

ESTATÍSTICA

Parte I



PARA OS CURSOS TÉCNICOS

Material Didático Elaborado por

Prof. Alessandro da Silva Saadi
MESTRE EM MATEMÁTICA

Capítulo 1

Introdução à Estatística

A **Estatística** é a parte da Matemática que trata dos métodos científicos para COLETA, ORGANIZAÇÃO, RESUMO, APRESENTAÇÃO e ANÁLISE DOS DADOS, para utilizá-los na tomada de decisões.

Quando lemos um jornal ou revista, ou quando assistimos o noticiário da TV, observamos vários números e gráficos que nos dão uma série de informações, tais como:

- índices de inflação e taxa de desemprego;
- resultado de pesquisa de opinião;
- situação da saúde, educação e transportes;
- situação da produção, importação e exportação no mercado mundial;
- índice de analfabetismo no Brasil;
- porcentagem de crianças vacinadas na última campanha de vacinação;
- pesquisa realizada pelas indústrias, entre os consumidores, para o lançamento de um novo produto;
- pesquisas eleitorais, fornecendo elementos para que os candidatos direcionem suas campanhas;
- pesquisas utilizadas pelas emissoras de TV, mostrando a preferência dos espectadores, para organizar sua programação.

O levantamento de informações e sua exposição em tabelas e gráficos são feitos de forma científica utilizando a Estatística.

População e Amostra

População é o conjunto de todos os elementos (pessoas, objetos, produtos) que se pretende estudar.

Amostra é apenas uma parte desta população escolhida como referência para o estudo.

Exemplo 1.1) Em uma pesquisa sobre os alunos de uma escola, foram pesquisados os alunos da turma 801. A turma 801 é uma *amostra* e os alunos da escola é a *população*.



Fases de um Processo Estatístico:

1. coleta de dados;
2. apuração dos dados;
3. apresentação dos dados: tabelas ou gráficos;
4. análise dos resultados.

O tratamento estatístico de um conjunto de dados pode envolver dois processos distintos, isto é, a descrição dos dados e o estabelecimento de conclusões sobre a população a partir dos dados obtidos por amostragem. Para tanto, temos:

Estatística Descritiva: utiliza métodos numéricos e gráficos para mostrar os padrões de comportamento dos dados, para resumir a informação contida nesses dados e para apresentar a informação de forma conveniente.

Inferência Estatística: utiliza dados de amostras para obter estimativas sobre a população.

Arredondamento de Dados

De acordo com a Fundação IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), o arredondamento é feito da seguinte forma:

- a) quando o primeiro algarismo a ser abandonado é 0, 1, 2, 3, ou 4, fica inalterado o último algarismo a permanecer.

Exemplo 1.2) aproximação de uma casa decimal: 53,24 passa a 53,2.

- b) quando o primeiro algarismo a ser abandonado é 5, 6, 7, 8 ou 9, aumenta-se de uma unidade o algarismo a permanecer.

Exemplo 1.3) aproximação de uma casa decimal:

1. 42,87 passa a 42,9
2. 25,08 passa a 25,1
3. 53,99 passa a 54,0
4. 2,352 passa a 2,4

Tipos de Variáveis e seus Níveis de Mensuração

Grandezas observáveis e sujeitas a variações são denominadas **variáveis**. Trata-se de um conjunto de dados específicos que pode assumir valores e/ou aspectos distintos, segundo os casos particulares ou circunstâncias.

Variável	Tipo	Exemplos:
Qualitativa: quando determinados indivíduos ou objetos se excluem mutuamente, devido a uma ou mais características específicas que não podem ser medidas por meio de operações matemáticas.	Nominal	1.4) Sexo: masculino e feminino. Disciplina: matemática, português, história,.. Religião, time do coração, etc.
	Ordinal	1.5) Notas: CSA, CPA,,CRA. Pesquisa de opinião <i>associadas a objetos como</i> sabor, aroma, maciez, etc.: bom, regular, ruim.
Quantitativa: são aquelas mensuradas e representadas por uma escala de quantidades. Discretas: assumem apenas valores inteiros. Contínuas: podem assumir qualquer valor em um intervalo.	Discreta	1.6) O número de irmãos. Número de alunos matriculados. Número de bactérias por mililitro de leite.
	Contínua	1.7) Estatura e peso de pessoas. Temperatura do ar. Notas dos alunos.

É importante destacar que nem sempre uma variável representada por números é uma variável quantitativa. Por exemplo, o número do celular de uma pessoa, o número do apartamento e da placa do carro.

Dados Absolutos e Dados Relativos

Os dados estatísticos que são resultantes da coleta direta da fonte, sendo feita apenas a contagem ou medida, são chamados **DADOS ABSOLUTOS**.

DADOS RELATIVOS são o resultado de comparações por quociente (*razões, percentuais, índices, taxas*) que se estabelecem entre dados absolutos e têm por finalidade facilitar as comparações entre quantidades.

Percentuais

Exemplo 1.8)

Matrículas nas Escolas da Cidade VARGAS – 2013

Categorias	Nº de Alunos	Percentual (%)
Ens. Fundamental	25507	
Ens. Médio	10656	
Ens. Superior	1907	
Total	38070	

Fonte: Dados Fictícios

Calculemos os percentuais de alunos em cada modalidade de ensino usando 1 casa decimal:

O emprego da porcentagem é de grande valia quando o intuito é destacar a participação da parte no todo. Quando queremos fazer comparações entre dados de duas ou mais entradas de uma tabela.

Exemplo 1.9)

Matrículas nas Escolas das Cidade VARGAS e GETULINA – 2013

Categorias	VARGAS		GETULINA	
	Nº de Alunos	(%)	Nº de Alunos	(%)
Ens. Fundamental	25507		52805	
Ens. Médio	10656		12638	
Ens. Superior	1907		2077	
Total	38070		67520	

Fonte: Dados Fictícios

Índices, Coeficientes e Taxas

Os **índices** são razões entre duas grandezas tais que uma não inclui a outra.

- **densidade demográfica** = $\frac{\text{população}}{\text{superfície}}$

Exemplo 1.10) A população do Bairro Cidade é de 12500 habitantes em uma área de 25 Km². Qual a densidade demográfica desse bairro?

- **índices econômicos:**
 - consumo per capita = $\frac{\text{consumo do bem}}{\text{população}}$
 - renda per capita = $\frac{\text{renda}}{\text{população}}$

Exemplo 1.11) Na residência da família Silva moram 6 pessoas e a renda total é de R\$ 4.450,00. Qual a renda per capita da família Silva?

Os **coeficientes** são razões entre o número de ocorrência e o número total.

- **coeficiente de mortalidade** = $\frac{n^{\circ} \text{ de óbitos}}{\text{população total}}$

Exemplo 1.12) Na cidade de Brasília, o número de habitantes é de 2.685.750. O número de nascimentos é de 29.543 e o número de óbitos é de 10.743. Calcule os coeficientes de natalidade e de mortalidade.

- **coeficientes educacionais:**
 - coeficiente de evasão escolar = $\frac{n^{\circ} \text{ alunos evadidos}}{n^{\circ} \text{ inicial de matrículas}}$
 - coeficiente de aproveitamento escolar = $\frac{n^{\circ} \text{ alunos aprovados}}{n^{\circ} \text{ total alunos matriculados}}$

Exemplo 1.13) Na *Escola Mania do Saber* o número de alunos matriculados no início do ano foi de 640. No final do ano, após o último conselho de classe, foi detectado que 32 alunos evadiram e que 520 alunos foram aprovados para a série seguinte. Qual o coeficiente de evasão escolar e o coeficiente de aproveitamento escolar dessa escola?

As **taxas** são os coeficientes multiplicados por uma potência de 10 (10, 100, 1000, etc) para tornar o resultado mais inteligível.

- **taxa de mortalidade** = coeficiente de mortalidade X 1000
- **taxa de evasão escolar** = coeficiente de evasão escolar X 100

Exemplo 1.14) Encontre as taxas dos exemplos **1.12** e **1.13**.

Exercícios

1) Indique as variáveis e classifique-as em qualitativa, quantitativa discreta ou contínua:

- a) Classificação das colunas de um jornal, por seu editor, como excelente, boa ou ruim.
- b) Grau de escolaridade dos funcionários de uma empresa.
- c) Vendas anuais de uma empresa de telefonia celular.
- d) Marcas de desodorante.
- e) Tamanhos de roupas expressos em P, M e G.
- f) Número de livros retirados diariamente de uma biblioteca escolar.

2) Para saber o grau de satisfação dos habitantes de Porto Alegre em relação ao governo, foram entrevistadas 8.500 pessoas. Sabendo que, à época da pesquisa, a cidade tinha cerca 1,3 milhões de habitantes, identifique a população e a amostra estudadas.

3) Observe o quadro de cadastro de funcionários de uma microempresa:

Nome	Sexo	Salário (R\$)	Escolaridade	Tempo de serviço
Keila	F	1.350	Ens. médio	2 anos
Carla	F	1.000	Ens. médio	3,5 anos
Marco	M	2.500	Universitário	2 anos
Alex	M	2.000	Universitário	5 anos
Bia	F	3.100	Especialização	8 anos

- Identifique as variáveis qualitativas e as variáveis quantitativas (contínuas ou discretas)

4) Complete a tabela abaixo:

Número de alunos matriculados nas escolas da Cidade X

Escolas	Nº alunos	%
A	175	
B	222	
C	202	
D	362	
E	280	
F	540	
Total	1781	

Fonte: Dados Fictícios

6) Com base no seguinte quadro da Escola de Ensino Médio “Lírios” no final de 2010, calcule:

- a) a taxa de evasão por série.
b) a taxa de evasão da escola.

Nº de Matrículas da Escola Lírios 2010

Anos	Matrículas	
	março	dezembro
1º	305	265
2º	275	250
3º	265	255
Total	845	770

Fonte: Escola Lírios

5) Considere a série estatística:

Alunos matriculados na Escola Delta

Séries	Nº de alunos	(%)
1ª	546	
2ª	328	
3ª	280	
4ª	120	
Total		

Fonte: Escola Delta

Complete-a, determinando as porcentagens com uma casa decimal, fazendo os arredondamentos, se necessário.

7) Considere a tabela abaixo:

Idade dos Alunos Matriculados no Curso Técnico em Gestão

Idade	Quantidade	%
17	8	
18	20	
19	7	
20	5	
Total	40	

Fonte: Fictícia

complete-a com as taxas percentuais.

8) A cidade de Rio Grande tem uma área de 2.813,907 km e uma população de 197.253 habitantes, segundo o censo 2010. Calcule a sua densidade demográfica.

9) O Estado **A** apresentou 733.986 matrículas na 1ª série, no início de 2009, e 683.816 no fim do ano. O Estado **B** apresentou, respectivamente, 436.127 e 412.457 matrículas. Qual o Estado que apresentou maior evasão escolar?

10) Calcule a taxa de aproveitamento escolar de um professor de uma classe de 45 alunos, sabendo que 36 alunos obtiveram aprovação.

11) Considerando que Minas Gerais, em 1999, apresentou (dados do IBGE):

- população: 15.957.600 hab;
- superfície: 586.624 km²;
- nascimento: 292.036;
- óbitos: 99.281.

calcule:

- a) o índice de densidade demográfica.
b) a **taxa** de natalidade.
c) a **taxa** de mortalidade.

12) Dadas as seguintes informações, encontre a renda per capita dos seguintes países fictícios:

País	Renda	População
A	US\$520.000.000,00	6 800 000
B	US\$200.000.000,00	2 500 000
C	US\$50.000.000,00	100 000

Qual destes países tem a maior renda per capita?

Capítulo 2

Séries Estatísticas

As séries estatísticas podem ser classificadas em:

- **temporal:** apresentam os dados de uma variável tomados em intervalos obtidos ao longo do tempo.
- **geográfica:** apresenta dados provenientes de diferentes regiões geográficas ou locais.
- **específica de uma variável:** são constituídas por dados obtidos nas diferentes espécies de uma mesma variável.
- **mistas (com mais de uma variável):** combinam dois tipos de séries onde os dados podem referir-se a locais, espécies ou tempos diferentes.

Uma das finalidades da Estatística é apresentar ou indicar formas de apresentação de dados, sejam eles qualitativos ou quantitativos. A interpretação de fenômenos do meio físico ou de resultados de investigações de qualquer natureza pode ser facilitada com a organização de tabelas ou gráficos. Uma tabela pode ser utilizada para apresentar as informações de um objeto de estudo de maneira clara e objetiva.

As tabelas não devem ser delimitadas por traços verticais externos (essa é uma das diferenças entre a tabela e o quadro). Elas devem ser delimitadas por traços horizontais, que podem ser mais fortes que os traços internos. Segundo o IBGE, uma tabela deve conter:

- 1) **Título:** deve conter o maior número de informações possíveis, tais como: descrição do conteúdo, local e data. Fica localizado na parte superior da tabela
- 2) **Corpo:** o corpo da tabela contém as informações das variáveis em estudo.
- 3) **Cabeçalho:** parte superior do corpo da tabela, no qual se especifica o conteúdo das colunas;
- 4) **Coluna indicadora:** local para se especificar o conteúdo das linhas;
- 5) **Linhas:** onde se insere o conteúdo.
- 6) **Fonte:** responsável pelos dados e informações contidos na tabela. Quando o autor não menciona a fonte, subentende-se que ele produziu tais informações.

Exemplo 2.1: Série Específica:

	INTERNAUTAS	PORCENTAGEM
América Latina		
Canadá		12,5%
Europa Ocidental		
Japão		9,6%
Ásia/Oceania		18,9%
Europa Ocidental		29,8%
EUA		29,2%
TOTAL		100%

← Título
 ← Cabeçalho
 Coluna Indicadora →
 Corpo →
 Linhas →
 Fonte →

Fonte: Adaptado de: LUZ, S. R. Os novos líderes da Internet. *Revista Veja*, São Paulo, a. 35, n. 3, p. 28, 23 jan. 2002.

**Exemplo 2.2 Série Temporal:
Carros Emplacados em Rio Grande
2007 a 2010**

Ano	Número de veículos
2007	7800
2008	8100
2009	9050
2010	9680

Fonte: Detran Fictício

**Exemplo 2.4 Série Específica:
Os Carros Mais Vendidos no Brasil – 2010**

Modelo	Quantidade
Gol	293790
Uno	229330
Celta	155182
Fox	143661

Fonte: Fenabrave

**Exemplo 2.3 Série Geográfica:
Produção de Ovos de Galinha no Brasil – 1980**

Região	Quant. (1000 dz)
NORTE	26000
NORDESTE	189730
SUDESTE	717500
CENTRO-OESTE	317250
SUL	52950

Fonte: IBGE

**Exemplo 2.5 Série Mista:
Venda de Bebidas em Latas em Janeiro e
Fevereiro de 2011**

Marca	janeiro	fevereiro
Coca	500	410
Pepsi	120	80
Antartica	250	240

Fonte: Lancheria Fictícia

Exercícios

1) Organize as seguintes informações em tabelas e depois classifique-as:

a) A produção de café no Brasil nos anos de 1978 a 1982 em toneladas foi: 1978 – 2535; 1979 – 2666; 1980 – 2122; 1981 – 3750; 1982 – 2107, segundo a fonte do IBGE.

b) O rebanho brasileiro em 2001 era composto por 118.900.000 bovinos, 5.505.000 equinos, 34.180.000 suínos, 18.300.000 ovinos e 8.320.000 caprinos segundo o IBGE.

c) A cidade do Rio Grande tem 197250 habitantes, Pelotas tem 323000, Santa Maria tem 261000, Caxias do Sul tem 435500 e Porto Alegre tem 1410000 habitantes, segundo a FEE – RS.

d) Em uma pesquisa de opinião realizada com 2000 pessoas a respeito da privatização de uma das maiores empresas brasileiras de extração de minérios, as opiniões foram: 630 favoráveis à privatização, 1053 contrárias, 117 não quiseram se manifestar e os demais disseram não saber opinar.

e) O IBGE (2001) realizou uma pesquisa mensal a respeito da taxa de desemprego. Essa pesquisa indicou que essa taxa entre os homens era, em 1998, de 7,08%; em 1999, de 7,05%; em 2000, de 6,5% e, em 2001, de 5,0%. Já para as mulheres a taxa de desemprego foi de 8,34%, em 1998; 8,27%, em 1999; 8,0%, em 2000, e 6,7%, em 2001.

Capítulo 3

Gráficos Estatísticos

O **gráfico estatístico** é uma forma de apresentação dos dados com o objetivo de produzir uma impressão mais rápida e viva do fenômeno, já que os gráficos “falam” mais rápido à compreensão que as séries.

Tipos de Gráficos

1) Gráfico de Colunas – é a representação de uma série por meio de retângulos, dispostos verticalmente. Os retângulos tem a mesma base e as alturas representam a frequência observada.

Exemplo 3.1)

Os Carros Mais Vendidos no Brasil – 2010

Modelo	Quantidade
Gol	290 000
Uno	230 000
Celta	155 000
Fox	140 000

Fonte: Fenabreve

2) Gráfico de Barras – é a representação por meio de retângulos, dispostos horizontalmente. Os retângulos tem a mesma altura e os comprimentos representam a frequência observada. O gráfico de barras é mais usado quando as legendas são extensas.

Exemplo 3.2)

**Exportações Brasileiras
Março – 1995**

Estados	Valor (US\$ milhões)
São Paulo	1350
Minas Gerais	540
Rio Grande do Sul	330
Espírito Santo	280
Paraná	250
Santa Catarina	200

Fonte: SECEX

3) Gráfico de Linhas – é o mais indicado na representação gráfica de uma série temporal, principalmente quando o objetivo é mostrar as observações em função do tempo.

Exemplo 3.3)

**Carros Emplacados em Rio Grande
2007 a 2010**

Ano	Nº de veículos
2007	7800
2008	8100
2009	9050
2010	9680

Fonte: Detran Fictício

4) Gráfico de Setores – ajuda a visualizar a porção que cada grupo representa do todo. O total é representado pelo círculo que fica dividido em tantos setores quantas são as partes.

Exemplo 3.4)

Rebanhos Brasileiros 2000	
Espécie	Quant. (milhões)
Bovinos	120
Suínos	34
Ovinos	18
Caprinos	8
Total	180

Fonte: IBGE

Exercícios

1) Construa um gráfico para cada uma das tabelas:

<p>a) <i>(coluna)</i></p> <p align="center">Consumo de Borracha na Indústria Brasil – 1981</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>TIPO</th> <th>CONSUMO (ton)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Borracha vegetal</td> <td>72 000</td> </tr> <tr> <td>Borracha regenerada</td> <td>18 000</td> </tr> <tr> <td>Borracha sintética</td> <td>190 000</td> </tr> <tr> <td>Látice vegetal</td> <td>3 000</td> </tr> <tr> <td>Látice sintética</td> <td>8 000</td> </tr> </tbody> </table> <p><i>Fonte: MIC</i></p>	TIPO	CONSUMO (ton)	Borracha vegetal	72 000	Borracha regenerada	18 000	Borracha sintética	190 000	Látice vegetal	3 000	Látice sintética	8 000	<p>b) <i>(barra)</i></p> <p align="center">Produção de Veículos no Brasil – 1993</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Tipo</th> <th>Quantidade</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Automóveis</td> <td>1 100 200</td> </tr> <tr> <td>Comerciais leves</td> <td>224 300</td> </tr> <tr> <td>Comerciais pesados</td> <td>66 800</td> </tr> </tbody> </table> <p><i>Fonte: ANFAVEA</i></p>	Tipo	Quantidade	Automóveis	1 100 200	Comerciais leves	224 300	Comerciais pesados	66 800
TIPO	CONSUMO (ton)																				
Borracha vegetal	72 000																				
Borracha regenerada	18 000																				
Borracha sintética	190 000																				
Látice vegetal	3 000																				
Látice sintética	8 000																				
Tipo	Quantidade																				
Automóveis	1 100 200																				
Comerciais leves	224 300																				
Comerciais pesados	66 800																				
<p>c) <i>(linha)</i></p> <p align="center">Produção de Gasolina para Consumo no Brasil – 2000 a 2003</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Anos</th> <th>Volume (1000 m³)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2000</td> <td>9300</td> </tr> <tr> <td>2001</td> <td>9750</td> </tr> <tr> <td>2002</td> <td>10150</td> </tr> <tr> <td>2003</td> <td>12350</td> </tr> </tbody> </table> <p><i>Fonte: IBGE</i></p>	Anos	Volume (1000 m³)	2000	9300	2001	9750	2002	10150	2003	12350	<p>d) <i>(setores)</i></p> <p align="center">Produção de Ferro – Brasil 2003</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Estado</th> <th>Produção (1000ton)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Minas Gerais</td> <td>12900</td> </tr> <tr> <td>Espírito Santo</td> <td>3200</td> </tr> <tr> <td>Rio de Janeiro</td> <td>5000</td> </tr> <tr> <td>São Paulo</td> <td>2900</td> </tr> </tbody> </table>	Estado	Produção (1000ton)	Minas Gerais	12900	Espírito Santo	3200	Rio de Janeiro	5000	São Paulo	2900
Anos	Volume (1000 m³)																				
2000	9300																				
2001	9750																				
2002	10150																				
2003	12350																				
Estado	Produção (1000ton)																				
Minas Gerais	12900																				
Espírito Santo	3200																				
Rio de Janeiro	5000																				
São Paulo	2900																				

Capítulo 4

Distribuição de Frequências

Tabela Primitiva: é uma tabela cujos elementos coletados não foram numericamente organizados.

Rol: é a tabela obtida após a ordenação (crescente ou decrescente) dos dados.

Distribuição de Frequência: é uma tabela com todas as frequências observadas.

Distribuição de Frequências SEM Intervalos de Classe

Através do exemplo 4.1 definiremos alguns conceitos de uma distribuição de frequências sem intervalo de classes.

Exemplo 4.1)

Numa pesquisa sobre preços (em R\$) de um modelo de televisão, em 20 lojas do ramo, foram coletados os valores a seguir, gerando a seguinte tabela primitiva:

2.000	2.500	2.000	2.600	2.000	2.600	2.600	2.500	2.500	2.000
2.000	2.000	2.500	2.600	2.600	2.600	2.600	2.600	2.600	2.600

a) Fazer o rol em ordem crescente de valores.

b) Fazer a distribuição da frequência do rol anterior:

A quantidade de vezes que cada valor é observado é chamado de **frequência absoluta**, ou simplesmente, **frequência (f_i)**.

Distribuição de Frequências COM Intervalos de Classe

Através do exemplo 4.2 definiremos alguns conceitos de uma distribuição de frequências **com** intervalo de classes.

Exemplo 4.2)

Foi feita uma coleta de dados relativos às estaturas de 40 alunos do colégio X, resultando a seguinte tabela primitiva:

166	160	161	150	162	160	165	167	164	160
162	161	168	163	156	173	160	155	164	168
155	152	163	160	155	155	169	151	170	164
154	161	156	172	153	157	156	158	158	161

a) Fazer o rol em ordem crescente:

b) Fazer a distribuição da frequência do rol anterior:

ESTATURAS	FREQUÊNCIA	ESTATURAS	FREQUÊNCIA	ESTATURAS	FREQUÊNCIA

Notamos que a tabela exigiu muito espaço, então a solução aceitável é o agrupamento em intervalos de classes.

Elementos de uma distribuição de frequência com intervalo de classe

- a) **Classe:** são intervalos de variação da variável.
- b) **Limites de classe:** são os extremos de cada classe.
- c) **Amplitude de cada intervalo:** é a medida do intervalo que define a classe.
- d) **Amplitude total (AT):** é a diferença entre o LS da última classe e o LI da primeira classe.
- e) **Amplitude amostral(AA):** é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da amostra.
- f) **Intervalos de classes:** é o agrupamento dos valores da variável em intervalos.
- g) **Frequência simples absoluta (F):** são os valores que realmente representam o número de dados de cada classe.
- h) **Número de intervalos de classe:** a primeira preocupação que temos, na construção de uma distribuição de frequências, é a determinação do número de classes e, conseqüentemente, da amplitude e dos limites dos intervalos de classe. Para determinação de tal número utilizamos a **regra de Sturges** que nos dá o número de classes em função do número de valores da variável:

$$i = 1 + 3,3 \cdot \log n \text{ onde:}$$

i é o número de classes,
n é o número total de dados.

Essa regra nos permite obter a seguinte tabela:

Número de dados (n)	Número de intervalos (i)
3 -- 5	3
6 -- 11	4
12 -- 22	5
23 -- 46	6
47 -- 90	7
91 -- 181	8
182 -- 362	9
...	...

Depois é só encontrar a amplitude do intervalo de classe que é dado pela fórmula:

$$h \approx \frac{AT}{i} ,$$

que pode ser arredondado para o número inteiro mais próximo.

Exemplo 4.3)

- Fazer a distribuição de frequência com intervalo de classes do exemplo 4.2, utilizando os critérios vistos acima:

Estaturas	Frequência
Total	

Outros elementos de uma distribuição de frequências

- a) **Ponto médio (Pm):** é o ponto que divide o intervalo de classe em duas partes iguais.
- b) **Frequência acumulada (Fa):** é o total das frequências de todos os valores inferiores ao limite superior do intervalo de uma dada classe: $F_a = F_k = F_1 + F_2 + \dots + F_k$
- c) **Frequência relativa (Fr):** são os valores das razões entre as frequências simples e a

frequência total: $F_r = \frac{F_i}{\sum F_i}$

- d) **Frequência relativa acumulada (Far):** é a frequência acumulada da classe, dividida pela frequência total da distribuição
- e) **Frequência percentual (Fp):** é igual a Fr x 100.
- f) **Frequência percentual acumulada (Fpa):** é igual a Far x 100.

Exemplo 4.4) A seguinte tabela informa os “pesos” de 25 adolescentes que participaram de uma pesquisa. Completar a tabela com Pm, Fa, Fr, Far, Fp e Fpa:

Pesos	Freq. F						
38 -- 44	4						
44 -- 50	3						
50 -- 56	9						
56 -- 62	3						
62 -- 68	6						
Total	25						

Exercícios

1) Os conceitos dos alunos de uma turma de um curso de mestrado em Matemática foram os seguintes:

C	A	B	C	A	B	C
A	E	D	C	A	C	E
B	B	D	E	C	D	B
C	E	C	B	D	E	C
C	B	B	C	A	C	A

- Faça um rol em ordem crescente onde A é a maior nota e E é a menor.
- Construa uma tabela com todas as frequências.
- Sabendo que a média de aprovação é o conceito C, quantos alunos estão reprovados?
- Qual a porcentagem de alunos que obtiveram conceito C?
- Qual a porcentagem de alunos que obtiveram conceitos D ou E?
- Qual a porcentagem de alunos que obtiveram conceitos A ou B?

2) Dada uma tabela primitiva com as notas de 30 alunos de uma turma da ETEGV:

9	7	4	6	8	1
8	7	6	5	2	7
6	9	5	9	7	4
0	8	6	4	5	4
8	9	7	9	9	8

- faça um rol em ordem crescente.
- faça uma tabela de distribuição de frequência, tendo 0 para limite inferior da primeira classe e a amplitude de cada intervalo sendo 2.
- qual a amplitude total?
- qual a amplitude amostral?
- qual o limite superior da 3ª classe?

3) A exposição continuada a altos níveis de ruído podem causar a PAIR (perda auditiva induzida por ruído). Por esse motivo, o Ministério do Trabalho recomenda a exposição máxima diária de 8 horas ao nível de 85 decibéis. Uma grande indústria metalúrgica realizou uma pesquisa para avaliar o nível de ruído em diferentes setores de suas instalações, obtendo os seguintes dados, em decibéis:

45	85	80	42	72	53	111	108
105	86	33	38	40	55	67	62
61	78	70	41	38	35	40	42
111	103	92	90	96	35	51	69
73	33	84	56	57	48	43	43
73	81	87	93	97	62	84	36

- Organize os dados em ordem crescente.
- Monte uma tabela de distribuição de frequências com intervalo de classes utilizando a Regra de Sturges.

- c) Nessa mesma tabela acrescente mais três colunas e complete com a frequência acumulada (Fa), frequência relativa (Fr) e frequência percentual (Fp).
 d) Quantos setores apresentam nível de ruído dentro do limite recomendado pelo Ministério do Trabalho?

4) Dada a tabela a seguir, referente às massas de 100 pessoas em Kg (quilogramas):

Massas Kg	F	Pm	Fa	Fr	Fp
50 ---58	10				
58 ---66	15				
66 ---74	25				
74 ---82	24				
82 ---90	16				
90 ---98	10				
Total	100				

- a) quantas pessoas tem menos 82 kg?
 b) quantas pessoas tem 58 kg ou mais, mas não atingiram 82 kg?
 c) qual o ponto médio da 3ª classe?
 d) qual a frequência relativa da 4ª classe?
 e) qual o percentual de pessoas que tem menos de 74 kg?
 f) qual o percentual de pessoas que tem 74 kg ou mais?
 g) qual o percentual de pessoas que tem 66 kg ou mais, mas não atingem 90 kg?

Capítulo 5

Representação Gráfica de uma Distribuição de Frequências com Intervalo de Classes

Uma distribuição pode ser representada graficamente pelo **histograma** e pelo **polígono de frequência**.

Construímos qualquer um dos gráficos utilizando o primeiro quadrante de um sistema cartesiano. No eixo horizontal (das abcissas), representamos as variáveis e no eixo vertical (das ordenadas), as frequências.

Histograma

É formado por um conjunto de retângulos justapostos, cujas bases se localizam sobre o eixo horizontal, de tal modo que seus pontos médios coincidam com os pontos médios dos intervalos de classe.

As **larguras** dos retângulos são iguais às amplitudes dos intervalos.

As **alturas** dos retângulos devem ser proporcionais às frequências das classes, sendo a amplitude dos intervalos igual.

Polígono de Frequência

É um gráfico em linha, sendo as frequências marcadas sobre perpendiculares ao eixo horizontal, levantadas pelos pontos médios dos intervalos de classe.

Exemplo 5.1) Feita uma pesquisa sobre às massas em kg (peso) de 20 pessoas, os resultados estão na seguinte tabela (rol):

52	54	57	61	61
62	62	64	66	67
67	67	68	71	72
72	73	75	78	80

- a) Faça uma distribuição de frequência. Acrescente uma coluna com os pontos médios de cada classe.

Massas Kg	Pm	Frequência

b) Confeccione o histograma e o polígono de frequência.

Exercícios

1) Considerando as distribuições de frequência seguintes, confeccione, para cada uma:

a) o histograma.

b) o polígono de frequência.

I)

Massas Kg	Frequência
40 -- 44	2
44 -- 48	5
48 -- 52	9
52 -- 56	6
56 -- 60	4
Total	26

II)

Salário R\$	Frequência
500 -- 700	8
700 -- 900	20
900 -- 1100	7
1100 -- 1300	5
1300 -- 1500	2
1500 -- 1700	1
1700 -- 1900	1
Total	44

2) A tabela a seguir apresenta os coeficientes de liquidez obtidos da análise de balanço em 40 indústrias:

3,9	7,4	10,0	11,8	2,3	4,5	10,5	8,4
18,8	2,9	2,3	0,4	5,0	9,0	5,5	9,2
4,5	4,4	10,6	5,6	8,5	2,4	17,8	11,6
7,1	3,2	2,7	16,2	2,7	9,5	13,1	3,8
4,8	5,3	12,9	6,9	6,3	7,5	2,6	3,3

Determine:

a) a distribuição de frequência

b) o histograma

c) o polígono de frequência correspondentes.

Capítulo 6

Medidas de Posição

As medidas de posição mais importantes são as **medidas de tendência central**, que recebem esse nome pelo fato de os dados observados tenderem, em geral, a se agrupar em torno dos valores centrais. As medidas que vamos estudar são:

- 1) **a média:** é utilizada quando:
 - a) desejamos obter a medida de posição que possui a maior estabilidade;
 - b) houver necessidade de um tratamento algébrico posterior.
- 2) **a mediana:** é utilizada quando:
 - a) desejamos obter o ponto que divide a distribuição em partes iguais;
 - b) há valores extremos que afetam de uma maneira acentuada a média;
 - c) a variável em estudo é salário.
- 3) **a moda:** é utilizada quando:
 - a) desejamos obter uma medida rápida e aproximada de posição;
 - b) a medida de posição deve ser o valor mais típico da distribuição.

Medidas de Posição para Dados Não- Agrupados

Média \bar{x}

É o quociente da divisão da soma dos valores da variável pelos número deles. Para conhecermos a média dos dados não- agrupados, determinamos a média aritmética simples.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Exemplo 6.1) Seja a produção leiteira diária da vaca A, durante uma semana: 10, 14, 13, 15, 16, 18 e 12 litros. Calcule a produção média da semana.

Mediana (Me)

É o valor que divide um conjunto **ordenado** de **n elementos** em duas partes iguais.

1) **Quando n é ímpar:** a mediana será o termo de ordem $\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

Exemplo 6.2) Os dados a seguir se referem ao tempo de espera de quinze paciente a serem atendidos em um consultório médico, em minutos: 15,12, 22, 20, 14, 30, 21,12, 10, 18, 13, 23, 18, 12, 25. Encontre o tempo mediano de espera.

2) **Quando n é par:** a mediana será a média aritmética dos termos de ordem $\left(\frac{n}{2}\right)$ e $\left(\frac{n}{2}+1\right)$.

Exemplo 6.3) Os dados a seguir se referem ao tempo de espera de oito pessoas em uma fila do Supermercado Alfa, em minutos: 2, 21, 18, 13, 6, 7, 10, 12. Encontre o tempo mediano de espera.

Moda (Mo)

É o valor que aparece com maior frequência em um conjunto de dados.

Exemplo 6.4) Sejam os seguintes conjuntos de dados, referentes à quantidade de presentes comprados na época de Natal, encontre a **moda**:

a) 7 8 9 10 10 10 10 11 12 13 15 Mo =

Quando temos um único valor como moda o conjunto é chamado de

b) 3 5 8 10 12 13 Mo =

Quando um conjunto não apresenta moda é chamado de

c) 2 3 4 4 4 5 6 7 7 7 8 9 Mo =

Quando um conjunto apresenta duas modas é chamado de

Medidas de Posição para Dados Agrupados

1º) SEM Intervalo de Classes

Vamos estudar em um exemplo a **média**, a **mediana** e a **moda** quando temos dados agrupados.

Exemplo 6.5) Considere a distribuição relativa ao número de filhos de 34 famílias que consultam em um posto de saúde do interior do município:

Número de filhos	Freq. (F)		
0	2		
1	6		
2	10		
3	12		
4	4		
Total	34		

Encontre a média, a mediana e a moda.

a) A **média** é dada pela fórmula $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot F}{\sum F}$ e x_i é a variável, logo, a média é:

b) Para encontrar a mediana, basta identificar a frequência acumulada imediatamente superior à metade da soma das frequências. A **mediana** será aquele valor da variável que corresponde a tal frequência acumulada. Assim, completando a tabela acima com a frequência acumulada, temos que:

$\frac{\sum F}{2} = \dots\dots\dots$ Logo, a mediana é $Me = \dots\dots\dots$

c) Uma vez agrupados os dados, é possível determinar imediatamente a **moda**: basta fixar o valor da variável de maior frequência. Logo $Mo = \dots\dots\dots$

2º) COM Intervalo de Classes

Vamos estudar em um exemplo a **média**, a **mediana** e a **moda** quando temos dados agrupados.

Exemplo 6.6) Considere a tabela das estaturas de 40 pessoas.

Estaturas	F	$x_i = P_m$	$x_i \cdot F$	Fa
150 --154	4			
154 --158	9			
158 --162	11			
162 --166	8			
166 --170	5			
170 --174	3			
Total	40			

Encontre a média, a mediana e a moda.

a) A **média** é dada pela fórmula: $\frac{\sum x_i \cdot F}{\sum F}$ e x_i é o ponto médio, logo, a média é:

b) No caso da **mediana**, vamos encontrar a classe mediana, e a seguir, calcular a mediana através da fórmula:

$$Me = L_i + \left[\frac{\frac{\sum F}{2} - Fa(\text{ant})_{Me}}{F_{Me}} \right] \times h \quad \text{onde:}$$

L_i é o limite inferior da classe mediana

$Fa(\text{ant})_{Me}$ é a frequência acumulada anterior à da classe mediana

F_{Me} é frequência da classe mediana

h é a amplitude do intervalo

Logo a mediana é:

c) E por último, temos a **moda** que é encontrada através da fórmula $Mo = \frac{Li + Ls}{2}$ onde L_i e L_s são os limites inferior e superior da classe modal. Logo a moda é:

Exercícios

1) Considerando os seguintes conjuntos de dados referentes a números de pacientes atendidos em consultórios médicos por dia, encontre a média, a mediana e a moda:

a) Consultório A

3 5 2 6 5 9 5 2 8 6

b) Consultório B

20 9 7 2 12 7 20 15 7

c) Consultório C

15 18 20 13 10 16 14

2) Sejam as massas de 7 crianças medidas em kg, encontre a média, a mediana e a moda (se tiver):

51,6 48,7 50,3 49,5 48,9 35,5 41,0

3) Os salários-hora de cinco funcionários de uma companhia são: R\$75 R\$90 R\$83 R\$142 R\$88, determine:

- a) a média dos salários-hora
- b) o salário-hora mediano

4) As notas de um candidato, em seis provas de um concurso, foram: 8,4 9,1 7,2 6,8 8,7 7,2. Determine:

- a) a nota média
- b) a nota mediana
- c) a nota modal.

5) A seguir, estão os valores mensais referentes ao consumo de energia elétrica (em kwh) medidos em uma residência durante 12 meses.

50	267	279	262	226	298
294	272	297	257	244	50

- a) Qual foi o consumo médio do período?
- b) Qual foi o consumo mediano?
- c) Qual dessas duas medidas você acha que representa melhor o consumo de energia nessa casa?

6) Em uma classe de 50 alunos, as notas obtidas formaram a seguinte distribuição:

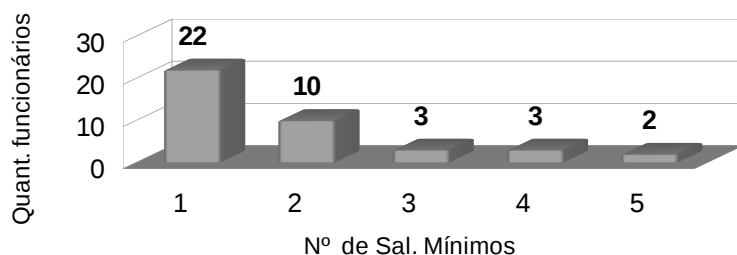
NOTAS	Nº DE ALUNOS
2	1
3	3
4	6
5	10
6	13
7	8
8	5
9	3
10	1
Total	50

Calcule:

- a) a nota média.
- b) a nota mediana.
- c) a nota modal.

7) O gráfico a seguir mostra o quadro de funcionários da Loja BETA com os seus respectivos salários (em salários mínimos).

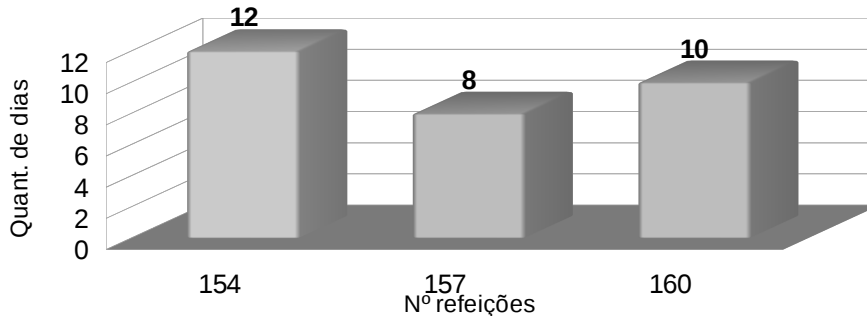
Quadro de Funcionários e Salários da Loja BETA



- a) Monte uma tabela referente a esse gráfico.
- b) Quantas pessoas trabalham na Loja BETA?
- c) Encontre o salário médio (Em salário mínimo).
- d) Encontre o salário mediano (Em salário mínimo).
- e) Encontre o salário modal.

8) Dado o seguinte gráfico das refeições servidas em um mês no Restaurante Caseiro, encontre a quantidade média, mediana e quantidade modal de refeições diárias servidas.

Refeições servidas durante um mês - Restaurante Caseiro



Sugestão: Monte a tabela referente a esse gráfico.

9) Dadas as distribuições de frequência seguintes, encontre a média, a mediana e a moda:

a)		b)		c)	
Massas Kg	Frequência	Estaturas (cm)	Frequência	Salário R\$	Frequência
40 -- 44	2	150 -- 156	1	500 -- 700	8
44 -- 48	5	156 -- 162	5	700 -- 900	20
48 -- 52	9	162 -- 168	8	900 -- 1100	7
52 -- 56	6	168 -- 174	13	1100 -- 1300	5
56 -- 60	4	174 -- 180	3	1300 -- 1500	2
Total	26	Total	30	1500 -- 1700	2
				Total	44

Prof. Alessandro da Silva Saadi

Graduado, especialista e mestre em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande – FURG. Foi professor das disciplinas Matemática Financeira e Matemática Aplicada nos cursos de Administração de Empresas, Ciências Contábeis, Ciências Econômicas e Matemática na FURG e atualmente é técnico matemático na FURG e professor da Escola Técnica Estadual Getúlio Vargas – ETEGV em Rio Grande.

Referências Bibliográficas

SILVA, E.M.; et al. **Estatística**. São Paulo: Editora Atlas, 1999.
 PINTO, S.S.; SILVA, C.S. **Estatística Volume 1**. Rio Grande: Editora da FURG, 2010.
 CRESPO, A.A. **Estatística Fácil**. São Paulo: Editora Saraiva, 2002.