Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Trabajo Especial de la Licenciatura en Ciencias de la Computación

Aplicaciones de Álgebra Universal al reticulado de Post

Autor: Maico C. Leberle

Director: Diego Vaggione

Marzo 2017

Abstract

The lattice of all clones of Boolean functions ordered by inclusion, better known as *Post's lattice*, is of great importance in Computer Science in everything related to the problem of boolean satisfiability and its complexity. In this work, we succeed in describing one of the infinite chains in Post's lattice through the aplication of various Universal Algebra concepts.

To this purpose, we study the lattice of congruences of an algebra, varieties, subdirectly irreducible algebras, the free algebra of a variety, Mal'cev and Jónnson conditions, and clones.

The variety of implicative algebras and AE-sentences ($\forall\exists! \bigwedge p \equiv q$ sentences) are presented, crucial to the development of the work. From AE-sentences, we will study the clone of algebraic functions and the algebraically expandable (sub)classes. It will be possible, then, to describe the infinite chain of clones between the clone of term operations and the clone of algebraic functions of the 2-element implicative algebra (i.e., the clones which include the implication function) through the proof of an anti-isomorphism with the lattice of algebraically expandable subclasses of the variety of implicative algebras.

Resumen

El reticulado de todos los clones de funciones booleanas ordenados por inclusión, mejor conocido como *reticulado de Post*, es de suma importancia en Ciencias de la Computación en lo referido al problema de satisfacibilidad booleana y su complejidad. En este trabajo se logra describir una de las cadenas infinitas del reticulado de Post mediante la aplicación de varios conceptos de Álgebra Universal.

Para esto, estudiaremos el reticulado de congruencias de un álgebra, las variedades, las álgebras subdirectamente irreducibles, el álgebra libre de una variedad, las condiciones de Mal'cev y de Jónnson, y los clones.

Además, se presentan la variedad de las álgebras implicativas y las AE-sentencias (sentencias de la forma $\forall\exists! \bigwedge p \equiv q$), centrales en el desarrollo de este trabajo. A través de las AE-sentencias, estudiaremos el clon de funciones algebraicas y las (sub)clases algebraicamente expandibles. Será posible, entonces, describir la cadena infinita de clones comprendidos entre el clon de operaciones término y el clon de funciones algebraicas del álgebra implicativa de 2 elementos (i.e., los clones que contienen a la función booleana implica) mediante la demostración de un anti-isomorfismo con el reticulado de subclases algebraicamente expandibles de la variedad de las álgebras implicativas.

Índice

1. Introducción

El Álgebra Universal es el estudio de las propiedades comunes a álgebras, y a clases de álgebras, independientemente de sus tipos. De este modo, cada una de sus construcciones de conocimiento se direccionan en la obtención de resultados pertinentes a familias enteras de álgebras (por ejemplo, las clases ecuacionales —o *variedades*—), y no álgebras de un tipo en particular. Esto hace del Álgebra Universal una herramienta sumamente útil para abordar problemas de diversas áreas de las Matemáticas y las Ciencias de la Computación, sobre las que le es posible brindar luz de manera erudita. El presente Trabajo intenta ser un ejemplo de esto.

El reticulado de clones de funciones booleanas, mejor conocido como *reticulado de Post*, es una adaptación directa a la teoría de clones de los estudios de Emil Leon Post sobre subconjuntos de funciones booleanas cerrados bajo composición. Sin embargo, su demostración original sobre la estructura reticular de todos estos subconjuntos (junto con la relación de inclusión) fue arduamente laboriosa, y requiere varias consideraciones sobre combinatoria; pruebas más sencillas han sido dadas desde entonces (por ejemplo, en [9] o en [10]).

Nuestra intención es describir de manera precisa una de las 8 cadenas infinitas de clones presentes en el reticulado de Post, lo cual logramos mediante el estudio de las subclases algebraicamente expandibles (clases AE) de la variedad de las álgebras implicativas; estas clases AE pueden pensarse como los “cortes” que se pueden efectuar en la variedad de las álgebras implicativas mediante AE-sentencias, y conforman exactamente una de dichas cadenas infinitas de clones. Estudiar de esta manera el reticulado de clones de funciones booleanas resulta novedoso, y evidencia la valiosa utilidad de las representaciones globales junto al hecho de que éstas preservan la satisfacibilidad de AE-sentencias ([5]).

Aunque el presente Trabajo intenta ser autocontenido, es preciso aclarar aquí que, para abordarlo con fluidez y naturalidad, será necesario que el lector conozca conceptos básicos de lógica, teoría de de modelos y álgebra. Todos los resultados aquí presentados fueron cuidadosamente estudiados; por esta razón, intentamos otorgar una demostración a cada Lema, Teorema y Corolario, acompañando al lector en el entendimiento de los distintos temas. Las demostraciones faltantes son resueltas en las citas bibliográficas, o competen temas que exceden la finalidad de este Trabajo, o creemos que pueden ser fácilmente deducidas de las definiciones relacionadas.

2. Preliminares

En esta sección, presentaremos ciertos conceptos ya conocidos (términos y fórmulas de un tipo, producto de álgebras, etc.) realizando generalizaciones para abordar con la profundidad necesaria nuestros estudios; por ejemplo, redifiniendo los términos y fórmulas de un tipo para que contemplen conjuntos arbitrarios de variables, generalizando la noción de producto directo para poder contar con una cantidad arbitraria de factores, introduciendo los ideales (conceptos duales a los filtros), o estudiando las congruencias de álgebras de una manera más abarcativa (a saber, el reticulado de congruencias de un álgebra). Por último, encontraremos interesantes maneras de relacionar el reticulado de congruencias con filtros e ideales, y con álgebras subdirectamente irreducibles (uno de los conceptos fundamentales del Álgebra Universal y de vital importancia en varias secciones de este Trabajo).

También haremos un estudio sobre las relaciones de satisfacibilidad de ciertas fórmulas entre álgebras relacionadas entre sí por ser subálgebras, álgebras cociente, imágenes homomórficas o productos directos. Dicho estudio se realizará en función de la forma sintáctica de las fórmulas (i.e., los símbolos en ellas presentes), obteniendo así información útil para discernir posteriormente acerca de las identidades (sección Variedades) y las AE-sentencias (sección Clases Algebraicamente Expandibles).

2.1. Conjuntos de variables arbitrarios

Para empezar, notemos que para cualquier tipo $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ los conjuntos X de símbolos tales que

$$X \cap (\mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \{`\forall`, `\exists`, `\wedge`, `\vee`, `\equiv`, `\neg`, `\rightarrow`, `\longleftrightarrow`, `(`, `)`, `,`\}) = \emptyset$$

pueden reemplazar sin inconvenientes al conjunto de variables utilizado para construir los conjuntos de términos y de fórmulas de tipo τ. Por esta razón, cuando un conjunto arbitrario de símbolos X sirva de conjunto de variables, llamaremos a los elementos de X *variables*, y X será llamado un *conjunto de variables arbitrario.*

Definition 1 *Sea $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ un tipo, y sea X un conjunto de variables arbitrario. Definamos los conjuntos de palabras $T_k^\tau(X)$, con $k \geq 0$, de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} T_0^\tau(X) = \quad & X \cup \mathcal{C} \quad , \\ T_{k+1}^\tau(X) = \quad & T_k^\tau(X) \\ & \cup \{f(t_1, ..., t_n) : f \in \mathcal{F}_n \text{ y } t_1, ..., t_n \in T_k^\tau(X),\ n \geq 1\}. \end{aligned}$$

Defínase además $T^\tau(X) = \bigcup_{k \geq 0} T_k^\tau(X)$. Los elementos de $T^\tau(X)$ serán llamados términos de tipo τ con variables en X.

Definition 2 *Sea $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ un tipo, y sea X un conjunto de variables arbitrario. Las palabras de la forma*

$$\begin{array}{l} (t \equiv s), \textit{ con } t, s \in T^\tau(X) \\ r(t_1, ..., t_n), \textit{ con } t_1, ..., t_n \in T^\tau(X),\ r \in \mathcal{R}_n,\ n \geq 1. \end{array}$$

serán llamadas fórmulas atómicas de tipo τ con variables en X.

Definition 3 *Dados $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ un tipo y X un conjunto de variables arbitrario, definamos los conjuntos de palabras $F_k^\tau(X)$, con $k \geq 0$, de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rl} F_0^\tau(X) = & \{\textit{fórmulas atómicas de tipo } \tau \textit{ con variables en } X\}, \\ F_{k+1}^\tau(X) = & F_k^\tau(X) \\ & \cup \{\neg\varphi : \varphi \in F_k^\tau(X)\} \ \cup \ \{(\varphi \vee \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau(X)\} \\ & \cup \{(\varphi \wedge \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau(X)\} \ \cup \ \{(\varphi \rightarrow \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau(X)\} \\ & \cup \{(\varphi \leftrightarrow \psi) : \varphi, \psi \in F_k^\tau(X)\} \ \cup \ \{\forall u\varphi : \varphi \in F_k^\tau(X), u \in X\} \\ & \cup \{\exists u\varphi : \varphi \in F_k^\tau(X), u \in X\}. \end{array}$$

Defínase además $F^\tau(X) = \bigcup_{k \geq 0} F_k^\tau(X)$. Los elementos de $F^\tau(X)$ serán llamados fórmulas de tipo τ con variables en X.

Definition 4 *Dada una estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ y X un conjunto de variables, una* valuación *será una función $v : X \rightarrow A$. Dada una variable $x \in X$, $v(x)$ será llamado* el valor que toma x respecto de la valuación v.

Definition 5 *Dados una estructura $\mathbf{A}$ de tipo $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$, un término $t \in T^\tau(X)$ y una valuación v, defínase recursivamente $t^{\mathbf{A}}[v]$ de la siguiente manera:*

- *Si $t = x \in X$, entonces $t^{\mathbf{A}}[v] = v(x)$.*
- *Si $t = c \in \mathcal{C}$, entonces $t^{\mathbf{A}}[v] = c^{\mathbf{A}}$.*
- *Si $t = f(t_1, ..., t_n)$, con $f \in \mathcal{F}_n$, $t_1, ..., t_n \in T^\tau(X)$, entonces*

$$t^{\mathbf{A}}[v] = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[v], ..., t_n^{\mathbf{A}}[v]).$$

El elemento $t^{\mathbf{A}}[v]$ será llamado el valor que toma t respecto de la valuación v (en $\mathbf{A}$).

Definition 6 *Dados una estructura $\mathbf{A}$ de tipo τ, una valuación v y un elemento $a \in A$, denotaremos con $\downarrow_x^a (v)$ a la valuación w tal que $w(x) = a$ y $w(y) = v(y)$, para cada $y \in X - \{x\}$.*

Definition 7 *Dadas una estructura* $\mathbf{A}$ *de tipo* τ*, una fórmula* $\varphi \in F^{\tau}(X)$ *y una valuación* v*, definiremos recursivamente la relación* $\mathbf{A} \models \varphi[v]$ *de la siguiente manera:*

- *Si* $\varphi = (t \equiv s)$*, entonces* $\mathbf{A} \models \varphi[v]$ *si y sólo si* $t^{\mathbf{A}}[v] = s^{\mathbf{A}}[v]$*.*
- *Si* $\varphi = r(t_1, ..., t_n)$*, entonces* $\mathbf{A} \models \varphi[v]$ *si y sólo si* $(t_1^{\mathbf{A}}[v], ..., t_n^{\mathbf{A}}[v]) \in r^{\mathbf{A}}$*.*
- *Si* $\varphi = \neg\psi$*, entonces* $\mathbf{A} \models \varphi[v]$ *si y sólo si no se da que* $\mathbf{A} \models \varphi[v]$*.*
- *Si* $\varphi = (\psi \vee \gamma)$*, entonces* $\mathbf{A} \models \varphi[v]$ *si y sólo si* $\mathbf{A} \models \psi[v]$ *o* $\mathbf{A} \models \gamma[v]$*.*
- *Si* $\varphi = (\psi \wedge \gamma)$*, entonces* $\mathbf{A} \models \varphi[v]$ *si y sólo si* $\mathbf{A} \models \psi[v]$ *y* $\mathbf{A} \models \gamma[v]$*.*
- *Si* $\varphi = (\psi \rightarrow \gamma)$*, entonces* $\mathbf{A} \models \varphi[v]$ *si y sólo si no se da que* $\mathbf{A} \models \psi[v]$ *o se da que* $\mathbf{A} \models \gamma[v]$*.*
- *Si* $\varphi = (\psi \longleftrightarrow \gamma)$*, entonces* $\mathbf{A} \models \varphi[v]$ *si y sólo si se dan* $\mathbf{A} \models \psi[v]$ *y* $\mathbf{A} \models \gamma[v]$ *o no se da que* $\mathbf{A} \models \psi[v]$ *ni que* $\mathbf{A} \models \gamma[v]$*.*
- *Si* $\varphi = \forall u\psi$*, entonces* $\mathbf{A} \models \varphi[v]$ *si y sólo si para cada* $a \in A$ *se da que* $\mathbf{A} \models \psi[\downarrow_u^a (v)]$*.*
- *Si* $\varphi = \exists u\psi$*, entonces* $\mathbf{A} \models \varphi[v]$ *si y sólo si existe un* $a \in A$ *para el que* $\mathbf{A} \models \psi[\downarrow_u^a (v)]$*.*

Cuando se dé que $\mathbf{A} \models \varphi[v]$ *diremos que* A satisface φ en la valuación v.

Definition 8 *Sean variables* $x_1, ..., x_n \in X$*, todas distintas. Dado* $t \in T^{\tau}(X)$*, escribiremos* $t =_d t(x_1, ..., x_n)$ *para declarar que las variables que ocurren en* t *están en* $\{x_1, ..., x_n\}$*; cuando sea notacionalmente conveniente e inambiguo, escribiremos directamente* $t \in T^{\tau}(x_1, ..., x_n)$*. Además, escribiremos* $t =_d t()$ *(o* $t \in T^{\tau}(\emptyset)$*) para declarar que* t *es un termino cerrado, y en tal caso* $t^{\mathbf{A}}[]$*, o simplemente* $t^{\mathbf{A}}$*, denotará el valor de* t *en la estructura* $\mathbf{A}$*.*

Del mismo modo, dada $\varphi \in F^{\tau}(X)$*, escribiremos* $\varphi =_d \varphi(x_1, ..., x_n)$ *para declarar que todas las variables libres de* φ *están en* $\{x_1, ..., x_n\}$*. La definición formal de* $Li(\varphi)$*, para cada* $\varphi \in F^{\tau}(X)$*, es remitida al lector, quien suponemos que conoce la manera de hacerlo.*

Por último, dados un término $t =_d t(x_1, ..., x_n)$ *y* $s_1, ..., s_n$ *palabras cualesquiera, se denotará por* $t(s_1, ..., s_n)$ *a la palabra resultante de reemplazar simultáneamente cada ocurrencia de* x_i *por* s_i*, para* $i = 1, ..., n$*.*

Definition 9 *Sean* $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ *un tipo y* $t \in T^{\tau}(X)$*, para algún conjunto de variables* X*, tal que* $t =_d t(x_1, ..., x_n)$*. Se define el mapeo* $t^{\mathbf{A}} : A^n \longrightarrow A$ *tal que para cada* $a_1, ..., a_n \in A$*:*

- *Si* $t = x_i$, *con* $1 \leq i \leq n$, *entonces* $t^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) = a_i$, *para cualesquiera* $a_1, ..., a_n \in A$.

- *Si* t *es de la forma* $f(t_1(x_1, ..., x_n), ..., t_k(x_1, ..., x_n))$, *con* $f \in \mathcal{F}_k$, *entonces* $t^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) = f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n), ..., t_k^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n))$.

En este caso, diremos que t *representa a* $t^{\mathbf{A}}$ *en* $\mathbf{A}$*, que* $t^{\mathbf{A}}$ *es representable en* $\mathbf{A}$ *por* t*, o que* $t^{\mathbf{A}}$ *tiene un término representante (a saber,* t*) en* $\mathbf{A}$*.*

Lemma 10 *Sean* $\mathbf{A}$ *una estructura de tipo* τ, $t \in T^{\tau}(X)$ *tal que* $t =_d t(x_1, ..., x_n)$, *y valuaciones* v_1 *y* v_2. *Si* $v_1(x_i) = v_2(x_i)$, *para cada* $i = 1, ..., n$, *entonces* $t^{\mathbf{A}}[v_1] = t^{\mathbf{A}}[v_2]$.

Lemma 11 *Sean* $\mathbf{A}$ *una estructura de tipo* τ, $\varphi \in F^{\tau}(X)$ *tal que* $\varphi =_d \varphi(x_1, ..., x_n)$, *y valuaciones* v_1 *y* v_2. *Si* $v_1(x_i) = v_2(x_i)$, *para cada* $i = 1, ..., n$, *entonces* $\mathbf{A} \models \varphi[v_1]$ *sii* $\mathbf{A} \models \varphi[v_2]$.

Como consecuencia de estos últimos lemas, denotaremos por $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]$ al elemento $t^{\mathbf{A}}[v] \in A$, para alguna valuación v tal que $v(x_i) = a_i$, para $i = 1, ..., n$, y como $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n]$ cuando $\mathbf{A} \models \varphi[v]$, para alguna valuación v tal que $v(x_i) = a_i$, para $i = 1, ..., n$.

2.2. Subálgebras

Definition 12 *Sea* $\mathbf{A}$ *una estructura de tipo* τ. *Diremos que una estructura* $\mathbf{B}$ *de tipo* τ *es una* subestructura de $\mathbf{A}$ *cuando*

- $B \subseteq A$.

- *Para cada* $c \in \mathcal{C}$, $c^{\mathbf{B}} = c^{\mathbf{A}}$.

- *Para cada* $f \in \mathcal{F}_n$, B *es cerrado bajo* $f^{\mathbf{B}}$, *y* $f^{\mathbf{B}} = f^{\mathbf{A}}|_{B^n}$.

- *Para cada* $r \in \mathcal{R}_n$, $r^{\mathbf{B}} = r^{\mathbf{A}} \cap B^n$.

En dicho caso, B *será llamado un* subuniverso *de* A.

Definition 13 *Sea* $\mathbf{A}$ *una estructura de tipo* τ, *y sea* $S \subseteq A$ *tal que* $S \neq \emptyset$. *Se define la subestructura generada por* S *como*

$$\langle S \rangle = \bigcap \{B : S \subseteq B \text{ y } \mathbf{B} \leq \mathbf{A}\}.$$

Diremos que S genera *a* $\langle S \rangle$.

Lemma 14 *Sean* $\mathbf{A}$ *una estructura de tipo* τ *y* $S \subseteq A$, $S \neq \emptyset$. *Luego,*

$$\langle S \rangle = \{t^{\mathbf{A}}[s_1, ..., s_n] : t \in T^t(x_1, ..., x_n),\ n \geq 1 \text{ y } (s_1, ..., s_n) \in S^n\}.$$

Lemma 15 *Dada un álgebra finita* $\mathbf{A}$ *de tipo* τ*, y elementos* $a_1, .., .a_n \in A$*, existen términos* $t_1, ..., t_k \in T^\tau(x_1, ..., x_n)$ *tales que*

$$\langle\{a_1, ..., a_n\}\rangle = \{t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]\}.$$

Lemma 16 *Dadas* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *estructuras de tipo* τ*,* $\emptyset \neq S \subseteq A$ *y un mapeo* $\alpha : S \to B$*, existe un único homomorfismo* $\beta : \langle S\rangle \to \mathbf{B}$ *que extiende a* α*.*

Definition 17 *Dada una función* $f : A^n \to A$*, defínase* f *sobre* A^2 *como*

$$f((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) = (f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)).$$

Definition 18 *Sean un álgebra* $\mathbf{A}$ *y función* $f : A^n \to A$*. Diremos que* f preserva subálgebras de $\mathbf{A}^2$ *si para toda* $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}^2$ *se da que*

$$f(B^n) \subseteq B;$$

i.e., B *es cerrado bajo* f*.*

2.3. Homomorfismos

Definition 19 *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *álgebras del mismo tipo. Si existe un homomorfismo sobreyectivo* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$*, diremos que* $\mathbf{B}$ *es imagen homomórfica de* $\mathbf{A}$*.*

Definition 20 *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *álgebras del mismo tipo. Una función* $\alpha : A \to B$ *será llamado un embedding de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ *si* α *es un homomorfismo inyectivo.*

Lemma 21 *Dado un embedding* $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$*, el conjunto* $\alpha(A)$ *es el universo de una subálgebra de* $\mathbf{B}$*.*

En virtud del Lema 21, denotaremos por $\alpha(\mathbf{A})$ a la subálgebra correspondiente.

Lemma 22 *Dado un embedding* $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$*,* α *es un isomorfismo entre* $\mathbf{A}$ *y* $\alpha(\mathbf{A})$*.*

Definition 23 *Dada un álgebra* $\mathbf{A}$ *y una congruencia* θ *sobre* $\mathbf{A}$*, defínase el* mapeo natural v_θ *como*

$$\begin{array}{rccc} v_\theta : & A & \to & A/\theta \\ & a & \to & a/\theta \end{array} .$$

(Se remite al lector a la sección 2.7 para rememorar los conceptos de congruencias y álgebras cocientes).

Lemma 24 *El mapeo natural* v_θ *es un homomorfismo sobreyectivo.*

En virtud del lema anterior, el mapeo natural de un álgebra a un cociente de sí mismo es denominado *homomorfismo natural*.

Lemma 25 *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *álgebras del mismo tipo. Si existe un homomorfismo sobreyectivo* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$*, entonces* $\mathbf{A}/\theta \cong \mathbf{B}$*, para alguna* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*.*

Proof. Trivial, bajo la idea de que $\theta = \ker(F)$. ■

Definition 26 *Sean un álgebra* $\mathbf{A}$*, una familia indexada de estructuras de tipo* τ $\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$ *(ver sección 2.4.1), y una familia de homomorfismos* $\alpha_i : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$*, con* $i \in I$*. Se define entonces el* mapeo natural

$$\alpha : \mathbf{A} \to \langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$$

como

$$\alpha(a)(i) = \alpha_i(a).$$

2.4. Productos

2.4.1. Productos directos

Definition 27 *Por una* familia indexada de conjuntos *entenderemos una función con dominio igual a* I *que le asigna a cada* $i \in I$ *un conjunto* A_i*. Escribiremos* $\langle A_i : i \in I \rangle$ *para denotar tal familia indexada de conjuntos. Además,* I *será llamado el conjunto de índices de* $\langle A_i : i \in I \rangle$*.*

Además, para $\langle A_i : i \in I \rangle$ *se definen*

$$\begin{aligned} \bigcup \langle A_i : i \in I \rangle = \quad & \{x : x \in A_i, \text{ para algún } i \in I\} \\ \prod \langle A_i : i \in I \rangle = \quad & \{a : a \text{ es una función, } dom(a) = I, \\ & \quad y\ a(i) \in A_i \text{ para cada } i \in I\}. \end{aligned}$$

Definition 28 *Dado un tipo* τ*, por una* familia indexada de estructuras de tipo τ *entenderemos una función con dominio igual a* I *que le asigna a cada* $i \in I$ *una estructura* $\mathbf{A}_i$ *de tipo* τ*. Escribiremos* $\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$ *para denotar tal familia indexada de estructuras de tipo* τ*.*

Además, se puede definir una nueva estructura de tipo τ*, denotada* $\prod \langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$*, con universo* $\prod \langle A_i : i \in I \rangle$ *de la siguiente manera*

- $c^{\prod \langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle}(i) = c^{\mathbf{A}_i}$,

- *Para cada* $f \in \mathcal{F}_n$ *y* $(a_1, ..., a_n) \in \prod \langle A_i : i \in I \rangle^n$,

$$f^{\prod \langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle}(a_1, ..., a_n)(i) = f^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), ..., a_n(i))$$

- *Para cada* $r \in \mathcal{R}_n$,

$$\begin{aligned} r^{\prod \langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle} = \quad & \{(a_1, ..., a_n) \in \prod \langle A_i : i \in I \rangle^n : \\ & (a_1(i), ..., a_n(i)) \in r^{\mathbf{A}_i} \text{ para cada } i \in I\}. \end{aligned}$$

$\prod \langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$ *será llamado el* producto directo *de la familia* $\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$*.*

Definition 29 *Dado un producto directo* $\prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$, *para cada* $i \in I$ *se define la* proyección canónica i-ésima *como*

$$\begin{array}{rccc} \pi_i : & \prod\langle A_i : i \in I\rangle & \to & A_i \\ & a & \to & a(i). \end{array}$$

Lemma 30 *Los mapeos* $\pi_i : \prod\langle A_i : i \in I\rangle \to A_i$ *son homomorfismos.*

Lemma 31 *Para cada* $t \in T^\tau$ *y* $(a_1, a_2, ...) \in \prod\langle A_i : i \in I\rangle^{\mathbb{N}}$,

$$t^{\prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle}[a_1, a_2, ...](i) = t^{\mathbf{A}_i}[a_1(i), a_2(i), ...].$$

2.4.2. Productos subdirectos y álgebras subdirectamente irreducibles

Definition 32 *Un álgebra no trivial* $\mathbf{A}$ *es un* producto subdirecto *de una familia indexada* $\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$ *de álgebras del mismo tipo de* $\mathbf{A}$ *cuando*

(i) $\mathbf{A} \leq \prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$,

(ii) $\pi_i(A) = A_i$, *para cada* $i \in I$.

En dicho caso, se denotará $\mathbf{A} \leq_{sd} \prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$.

Lemma 33 *Dados* $\mathbf{A} \leq_{sd} \prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$, *para cada* $i \in I$ *se da que* $\pi_i : A \to A_i$ *es un homomorfismo sobreyectivo.*

A raíz de este Lema, y de Lema 25, tenemos el siguiente

Corollary 34 *Dados* $\mathbf{A} \leq_{sd} \prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$, *para cada* $i \in I$ *vale que* $\mathbf{A}/\ker(\pi_i) \cong \mathbf{A}_i$.

Definition 35 *Un embedding* $\alpha : \mathbf{A} \to \prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$ *será llamado* embedding subdirecto *si* $\alpha(\mathbf{A}) \leq_{sd} \prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$.

Definition 36 *Un álgebra* $\mathbf{A}$ *es* subdirectamente irreducible *si para cada embedding subdirecto*

$$\alpha : \mathbf{A} \to \prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$$

existe $i \in I$ *tal que*

$$\pi_i \circ \alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$$

es un isomorfismo.

Lemma 37 *Sean* $\mathbf{A}$ *una estructura de tipo* τ *y* $\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$ *una familia de estructuras de tipo* τ *tales que* $\mathbf{A} \leq_{sd} \prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$. *Luego, para cada sentencia de tipo* τ, $\varphi = \forall x_1...x_n\ (t \equiv s)$, *con* $t, s \in T^\tau(x_1, ..., x_n)$, *se da que*

$$\mathbf{A} \models \varphi \text{ si y sólo si } \mathbf{A}_i \models \varphi, \text{ para cada } i \in I.$$

Proof. ($\Longrightarrow$) Supongamos que $\mathbf{A} \models t \approx s$, con $t, s \in T^{\tau}(x_1, ..., x_n)$, y sean $i \in I$ y $(b_1, ..., b_n) \in (A_i)^n$. Como $\pi_i(A) = A_i$, existe $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ tales que $a_j(i) = b_j$, $\forall\ j \in \{1, ..., n\}$. Pero como $\mathbf{A} \models t \approx s$ entonces $t^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n] = s^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_n]$, y en consecuencia $t^{\mathbf{A}_i}[a_1(i), ..., a_n(i)] = s^{\mathbf{A}_i}[a_1(i), ..., a_n(i)]$, obteniendo finalmente que $t^{\mathbf{A}_i}[b_1, ..., b_n] = s^{\mathbf{A}_i}[b_1, ..., b_n]$.

Por lo tanto, $\mathbf{A}_i \models t \approx s$, $\forall i \in I$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $\mathbf{A}_i \models t \approx s$, para cada $i \in I$. Como además para cada $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ se da que $(a_1(i), ..., a_n(i)) \in (A_i)^n$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\forall i \in I, \forall \vec{a} \in A^n : t^{\mathbf{A}_i}[\vec{a}(i)] = s^{\mathbf{A}_i}[\vec{a}(i)] \\
&\Longrightarrow\ \forall i \in I, \forall \vec{a} \in A^n : t^{\prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle}[\vec{a}](i) = s^{\prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle}[\vec{a}](i) \\
&\Longrightarrow\ \forall \vec{a} \in A^n : t^{\prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle}[\vec{a}] = s^{\prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle}[\vec{a}] \\
&\Longrightarrow\ \forall \vec{a} \in A^n : t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}] \\
&\Longrightarrow\ \mathbf{A} \models t \approx s. \qquad .
\end{aligned}
$$

■

En Sección 3, las fórmulas de la forma de φ en el Lema 37 constituirán el conjunto de identidades de tipo τ, el cual es de vital importancia en las subsiguientes secciones.

2.5. Condiciones de satisfacibilidad de fórmulas entre álgebras

Aquí se listan algunos lemas que serán de útil asistencia en posteriores secciones, como en todo lo referido a AE-sentencias.

Lemma 38 *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *álgebras del mismo tipo tales que* $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$*, y sea* $\varphi =_d \varphi(x_1, ..., x_n)$ *una fórmula abierta; i.e.,* φ *no tiene ocurrencias de cuantificadores.*

Luego, para cada $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ *se tiene que*

$$\mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n] \text{ si y sólo si } \mathbf{B} \models \varphi[a_1, ..., a_n].$$

Lemma 39 *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *álgebras de tipo* τ *tales que* $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$*, y sea* $\varphi =_d \varphi(x_1, ..., x_n)$ *una fórmula universal; i.e., de la forma* $\forall v_1 ... v_m \psi$*, siendo* ψ *sin ocurrencias de cuantificadores. Luego, para cada* $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ *vale que*

$$\text{Si } \mathbf{B} \models \varphi[\vec{a}] \text{ entonces } \mathbf{A} \models \varphi[\vec{a}].$$

Lemma 40 *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *álgebras de tipo* τ *tales que* $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$*, y sea* $\varphi =_d \varphi(x_1, ..., x_n)$ *una fórmula existencial; i.e., de la forma* $\exists v_1 ... v_m \psi$*, siendo* ψ *sin ocurrencias de cuantificadores. Luego, para cada* $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ *vale que*

$$\text{Si } \mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n] \text{ entonces } \mathbf{B} \models \varphi[a_1, ..., a_n].$$

Lemma 41 *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *álgebras de tipo* τ *para las que existe un homomorfismo sobreyectivo* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. *Sea además una* $\varphi =_d \varphi(x_1, ..., x_n)$ *una fórmula positiva; i.e.,* φ *no tiene ocurrencias de* $\neg$, $\to$, *o* $\leftrightarrow$. *Luego, para cada* $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ *vale que*

$$\textit{Si } \mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n] \textit{ entonces } \mathbf{B} \models \varphi[F(a_1), ..., F(a_n)].$$

Lemma 42 *Sean* $\mathbf{A}$ *un álgebra de tipo* τ, $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, *y* $\varphi =_d \varphi(x_1, ..., x_n)$ *una fórmula de positiva. Luego, para cada* $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ *vale que*

$$\textit{Si } \mathbf{A} \models \varphi[a_1, ..., a_n] \textit{ entonces } \mathbf{A}/\theta \models \varphi[a_1/\theta, ..., a_n/\theta].$$

Lemma 43 *Sean* $\prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$ *una familia de estructuras de tipo* τ, *y* $\varphi =_d \varphi(x_1, ..., x_n)$ *fórmula atómica. Luego, para cada* $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ *vale que*

$$\prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle \models \varphi[a_1, ..., a_n] \textit{ si y sólo si } \mathbf{A}_i \models \varphi[a_1(i), ..., a_n(i)], \textit{ para cada } i \in I.$$

2.6. Filtros e ideales

Definition 44 *Un reticulado* $(L, \leq)$ *se dice* completo *cuando para cada* $S \subseteq L$, *existen* $\sup(S)$ *e* $\inf(S)$.

Note que todo reticulado completo tiene 0 *y* 1.

Lemma 45 $\mathbf{L} = (L, \leq)$ *es completo sii para cada* $S \subseteq L$, *existe* $\inf(S)$.

Definition 46 *Dado un reticulado* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$, *un* filtro de $\mathbf{L}$ *es un subconjunto no vacio* $S \subseteq L$ *tal que* S *es cerrado bajo* $\wedge$ *y si* $x \in S$ *y* $x \leq y$, *entonces* $y \in S$.

Lemma 47 *Sea* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ *un reticulado distributivo acotado. El conjunto de los filtros de* $\mathbf{L}$ *ordenado con la inclusión forma un reticulado completo.*

Definition 48 *Dado un reticulado* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$, *un* ideal de $\mathbf{L}$ *es un subconjunto no vacio* $I \subseteq L$ *tal que* I *es cerrado bajo* $\vee$ *y si* $x \in I$ *y* $y \leq x$, *entonces* $y \in I$.

Lemma 49 *Sea* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ *un reticulado distributivo acotado. El conjunto de los ideales de* $\mathbf{L}$ *ordenado con la inclusión forma un reticulado completo.*

Definition 50 *Dados un reticulado* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ *y* $S \subseteq L$, *se definen los conjuntos*

$$\begin{aligned}
[S) &= \{y \in L : y \geq s_1 \wedge ... \wedge s_n, \textit{ para algunos } s_1, ..., s_n \in S,\ n \geq 1\}, \\
(S] &= \{y \in L : y \leq s_1 \vee ... \vee s_n, \textit{ para algunos } s_1, ..., s_n \in S,\ n \geq 1\}.
\end{aligned}$$

El conjunto $[S)$ *será llamado el* filtro generado por S, *y* $(S]$ *será llamado el* ideal generado por S.

Definition 51 *Un filtro* S *de un reticulado* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ *se llamará* primo si $S \neq L$ *y cada vez que* $a \vee b \in S$ *se da que* $a \in S$ *o* $b \in S$.

Theorem 52 (Teorema del filtro primo) *Sean* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ *un reticulado distributivo y* F *un filtro de* $\mathbf{L}$. *Para cada* $x \in L - F$ *existe un filtro primo* P *tal que* $x \notin P$ *y* $F \subseteq P$.

2.7. Reticulado de congruencias

Definition 53 *Dada un álgebra* $\mathbf{A}$ *de tipo* $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \emptyset, a)$*, una relación de equivalencia* θ *sobre* A *será llamada* congruencia *cuando para cada* $n \geq 1$*,* $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in A$ *y* $f \in \mathcal{F}_n$ *tengamos que si* $(a_i, b_i) \in \theta$*,* $i = 1, ..., n$*, entonces* $(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n), f^{\mathbf{A}}(b_1, ..., b_n)) \in \theta$*.*

Usaremos $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *para denotar el conjunto de todas las congruencias de* $\mathbf{A}$*.*

Definition 54 *Dadas un álgebra* $\mathbf{A}$ *de tipo* $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \emptyset, a)$ *y* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*, llamaremos el* álgebra cociente de $\mathbf{A}$ por θ*, y la denotaremos* $\mathbf{A}/\theta$*, al álgebra de tipo* τ *definida como*

- *Universo de* $\mathbf{A}/\theta$*:* A/θ*.*
- $f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, ..., a_n/\theta) = f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)/\theta$*, para cada* $a_1, ..., a_n \in A$ *y* $f \in \mathcal{F}_n$*.*
- $c^{\mathbf{A}/\theta} = c^{\mathbf{A}}/\theta$*, para cada* $c \in \mathcal{C}$*.*

Lemma 55 $(\mathrm{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ *es un reticulado completo en el cual*

- $\sup(S) =$ *clausura transitiva de* $\bigcup S$*; i.e.,*

$$\sup(S) = \{(x, y) \in A^2 : \text{existen } n \geq 0,\ \theta_1, ..., \theta_n \in S \text{ y } x_1, ..., x_{n+1} \in A \text{ tales que } x = x_1\ \theta_1 ... \theta_n\ x_{n+1} = y\},$$

- $\mathrm{ínf}(S) = \bigcap S$*,*
- $\Delta^{\mathbf{A}} = \{(x, y) \in A^2 : x = y\}$ *es el mínimo, y*
- $\nabla^{\mathbf{A}} = A \times A$ *es el máximo.*

En general, usaremos $\wedge$ y $\vee$ para denotar las operaciones ínfimo y supremo de $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$, respectivamente.

Definition 56 *Dados* $x, y \in A$*, definamos*

$$\theta^{\mathbf{A}}(x, y) = \bigcap \{\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A}) : (x, y) \in \theta\}$$

$\theta^{\mathbf{A}}(x, y)$ *es llamada la* congruencia principal generada por el par (x, y)*, y es la menor congruencia que contiene al par* (x, y)*.*

Lemma 57 *Toda congruencia es supremo de una familia de congruencias principales.*

Definition 58 *Dado un reticulado* $\mathbf{L}$*, un elemento* $x \in L$ *será llamado* compacto *si para cada* $S \subseteq L$ *tenemos que si* $x \leq \sup(S)$ *entonces hay un subconjunto finito* $S_0 \subseteq S$ *tal que* $x \leq \sup S_0$*.*

Lemma 59 *θ es un elemento compacto de* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *sii existen* $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in A$ *tales que*

$$\theta = \theta^{\mathbf{A}}(x_1, y_1) \vee ... \vee \theta^{\mathbf{A}}(x_n, y_n).$$

Definition 60 *Dado un reticulado completo* $\mathbf{L}$*, diremos que* $x \in L$ *es* completamente meet irreducible *si* $x \neq 1^{\mathbf{L}}$ *y para cada* $S \subseteq L$*, tenemos que*

$$x = \bigwedge S \text{ implica } x \in S.$$

Lemma 61 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra. Para cada* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *son equivalentes:*

1. *θ es un elemento completamente meet irreducible de* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$.
2. *existe* $\delta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *tal que* $\delta > \theta$ *y* $[\theta, \nabla] = \{\theta\} \cup [\delta, \nabla]$.
3. *existe* $(a, b) \in A^2$ *tal que θ es maximal en no contener al par* (a, b).

Lemma 62 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra. Cada* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *es intersección de un conjunto de congruencias completamente meet irreducibles.*

Lemma 63 *Sea* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ *un reticulado distributivo acotado. Dado un ideal I de L, sea*

$$\theta(I) = \{(x, y) : x \vee z = y \vee z, \text{ para algun } z \in I\}.$$

Luego, valen

1. $\theta(I) \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$.
2. *No necesariamente* $\mathrm{Con}(\mathbf{L}) = \{\theta(I) : I \text{ ideal}\}$.
3. *$\theta(I)$ es la menor congruencia θ de* $\mathbf{L}$ *tal que I es el mínimo de* $\mathbf{L}/\theta$.
4. *Si* $\mathbf{L}$ *es complementado, entonces* $I \to \theta(I)$ *es un isomorfismo entre el reticulado de ideales de* $\mathbf{L}$ *y* $\mathrm{Con}(\mathbf{L})$.

Lemma 64 *Sea* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ *un reticulado distributivo acotado. Dado un filtro F, sea*

$$\theta(F) = \{(x, y) : x \wedge z = y \wedge z, \text{ para algun } z \in F\}.$$

Luego, valen

1. $\theta(F) \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$.
2. *No necesariamente* $\mathrm{Con}(\mathbf{L}) = \{\theta(F) : F \text{ filtro}\}$.
3. *$\theta(F)$ es la menor congruencia θ de* $\mathbf{L}$ *tal que F es el máximo de* $\mathbf{L}/\theta$.
4. *Si* $\mathbf{L}$ *es complementado, entonces* $F \to \theta(F)$ *es un isomorfismo entre el reticulado de filtros de* $\mathbf{L}$ *y* $\mathrm{Con}(\mathbf{L})$.

Lemma 65 *Para todo reticulado* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ *y* $a, b \in L$*, se da que*

$$\theta^{\mathbf{L}}(a, b) = \theta([a \wedge b)) \cap \theta((a \vee b])$$

Lemma 66 *Sea* $\mathbf{B} = (B, \vee, \wedge, ^c, 0, 1)$ *un algebra de Boole. Luego,*

1. $\mathrm{Con}(\mathbf{B}) = \mathrm{Con}((B, \vee, \wedge))$.
2. *El mapeo* $I \to \theta(I)$ *es un isomorfismo entre el reticulado de ideales de* $\mathbf{B}$ *y* $\mathrm{Con}(\mathbf{B})$.
3. *Dado un ideal* I *de* $\mathbf{L}$*, se da que* $(x, y) \in \theta(I)$ *sii* $x \Delta y = (x \wedge y^c) \vee (y \wedge x^c) \in I$.

Definition 67 *Sea* $\mathbf{L}$ *un reticulado acotado. Diremos que* $x \in L$ *es* meet irreducible *(respectivamente* meet primo*) si* $x \neq 1$ *y para cada* $u, v \in L$*, tenemos que* $x = u \wedge v$ *(rep.* $x \geq u \wedge v$*) implica* $x = u$ *o* $x = v$ *(resp.* $x \geq u$ *o* $x \geq v$*).*

Definition 68 *Sean* $\mathbf{L}$ *un reticulado acotado y* p *un filtro primo de* L*. Se define*

$$\theta_p = \{(x, y) : x, y \in p \text{ o } x, y \notin p\}.$$

Lemma 69 *Sean* $\mathbf{L}$ *un reticulado acotado y* p *un filtro primo de* L*. Luego,* $\theta_p \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$ *y* $L/\theta_p \cong \mathbf{2}$.

Lemma 70 *Sea* $\mathbf{L}$ *reticulado distributivo acotado. Para cada* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$*, son equivalentes:*

1. θ es completamente meet irreducible.
2. θ es meet irreducible.
3. θ es meet primo.
4. θ es un elemento maximal del poset $(\mathrm{Con}(\mathbf{L}) - \{\nabla^{\mathbf{L}}\}, \subseteq)$.
5. $\theta = \theta_p$ para algún filtro primo p.

2.7.1. Álgebras subdirectamente irreducibles y reticulado de congruencias

El Teorema 72 en esta sección nos permite observar una interesante conexión entre álgebras subdirectamente irreducibles y su reticulado de congruencias.

Lemma 71 *Dadas un álgebra* $\mathbf{A}$ *y una familia de congruencias sobre* $\mathbf{A}$ $\langle \theta_i : i \in I \rangle$ *tales que* $\bigcap_{i \in I} \theta_i = \Delta^{\mathbf{A}}$*, entonces el* homomorfismo natural

$$v : \mathbf{A} \to \langle \mathbf{A}/\theta_i : i \in I \rangle$$

definido como

$$v(a)(i) = a/\theta_i$$

es un embedding subdirecto.

Theorem 72 *Un álgebra* $\mathbf{A}$ *es subdirectamente irreducible si y sólo si existe una congruencia mínima en* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \Delta^{\mathbf{A}}$*; en dicho caso, la congruencia mínimo de* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \Delta^{\mathbf{A}}$ *es* $\cap\, (\mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \Delta^{\mathbf{A}})$*, y es una congruencia principal.*

Proof. ($\Longrightarrow$) Supongamos que $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible. Si $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \Delta^{\mathbf{A}}$ no tiene mínimo elemento, entonces $\bigcap(\mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \Delta^{\mathbf{A}}) = \Delta^{\mathbf{A}}$. Sea $I = \mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \Delta^{\mathbf{A}}$. Luego, el mapeo natural

$$\alpha : \mathbf{A} \to \langle \mathbf{A}/\theta : \theta \in I \rangle,$$

definido como $\alpha(a)(\theta) = a/\theta$, es un embedding subdirecto (Lema 71). Además, el mapeo natural $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta$ no es inyectivo para ninguna $\theta \in I$, ya que para cada $\theta \in I$ existen $a, b \in A$ tales que $a \neq b$ y $(a, b) \in \theta$; luego, $\mathbf{A}$ no es subdirectamente irreducible, lo cual es absurdo.

($\Longleftarrow$) Sean $\theta = \bigcap(\mathrm{Con}(\mathbf{A}) - \Delta^{\mathbf{A}}) \neq \Delta^{\mathbf{A}}$, $(a, b) \in \theta$ tales que $a \neq b$, y $\alpha : \mathbf{A} \to \langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$ un embedding subdirecto. Como α es inyectivo, por ser embedding, entonces existe $i \in I$ para el que $\alpha(a)(i) \neq \alpha(b)(i)$; i.e., $(\pi_i \circ \alpha)(a) \neq (\pi_i \circ \alpha)(b)$. Luego, $(a, b) \notin \ker(\pi_i \circ \alpha)$ y entonces $\theta \nsubseteq \ker(\pi_i \circ \alpha)$. Pero esto implica que $\ker(\pi_i \circ \alpha) = \Delta^{\mathbf{A}}$, por lo que $\pi_i \circ \alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible. ■

3. Variedades

Un importante concepto dentro del Álgebra Universal (y del presente Trabajo) es el estudio de las clases de álgebras de un mismo tipo que satisfacen un cierto conjunto de identidades de dicho tipo: las variedades. Birkhoff logró demostrar que una clase de álgebras es una variedad si y sólo si dicha clase es cerrada bajo ciertos operadores de clases de álgebras (a saber, $\mathbb{H}$, $\mathbb{S}$ y $\mathbb{P}$); el Teorema HSP de Birkhoff (Teorema 144), que demuestra esto requiere, sin embargo, una mayor cantidad de conceptos que serán introducidos en las posteriores secciones.

Definition 73 *Los operadores* $\mathbb{I}, \mathbb{S}, \mathbb{H}, \mathbb{P}$*, que mapean clases de álgebras en clases de álgebras del mismo tipo, son definidos para una clase de álgebras* $\mathcal{K}$ *como:*

- $\mathbf{A} \in \mathbb{I}(\mathcal{K})$ *sii* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a algún álgebra en* $\mathcal{K}$.

- $\mathbf{A} \in \mathbb{S}(\mathcal{K})$ *sii* $\mathbf{A}$ *es subálgebra de algún álgebra en* $\mathcal{K}$*.*

- $\mathbf{A} \in \mathbb{H}(\mathcal{K})$ *sii* $\mathbf{A}$ *es imagen homomórfica de algún álgebra en* $\mathcal{K}$*.*

- $\mathbf{A} \in \mathbb{P}(\mathcal{K})$ *sii* $\mathbf{A}$ *es un producto directo de álgebras en* $\mathcal{K}$*.*

Definition 74 *Dado un tipo* τ*, el conjunto*

$$\begin{aligned} Id_\tau = \quad & \{\forall x_1 ... \forall x_n (t(\vec{x}) \equiv s(\vec{x})) : \\ & t, s \in T^\tau, t =_d t(x_1, ..., x_n), s =_d s(x_1, ..., x_n)\} \subseteq F^\tau \end{aligned}$$

será llamado el conjunto de identidades de tipo τ*.*

Para evitar sobrecarga notacional, una identidad $\forall x_1 ... \forall x_n (t \equiv s)$ *será denotada por* $t(x_1, ..., x_n) \approx s(x_1, ..., x_n)$*.*

Definition 75 *Dado un tipo* τ*, el conjunto*

$$\begin{aligned} QId_\tau = \quad & \{\forall x_1 ... \forall x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{k} (t_i(\vec{x}) \equiv s_i(\vec{x})) \right) \to (t(\vec{x}) \equiv s(\vec{x})) : \\ & t, t_1, ..., t_k, s, s_1, ..., s_k \in T^\tau(x_1, ..., x_n), k \geq 0\} \subseteq F^\tau \end{aligned}$$

será llamado el conjunto de cuasiidentidades de tipo τ*.*

Nótese que $Id_\tau \subseteq QId_\tau$*.*

Definition 76 *Dado un tipo* τ *y un conjunto* $\Sigma \subseteq Id_\tau$ *(o* $\Sigma \subseteq QId_\tau$*), denotaremos*

$$Mod_\tau(\Sigma) = \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ es álgebra de tipo } \tau \text{ y } \mathbf{A} \models \Sigma\}.$$

Cuando no haya ambigüedad al respecto, denotaremos simplemente $Mod(\Sigma)$ *en lugar de* $Mod_\tau(\Sigma)$*.*

En el caso en que $\Sigma \subseteq Id_\tau$*,* $Mod_\tau(\Sigma)$ *será llamada una* variedad*. Si* $\Sigma \subseteq QId_\tau$*, entonces* $Mod_\tau(\Sigma)$ *será llamada una* cuasivariedad*.*

El siguiente Lema enuncia que la intersección arbitraria de variedades de un cierto tipo es también una variedad.

Lemma 77 *Sea* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(Id_\tau)$*. Luego,*

$$\bigcap \{Mod(\Sigma) : \Sigma \in S\} \text{ es una variedad.}$$

Proof. Sean $T = \bigcup S$ y $\mathcal{W} = \bigcap \{Mod(\Sigma) : \Sigma \in S\}$. Veremos que $Mod(T) = \mathcal{W}$, y por lo tanto $\mathcal{W}$ es una variedad.

En primer lugar, ver que si $\mathbf{A} \in \mathcal{W}$ entonces $\mathbf{A} \models \Sigma$, para cada $\Sigma \in S$, lo que implica entonces que $\mathbf{A} \models T$ y entonces $\mathbf{A} \in Mod(T)$. Es decir, $\mathcal{W} \subseteq Mod(T)$.

A su vez, si $\mathbf{A} \in Mod(T)$, entonces $\mathbf{A} \models \Sigma$, para cada $\Sigma \in S$, por lo que $\mathbf{A} \in Mod(\Sigma)$, para cada $\Sigma \in S$, y finalmente $\mathbf{A} \in \mathcal{W}$. Es decir, $Mod(T) \subseteq \mathcal{W}$. ■

Lemma 78 *Dado un tipo algebraico τ, la clase de todas las álgebras de tipo τ constituye una variedad.*

Proof. Trivialmente, observando que la clase de las álgebras de tipo τ es de la forma $Mod(\emptyset)$. ■

Definition 79 *Dada una clase $\mathcal{K}$ de álgebras de tipo τ, llamaremos la* variedad generada por $\mathcal{K}$ *a*

$$\mathbb{V}(\mathcal{K}) = \bigcap \{\mathcal{W} : \mathcal{W} \text{ es una variedad y } \mathcal{K} \subseteq \mathcal{W}\}.$$

Lemma 80 *Dada una clase $\mathcal{K}$ de álgebras de tipo τ,*

$$\mathbb{V}(\mathcal{K}) = Mod(\{\varphi \in Id_\tau : \mathcal{K} \models \varphi\}).$$

Definition 81 *Dada una variedad $\mathcal{V}$ de álgebras de tipo τ, se denotará por $\mathcal{V}_{SI}$ al conjunto formado por las álgebras subdirectamente irreducibles de $\mathcal{V}$.*

Theorem 82 *Si $\mathcal{V}$ es una variedad, entonces cada miembro de $\mathcal{V}$ es isomorfo a un producto subdirecto de miembros subdirectamente irreducibles de $\mathcal{V}$.*

Corollary 83 *Dada una variedad $\mathcal{V}$, $\mathbb{V}(\mathcal{V}_{SI}) = \mathcal{V}$. Más aún, si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son variedades tales que $\mathcal{V}_{SI} = \mathcal{W}_{SI}$, entonces $\mathcal{V} = \mathcal{W}$.*

Por sus reiteradas apariciones a lo largo del presente Trabajo,

Definition 84 *Denotaremos por $\tau_{RET} = (\emptyset, \{\vee, \wedge\}, \emptyset, a)$, con $a(\vee) = a(\wedge) = 2$, al tipo de los reticulados (y de los reticulados distributivos). Por otro lado, denotaremos por $\tau_{AC} = (\{0,1\}, \{\vee, \wedge\}, \emptyset, a)$, con $a(\vee) = a(\wedge) = 2$, al tipo de los reticulados acotados.*

Además,

Definition 85 *Denotaremos por $\mathcal{D}$ a la clase de los reticulados distributivos, y por $\mathcal{D}_{01}$ a la de los reticulados distributivos acotados. Sus tipos son τ_{RET} y τ_{AC}, respectivamente.*

Proposition 86 *$\mathcal{D}$ es una variedad, de modo tal que*

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \quad & Mod(\{\text{identidades de reticulados}\} \\ & \cup \{\forall x_1 x_2 x_3 (x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \equiv (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3))\}). \end{aligned}$$

A su vez, $\mathcal{D}_{01}$ es una variedad, valiendo que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{01} = \quad & Mod(\{\text{identidades de reticulados acotados}\} \\ & \cup \{\forall x_1 x_2 x_3 (x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \equiv (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3))\}). \end{aligned}$$

Remark 87 *Se recuerda al lector que las identidades de los reticulados son las 7 propiedades que otorgan carácter de reticulado a toda estructura de un cierto tipo* $\tau = (\mathcal{C}, \{\vee, \wedge, ...\}, \mathcal{R}, a)$*; por ejemplo, la siguiente propiedad representa la conmutatividad de* $\vee$*:*

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \vee x_2 \equiv x_2 \vee x_1).$$

Lemma 88 *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{D}$ *un reticulado distributivo y defínase*

$$X = \{F \subset L : F \text{ es filtro primo de } \mathbf{L}\}.$$

La función $\alpha : L \to \prod \langle L/\theta_p : p \in X \rangle$ *definida como* $\alpha(a)(p) = a/\theta_p$*, para cada* $p \in X$*, es un embedding subdirecto.*

Proof. En primer lugar, como para cualesquiera $a_1, a_2 \in L$ y $p \in X$ tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha(a_1 \vee^{\mathbf{L}} a_2)(p) = & \ (a_1 \vee^{\mathbf{L}} a_2)/\theta_p \\ = & \ a_1/\theta_p \vee^{\Pi\langle \mathbf{L}/\theta_p : p \in X\rangle} a_2/\theta_p \\ = & \ \alpha(a_1)(p) \vee^{\Pi\langle \mathbf{L}/\theta_p : p \in X\rangle} \alpha(a_2)(p), \end{aligned}$$

y siendo que vale lo mismo para $\wedge$, se afirma que α es un homomorfismo.

Para ver que es inyectivo, sean $a, b \in L$ tales que $a \neq b$. Si $a < b$, entonces $a \notin [b)$ y el Teorema 52 nos permite afirmar que existe un filtro primo $p_{[b)}$ tal que $a \notin p_{[b)}$; en consecuencia, $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. Del mismo modo, si $a > b$, se concluye que $\alpha(a) \neq \alpha(b)$, vía el Teorema 52. Por último, si a y b son incomparables, entonces $a \notin [b)$ ya que $[b) = \{y \in L : y \geq b\}$, pudiendo concluir una vez más que $\alpha(a) \neq \alpha(b)$.

Por último, para ver que α es subdirecto, nótese que $\alpha(L) \leq \prod \langle \mathbf{L}/\theta_p : p \in X \rangle$, por Lema 21, y que para cada $p \in X$, $\pi_p(L) = \{a/\theta_p : a \in L\} = L/\theta_p$. ■

Theorem 89 *Sea* $\varphi \in Id_\tau$*.*

$$\mathbf{2} \models \varphi \text{ si y sólo si } \mathcal{D} \models \varphi.$$

Proof. ($\Longrightarrow$) Supongamos que $\mathbf{2} \models \varphi$, con $\varphi \in Id_\tau$. Sean $\mathbf{L}$ un reticulado distributivo y X el conjunto de filtros primos de $\mathbf{L}$.

Puesto que $\alpha : \mathbf{L} \to \prod \langle L/\theta_p : p \in X \rangle$ es un embedding subdirecto, por Lema 88, y siendo $\alpha(L)$ un subuniverso de la imagen, por Lema 21, obtenemos que $\mathbf{L} \cong \alpha(\mathbf{L})$, vía α.

Ahora, como $\mathbf{L}/\theta_p \cong \mathbf{2}$, en virtud de Lema 69, tenemos que, para cada $p \in X$, $\mathbf{L}/\theta_p \models \varphi$. Pero entonces, como $\alpha(\mathbf{L}) \leq_{sd} \prod \langle \mathbf{L}/\theta_p : p \in X \rangle$, el Lema 37 nos dice que $\alpha(\mathbf{L}) \models \varphi$. Por lo tanto, $\mathbf{L} \models \varphi$.

($\Longleftarrow$) Trivial, ya que $\mathbf{2}$ es en sí un reticulado distributivo. ■

4. Álgebras implicativas

Nuestra intención en esta sección es demostrar que la variedad de las álgebras implicativas es la generada por la única (salvo isomorfismo) álgebra implicativa de 2 elementos; esta última cumplirá un rol central en el entendimiento de una gran porción del reticulado de Post (sección 9.2).

Definition 90 *Un* álgebra implicativa *es una estructura* $(L, \rightarrow, 1)$, *con* $\rightarrow: L^2 \rightarrow L$ *y* $1 \in L$, *tal que satisface:*

(I1) $(x \rightarrow y) \rightarrow x \approx x$,

(I2) $(x \rightarrow y) \rightarrow y \approx (y \rightarrow x) \rightarrow x$,

(I3) $x \rightarrow (y \rightarrow z) \approx y \rightarrow (x \rightarrow z)$,

(I4) $x \rightarrow x \approx 1$.

Definition 91 *Siendo* $\tau_{\mathcal{I}} = (\{1\}, \{\rightarrow\}, \emptyset, a)$ *el tipo de las álgebras implicativas, denotaremos por* $\mathcal{I}$ *a la variedad de las álgebras implicativas.*

Nótese que $\mathcal{I}$ está axiomatizada por las identidades $(I1), ..., (I4)$ de la Definición 90.

Lemma 92 *Si* $\mathbf{B}$ *es un álgebra de Boole y definimos* $a \rightarrow b = a^c \vee b$, *para todo* $a, b \in B$, *entonces* $(B, \rightarrow, 1)$ *es un álgebra implicativa.*

Además si $\emptyset \neq F \subseteq B$ *es un conjunto creciente entonces* F *es un subuniverso de* $(B, \rightarrow, 1)$. *Por lo tanto* $(F, \rightarrow, 1)$ *también es un álgebra implicativa.*

Lemma 93 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra implicativa. Entonces valen en* $\mathbf{A}$*:*

1. $1 \rightarrow x \approx x$,
2. $x \rightarrow 1 \approx 1$.

Proof.

1.
$$\begin{aligned} 1 \rightarrow x \approx &\quad \{\text{por } (I4)\}\ (x \rightarrow x) \rightarrow x \\ \approx &\quad \{\text{por } (I1)\}\ x. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x \rightarrow 1 \approx &\quad \{\text{por } (I4)\}\ x \rightarrow (x \rightarrow x) \\ \approx &\quad \{\text{por } (I1)\} \\ &\quad ((x \rightarrow x) \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow x) \\ \approx &\quad \{\text{por } (I1)\}\ (x \rightarrow x) \\ \approx &\quad \{\text{por } (I4)\}\ 1. \end{aligned}$$

■

Lemma 94 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra implicativa. La relación binaria* $\leq$ *definida por* $a \leq b \Leftrightarrow a \rightarrow b = 1$ *es un orden parcial en* A *que tiene como máximo a* 1.

Proof. En primer lugar, $(I4)$ nos dice que $\to$ es reflexiva. Además, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces

$$\begin{aligned} a = & \ \{\text{por Lema 93, inciso 1}\}\ 1 \to a \\ = & \ (b \to a) \to a \\ = & \ \{\text{por } (I2)\}\ (a \to b) \to b \\ = & \ \{\text{por Lema 93, inciso 1}\}\ 1 \to b \\ = & \ b, \end{aligned}$$

por lo que $\leq$ es antisimétrica. Por último, si $a, b, c \in A$ son tales que $a \leq b \leq c$, entonces

$$\begin{aligned} (c \to b) \to b = & \ \{\text{por } (I2)\}\ (b \to c) \to c \\ = & \ 1 \to c \\ = & \ c, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} a \to c = & \ a \to ((c \to b) \to b) \\ = & \ \{\text{por } (I3)\}\ (c \to b) \to (a \to b) \\ = & \ (c \to b) \to 1 \\ = & \ \{\text{por Lema 93, inciso 2}\}\ 1, \end{aligned}$$

y entonces $\leq$ es transitiva.

Finalmente, 1 es el máximo de A en virtud del Lema 93, inciso 2. ■

Lemma 95 *Sea* **A** *un álgebra implicativa. Entonces para todo* $a, b, c \in A$ *se tiene que:*

1. $b \leq a \to b$,
2. $a \to b \leq c$ *si y solo si* $b \leq c$ *y* $c \to a = a$.

Corollary 96 *Sea* **A** *un álgebra implicativa, y sean* $a, b \in A$ *tales que* $a \leq b$. *Entonces, para todo* $c \in A$ *se tiene:*

1. $c \to a \leq c \to b$,
2. $b \to c \leq a \to c$.

Lemma 97 *Sea* **A** *un álgebra implicativa. Para todo* $a, b \in A$ *el elemento* $(a \to b) \to b$ *es el supremo de* $\{a, b\}$.

Proof. Como

$$\begin{aligned} 1 = & \ \{\text{por } (I4)\}\ (a \to b) \to (a \to b) \\ = & \ \{\text{por } (I3)\}\ a \to ((a \to b) \to b), \end{aligned}$$

tenemos que $a \leq (a \to b) \to b$. A su vez, como

$$\begin{aligned} 1 = & \ \{\text{por Lema 93, inciso 2}\}\ (a \to b) \to 1 \\ = & \ \{\text{por } (I4)\}\ (a \to b) \to (b \to b) \\ = & \ \{\text{por } (I3)\}\ b \to ((a \to b) \to b), \end{aligned}$$

por lo que $b \leq (a \to b) \to b$.

Además, si $c \in A$ es cota superior de $\{a, b\}$, entonces Corolario 96, inciso 2, afirma que $c \to b \leq a \to b$; luego, aplicando nuevamente esta propiedad obtenemos que

$$\begin{aligned}(a \to b) \to b \leq & \quad (c \to b) \to b \\ = & \quad \{\text{por } (I2)\}\ (b \to c) \to c \\ = & \quad 1 \to c \\ = & \quad c;\end{aligned}$$

i.e., $(a \to b) \to b$ es la menor cota superior de $\{a, b\}$. ∎

Este resultado indica que toda álgebra implicativa tiene estructura de semirreticulado superior bajo el orden $\leq$; i.e., tiene estructura de conjunto parcialmente ordenado con supremo para cada par de elementos.

En virtud del lema anterior escribiremos $x \vee y$ para denotar al término $(x \to y) \to y$. Con esta notación el Lema 95 puede reenunciarse de la siguiente manera:

Corollary 98 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra implicativa. Para todo* $a, b \in A$ *se tiene que* $a \to b$ *es el menor elemento* $c \in [b, 1]$ *tal que* $c \vee a = 1$.

Proof. Notar que $(a \to (a \to b)) \to (a \to b) = ((a \to b) \to a) \to a = a \to a = 1$, es decir $a \vee (a \to b) = 1$. Además si $b \leq c$ y $(c \to a) \to a = 1$ entonces $c \to a = a$ y por 2. del Lema 95 tenemos que $a \to b \leq c$. ∎

El siguiente Lema proporciona información acerca de la existencia de ínfimos en un álgebra implicativa.

Lemma 99 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra implicativa y sean* $a, b, c \in A$ *tales que* c *es cota inferior de* $\{a, b\}$. *Entonces*

$$((a \to c) \vee (b \to c)) \to c$$

es el ínfimo de $\{a, b\}$.

Lemma 100 *Para todo* $a, b, c \in A$ *vale que:*

1. $(a \vee b) \to b = a \to b$.

2. *El ínfimo entre* $a \to c$ *y* $b \to c$ *siempre existe y además* $(a \to c) \wedge (b \to c) = (a \vee b) \to c$.

3. $(a \to b) \vee c = a \to (b \vee c) = (a \to b) \vee (a \to c)$.

4. *Si existe el ínfimo entre* a *y* b *entonces* $(a \wedge b) \to c = (a \to c) \vee (b \to c)$.

5. *Si existe el ínfimo entre* b *y* c *entonces existe el ínifmo entre* $a \to b$ *y* $a \to c$*; además* $(a \to b) \wedge (a \to c) = a \to (b \wedge c)$.

Proof. Los items (1-3) quedan como ejercicio para el lector.

4. Supongamos que existe $a \wedge b$, notar que por el Lema 96 tenemos que $(a \to c) \leq (a \wedge b) \to c$ y $(b \to c) \leq (a \wedge b) \to c$. En consecuencia

$$(a \to c) \vee (b \to c) \leq (a \wedge b) \to c.$$

Por otro lado observar que

$$\begin{aligned}((a \wedge b) \to c) \to ((a \to c) \vee (b \to c)) &= [((a \wedge b) \to c) \to (a \to c)] \vee (b \to c)\\ &= [a \to (((a \wedge b) \to c) \to c)] \vee (b \to c)\\ &= [a \to ((a \wedge b) \vee c)] \vee (b \to c)\\ &= (a \to (a \wedge b)) \vee (a \to c) \vee (b \to c)\\ &\geq (a \to b) \vee (b \to c)\\ &\geq b \vee (b \to c) = 1,\end{aligned}$$

es decir,

$$(a \wedge b) \to c \leq (a \to c) \vee (b \to c)\,.$$

5 Es claro que $b \wedge c$ es cota inferior de $\{(a \to b)\,, (a \to c)\}$ y por los tanto existe el ínfimo de dicho conjunto. Es claro que

$$(a \to b) \wedge (a \to c) \geq a \to (b \wedge c),$$

veamos que se cumple la desigualdad restante. En efecto,

$$\begin{aligned}((a \to b) \wedge (a \to c)) \to (a \to (b \wedge c)) = \;& [(a \to b) \to (a \to (b \wedge c))]\\ & \vee [(a \to c) \to (a \to (b \wedge c))]\\ \geq \;& [(a \to c) \to (a \to (b \wedge c))]\\ \geq \;& (a \to c) \to (a \to c)\\ = \;& 1.\end{aligned}$$

■

Proposition 101 *Sea* **A** *un álgebra implicativa y sean* $a, b, c \in A$. *Si existe* $b \wedge c$ *entonces existe* $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$ *y vale que*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)\,.$$

Proof. Por supuesto vale que $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, probaremos la desigualdad restante. Notar que

$$\begin{aligned}((a \vee b) \wedge (a \vee c)) \to (a \vee (b \wedge c)) &= [((a \vee b) \wedge (a \vee c)) \to a] \vee (b \wedge c)\\ &= ((a \vee b) \to a) \vee ((a \vee c) \to a) \vee (b \wedge c)\\ &= (b \to a) \vee (c \to a) \vee (b \wedge c)\\ &= ((b \wedge c) \to a) \vee (b \wedge c)\\ &= 1.\end{aligned}$$

■

Corollary 102 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra implicativa y sean* $a, b, c \in A$*. Si existen* $a \wedge b$ *y* $a \wedge c$ *entonces existe* $a \wedge (b \vee c)$ *y vale que*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)\,.$$

Resumiendo lo que tenemos hasta aquí obtenemos el siguiente:

Theorem 103 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra implicativa. Para cada* $a \in A$ *el intervalo* $[a, 1]$ *es un álgebra de Boole bajo el orden* $\leq$*, y para* $b, c \geq a$ *las operaciones están dadas por:*

- $b \vee c = (b \to c) \to c$,
- $b \wedge c = ((b \to a) \vee (c \to a)) \to a$,
- $b^c = b \to a$.

Proof. En primer lugar, nótese que, en virtud de los Lemas 97 y 99, $\vee$ y $\wedge$ están siempre definidos para cualquier par de elementos en $[a, 1]$, siendo claramente a y 1 el mínimo y el máximo, respectivamente.

Luego,

$$\begin{aligned} b^c \vee b = \; & (b \to a) \vee b \\ = \; & ((b \to a) \to b) \to b \\ = \; & \{\text{por } (I1)\}\; b \to b \\ = \; & \{\text{por } (I4)\}\; 1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} b^c \wedge b = \; & (b \to a) \wedge b \\ = \; & (((b \to a) \to a) \vee (b \to a)) \to a \\ = \; & \{\text{por Lema 100, inciso 3}\} \\ & ((b \to a) \to (a \vee (b \to a))) \to a \\ = \; & ((b \to a) \to (b \to a)) \to a \\ = \; & \{\text{por } (I4) \text{ y Lema 93}\}\; a. \end{aligned}$$

Por último, como existe el ínfimo de cualquier par de elementos en $[a, 1]$, la Proposición 101 enuncia que $[a, 1]$ es un conjunto distributivo en relación a estos $\vee$ y $\wedge$. ■

Nótese respecto a este Teorema que las operaciones $\vee$ y $\wedge$ de cada intervalo $[a, 1]$, con $a \in A$, coinciden con las del poset $(A, \leq)$.

Definition 104 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra implicativa. Diremos que* $F \subseteq A$ *es un* filtro *si*

- $F \neq \emptyset$,
- F *es creciente,*
- $a \in F$, $a \to b \in F$ *implican que* $b \in F$.

Además, un filtro p se dirá primo *si $p \neq A$ y cada vez que $a \vee b \in p$ se tiene $a \in p$ o $b \in p$.*

Nótese que la tercera condición en la definición de filtro puede reemplazarse por

$$a, b \in F \text{ y existe } a \wedge b \text{ entonces } a \wedge b \in F,$$

obteniendo una definición equivalente.

Proposition 105 *Sean $\mathbf{A}$ un álgebra implicativa, F un filtro y $a \in A - F$. Entonces hay un filtro primo p tal que $F \subseteq p$ y $a \notin p$.*

Lemma 106 *Sean $\mathbf{A}$ un álgebra implicativa, p un filtro primo. Entonces $a \to b \in p$ sii $b \in p$ o $a \notin p$.*

Con $X(\mathbf{A})$ denotaremos el conjunto de filtros primos de $\mathbf{A}$, y $\sigma(a)$ será el conjunto $\{p \in X(\mathbf{A}) : a \in p\}$.

Theorem 107 *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra implicativa. El mapeo $\sigma : A \to \mathcal{P}(X(\mathbf{A}))$ es un embedding de $\mathbf{A}$ en el álgebra implicativa $(\mathcal{P}(X(\mathbf{A})), \to, X(\mathbf{A}))$ en donde $\to$ está definida como*

$$U \to V = (X(\mathbf{A}) - U) \cup V.$$

Proof. Claramente $\sigma(1) = X(\mathbf{A})$. La Proposición 105 nos dice que σ es inyectiva, y por el Lema 106 tenemos que es un homomorfismo. ■

Proposition 108 *El álgebra $\mathbf{2} = (2, \to, 1) = (\{0, 1\}, \to, 1)$, con*

$$x \to^{\mathbf{2}} y = \begin{cases} 0, \text{ si } x = 1 \text{ y } y = 0 \\ 1, \text{ caso contrario} \end{cases},$$

es (salvo isomorfismo) la única álgebra implicativa de 2 elementos.

Corollary 109 *$\mathbf{2} = (2, \to, 1)$, es (salvo isomorfismo) el único elemento subdirectamente irreducible de $\mathcal{I}$.*

Proof. En primer lugar, sea $\alpha : \mathbf{2} \to \prod \langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$ un embedding subdirecto. Puesto que α es *inyectivo*, existe al menos un álgebra no trivial en $\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$; sea $j \in I$ tal que $|A_j| > 1$. Como además $\pi_i(\alpha(2)) = A_i$, para cada $i \in I$, tenemos que $(\pi_j \circ \alpha)$ es un homomorfismo inyectivo y biyectivo, y luego es un isomorfismo. Por lo tanto, $\mathbf{2}$ es subdirectamente irreducible.

Ahora, supongamos que $\mathbf{A}$ es un álgebra implicativa subdirectamente irreducible. Ahora, el mapeo

$$F : \mathcal{P}(X(\mathbf{A})) \to \mathbf{2}^{X(\mathbf{A})}$$

tal que

$$F(S)(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in S \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

es un isomorfismo entre álgebras implicativas, pues

- F es inyectivo, ya que si $S_0 \neq S_1$, entonces existe $p \in X(\mathbf{A})$ tal que $F(S_o)(p) \neq F(S_1)(p)$, y luego $F(S_0) \neq F(S_1)$;
- F es biyectivo, pues para cada $a \in 2^{X(\mathbf{A})}$ tenemos que $F(\{p \in X(\mathbf{A}) : a(p) = 1\}) = a$;
- $F(X(\mathbf{A})) = 1^{\mathbf{2}^{X(\mathbf{A})}}$;
- Por último, nótese que

$$\begin{aligned} F(S_0 \to^{\mathcal{P}(X(\mathbf{A}))} S_1)(p) &= \begin{cases} 1 & \text{si } p \in (X(\mathbf{A}) - S_0) \cup S_1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } p \notin S_0 \text{ o } p \in S_1 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} \left(F(S_0) \to^{\mathbf{2}^{X(\mathbf{A})}} F(S_1)\right)(p) = &\quad \{\text{por definición de producto directo}\} \\ & F(S_0)(p) \to^{\mathbf{2}} F(S_1)(p) \\ = &\begin{cases} 1 & \begin{array}{l}\text{si } p \notin S_0 (\text{Lema } 94) \\ \text{o } p \in S_1 \text{ (Lema 93)}\end{array} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(F \circ \sigma) : \mathbf{A} \to \mathbf{2}^{X(\mathbf{A})}$ es un embedding (Teorema 107), y entonces $(F \circ \sigma)(\mathbf{A}) \leq \mathbf{2}^{X(\mathbf{A})}$ (Lema 21). Ahora, para cada $p \in X(\mathbf{A})$ la Proposición 105 implica que $\pi_p \circ (F \circ \sigma)$ es sobreyectivo, ya que existen $a, b \in A$ tales que $a \in p$ y $b \notin p$. En consecuencia, $(F \circ \sigma)$ es un embedding subdirecto de $\mathbf{A}$ en $(F \circ \sigma)(\mathbf{A})$. Pero, como $\mathbf{A}$ es subdirectamente irreducible, existe $p \in X(\mathbf{A})$ tal que $\pi_p \circ (F \circ \sigma)$ es un isomorfismo entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{2}$. Luego, vale lo buscado. ∎

Corollary 110 $\mathcal{I} = \mathbb{V}((2, \to, 1))$.

Proof. Trivial, en virtud de Corolario 83. ∎

5. Clones

En Álgebra Universal, los clones son usados para estudiar las álgebras de manera independiente de sus tipos: son conjuntos de funciones (con ciertas propiedades) sobre el universo de un álgebra. En nuestro caso en particular, los clones constituirán el elemento central de nuestro estudio sobre el reticulado de Post, ya que los clones de funciones booleanas constituyen su universo (ver sección 9.1).

Definition 111 *Sea A un conjunto, y sea $n \geq 1$. Una* operación n-aria definida sobre A *será una función $f : A^n \longrightarrow A$. Denotaremos por $O^n(A)$ al* conjunto de operaciones n-arias definidas sobre A, *y por $O(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} O^n(A)$ al* conjunto de todas las operaciones finitarias definidas sobre A.

Definition 112 *Sean A un conjunto no vacío y $C \subseteq O(A)$. C será llamado* clon sobre A *cuando cumpla que*

- *$C \ni \pi_j^m$, para todo $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq j \leq m$.*
- *Si $f, f_1, ..., f_n \in C$, con f n-aria y toda f_i k-aria, entonces $f \circ (f_1, ..., f_n) \in C$.*

Recordemos aquí que π_j^m es la j-ésima proyección canónica; i.e., para cada $(a_1, ..., a_m) \in A^m$ se define

$$\pi_j^m(a_1, ..., a_m) = a_j.$$

Lemma 113 *Dadas un álgebra $\mathbf{A}$ y una familia $\mathcal{K}$ de clones sobre A, $\bigcap \mathcal{K}$ es un clon sobre A.*

Definition 114 *Sean $\mathbf{A}$ un álgebra y $C \subseteq O(A)$. Se define el* clon generado por C, *denotado $\langle C \rangle$, como*

$$\langle C \rangle = \bigcap \{D \subseteq O(A) : C \subseteq D,\ D \text{ es un clon sobre } A\}.$$

Evidentemente, $\langle C \rangle$ es el menor clon sobre A que contiene a C. Nótese además que si $C \subseteq O(A)$ es un clon sobre $\mathbf{A}$, entonces $\langle C \rangle = C$. Llamaremos a C un conjunto de funciones generadoras *de $\langle C \rangle$, notando que pueden existir $C_1, C_2 \subseteq O(A)$, $C_1 \neq C_2$, tales que $\langle C_1 \rangle = \langle C_2 \rangle$.*

Lemma 115 *Dada un álgebra $\mathbf{A}$ de tipo τ,* $\mathrm{Clon}(\mathbf{A}) = \{t^{\mathbf{A}} : t \in T^{\tau}(x_1, ..., x_n),$ $n \geq 1\}$ *es un clon sobre A.*

Proof. En primer lugar, nótese que para todo $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq j \leq m$ se da que $x_j =_d x_j(x_1, ..., x_m)$, para variables $x_1, ..., x_m$, y entonces $x_j^{\mathbf{A}} = \pi_j^m$. Además, para cualesquiera $t_1, ..., t_n \in T^{\tau}(x_1, ..., x_k)$ y $t \in T^{\tau}(x_1, ..., x_n)$ para los que $t_1^{\mathbf{A}}, ..., t_n^{\mathbf{A}}, t^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Clon}(\mathbf{A})$, se da que $t(t_1, ..., t_n) \in T^{\tau}(x_1, ..., x_k)$ y $t(t_1, ..., t_n)^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Clon}(\mathbf{A})$. ∎

Nótese que en el Lema anterior se da que para cada nombre de constante c, existe una función n-aria f, con $n \geq 1$, tal que $f(a_1, ..., a_n) = c^{\mathbf{A}}$ para cada $(a_1, ..., a_n) \in A^n$. En virtud de este Lema,

Definition 116 $\mathrm{Clon}(\mathbf{A}) = \{t^{\mathbf{A}} : t \in T^{\tau}(x_1, ..., x_n),\ n \geq 1\}$ *será denominado el* clon de las operaciones término de $\mathbf{A}$.

Además, dado $C \subseteq O(A)$ se define

$$\mathrm{Clon}(\mathbf{A}, C) = \langle \mathrm{Clon}(\mathbf{A}) \cup C \rangle$$

Lemma 117 *Dados A un álgebra y $C \subseteq O(A)$, defínanse los conjuntos $\langle C\rangle_k$, con $k \geq 0$, como*

$$\begin{array}{rl} \langle C\rangle_0 = & C \cup \{\pi_j^m : 1 \leq j \leq m\}, \\ \langle C\rangle_{k+1} = & \langle C\rangle_k \cup \\ & \{f \circ (f_1, ..., f_n) : f_1, ..., f_n \text{ } k\text{-arias, } f \text{ } n\text{-aria, } f, f_1, ..., f_n \in \langle C\rangle_k\}. \end{array}$$

Luego,

$$\langle C\rangle = \bigcup_{k\geq 0} \langle C\rangle_k$$

Proof.
($\supseteq$) *Trivial.*
($\subseteq$) *Como $\bigcup_{k\geq 0} \langle C\rangle_k$ es un clon, ya que es cerrado bajo composiciones y contiene las funciones proyección, y puesto que $C \subseteq \bigcup_{i\geq 1} \langle C\rangle_i$, entonces $\langle C\rangle \subseteq \bigcup_{i\geq 1} \langle C\rangle_i$ por definición de clon generado.* ■

Corollary 118 *Dados un conjunto A y un clon $\langle C\rangle$ sobre A, cada $f \in \langle C\rangle$ cumple que o bien $f \in C \cup \{\pi_j^m : 1 \leq j \leq m\}$, o f es composición de funciones en $C \cup \{\pi_j^m : 1 \leq j \leq m\}$.*

6. Álgebras libres

Las álgebras libres de una variedad son una herramienta valiosísima para el estudio de dicha variedad; en particular, nos permitirá demostrar el Teorema de Birkhoff (Teorema 144), la satisfacción de una cuasiidentidad en una variedad (Teorema 140), y toda la sección 7.

6.1. Generadores libres

Definition 119 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y supongamos que $G \subseteq A$. Diremos que G* es un conjunto de generadores libres para $\mathbf{A}$ con respecto a $\mathcal{V}$, *o que G* genera libremente a $\mathbf{A}$ con respecto a $\mathcal{V}$, *cuando se dé que*

- *G genera a $\mathbf{A}$; i.e., $\langle G\rangle = A$.*
- *Si $t =_d t(x_1, ..., x_n)$ y $s =_d s(x_1, ..., x_n)$, con $n \geq 0$, y $g_1, ..., g_n$ son elementos de G distintos tales que $t^{\mathbf{A}}[g_1, ..., g_n] = s^{\mathbf{A}}[g_1, ..., g_n]$, entonces $\mathcal{V} \vDash t \approx s$.*

En particular, nótese que el conjunto $\emptyset$ será un conjunto de generadores libres para $\mathbf{A}$ con respecto a $\mathcal{V}$ cuando

- *$\{t^{\mathbf{A}}[] : t \in T^\tau(\emptyset)\} = A$ (en virtud de Lema 14).*
- *Si $t, s \in T^\tau(\emptyset)$ son tales que $t^{\mathbf{A}} = s^{\mathbf{A}}$, entonces $\mathcal{V} \vDash t \approx s$.*

Intuitivamente hablando, si $\mathbf{A}$ es libremente generada por G con respecto a $\mathcal{V}$, entonces los elementos de G operan respecto de las operaciones fundamentales de $\mathbf{A}$ de la forma más "libre" posible, en el sentido de que si alguna composición de las operaciones del álgebra aplicada a elementos de G coincide con alguna otra composición, entonces esto sucede a manera de identidad en toda la variedad reemplazando los elementos de G involucrados en tales composiciones por variables distintas.

Nótese que cuando G es un conjunto de generadores libres para $\mathbf{A}$ con respecto a $\mathcal{V}$, tenemos que si t y s son términos cerrados tales que $t^{\mathbf{A}} = s^{\mathbf{A}}$, entonces $t^{\mathbf{B}} = s^{\mathbf{B}}$, para cada $\mathbf{B} \in \mathcal{V}$ (o, equivalentemente si t y s son términos cerrados tales que $t^{\mathbf{B}} \neq s^{\mathbf{B}}$, para algun algebra $\mathbf{B} \in \mathcal{V}$, entonces $t^{\mathbf{A}} \neq s^{\mathbf{A}}$).

A continuación, se define la propiedad de mapeo universal para un álgebra perteneciente a una variedad. Seguidamente, se demuestra que esta propiedad equivale a que el álgebra en cuestión sea libremente generada. Esto nos será de suma utilidad para demostrar con mayor facilidad el hecho de que cierta álgebra sea libremente generada.

Definition 120 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y $G \subseteq A$. Diremos que A* tiene la propiedad de mapeo universal con respecto al conjunto G para la variedad $\mathcal{V}$ *cuando se dé que G genera a $\mathbf{A}$, y que para cada $\mathbf{B} \in \mathcal{V}$ y cada función $F : G \to B$ existe un homomorfismo $\bar{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ el cual extiende a F (i.e., $\bar{F}(g) = F(g)$, $\forall g \in G$).*

Theorem 121 $\mathbf{A}$ *tiene la propiedad de mapeo universal con respecto al conjunto G para la variedad $\mathcal{V}$ sii G genera libremente a $\mathbf{A}$ con respecto a $\mathcal{V}$.*

Proof. ($\Longrightarrow$) Por definición de la propiedad de mapeo universal, G genera a $\mathbf{A}$.

Sean $t =_d t(x_1, ..., x_n)$, $s =_d s(x_1, ..., x_n)$ y $g_1, ..., g_n \in G$ tales que

$$t^{\mathbf{A}}[g_1, .., g_n] = s^{\mathbf{A}}[g_1, ..., g_n].$$

Sean además $\mathbf{B} \in \mathcal{V}$ y $b_1, ..., b_n \in B$. Entonces, para el mapeo $F : G \longrightarrow B$ tal que $F(g_i) = b_i$, $i = 1, .., n$, existe un homomorfismo $\bar{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ que extiende al mapeo F. Esto implica que

$$\begin{aligned} t^{\mathbf{B}}[b_1, .., b_n] &= t^{\mathbf{B}}[\bar{F}(g_1), .., \bar{F}(g_n)] \\ &= \bar{F}(t^{\mathbf{A}}[g_1, .., g_n]) \\ &= \bar{F}(s^{\mathbf{A}}[g_1, .., g_n]) \\ &= s^{\mathbf{B}}[\bar{F}(g_1), .., \bar{F}(g_n)] \\ &= s^{\mathbf{B}}[b_1, .., b_n]. \end{aligned}$$

Como esto vale para cualesquiera $b_1, ..., b_n \in B$, es dado concluir que $\mathbf{B} \models t \approx s$. A su vez, como esto vale para cualquier $\mathbf{B} \in \mathcal{V}$, obtenemos que $\mathcal{V} \models t \approx s$.

Por lo tanto, G genera libremente a $\mathbf{A}$ con respecto a $\mathcal{V}$.

($\Longleftarrow$) Supóngase que G genera libremente a $\mathbf{A}$ con respecto a $\mathcal{V}$, y sea $\alpha : G \longrightarrow B$ una función cualquiera. Puesto que para cada $a \in A$ existen $n \geq 0$ y $t =_d t(x_1, ..., x_n)$ para el que $t^{\mathbf{A}}[g_1, ..., g_n]$ (en virtud de que G genera a $\mathbf{A}$), defínase entonces

$$\begin{array}{rlcl} F: & \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{B} \\ & t^{\mathbf{A}}[g_1, ..., g_n] & \longrightarrow & t^{\mathbf{B}}[\alpha(g_1), ..., \alpha(g_n)]. \end{array}$$

Nótese que para todo $g \in G$, $F(g) = F(x_1^{\mathbf{A}}[g]) = x_1^{\mathbf{B}}[\alpha(g)] = \alpha(g)$, por lo que F extiende a α.

Además, para cada nombre de constante (del tipo en cuestión) c, tenemos que $F(c^{\mathbf{A}}[]) = c^{\mathbf{B}}[]$. Sean ahora $f \in F_m$, para algún $m \geq 1$, y $a_1, ..., a_m \in A$. Como G genera a $\mathbf{A}$, existen $n \geq 1$, $g_1, ..., g_n \in G$ y $t_i =_d t_i(x_1, ..., x_n)$, $i = 1, ..., m$, tales que $a_i = t_i^{\mathbf{A}}[g_1, ..., g_n]$. Luego,

$$\begin{aligned} F(f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_m)) = &\ F(f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[g_1, ..., g_n], ..., t_m^{\mathbf{A}}[g_1, ..., g_n])) \\ = &\ F(f(t_1, ..., t_m)^{\mathbf{A}}[g_1, ..., g_n]) \\ = &\ f(t_1, ..., t_m)^{\mathbf{B}}[\alpha(g_1), ..., \alpha(g_n)] \\ = &\ f^{\mathbf{B}}(t_1^{\mathbf{B}}[\alpha(g_1), ..., \alpha(g_n)], ..., t_m^{\mathbf{B}}[\alpha(g_1), ..., \alpha(g_n)]) \\ = &\ f^{\mathbf{B}}(F(t_1^{\mathbf{A}}[g_1, ..., g_n]), ..., F(t_m^{\mathbf{A}}[g_1, ..., g_n])) \\ = &\ f^{\mathbf{B}}(F(a_1), ..., F(a_m)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, F es un homomorfismo. ■

Lemma 122 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra con la propiedad de mapeo universal con respecto a* G *para la variedad* $\mathcal{V}$*. Luego, para cada* $\mathbf{B} \in \mathcal{V}$ *y* $\alpha : G \longrightarrow B$*, existe una única extensión* β *de* α *tal que* β *es un homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$*.*

Proof. Trivial, considerando 16. ■

Corollary 123 *Si* $\mathbf{A}$ *un álgebra con la propiedad de mapeo universal con respecto a* G *para la variedad* $\mathcal{V}$*, entonces la función identidad* $\alpha : G \longrightarrow A$ *(i.e.,* $\alpha(g) = g$*,* $\forall g \in G$*) es únicamente extensible al endomorfismo identidad sobre* $\mathbf{A}$*.*

A continuación, se demuestra que el álgebra $\mathbf{A}$ libremente generada por G, respecto de $\mathcal{V}$, está determinada módulo isomorfismo por la cardinalidad de G.

Theorem 124 *Sean* $\mathbf{A}_1$*,* $\mathbf{A}_2 \in \mathcal{V}$ *con la propiedad de mapeo universal con respecto a los conjuntos* G_1 *y* G_2*, respectivamente, para la variedad* $\mathcal{V}$*. Si* $|G_1| = |G_2|$*, entonces* $\mathbf{A}_1 \cong \mathbf{A}_2$*.*

Proof. En primer lugar, nótese que el mapeo identidad

$$\iota_j : G_j \longrightarrow G_j, \quad j = 1, 2,$$

tiene al mapeo identidad como único homomorfismo que lo extiende de $\mathbf{A}_j$ en $\mathbf{A}_j$ (Corolario 123). Sea además

$$\alpha : G_1 \longrightarrow G_2$$

una biyección, cuya factibilidad está dada por $|G_1| = |G_2|$. Luego, existe un homomorfismo

$$\beta : \mathbf{A}_1 \longrightarrow \mathbf{A}_2$$

que extiende a α, y un homomorfismo

$$\gamma : \mathbf{A}_2 \longrightarrow \mathbf{A}_1$$

que extiende a α^{-1}. Ya que $\beta \circ \gamma$ es un endomorfismo de $\mathbf{A}_2$ que extiende a ι_2, entonces el Corolario 123 dice que también $\beta \circ \gamma$ es el mapeo identidad. Del mismo modo, tenemos que $\gamma \circ \beta$ es el mapeo identidad.

Pero entonces β es un isomorfismo entre $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$. Para ver esto, supóngase que β no es inyectivo, siendo $x, y \in A_1$ tales que $x \neq y$ y $\beta(x) = \beta(y)$. Luego, $(\gamma \circ \beta)(x) \neq x$ o $(\gamma \circ \beta)(y) \neq y$, lo cual es absurdo. A su vez, si β no es sobreyectivo, entonces existe $y \in A_2$ para el que todo $x \in A_1$ cumple que $\beta(x) \neq y$. Luego, $(\beta \circ \gamma)(y) \neq y$, lo cual también es absurdo.

Por lo tanto, $\mathbf{A}_1 \cong \mathbf{A}_2$. ■

6.1.1. Ejemplos de álgebras libremente generadas para $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}_{01}$

Se introducen ahora casos de reticulados libremente generados para las variedades $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}_{01}$. Aunque las siguientes proposiciones no poseen demasiado valor por sí mismas, creemos que contribuirán a generar en el lector una idea intuitiva de las álgebras libremente generadas.

Proposition 125 *El conjunto $G = \{(0,1), (1,0)\}$ genera libremente a $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ con respecto a $\mathcal{D}$.*

Proof. Notemos que $(0,0) \in \langle G \rangle$, ya que $x_1 \wedge^{\mathbf{2}\times\mathbf{2}} x_2[(0,1),(1,0)] = (0,0)$ (Lema 14); del mismo modo, $(1,1) \in \langle G \rangle$, ya que $x_1 \vee^{\mathbf{2}\times\mathbf{2}} x_2[(0,1),(1,0)] = (1,1)$. S e concluye entonces que $\langle G \rangle = 2 \times 2$; i.e., G genera a $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$.

Ahora, supónganse términos $t =_d t(x_1)$ y $s =_d s(x_1)$ y $g_1 \in G$ tales que $t^{\mathbf{2}\times\mathbf{2}}[g_1] = s^{\mathbf{2}\times\mathbf{2}}[g_1]$. Puesto que $t^{\mathbf{2}\times\mathbf{2}}[g] = g, \forall g \in 2 \times 2$, y puesto que lo mismo sucede para s, se concluye que $\mathbf{2} \times \mathbf{2} \vDash t \approx s$. Esto a su vez implica que $\mathbf{2} \vDash t \approx s$, y en virtud del Teorema 89 es dado concluir que $\mathcal{D} \vDash t \approx s$.

Por otro lado, supónganse términos $t =_d t(x_1, x_2)$ y $s =_d s(x_1, x_2)$ y g_1, $g_2 \in G$ distintos; más precisamente, sean $g_1 = (0,1)$ y $g_2 = (1,0)$. Si $t^{\mathbf{2}\times\mathbf{2}}[g_1, g_2] = t^{\mathbf{2}\times\mathbf{2}}[(0,1),(1,0)] = s^{\mathbf{2}\times\mathbf{2}}[(0,1),(1,0)] = s^{\mathbf{2}\times\mathbf{2}}[g_1, g_2]$, entonces $(t^{\mathbf{2}}[0,1], t^{\mathbf{2}}[1,0]) = (s^{\mathbf{2}}[0,1], s^{\mathbf{2}}[1,0])$; i.e., $t^{\mathbf{2}}[0,1] = s^{\mathbf{2}}[0,1]$ y $t^{\mathbf{2}}[1,0] = s^{\mathbf{2}}[1,0]$. Se deja al lector la prueba de que $t^{\mathbf{2}}[0,0] = 0 = s^{\mathbf{2}}[0,0]$ y $t^{\mathbf{2}}[1,1] = 1 = s^{\mathbf{2}}[1,1]$, lo que entonces implica que $\mathbf{2} \vDash t \approx s$. Luego, $\mathcal{D} \vDash t \approx s$, en virtud del Teorema 89.

Ya que no existen $g_1, g_2, g_3 \in G$ todos distintos, se concluye que G es un conjunto de generadores libres para $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ con respecto a $\mathcal{D}$. ■

Proposition 126 *Existe un reticulado acotado libremente generado con respecto a $\mathcal{D}_{01}$ por un conjunto G de dos elementos.*

Proof. Sean $A = \{x, y, z_1, z_2, 0, 1\}$ (todos elementos distintos entre sí), y sea $\mathbf{A} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ un reticulado acotado tal que $x \vee y = z_1$ y $x \wedge y = z_2$. Tomando $G = \{x, y\}$ se observa que G genera a $\mathbf{A}$.

Sean ahora $\mathbf{B} \in \mathcal{D}_{01}$ y $\alpha : G \to B$. Defínase la siguiente extensión de α:

$$\begin{array}{rccl} \beta: & A & \to & B \\ & x & \to & \alpha(x) \\ & y & \to & \alpha(y) \\ & z_1 & \to & \alpha(x) \vee \alpha(y) \\ & z_2 & \to & \alpha(x) \wedge \alpha(y) \\ & 0 & \to & 0^{\mathbf{B}} \\ & 1 & \to & 1^{\mathbf{B}} \end{array}$$

que claramente constituye un homomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

Por lo tanto, $\mathbf{A}$ tiene la propiedad de mapeo universal con respecto a G para $\mathcal{D}_{01}$, y luego es libremente generado con respecto a $\mathcal{D}_{01}$ (Teorema 121), ■

Proposition 127 *Existe un reticulado acotado libremente generado con respecto a $\mathcal{D}_{01}$ por un conjunto G de un elemento.*

Proof. Sea $\mathbf{3} = (\{0, 1, x\}, \vee, \wedge, 0, 1)$ el reticulado cadena de 3 elementos. Claramente, $G = \{x\}$ genera a $\mathbf{3}$. Queda como ejercicio al lector demostrar que si $t^{\mathbf{3}}[x] = s^{\mathbf{3}}[x]$, entonces $\mathcal{D}_{01} \models t \approx s$, ya sea que $t^{\mathbf{3}}[x] = s^{\mathbf{3}}[x] = x$, $t^{\mathbf{3}}[x] = s^{\mathbf{3}}[x] = 0$ o $t^{\mathbf{3}}[x] = s^{\mathbf{3}}[x] = 1$. ■

Proposition 128 *Existe un reticulado acotado libremente generado con respecto a $\mathcal{D}_{01}$ por $\emptyset$.*

Proof. Sean $\mathbf{2}$ =$(\{0, 1\}, \vee, \wedge, 0, 1)$ y $G = \{0, 1\}$. Puesto que claramente $\{t^{\mathbf{A}}[] : t \in T^{\tau}(\emptyset)\} = 2$, y que una identidad sin variables libres se satisface en $\mathbf{2}$ sii se satisface en $\mathcal{D}_{01}$, en virtud del Teorema 89, se concluye que $\mathbf{2}$ cumple lo buscado. ■

6.2. El álgebra libre de una variedad

Dados una variedad $\mathcal{V}$ de álgebras de tipo τ y un conjunto X de variables, siempre es posible construir un álgebra libremente generada por X con respecto a $\mathcal{V}$ (Teorema 136). Dicha álgebra nos será de suma importancia para demostrar, entre otras cosas, el famoso Teorema de Birkhoff.

Definition 129 *Sean τ un tipo algebraico y X un conjunto de variables cualesquiera. Supongamos que si X es vacío, entonces τ tiene al menos un nombre de constante. Definimos entonce la τ-algebra $\mathbf{T}^{\tau}(X)$ dada por*

- *Universo de* $\mathbf{T}^\tau(X) = T^\tau(X)$.
- *Si* $c \in \mathcal{C}$, *entonces* $c^{\mathbf{T}^\tau(X)} = c$.
- *Si* $f \in \mathcal{F}_n$, *entonces* $f^{\mathbf{T}^\tau(X)}(t_1, ..., t_n) = f(t_1, ..., t_n)$, *para todo* $t_1, ..., t_n \in T^\tau(X)$.

$\mathbf{T}^\tau(X)$ *es usualmente llamada el* álgebra de términos de tipo τ con respecto a X.

Lemma 130 *Dados términos* $t_1, ..., t_n$, *y* $t \in T^\tau(x_1, ..., x_n)$, *se tiene que*

$$t^{\mathbf{T}^\tau(X)}[t_1, ..., t_n] = t(t_1, ..., t_n).$$

Es decir, $t^{\mathbf{T}^\tau(X)}[t_1, ..., t_n]$ *es el término que resulta de reemplazar simultáneamente cada ocurrencia de* x_i *por* t_i, *para cada* $i = 1, ..., n$.

Proof. Se procede por inducción en $k \geq 0$, tal que $t \in T^\tau_k(X)$:

Sea $k = 0$. Si $t = x_i \in X$, para algún $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $t^{\mathbf{T}^\tau(X)}[t_1, ..., t_n] = t_i = x_i(t_1, ..., t_n) = t(t_1, ..., t_n)$. Si $t = c \in \mathcal{C}$, entonces $t^{\mathbf{T}^\tau(X)}[t_1, ..., t_n] = c = c(t_1, ..., t_n) = t(t_1, ..., t_n)$.

Supóngase ahora que vale para $T^\tau_k(X)$, y sea $t \in T^\tau_{k+1}(X)$; i.e., $t = f(s_1, ..., s_m)$, para algún $f \in \mathcal{F}_m$ y $s_1, ..., s_m \in T^\tau_k$. Luego,

$$\begin{aligned}
t^{\mathbf{T}^\tau(X)}[t_1, ..., t_n] = \;& f(s_1, ..., s_m)^{\mathbf{T}^\tau(X)}[t_1, ..., t_n] \\
= \;& f^{\mathbf{T}^\tau(X)}(s_1^{\mathbf{T}^\tau(X)}[t_1, ..., t_n], ..., s_m^{\mathbf{T}^\tau(X)}[t_1, ..., t_n]) \\
= \;& \{\text{por hip. inductiva}\}\ f^{\mathbf{T}^\tau(X)}(s_1(t_1, ..., t_n), ..., s_m(t_1, ..., t_n)) \\
= \;& \{\text{por def. de } \mathbf{T}^\tau(X)\}\ f(s_1(t_1, ..., t_n), ..., s_m(t_1, ..., t_n)) \\
= \;& f(s_1, ..., s_m)(t_1, ..., t_n) \\
= \;& t(t_1, ..., t_n).
\end{aligned}$$

■

Lemma 131 *Si* $t, s \in T^\tau(X)$ *son tales que* $\mathbf{A} \vDash t \approx s$, *para cada álgebra* $\mathbf{A}$ *de tipo* τ, *entonces* $t = s$.

Proof. Supóngase que $t =_d t(x_1, ..., x_n)$, que $s =_d s(x_1, ..., x_n)$ y que toda álgebra $\mathbf{A}$ de tipo τ cumple que $\mathbf{A} \models t \approx s$. En particular, tendremos que $\mathbf{T}^\tau(X) \models t \approx s$. Luego,

$$\begin{aligned}
t = \;& t(x_1, ..., x_n) \\
= \;& t^{\mathbf{T}^\tau(X)}[x_1, ..., x_n] \\
= \;& \{\text{por } \mathbf{T}^\tau(X) \models t \approx s, \text{ en particular para } x_1, ..., x_n\}\ s^{\mathbf{T}^\tau(X)}[x_1, ..., x_n] \\
= \;& s(x_1, ..., x_n) \\
= \;& s.
\end{aligned}$$

■

Lemma 132 $\mathbf{T}^\tau(X)$ *es libremente generada por* X, *con respecto a la variedad de todas las algebras de tipo* τ.

Proof. Sea $\mathcal{V}$ la variedad de todas las álgebras de tipo τ. Nótese que para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y mapeo $\alpha : X \longrightarrow A$, se puede define

$$\beta : T^{\tau}(X) \longrightarrow A$$

recursivamente como

$$\beta(x) = \alpha(x),$$

para cada $x \in X$,

$$\beta(c) = c^{\mathbf{A}},$$

para cada nombre de constante c, y

$$\beta(f(p_1, ..., p_n)) = f^{\mathbf{A}}(\beta(p_1), ..., \beta(p_n)),$$

para cada $p_1, ..., p_n \in T^{\tau}(X)$ y $f \in \mathcal{F}_n$. Obsérvese que β extiende a α, y como además $\beta(f^{\mathbf{T}^{\tau}(X)}(p_1, ..., p_n)) = \beta(f(p_1, ..., p_n)) = f^{\mathbf{A}}(\beta(p_1), ..., \beta(p_n))$, por definición de $\mathbf{T}^{\tau}(X)$, tenemos que β es un homomorfismo que extiende a α. En consecuencia, el Teorema 121 implica que $\mathbf{T}^{\tau}(X)$ es libremente generada por X con respecto a $\mathcal{V}$. ■

Definition 133 *Sean $\tau = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, a)$ un tipo, $\mathcal{V}$ una variedad de álgebras de tipo τ, y X un conjunto de variables. Para el caso en que $T^{\tau}(X) \neq \emptyset$ (i.e. $X \neq \emptyset$ o $\mathcal{C} \neq \emptyset$), se define la siguiente relación binaria sobre $T^{\tau}(X)$*

$$\theta_{\mathcal{V}} = \{(t, s) \in T^{\tau}(X)^2 : \mathcal{V} \models t \approx s\}.$$

Lemma 134 *$\theta_{\mathcal{V}}$ es una congruencia sobre $\mathbf{T}^{\tau}(X)$.*

Proof. Es trivial verificar que $\theta_{\mathcal{V}}$ es una relación de equivalencia.

Para demostrar que es una congruencia, sean $f \in \mathcal{F}_n$, y $t_1, ..., t_n, s_1, ..., s_n \in T^{\tau}(x_1, ..., x_m)$, tales que $t_i \; \theta_{\mathcal{V}} \; s_i$, para $i = 1, ..., n$; i.e., $\mathcal{V} \models t_i \approx s_i$. Entonces, para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y $(a_1, ..., a_m) \in A^m$ se da que $t_i^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_m] = s_i^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_m]$, con $i = 1, ..., n$, lo cual a su vez implica que

$$\begin{aligned} f(t_1, ..., t_n)^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_m] = & \; f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_m], ..., t_n^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_m]) \\ = & \; f^{\mathbf{A}}(s_1^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_m], ..., s_n^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_m]) \\ = & \; f(s_1, ..., s_n)^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_m]. \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{V} \models f(t_1, ..., t_n) \approx f(s_1, ..., s_n)$. Pero entonces $f(t_1, ..., t_n) \; \theta_{\mathcal{V}} \; f(s_1, ..., s_n)$, lo que finalmente significa que

$$f^{\mathbf{T}^{\tau}(X)}(t_1, ..., t_n) \; \theta_{\mathcal{V}} \; f^{\mathbf{T}^{\tau}(X)}(s_1, ..., s_n),$$

permitiéndonos concluir que $\theta_{\mathcal{V}}$ es una congruencia sobre $\mathbf{T}^{\tau}(X)$. ■

Definition 135 *Para cada variedad $\mathcal{V}$ de álgebras de tipo τ y conjunto de variables X, se denotará por $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ al álgebra cociente de $\mathbf{T}^{\tau}(X)$ con respecto a $\theta_{\mathcal{V}}$; $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ será llamada el* álgebra libre de V con respecto a X. *El universo de $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ será denotado $F_{\mathcal{V}}(X)$.*

Theorem 136 *Para cada variedad $\mathcal{V}$ de álgebras de tipo τ y conjunto de variables X, vale que*

(1) $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X) \in \mathcal{V}$.

(2) $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ *es libremente generada por $X/\theta_{\mathcal{V}}$, con repescto a $\mathcal{V}$.*

Proof.

(1) Supongamos que $\mathcal{V} = Mod(\Sigma)$, con $\Sigma \subseteq Id_\tau$, y sea $t \approx s \in \Sigma$. Luego, para cualesquiera $t_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., t_n/\theta_{\mathcal{V}} \in F_{\mathcal{V}}(X)$, se tendrá que

$$\begin{array}{l} t^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[t_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., t_n/\theta_{\mathcal{V}}] = s^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[t_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., t_n/\theta_{\mathcal{V}}] \\ \iff t^{\mathbf{T}^\tau(X)}[t_1, ..., t_n]/\theta_{\mathcal{V}} = s^{\mathbf{T}^\tau(X)}[t_1, ..., t_n]/\theta_{\mathcal{V}} \\ \iff t(t_1, ..., t_n)\ \theta_{\mathcal{V}}\ s(t_1, ..., t_n) \\ \iff \mathcal{V} \models t(t_1, ..., t_n) \approx s(t_1, ..., t_n). \end{array}$$

Pero esto último es verdadero, en virtud de $\mathcal{V} \models t \approx s$, implicando entonces que $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X) \models t \approx s$.

Por lo tanto, $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X) \models \Sigma$.

(2) Dado $t/\theta_{\mathcal{V}} \in F_{\mathcal{V}}(X)$, existen $n \geq 0$ y $x_1, ..., x_n \in X$ para los que $t \in T^\tau(x_1, ..., x_n)$. Luego, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} t^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[x_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., x_n/\theta_{\mathcal{V}}] &=& t^{\mathbf{T}^\tau(X)}[x_1, ..., x_n]/\theta_{\mathcal{V}} \\ &=& t(x_1, ..., x_n)/\theta_{\mathcal{V}} \\ &=& t/\theta_{\mathcal{V}}. \end{array}$$

En consecuencia, $X/\theta_{\mathcal{V}}$ genera a $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$.

Por otro lado, dados $t, s \in T^\tau(X)$ para los que $t =_d t(x_1, ..., x_n)$ y $s =_d s(x_1, ..., x_n)$, y $\bar{x}_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., \bar{x}_n/\theta_{\mathcal{V}} \in X/\theta_{\mathcal{V}}$ cumpliendo que

$$t^{\ \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[\bar{x}_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., \bar{x}_n/\theta_{\mathcal{V}}] = s^{\ \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[\bar{x}_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., \bar{x}_n/\theta_{\mathcal{V}}],$$

se obtiene que $t(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)/\theta_{\mathcal{V}} = s(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)/\theta_{\mathcal{V}}$. Esto último implica que $\mathcal{V} \models t(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) \approx s(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$, lo cual se da si y sólo si $\mathcal{V} \models t(x_1, ..., x_n) \approx s(x_1, ..., x_n)$. Es decir, es cierto que $\mathcal{V} \models t \approx s$.

Por lo tanto, $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ es libremente generada por $X/\theta_{\mathcal{V}}$, con respecto a $\mathcal{V}$.

■

Definition 137 *Un álgebra* $\mathbf{A}$ *de tipo τ se denomina* trivial *si* $|A| = 1$.

Lemma 138 *Si $\mathcal{V}$ tiene al menos un álgebra no trivial, entonces el mapeo natural $X \to X/\theta_{\mathcal{V}}$ es una biyección.*

Proof. Como para toda variedad que contiene algún álgebra no trivial, $\mathcal{V} \models x_1 \approx x_2$ sii $x_1 = x_2$, con $x_1, x_2 \in X$, entonces el mapeo natural $X \to X/\theta_{\mathcal{V}}$ es inyectivo. Claramente es sobreyectivo, y por lo tanto resulta una biyección. ■

El Lema 138 nos dice entonces que dados una variedad con al menos un álgebra no trivial, $\mathcal{V}$, y un conjunto de variables arbitrario, X, el conjunto de generadores libres $X/\theta_{\mathcal{V}}$ tiene cardinalidad $|X| = |X/\theta_{\mathcal{V}}|$. Luego, es posible afirmar que para cada variedad con al menos un álgebra no trivial, existen conjuntos de generadores libres del cardinal que querramos.

Lemma 139 *Si $\mathcal{V}$ es la variedad de las álgebras triviales, entonces* $|X/\theta_{\mathcal{V}}| \leq 1$.

Proof. Si $X = \emptyset$, entonces $|X/\theta_{\mathcal{V}}| = 0$. Si $X \neq \emptyset$, entonces nótese que todo par de variables distintas $x_1, x_2 \in X$ cumplirá que $\mathcal{V} \models x_1 \approx x_2$, por ser $\mathcal{V}$ la variedad de las álgebras triviales. Luego, $|X/\theta_{\mathcal{V}}| = 1$. ■

Theorem 140 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad de álgebras de tipo τ y t_1, ..., t_n, t, s_1, ..., s_n, $s \in T^\tau(x_1, ..., x_m)$. Luego,*

$$\mathcal{V} \models \forall x_1 ... \forall x_m \left((\bigwedge_{i=1}^{n} t_i \equiv s_i) \to (t \equiv s) \right)$$

sii

$$(t/\theta_{\mathcal{V}}, s/\theta_{\mathcal{V}}) \in \left(\bigvee_{i=1}^{n} \theta^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(x_1,...,x_m)}(t_i/\theta_{\mathcal{V}}, s_i/\theta_{\mathcal{V}}) \right).$$

Proof. ($\implies$) Supongamos que $\mathcal{V} = Mod(\Sigma)$, con $\Sigma \subseteq Id_\tau$, y sea $\delta = \bigvee_{i=1}^{n} \theta^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}(t_i/\theta_{\mathcal{V}}, s_i/\theta_{\mathcal{V}})$. Puesto que $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X) \in \mathcal{V}$ (Lema 136) y que el mapeo natural $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X) \to \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)/\delta$ es un homomorfismo sobreyectivo (Lema 24), obtenemos que $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)/\delta \models \Sigma$ (Lema 41, en virtud de que toda identidad de tipo τ es positiva); i.e., $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)/\delta \in \mathcal{V}$. En consecuencia,

$$\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)/\delta \models \forall x_1 ... \forall x_m ((\bigwedge_{i=1}^{n} t_i \equiv s_i) \to (t \equiv s)). \quad (1)$$

Ahora, como $(t_i/\theta_{\mathcal{V}}, s_i/\theta_{\mathcal{V}}) \in \theta^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}(t_i/\theta_{\mathcal{V}}, s_i/\theta_{\mathcal{V}})$, para cada $i = 1, ..., m$, y como $t_i(x_1, .., x_m) = t_i$ y $s_i(x_1, ..., x_m) = s_i$, entonces

$$(t_i(x_1, ..., x_m)/\theta_v, s_i(x_1, ..., x_m)/\theta_v) \in \delta.$$

Esto quiere decir que

$$(t_i(x_1, ..., x_m)/\theta_v)/\delta = (s_i(x_1, ..., x_m)/\theta_v)/\delta,$$

lo que implica que

$$(t_i^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[x_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., x_m/\theta_{\mathcal{V}}])/\delta = (s_i^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[x_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., x_m/\theta_{\mathcal{V}}])/\delta,$$

y a su vez implica que

$$t_i^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)/\delta}[(x_1/\theta_{\mathcal{V}})/\delta, ..., (x_m/\theta_{\mathcal{V}})/\delta] = s_i^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)/\delta}[(x_1/\theta_{\mathcal{V}})/\delta, ..., (x_m/\theta_{\mathcal{V}})/\delta].$$

De esto se puede afirmar, por (1), que

$$t^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)/\delta}[(x_1/\theta_{\mathcal{V}})/\delta, ..., (x_m/\theta_{\mathcal{V}})/\delta] = s^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)/\delta}[(x_1/\theta_{\mathcal{V}})/\delta, ..., (x_m/\theta_{\mathcal{V}})/\delta].$$

Pero entonces obtenemos que

$$(t(x_1, ..., x_m)/\theta_v, s(x_1, ..., x_m)/\theta_v) \in \delta$$

, concluyendo que

$$(t/\theta_v, s/\theta_v) \in \delta.$$

($\Longleftarrow$) Supongamos que $(t/\theta_{\mathcal{V}}, s/\theta_{\mathcal{V}}) \in \delta$ y sea $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ tal que $t_i^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = s_i^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$, con $\vec{a} \in A^m$. Puesto que $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$ es libremente generada por $X/\theta_{\mathcal{V}}$, con respecto a $\mathcal{V}$ (Teorema 136), entonces el mapeo

$$\begin{array}{rrcl} \alpha: & X/\theta_{\mathcal{V}} & \rightarrow & A \\ & x_1/\theta_{\mathcal{V}} & \rightarrow & a_1 \\ & ... & \rightarrow & ... \\ & x_m/\theta_{\mathcal{V}} & \rightarrow & a_m \\ & x/\theta_{\mathcal{V}} & \rightarrow & a_1, \text{ con } x \neq x_i, \forall i \end{array}$$

es extensible a un homomorfismo $h : \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow \mathbf{A}$, en virtud del Teorema 121.

A continuación, nótese que, para todo $i \in \{1, ..., m\}$,

$$\begin{array}{rcl} h(t_i^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[x_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., x_m/\theta_{\mathcal{V}}]) & = & t_i^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_m] \\ & = & s_i^{\mathbf{A}}[a_1, ..., a_m] \\ & = & h(s_i^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[x_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., x_m/\theta_{\mathcal{V}}]) \end{array}$$

por lo que

$$(t_i^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[x_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., x_m/\theta_{\mathcal{V}}],\ t_i^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[x_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., x_m/\theta_{\mathcal{V}}]) \in \ker(h).$$

Como $\ker(h) \in \mathrm{Con}(\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X))$, se tiene que $\ker(h) \supseteq \delta$. Además, $(t/\theta_{\mathcal{V}}, s/\theta_{\mathcal{V}}) \in \delta$, obteniendo que

$$(t/\theta_{\mathcal{V}},\ s/\theta_{\mathcal{V}}) = (t^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[x_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., x_m/\theta_{\mathcal{V}}],\ s^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[x_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., x_m/\theta_{\mathcal{V}}]) \in \ker(h)$$

Por lo tanto,

$$t^{\mathbf{A}}[\vec{a}] = h(t^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[x_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., x_m/\theta_{\mathcal{V}}]) = h(s^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}[x_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., x_m/\theta_{\mathcal{V}}]) = s^{\mathbf{A}}[\vec{a}].$$

En consecuencia, $\mathcal{V} \models \forall x_1 ... \forall x_m((\bigwedge_{i=1}^{n} t_i \equiv s_i) \rightarrow (t \equiv s))$. ■

Será preciso, para el siguiente Lema, recordar que $\theta^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_p)$ denota la menor congruencia sobre $\mathbf{A}$ tal que a_1, ..., y a_p están en la misma clase de equivalencia; es decir,

$$\theta^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_p) = \bigcap \{\delta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A}) : (a_i,\ a_j) \in \delta, \text{ para todo } i,\ j \in \{1, ..., p\}\}.$$

Lemma 141 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad y X un conjunto de variables tal que $X \supseteq \{x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n, y\}$. Dados $p,\ q \in T^{\tau}(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)$, si*

$$\begin{aligned}(p(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)/\theta_{\mathcal{V}},\ q(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)/\theta_{\mathcal{V}}) \in \\ \theta^{\ \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}(y_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., y_n/\theta_{\mathcal{V}})\end{aligned}$$

entonces

$$\mathcal{V} \models p(x_1, ..., x_m, y, ..., y) \approx q(x_1, ..., x_m, y, ..., y).$$

Proof. Supóngase que

$$(p/\theta_{\mathcal{V}},\ q/\theta_{\mathcal{V}}) \in \theta^{\ \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}(y_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., y_n/\theta_{\mathcal{V}}).$$

Como

$$\begin{aligned}&\theta^{\ \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}(y_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., y_n/\theta_{\mathcal{V}}) \subseteq \\ &\theta^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}(y_1/\theta_{\mathcal{V}}, y_2/\theta_{\mathcal{V}}) \vee\ ...\ \vee \theta^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}(y_{n-1}/\theta_{\mathcal{V}}, y_n/\theta_{\mathcal{V}})\ ,\end{aligned}$$

tenemos que

$$(p/\theta_{\mathcal{V}},\ q/\theta_{\mathcal{V}}) \in (\bigvee_{i=1}^{n-1} \theta^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}(y_i/\theta_{\mathcal{V}}, y_{i+1}/\theta_{\mathcal{V}})).$$

Por Teorema 140 y con x_1, ..., x_m, y_1, ..., y y_n todos declarados con variables en $x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n$, se obtiene que

$$\mathcal{V} \models \forall x_1 ... \forall x_m \forall y_1 ... \forall y_n\ ((\bigwedge_{i=1}^{n-1} y_i \equiv y_{i+1}) \rightarrow p \equiv q).$$

Esto equivale a decir que

$$\mathcal{V} \models \forall x_1 ... \forall x_m \forall y\ (p(x_1, ..., x_m, y, ..., y) \equiv q(x_1, ..., x_m, y, ..., y));$$

i.e., $\mathcal{V} \models p(x_1, ..., x_m, y, ..., y) \approx q(x_1, ..., x_m, y, ..., y)$. ■

6.3. Teorema de Birkhoff

Lemma 142 *Sean $\mathcal{K}$ una clase de álgebras de tipo τ, y X un conjunto de variables. Luego, para cada $p, q \in T^\tau(X)$ tales que*

$$p/\theta_{\mathbb{V}(\mathcal{K})} \neq q/\theta_{\mathbb{V}(\mathcal{K})}$$

existen $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y valuación $v : X \to A$ tales que

$$p^{\mathbf{A}}[v] \neq q^{\mathbf{A}}[v]$$

Proof. Supongamos que no existen $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $v : X \to A$ que cumplan que $p^{\mathbf{A}}[v] \neq q^{\mathbf{A}}[v]$. Luego, para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y para cada valuación v, $p^{\mathbf{A}}[v] = q^{\mathbf{A}}[v]$. En consecuencia, $\mathcal{K} \models p \approx q$, y entonces (Lema 80) $\mathbb{V}(\mathcal{K}) \models p \approx q$, concluyendo que $p/\theta_{\mathbb{V}(\mathcal{K})} = q/\theta_{\mathbb{V}(\mathcal{K})}$, lo cual es absurdo. ■

Theorem 143 *Sean $\mathcal{K}$ una clase de álgebras de tipo τ y X un conjunto de variables. Luego, existe una familia indexada de álgebras en $\mathcal{K}$ $\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$ y $\mathbf{A} \leq \prod \langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$ tales que*

$$\mathbf{F}_{\mathbb{V}(\mathcal{K})}(X) \cong \mathbf{A}.$$

Proof. Sea $\mathcal{V} = \mathbb{V}(\mathcal{K})$. Para cada par de términos $p, q \in T^\tau(X)$ para los que $p/\theta_{\mathcal{V}} \neq q/\theta_{\mathcal{V}}$, sean $\mathbf{A}_{(p,q)}$ y $v_{(p,q)} : X \to A$ tales que $p^{\mathbf{A}_{(p,q)}}[v_{(p,q)}] \neq q^{\mathbf{A}_{(p,q)}}[v_{(p,q)}]$, las cuales existen en virtud de Lema 142. Defínase además

$$\begin{array}{rccl} F_{(p,q),\theta_{\mathcal{V}}} : & X/\theta_{\mathcal{V}} & \to & A_{(p,q)} \\ & u/\theta_{\mathcal{V}} & \to & v_{(p,q)}(u), \end{array}$$

notando que esta definición es buena, pues si existen $u, w \in X$ tales que $u \neq w$ pero $u/\theta_{\mathcal{V}} = w/\theta_{\mathcal{V}}$, entonces del Lema 138 se obtiene que $\mathbb{V}(\mathcal{K})$ es la variedad de álgebras triviales de tipo τ, lo que deriva en que $|A_{(p,q)}| = 1$ y $v_{(p,q)}(u) = v_{(p,q)}(w)$. Puesto que $X/\theta_{\mathcal{V}}$ genera libremente a $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)$, con respecto a $\mathcal{V}$, el Teorema 121 dice que existe un homomorfismo $F_{(p,q)} : \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X) \to \mathbf{A}_{p,q}$ que extiende a $F_{(p,q),\theta_{\mathcal{V}}}$.

A continuación, sea $I = \{(p, q) : p/\theta_{\mathcal{V}} \neq q/\theta_{\mathcal{V}}\}$, y defínase

$$\begin{array}{rccl} H : & \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X) & \to & \prod \langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle \\ & t/\theta_{\mathcal{V}} & \to & (i \in I \to t^{\mathbf{A}_i}[F_{i,\theta_{\mathcal{V}}}]) \end{array}$$

tal que

$$H(t/\theta_{\mathcal{V}})(i) = t^{\mathbf{A}_i}[F_{i,\theta_{\mathcal{V}}}].$$

En consecuencia, dado un $i \in I$ tenemos que, para cada $c \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} H(c^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)})(i) &= H(c^{\mathbf{T}^\tau(X)}/\theta_{\mathcal{V}})(i) \\ &= H(c/\theta_{\mathcal{V}})(i) \\ &= c^{\mathbf{A}_i}[F_{i,\theta_{\mathcal{V}}}] \\ &= c^{\prod \langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle}(i), \end{aligned}$$

y que para cada $t_1/\theta_{\mathcal{V}},...,t_n/\theta_{\mathcal{V}} \in F_{\mathcal{V}}(X)$ y $f \in \mathcal{F}_n$ se da que

$$\begin{aligned}
H(f^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}(t_1/\theta_{\mathcal{V}},...,t_n/\theta_{\mathcal{V}}))(i) &= H(f^{\mathbf{T}^{\tau}(X)}(t_1,...,t_n)/\theta_{\mathcal{V}})(i) \\
&= H(f(t_1,...,t_n)/\theta_{\mathcal{V}})(i) \\
&= f(t_1,...,t_n)^{\mathbf{A}_i}[F_{i,\theta_{\mathcal{V}}}] \\
&= f^{\mathbf{A}_i}(t_1^{\mathbf{A}_i}[F_{i,\theta_{\mathcal{V}}}],...,t_n^{\mathbf{A}_i}[F_{i,\theta_{\mathcal{V}}}]) \\
&= f^{\mathbf{A}_i}((j \in J \to t_1^{\mathbf{A}_j}[F_{j,\theta_{\mathcal{V}}}])(i),..., \\
&\qquad (j \in J \to t_n^{\mathbf{A}_j}[F_{j,\theta_{\mathcal{V}}}])(i)) \\
&= f^{\mathbf{A}_i}(H(t_1/\theta_{\mathcal{V}})(i),...,H(t_n/\theta_{\mathcal{V}})(i)) \\
&= f^{\prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle}(H(t_1/\theta_{\mathcal{V}}),...,H(t_n/\theta_{\mathcal{V}}))(i).
\end{aligned}$$

Más aún, nótese que si $p/\theta_{\mathcal{V}} \neq q/\theta_{\mathcal{V}}$ entonces existe $i \in I$, a saber $i = (p,q)$, tal que $\mathbf{A}_i$ cumple que $p^{\mathbf{A}_i}[F_{i,\theta_{\mathcal{V}}}] \neq q^{\mathbf{A}_i}[F_{i,\theta_{\mathcal{V}}}]$; i.e., H es inyectivo.

En consecuencia, puesto que H es un embedding, el Lema 22 nos permite concluir que

$$\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X) \cong H(\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)) \leq \prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle.$$

■

El Teorema 143 nos permite demostrar el siguiente famoso

Theorem 144 (Birkhoff) *Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras de tipo τ es una variedad si y solo si $\mathcal{K}$ es cerrada bajo $\mathbb{H}$, $\mathbb{S}$ y $\mathbb{P}$.*

Proof. ($\Longrightarrow$) Sea $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$, para algún $\Sigma \subseteq Id_{\tau}$. Puesto que las identidades son preservadas bajo $\mathbb{H}$, $\mathbb{S}$ y $\mathbb{P}$ (como consecuencia de los lemas 41 39 y 43, respectivamente), se tiene que $\mathbb{H}(\mathcal{K}), \mathbb{S}(\mathcal{K}), \mathbb{P}(\mathcal{K}) \models \Sigma$; luego, $\mathcal{K}$ es cerrada bajo $\mathbb{H}$, $\mathbb{S}$ y $\mathbb{P}$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $\mathcal{K}$ cerrada bajo $\mathbb{H}$, $\mathbb{S}$ y $\mathbb{P}$. Sean $\Sigma = \{t \approx s : \mathcal{K} \models t \approx s\}$ y $\mathbf{A} \in Mod(\Sigma)$ (i.e., $\mathbf{A} \models \Sigma$).

Evidentemente, si $\mathcal{K}$ es una clase de álgebras triviales, entonces es la variedad de las álgebras triviales de tipo τ (ya que toda álgebra trivial de tipo τ está en $\mathbb{H}(\mathcal{K})$ y $\mathcal{K}$ es cerrada bajo $\mathbb{H}$). Luego, $x_1 \approx x_2 \in \Sigma$, siendo x_1, x_2 variables, y entonces $\mathbf{A}$ es un álgebra trivial, obteniendo que $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$.

Ahora, supongamos que existe un álgebra no trivial en $\mathcal{K}$. Sea X un conjunto de variables tal que $|X| = |A|$. Como $\mathcal{V} = \mathbb{V}(\mathcal{K})$ tiene al menos un álgebra no trivial, $X \to X/\theta_{\mathcal{V}}$ es una biyección (Lema 138). Luego, $|X/\theta_{\mathcal{V}}| = |A|$ y existe un mapeo biyectivo

$$H : \quad X/\theta_{\mathcal{V}} \quad \to \quad A.$$

A continuación, consideremos

$$\begin{array}{rrcl}
\bar{H} : & F_{\mathcal{V}}(X) & \to & A \\
& t(x_1,...,x_n)/\theta_{\mathcal{V}} & \to & t^{\mathbf{A}}[H(x_1/\theta_{\mathcal{V}}),...,H(x_n/\theta_{\mathcal{V}})]
\end{array},$$

observando que

- Para cada $x \in X$, $\bar{H}(x/\theta_{\mathcal{V}}) = x^{\mathbf{A}}[H(x/\theta_{\mathcal{V}})] = H(x/\theta_{\mathcal{V}})$; i.e., $\bar{H}$ es una extensión de H.

- Para cada $c \in \mathcal{C}$, $\bar{H}(c^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}) = \bar{H}(c/\theta_{\mathcal{V}}) = c^{\mathbf{A}}$.
- Dados $t_1(x_1, ..., x_n)/\theta_{\mathcal{V}}, ..., t_m(x_1, ..., x_n)/\theta_{\mathcal{V}} \in F_{\mathcal{V}}(X)$ y $f \in \mathcal{F}_m$,

$$\begin{aligned}
& \bar{H}(f^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X)}(t_1(x_1, ..., x_n)/\theta_{\mathcal{V}}, ..., t_m(x_1, ..., x_n)/\theta_{\mathcal{V}})) \\
= \; & \bar{H}(f^{T^{\tau}(X)}(t_1(x_1, ..., x_n), ..., t_m(x_1, ..., x_n))/\theta_{\mathcal{V}}) \\
= \; & \bar{H}(f(t_1, ..., t_m)(x_1, ..., x_n)/\theta_{\mathcal{V}}) \\
= \; & f(t_1, ..., t_m)^{\mathbf{A}}[H(x_1/\theta_{\mathcal{V}}), ..., H(x_n/\theta_{\mathcal{V}})] \\
= \; & f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[H(x_1/\theta_{\mathcal{V}}), ..., H(x_n/\theta_{\mathcal{V}})], ..., t_m^{\mathbf{A}}[H(x_1/\theta_{\mathcal{V}}), ..., H(x_n/\theta_{\mathcal{V}})]) \\
= \; & f^{\mathbf{A}}(\bar{H}(t_1(x_1, ..., x_n)/\theta_{\mathcal{V}}), ..., \bar{H}(t_m(x_1, ..., x_n)/\theta_{\mathcal{V}})).
\end{aligned}$$

Luego, $\bar{H}$ es un homomorfismo sobreyectivo que extiende a H. El Teorema 143 nos dice que $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X) \in \mathbb{ISP}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$ (ver que $\mathbb{I}(\mathcal{K}) \subseteq \mathbb{H}(\mathcal{K})$), y luego $A \in \mathbb{HISP}(\mathcal{K})$. Puesto que $\mathbb{HI}(\mathbb{SP}(\mathcal{K})) = \mathbb{H}(\mathbb{SP}(\mathcal{K}))$, se obtiene que $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$.

Por lo tanto, $Mod(\Sigma) \subseteq \mathcal{K}$. A su vez, como $\mathcal{K} \models \Sigma$, tenemos que $\mathcal{K} \subseteq Mod(\Sigma)$. En consecuencia, $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$; i.e., es una variedad. ■

7. Condiciones de Mal'cev

En esta sección se estudiarán la permutabilidad y distributividad de congruencias de una variedad (propiedades semánticas) en función de la satisfacibilidad de identidades por parte de esta variedad (propiedades sintácticas); la posibilidad de contar con las herramientas que aquí desarrollaremos será de suma utilidad en secciones posteriores.

Se remite al lector a [9] para continuar los estudios de esta sección, hallando en este libro (específicamente en la sección 10.3) una prueba alternativa a la prueba original de Post sobre la estructura del reticulado de Post, estudiando los reticulados de congruencias de álgebras de 2 elementos. Se utiliza para ello, junto a otras, las propiedades enunciadas en esta sección.

Definition 145 *Un álgebra* $\mathbf{A}$ *se dice de* congruencias permutables *si para cualesquiera* $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *se da que*

$$\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_{1.}$$

A su vez, una variedad se dice de congruencias permutables si cada álgebra de la variedad es de congruencias permutables.

Lemma 146 *Dadas un álgebra* $\mathbf{A}$ *y* $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$*, son equivalentes:*

1. $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$.
2. $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$.

Theorem 147 (Mal'cev) *Una variedad $\mathcal{V}$ es de congruencias permutables si y sólo si existe $p \in T^{\tau}(x_1, x_2, x_3)$ tal que y*

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\models p(x,x,y) \approx y \\ \mathcal{V} &\models p(x,y,y) \approx x. \end{aligned}$$

Proof. ($\Longrightarrow$) Sea $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(x_1, x_2, x_3)$. Puesto que

$$(x_1/\theta_{\mathcal{V}},\ x_3/\theta_{\mathcal{V}}) \in [\theta^{\mathbf{F}}(x_1/\theta_{\mathcal{V}}, x_2/\theta_{\mathcal{V}}) \circ \theta^{\mathbf{F}}(x_2/\theta_{\mathcal{V}}, x_3/\theta_{\mathcal{V}})]$$

entonces

$$(x_1/\theta_{\mathcal{V}},\ x_3/\theta_{\mathcal{V}}) \in [\theta^{\mathbf{F}}(x_2/\theta_{\mathcal{V}}, x_3/\theta_{\mathcal{V}}) \circ \theta^{\mathbf{F}}(x_1/\theta_{\mathcal{V}}, x_2/\theta_{\mathcal{V}})]$$

pues $\mathbf{F} \in \mathcal{V}$ y $\mathcal{V}$ es de congruencias permutables. Luego, existe $p/\theta_{\mathcal{V}} \in F$, con $p =_d p(x_1, x_2, x_3)$, tal que

$$(x_1/\theta_{\mathcal{V}},\ p(x_1, x_2, x_3)/\theta_{\mathcal{V}}) \in\ \theta^{\mathbf{F}}(x_2/\theta_{\mathcal{V}}, x_3/\theta_{\mathcal{V}}) \quad (1)$$

y

$$(p(x_1, x_2, x_3)/\theta_{\mathcal{V}},\ x_3/\theta_{\mathcal{V}}) \in\ \theta^{\mathbf{F}}(x_1/\theta_{\mathcal{V}}, x_2/\theta_{\mathcal{V}})\ (2).$$

Aplicando el Lema 141, obtenemos que $\mathcal{V} \models x_1 \approx p(x_1, y, y)$, por (1) , y que $\mathcal{V} \models p(y, y, x_3) \approx x_3$, por (2). Por reemplazo de variables, obtenemos que $\mathcal{V} \models x \approx p(x, y, y)$ y que $\mathcal{V} \models p(y, y, x) \approx x$.

($\Longleftarrow$) Sean $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ y $\phi,\ \delta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Dados $a_1,\ a_2 \in A$, si

$$(a_1,\ a_2) \in (\phi \circ \delta)$$

entonces existe $b \in A$ tal que

$$\begin{aligned} (a_1,\ b) &\in \phi, \\ (b,\ a_2) &\in \delta. \end{aligned}$$

Es fácil probar que

$$(a_1,\ b),\ (b,\ b),\ (a_2,\ a_2) \in \phi$$

implican que

$$(p(a_1, b, a_2),\ p(b, b, a_2)) \in \phi,$$

y, del mismo modo,

$$(a_1,\ a_1),\ (b,\ a_2),\ (a_2,\ a_2) \in \delta$$

implican que

$$(p(a_1, b, a_2),\ p(a_1, a_2, a_2)) \in \delta.$$

En consecuencia,

$$\begin{array}{rl} a_1 = & \{\text{por hipótesis}\}\ p(a_1, a_2, a_2) \\ \delta & p(a_1, b, a_2) \\ \phi & p(b, b, a_2) \\ = & \{\text{por hipótesis}\}\ a_2. \end{array}$$

Es decir, $\phi \circ \delta \subseteq \delta \circ \phi$. Por Lema 146, $\delta \circ \phi = \phi \circ \delta$.

Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es de congruencias permutables. ∎

Definition 148 *A un término p que cumpla las propiedades enunciadas en el Teorema 147 lo llamaremos* término de Mal'Cev para $\mathcal{V}$*.*

Definition 149 *Un álgebra* $\mathbf{A}$ *se dice de* congruencias distributivas *si* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *es un reticulado distributivo.*

A su vez, una variedad se dice de congruencias distributivas si cada álgebra de la variedad es de congruencias distributivas.

Theorem 150 (Condición de Jónnson) *Una variedad $\mathcal{V}$ es de congruencias distributivas si y sólo si existen términos $p_0 =_d p_0(x, y, z)$, ..., $p_n =_d p_n(x, y, z)$, con $n \geq 1$, tal que*

$$\left.\begin{cases} \mathcal{V} \models p_i(x, y, x) \approx x, \text{ para cada } i \in \{0, ..., n\} \\ \mathcal{V} \models p_0(x, y, z) \approx x \\ \mathcal{V} \models p_n(x, y, z) \approx z \\ \mathcal{V} \models p_i(x, x, y) \approx p_{i+1}(x, x, y), \text{ para cada } i \text{ par} \\ \mathcal{V} \models p_i(x, y, y) \approx p_{i+1}(x, y, y), \text{ para cada } i \text{ impar.} \end{cases}\right\} \Delta_n$$

Proof. ($\Longrightarrow$) Siendo $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(x, y, z) \in \mathcal{V}$, se observa que

$$\theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}}) \wedge [\theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ y/\theta_{\mathcal{V}}) \vee \theta^{\mathbf{F}}(y/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}})] =$$
$$[\theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}}) \wedge \theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ y/\theta_{\mathcal{V}})] \vee [\theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}}) \wedge \theta^{\mathbf{F}}(y/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}})].$$

Luego,

$$(x/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}}) \in$$
$$[\theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}}) \wedge \theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ y/\theta_{\mathcal{V}})] \vee [\theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}}) \wedge \theta^{\mathbf{F}}(y/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}})]$$

Esto significa que existen términos $p_1 =_d p_1(x, y, z)$, ..., y $p_{n-1}(x, y, z)$, con $n \geq 1$, tales que

$$\begin{array}{r} (x/\theta_{\mathcal{V}}, p_1(x, y, z)/\theta_{\mathcal{V}}) \in [\theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}}) \wedge \theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ y/\theta_{\mathcal{V}})] \\ (p_1(x, y, z)/\theta_{\mathcal{V}}, p_2(x, y, z)/\theta_{\mathcal{V}}) \in [\theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}}) \wedge \theta^{\mathbf{F}}(y/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}})] \\ \vdots \\ (p_{n-2}(x, y, z)/\theta_{\mathcal{V}}, p_{n-1}(x, y, z)/\theta_{\mathcal{V}}) \in [\theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}}, z/\theta_{\mathcal{V}}) \wedge \theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ y/\theta_{\mathcal{V}})] \\ (p_{n-1}(x, y, z)/\theta_{\mathcal{V}}, z/\theta_{\mathcal{V}}) \in [\theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}}, z/\theta_{\mathcal{V}}) \wedge \theta^{\mathbf{F}}(y/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}})]. \end{array} \tag{1}$$

Tomando $p_0(x,y,z) = x$, $p_n(x,y,z) = z$, se satisfacen

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{V} & \models & p_0(x,y,z) \approx x \\ \mathcal{V} & \models & p_n(x,y,z) \approx z. \end{array}$$

Además, si i es par, entonces de

$$(p_i(x,y,z),\ p_{i+1}(x,y,z)) \in [\theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}}) \wedge \theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ y/\theta_{\mathcal{V}})]$$

se obtiene que

$$(p_i(x,y,z),\ p_{i+1}(x,y,z)) \in [\theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ y/\theta_{\mathcal{V}})].$$

A su vez, y en virtud del Teorema 140, esto implica que

$$\mathcal{V} \models x \approx y \rightarrow p_i(x,y,z) \approx p_{i+1}(x,y,z);$$

i.e.,

$$\mathcal{V} \models p_i(x,x,z) \approx p_{i+1}(x,x,z).$$

Por otro lado, si i es impar, entonces

$$(p_i(x,y,z),\ p_{i+1}(x,y,z)) \in [\theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}}) \wedge \theta^{\mathbf{F}}(y/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}})],$$

y se obtiene de modo análogo que

$$\mathcal{V} \models p_i(x,y,y) \approx p_{i+1}(x,y,y).$$

Por último, de (1), y para cada $i \in \{0,...,n-1\}$, se obtiene que

$$(p_i(x,y,z),\ p_{i+1}(x,y,z)) \in [\theta^{\mathbf{F}}(x/\theta_{\mathcal{V}},\ z/\theta_{\mathcal{V}})],$$

y luego

$$\mathcal{V} \models p_i(x,y,x) \approx p_{i+1}(x,y,x).$$

Como

$$\mathcal{V} \models p_0(x,y,x) \approx x,$$

se puede concluir que

$$\mathcal{V} \models p_i(x,y,x) \approx x,$$

para cada $i \in \{0,...,n\}$.

($\Longleftarrow$) Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$. Para $\theta,\ \delta,\ \gamma \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, probaremos que

$$\theta \wedge (\delta \vee \gamma) \subseteq (\theta \wedge \delta) \vee (\theta \wedge \gamma).$$

Para esto, sean $a, b \in A$ tales que

$$(a, b) \in \theta \wedge (\delta \vee \gamma).$$

Luego, $(a, b) \in \theta$ y existen $c_1, ..., c_m$ tales que

$$a \ \delta \ c_1 \ \gamma \ c_2 \ \delta \ ... \ c_m \ \gamma \ b,$$

y es posible afirmar que, para cada $i \in \{0, ..., n\}$,

$$p_i(a, a, b) \ \delta \ p_i(a, c_1, b) \ \gamma \ p_i(a, c_2, b) \ \delta \ ... \ p_i(a, c_m, b) \ \gamma \ p_i(a, b, b).$$

Además, como

$$\begin{aligned} &a \ \theta \ a \\ &d \ \theta \ d \\ &b \ \theta \ b, \end{aligned}$$

se obtiene que para todo $d \in A$

$$a = p_i(a, d, a) \ \theta \ p_i(a, d, b),$$

pues $\mathcal{V} \models p_i(x, y, x) \approx x$, para todo i. Luego,

$$\begin{aligned} &a \ \theta \ p_i(a, a, b) \ \theta \ a \ \theta \ p_i(a, c_1, b) \ \theta \ a \ \theta \ p_i(a, c_2, b) \ \theta \ a \ \theta \ ... \ \theta \\ &a \ \theta \ p_i(a, c_m, b) \ \theta \ a \ \theta \ p_i(a, b, b), \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} &p_i(a, a, b) \ (\theta \wedge \delta) \ p_i(a, c_1, b) \ (\theta \wedge \gamma) \ p_i(a, c_2, b) \ (\theta \wedge \delta) \ ... \\ &p_i(a, c_m, b) \ (\theta \wedge \gamma) \ p_i(a, b, b); \end{aligned}$$

i.e.,

$$p_i(a, a, b) \ [(\theta \wedge \delta) \vee (\theta \wedge \gamma)] \ p_i(a, b, b),$$

para cada $i \in \{0, ..., n\}$.

Teniendo en cuenta las identidades que satisface $\mathcal{V}$ con respecto a p_0, ..., y p_n, y suponiendo que n es par, tenemos que

$$\begin{array}{rl} a = & p_0(a, a, b) \\ = & p_1(a, a, b) \\ [(\theta \wedge \delta) \vee (\theta \wedge \gamma)] & p_1(a, b, b) \\ = & p_2(a, b, b) \\ [(\theta \wedge \delta) \vee (\theta \wedge \gamma)] & p_2(a, a, b) \\ = & p_3(a, a, b) \\ ... & ... \\ [(\theta \wedge \delta) \vee (\theta \wedge \gamma)] & p_{n-1}(a, b, b) \\ = & p_n(a, b, b) \\ = & b. \end{array}$$

Es posible demostrar de manera análoga el mismo resultado para n impar, pudiendo entonces afirmar que

$$(a,b) \in [(\theta \wedge \delta) \vee (\theta \wedge \gamma)].$$

Por lo tanto, $\theta \wedge (\delta \vee \gamma) \subseteq [(\theta \wedge \delta) \vee (\theta \wedge \gamma)]$. Además,

$$(a,b) \in [(\theta \wedge \delta) \vee (\theta \wedge \gamma)]$$

implica que existen $c_1, ..., c_p \in A$ tales que

$$a\ (\theta \wedge \delta)\ c_1\ (\theta \wedge \gamma)\ c_2\ ...\ (\theta \wedge \delta)\ c_n\ (\theta \wedge \gamma)\ b.$$

De aquí se obtiene que

$$a\ \theta\ c_1\ \theta\ c_2\ ...\ \theta\ c_n\ \theta\ b$$

y que

$$a\ \delta\ c_1\ \gamma\ c_2\ ...\ \delta\ c_n\ \gamma\ b.$$

Luego,

$$(a,b) \in [\theta \wedge (\delta \vee \gamma)].$$

Esto significa que $\theta \wedge (\delta \vee \gamma) = (\theta \wedge \delta) \vee (\theta \wedge \gamma)$, y que $\mathbf{A}$ es de congruencias distributivas.

Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es de congruencias distributivas. ■

Theorem 151 *$\mathcal{I}$, la variedad de las álgebras implicativas, es de congruencias distributivas.*

Proof. Queda como ejercicio al lector verificar que el álgebra implicativa $(2, \rightarrow, 1)$ satisface las identidades Δ_3 del Teorema 150 para $p_0(x,y,z) = x$, $p_1(x,y,z) = (y \rightarrow (z \rightarrow x)) \rightarrow x$, $p_2(x,y,z) = (x \rightarrow y) \rightarrow z$ y $p_3(x,y,z) = z$. En consecuencia, $\mathbb{V}((2, \rightarrow, 1)) = \mathcal{I}$ es de congruencias distributivas, pues $\mathcal{I} \models \Delta_3$ en virtud del Lema 80. ■

Definition 152 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad. Si existen $n \geq 1$ y términos p_0, ..., p_n que cumplen las condiciones Δ_n del Teorema 150 para $\mathcal{V}$, entonces se dirá que la variedad $\mathcal{V}$ es* n-distributiva.

Además, un álgebra $\mathbf{A}$ se dirá n-distributiva *si $\mathbb{V}(\mathbf{A})$ es n-distributiva.*

Lemma 153 *Dados un álgebra $\mathbf{A}$ y $1 \leq n_1 \leq n_2$, si $\mathbf{A}$ es n_1-distributiva entonces es n_2-distributiva.*

Proof. Sean $p_0(x,y,z), ..., p_{n_1}(x,y,z) \in T^\tau(X)$ tales que cumplen las condiciones de n_1-distributividad para $\mathbf{A}$. Luego, defínanse $p_{n_1+1}(x,y,z), ..., p_{n_2}(x,y,z)$ todos iguales a p_{n_1}. Resulta sencillo verificar que $p_0, ..., p_{n_2}$ cumplen las condiciones de n_2-distributividad. ■

Definition 154 *Sea $\mathcal{V}$ una variedad, y $M =_d M(x,y,z) \in T^\tau(X)$. Luego, se dirá que M, o $M(x,y,z)$, es un* término mayoritario *para $\mathcal{V}$ si*

$$\mathcal{V} \models M(x,x,y) \approx M(x,y,x) \approx M(y,x,x) \approx x.$$

De modo análogo se define un término mayoritario para un álgebra $\mathbf{A}$ en particular.

Theorem 155 *Una variedad $\mathcal{V}$ es 2-distributiva sii existe un término mayoritario M para $\mathcal{V}$.*

Proof. ($\Longrightarrow$) Como $\mathcal{V}$ es 2-distributiva, existen términos $p_0(x,y,z)$, $p_1(x,y,z)$ y $p_2(x,y,z)$ que cumplen que

$$V \models x \approx p_0(x,x,y) \approx p_1(x,x,y),$$

pues $p_0(x,y,z) \approx x$ y $p_i(x,x,y) \approx p_{i+1}(x,x,y)$ para todo i par; que

$$V \models x \approx p_1(x,y,x),$$

pues $p_i(x,y,x) \approx x$ para todo i; y que

$$V \models x \approx p_2(y,x,x) \approx p_1(y,x,x),$$

pues $p_2(x,y,z) \approx z$ y $p_i(y,x,x) \approx p_{i+1}(y,x,x)$ para todo i impar.

Luego,

$$\mathcal{V} \models p_1(x,x,y) \approx p_1(x,y,x) \approx p_1(y,x,x) \approx x,$$

y entonces p_1 es un término mayoritario para $\mathcal{V}$.

($\Longleftarrow$) Sea $M(x,y,z)$ un término mayoritario para $\mathcal{V}$, y sean $p_0(x,y,z) = x$, $p_1(x,y,z) = M(x,y,z)$, $p_2(x,y,z) = z$. Nótese entonces que

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\models x \approx p_0(x,y,z) \\ \mathcal{V} &\models z \approx p_2(x,y,z). \end{aligned}$$

Además,

$$\mathcal{V} \models x \approx p_i(x,y,x),$$

para todo i, y

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\models x \approx p_0(x,x,y) \approx p_1(x,x,y) \\ \mathcal{V} &\models x \approx p_2(y,x,x) \approx p_1(y,x,x). \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{V}$ es 2-distributiva. ■

Theorem 156 (Baker-Pixley) *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra finita de tipo τ con término mayoritario $M(x,y,z)$. Luego, para cada $n \geq 1$ y función*

$$f : A^n \to A$$

que preserva subálgebras de $\mathbf{A}^2$, existe un término $p =_d p(x_1, ..., x_n) \in T^\tau(X)$ que representa a f en $\mathbf{A}$ (i.e., $p^{\mathbf{A}} = f$).

Proof. En primer lugar, nótese que dada una subálgebra $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$,

$$C = \{(b, b) : b \in B\}$$

es un subuniverso de A^2, por lo que $\mathbf{C} \leq \mathbf{A}^2$ y entonces

$$f(C^n) \subseteq C.$$

Es decir, para cualquier n-upla $(b_1, ..., b_n) \in B^n$ deberá existir $b \in B$ tal que

$$f((b_1, b_1), ..., (b_n, b_n)) = (b, b);$$

esto significa que

$$f(b_1, ..., b_n) = b$$

por lo que

$$f(B^n) \subseteq B.$$

De este modo, para cualquier $(a_1, ..., a_n) \in A^n$ se tiene que

$$f(a_1, ..., a_n) \in \langle\{a_1, ..., a_n\}\rangle,$$

por lo que existe un término $p(x_1, ..., x_n) \in T^\tau(X)$ para el que

$$p(a_1, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n),$$

en virtud del Lema 14.

Además, para cualesquiera $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in A^n$, se tiene que

$$f((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) \in \langle\{(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)\}\rangle \leq \mathbf{A}^2$$

pues f preserva subálgebras de $\mathbf{A}^2$, por lo que también existe un término $q(x_1, ..., x_n) \in T^\tau(X)$ para el que

$$q((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) = f((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n))$$

obteniendo que

$$\begin{aligned} q(a_1, ..., a_n) &= f(a_1, ..., a_n) \\ q(b_1, ..., b_n) &= f(b_1, ..., b_n). \end{aligned}$$

Ahora, supóngase que para cualesquiera k elementos de A^n, $k \geq 2$, existe un término p que coincide con f en esos k elementos. Si $k = |A|^n$, entonces en particular p coincide con f en A^n, valiendo lo buscado. Si, en cambio, $k \neq |A|^n$, entonces sea S un conjunto cualquiera de $k+1$ elementos de A^n. Sean ahora $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n), (c_1, ..., c_n) \in S$, todos distintos, y términos $p_1 =_d p_1(x, y, z)$, $p_2 =_d p_2(x, y, z)$ y $p_3 =_d p_3(x, y, z)$ tales que p_1 coincide con f en el conjunto $S - \{(a_1, ..., a_n)\}$, p_2 coincide con f en $S - \{(b_1, ..., b_n)\}$ y p_3 coincide con f en $S - \{(c_1, ..., c_n)\}$. Puesto que para cualquier $(s_1, ..., s_n) \in S^n$

al menos 2 términos de entre p_1, p_2 y p_3 coinciden con f en $(s_1, ..., s_n)$, entonces el término $p =_d p(x_1, ..., x_n)$ definido como

$$p = M(p_1(x_1, ..., x_n), p_2(x_1, ..., x_n), p_3(x_1, ..., x_n))$$

coincide también con f en $(s_1, ..., s_n)$. En consecuencia, p coincide con f en todo S.

Iterando de este modo, se puede construir un término que coincida con f en cada punto (i.e., en A^n). ■

7.1. Variedades generadas y sus condiciones para ser de congruencias distributivas

A continuación, estudiaremos ciertas condiciones que garantizan la distributividad de congruencias para variedades generadas por álgebras cuyos universos son $\{0, 1\}$. Las operaciones finitarias sobre este conjunto serán llamadas *operaciones booleanas*. Como es usual, denotaremos con $\neg x$ al elemento correspondiente según

$$\neg x = \begin{cases} 0, \text{ si } x = 1 \\ 1, \text{ si } x = 0, \end{cases}$$

por $x \to y$ a

$$x \to y = \begin{cases} 0, \text{ si } x = 1 \text{ y } y = 0 \\ 1, \text{ c.c.}, \end{cases}$$

por $x \wedge y$ a

$$x \wedge y = \begin{cases} 1, \text{ si } x = y = 1 \\ 0, \text{ c.c.}, \end{cases}$$

por $x \vee y$ a

$$x \vee y = \begin{cases} 0, \text{ si } x = y = 0 \\ 1, \text{ c.c.}, \end{cases}$$

y por $x \leftrightarrow y$ a

$$x \leftrightarrow y = \begin{cases} 1, \text{ si } x = y \\ 0, \text{ c.c.}, \end{cases}$$

En consecuencia, y cuando el contexto lo determine sin ambigüedad, x denotará la función identidad, $\neg x$ denotará a la función

$$\begin{array}{cccc} \neg : & 2 & \to & 2 \\ & x & \to & \neg x, \end{array}$$

$x \to y$ a la función

$$\begin{array}{cccc} \to : & 2 \times 2 & \to & 2 \\ & (x, y) & \to & x \to y, \end{array}$$

$x \wedge y$ a la función

$$\begin{array}{rrcl} \wedge: & 2\times 2 & \to & 2 \\ & (x,y) & \to & x\wedge y, \end{array}$$

$x \vee y$ la función

$$\begin{array}{rrcl} \vee: & 2\times 2 & \to & 2 \\ & (x,y) & \to & x\vee y, \end{array}$$

y $x \leftrightarrow y$ la función

$$\begin{array}{rrcl} \leftrightarrow: & 2\times 2 & \to & 2 \\ & (x,y) & \to & x\leftrightarrow y. \end{array}$$

Lemma 157 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de* 2 *elementos.* $\mathbf{A}$ *es* 2*-distributiva sii la función* $(x\wedge y)\vee(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$ *tiene un término representante en* $\mathbf{A}$*.*

Proof. ($\Longrightarrow$) Supóngase que $\mathbf{A}$ es 2-distributiva. Luego, existen términos t_0, t_1, t_2, $t_i =_d t_i(x,y,z)$ para cada i, tales que

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{A} & \models & t_0(x,y,z)\approx x, \quad \mathbf{A}\models t_1(x,y,x)\approx x, \quad \mathbf{A}\models x\approx t_0(x,x,y)\approx t_1(x,x,y), \\ \mathbf{A} & \models & t_1(y,x,x)\approx t_2(y,x,x)\approx x, \quad \mathbf{A}\models t_2(x,y,z)\approx z. \end{array}$$

En particular, $\mathbf{A}\models t_1(x,y,x)\approx t_1(x,x,y)\approx t_1(y,x,x,)\approx x$, por lo que t_1 es un término mayoritario para $\mathbf{A}$. Pero entonces se debe dar que

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$t_1(x,y,z)$	0	0	0	1	0	1	1	1

Es fácil ver que $t_1^{\mathbf{A}}$ es la función $(x\wedge y)\vee(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$.

($\Longleftarrow$) Si existe un término $t =_d t(x,y,z)$ tal que $t^{\mathbf{A}}$ es $(x\wedge y)\vee(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$, entonces

$$\begin{array}{lcl} A & \models & t(x,x,y)\approx(x\wedge x)\vee(x\wedge z)\vee(x\wedge y)\approx x, \\ A & \models & t(x,y,x)\approx(x\wedge y)\vee(x\wedge x)\vee(y\wedge x)\approx x, \\ A & \models & t(y,x,x)\approx(y\wedge x)\vee(y\wedge x)\vee(x\wedge x)\approx x, \end{array}$$

por lo que t es un término mayoritario para $\mathbf{A}$. En virtud del Teorema 155, $\mathbf{A}$ es 2-distributiva. ■

Lemma 158 *Sea un álgebra* $\mathbf{A}$ *de* 2 *elementos.*

Luego, $\mathbf{A}$ *es* 3*-distributiva sii el par de funciones* $x\wedge(y\vee z)$ *y* $(x\vee\neg y)\wedge z$*, o el par de funciones* $x\vee(y\wedge z)$ *y* $(x\wedge\neg y)\vee z$*, tienen términos representantes en* $\mathbf{A}$*.*

Proof. ($\Longrightarrow$) Supóngase que $\mathbf{A}$ es 3-distributiva. Luego, existen términos t_0, t_1, t_2, t_3, $t_i =_d t_i(x, y, z)$ para cada i, tales que

$$\begin{array}{lll}\mathbf{A} & \models & t_0(x,y,z) \approx x, \quad \mathbf{A} \models t_1(x,x,y) \approx t_0(x,x,y) \approx x, \quad \mathbf{A} \models t_1(x,y,x) \approx x, \\ \mathbf{A} & \models & t_1(x,y,y) \approx t_2(x,y,y), \quad \mathbf{A} \models t_2(x,x,y) \approx t_3(x,x,y) \approx y, \\ \mathbf{A} & \models & t_3(x,y,x) \approx x, \quad \mathbf{A} \models t_3(x,y,z) \approx z.\end{array}$$

Tomando $t_0 = x$ y $t_3 = z$, buscaremos t_1 y t_2 tales que

$$\begin{array}{lll}\mathbf{A} & \models & t_1(x,x,y) \approx t_1(x,y,x) \approx x \\ \mathbf{A} & \models & t_2(x,x,y) \approx y\,, \quad \mathbf{A} \models t_2(x,y,x) \approx x.\end{array}$$

Esto determina a $t_1^{\mathbf{A}}$ y $t_2^{\mathbf{A}}$ como sigue:

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$t_1(x,y,z)$	0	0	0	?	?	1	1	1
$t_2(x,y,z)$	0	1	0	?	?	1	0	1

Como además se debe cumplir que $\mathbf{A} \models t_1(x,y,y) \approx t_2(x,y,y)$, consideramos los 4 casos posibles:

(1) Sean $t_1^{\mathbf{A}}(0,1,1) = t_2^{\mathbf{A}}(0,1,1) = 0$ y $t_1^{\mathbf{A}}(1,0,0) = t_2^{\mathbf{A}}(1,0,0) = 0$. Aquí se tienen $t_1^{\mathbf{A}} = x \wedge (y \vee z)$ y $t_2^{\mathbf{A}} = (x \vee \neg y) \wedge z$, valiendo lo buscado.

(2) Sean $t_1^{\mathbf{A}}(0,1,1) = t_2^{\mathbf{A}}(0,1,1) = 0$ y $t_1^{\mathbf{A}}(1,0,0) = t_2^{\mathbf{A}}(1,0,0) = 1$. Aquí se tienen $t_1^{\mathbf{A}} = x$ y $t_2^{\mathbf{A}} = (z \wedge ((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y))) \vee (x \wedge \neg y)$. Nótese que el término $m = t_2(x, t_2(x,y,z), z)$ es tal que

$$\begin{array}{lll}A & \models & m(x,x,y) \approx t_2(x, t_2(x,x,y), y) \approx t_2(x,y,y) \approx x, \\ A & \models & m(x,y,x) \approx t_2(x, t_2(x,y,x), x) \approx t_2(x,x,x) \approx x, \\ A & \models & m(y,x,x) \approx t_2(y, t_2(y,x,x), x) \approx t_2(y,y,x) \approx x;\end{array}$$

i.e., existe un término mayoritario para $\mathbf{A}$, y luego el Teorema 155 afirma que $\mathbf{A}$ es 2-distributiva. En virtud del Lema 153, $\mathbf{A}$ es 3-distributiva.

(3) Sean $t_1^{\mathbf{A}}(0,1,1) = t_2^{\mathbf{A}}(0,1,1) = 1$ y $t_1^{\mathbf{A}}(1,0,0) = t_2^{\mathbf{A}}(1,0,0) = 0$. Aquí se tienen $t_1^{\mathbf{A}} = (z \wedge ((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y))) \vee (x \wedge \neg y)$ y $t_2^{\mathbf{A}} = z$. Al igual que en (2), $t_1(x, t_1(x,y,z), z)$ es un término mayoritario para $\mathbf{A}$, por lo que $\mathbf{A}$ es 2-distributiva y luego es 3-distributiva.

(4) Sean $t_1^{\mathbf{A}}(0,1,1) = t_2^{\mathbf{A}}(0,1,1) = 1$ y $t_1^{\mathbf{A}}(1,0,0) = t_2^{\mathbf{A}}(1,0,0) = 1$. Aquí se tienen $t_1^{\mathbf{A}} = x \vee (y \wedge z)$ y $t_2^{\mathbf{A}} = (x \wedge \neg y) \vee z$, y entonces vale lo buscado.

($\Longleftarrow$) En primer lugar, sean términps t, s tales que $t^{\mathbf{A}} = x \wedge (y \vee z)$ y $s^{\mathbf{A}} = (x \vee \neg y) \wedge z$. Luego, defínanse $t_0 = x$, $t_1 = t$, $t_2 = s$, $t_3 = z$. Como

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &\models x \approx t_0(x,y,z) \\
\mathbf{A} &\models z \approx t_3(x,y,z) \\
\mathbf{A} &\models x \approx t_i(x,y,x), \text{ para cada } i \\
\mathbf{A} &\models x \approx t_0(x,x,y) \approx t_1(x,x,y) \\
\mathbf{A} &\models t_1(x,y,y) \approx t_2(x,y,y) \\
\mathbf{A} &\models t_2(x,x,y) \approx t_3(x,x,y) \approx y,
\end{aligned}$$

A es 3-distributiva.

Por otro lado, sean términos t, s tales que $t^{\mathbf{A}} = x \vee (y \wedge z)$ y $s^{\mathbf{A}} = (x \wedge \neg y) \vee z$. Luego, defínanse $t_0 = x$, $t_1 = t$, $t_2 = s$, $t_3 = z$. Como aquí también valen las identidades de Δ_3, **A** es 3-distributiva. ■

Lemma 159 *Sea un álgebra* **A** *de* 2 *elementos.*

Luego, **A** *es* 4*-distributiva sii alguna de las funciones* $x \wedge (y \vee z)$, $(x \vee \neg y) \wedge z$, $x \vee (y \wedge z)$ *o* $(x \wedge \neg y) \vee z$, *tiene un término representante en* **A**.

Proof. ($\Longrightarrow$) Supóngase que **A** es 4-distributiva; es decir, existen términos $t_0, ..., t_4$, $t_i =_d t_i(x,y,z)$ para cada i, que cumplen en particular que

$$\mathbf{A} \models x \approx t_1(x,x,y) \approx t_1(x,y,x),$$

volviendo a encontrar aquí 4 casos posibles para $t_1^{\mathbf{A}}$:

(1) Si $t_1^{\mathbf{A}} = x \wedge (y \vee z)$, vale lo buscasdo.

(2) Si $t_1^{\mathbf{A}} = x$, se toma $t_4^{\mathbf{A}} = z$ y se analizan los casos posibles para $t_2^{\mathbf{A}}$ y $t_3^{\mathbf{A}}$, en vistas de satisfacer 3-distributividad:

- Si $t_2^{\mathbf{A}} = x \wedge (\neg y \vee z)$ y $t_3^{\mathbf{A}} = (x \vee y) \wedge z$, entonces $t_2(z,y,x)^{\mathbf{A}} = (x \vee \neg y) \wedge z$, y vale lo buscado.
- Si $t_2^{\mathbf{A}} = x$ y $t_3 = m(x,y,z)$, un término mayoritario para **A**. Por Lema 153, **A** es 3-distributiva y luego Lema 158 afirma que vale lo buscado.
- Si $t_2^{\mathbf{A}} = (z \wedge ((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y))) \vee (x \wedge \neg y)$, entonces **A** es 2-distributiva (Lema 157), por lo que es 3-distributiva (Lema 153) y vale lo buscado (Lema 158).
- Si $t_2^{\mathbf{A}} = x \vee (\neg y \wedge z)$ y $t_3^{\mathbf{A}} = (x \wedge y) \vee z$, entonces $t_2(z,y,x)^{\mathbf{A}} = x \vee (y \wedge z)$, valiendo lo buscado.

(3) Si $t_1 = m(x,y,z)$, un término mayoritario para **A**, entonces es 2-distributiva (Lema 155), luego 3-distributiva (Lema 153) y vale lo buscado (Lema 158).

(4) Si $t_1^{\mathbf{A}} = x \vee (y \wedge z)$, vale lo buscado.

($\Longleftarrow$) Supóngase que existe un término t tal que $t^{\mathbf{A}}$ representa a a alguna de las funciones en cuestión. Es posible demostrar que si $t^{\mathbf{A}} = x \wedge (y \vee z)$, entonces existe un término $\bar{t}$ tal que $\bar{t}^{\mathbf{A}} = (x \vee \neg y) \wedge z$. Del mismo modo si $t^{\mathbf{A}} = (x \vee \neg y) \wedge z$, con $\bar{t}^{\mathbf{A}} = x \wedge (y \vee z)$. Resultados análogos se pueden conseguir para $t^{\mathbf{A}} = x \vee (y \wedge z)$ y para $t^{\mathbf{A}} = (x \wedge \neg y) \vee z$, en relación a $\bar{t}^{\mathbf{A}} = (x \wedge \neg y) \vee z$ y $t^{\mathbf{A}} = x \vee (y \wedge z)$, respectivamente.

Aquí sólo se ejemplifica el caso en que $t^{\mathbf{A}} = (x \vee \neg y) \wedge z$: nótese que el término $t(y, t(y, z, x), x)$ cumple que $t(y, t(y, z, x), x)^{\mathbf{A}} = x \wedge (y \vee \neg(x \wedge (y \vee \neg z))) = x \wedge (y \vee z)$. Luego, en virtud del Lema 158, $\mathbf{A}$ es 3-distributiva, y luego es 4-distributiva (Lema 153). ■

Lemma 160 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de* 2 *elementos y* n*-distributiva, con* $n \geq 2$. *Luego,* $\mathbf{A}$ *es* 4*-distributiva.*

Proof. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra n-distributiva, con $n \geq 2$. Si $n = 2$ o $n = 3$, entonces $\mathbf{A}$ es también 4-distributiva, por Lema 153. Ahora, si $n > 4$, entonces existen términos $t_0, ..., t_n$, $t_i =_d t_i(x, y, z)$ para cada i, tales que, en particular,

$$A \models t_1(x, x, y) \approx t_1(x, y, x) \approx x.$$

Esto determina $t_1^{\mathbf{A}}$ en 6 de sus 8 tuplas del dominio, habilitando el análisis en 4 casos posibles:

(1) Si $t_1^{\mathbf{A}}(0, 1, 1) = 0$ y $t_1^{\mathbf{A}}(1, 0, 0) = 0$, entonces $t_1^{\mathbf{A}} = x \wedge (y \vee z)$. Por lo visto en Lema 159, es dado concluir que $\mathbf{A}$ es 4-distributiva.

(2) Si $t_1^{\mathbf{A}}(0, 1, 1) = 1$ y $t_1^{\mathbf{A}}(1, 0, 0) = 0$, entonces $t_1^{\mathbf{A}} = (z \wedge ((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y))) \vee (x \wedge \neg y)$ y $t_1(x, t_1(x, y, z), z)$ es un término mayoritario para $\mathbf{A}$; luego $\mathbf{A}$ es 2-distributiva (Lema 155), y finalmente es 4-distributiva (Lema 153).

(3) Si $t_1^{\mathbf{A}}(0, 1, 1) = 1$ y $t_1^{\mathbf{A}}(1, 0, 0) = 1$, entonces $t_1^{\mathbf{A}} = x \vee (y \wedge z)$. Por lo visto en Lema 159, es dado concluir que $\mathbf{A}$ es 4-distributiva.

(4) Si $t_1^{\mathbf{A}}(0, 1, 1) = 0$ y $t_1^{\mathbf{A}}(1, 0, 0) = 1$, entonces $t_1^{\mathbf{A}} = x$. Esto habilita el análisis en 4 casos posibles para t_2, en virtud de

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$t_1(x, y, z)$	0	0	0	0	1	1	1	1
$t_2(x, y, z)$	0	?	0	0	1	1	?	1

- Si $t_2^{\mathbf{A}}(0, 0, 1) = 0$ y $t_2^{\mathbf{A}}(1, 1, 0) = 0$, entonces $t_2^{\mathbf{A}} = x \wedge (\neg y \vee z)$. Luego, $t_2(z, y, x)$ es tal que $t_2(z, y, x)^{\mathbf{A}} = (x \vee \neg y) \wedge z$, y Lema 159 dice que $\mathbf{A}$ es 4-distributiva.

- Si $t_2^{\mathbf{A}}(0,0,1) = 1$ y $t_2^{\mathbf{A}}(1,1,0) = 0$, entonces $t_2^{\mathbf{A}} = (z \wedge ((x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y))) \vee (x \wedge \neg y)$ y $t_2(x, t_2(x,y,z), z)$ es un término mayoritario para $\mathbf{A}$; luego $\mathbf{A}$ es 2-distributiva (Lema 155), y finalmente es 4-distributiva (Lema 153)..
- Si $t_2^{\mathbf{A}}(0,0,1) = 1$ y $t_2^{\mathbf{A}}(1,1,0) = 1$, entonces $t_2^{\mathbf{A}} = x \vee (\neg y \wedge z)$. Por lo visto en Lema 159, $\mathbf{A}$ es 4-distributiva.
- Si $t_2^{\mathbf{A}}(0,0,1) = 0$ y $t_2^{\mathbf{A}}(1,1,0) = 1$, entonces $t_2^{\mathbf{A}} = x$. Aquí, observar que la n-distributividad de $\mathbf{A}$ se convierte en $(n-2)$-distributividad, ya que t_3 actúa de t_1, t_4 de t_2 y así sucesivamente. Puesto que todos los demás casos están cubiertos, y este proceso de pasar de n-distributividad a $(n-2)$-distributividad finaliza en una cantidad finita de pasos, se concluye que vale lo buscado.

■

Corollary 161 *Un álgebra* $\mathbf{A}$ *de* 2 *elementos es de congruencias distributivas sii es* 4*-distributiva.*

Proof. La prueba es inmediata de 153 y 160. ■

Theorem 162 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de* 2 *elementos.* $\mathbf{A}$ *es de congruencias distributivas sii existe un término que representa en* $\mathbf{A}$ *alguna de las siguientes operaciones booleanas*

$$\begin{aligned} &(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z), \\ &x \wedge (y \vee z), \\ &(x \vee \neg y) \wedge z, \\ &x \vee (y \wedge z), \\ &(x \wedge \neg y) \vee z. \end{aligned}$$

Proof. ($\Longrightarrow$) En virtud del Corolario 161 y del Lema 159, existe un término t para el que $t^{\mathbf{A}} = x \wedge (y \vee z)$, o $t^{\mathbf{A}} = (x \vee \neg y) \wedge z$, o $t^{\mathbf{A}} = x \vee (y \wedge z)$, o $t^{\mathbf{A}}(x,y,z) = (x \wedge \neg y) \vee z$.

($\Longleftarrow$) Corolario directo de Lemas 157 y 159. ■

8. Clases algebraicamente expandibles

Esta sección presenta los conceptos más importantes del Trabajo; a saber, AE-sentencias, clases algebraicamente expandibles, clones de funciones algebraicas, y productos subdirectos globales.

La sección 8.5 presenta un ejemplo de aplicación en la determinación de las subclases algebraicamente expandibles de la variedad de los reticulados distributivos acotados. Este ejemplo será altamente instructivo de la manera en que las subclases algebraicamente expandibles de una variedad pueden ser obtenidas en función de los conceptos presentados en esta sección. El Teorema

174 enuncia la preservación de AE-sentencias bajo la formación de productos subdirectos globales, lo cual es de crucial importancia y motiva el estudio de la relación entre estos dos conceptos. Otro Teorema de interés es el Teorema 182, que postula la equivalencia a términos entre distintas axiomatizaciones con AE-sentencias de una clase de álgebras, demostrando la solidez de este tipo de axiomatizaciones.

8.1. AE-sentencias

Definition 163 *Sea τ un tipo algebraico; i.e., sin símbolos de relación. Una AE-sentencia de tipo τ es una palabra de la forma*

$$\varphi = \forall x_1, ..., x_n \exists! z_1, ..., z_m \left(\bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, \vec{z}) \equiv t_l(\vec{x}, \vec{z}) \right),$$

con $n \geq 1$, $m \geq 1$ y $s_l, t_l \in T^\tau$ para $1 \leq l \leq k$. Denotaremos usualmente por $n(\varphi)$ y $m(\varphi)$ a n y m, respectivamente. Además, llamaremos matriz de φ *a*

$$\varepsilon_\varphi = \bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, \vec{z}) \equiv t_l(\vec{x}, \vec{z}).$$

Nótese que φ no es, estrictamente hablando, una fórmula de tipo τ. Diremos entonces que un álgebra $\mathbf{A}$ satisface φ, en símbolos $\mathbf{A} \vDash \varphi$, si y sólo si

$$\mathbf{A} \vDash U(\varphi) \wedge E(\varphi),$$

siendo

$$\begin{aligned} U(\varphi) = \quad & \forall x_1 ... x_n \forall z_1 ... z_m \forall y_1 ... y_m \\ & \left(\bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, \vec{z}) \equiv t_l(\vec{x}, \vec{z}) \wedge \bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, \vec{y}) \equiv t_l(\vec{x}, \vec{y}) \right) \rightarrow (\vec{z} \equiv \vec{y}), \\ E(\varphi) = \quad & \forall x_1 ... x_n \exists z_1 ... z_m \bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, \vec{z}) \equiv t_l(\vec{x}, \vec{z}), \end{aligned}$$

y observando que $U(\varphi), E(\varphi) \in S^\tau$ (sentencias de tipo τ). Llamaremos a $U(\varphi)$ la unicidad de φ, *y a $E(\varphi)$ la* existencia de φ.

Definition 164 *Sea $\varphi = \forall x_1, ..., x_n \exists! z_1, ..., z_m \bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{x}, \vec{z}) \equiv t_l(\vec{x}, \vec{z})$ una AE-sentencia de tipo τ, y sea $\mathbf{A}$ un álgebra de tipo τ tal que $\mathbf{A} \models \varphi$. La* función definida por φ en $\mathbf{A}$ *es el mapeo*

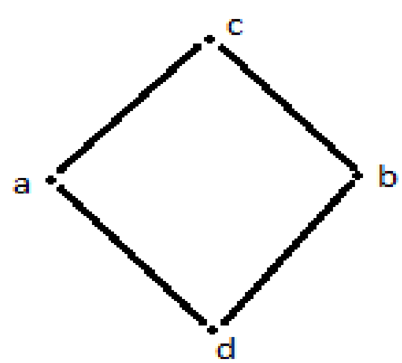
$$\begin{array}{ccl} A^n & \rightarrow & A^m \\ \vec{a} & \mapsto & \text{el único } \vec{b} \in A^m \text{ tal que } \bigwedge_{l=1}^{k} s_l(\vec{a}, \vec{b}) = t_l(\vec{a}, \vec{b}). \end{array}$$

Escribiremos $[\varphi]^{\mathbf{A}}$ para denotar esta función, y con $[\varphi]_j^{\mathbf{A}}$ denotaremos la composición $\pi_j \circ [\varphi]^{\mathbf{A}}$, donde $\pi_j : A^m \rightarrow A$ es la j-ésima proyección canónica, para $j = 1, ..., m$.

Además, una función algebraica f *en* $\mathbf{A}$ *será una función de la forma* $f = [\psi]_j^{\mathbf{A}}$ *para alguna AE-sentencia* ψ *tal que* $\mathbf{A} \models \psi$. *Más aún, si* $m(\psi) = 1$, *entonces diremos que* f *es* mono-algebraica *y (cuando no haya ambigüedad) escribiremos* $[\psi]^{\mathbf{A}}$ *en lugar de* $[\psi]_1^{\mathbf{A}}$.

Proposition 165 *Las AE-sentencias no son siempre preservadas por subálgebras.*

Proof. Sea $\mathbf{A}$ el reticulado acotado asociado al siguiente diagrama de Hasse:



Sea además

$$\varphi = \forall x \exists! z \ ((s(x,z) \equiv 1) \wedge (i(x,z) \equiv 0)).$$

Nótese que $\mathbf{A} \models \varphi$, y que $[\varphi]^{\mathbf{A}}$ es la función complemento en $\mathbf{A}$. Sin embargo, la subálgebra $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ tal que $B = \{d, a, c\}$ cumple que $\mathbf{B} \not\models E(\varphi)$, pues para $x = a$ no existe un complemento en B. ■

Proposition 166 *Las AE-sentencias no son siempre preservadas por cocientes.*

Proof. Sea $\tau = (\emptyset, \{f\}, \emptyset, a)$ tal que $a(f) = 1$, y sea $\mathbf{A}$ una estructura de tipo τ tal que $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $f^{\mathbf{A}}(a_1) = a_1$, $f^{\mathbf{A}}(a_2) = a_3$, y $f^{\mathbf{A}}(a_3) = a_2$. Sea además

$$\varphi = \forall x \exists! y \ (f(y) \equiv y).$$

Nótese que $\mathbf{A} \models \varphi$, y que $[\varphi]^{\mathbf{A}}$ es una función que constantemente vale el único punto fijo de $\mathbf{A}$ (a saber, a_1). Sin embargo, para $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ tal que

$$\theta = \{(a_i, a_i) : i = 1, 2, 3\} \cup \{(a_2, a_3), (a_3, a_2)\}$$

se da que $\mathbf{A}/\theta \not\models U(\varphi)$, en vistas de que no existe un único punto fijo en $\mathbf{A}/\theta$. ■

Lemma 167 *Sea* φ *una AE-sentencia. Si* $\mathbf{A} \models \varphi$, *y* $\mathbf{B}$ *es subálgebra e imagen homomórfica de* $\mathbf{A}$, *entonces* $\mathbf{B} \models \varphi$.

Proof. Puesto que $E(\varphi)$ es una fórmula positiva, es preservada por imágenes homomórficas (Lema 41). Además, puesto que $U(\varphi)$ es una fórmula universal, es preservada por subálgebras (Lema 39). Luego, $\mathbf{B} \models U(\varphi) \wedge E(\varphi)$. ∎

Lemma 168 *Si una AE-sentencia φ de tipo τ_{RET} vale en un reticulado distributivo no trivial, entonces vale en $\mathbf{2} \models \varphi$.*

Lemma 169 *Sean $\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$ una familia indexada de álgebras de tipo τ y φ una AE-sentencia de tipo τ, tales que $\mathbf{A}_i \vDash \varphi$, para cada $i \in I$. Luego, $\prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle \vDash \varphi$, y para cada $i \in I$, $j \in \{1, ..., m(\varphi)\}$ y $(p_1, ..., p_{n(\varphi)}) \in (\prod\langle A_i : i \in I \rangle)^{n(\varphi)}$ se cumple que*

$$[\varphi]_j^{\prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle}(p_1, ..., p_n)(i) = [\varphi]_j^{\mathbf{A}_i}(p_1(i), ..., p_n(i)).$$

8.2. Productos subdirectos globales

Definition 170 *Dados $x, y \in \Pi\langle A_i : i \in I \rangle$, sea*

$$E(x, y) = \{i \in I : x(i) = y(i)\}.$$

El conjunto $E(x, y)$ es llamado el ecualizador *de x* e *y.*

Definition 171 *Dada $A \subseteq \Pi\langle A_i : i \in I \rangle$, definamos*

$$\sigma^A = \{\bigcap_{i=1}^{i=k} E(x_i, y_i) : x_i, y_i \in A,\ i = 1, ..., k,\ k \geq 1\}.$$

Luego, un producto subdirecto $\mathbf{A} \subseteq_{sd} \Pi\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$ será llamado global*, y se denotará $\mathbf{A} \subseteq_g \Pi\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$, cuando se dé la siguiente propiedad*

PP *(Propiedad Patchwork) Si $\{F_r : r \in R\} \subseteq \sigma^A$* y *$\{x_r : r \in R\} \subseteq A$* son tales que $\bigcup\{F_r : r \in R\} = I$ y para cada $r, s \in R$, x_r y x_s coinciden en $F_r \cap F_s$, entonces existe un $x \in A$ tal que $x(i) = x_r(i)$, cada vez que $i \in F_r$ y $r \in R$.

Proposition 172 *Sea $\mathbf{L}$ un reticulado acotado. Supongamos que existe un conjunto de índices I tal que $\mathbf{L} \subseteq_g \mathbf{2}^I = \Pi\langle \mathbf{2} : i \in I \rangle$, siendo $\mathbf{2}$ la cadena de 2 elementos. Luego, $\mathbf{L}$ es complementado.*

Proof. Sean $\mathbf{L} \subseteq_g \mathbf{2}^I$, $x \in L$, $R = \{1, 2\}$, $F_1 = E(x, 0)$, $F_2 = E(x, 1)$, $x_1 = 1^{\mathbf{2}^I}$, y $x_2 = 0^{\mathbf{2}^I}$.

Puesto que $\mathbf{L}$ cumple la Propiedad Patchwork, que $\bigcup\{F_r : r \in R\} = \{i \in I : x(i) = 0^{\mathbf{2}}\} \cup \{i \in I : x(i) = 1^{\mathbf{2}}\} = I$, y que x_1 y x_2 coinciden en $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, entonces existe $y \in L$ tal que $y(i) = x_1(i) = 1^{\mathbf{2}}, \forall i \in F_1$, y $y(i) = x_2(i) = 0^{\mathbf{2}}, \forall i \in F_2$. Pero entonces y es el complemento de x, ya que $x(i) = 0^{\mathbf{2}}, \forall i \in F_1$, y $x(i) = 1^{\mathbf{2}}, \forall i \in F_2$. ∎

Lemma 173 *Si $\mathbf{A} = \prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$, entonces $\mathbf{A}$ es un producto subdirecto global de $\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$.*

Proof. Sean $\{F_r : r \in R\} \subseteq \sigma^{\prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle}$ y $\{x_r : r \in R\} \subseteq \prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$ tales que $\bigcup\{F_r : r \in R\} = I$. Supongamos además que para cualesquiera $j, k \in R$ se da que $x_j(i) = x_k(i)$, $\forall i \in (F_j \cap F_k)$.

Luego, definimos $x \in \Pi\langle A_i : i \in I\rangle$ como $x(i) = x_s(i)$, con $s \in R$ tal que $i \in F_s$. Nótese que ésta es una buena definición, ya que si $s_1, s_2 \in R$ cumplen que $i \in (F_{s_1} \cap F_{s_2})$, entonces $x_{s_1}(i) = x_{s_2}(i)$, $\forall i \in (F_{s_1} \cap F_{s_2})$, según lo supuesto.

Por lo tanto, $\prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle \subseteq_g \prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$. ■

Theorem 174 *Supongamos que* $\mathbf{A} \subseteq_g \prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$ *y sea* φ *una AE-sentencia. Si* $\mathbf{A}_i \vDash \varphi$*, para cada* $i \in I$*, entonces* $\mathbf{A} \vDash \varphi$*.*

Proof. Supongamos que $A_i \vDash \varphi$, para cada $i \in I$. Nótese que dados $a_1, ..., a_n \in A$ y $i \in I$, existen únicos $d_i^1, ..., d_i^m \in A_i$ para los que

$$\begin{aligned} A_i &\vDash \varepsilon_\varphi[a_1(i), ..., a_n(i), d_i^1, .., d_i^m] \\ &= \bigwedge_{j=1}^{k} p_j[\vec{a}(i), \vec{d_i}] \equiv q_j[\vec{a}(i), \vec{d_i}]. \end{aligned}$$

En consecuencia, como $\pi_i(A) = A_i$, ya que $\mathbf{A}$ es producto subdirecto de $\Pi\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$, para cada $i \in I$ existen $b_i^1, ..., b_i^m \in A$ para los que

$$b_i^j(i) = d_i^j, \text{ para cada } j \in \{1, .., m\}.$$

A continuación, sea $R = I$ y defínase

$$\begin{aligned} \{F_r : r \in R\} = &\ \{F_i : i \in I\} \\ = &\ \{\bigcap_{j=1}^{k} E(p_j[\vec{a}, \vec{b}_i], q_j[\vec{a}, \vec{b}_i]) : i \in I\} \end{aligned}$$

Nótese que para cada $i \in I$ tenemos que $i \in F_i$, por lo que además $\bigcup\{F_r : r \in R\} = I$.

Sea ahora $l \in \{1, ..., m\}$ y defínase

$$\{x_r : r \in R\} = \{b_i^l : i \in I\} \subseteq A,$$

observando que si $i \in (F_{r_1} \cap F_{r_2})$, con $r_1, r_2 \in I$, entonces

$$\mathbf{A}_i \vDash \bigwedge_{j=1}^{k} p_j[\vec{a}(x), \vec{b}_{r_1}(x)] \equiv q_j[\vec{a}(x), \vec{b}_{r_2}(x)]$$

y

$$\mathbf{A}_i \vDash \bigwedge_{j=1}^{k} p_j[\vec{a}(x), \vec{b}_{r_2}(x)] \equiv q_j[\vec{a}(x), \vec{b}_{r_2}(x)],$$

por lo que $\vec{b}_{r_1} = \vec{b}_{r_2}$; en particular, $b_{r_1}^l = b_{r_2}^l$.

En virtud de que $\mathbf{A}$ satisface la Propiedad Patchwork, existe $b^l \in A$ para el que

$$b^l(i) = b_i^l(i), \text{ para cada } i \in I.$$

Más aún, como esto es válido para cada $l \in \{1, ..., m\}$, se concluye que existen $b^1, ..., b^m \in A$ tales que

$$\mathbf{A} \models \bigwedge_{j=1}^{k} p_j[\vec{a}, \vec{b}] \equiv q_j[\vec{a}, \vec{b}];$$

i.e.,

$$\mathbf{A} \models E(\varphi).$$

Por último, supongamos que existen $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m, c_1, ..., c_m \in A$ tales que

$$\mathbf{A} \models \bigwedge_{j=1}^{k} p_j[\vec{a}, \vec{b}] \equiv q_j[\vec{a}, \vec{b}]$$

y

$$\mathbf{A} \models \bigwedge_{j=1}^{k} p_j[\vec{a}, \vec{c}] \equiv q_j[\vec{a}, \vec{c}].$$

Esto implica que para cada $i \in I$ vale que

$$\mathbf{A}_i \models \bigwedge_{j=1}^{k} p_j[\vec{a}(i), \vec{b}(i)] \equiv q_j[\vec{a}(i), \vec{b}(i)]$$

y

$$\mathbf{A}_i \models \bigwedge_{j=1}^{k} p_j[\vec{a}(i), \vec{c}(i)] \equiv q_j[\vec{a}(i), \vec{c}(i)],$$

lo que es consecuencia de que para cada $i \in I$, $\vec{b}(i) = \vec{c}(i)$. Luego, $\vec{b} = \vec{c}$ y entonces$\mathbf{A} \models U(\varphi)$.

Por lo tanto, $\mathbf{A} \models \varphi$. ■

8.3. Clon de las funciones algebraicas

Theorem 175 $\mathrm{Clon}_{Alg}(\mathbf{A}) = \{[\varphi]_j^{\mathbf{A}} : \varphi$ *es una AE-sentencia,* $\mathbf{A} \models \varphi$, *y* $j \in \{1, ..., m\}\}$ *es un clon sobre A.*

Proof. En primer lugar, nótese que para cada $n \geq 1$ se da que

$$\mathbf{A} \models \varphi = \forall x_1 ... x_n \exists! z_1 ... z_n (\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \equiv z_i),$$

y $[\varphi]_j^{\mathbf{A}} = \pi_j^n$, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, por lo que

$$\{\pi_j^n : j \in \{1, ..., n\}\} \subseteq \mathrm{Clon}_{Alg}(\mathbf{A}).$$

Ahora, sean $\{f_1, ..., f_{k+1}\} \subseteq \mathrm{Clon}_{Alg}(\mathbf{A})$ tales que $f_l : A^n \to A^{m_l}$, con $l \in \{1, ..., k\}$, y $f_{k+1} : A^k \to A^{m_{k+1}}$. Luego, existen AE-sentencias $\varphi_1, ..., \varphi_{k+1}$ y $j_1, ..., j_{k+1}$ tales que $n(\varphi_l) = n$ y $j_l \in \{1, ..., m(\varphi_l)\}$, para cada $l \in \{1, ..., k\}$, $n(\varphi_{k+1}) = k$ y $j_{k+1} \in \{1, ..., m_{k+1}\}$, y para cada $l \in \{1, ..., k+1\}$.

$$\begin{aligned} \varphi_l &= \forall x_1...x_n \exists! z_1^l, ..., z_{m_l}^l \left(\bigwedge_{u \in \{1,...,v_l\}} s_u^l(\vec{x}, z_1^l, ..., z_{m_l}^l) \equiv t_u^l(\vec{x}, z_1^l, ..., z_{m_l}^l) \right), \\ f_l &= [\varphi_l]_{j_l}^{\mathbf{A}}. \end{aligned}$$

Nótese que en esta consideración están incluidas las funciones en $\mathrm{Clon}(\mathbf{A})$, ya que para cada $t \in T^\tau(x_1, ..., x_n)$,

$$\gamma_t = \forall x_1...x_n \exists! z\, (z \equiv t(\vec{x}))$$

es tal que $t^{\mathbf{A}} = [\gamma]^{\mathbf{A}}$. Definiendo $\vec{z}^i = z_1^i...z_{m_i}^i$ para cada $i = 1, ..., k+1$, véase entonces que

$$\begin{aligned} \psi = \forall x_1...x_n \exists! \vec{z}^1...\vec{z}^{k+1} & \\ & \left[\bigwedge_{\substack{i \in \{1,..,k\} \\ u \in \{1,...,v_k\}}} s_u^i(\vec{x}, \vec{z}^i) \equiv t_u^i(\vec{x}, \vec{z}^i) \right] \\ \wedge \left[\bigwedge_{u \in \{1,...,v_{k+1}\}} s_u^{k+1}(z_{j_1}^1, ..., z_{j_k}^k, \vec{z}^{k+1}) \equiv t_u^{k+1}(z_{j_1}^1, ..., z_{j_k}^k, \vec{z}^{k+1}) \right] &, \end{aligned}$$

es tal que

$$[\psi]_{j_{k+1}}^{\mathbf{A}} = [\varphi_{k+1}]_{j_{k+1}}^{\mathbf{A}} \circ ([\varphi_1]_{j_1}^{\mathbf{A}}, ..., [\varphi_k]_{j_k}^{\mathbf{A}}).$$

■

Llamaremos a $\mathrm{Clon}_{Alg}(\mathbf{A})$ el *clon de las funciones algebraicas sobre* $\mathbf{A}$. Nótese que $\mathrm{Clon}(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Clon}_{Alg}(\mathbf{A})$, ya que para cada $t \in T^\tau(x_1, ..., x_n)$

$$t^{\mathbf{A}} = [\forall x_1...x_n \exists! z\ (t(x_1, ..., x_n) \equiv z)]_1^{\mathbf{A}}.$$

8.4. Clases algebraicamente expandibles

Definition 176 *Diremos que una clase de álgebras $\mathcal{C}$ es* algebraicamente expandible *(*clase AE*) cuando haya un conjunto de AE-sentencias Γ tal que $\mathcal{C} = Mod(\Gamma)$.*

Definition 177 *Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{C}$ clases de álgebras tales que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$. Diremos que $\mathcal{S}$ es una* subclase AE de $\mathcal{C}$ *si $\mathcal{S}$ es axiomatizable por AE-sentencias relativamente a $\mathcal{C}$; i.e. si existe un conjunto de AE-sentencias $-$ tal que $\mathcal{S} = \mathcal{C} \cap Mod(-)$. Para este caso, introducimos la notación*

$$Mod_{\mathcal{C}}(-) = \mathcal{C} \cap Mod(-).$$

Nótese que $\mathcal{S}$ puede ser una subclase AE de $\mathcal{C}$ sin ser $\mathcal{S}$ misma una clase AE.

Remark 178 *Toda identidad de tipo τ puede escribirse como una AE-sentencia de tipo τ. Por ejemplo, la identidad*

$$t(x_1, ..., x_n) \approx s(x_1, ..., x_n)$$

es equivalente a la sentencia

$$\forall x_1, ..., x_n \exists! z_1 \; z_1 = x_1 \wedge t(x_1, ..., x_n) = s(x_1, ..., x_n).$$

Luego, toda variedad (i.e., toda clase de álgebras de la forma $Mod(\Sigma)$, con $\Sigma \subseteq Id_\tau$) es una clase AE.

Definition 179 *Sean $\mathcal{V}$ una variedad de álgebras de tipo τ, Σ un conjunto de AE-sentencias, y $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}$ una subclase AE de $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{K} = Mod(\Sigma)$. Se define el tipo τ_Σ como la* expansión algebraica *de τ agregando nuevos símbolos $n(\varphi)$-arios de función $f_1^\varphi, ..., f_{m(\varphi)}^\varphi$ para cada $\varphi \in \Sigma$.*

Además, para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ sea $\mathbf{A}_\Sigma$ la expansión de $\mathbf{A}$ al tipo τ_Σ, interpretando cada símbolo de función f_j^φ como $[\varphi]_j^{\mathbf{A}}$.

Finalmente, defínase la expansión algebraica de K relativa a Σ *como la siguiente clase de τ_Σ-álgebras:*

$$\mathcal{K}_\Sigma = \{\mathbf{A}_\Sigma : \mathbf{A} \in \mathcal{K}\}.$$

Remark 180 *Nótese que*

1. *Σ es también un conjunto de AE-sentencias de tipo τ_Σ.*

2. *$\mathcal{K}_\Sigma$ es siempre una cuasivariedad; efectivamente, puede ser axiomatizada por el conjunto de identidades que axiomatizan a $\mathcal{V}$ junto con el siguiente conjunto de cuasiidentidades:*

$$\{U(\varphi)\}_{\varphi \in \Sigma} \cup \{\forall \vec{x} \; \varepsilon_\varphi(\vec{x}, f_1^\varphi(\vec{x}), \ldots, f_{m(\varphi)}^\varphi(\vec{x}))\}_{\varphi \in \Sigma}.$$

Lemma 181 *Sea $K = Mod(\Sigma)$, para algún conjunto Σ de AE-sentencias. Luego, $\mathcal{K}_\Sigma \models \Sigma$.*

Theorem 182 *Sea $\mathcal{K}$ una clase algebraicamente expandible de álgebras de tipo τ. Supongamos que $\mathcal{K} = Mod(\Sigma_0) = Mod(\Sigma_1)$, con Σ_0 y Σ_1 conjuntos de AE-sentencias de tipo τ. Luego, $\mathcal{K}_{\Sigma_0}$ y $\mathcal{K}_{\Sigma_1}$ son equivalentes a términos. Es decir, para $i = 0, 1$, $\psi \in \Sigma_i$ y $1 \leq j \leq m(\psi)$, existe $t_{\psi,j} \in T^{\tau_{\Sigma_{1-i}}}(\{x_1, ..., x_{n(\psi)}\})$ tal que*

$$(f_j^\psi)^{\mathbf{A}_{\Sigma_i}}(\vec{a}) = [\psi]_j^{\mathbf{A}}(\vec{a}) = t_{\psi,j}^{\mathbf{A}_{\Sigma_{1-i}}}[\vec{a}],$$

para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y cada $\vec{a} \in A^{n(\psi)}$.

Proof. Sea $n(\psi) \geq 1$.

Sean $i = 0$, $\psi \in \Sigma_0$, $\mathcal{V} = \mathbb{V}(\mathcal{K}_{\Sigma_1})$, y $\mathbf{F}$ el álgebra libre de $\mathcal{V}$ con respecto a $\{x_1, ..., x_{n(\psi)}\}$; i.e., $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\mathcal{V}(\{x_1, ..., x_{n(\psi)}\})$. Notar que $\mathbf{F} \in \mathcal{K}_{\Sigma_1}$, pues $\mathcal{K}_{\Sigma_1}$ es una cuasivariedad (por lo que es cerrada bajo $\mathbb{I}$, $\mathbb{S}$ y $\mathbb{P}$) y el Teorema 143 afirma que $\mathbf{F}$ satisface todas las cuasiidentidades de $\mathcal{K}_{\Sigma_1}$. En virtud del Lema 181, $\mathbf{F} \models \psi$ y luego existen únicos $t_1(x_1, ..., x_{n(\psi)})/\theta_{\mathcal{V}}, ..., t_{m(\psi)}(x_1, ..., x_{n(\psi)})/\theta_{\mathcal{V}} \in F$ tales que

$$\mathbf{F} \models \varepsilon_\psi(x_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., x_{n(\psi)}/\theta_{\mathcal{V}}, t_1(x_1, ..., x_{n(\psi)})/\theta_{\mathcal{V}}, ..., t_{m(\psi)}(x_1, ..., x_{n(\psi)})/\theta_{\mathcal{V}}) \quad (1)$$

Sean ahora $j \in \{1, ..., m(\psi)\}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $\vec{a} \in A^{n(\psi)}$. Defínase el mapeo

$$\begin{array}{rcl} \{x_1/\theta_{\mathcal{V}}, ..., x_n/\theta_{\mathcal{V}}\} & \to & A_{\Sigma_1} \\ x_i/\theta_{\mathcal{V}} & \to & a_i, \end{array}$$

y extiéndaselo a un homomorfismo

$$H: \quad \mathbf{F} \quad \to \quad \mathbf{A}_{\Sigma_1}$$

(lo que resulta posible en virtud del Teorema 121). Luego, de (1) se llega a que

$$\mathbf{A}_{\Sigma_1} \models \varepsilon_\psi(H(\vec{x}/\theta_{\mathcal{V}}), H(\vec{t}(x_1, ..., x_{n(\psi)})/\theta_{\mathcal{V}})),$$

implicando esto que

$$\mathbf{A}_{\Sigma_1} \models \varepsilon_\psi(\vec{a}, t_1^{\mathbf{A}_{\Sigma_1}}[\vec{a}], ..., t_{m(\psi)}^{\mathbf{A}_{\Sigma_1}}[\vec{a}]).$$

Como para cada $k \in \{1, ..., m(\psi)\}$ se da que $t_k \in T^\tau$ y entonces $t_k^{\mathbf{A}_{\Sigma_1}}[\vec{a}] \in A$, se tiene que

$$\mathbf{A} \models \varepsilon_\psi(\vec{a}, t_1^{\mathbf{A}_{\Sigma_1}}[\vec{a}], ..., t_{m(\psi)}^{\mathbf{A}_{\Sigma_1}}[\vec{a}]).$$

Al darse que $\mathbf{A} \models \psi$, se observa finalmente que

$$(f_j^\psi)^{\mathbf{A}}(\vec{a}) = [\psi]_j^{\mathbf{A}}(\vec{a}) = t_j^{\mathbf{A}_{\Sigma_1}}[\vec{a}].$$

El razonamiento para $\psi \in \Sigma_1$ es análogo, y por lo tanto $\mathcal{K}_{\Sigma_1}$ y $\mathcal{K}_{\Sigma_0}$ son equivalentes a términos. ■

8.5. Ejemplo de aplicación

A continuación, se estudian las subclases AE de $\mathcal{D}_{01}$ con el objeto de ejemplificar la utilización de las herramientas aprendidas hasta aquí.

Lemma 183 *Para cada $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$, existen una familia indexada $\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$ de estructuras en $\mathcal{D}_{01}$ y $\mathbf{A} \in \mathcal{D}_{01}$ tales que $\mathbf{A}_i \in \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ para cada $i \in I$, $\mathbf{A} \subseteq_g \Pi\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$, y $\mathbf{L} \cong \mathbf{A}$.*

Proof. Se remite al lector a [6] para una prueba a este Lema. ■

Lemma 184 *Sea $\varphi \in QId_{\tau_{AC}}$ (ver Definición 84). Luego,*

$$\{\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01} : \mathbf{L} \models \varphi\} \in \{\mathcal{D}_{01}, \{\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01} : \mathbf{L} \textit{ es trivial}\}\}.$$

Lemma 185 *$\{\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01} : \mathbf{L}$ es complementado$\}$ no es una subvariedad propia de $\mathcal{D}_{01}$.*

Proof. Supongamos que existe $\Sigma \subseteq Id_{\tau_{RET}}$ tal que

$$\{\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01} : \mathbf{L} \text{ es complementado}\} = Mod(\Sigma)$$

. Como $\mathbf{2} \in \{\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01} : \mathbf{L}$ es complementado$\}$, tenemos que $\mathbf{2} \models \Sigma$. Pero el Teorema 89 dice que entonces $\mathcal{D}_{01} \models \Sigma$, y luego $\{\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01} : \mathbf{L}$ es complementado$\} = \mathcal{D}_{01}$. ■

Lemma 186 *Dado $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$, son equivalentes:*

(1) $\mathbf{L}$ es complementado.

(2) $\mathbf{L}/\theta \ncong \mathbf{3}$, $\forall \theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$.

(3) $\mathbf{L} \cong \mathbf{A} \subseteq_g \mathbf{2}^I$, para algún conjunto de índices I.

(4) $\mathbf{L}$ no tiene cadenas de filtros primos de longitud mayor a 1.

Proof. (1) $\implies$ (2) Vale pues $\mathbf{3}$ no es complementado, pero $\mathbf{L}/\theta$ sí lo es, para cada $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$.

(2) $\implies$ (3) En virtud de Lema 183, $\mathbf{L} \cong \mathbf{A} \subseteq_g \langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$; sea f tal isomorfismo. Pero si existe $i \in I$ tal que $\mathbf{A}_i = \mathbf{3}$, el Corolario 34 afirma que $\mathbf{L}/\theta_{\ker(\pi_i \circ f)} \cong \mathbf{3}$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\mathbf{L} \cong \mathbf{A} \subseteq_g \mathbf{2}^I$.

(3) $\implies$ (1) Nótese que $\mathbf{L}$ es complementado si y sólo si

$$\mathbf{L} \models \varphi = \forall x \exists! y (\wedge(x,y) \equiv 0) \wedge (\vee(x,y) \equiv 1).$$

Como $\mathbf{2} \models \varphi$, el Teorema 174 y la hipótesis afirman que $\mathbf{L} \models \varphi$.

(1) $\implies$ (4) Supongamos que $\mathbf{L}$ es complementado. Además, supongamos que existe una cadena de filtros primos $F_2 \subset F_1$ y defínase

$$\theta = \{(x,y) \in L^2 : x,y \in (L - F_2), \text{ o } x,y \in (F_2 - F_1), \text{ o } x,y \in F_1\}.$$

Fácilmente se puede observar que θ es reflexiva y simétrica. Como $(L - F_2)$, $(F_2 - F_1)$ y F_1 son disjuntos de a pares, se observa también que θ es transitiva. Por último, dados $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \theta$ se puede demostrar sencillamente que $(a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2), (a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2) \in \theta$, por lo que $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$.

Sin embargo, $\mathbf{L}/\theta \cong \mathbf{3}$; absurdo, ya que si $\mathbf{L}$ es complementado entonces $\mathbf{L}/\theta$ es complementado, para cada $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$. Luego, no existe una cadena de filtros primos de longitud mayor a 1.

(4) $\implies$ (3) Supongamos que $\mathbf{L}$ no tiene cadenas de filtros primos de longitud mayor a 1. Por Lema 183, $\mathbf{L} \cong \mathbf{A} \subseteq_g \Pi\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$, con $\mathbf{A}_i \in \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$, $\forall i \in I$; sea f tal isomorfismo. Supongamos que existe $i \in I$ para el que $\mathbf{A}_i = \mathbf{3}$. Por Lema 34, $\mathbf{L}/\ker(\pi \circ f) \cong \mathbf{3}$; sea g tal isomorfismo.

A continuación, tomando por $\{0, a, 1\}$ al universo de $\mathbf{3}$, procedemos a definir

$$\begin{aligned} F_1 &= \{x \in L : g(x/\ker(\pi \circ f)) = 1\}, \\ F_2 &= \{x \in L : g(x/\ker(\pi \circ f)) \in \{a, 1\}\}. \end{aligned}$$

Nótese que F_1 es un filtro primo de $\mathbf{L}$, pues

- $F_1 \notin \{\emptyset, L\}$, pues g es sobreyectivo.

- Si $a_1, a_2 \in F_1$, entonces $g(a_1/\ker(\pi \circ f)) = g(a_2/\ker(\pi \circ f)) = 1$ y se prueba trivialmente que $a_1 \wedge a_2 \in F$, ya que g es un homomorfismo.

- Si $a_1 \in F_1$ y $a_2 \in L$ son tales que $a_1 \leq a_2$, entonces $a_1 \vee a_2 = a_2$, por lo que

$$\begin{aligned} g(a_2/\ker(\pi \circ f)) = & \; g(a_2 \vee a_1/\ker(\pi \circ f)) \\ = & \; g(a_2/\ker(\pi \circ f) \vee a_1/\ker(\pi \circ f)) \\ = & \; \{\text{por ser } g \text{ un homomorfismo}\} \\ & \; g(a_2/\ker(\pi \circ f)) \vee g(a_1/\ker(\pi \circ f)) \\ = & \; \{\text{pues } g(a_1/\ker(\pi \circ f)) = 1\} \; 1, \end{aligned}$$

  y luego $a_2 \in F_1$.

- Puesto que
$$\mathbf{3} \models \forall x \forall y((\vee(x,y) \equiv 1) \leftrightarrow ((x \equiv 1) \vee (y \equiv 1))),$$
  y como $\mathbf{L}/\ker(\pi \circ f) \cong \mathbf{3}$, tenemos que si $a_1 \vee a_2 \in F_1$ entonces $a_1 \in F_1$ o $a_2 \in F_1$.

Queda como ejercicio al lector probar que F_2 es también un filtro primo. Esto implica entonces que $\mathbf{L}$ tiene cadenas de filtros primos de longitud mayor a 1, ya que $F_1 \subset F_2$; absurdo, proveniente de la suposición de que existe un tal factor $\mathbf{A}_i \cong \mathbf{3}$. ■

Theorem 187 *Sean*

$$\begin{aligned} \varphi &= \forall x_1 ... x_n \exists! z_1 ... z_m \left(\bigwedge_{i=1}^{k} s_i(\vec{x}, \vec{z}) \equiv t_i(\vec{x}, \vec{z}) \right), \\ \mathbb{K}_0 &= \{\mathbf{L} \in D_{01} : \mathbf{L} \text{ es trivial}\}, \\ \mathbb{K}_1 &= \{\mathbf{L} \in D_{01} : \mathbf{L} \text{ es complementado}\}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\{\mathbf{L} \in D_{01} : \mathbf{L} \models \varphi\} \in \{\mathbb{K}_0, \mathbb{K}_1, \mathcal{D}_{01}\}.$$

Proof. Para cada $i \in \{1, ..., m\}$, sea

$$\begin{aligned} [U(\varphi)]_i = & \; \forall x_1 ... x_n y_1 ... y_m z_1 ... z_m \\ & \left(\bigwedge_{i \in \{1,...,k\}} ((s_i(\vec{x}, \vec{y}) \equiv t_i(\vec{x}, \vec{y})) \wedge (s_i(\vec{x}, \vec{z}) \equiv t_i(\vec{x}, \vec{z}))) \right) \rightarrow (y_i \equiv z_i). \end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{L} \models U(\varphi)$ sii $L \models \bigwedge_{i=1}^{m} [U(\varphi)]_i$, el Lema 184 afirma que $\{\mathbf{L} \in D_{01} : \mathbf{L} \models U(\varphi)\} \in \{\mathbb{K}_0, \mathcal{D}_{01}\}$.

Supongamos que $\{\mathbf{L} \in D_{01} : \mathbf{L} \models U(\varphi)\} = \mathcal{D}_{01}$; i.e.,

$$\{\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01} : \mathbf{L} \models \varphi\} = \{\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01} : \mathbf{L} \models E(\varphi)\}.$$

Luego,

- Si $\mathbf{3} \models E(\varphi)$, entonces $\mathbf{3} \models \varphi$, y siendo que $\mathbf{2} \in \mathbb{S}(\mathbf{3}) \cap \mathbb{H}(\mathbf{3})$ se obtiene que $\mathbf{2} \models \varphi$, por Lema 167. El Lema 183 y el Teorema 174 afirman entonces que
$$\{\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01} : \mathbf{L} \models \varphi\} = \mathcal{D}_{01}.$$

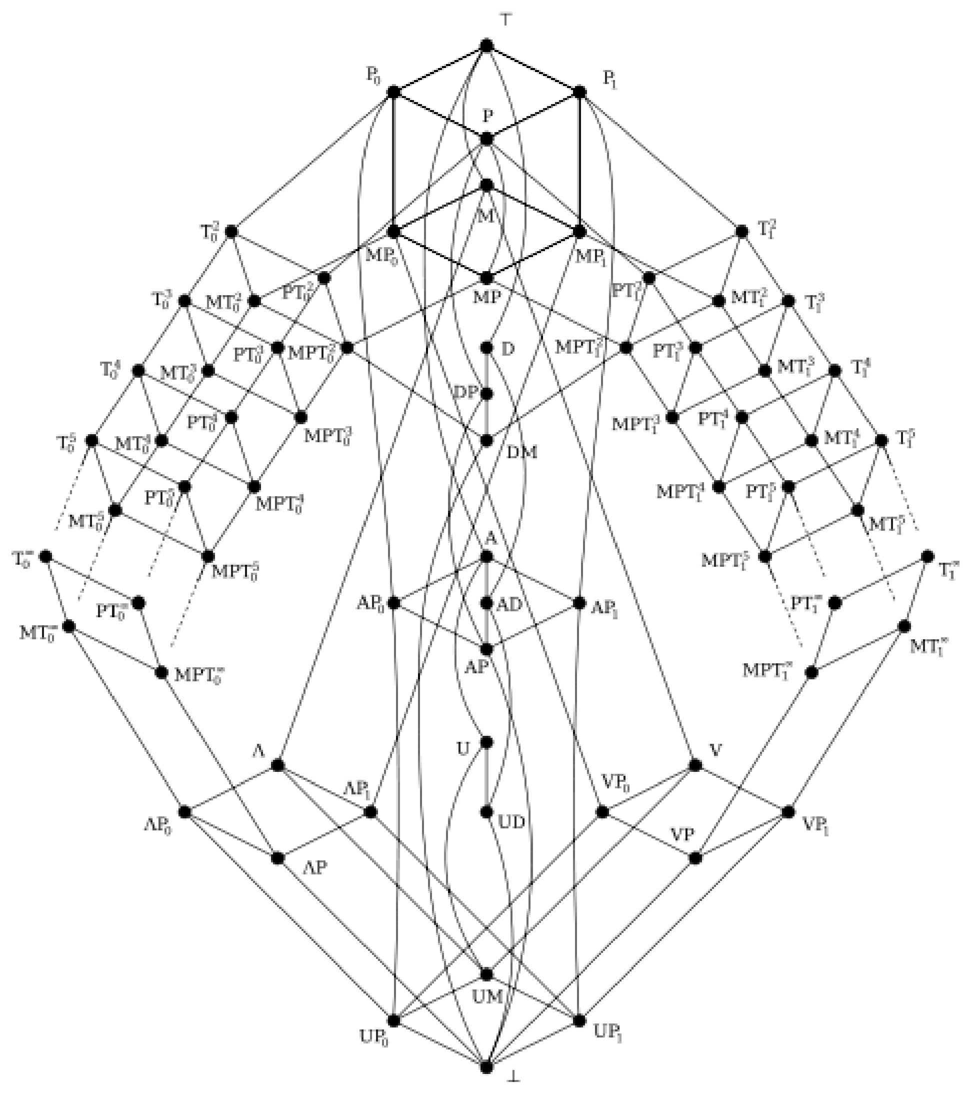
- Supongamos que $\mathbf{3} \not\models E(\varphi)$, y que existe $\mathbf{L}_1 \in \mathcal{D}_{01}$ no trivial tal que $\mathbf{L}_1 \models \varphi$. Luego, el Lema 168 afirma que $\mathbf{2} \models \varphi$, y del Teorema 174 y el Lema 186 se obtiene que $\mathbb{K}_1 \models \varphi$.
  Ahora, si existe $\mathbf{L}_2 \in \mathcal{D}_{01}$ no complementado tal que $\mathbf{L}_2 \models \varphi$, entonces Lema 186 afirma que existe $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{L}_2)$ tal que $\mathbf{L}_2/\theta \cong \mathbf{3}$. Como $\mathbf{3} \in \mathbb{IS}(\mathbf{L}_2)$ (de lo contrario, $\mathbf{L}_2$ sería complementado) y $\mathbf{3} \in \mathbb{H}(\mathbf{L}_2)$, en virtud del homomorfismo $f : \mathbf{L}_2 \to \mathbf{3}$ para el que $\ker(f) = \theta$, el Lema 167 nos dice que $\mathbf{3} \models \varphi$; absurdo, proveniente de suponer que existe $\mathbf{L}_2 \in \mathcal{D}_{01}$ no complementado tal que $\mathbf{L}_2 \models \varphi$. Por lo tanto,
$$\{\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01} : \mathbf{L} \models \varphi\} = \mathbb{K}_1.$$

■

9. Aplicaciones al reticulado de Post

En este capítulo aplicaremos técnicas de representaciones globales y de funciones algebraicas (y, de manera menos directa, todos los conceptos hasta aquí presentados) con el objetivo de dar información valiosa sobre el reticulado de Post; a saber, la obtención de la cadena infinita de clones que contienen a la función $\rightarrow$.

9.1. El reticulado de Post



El reticulado de Post (en diagrama) tiene como universo a todos los clones de funciones $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$, para $n \geq 1$, ordenados por inclusión. Las funciones de la forma $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$, para $n \geq 1$, son llamadas *funciones booleanas*. Nótese que los ya conocidos operadores lógicos del cálculo proposicional pueden ser pensados como funciones booleanas, tal cual se procedió en sección 7.1.

Post logró (en [7]) clasificar todos los conjuntos de funciones booleanas cerradas bajo composición, llamados *sistemas iterativos*; posteriormente, sus resultados fueron enmarcados en la teoría de clones, incluyendo las proyecciones canónicas en cada uno de los sistemas iterativos. De este modo, la clasificación de Post incluye 20 sistemas iterativos que no son clones por sí mismos, y para los que no existen clones que los representen en el reticulado de Post.

Como consecuencia de los estudios de Post, se obtuvieron importantes resultados y aplicaciones; entre ellos,

- Puesto que los clones maximales diferentes a $\top$ son M, D, A, P_0 y P_1, y siendo que cada subclon propio de $\top$ está contenido en alguno de éstos, un conjunto de funciones booleanas B es *funcionalmente completo* (i.e., $\langle B\rangle = \top$) si y sólo si $\langle B\rangle$ no está incluido en ninguno de estos clones maximales distintos de $\top$.

- Es ampliamente conocido, por el Teorema de Cook-Levin ([12]), que el *problema de satisfacibilidad booleana* (i.e., dada una fórmula φ del cálculo proposicional con $\varphi =_d \varphi(x_1, ..., x_n)$, saber si existe $(a_1, ..., a_n) \in \{0, 1\}^n$ tal que $\varphi[a_1, ..., a_n] = 1$) es *NP-completo* (por lo que no se sabe si existe un algoritmo de complejidad polinomial para resolver este problema).

  Dado un conjunto finito B de funciones booleanas, sea B-SAT el problema de satisfacibilidad booleana restringido a fórmulas con funciones sólo en B. Lewis ([13]) demostró, utilizando el reticulado de Post, que si $\not\rightarrow \notin \langle B\rangle$, entonces B-SAT es P (es decir, existe con certeza un algoritmo de complejidad polinomial para resolverlo). Remitimos al lector aquí a la definición de la operación $\not\rightarrow$ en Sección 9.1.1.

A continuación, se describen los conjuntos de funciones generadoras de cada uno de los clones del reticulado de Post, seguido de algunas aclaraciones. Nótese que, aunque se detalle un sólo conjunto de funciones generadoras para cada clon, para algunos de ellos existe más de un conjunto minimal de funciones generadoras posible; por ejemplo, $\langle\{\wedge, \neg\}\rangle = \langle\{\vee, \neg\}\rangle = \top$. En particular, nótese que los conjuntos de clones T_0^k, T_1^k, MT_0^k, MT_1^k, PT_0^k, PT_1^k, MPT_0^k y MPT_1^k, con $k \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ para cada caso, constituyen cadenas infinitas numerables (1).

Clon	Conjunto generador
$\top$	$\vee,\ \neg$
P_0	$\vee,\ +$ (2)
P_1	$\wedge,\ \rightarrow$ (3)
P	$x\ ?\ y : z$ (4)
$T_0^k,\ k \geq 2$	$th_k^{k+1},\ \not\rightarrow$ (5)
T_0^∞	$\not\rightarrow$
$PT_0^k, k \geq 2$	$th_k^{k+1},\ x \wedge (y \rightarrow z)$
PT_0^∞	$x \wedge (y \rightarrow z)$
$T_1^k, k \geq 2$	$th_2^{k+1},\ \rightarrow$
T_1^∞	$\rightarrow$ (7)
$PT_1^k, k \geq 2$	$th_2^{k+1},\ x \vee (y + z)$
PT_1^∞	$x \vee (y + z)$
M	$\wedge,\ \vee,\ 0\ ,\ 1$ (6)
MP_0	$\wedge,\ \vee,\ 0$
MP_1	$\wedge,\ \vee,\ 1$
MP	$\wedge,\ \vee$
$MT_0^k, k \geq 2$	$th_k^{k+1},\ 0$
MT_0^∞	$x \wedge (y \vee z),\ 0$
$MPT_0^k, k \geq 3$	th_k^{k+1}
MPT_0^2	$th_2^3,\ x \wedge (y \vee z)$
MPT_0^∞	$x \wedge (y \vee z)$
$MT_1^k, k \geq 2$	$th_2^{k+1},\ 1$
MT_1^∞	$x \vee (y \wedge z),\ 1$
$MPT_1^k, k \geq 3$	th_2^{k+1}
MPT_1^2	$th_2^3,\ x \vee (y \wedge z)$
MPT_1^∞	$x \vee (y \wedge z)$
$\wedge$	$\wedge,\ 0,\ 1$
$\wedge P_0$	$\wedge,\ 0$
$\wedge P_1$	$\wedge,\ 1$
$\wedge P$	$\wedge$
$\vee$	$\vee,\ 0,\ 1$
$\vee P_0$	$\vee,\ 0$
$\vee P_1$	$\vee, 1$
$\vee P$	$\vee$
D	$th_2^3,\ \neg$
DP	$th_2^3,\ x + y + z$
DM	th_2^3
A	$\leftrightarrow,\ 0$
AD	$\neg,\ x + y + z$
AP_0	$+$
AP_1	$\leftrightarrow$
AP	$x + y + z$

U	$\neg,\ 0$
UD	$\neg$
UM	$0,\ 1$
UP_0	0
UP_1	1
$\perp$	$\emptyset$

9.1.1. Aclaraciones sobre las funciones generadoras

(1) Las 8 cadenas infinitas del reticulado tienen también miembros para $k = 1$, pero disponen de nombres por separado: $T_0^1 = P_0$, $T_1^1 = P_1$, $PT_0^1 = PT_1^1 = P$, $MT_0^1 = MP_0$, $MT_1^1 = MP_1$, $MPT_0^1 = MPT_1^1 = MP$.

(2) La función $+ : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ está definida como la suma módulo 2; i.e.,

$$+(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1, \text{ si } |\{i : x_i = 1\}| \text{ es impar} \\ 0, \text{ si } |\{i : x_i = 1\}| \text{ es par} \end{cases}$$

(3) P_1 es el conjunto de todas las funciones que preservan $\{1\}$; i.e.,

$$P_1 = \{f : \{0,1\}^n \to \{0,1\} : n \geq 1,\ f(1, ..., 1) = 1\}.$$

(4) $x\ ?\ y\ :\ z$ representa la función

$$x\ ?\ y\ : z = \begin{cases} y, \text{ si } x = 1 \\ z, \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

(5) $th_k^n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, con $1 \leq k \leq n$, son las denominadas *funciones umbral*, definidas como

$$th_k^n(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1, \text{ si } |\{i : x_i = 1\}| \geq k \\ 0, \text{ si } |\{i : x_i = 1\}| < k \end{cases}$$

Por otro lado, $\not\to: \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, denominada *no implicación*, está definida como

$$\not\to(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, \text{ si } x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 0 \\ 0, \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

(6) Las funciones $0, 1 : \{0,1\} \to \{0,1\}$, denominadas *funciones constantes unarias*, están definidas como $0(0) = 0(1) = 0$ y $1(0) = 1(1) = 1$.

(7) Nótese que la función constante unaria 1, como fue definida en (6), es tal que $1 \in T_1^\infty$, dado que puede ser definida como

$$\begin{aligned} 1(x) = &\ x \to x \\ = &\ 1 \end{aligned}.$$

Esto será útil en la obtención de una de las cadenas infinitas del reticulado de Post.

9.2. Obtención de una de las cadenas infinitas

Por útimo, aquí procederemos a demostrar el Teorema 194, que nos permitirá finalmente obtener la forma exacta de la cadena infinita de clones distintos de $\top$ que contienen a la función $\rightarrow$.

Lemma 188 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra finita de tipo* τ *tal que* $\mathbb{S}(\mathbf{A}) - \{\mathbf{B} : \mathbf{B}$ *es un álgebra trivial de tipo* $\tau\} \subseteq \mathcal{V}_{SI}$*, para alguna variedad* $\mathcal{V}$ *de congruencias distributivas. Luego, existen términos* $p_i(x,y,z,w), q_i(x,y,z,w)$*,* $i = 1, ..., n$*, tales que*

$$A \models \forall xyzw \ ((\bigwedge_{i=1}^{n}(p_i(x,y,z,w) \equiv q_i(x,y,z,w))) \leftrightarrow ((x \equiv y) \vee (z \equiv w)))$$

Exercise 189 *Para cada álgebra finita* $\mathbf{A}$ *que satisface la condición del anterior Lema, vale que para cualquier fórmula de la forma*

$$\varphi = \bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n_i}(r_i(\vec{x}) \equiv s_i(\vec{x}))),$$

existe una fórmula

$$\psi = \bigwedge_{i=1}^{l}(u_k(\vec{x}) \equiv v_k(\vec{x}))$$

equivalente sobre $\mathbf{A}$*.*

Lemma 190 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra finita de tipo* τ *tal que* $\mathbb{S}(\mathbf{A}) - \{\mathbf{B} : \mathbf{B}$ *es un álgebra trivial de tipo* $\tau\} \subseteq \mathcal{V}_{SI}$*, para alguna variedad* $\mathcal{V}$ *de congruencias distributivas. Además, supongamos que para toda AE-sentencia* φ *tal que* $\mathbf{A} \models \varphi$ *vale también que* $\mathbb{S}(\mathbf{A}) \models \varphi$*. Luego, toda función algebraica sobre* $\mathbf{A}$ *es también mono-algebraica.*

Proof. Sean $f : A^n \rightarrow A$,

$$\varphi = \forall x_1...x_{n(\varphi)} \exists! z_1...z_{m(\varphi)} \ \varepsilon_\varphi(\vec{x}, \vec{z}),$$

e $i \in \{1, ..., m(\varphi)\}$ tales que $\mathbf{A} \models \varphi$ y

$$[\varphi]_i^{\mathbf{A}} = f.$$

Luego, por hipotesis, para cada $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ se tiene que $\mathbf{B} \models \varphi$. En particular, dado $(a_1, ..., a_{n(\varphi)}) \in A^n$, se tiene que

$$\mathbf{B} = \langle\{a_1, ..., a_{n(\varphi)}\}\rangle \models \varphi;$$

además, existen términos $t_1, ..., t_k \in T^\tau(x_1, ..., x_n)$ para los que

$$\mathbf{B} = \{t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], ..., t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]\},$$

en virtud de Lema 15.

Ahora, nótese que $[\varphi]_i^{\mathbf{B}}(\vec{a})$ es el único $c \in B$ para el que existe $(c_1, ..., c_{m(\varphi)}) \in A^{m(\varphi)}$ tal que $c_i = c$ y

$$\mathbf{B} \models \varepsilon_\varphi(\vec{a}, \vec{c}).$$

Más aún, este $(c_1, ..., c_{m(\varphi)})$ es único. Como además se da que $c_i = t_{l_i}^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$, para cada $i \in \{1, .., .m(\varphi)\}$ y con $l_i \in \{1, .., k\}$, obtenemos entonces que c cumple con que

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \quad \models \quad & \psi = \varepsilon_\varphi(\vec{x}, t_1^{\mathbf{A}}[\vec{x}], ..., z, ..., t_1^{\mathbf{A}}[\vec{x}], t_1^{\mathbf{A}}[\vec{x}]) \\ & \quad \vee ... \\ & \quad \vee \varepsilon_\varphi(\vec{x}, t_1^{\mathbf{A}}[\vec{x}], ..., z, ..., t_1^{\mathbf{A}}[\vec{x}], t_k^{\mathbf{A}}[\vec{x}]) \\ & \quad \vee \varepsilon_\varphi(\vec{x}, t_1^{\mathbf{A}}[\vec{x}], ..., z, ..., t_2^{\mathbf{A}}[\vec{x}], t_1^{\mathbf{A}}[\vec{x}]) \\ & \quad \vee ... \\ & \quad \vee \varepsilon_\varphi(\vec{x}, t_k^{\mathbf{A}}[\vec{x}], ..., z, ..., t_k^{\mathbf{A}}[\vec{x}], t_k^{\mathbf{A}}[\vec{x}])[\vec{a}, c].\end{aligned}$$

Nótese c es único en A en cumplir esto, ya que $\mathbf{A} \models \varphi$.

Pero entonces, por Ejercicio 189, existe una fórmula

$$\delta = \bigwedge_{i=1}^{l} (u_k(x_1, ..., x_{n(\varphi)}, z) \equiv v_k(x_1, ..., x_{n(\varphi)}, z))$$

equivalente a ψ en $\mathbf{A}$. En consecuencia,

$$\mathbf{B} \models \delta[a_1, ..., a_{n(\varphi)}, c].$$

De Lema 38, obtenemos que

$$\mathbf{A} \models \delta[a_1, ..., a_{n(\varphi)}, c].$$

Como esto vale para cada $(a_1, ..., a_{n(\varphi)}) \in A^{n(\varphi)}$ (i.e., para cada $(a_1, ..., a_{n(\varphi)}) \in A^{n(\varphi)}$ existe un único c que cumple esto), se tiene que

$$\mathbf{A} \models \gamma = \forall \vec{x} \exists ! z \ \delta(\vec{x}, z);$$

luego, f es mono-algebraica, ya que

$$[\gamma]^{\mathbf{A}} = f.$$

■

Lemma 191 *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra finita de tipo* τ *tal que* $\mathbb{S}(\mathbf{A}) - \{\mathbf{B} : \mathbf{B}$ *es un álgebra trivial de tipo* $\tau\} \subseteq \mathcal{V}_{SI}$*, para alguna variedad* $\mathcal{V}$ *de congruencias distributivas. Luego, para* $f : A^n \to A$ *son equivalentes*

(1) f *es mono-algebraica sobre* $\mathbf{A}$

(2) para cada homomorfismo $\sigma : \mathbf{S}_1 \to \mathbf{S}_2$, con $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \leq \mathbf{A}$, si

$$s_1, ..., s_n, f(s_1, ..., s_n) \in S_1$$

se tiene que

$$\sigma(f(s_1, ..., s_n)) = f(\sigma(s_1), ..., \sigma(s_2)).$$

Proof. Remitimos al lector a [2] para esta demostración. ■

Definition 192 *Dada $\mathbf{A}$ un álgebra de tipo τ, definimos*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{A}} = & \ (\{\mathcal{C} \subseteq \mathbb{V}(\mathbf{A}) : \mathcal{C} \ni \mathbf{A},\, \mathcal{C} \text{ es una clase } AE\}, \subseteq) \\ = & \ (\{Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma) : \Sigma \text{ conjunto de } AE\text{-sentencias de tipo } \tau,\, \mathbf{A} \models \Sigma\}, \subseteq). \end{aligned}$$

Lemma 193 *Dada un álgebra $\mathbf{A}$, $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ es un reticulado completo.*

Theorem 194 *Sea $\mathbf{A}$ un álgebra finita de tipo τ tal que*

- $\mathbb{V}(\mathbf{A})$ *es de congruencias distributivas;*
- $\mathbb{V}(\mathbf{A})_{SI} = \mathbb{S}(\mathbf{A}) - \{\mathbf{B} : \mathbf{B}$ *es un álgebra trivial de tipo* $\tau\}$*;*
- $\mathbb{S}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{H}(\mathbf{A})$*.*

Defínase

$$\begin{aligned} Op_{\mathbf{A},\Delta} = & \ \{f^{\mathbf{A}} : f \in \mathcal{F}_n,\, n \geq 1\} \\ & \cup \{c_{\mathbf{A}} : A \to A : c \in \mathcal{C},\, c_{\mathbf{A}}(a) = c^{\mathbf{A}},\, \forall a \in A\} \\ & \cup \{[\varphi]_j^{\mathbf{A}} : \varphi \in \Delta,\, j \in \{1, ..., m(\varphi)\}\}\rangle \end{aligned}$$

para cada conjunto Δ de AE-sentencias tal que $\mathbf{A} \models \Delta$.

Luego, la función

$$\begin{array}{rlcl} F: & \mathcal{L}_{\mathbf{A}} & \to & [\mathrm{Clon}(\mathbf{A}), \mathrm{Clon}_{Alg}(\mathbf{A})] \\ & Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma) & \to & \langle Op_{\mathbf{A},\Sigma}\rangle, \end{array}$$

es un anti-isomorfismo de $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ en $[\mathrm{Clon}(\mathbf{A}), \mathrm{Clon}_{Alg}(\mathbf{A})]$; i.e., F es una biyección que invierte el orden entre dominio e imagen, de modo tal que para cualesquiera $Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_1), Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_2) \in \mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ vale que

$$Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_1) \subseteq Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_2) \implies F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_1)) \supseteq F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_2)),$$

y tal que para cualesquiera $C_1, C_2 \in [\mathrm{Clon}(\mathbf{A}), \mathrm{Clon}_{Alg}(\mathbf{A})]$ vale que

$$C_1 \subseteq C_2 \implies F^{-1}(C_1) \supseteq F^{-1}(C_2).$$

Proof. En primer lugar, demostremos que la función está bien definida; i.e., dados conjunto de AE-sentencias Σ y Γ tales que $Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma) = Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Gamma)$, verificar que $F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma)) = F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Gamma))$. Para esto, supongamos que

$Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma) = Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Gamma)$ y sea $f \in \langle Op_{\mathbf{A},\Sigma}\rangle$. Por Corolario 118, f es composición de funciones en

$$Op_{\mathbf{A},\Sigma} \cup \{\pi_j^m : A^m \to A : m \geq 1,\ j \in \{1, ..., m\}\},$$

o pertenece a este conjunto. A su vez, del Teorema 182 se puede probar que cada función en $Op_{\mathbf{A},\Sigma}$ es composición de funciones en $Op_{\mathbf{A},\Gamma} \cup \{\pi_j^m : A^m \to A : m \geq 1,\ j \in \{1, ..., m\}\}$. Luego, $f \in \langle Op_{\mathbf{A},\Gamma}\rangle$. Del mismo modo se procede para demostrar que $\langle Op_{\mathbf{A},\Gamma}\rangle \subseteq \langle Op_{\mathbf{A},\Sigma}\rangle$, concluyendo entonces que $F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma)) = F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Gamma))$.

Para observar que F es sobreyectiva, sea $C \in [\mathrm{Clon}(\mathbf{A}), \mathrm{Clon}_{Alg}(\mathbf{A})]$. Como $C \subseteq \mathrm{Clon}_{Alg}(\mathbf{A})$, y siendo $X = \{[\varphi]_i^{\mathbf{A}} : \varphi$ es AE-sentencia, $\mathbf{A} \models \varphi$, $i \in \{1, ..., m(\varphi)\}\}$, el Corolario 118 afirma que cada $f \in C$ es tal que $f \in X \cup \{\pi_j^m : m \geq 1, j \in \{1, ..., m\}\}$, o f es composición de funciones en este conjunto. Como además cada $f \in X \cap C$ es mono-algebraica (bajo consideración de los lemas 190 y 167), selecciónese una AE-sentencia $\varphi_f = \forall x_1 ... x_{n(\varphi_f)} \exists! z\ \varepsilon_{\varphi_f}(\vec{x}, z)$ tal que $[\varphi_f]^{\mathbf{A}} = f$, y sea

$$\Sigma_C = \{\varphi_f : f \in X \cap C\}.$$

Es sencillo observar que entonces $F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_C)) = C$.

Para observar que F es inyectiva, supongamos que

$$F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma)) = F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Gamma))$$

y probemos que $Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma) = Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Gamma)$. Sean $\varphi \in (\Sigma - \Gamma)$ y $\mathbf{B} \in Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Gamma)$. El Teorema 82 afirma que existen $\mathbf{C} \in \mathbb{V}(\mathbf{A})$ y $\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle$, con $\mathbf{A}_i \in \mathbb{V}(\mathbf{A})_{SI}$ para cada $i \in I$, tales que

$$\mathbf{B} \cong \mathbf{C} \leq_{sd} \prod \langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle.$$

Pero $\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle \models \Gamma$ implica que $\prod\langle \mathbf{A}_i : i \in I\rangle \models \Gamma$, y $\mathbf{B} \models \Gamma$ implica que $\mathbf{C} \models \Gamma$, por lo que

$$\mathbf{B}_\Gamma \cong \mathbf{C}_\Gamma \leq_{sd} \prod \langle (\mathbf{A}_i)_\Gamma : i \in I\rangle.$$

Ahora, notar que $\mathbb{V}(\mathbf{A})_{SI} = \mathbb{S}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{H}(\mathbf{A})$, lo cual implica que $\mathbb{V}(\mathbf{A})_{SI} \models \varphi$, ya que $\mathbf{A} \models \varphi$ y por Lema 167. Como $F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma)) = F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Gamma))$, el Corolario 118 afirma que para cada $j \in \{1, ..., m(\varphi)\}$ existe una composición de funciones en $Op_{\mathbf{A},\Gamma} \cup \{\pi_j^m : A^m \to A : m \geq 1,\ j \in \{1, ..., m\}\}$ igual a $[\varphi]_j^{\mathbf{A}}$; cada una de estas composiciones puede ser pensada como un término $t_j \in T^{\tau_\Gamma}$ interpretado en $\mathbf{A}_\Gamma$, de modo tal que

$$[\varphi]_j^{\mathbf{A}} = t_j^{\mathbf{A}_\Gamma}.$$

Notar además que para cada $\mathbf{D} \in \mathbb{S}(\mathbf{A})$ se da que

$$[\varphi]_j^{\mathbf{D}} = t_j^{\mathbf{D}_\Gamma} = t_j^{\mathbf{A}_\Gamma}{}_{|D^{n(\varphi)}},$$

pues D es cerrado bajo $t_j^{\mathbf{A}_\Gamma}$.

Luego, para cada $c_1, ..., c_{n(\varphi)} \in C$ e $i \in I$ se da que

$$(\mathbf{A}_i)_\Gamma \vDash \varepsilon_\varphi(c_1(i), ..., c_{n(\varphi)}(i), [\varphi]_1^{(\mathbf{A}_i)_\Gamma}(c_1(i), ..., c_{n(\varphi)}(i)), ..., [\varphi]_{m(\varphi)}^{(\mathbf{A}_i)_\Gamma}(c_1(i), ..., c_{n(\varphi)}(i))).$$

Más aún, como φ es una AE-sentencia de tipo τ, se da que

$$(\mathbf{A}_i)_\Gamma \vDash \varepsilon_\varphi(c_1(i), ..., c_{n(\varphi)}(i), [\varphi]_1^{\mathbf{A}_i}(c_1(i), ..., c_{n(\varphi)}(i)), ..., [\varphi]_{m(\varphi)}^{\mathbf{A}_i}(c_1(i), ..., c_{n(\varphi)}(i))),$$

y dado que para cada $i \in I$ vale que $[\varphi]_j^{\mathbf{A}_i} = t_j^{(\mathbf{A}_i)_\Gamma}$, se obtiene que

$$(\mathbf{A}_i)_\Gamma \vDash \varepsilon_\varphi(c_1(i), ..., c_{n(\varphi)}(i), t_1^{(\mathbf{A}_i)_\Gamma}(c_1(i), ..., c_{n(\varphi)}(i)), ..., t_{m(\varphi)}^{(\mathbf{A}_i)_\Gamma}(c_1(i), ..., c_{n(\varphi)}(i))),$$

para $i \in I$, concluyendo entonces que

$$\prod\langle(\mathbf{A}_i)_\Gamma : i \in I\rangle \vDash \varepsilon_\varphi(c_1, ..., c_{n(\varphi)}, t_1^{\Pi\langle(\mathbf{A}_i)_\Gamma : i\in I\rangle}(c_1, ..., c_{n(\varphi)}), ..., t_{m(\varphi)}^{\Pi\langle(\mathbf{A}_i)_\Gamma : i\in I\rangle}(c_1, ..., c_{n(\varphi)})).$$

En virtud del Lema 38, vale

$$\mathbf{C}_\Gamma \vDash \varepsilon_\varphi(c_1, ..., c_{n(\varphi)}, t_1^{\Pi\langle(\mathbf{A}_i)_\Gamma : i\in I\rangle}(c_1, ..., c_{n(\varphi)}), ..., t_{m(\varphi)}^{\Pi\langle(\mathbf{A}_i)_\Gamma : i\in I\rangle}(c_1, ..., c_{n(\varphi)})),$$

concluyendo finalmente que $\mathbf{C}_\Gamma \vDash E(\varphi)$.

Por último, notar que el Lema 39 permite afirmar que $\mathbf{C}_\Gamma \vDash U(\varphi)$. Por lo tanto, $\mathbf{C}_\Gamma \models \varphi$, y entonces $\mathbf{C} \models \varphi$, ya que φ es una AE-sentencia de tipo τ. Luego, $\mathbf{B} \models \varphi$. Como esto vale para cada $\varphi \in \Sigma$, obtenemos que $\mathbf{B} \in Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma)$. Siguiendo un razonamiento análogo para el caso en que $\varphi \in (\Gamma - \Sigma)$ y $\mathbf{B} \in Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma)$, se concluye finalmente que $Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma) = Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Gamma)$.

Por lo tanto, F es inyectiva.

A continuación, dados $C_1, C_2 \in [\mathrm{Clon}(\mathbf{A}), \mathrm{Clon}_{Alg}(\mathbf{A})]$ es posible obtener, como se hizo al considerar la sobreyección de F, conjuntos de AE-sentencias Σ_{C_1} y Σ_{C_2} tales que $F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_{C_i})) = C_i$, $i = 1, 2$, con cada $\varphi \in \Sigma_{C_1} \cup \Sigma_{C_2}$ tal que $m(\varphi) = 1$. Suponiendo $C_1 \subseteq C_2$, obtenemos entonces que $\Sigma_{C_1} \subseteq \Sigma_{C_2}$, y luego toda $B \in \mathbb{V}(\mathbf{A})$ cumplirá que si $\mathbf{B} \models \Sigma_{C_2}$ entonces $\mathbf{B} \models \Sigma_{C_1}$. Es decir,

$$F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_{C_1})) \subseteq F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_{C_2})) \implies Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_{C_2}) \subseteq Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_{C_1}).$$

Por último, supongamos que $Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_1) \subseteq Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_2)$. Esto implica que para cada $\mathbf{B} \in \mathbb{V}(\mathbf{A})$ se da que $\mathbf{B} \models \Sigma_1$ implica que $\mathbf{B} \models \Sigma_2$; luego, $Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_1) = Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$, y ya que

$$\langle Op_{\mathbf{A},\Sigma_2}\rangle \subseteq \langle Op_{\mathbf{A},\Sigma_1\cup\Sigma_2}\rangle$$

obtenemos que

$$F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_2)) \subseteq F(Mod_{\mathbb{V}(\mathbf{A})}(\Sigma_1)).$$

$\blacksquare$

Nuestra siguiente aplicación es sobre clones que extienden al clon de operaciones término de $\mathbf{2} = (2, \rightarrow, 1)$. Remitimos al lector a la Sección 4 para la definición y algunas propiedades básicas de la variedad de álgebras implicativas, $\mathcal{I}$. Toda álgebra implicativa $\mathbf{A}$ tiene estructura de semirreticulado superior, bajo el orden

$$x \leq y \text{ sii } x \rightarrow y = 1;$$

este orden tiene a 1 como elemento máximo, y para cada $a, b \in A$ el supremo está definido como

$$a \vee b = (a \rightarrow b) \rightarrow b.$$

Ahora, sean $n \geq 2$ y $x_1, ..., x_n$ variables. Para $i = 1, ..., n$ se definen los términos

$$s_i^n(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{j=1, j \neq i}^{n} x_j,$$

y se define

$$\varphi_n = \forall x_1 ... x_n \exists! z \left(z \leq s_1^n(\vec{x}) \wedge ... \wedge \ z \leq s_n^n(\vec{x}) \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} (s_i^n(\vec{x}) \rightarrow z) \right) \equiv 1 \right),$$

notando que los símbolos $\leq$ y $\vee$ son sólo abreviaciones, y que φ_n es una AE-sentencia del tipo de las álgebras implicativas.

La prueba del siguiente Lema excede el contenido de este Trabajo. Sin embargo, cabe destacar que precisa de los resultados estudiados para productos subdirectos globales.

Lemma 195 *[5] Sea $\mathbf{2} = (2, \rightarrow, 1)$. Luego, $\mathcal{L}_{\mathbf{2}}$ es la cadena*

$$Mod_{\mathcal{I}}(\varphi_2) \subset Mod_{\mathcal{I}}(\varphi_3) \subset Mod_{\mathcal{I}}(\varphi_4) \subset ... \subset \mathcal{I}.$$

Theorem 196 *Sea $\mathbf{2} = (2, \rightarrow, 1)$. Para $n \geq 2$, sea $\mu_n : 2^n \rightarrow 2$ definida como*

$$\mu_n(a_1, .., a_n) = \begin{cases} 1, \ si \ |\{i : a_i = 1\}| \geq 2 \\ 0, \ en \ caso \ contrario \end{cases}.$$

Luego, tenemos que $\mu_2 = \wedge$, que

$$\begin{aligned} \mathrm{Clon}(\mathbf{2}, \mu_2) = & \ \mathrm{Clon}(\mathbf{2}, \wedge) \\ = & \ \{f : f \ preserva \ \{1\} \ (ver\ secci\acute{o}n\ 9.1.1,\ inciso\ 3)\} \ , \end{aligned}$$

y el intervalo $[\mathrm{Clon}(\mathbf{2}), \mathrm{Clon}_{Alg}(\mathbf{2})] = [\mathrm{Clon}(\mathbf{2}), \mathrm{Clon}(\mathbf{2}, \wedge)]$ es la siguiente cadena

$$\mathrm{Clon}(\mathbf{2}) \subset ... \subset \mathrm{Clon}(\mathbf{2}, \mu_4) \subset \mathrm{Clon}(\mathbf{2}, \mu_3) \subset \mathrm{Clon}(\mathbf{2}, \mu_2).$$

Proof. Nótese que $\mu_n = [\varphi_n]^{\mathbf{2}}$, $\forall n$. Recuérdese que $\mathcal{I}$ es de congruencias distributivas (Teorema 151) y que $\mathbf{2}$ es la única álgebra subdirectamente irreducible de $\mathcal{I}$ (Corolario 109). En consecuencia, $\mathbf{2}$ satisface las hipótesis de Teorema 194 y podemos entonces aplicarlo, junto a Lema 195, para obtener la forma buscada. ■

Finalmente, obtenemos el resultado buscado:

Corollary 197 *La cadena infinita de clones en el reticulado de Post* $T_1^\infty \subset ... \subset T_1^3 \subset T_1^2 \subset T_1^1 = P_1$ *es tal que*

$$\begin{array}{rl} T_1^\infty = & \mathrm{Clon}(\mathbf{2}) \\ ... & ... \\ T_1^3 = & \mathrm{Clon}(\mathbf{2}, \mu_4) \\ T_1^2 = & \mathrm{Clon}(\mathbf{2}, \mu_3) \\ P_1 = & \mathrm{Clon}(\mathbf{2}, \mu_2). \end{array}$$

Proof. Por lo aclarado en sección 9.1.1 (inciso 7), tenemos que $T_1^\infty = \langle\{\rightarrow\}\rangle = \mathrm{Clon}(\mathbf{2})$. Además, como $\mu_2 = \wedge$, tenemos que $P_1 = \langle\{\rightarrow, \wedge\}\rangle = \mathrm{Clon}(\mathbf{2}, \mu_2)$. En consecuencia,

$$[T_1^\infty, P_1] = [\mathrm{Clon}(\mathbf{2}), \mathrm{Clon}_{Alg}(\mathbf{2})],$$

ya que $T_1^\infty \subset ... \subset T_1^3 \subset T_1^2 \subset T_1^1 = P_1$ es la única cadena de clones entre $\mathrm{Clon}(\mathbf{2})$ y $\mathrm{Clon}_{Alg}(\mathbf{2})$ (ver diagrama de Hasse del reticulado de Post). ■

Referencias

[1] M. Campercholi and D. Vaggione, *Algebraically Expandable Classes*, Algebra Universalis **61** (2009), no. 2, pp. 151-186.

[2] M. Campercholi and D. Vaggione, *Semantical conditions for the definability of functions and relations*, Algebra Universalis **76** (2016), no. 1, pp 71-98.

[3] M. Campercholi, *Algebraically expandable classes of implication algebras*, Int. J. Algebra Comput. **20** (2010), no. 5, 605–617.

[4] M. Campercholi and D. Vaggione, *Algebraic functions*, Studia Logica **98** (2011), no. 1-2, 285–306.

[5] D. Vaggione, *A general sheaf representation theorem*. Preprint.

[6] H. Gramaglia and D. Vaggione, *Birkhoff-like sheaf representation for varieties of lattice expansions*, Studia Logica 56(1/2) (1996), 111-131.

[7] E. L. Post, The two-valued iterative systems of mathematical logic, Annals of Mathematics studies, no. 5, Princeton University Press, Princeton 1941, 122 pp.

[8] S. Burris and H. Sankappanavar, A course in Universal Algebra, Springer-Verlag, New York, 1981.

[9] K. Denecke and S. L. Wismath, Universal Algebra and Applications in Theoretical Computer Science, Chapman & Hall/CRC, 2002.

[10] Lau, D., *On closed subsets of Boolean functions, (A new proof for Post's theorem)*, J. Inform. Process. Cybernet. **EIK 28**, 4 (1992), pp. 149-195

[11] J. Abbott, *Implicational Algebras*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie **11 (59)** (1967), no. 1, 3–23.

[12] S. Cook, The complexity of theorem proving procedures, Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing (1971), pp. 151–158.

[13] H. R. Lewis, Satisfiability problems for propositional calculi, Mathematical Systems Theory 13 (1979), pp. 45–53.