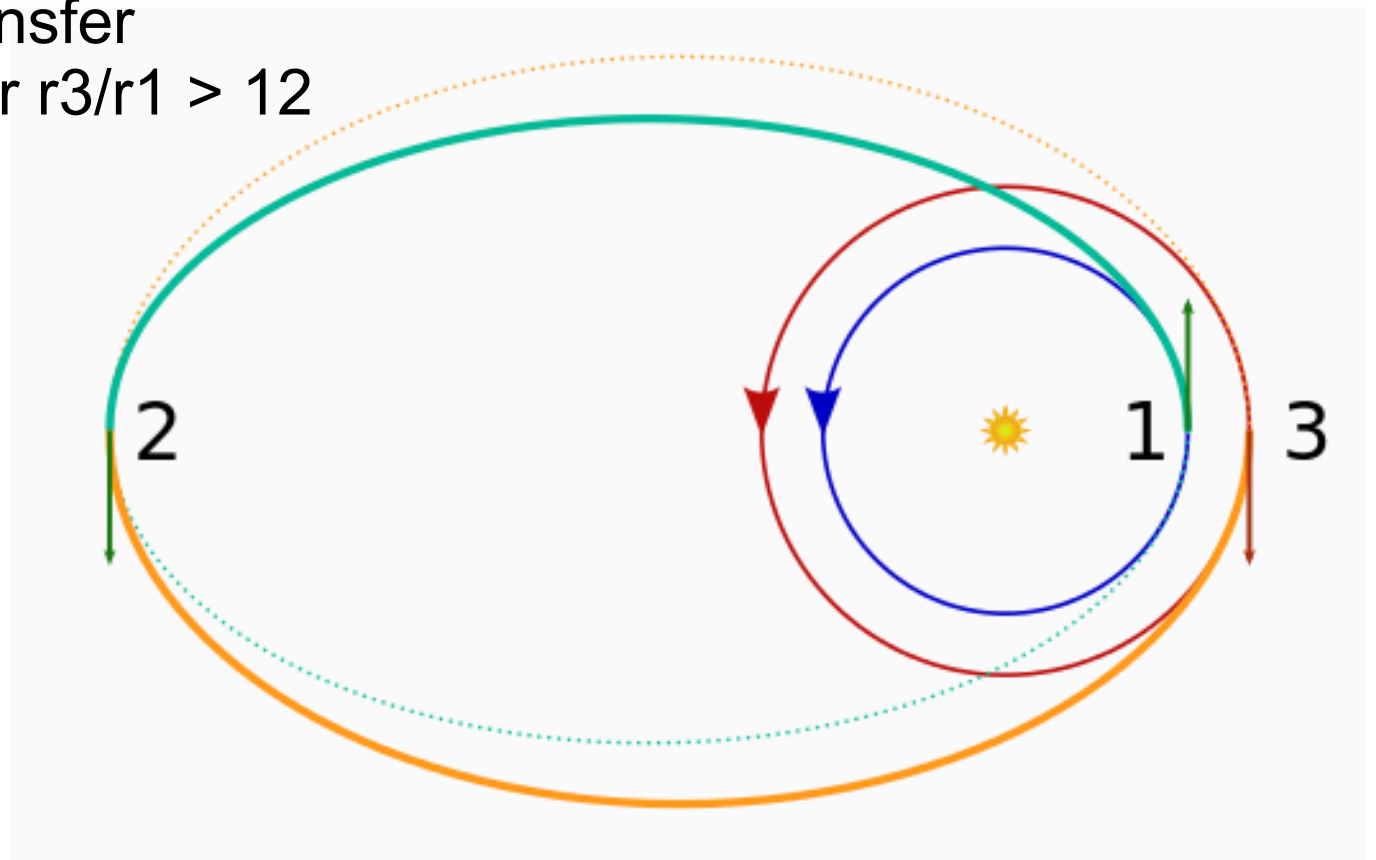
$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right),$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right),$$



Manévry na dráze – přechod mezi kruhovými o.d.

- Bi-eliptický transfer
 - trojimpulzní manévr
 - delší přeletový čas
 - může být výhodnější z hlediska delta-v než Hohmannův transfer
 - pokud poměr $r_3/r_1 > 12$



Manévry na dráze – přechod mezi kruhovými o.d.

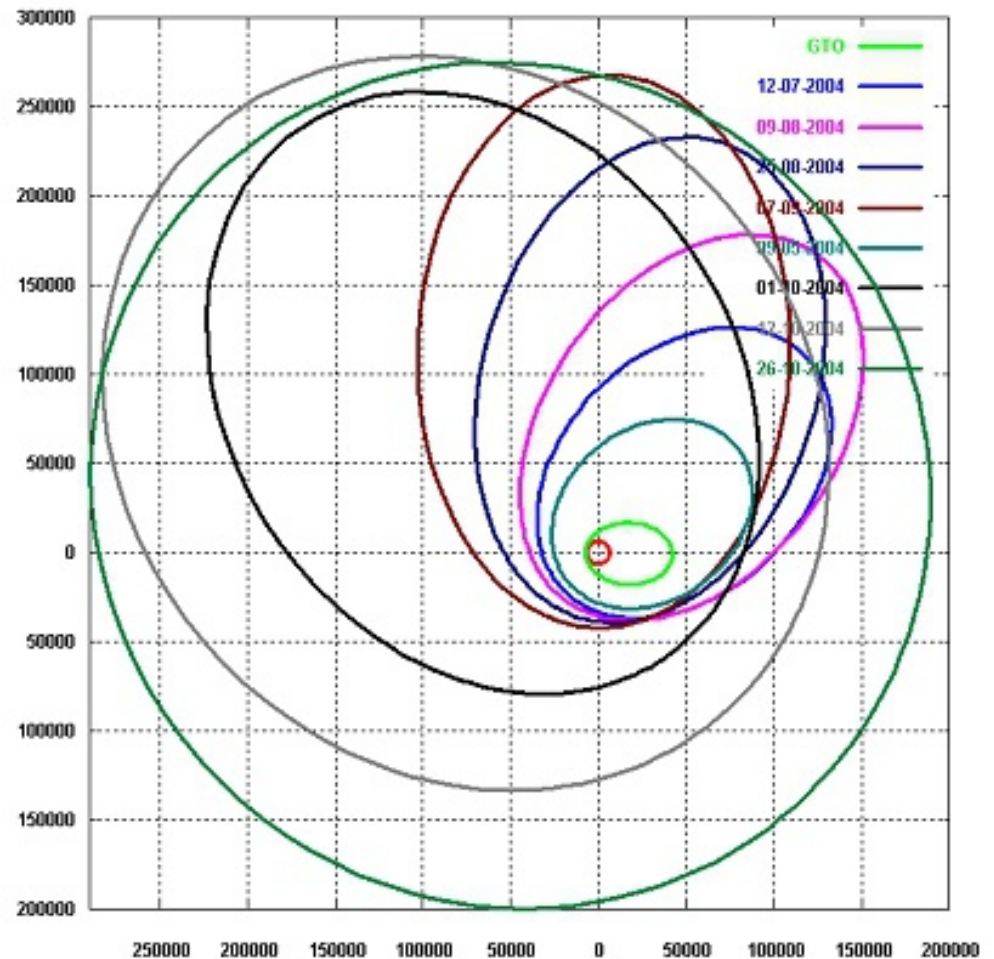
- Manévry s malým tahem

- v nejhorším případě

- spirála s nepřetržitým urychlováním/bržděním

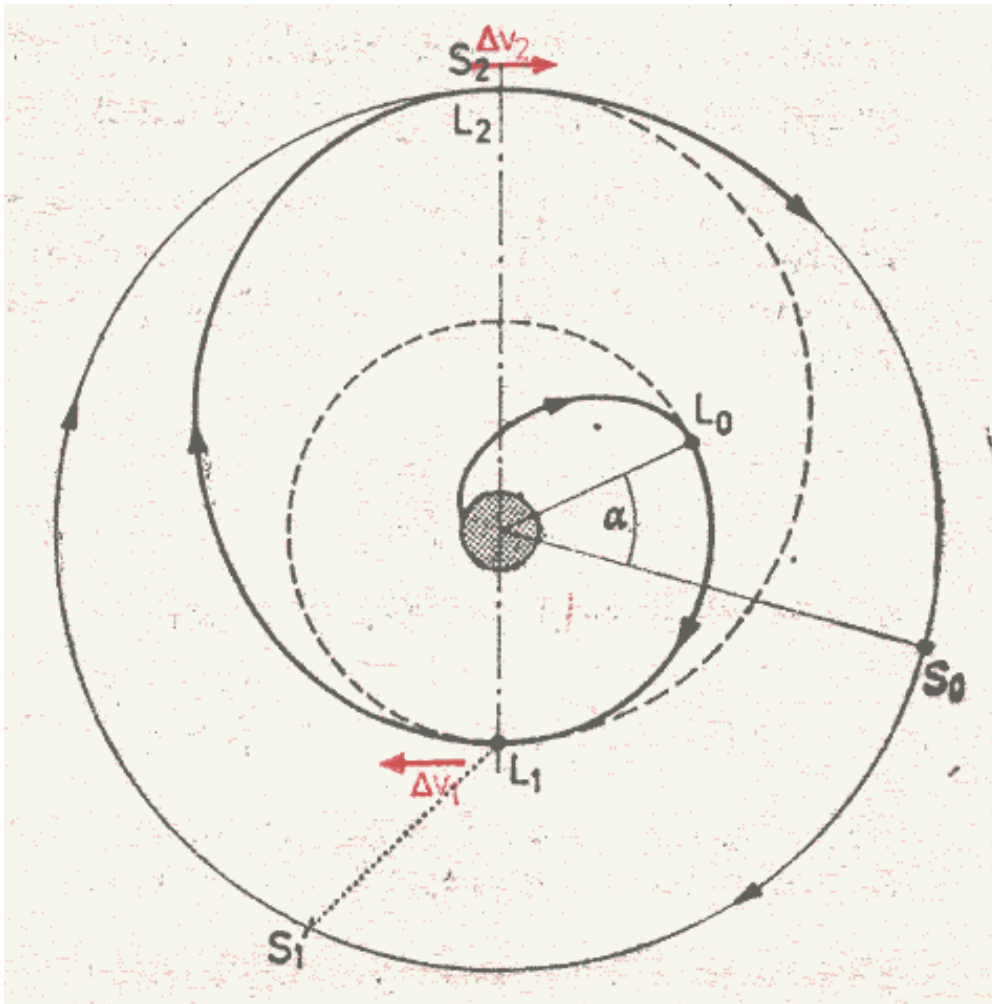
- Δv = rozdíl orbitální rychlosti počáteční a koncové dráhy

- lze zlepšit např. motorickým manévrem jen „blízko“ pericentra

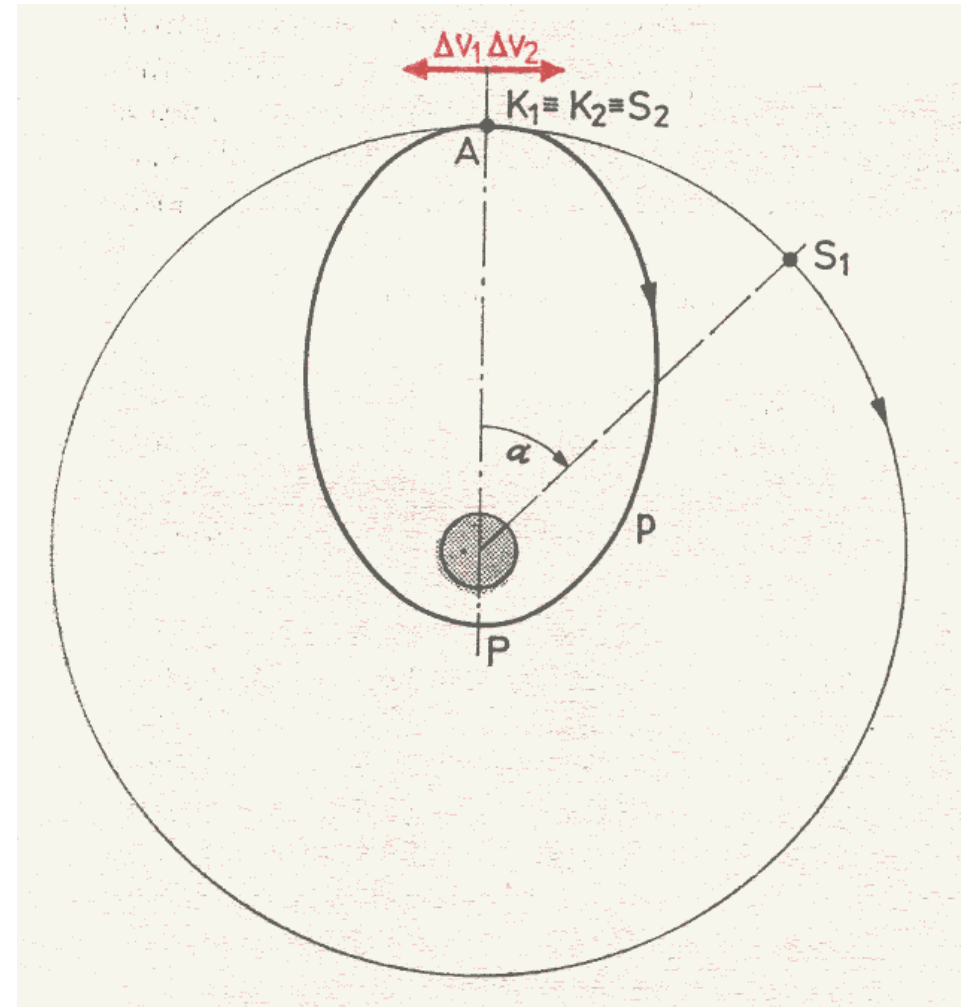


Manévry na dráze

- Setkávací koncentrický manévr



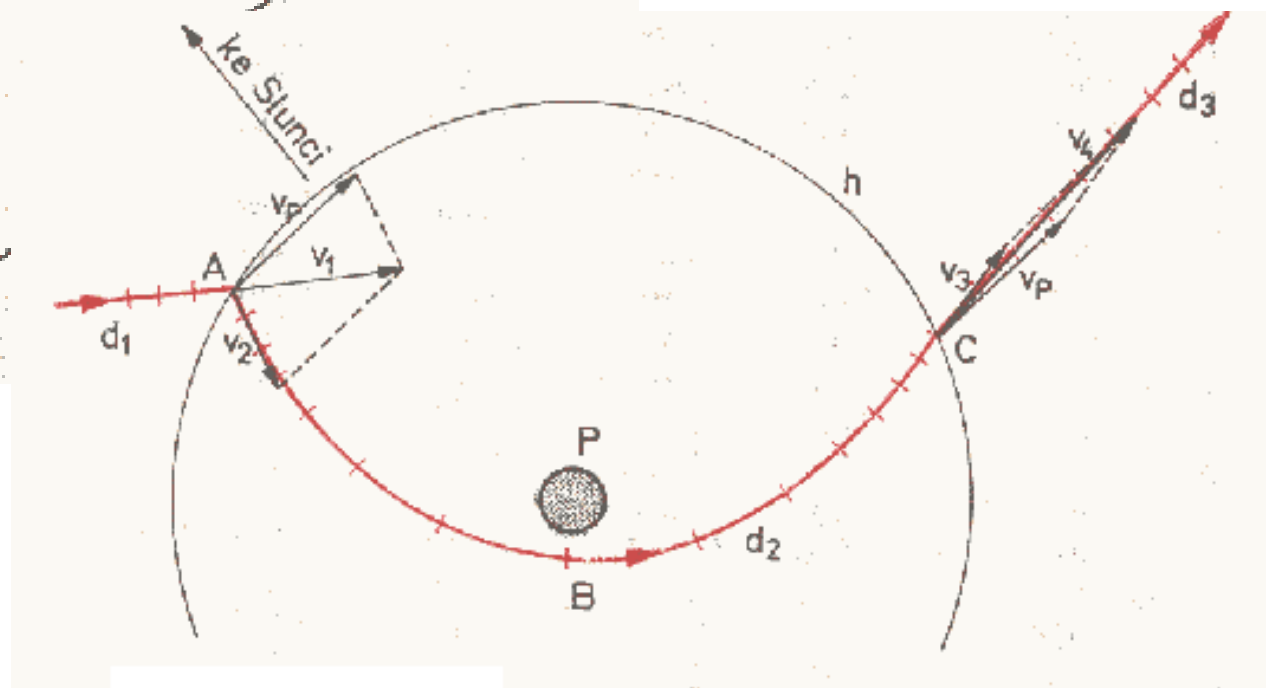
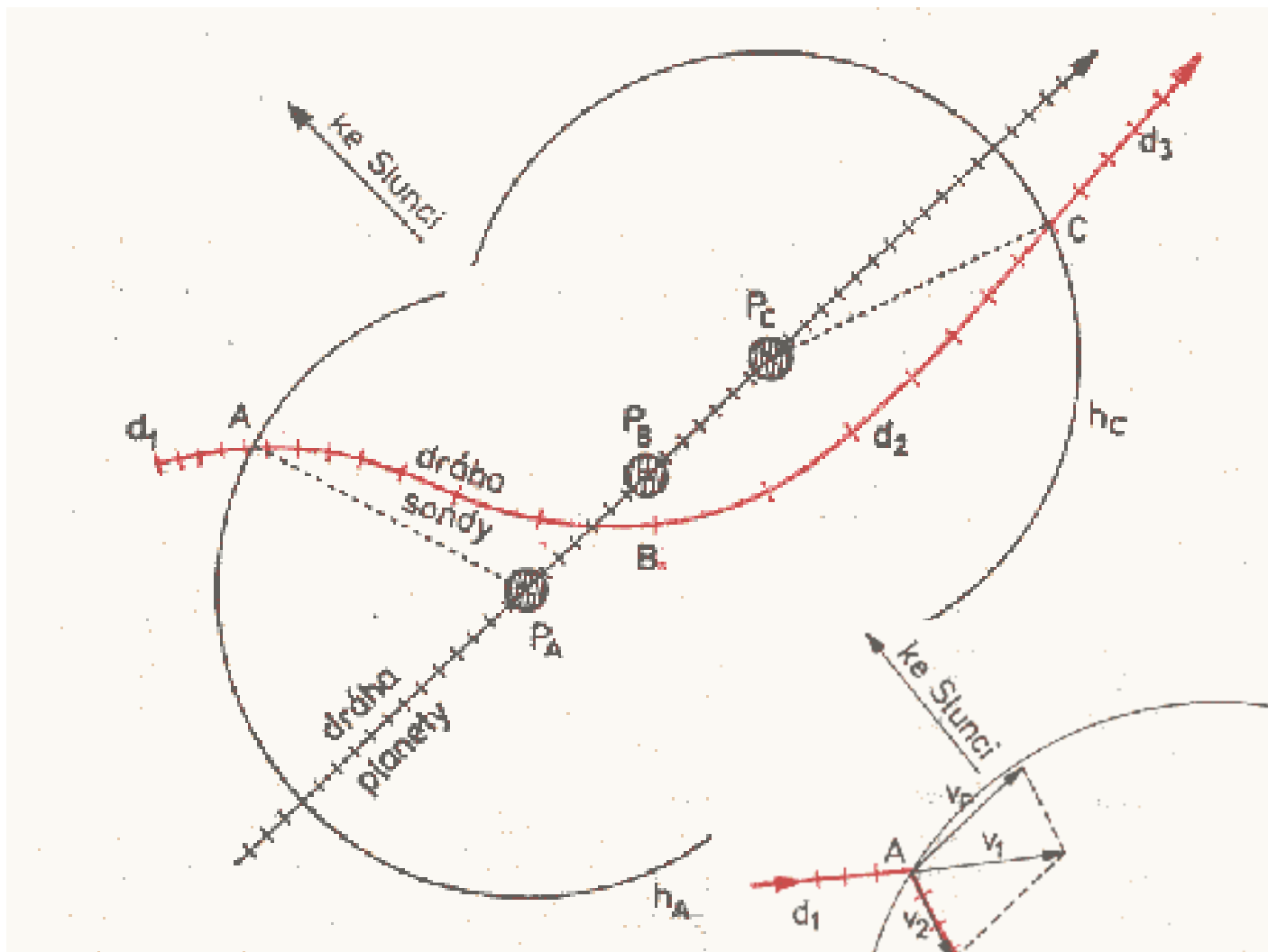
- Setkání ze synchronní (ekviperiodické) dráhy



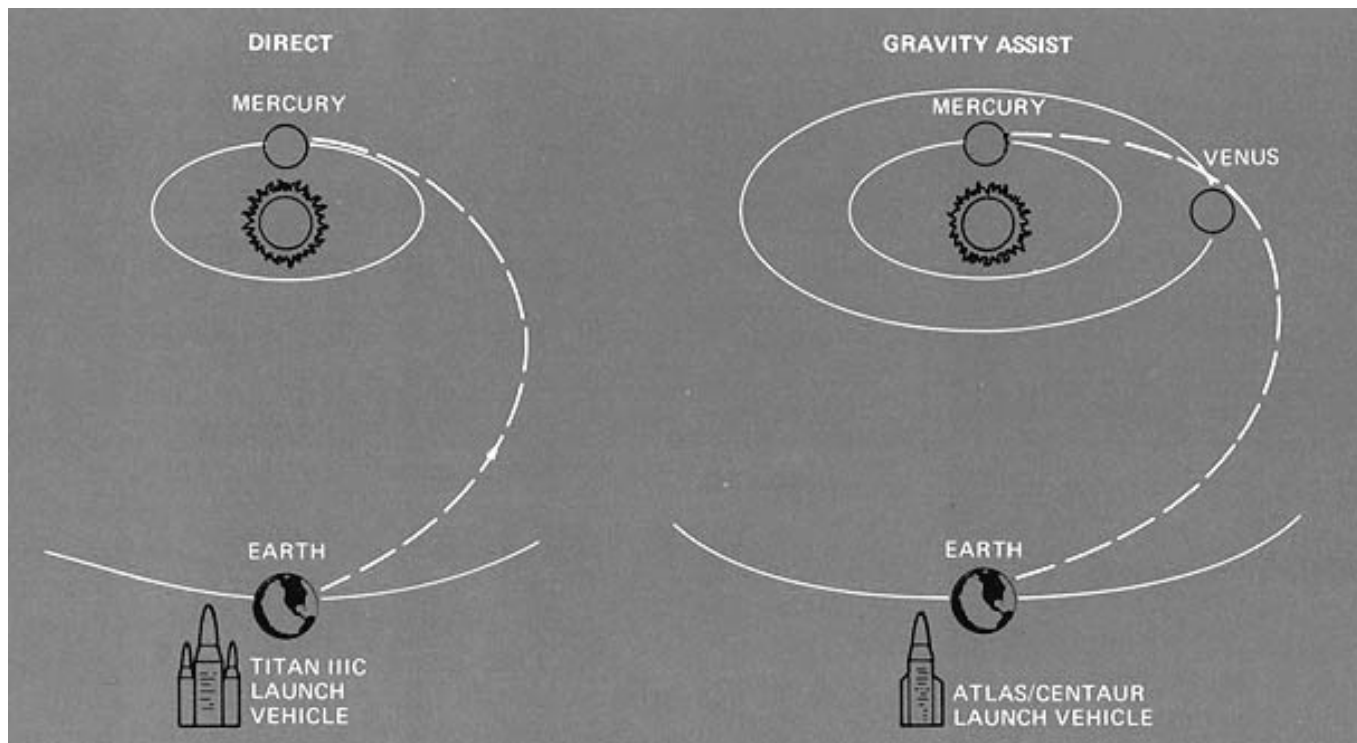
Manévry na dráze

- Navádění na stacionární dráhu
- Vyčkávací dráha
- Přejížděcí dráha (GTO)
- Změna sklonu
- Navedení na synchronní dráhu
- Využití supersynchronních drah

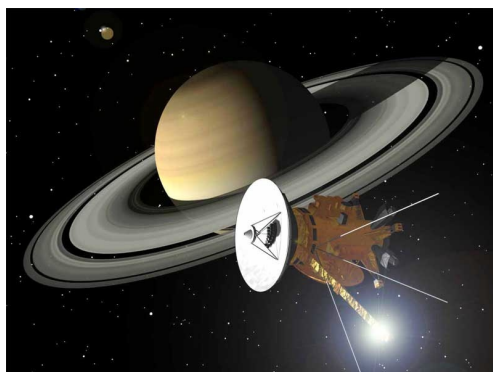
Gravitační manévr



Gravitační manévr



Mariner 10, 1973/4

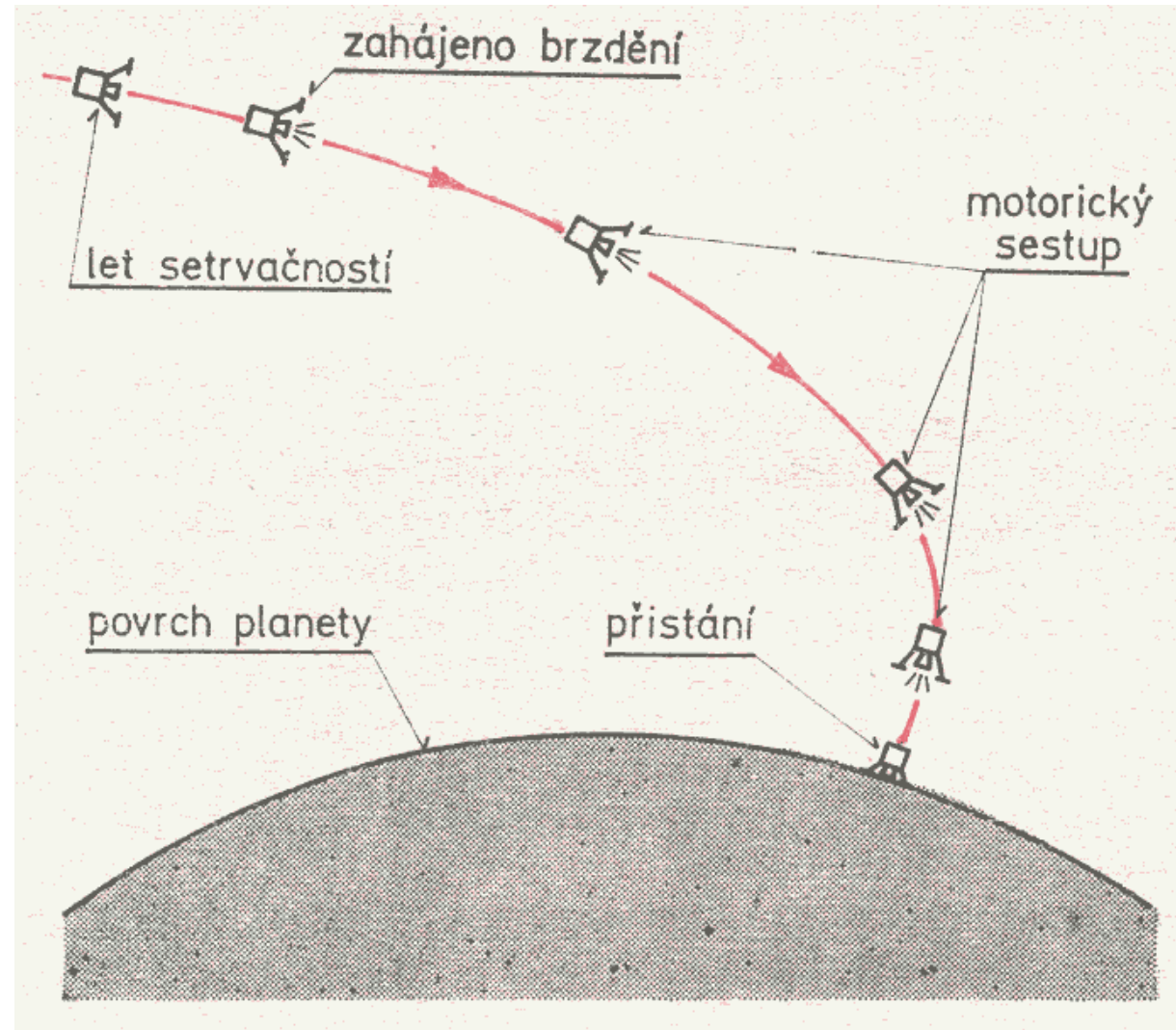


Cassini, 1997/2004



Motorický sestup a přistání

- Krom delta-v pro zbrždění z příletové rychlosti nutno započítat i gravitační ztráty
 - vznikají ve složce vektoru tahu rovnoběžném s gravitačním zrychlením



Rušený pohyb

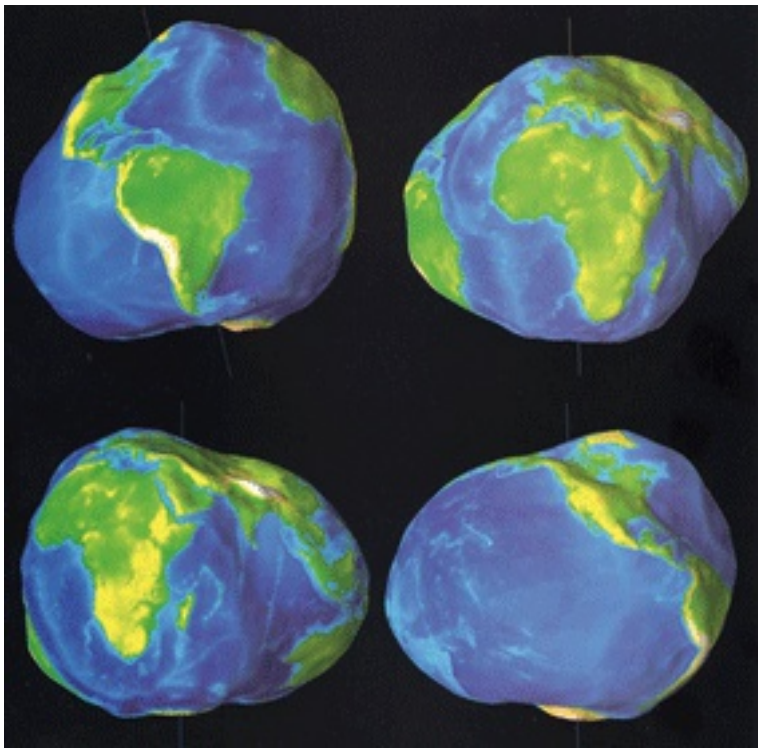
- Keplerovy zákony platí pouze v ideálním případě problému dvou těles. Obě tělesa se dají nahradit hmotnými body a jsou umístěna v prostředí, ve které působí pouze vzájemná gravitační síla (přitažlivost) obou těchto těles.

Hlavní zdroje poruch:

- Nesymetrie gravitačního pole řídicího tělesa
- Gravitační působení dalších (vzdálenějších) nebeských těles
- Odpor atmosféry
- Tlak záření (u Země cca 1uPa)
- Magnetické pole

Nesymetrie gravitačního pole

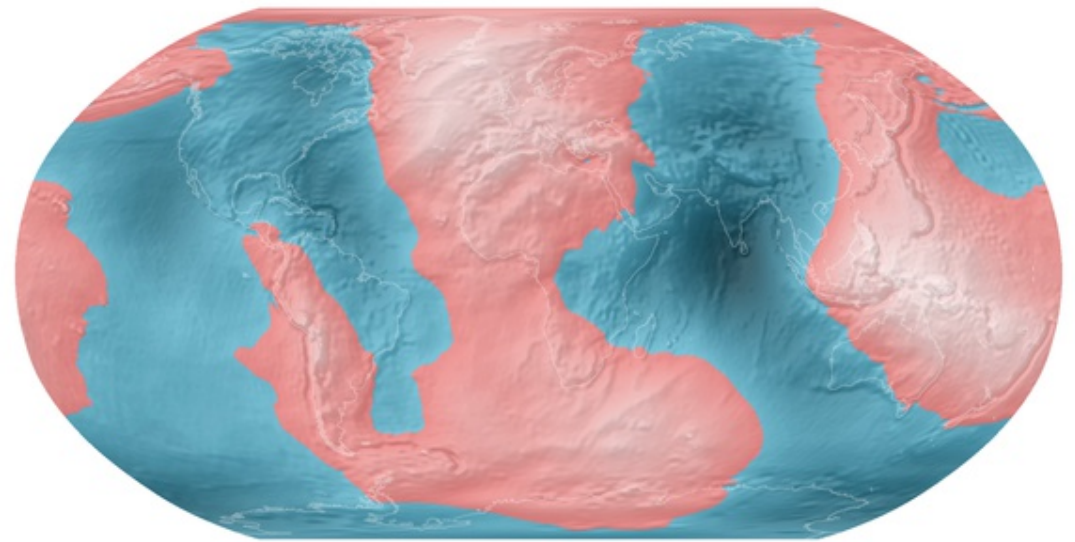
- Jiná, než kulovou symetrie, případně nesymetrie obecná
- Země - přibližně rotační elipsoid (polární zploštění)
 - WGS 1984: 6378.137 x 6356.752 km, zploštění 1:298.257
- Přesněji – geoid. (ekvipotenciální plocha)



odchyly od elipsoidu (zvětšeno)

Deviation of the Geoid from the idealized figure of the Earth

(difference between the EGM96 geoid and the WGS84 reference ellipsoid)

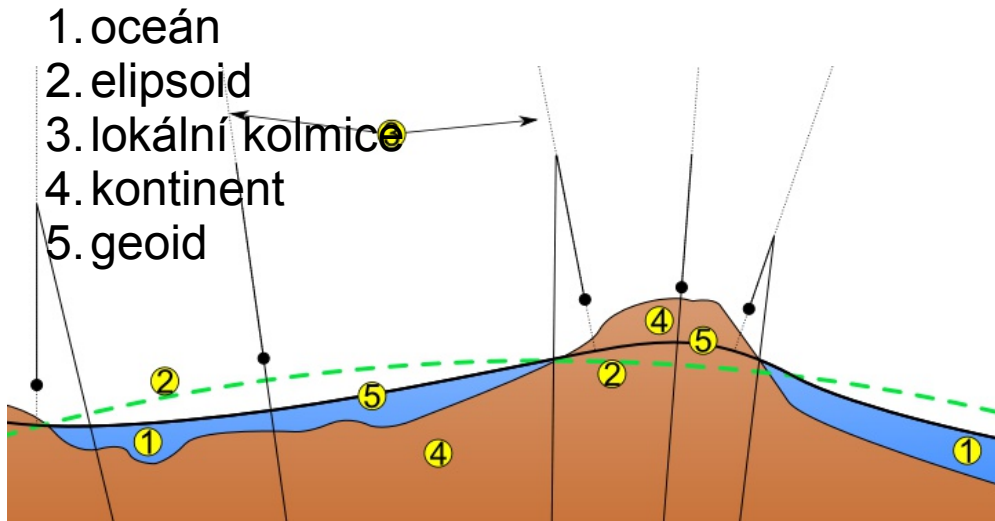


Red areas are above the idealized ellipsoid; blue areas are below.

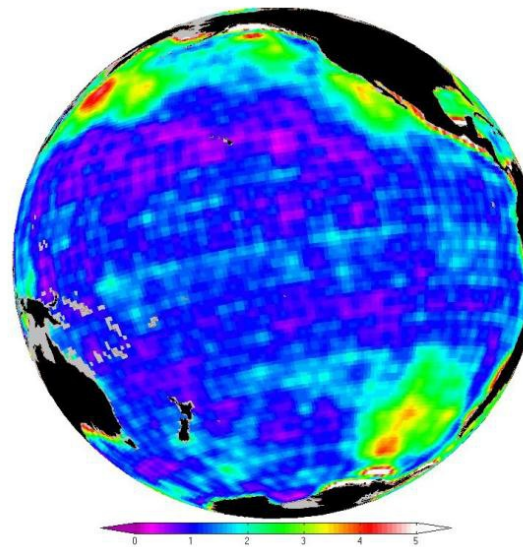
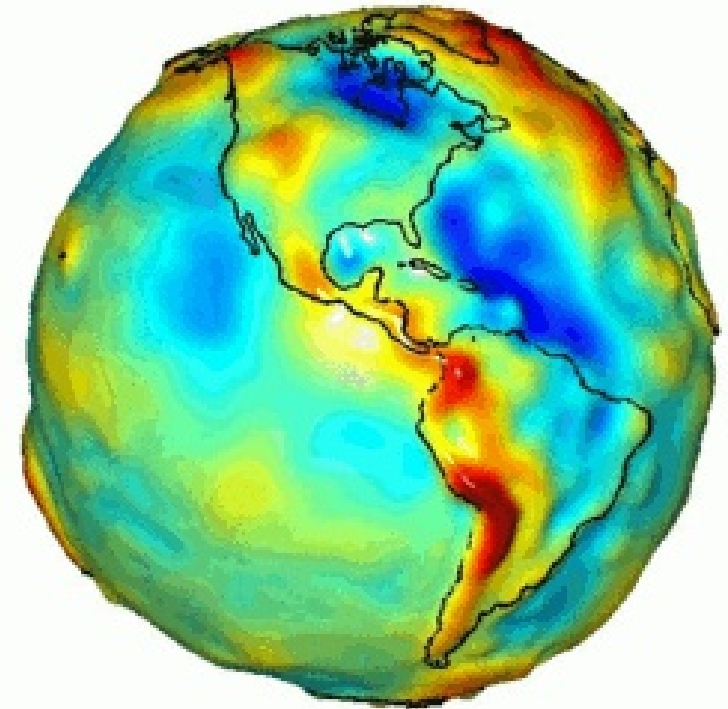


Nesymetrie gravitačního pole

- Geoid
 - dán směrem lokální tíhové kolmice



- Gravitační anomálie
 - dána velikostí odchylky od středního pole
 - umožňuje sledovat i roční variace



GRACE: ↑ gravitační anomálie
← odvozená data -
anomálie v tlaku u oceánského dna

Nesymetrie gravitačního pole

Polární zploštění Země má za následek dva hlavní efekty na dráhu:

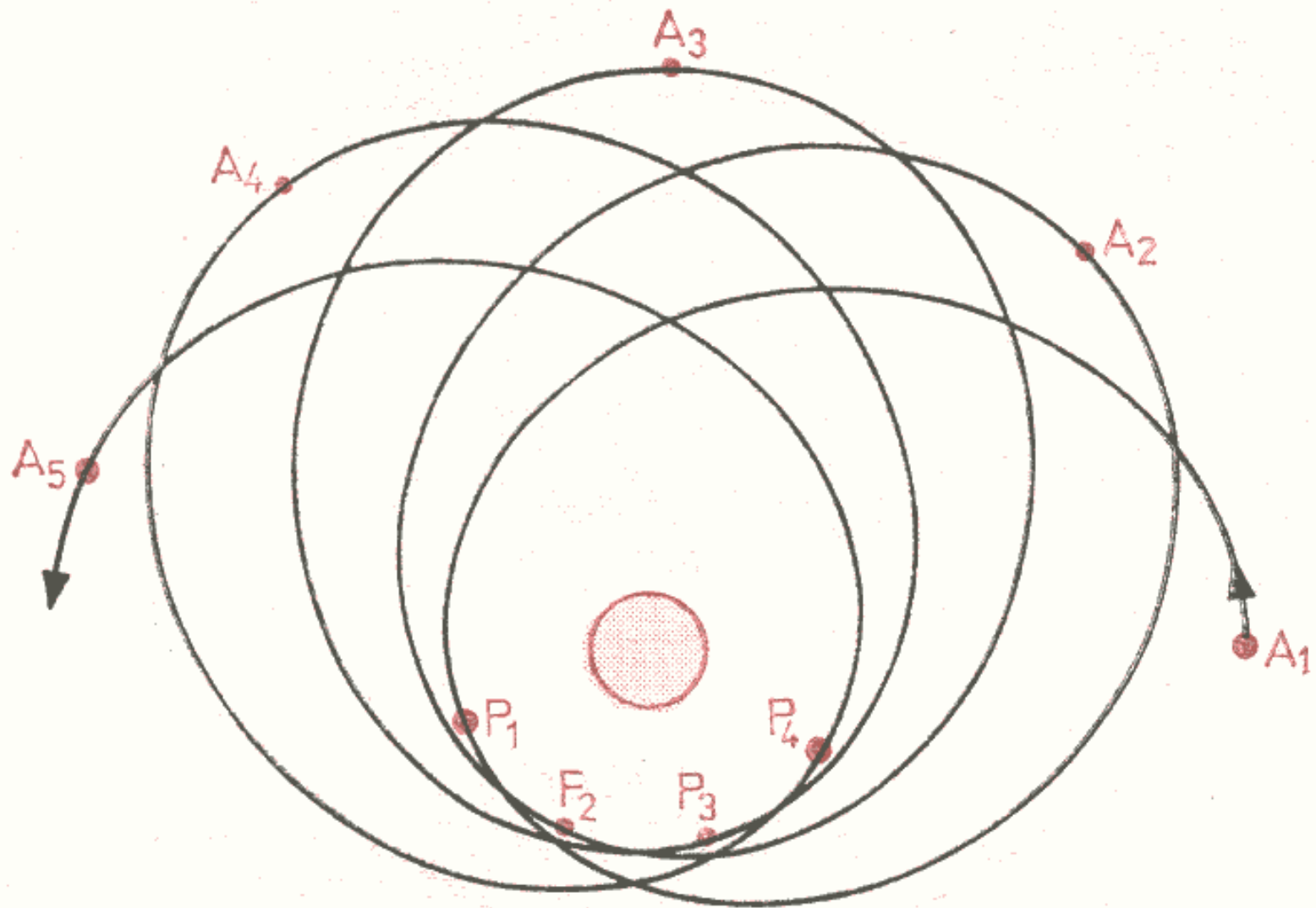
Stáčení roviny dráhy (regrese uzlové přímky).

- Při sklonu do 90 stupňů se rovina stáčí proti směru otáčení zeměkoule, při větším sklonu dráhy (retrográdní dráhy) ve shodném smyslu s jejím otáčením.
- Využití – heliosynchronní dráhy (typicky ~700 km, ~99°)

Precese přímky apsid

Přímka apsid se při sklonech, které leží v rozmezí $63,4^\circ < i < 116,6^\circ$, stáčí proti směru rotace zeměkoule, při ostatních sklonech proti směru rotace

Precese přímky apsid



Nesymetrie gravitačního pole

Oba dva efekty nesymetrie centrálního tělesa způsobují, že křivka, po níž se pohybuje družice planety (např. Země), již není uzavřená křivka (elipsa), ale otevřená křivka. Proto není jednoduché definovat periodu (dobu oběhu) jednoduchým způsobem.

Druhy period (dob oběhu):

- Oskulační – vypočítaná z okamžité hodnoty velké poloosy
- Drakonická – doba mezi dvěma průchody vzestupným uzlem dráhy
- Anomalistická – doba mezi dvěma průchody pericentrem dráhy

Gravitace dalších těles

- Řešení analytické jen ve speciálních případech tří těles (Lagrangeovy čili librační body)
- Obecné řešení numerickou integrací
- Přibližné řešení – pojem gravitační sféry vlivu

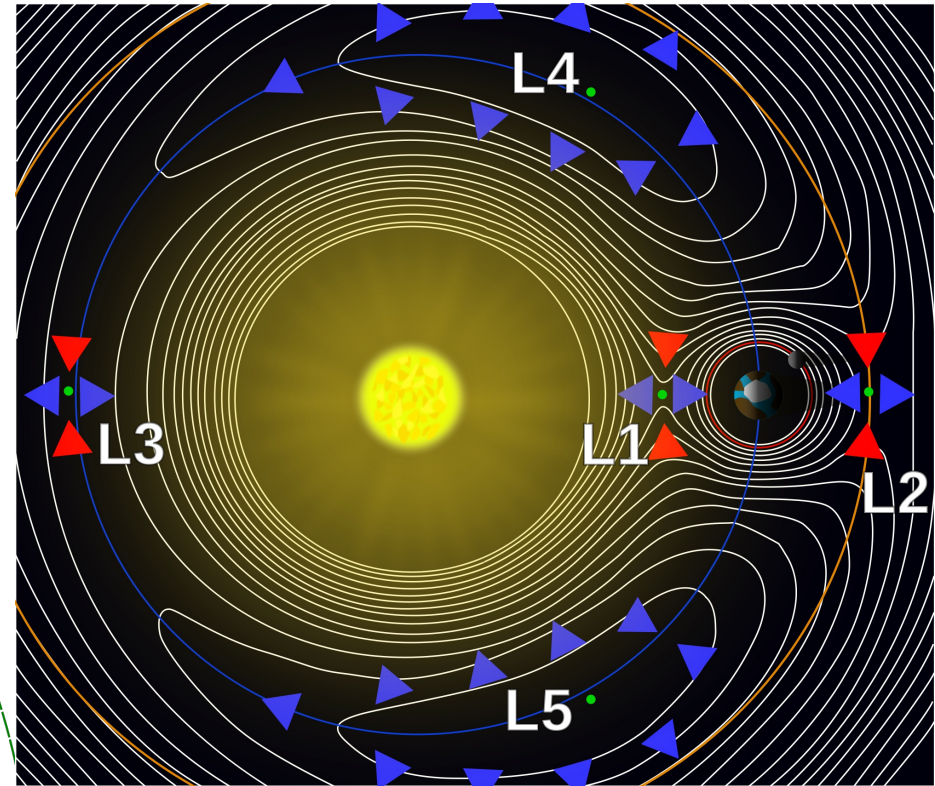
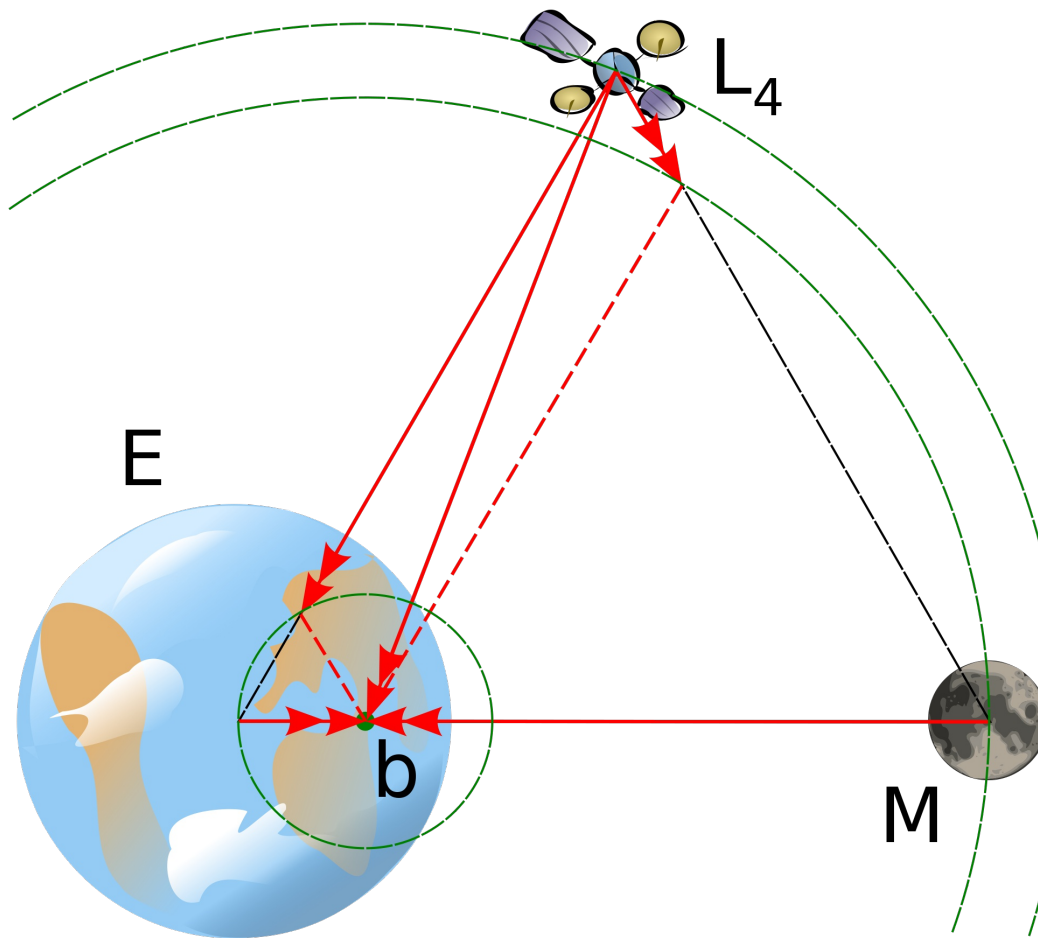
- **Gravitační sféra vlivu** je přibližně kulová a poloměru

$$\rho = R.(m/M)^{2/5}$$

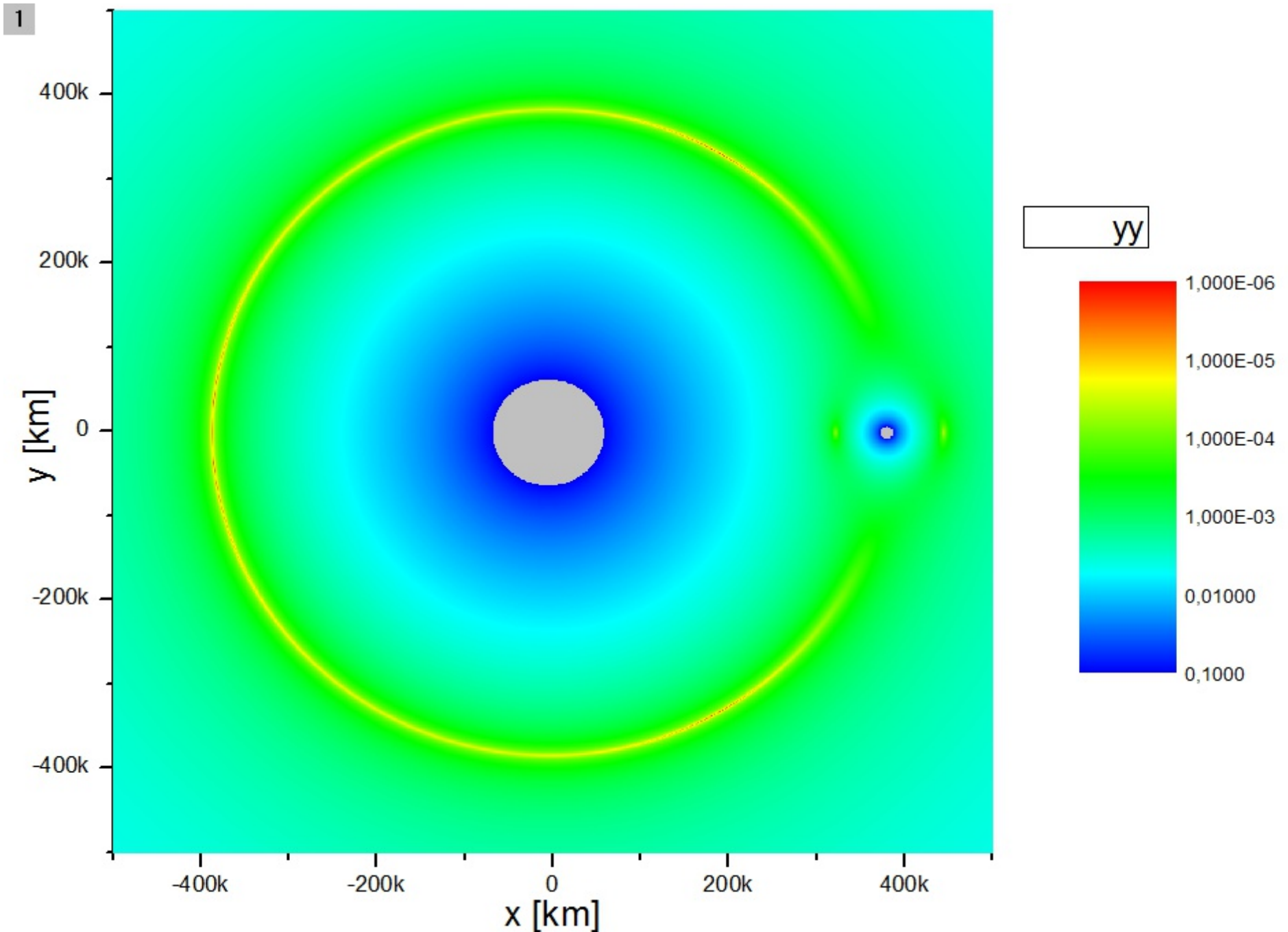
kde R je vzdálenost mezi oběma řídicími tělesy, m hmotnost menšího (např. Země) a M hmotnost většího (např. Slunce)

Lagrangeovy body

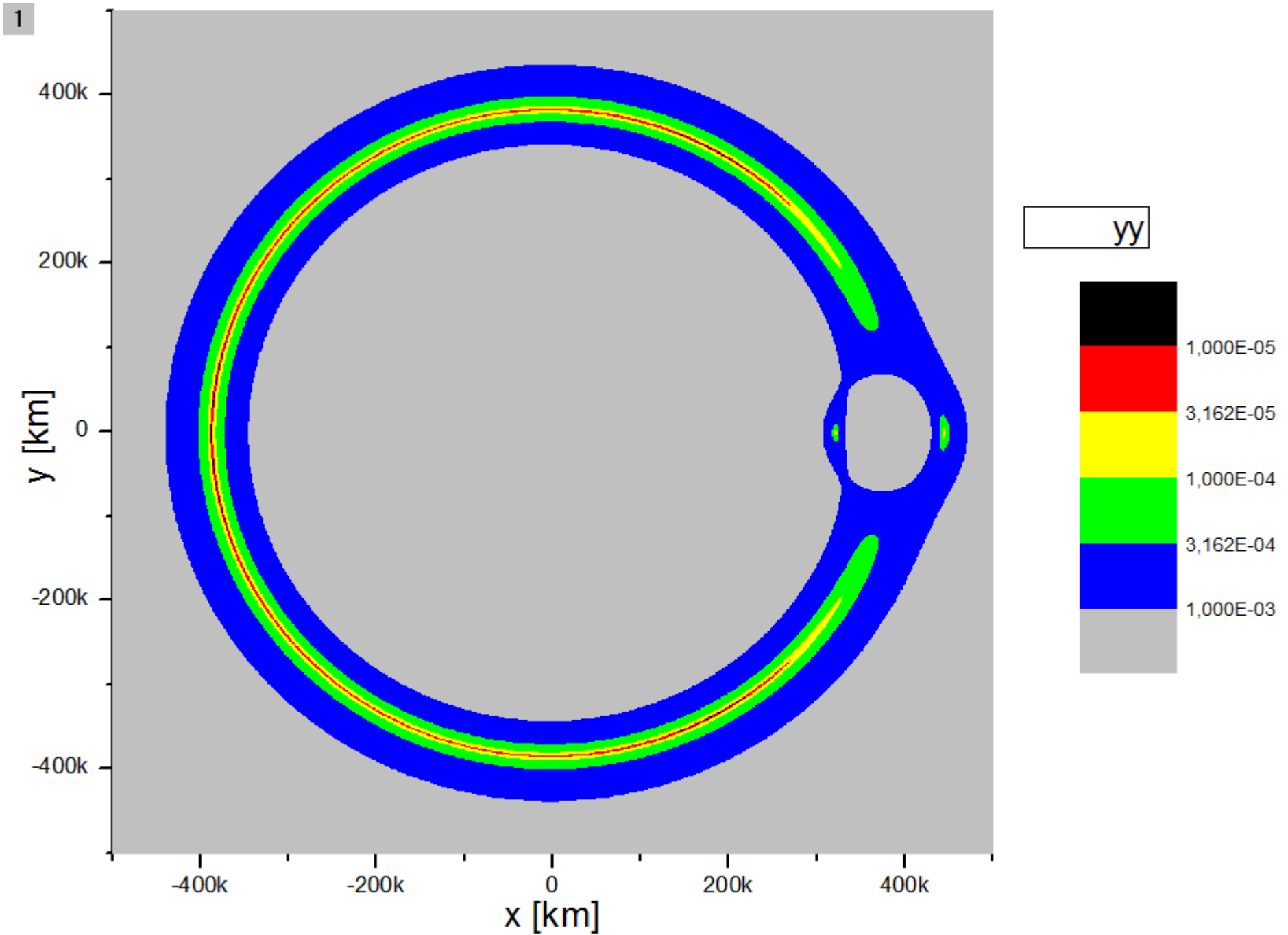
- v soustavě hlavní těleso-vedlejší těleso
 - vyrovnání celkového vektoru gravitačních sil s dostředivým zrychlením pro pohyb kolem těžiště soustavy
 - stabilní a nestabilní
 - „obíhají“ synchronně



Lagrangeovy body Země-Měsíc, zbytkové zrychlení

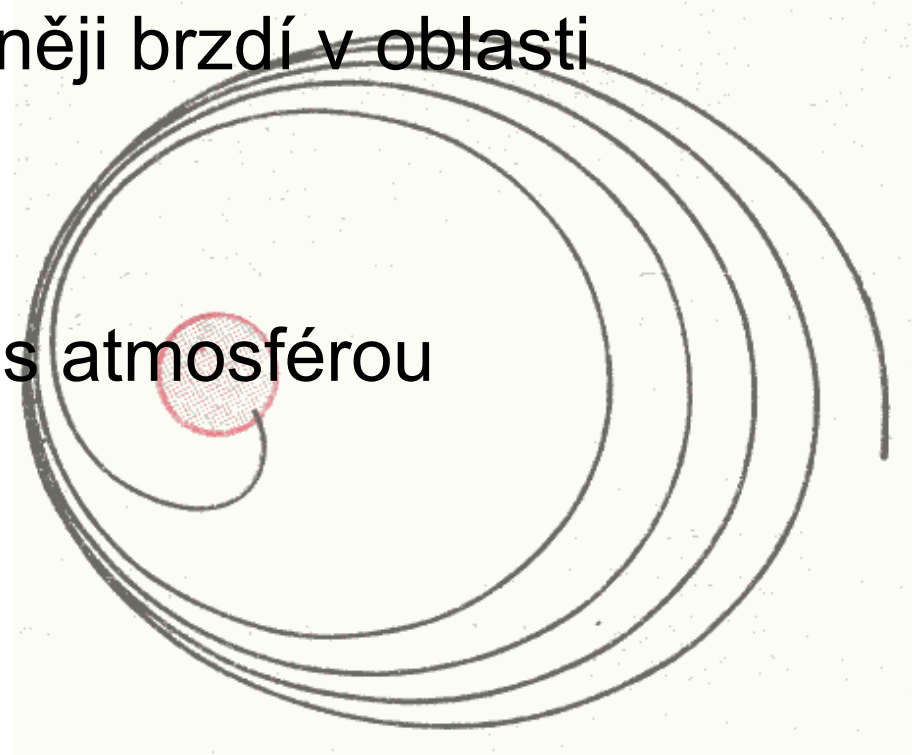


Lagrangeovy body Země-Měsíc, zbytkové zrychlení



Odpor atmosféry

- Hranice atmosféry není ostrá, hustota ovzduší klesá s výškou přibližně exponenciálně
 - (pokles na 1/10 - do 100km každých cca 16km, pak pomaleji)
- Rozdílný profil nad denní a noční stranou planety
- Vliv změn sluneční činnosti na hustotu vysokých vrstev atmosféry
- Důsledek – družice se intenzivněji brzdí v oblasti pericentra – spirálový pokles
- Využití – aerobraking
- Využití – přistání na planetách s atmosférou



Odpor atmosféry

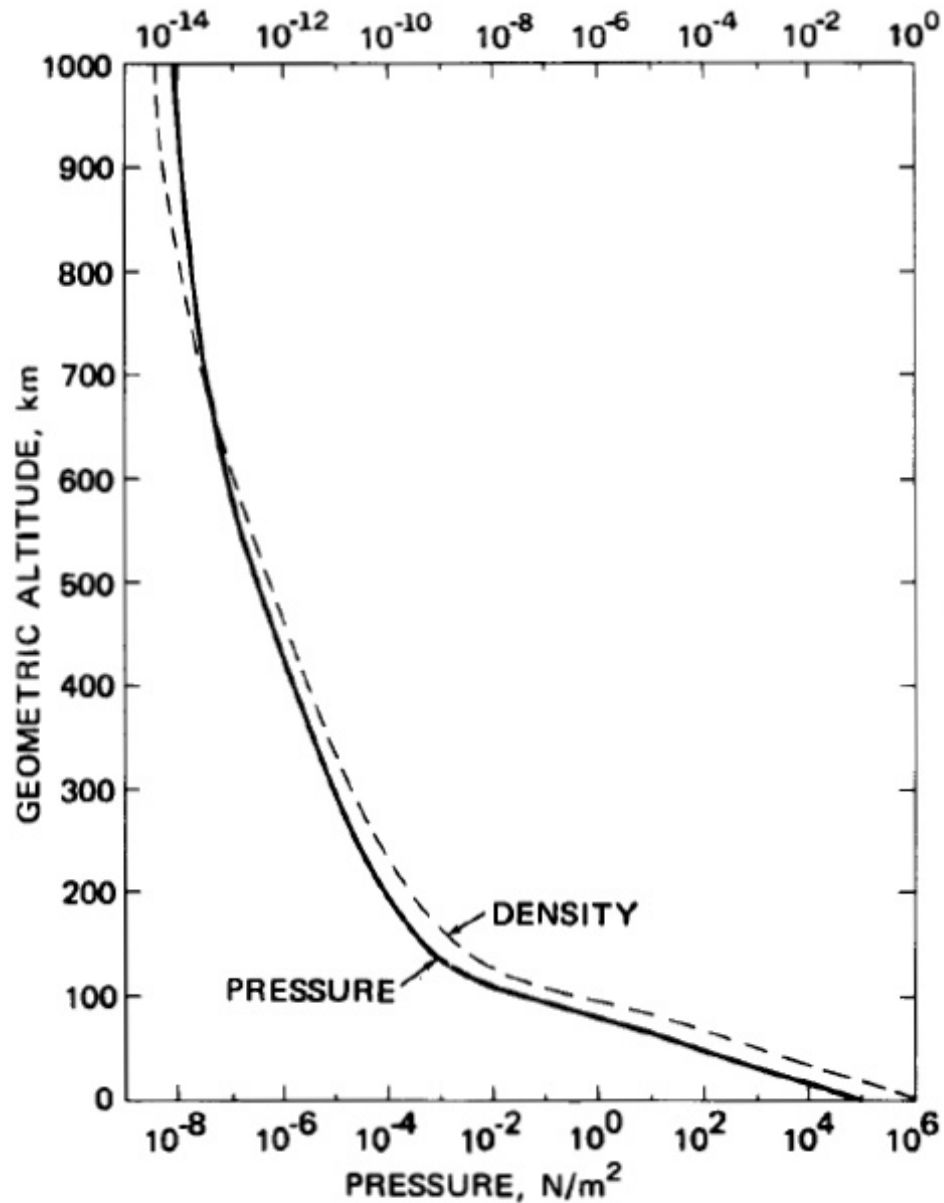


FIGURE 2. Total pressure and mass density as a function of geometric altitude.

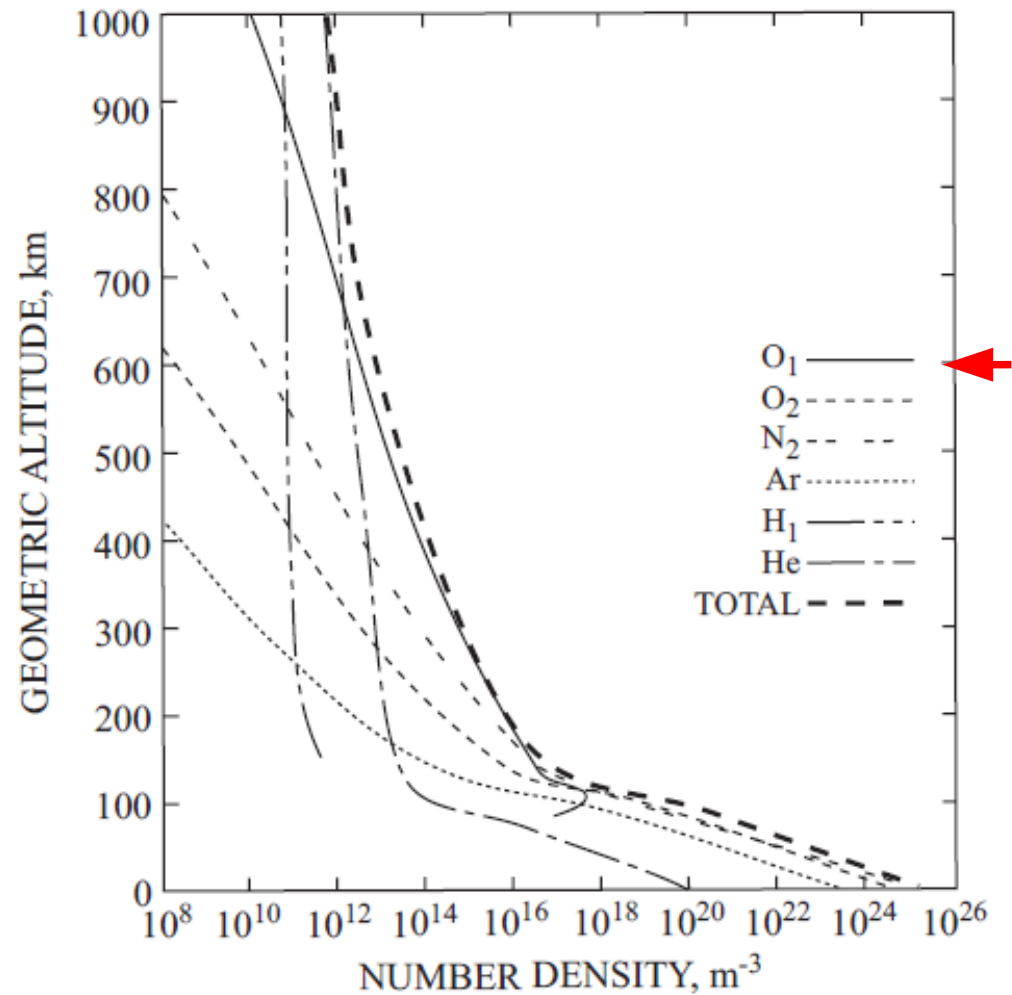
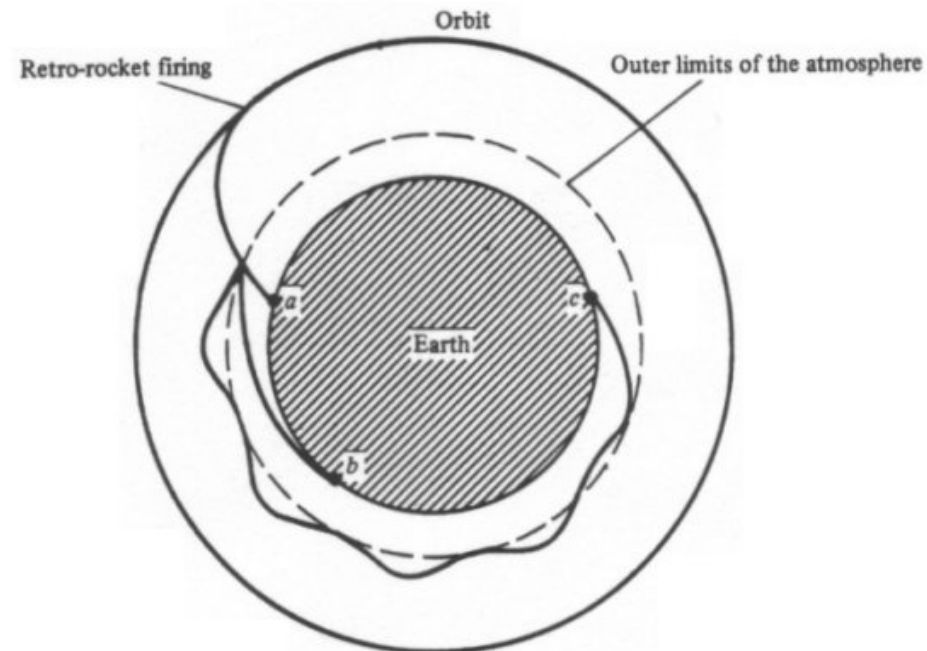
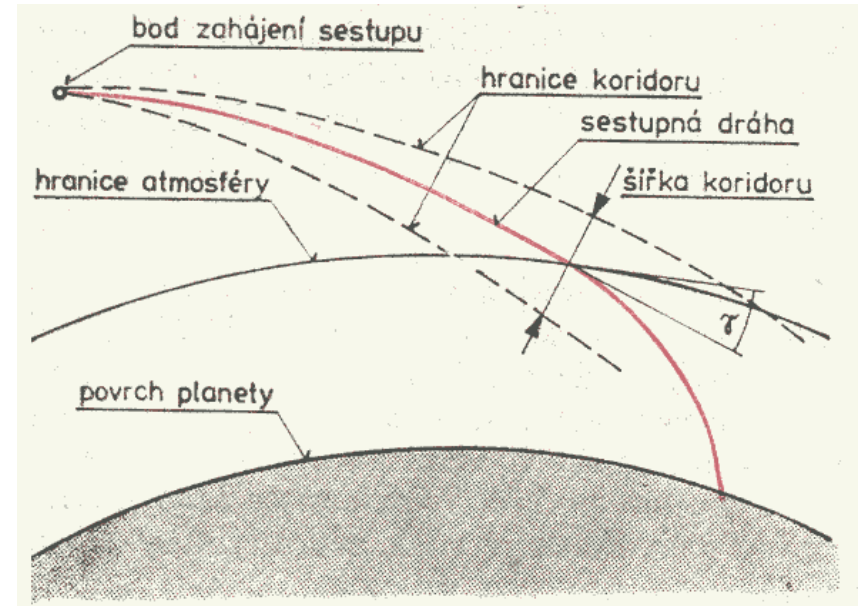
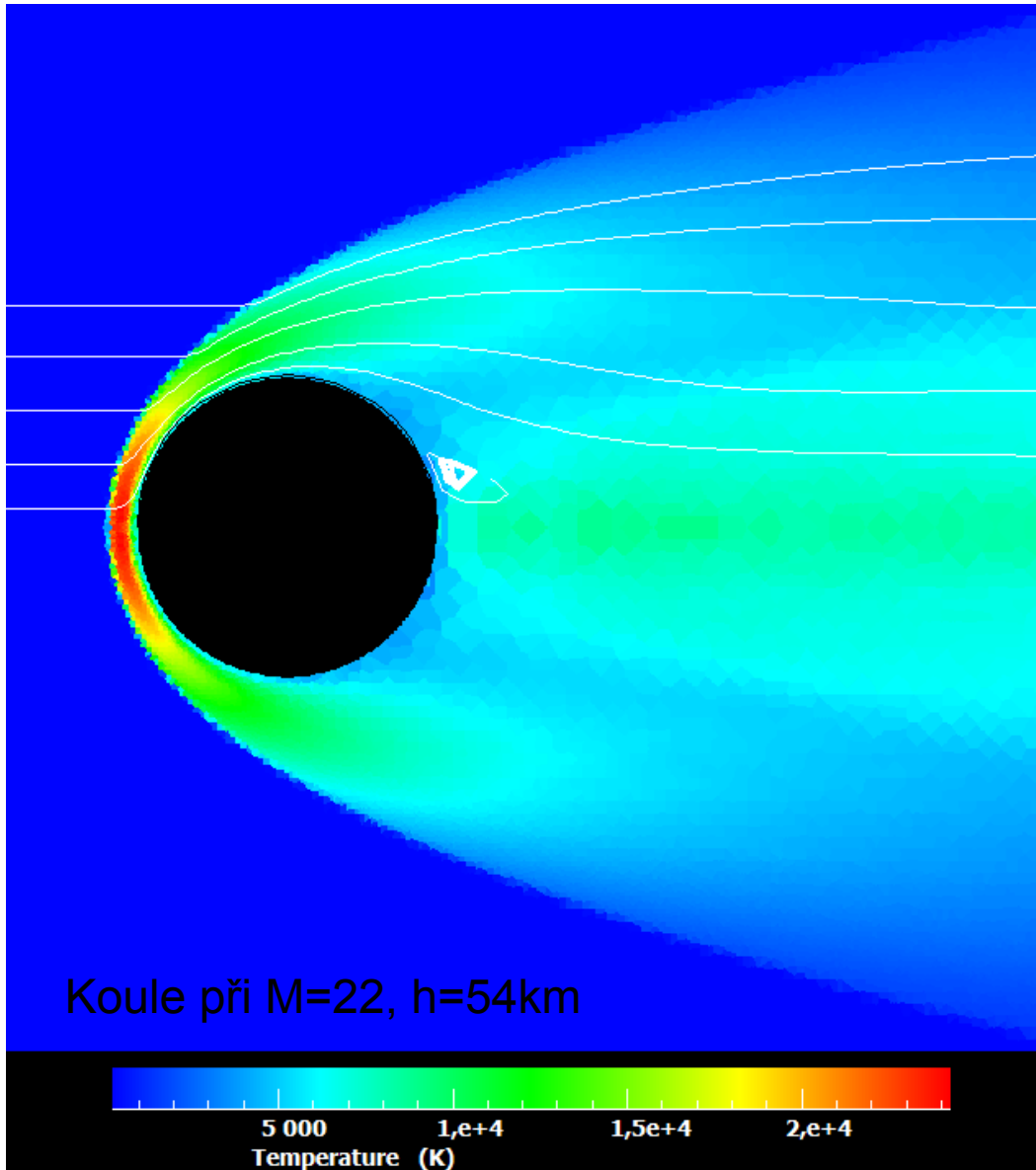


FIGURE 4. Number density of individual species and total number density as a function of geometric altitude.

Odpor atmosféry

- Většina energie je odnesena rázovou vlnou
- Hypersonická aerodynamika



Návrat s použitím vztlaku

- využití prostoru

- max G

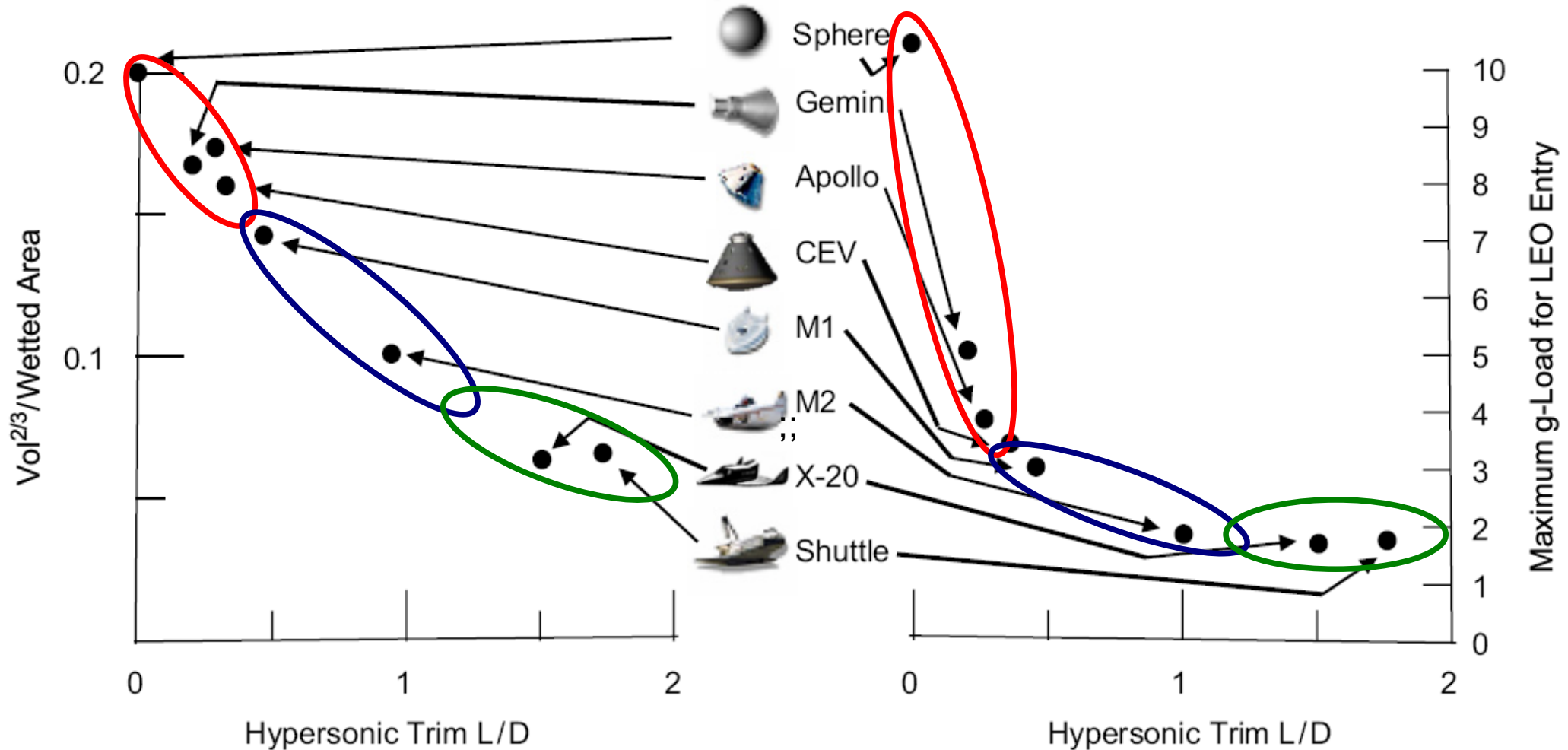


Fig. 1. Effect of lift to drag ratio on volume and g-loads.

Pohyb volného setrvačníku

- moment setrvačnosti
- hlavní osa
- rotace kolem jiných os je nestabilní při odebrání rotační energie

– snižování rot.energie

- (např. vibrace)

$$E_{k_rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

– zachování momentu hybnosti

$$L = J \omega$$

– příklad - Explorer I

- reakce na silové působení
- precese!

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(I\boldsymbol{\omega})}{dt} = I\boldsymbol{\alpha}$$

