Fundamentos del Análisis Armónico

Grupos Topológicos

Autor:

Caviedes Núñez Juan Andrés

Dirigido por:

PhD. Acosta Gempeler Ernesto

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

VIGILADA MINEDUCACIÓN

Programa de Matemáticas
UNIVERSIDAD ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

1 de abril del 2022

Resumen

En este texto se estudiarán los grupos topológicos como estructura formal y algunas de sus propiedades. En la primera parte de este trabajo se estudian propiedades de los subgrupos, cocientes, componentes conexas, metrizabilidad, conjuntos magros y espacios topológicos vectoriales sobre cuerpos locales, posteriormente se hace énfasis en particular en los grupos topológicos localmente compactos, se estudiarán propiedades generales de estos, se harán comentarios sobre los grupos profinitos y se definirán la integral de Haar y la función modular. Este texto se escribió basado en los apuntes de Linus Kramer.

Palabras clave: Grupo, espacio topológico, compacidad.

Abstract

In this text, the topological groups will be studied as a formal structre, as well as some of their properties. In the first part of this work, properties of subgroups, quotients, connected components, metrizability, meager sets and finite dimensional topological vector spaces over local fields, later an particular enfasis will be made over locally compact groups, in which their general properties will be studied, some remarks will be made on profinite groups and the Haar integral and modular function will be defined. This text is based on the remarks by Linus Kramer.

Key words: Group, topological space, compacity.

Índice

1. Grupos Topológicos

Definición 1. *Un grupo topológico (G,·,$\mathcal{T}$) Consiste de un grupo (G,·) y una topología $\mathcal{T}$ sobre G (no necesariamente Hausdorff) para la cual la aplicación:*

$$q : G \times G \to G$$

$$q(g, h)) = g^{-1}h$$

es continua. Si en particular h=e, el elemento neutro de G, entonces la aplicación de inversión

$$i : G \to G$$

$$i(g) = g^{-1}$$

es también continua. Además, para todo $a \in G$, la traslación a derecha

$$\rho_a(g) = ga^{-1}$$

la traslación a izquierda

$$\lambda_a(g) = ag$$

y la conjugación

$$\gamma_a(g) = aga^{-1}$$

son homeomorfismos de G en sí mismo, con inversos $\lambda_{a^{-1}}$, $\rho_{a^{-1}}$ y $\gamma_{a^{-1}}$ respectivamente.

En particular, los homeomorfismos de grupo de G actúan transitivamente sobre G. De ahí que toda vecindad W de un elemento $g \in G$ puede ser escrita como $W = gU = Vg$, donde $U = \lambda_{g^{-1}}W$ y $V = \rho_{a^{-1}}W$ son vecindades del elemento neutro.
Se escribe únicamente G al referirse al grupo topológico, sin hacer mención explicita de la topología $\mathcal{T}$. Una vecindad del elemento neutro e se dice una vecindad identidad.

Definición 2. *Se define un morfismo $f : G \to K$ entre grupos topológicos G y K como un homomorfismo de grupos que es continuo.*

Ejemplo 1. *Se presentan a continuación algunos grupos topológicos y morfismos conocidos:*

1. *Los grupos aditivos y multiplicativos de los cuerpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y los cuerpos p-ádicos $\mathbb{Q}_p$, dotados de su topología usual, son grupos topológicos. Para cada uno de estos, que son grupos con el producto, la aplicación q es continua*
   La aplicación exponencial, real y compleja son ejemplos de morfismos.

2. *La circunferencia unitaria $U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es un grupo topológico. La aplicación $\exp(2\pi it) = \cos 2\pi y + i \sin 2\pi t$ es un morfismo de $\mathbb{R}$ en $U(1)$.*

3. *Todo morfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de la forma $f(t) = rt$ para un único número real r.*

4. *Todo morfismo $f : U(1) \to U(1)$ es de la forma $f(z) = z^m$, para un único entero m.*

5. *Como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, el grupo $(\mathbb{R}, +)$ tiene dimensión $2^{\aleph_0}$. Entonces el grupo abeliano $\mathbb{R}$ tiene $2^{2^{\aleph_0}}$ endomorfismos aditivos, casi ninguna es continua.*

6. *Sea H el grupo aditivo de los reales, dotado de la topología discreta. Entonces la aplicación idéntica es un morfismo biyectivo, cuyo inverso no es continuo.*

7. *Sea F un cuerpo y si $GL_n(F)$ denota al grupo de matrices cuadradas de tamaño $n \times n$, entonces si F es un grupo topológico, $GL_n(F)$ es un grupo topológico.*

8. *Todo grupo G dotado de la topología discreta, o la topología indiscreta, es un grupo topológico. Con la topología discreta se tiene que toda función es continua, respecto a la indiscreta se tiene un resultado análogo.*

Proposición 1. *Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos topológicos. Entonces el producto $K = \prod_{i\in I} G_i$, dotado de la topología producto, es un grupo topológico. Para cada j la proyección j—esima, $pr_j(\alpha) = \alpha(j)$, es un morfismo abierto. Si H es un grupo topológico y para todo $j \in I$, $f_j : H \to G_j$ es un morfismo, existe un único morfismo $f : H \to K$ tal que $pr_j \circ f = f_j$ es válido para todo $j \in I$.*

$$\begin{tikzcd} K \times K \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_j \times \mathrm{pr}_j"'] & K \arrow[d, "\mathrm{pr}_j"] \\ G_j \times G_j \arrow[r, "q_j"] & G_j. \end{tikzcd}$$

Demostración. Hay que demostrar que la aplicación $q : K \times K \to K$, $q(g,h) = g^{-1}h$, es continua. se denota $q_j : G_j \times G_j \to G_j$ a la aplicación $q_j(g,h) = g^{-1}h$, correspondiente al producto en el grupo j-ésimo, la cual es continua por hipótesis. Entonces se tiene que, para cada j, la aplicación $pr_j \circ q = q_j \circ (pr_j \times pr_j)$ es continua, lo cual implica, utilizando propiedades de la topología producto, que q es continua. Para terminar, sea $f : H \to K$ definida por $f(h)(j) = f_j(h)$. Claramente, $pr_j \circ f = f_j$ y, por lo tanto, f es continua. Además, f es homomorfismo, porque

$$\begin{aligned} & f(gh)(j) \\ = & \quad \langle \text{ Definición de } f \ \rangle \\ & f_j(gh) \\ = & \quad \langle \ f_j \text{ es homomorfismo } \rangle \\ & f_j(g)f_j(h) \\ = & \quad \langle \text{ definición de } f \ \rangle \\ & f(g)(j)f(h)(j) \\ = & \quad \langle \text{ Definición de producto de funciones } \rangle \\ & (f(g)f(h))(j). \end{aligned}$$

□

Lema 1. *Sean G, K grupos topológicos y $f : G \to K$ un homomorfismo de grupos, no necesariamente continuo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *La aplicación f es continua, por tanto, un morfismo de grupos topológicos.*
- *La aplicación f es continua en un punto $a \in G$, es decir, para toda vecindad W de $f(a)$ existe una vecindad V de a tal que $f[V] \subseteq W$*

Demostración. Por un lado, si una función es continua, lo es en todo punto de G. Por otro lado, supóngase que la función f es continua en un punto $a \in G$, y sea $U \subseteq K$ abierto. Si $g \in f^{-1}[U]$, entonces $f(a) = f(ag^{-1}g) \in f(ag^{-1})U$. Entonces existe una vecindad V de a tal que $f[V] \subseteq f(ag^{-1})U$. Luego $ga^{-1}V$ es una vecindad de g, tal que $ga^{-1}V \subseteq f^{-1}[U]$. Así, $f^{-1}[U]$ es abierto. □

Lema 2. *Un grupo topológico G es Hausdorff si y sólo si existe un $a \in G$ tal que $\{a\} \subseteq G$ es cerrado.*

Demostración. Se supone que $\{a\} \subseteq G$ es cerrado. Sea $f : G \times G \to G$ la función continua definida por $f(g,h) = g^{-1}ha$. Entonces la pre-imagen de $\{a\}$ mediante f es la diagonal $\{(g,g) \mid g \in G\} \subseteq G \times G$, que es un cerrado. Así, G es de Hausdorff.
Ahora, si G es de Hausdorff, se tiene directamente que todo conjunto unipuntual es cerrado. □

1.1. Subgrupos

Proposición 2. *Sea H un subgrupo de un grupo topológico G. Entonces H es un grupo topológico respecto a la topología de subespacio. Más aún, la adherencia $\overline{H}$ es un subgrupo de G. Si H es normal, entonces $\overline{H}$ es normal.*

Demostración. A partir de las definiciónes de subgrupo y topología de subespacio, se concluye directamente que H es un grupo topológico. Ahora, como la aplicación q es continua, se tiene que

$$q[\overline{H} \times \overline{H}] = q[\overline{H \times H}] \subseteq \overline{q[H \times H]} = \overline{H}$$

Luego si $g, h \in \overline{H}$, $g^{-1}h \in \overline{H}$, esto es, $\overline{H}$ es un subgrupo de G. Finalmente, si H fuese un subgrupo normal, como

$$\gamma_a[\overline{H}] \subseteq \overline{\gamma_a[H]} = \overline{H}$$

se concluye que $a\overline{H}a^{-1} \subseteq \overline{H}$, por lo tanto, $\overline{H}$ es un subgrupo normal de G. ☐

Lema 3. *Sean G un grupo topológico y $A \subseteq G$ cerrado. Entonces el normalizador de A,*

$$Nor_G(A) = \{g \in G \mid \gamma_g(A) = A\}$$

es un subgrupo cerrado.

Demostración. Se define, para cada $a \in G$ la aplicación $c_a(g) = gag^{-1}$, la cual es continua. Entonces $c_a^{-1}[A] = \{g \in G \mid gag^{-1} \in A\}$ es cerrado. Así,

$$S = \bigcap_{a \in A} c_a^{-1}[A] = \{g \in G \mid \gamma_g(A) \subseteq A\}$$

es un semigrupo cerrado de G. Finalmente, $\mathrm{Nor}_G(A) = S \cap S^{-1}$ es también cerrado. ☐

Lema 4. *Sean G un grupo topológico de Hausdorff, y $X \subseteq G$. Entonces el centralizador*

$$Cen_G(X) = \{g \in G \mid gX = Xg\}$$

es cerrado. En particular, el centro de G es cerrado

Demostración. Sean $x \in X$ y $f : G \times X \to G$ dada por $f(g, x) = gxg^{-1}x^{-1}$. Entonces f es continua y $\mathrm{Cen}_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$ es cerrado al ser la pre-imagen mediante f del cerrado $\{e\}$. Así, como el centralizador de un conjunto es la intersección de los centralizadores de los elementos de éste, se tiene entonces el resultado deseado:

$$\mathrm{Cen}(X) = \bigcap_{x \in X} \mathrm{Cen}(x).$$

☐

Lema 5. *Sea G un grupo topológico de Hausdorff. Si $A \subseteq G$ es un subgrupo abeliano, entonces $\overline{A}$ es un subgrupo abeliano de G.*

Demostración. Como la aplicación conmutador f, $f(g, x) = gxg^{-1}x^{-1}$, es constante sobre $A \times A$, también será constante en $\overline{A \times A} = \overline{A} \times \overline{A}$, por ser f continua. ☐

Lema 6. *Sean G un grupo topológico, $U \subseteq G$ un abierto. Entonces, si $X \subseteq G$, UX y XU son abiertos. En particular, la aplicación $m : G \times G \to G$ dada por $m(g, h) = gh$ y la aplicación q son abiertas.*

Demostración. Para todo $x \in X$, xU y Ux son conjuntos abiertos, y

$$XU = \bigcup_{x \in X} xU, \quad \text{y} \quad UX = \bigcup_{x \in X} Ux,$$

se tiene que UX y UX son abiertos. $\square$

Proposición 3. *Sea G un grupo topológico y $H \subseteq G$ un subgrupo*

- *El subgrupo H es abierto si y sólo si contiene un abierto no vacío*
- *Si H es abierto, entonces H es cerrado*
- *El subgrupo H es cerrado si y sólo si existe un abierto $U \subseteq G$ tal que $U \cap H$ es no vacío y cerrado en U.*

Demostración. Se demuestra cada proposición por separado.

- Sí H que contiene un abierto no vacío U, como $H = UH$, entonces H es abierto por el Lema 6. Ahora, si H es abierto, se tiene de forma trivial que $H \subseteq H$.
- Si H es abierto, entonces aH es abierto para todo $a \in G$. Así,

  $$G - H = \bigcup_{a \in G - H} aH$$

  es también abierto al ser la unión de abiertos, y, por lo tanto, H es cerrado.
- Si $U \cap H$ es no vacío y cerrado en U, entonces $U - H = U - (U \cap H)$ es abierto en U. Se sigue que $(U - H) \cap (U \cap \overline{H}) = (U - H) \cap \overline{H}$ es abierto en $U \cap \overline{H}$ y por consiguiente lo es en $\overline{H}$, por ser $U \cap \overline{H}$ abierto en $\overline{H}$. Pero H es denso en $\overline{H}$, entonces $(U - H) \cap \overline{H} = \emptyset$. Ésto último significa que $U \cap \overline{H}$ es un conjunto abierto de $\overline{H}$ contenido en H, ya que $(U - H) \cap \overline{H} = (U \cap \overline{H}) - H$. Así, aplicando las partes 1 y 2, se tiene que H es cerrado en $\overline{H}$, y, por lo tanto, lo es en G, por ser $\overline{H}$ cerrado en G. El otro sentido se obtiene de forma directa tomando $U = G$.

$\square$

Corolario 1. *Sea G un grupo topológico y $V \subseteq G$ una vecindad de algún elemento $g \in G$. Entonces V genera un subgrupo abierto de G.*

Demostración. Por ser V una vecindad de g, existe un abierto U de G tal que $g \in U \subseteq V$. Entonces, el subgrupo de G generado por V, por contener a U, es abierto. $\square$

Corolario 2. *Sean G un grupo topológico de Hausdorff y $H \subseteq G$ un subgrupo. Si H es localmente compacto en la topología de subespacio, entonces H es cerrado. En particular, todo subgrupo discreto de G es cerrado.*

Demostración. Al ser H localmente compacto, se cuenta con una vecindad compacta $C \subseteq H$ de e. Así, existe un conjunto abierto U en G tal que $e \in U \cap H \subseteq C$. Por ser C compacto en un espacio de Hausdorff, es cerrado en G y, por lo tanto, $U \cap H = U \cap C$ es cerrado en U y no vacío. Así, por la Proposición 3, H es abierto, luego cerrado. $\square$

A continuación se demuestra un lema técnico de la topología general que será una herramienta muy útil a lo largo de este trabajo.

Lema 7. Wallace
Sean $X_1, \ldots, X_k$ espacios de Hausdorff que contienen cada uno conjuntos compactos $A_1, \ldots A_k$, respectivamente. Si W es un subconjunto abierto de $X_1 \times \cdots \times X_k$ que contiene a $A_1 \times \cdots \times A_k$, entonces existen conjuntos abiertos U_j con $A_j \subseteq U_j \subseteq X_j$, para $j = 1, \ldots, k$, tales que

$$A_1 \times \cdots \times A_k \subseteq U_1 \times \cdots \times U_k \subseteq W.$$

Demostración. Si $k = 1$ no hay nada que demostrar, entonces se considera el caso $k = 2$. Sean $A = A_1$, $B = A_2$ y $a \in A$ fijo. Para cada $b \in B$, se considera la vecindad abierta $U_b \times V_b$ de (a, b) tal que $U_b \times V_b \subseteq W$. Ya que $\{a\} \times B$ es compacto, se cuenta con un número finito de puntos $b_i, i = 1, 2, \ldots, n$, tales qué $\{a\} \times B \subseteq (U_{b_1} \times V_{b_1}) \cup \cdots \cup (U_{b_n} \times V_{b_n})$. Si $U_a = U_{b_1} \cap \cdots \cap U_{b_n}$ y $V_a = V_{b_1} \cup \cdots \cup V_{b_n}$, entonces $\{a\} \times B \subseteq U_a \times V_a \subseteq W$. Ahora, se consideran todos los puntos $a \in A$. Como A es compacto, se cuenta con un número finito de puntos $a_1, \ldots a_m$ tales que $A \subseteq U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_m}$ y, por lo tanto, $U_{a_i} \times V_{a_i}$, $i = 1, \ldots, m$ cubren a $A \times B$. Si $U = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m}$ y $V = V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_m}$, se tiene que $A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$, que es lo que se quería.
Ahora, sí $k \geq 3$, se razona por inducción. Mediante el argumento anterior, si $A = A_1$ y $B = A_2 \times \cdots \times A_n$, existen conjuntos abiertos $U_1 \subseteq X_1$ y $V \subseteq X_2 \times \cdots \times X_n$ tales qué $A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$. Por hipótesis (implícita) de inducción, se cuenta con abiertos $U_2, \ldots, U_n$ de $X_2, \ldots, X_n$ tales qué $A_2 \times \cdots \times A_n \subseteq U_2 \times U_n \subseteq V$. Así, se tiene qué $A_1 \times \cdots \times A_n \subseteq U_1 \times U_n \subseteq U \times V \subseteq W$. □

Es de notar que el producto de conjuntos cerrados en un grupo topológico no necesariamente es cerrado. Por ejemplo, en el grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$, los subgrupos $\mathbb{Z}$ y $\sqrt{2}\mathbb{Z}$ son cerrados, pero $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ es un subconjunto denso contable de $\mathbb{R}$ que no es cerrado. Imponiendo una condicón más fuerte en uno de los subconjuntos se logra obtener que el producto es cerrado.

Lema 8. *Sea G un grupo topológico de Hausdorff, y sean $A, B \subseteq G$ cerrados. Si alguno de los dos, A o B, son compactos, entonces $AB \subseteq G$ es cerrado.*

Demostración. Supóngase que A compacto, que B cerrado, y sea $g \in G - AB$. Se va a determinar una vecindad V de g contenida en $G - AB$. Como $g \notin AB$ entonces $A^{-1}g \cap B = \emptyset$, es decir, para todo $a \in A$, $a^{-1}g$ está en el conjunto abierto $G - B$. Así, para cada $a \in A$, como q es continua, existen vecindades abiertas U_a de a y V_a de g, tales que

$$q[U_a \times V_a] \subseteq G - B.$$

Como A es compacto, existen $a_1, \ldots a_n \in A$ tales que $A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}$. Si $U = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}$ y $V = V_{a_1} \cup \cdots \cup V_{a_n}$, se tiene que $q[U \times V] \subseteq G - B$, es decir, $U^{-1}V \subseteq G - B$. Por lo tanto, como $A \subseteq U$, se tiene que $V \subseteq G - AB$, siendo V una vecindad de g. □

1.2. Cocientes

Sea H un subgrupo de un espacio topológico G. Se dota al conjunto G/H, de las coclases a izquierda de H, de la topología cociente respecto a la aplicación $p : G \to G/H$ dada por $p(g) = gH$. Es decir, un subconjunto de G/H es abierto si y sólo si su pre-imagen mediante p es un conjunto abierto en G.

Proposición 4. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Entonces la aplicación cociente p es abierta. El cociente G/H es Hausdorff si y sólo si H es cerrado en G.*

Demostración. Sea $U \subseteq G$ un abierto de G. Por definición de la topología cociente, $p[U]$ será abierto si $p^{-1}[p[U]]$ lo es. Pero $p^{-1}[p[U]] = UH$, que es abierto por el Lema 6.

Ahora, si G/H es Hausdorff, entonces $\{H\} \subseteq G/H$ es cerrado, de donde $H = p^{-1}[\{H\}] \subseteq G$ es también cerrado.

Ahora, se supone que $H \subseteq G$ es cerrado. Entonces, como la aplicación $p \times p : G \times G \to G/H \times G/H$ es abierta, y $W = \{(x, y) \in G{\times}\mathrm{G}|\ x^{-1}y \in G - H\} = q^{-1}[G - H]$ es abierto,

$$(p \times p)[W] = \{(xH, yH) \mid x^{-1}y \notin H\} = G/H \times G/H - \{(gH, gH) \mid g \in G\},$$

es abierto. Así, la diagonal $\{(gH, gH) \mid g \in G\}$ es cerrada en $G/H \times G/H$ y, por lo tanto, G/H es Hausdorff. □

Los resultados obtenidos en esta sección aplican de igual manera al conjunto de coclases por derecha.

Proposición 5. *Sea G un grupo topológico. Si N es un subgrupo normal de G, entonces el grupo G/N es un grupo topológico respecto a la topología cociente en G/N. La aplicación cociente p es un morfismo abierto. El grupo G/N es Hausdorff si y sólo si N es cerrado. En particular, $G/\overline{N}$ es un grupo topológico de Hausdorff.*

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p \times p"] & G \arrow[d, "p"] \\
G/N \times G/N \arrow[r, "\bar{q}"] & G/N
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como N es subgrupo normal de G, entonces la aplicación $\overline{q} : G/N \times G/N \to G/N$ definida por $\overline{q}(gN, hN) = g^{-1}hN$ está bien definida. Además, si $p : G \to G/N$ está definida por $p(g) = gN$, se tiene que $\overline{q} \circ (p \times p) = p \circ q$ es continua. Como p es abierta, $p \times p$ es abierta, y, por tanto, es una aplicación cociente. Así, necesariamente la aplicación $\overline{q}$ es una aplicación continua, lo que hace de G/N un grupo topológico. Lo demás está demostrado por la Proposición 4. □

El lema que sigue es el correspondiente Teorema de Homomorfismos de grupos para grupos topológicos.

Lema 9. *Sea $f : G \to K$ un morfismo de grupos topológicos, y sea $N = ker(f)$. Entonces f se factoriza a través del morfismo abierto p mediante un único morfismo $\overline{f}$. Si f es abierta, entonces $\overline{f}$ es también abierta.*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & K. \\
& G/N \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. La existencia del morfismo $\overline{f}$ se tiene por el primer teorema de isomorfía para grupos. Recuérdese que $\overline{f} : G/N \to K$ se define por $\overline{f}(gN) = f(g)$, que está bien definida y es homomorfismo por ser N el núcleo de f. Claramente $\overline{f} \circ p = f$ y además, al ser p una aplicación cociente, $\overline{f}$ es continua y, por tanto, un morfismo de grupos topológicos. Finalmente, si f es abierta y $W \subseteq G/N$ es abierto, entonces $\overline{f}[W] = \overline{f}[p[p^{-1}[W]]] = f[p^{-1}[W]]$ es abierto. □

Corolario 3. *Sean G y K grupos topológicos, siendo K de Hausdorff. Si $f : G \to K$ es un morfismo de grupos topológicos, entonces f se factoriza a través del morfismo $p : G \to G/\overline{\{e\}}$.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & K. \\ & G/\overline{\{e\}} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\overline{f} : G/\overline{\{e\}} \to K$ definida por $\overline{f}(g\overline{\{e\}}) = f(g)$. Para ver que la función $\overline{f}$ está bien definida, si $g, h \in G$ son tales que $g\overline{\{e\}} = h\overline{\{e\}}$, entonces $f(gh^{-1}) \in f[\overline{\{e\}}] = \overline{f[\{e\}]} = \overline{\{e_K\}} = \{e_k\}$, ya que f es continua y K es de Hausdorff. Por consiguiente $f(g) = f(h)$. Claramente $f = \overline{f} \circ p$. □

1.3. Componentes conexas

Definición 3. *Sea x un punto en un espacio topológico X. La componente conexa de x es la unión de todos los conjuntos conexos de X que contienen a x. Esta unión es cerrada y conexa. Se dice que un espacio topológico X es totalmente disconexo si las únicas componentes conexas de X son los conjuntos unipuntuales.*

La componente conexa del elemento neutro de un grupo G se denota por G°, y se dirá que G° es la componente identidad de G. Como el grupo de homomorfismos de G actúa transitivamente sobre G, el grupo G es totalmente disconexo si y sólo sí $G^\circ = \{e\}$. Es de notar que todo grupo totalmente disconexo es automáticamente Hausdorff.

Proposición 6. *Sea G un grupo topológico. Entonces la componente identidad G° es un subgrupo normal cerrado, y G/G° es un grupo topológico totalmente disconexo de Hausdorff.*

Demostración. G° es un subespacio cerrado de G por tratarse de una componente conexa de G. Como la función $q(g, h) = g^{-1}h$ es continua y $G^\circ \times G^\circ$ es conexo, entonces $q[G^\circ \times G^\circ]$ es un conjunto conexo que contiene el elemento neutro. Por lo tanto $q[G^\circ \times G^\circ] \subseteq G^\circ$, de donde G° es un subgrupo de G. Por otro lado, como, para todo $a \in G$, la función $\gamma_a(g) = aga^{-1}$ es continua y G° es conexo, entonces $\gamma_a[G^\circ]$ es un conjunto conexo que contiene el elemento neutro. Por lo tanto, para todo $a \in G$, $\gamma_a[G^\circ] \subseteq G^\circ$, de donde G° es un subgrupo normal de G.
Para mostrar que $H = G/G^\circ$ es totalmente disconexo, sea $N = p^{-1}H$. Entonces N es un subgrupo normal cerrado de G, por la parte anterior y las propiedades de la aplicación cociente, que contiene a G°. Se considera la restricción de p a N, $\hat{p}$, la cual es abierta, por lo tanto, dota a H de la topología cociente respecto a $\hat{p}$. Sea entonces $V \subseteq N$ un cerrado y abierto de N que contiene a la identidad. Como G° es conexo y contiene a e, necesariamente $vG^\circ \subseteq V$, para todo $v \in V$. De no ser así, existiría una sepración de G°, lo cual es absurdo. Entonces, como $V = p^{-1}(p(V))$, $p(V)$ es abierto y cerrado en H, el cual es conexo, entonces necesariamente $H = p(V)$, de donde $V = N$. Así, N es conexo, luego $N = G^\circ$ □

Corolario 4. *Sea $f : G \to K$ un morfismo de grupos topológicos. Si K es totalmente disconexo, entonces f factoriza a través del morfismo abierto $p : G \to G/G^\circ$,*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & K. \\ & G/G^\circ \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Ya que $f[G^\circ] \subseteq K$ es conexo, G° está contenido en el kernel de f. □

1.4. Metrizabilidad de grupos topológicos

Definición 4. *Una pseudométrica d en un conjunto X es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que*

$$d(x,x) = 0, \quad 0 \leq d(x,y) = d(y,x), \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

para todo $x, y, z \in X$. Si $d(x,y) = 0$ implica que $x = y$, entonces d es una métrica. Una métrica o pseudométrica d en un grupo G se dice invariante a izquierda si la aplicación traslación a izquierda $\lambda_a : G \to G$ es una isometría del espacio métrico, o pseudométrico, (G, d), para todo $a \in G$. En otras palabras, una métrica es invariante a izquierda si

$$d(x,y) = d(ax, ay)$$

para todos $a, x, y \in G$. Una función $l : G \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ se dice función de longitud si satisface que

$$l(e) = 0, \quad l(g) = l(g^{-1}), \quad l(gh) \leq l(g) + l(h)$$

para todos $g, h \in G$. Se sigue que el conjunto $\{g \in G \mid l(g) = 0\}$ es un subgrupo de G. Si l es una función de longitud, entonces

$$d(g,h) = l(g^{-1}h)$$

define una pseudométrica invariante a izquierda. Esta pseudométrica es una métrica si y sólo si $l(g) = 0$ implica qué $g = e$.

Teorema 1. *Sea G un grupo topológico de Hausdorff. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *La topología en G es metrizable por una métrica invariante a izquierda.*
2. *La topología en G es metrizable.*
3. *El elemento neutro tiene una base contable de vecindades.*

Antes de demostrar este teorema es necesario considerar una definición y un lema.

Definición 5. *Se dice que una vecindad de la identidad V es simétrica sí $V = V^{-1}$. Así, si V es una vecindad arbitraria de la identidad, $V \cap V^{-1}$ es una vecindad simétrica de la identidad.*

Lema 10. *Sea G un grupo topológico. Supóngase que $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una colección de vecindades simétricas de la identidad con la propiedad $K_nK_nK_n \subseteq K_{n+1}$ se cumple para todo $n \in \mathbb{Z}$, y con $\langle \cup_{n\in\mathbb{Z}} K_n \rangle = G$. Sí $g \in G$, se define*

$$l(g) = inf\{t \geq 0 \mid (\exists k \mid k \geq 1 : (\exists n_1, \ldots, n_k \mid n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z} : t = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k} \wedge g \in K_{n_1}K_{n_2} \cdots K_{n_k}))\}$$

Entonces l es una función de longitud continua. Más aún, $\{g \in G \mid l(g) \leq 2^n\} \subseteq K_n$ y, por lo tanto, $\cap_{n\in\mathbb{Z}} K_n = \{g \in G \mid l(g) = 0\}$

Demostración. Es de notar que para todo elemento g de G existen números $n_1, \ldots, n_k$ tales que $g \in K_{n_1} \ldots K_{n_k}$, pues la unión de los K_n genera a G y todo K_n es simétrico. Así, $l(g)$ está bien definido.

Ahora, l es una función longitud, pues si $g \in K_{n_1} \cdots K_{n-r}$ y $h \in K_{m_1} \cdots K_{m_s}$, entonces

$$gh \in K_{n_1} \cdots K_{n-r} K_{m_1} \cdots K_{m_s},$$

de donde l satisface la desigualdad triangular por propiedades del ínfimo. Además, al ser K_n simétrico para todo n, se tiene qué $l(g) = l(g^{-1})$. Finalmente, $l(e) = 0$, pues, $e \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Por otra parte, la función l es continua, notando $l(g) \leq 2^n$ siempre que $g \in K_n$. Así, si g es un elemento arbitrario de G y $\epsilon > 0$, se elige n de forma que $2^n \leq \epsilon$ y afirmamos que $|l(g) - l(h)| \leq \epsilon$ para todo $h \in gK_n$. Como $\{g^{-1}h, h^{-1}g\} \subseteq K_n$, se tiene entonces que

$$l(h) = l(gg^{-1}h) \leq l(g) + 2^n \ \wedge \ l(g) = l(hh^{-1}g) \leq l(h) + 2^n$$

De donde $|l(g) - l(h)| \leq 2^n \leq \epsilon$ para todo $h \in gK_n$, por tanto, l es continua.

Finalmente, notando que $K_n \subseteq K_nK_nK_n \subseteq K_{n+1}$, se supone qué $l(g) < 2^n$. Existen entonces $K \geq 1$ y enteros $n_1, \ldots, n_k$ con $g \in K_{n_1} \cdots K_{n_k}$ y $2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k} < 2^n$. Basta entonces con demostrar que si $2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k} < 2^n$, entonces $K_{n_1} \cdots K_{n_k} \subseteq K_n$. Para ello, se debe tener en cuenta que $n_j < n$ para $j = 1, \ddots, k$. Entonces se va a tener qué $K_{n_1} \cdots K_{n_k} \subseteq K_{n-1} \cdots K_{n-1}$. Con esto se tiene el resultado para $k = 1, 2, 3$. Se supone qué $k \geq 4$. Sí $2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k} < 2^{n-1}$, entonces $K_{n_1} \cdots K_{n_k} \subseteq K_{n-1}$ por la hipótesis de inducción, y $K_{n_k} \subseteq K_{n-1}$, con lo cual $K_{n_1} \cdots K_{n_k} \subseteq K_{n-1}K_{n-1} \subseteq K_n$. Finalmente, para el caso en el que $2^{n-1} \leq 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k} < 2^n$. Se considera el mínimo $r \in \{1, \ddots, k\}$ con $2^{n-1} \leq 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_r}$. Entonces $2^{n_1} + \cdots + 2^{n_{r-1}} < 2^{n-1}$ y $2^{n_{r+1}} + \cdots + 2^{n_k} < 2^{n_1}$. Así, por la hipótesis de inducción $K_{n_1} \cdots K_{n_{r-1}} \subseteq K_{n-1}$ y $K_{n_{r+1}} \cdots K_{n_k} \subseteq K_{n-|}$. Por lo cual $K_{n_1} \cdots K_{n_k} \subseteq K_{n-1}K_{n_r}K_{n-1} \subseteq K_{n-1}K_{n-1}K_{n-1} \subseteq K_n$. Nótese que esto se cumple de igual manera cuando $r = 1$ y cuando $r = k$. □

Demostración. (del Teorema 1) La propiedad 1 implica la 2 directamente, así como la 2 implica la 3. Falta entonces demostrar que la 3 implica la 1. Se supone entonces que el elemento neutro tiene una base contable de vecindades $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sí $n \geq 1$, sea $K_n = G$. Ahora, para todo entero no positivo, a partir de la continuidad de la aplicación de multiplicación, se define inductivamente una vecindad simétrica de la identidad $K_n \subseteq V_{-n}$ tal que $K_{n-1}K_{n-1}K_{n-1} \subseteq K_n$. Para entender bien como se hace esto, veamos los primeros pasos del proceso. Sea $K_0 = V_0 \cap V_0^{-1}$. Debido a que la multiplicación triple en G, $G \times G \times G \to G$, es continua en la identidad, existe una vecindad W_1 de la identidad tal que $W_1W_1W_1 \subseteq K_0$. Sea $K_{-1} = (W_1 \cap V_1) \cap (W_1 \cap V_1)^{-1}$. Claramente $K_{-1} \subseteq V_1$ y $K_{-1}K_{-1}K_{-1} \subseteq K_0$. K_{-1} es una vecindad de la identidad y, nuevamente por la continuidad de la multiplicación triple, existe una vecindad W_2 de la identidad tal que $W_2W_2W_2 \subseteq K_{-1}$. Sea $K_{-2} = (W_2 \cap V_2) \cap (W_2 \cap V_2)^{-1}$. Claramente $K_{-2} \subseteq V_2$ y $K_{-2}K_{-2}K_{-2} \subseteq K_{-1}$. Con esto se puede formalizar la recursión. Si l denota la función de longitud definida en el Lema 10, aplicada a la colección $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se tiene que e pertenece a cada elemento de dicha colección, por lo cual $l(g) = 0$ si y sólo sí $g = e$. Así, se tiene que la métrica inducida por la función es invariante a izquierda y continua sobre G. Finalmente, si U es un abierto y g un elemento de U, entonces existe un entero positivo n tal que $gV_n \subseteq U$, por lo tanto, la bola $B_{2^{-n}}(g) = \{h \in G \mid d(g, h) < 2^{-n}\}$ está contenida en $gK_{-n} \subseteq gV_n \subseteq U$, con lo cual d metriza la topología de G. □

Definición 6. *Se dice que un espacio de Hausdorff X es un espacio de Tychonoff, o completamente regular, o $T_{3/2}$, si para todo conjunto cerrado $A \subseteq X$ y todo $b \in X - A$ existe una aplicación continua $\phi : X \to [0, 1]$, tal que $\phi(b) = 0$ y $\phi(A) \subseteq \{1\}$.*

Teorema 2. *Todo grupo topológico de Hausdorff es un espacio de Tychonoff.*

Demostración. Sean $A \subseteq G$ un conjunto cerrado y $b \in X - A$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer qué $b = e$. Defínase $K_n = G$ para $n \geq 1$, $K_0 = G - A$, y de forma inductiva, similarmente a como se hizo en la demostración del teorema 1, se definen, para $n \leq -1$, vecindades de la identidad simétricas K_n tales qué $K_{n-1}K_{n-1}K_{n-1} \subseteq K_n$. Así, por el Lema 10, existe una función de longitud continua l, con $l(e) = 0$ y, sí $l(g) \leq 1$, entonces $g \in K_0 = G - A$. Así, $l(a) \geq 1$ para todo elemento a de A. Por lo tanto, la función $\phi = \text{mín}\{l, 1\}$, es la función deseada. □

1.5. El Teorema de aplicación Abierta y Conjuntos Magros

Durante esta sección, se considera a X como un espacio topológico.

Definición 7. *Un conjunto $N \subseteq X$ se llama raro si $int(\overline{N}) = \emptyset$, o, lo que es equivalente, si existe un subconjunto abierto U de X, denso en X que es disjunto de N. Un conjunto es magro si es la unión contable de conjuntos raros.*

Se puede demostrar sin dificultad que todo subconjunto de un conjunto raro también es raro, qué subconjuntos de conjuntos magros son magros, y que la unión contable de conjuntos magros es también magro.

Otra forma de definir conjuntos magros es la siguiente: un conjunto $M \subseteq X$ es magro si y sólo si existe una familia contable de conjuntos abiertos $(U_n)_{n\geq 0}$ densos en X tal que $M \cap \cap_{n\geq 0} U_n = \emptyset$.

Se dice que X es un espacio de Baire si la intersección de toda familia contable $(U_n)_{n\geq 0}$ de espacios densos en X es también densa. En particular, un espacio de Baire no es magro en sí mismo.

Definición 8. *Se dice que un espacio X es $\sigma-$compacto si este se puede expresar como la unión contable de subespacios compactos.*

Se puede demostrar sin dificultad que $\sigma - compacidad$ implica compacidad local.

Proposición 7. *Teorema de aplicación abierta*
Sea $f : G \to K$ un morfismo sobreyectivo de grupos topológicos de Hausdorff. Si G es $\sigma - compacto$ y K no es magro en sí mismo, entonces f es abierta.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & K \\ & G/\ker(f) \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. A partir del diagrama y del hecho que p sea abierta y que $\overline{f}$ sea biyectiva, permiten suponer entonces que el morfismo f es una biyección. Ahora, para mostrar que su inversa es continua, a partir de la $\sigma - compacidad$ de G, se tiene que $G = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, donde A_n es compacto. Para todo n natural, si se restringe f a A_n, se obtendrá una biyección continua, por tanto, un homeomorfismo. Más aún, cada $f(A_n)$ es compacto, por tanto, cerrado. Ya que $K = cup_{n\in\mathbb{N}} f(A_n)$ no es magro en sí mismo, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(A_m)$ contiene un abierto V no vacío. Sea entonces $U = f^{-1}(V)$, el cual es abierto, y al restringir f a U se obtiene un homeomorfismo. Se sigue del Lema 1 que f^{-1} es continua. □

Definición 9. *Se dice que un grupo topológico de Hausdorff G es compactamente generado si existe un subconjunto compacto C de G que genera al grupo G.*

Fácilmente se comprueba que un grupo compactamente generado es $\sigma - compacto$.

Corolario 5. *Sea $f : G \to K$ un morfismo sobreyectivo de grupos topológicos de Hausdorff. Si G es compactamente generado y K es un espacio de Baire, entonces f es abierta.*

Demostración. Sí G es compactamente generado, será entonces $\sigma - compacto$. Además, si K es un espacio de Baire, K no es magro en sí mismo, cumpliendo así las hipótesis del teorema de aplicación abierta. □

Definición 10. *Sea X un espacio topológico. Al complemento de un conjunto magro se le dice comagro. Es importante notar que esto no es lo mismo que ser no magro. Todo subconjunto de X que contiene a un conjunto no magro es también comagro, y la untersección contable de conjuntos comagros es comagro. Si $V \subseteq X$ es abierto y $A \subseteq X$ es un subconjunto arbitrario, se dice que A es comagro en V sí $A \cap V$ es comagro en el subespacio V. Para esto, no es necesario que $A \subseteq V$.*

Lema 11. *Sea V un abierto en el espacio topológico X*

1. *Un conjunto $M \subseteq V$ es magro en el subespacio V si y sólo si M es magro.*
2. *Si A es un subconjunto comagro de X, entonces A es comagro en V.*

Demostración. Para la primera parte, se trabaja con conjuntos raros: Sea $N \subseteq V$ un conjunto raro en el subespacio V. Entonces, existe un conjunto abierto y denso $W \subseteq V$ que es disjunto de N. Esto es, $N \subseteq V \subseteq \overline{W}$. Así $W \cup (X - \overline{W})$ es denso en X y disjunto de N, por lo tanto, N es extraño en X. En el otro sentido, si la adherencia de N en V contiene un abierto no vacío U, necesariamente $U \subseteq \overline{N}$. Así, extendiendo esta demostración a uniones contables, se tiene el resultado deseado. Si en particular se considera $M = X - A$ magro, entonces $M \cap V = V - A$ es magro en el subespacio V por la primera parte de este lema. Así A es comagro en V. □

Lema 12. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una colección de espacios topológicos. Sea X la unión disjunta de los X_i. Entonces un conjunto $M \subseteq X$ es magro si y sólo si $M \cap X_i$ es magro en X_i para todo $i \in I$.*

Demostración. Si $M \subseteq X$ es magro, entonces $M \cap X_i$ es magro en X_i para todo i por el Lema 11. Ahora, si $N \subseteq X$ es tal que $N \cap X_i$ es raro en X_i para todo $i \in I$, se define un conjunto denso y abierto $W_i \subseteq X_i$ el cual es disjunto de $N \cap X_i$. Entonces $W = \cup_{i\in I} W_i$ es abierto y disjunto de N, Además de ser denso en X. Por lo tanto, N es raro, de donde si $M_i = M \cap X_i$ es magro para cada $i \in I$, entonces se puede escribir como la unión contable de conjuntos raros en X_i:$M_i = \cup_{n\geq 0} N_{n,i}$. Luego $N_n = \cup_{i\in I} N_{n,i}$ es raro y $M = \cup_{n\geq 0} N_n$ es magro. □

Definición 11. *Sí $A \subseteq X$, se define*

$$O(A) = \cup\{U \subseteq X \,:\, U \text{ es abierto y } A \text{ es comagro en } U\}$$

$O(A)$ es abierto y puede ser vacío.

Teorema 3. *Teorema de Categorización de Banach*
Sí $O(A) \neq \emptyset$, entonces A es comagro en $O(A)$.

Demostración. Considérense las clases $\mathcal{C}$ de conjuntos abiertos de X que satisfacen las siguientes propiedades: Son no vacíos, disjuntos 2 a 2 y A es comagro en cada elemento de $\mathcal{C}$. Si A es comagro en el conjunto abierto U, entonces $\mathcal{C} = \{U\}$ es una de tales clases. El conjunto P de todas estas clases es no vacío y está parcialmente ordenado por la inclusión. Todo subconjunto linealmente ordenado L de P está acotado superiormente en P por $\cup L$. Así, P con la inclusión es un conjunto inductivo y, por el Lema de Zorn, P tiene elementos maximales. Si $\mathcal{C}$ es uno de estos, entonces $W = \cup\mathcal{C}$ es subconjunto de $O(A)$.
Ahora, si se define $K = O(A) - W$, K es raro. Para mostrar esto, se demuestra que el conjunto cerrado $B = \overline{O(A)} - W$ tiene interior vacío. De lo contrario, existiría un abierto $V \subseteq B$ disjunto con W, por tanto, existiría un u en V que también pertenece a O(A), Así, existiría un abierto U que contiene a U en el cual A es comagro, luego A sería comagro en $V \cap U \subseteq$ por el Lema 12.2, entonces $C \cup \{U \cap V\}$ sería más grande (en el sentido de la inclusión) que C, lo cual es absurdo, pues C es un elemento maximal. Se concluyo entonces que B no tiene interior vacío, luego K es raro.
A es comagro en W, pues si $M = W - A$, se tiene que para todo elemento U de C el conjunto $U \cap M$ es magro en U por definición de C, luego M es magro en W por el Lema 13. Finalmente, se tiene que $O(A) = M \cup W$, donde M es magro en X, luego es magro en O(A) por el Lema 12.1. entonces, se tiene qué $O(A) - A = (M - A) \cup (W - A)$. Al ser $W - A$ magro en W, también será magro en $O(A)$ por el Lema 13.2. Así, $O(A) - A$ es la unión de dos conjuntos magros en $O(A)$, luego A es comagro en $O(A)$. □

Lema 13. *Sea G un grupo topológico. Entonces $O(\emptyset) = G$ y G es magro, o $O(\emptyset) = \emptyset$.*

Demostración. Se tiene que el conjunto $O(\emptyset)$ es invariante bajo traslación a izquierda. Los únicos conjuntos que satisfacen dichas condiciones son $\emptyset$ y G mismo. Sí $G = O(\emptyset)$, entonces G es magro por el teorema de Categorización de Banach. $\square$

Definición 12. *Se dice que un subconjunto A de un espacio topológico se dice Baire medible, o casi abierto, si existe un abierto V tal que la diferencia simetría entre A y V es magro.*

Lema 14. *Si $A \subseteq X$ es Baire medible y no magro, entonces O(A) es no magro y en particular no vacío.*

Demostración. Sea $V \subseteq X$ un abierto tal que $M = (V \cup A) - (V \cap A)$ es magro. Ya que A no es magro en sí mismo, como $A \subseteq V \cup M$, el conjunto V no es magro.

$\square$

Teorema 4. *Sea G un grupo topológico. Sí $A, B \subseteq G$ son no magros, entonces $O(A)O(B) \subseteq AB$. Si A es Baire medible y no magro, entonces $A^{-1}A$ es una vecindad de la identidad.*

Demostración. Sí $g \in O(A)O(B)$, se tiene entonces que tanto O(A) como O(B) son no vacíos, y que $O(A) \cap g(O(B)^{-}1 \neq \emptyset$. Como λ_g y la aplicación inversión son continuas, se tiene que

$$gO(B)^{-1} = g(O(B^{-1}) = O(GB^{-1}$$

Así $W = O(A) \cap O(gB^{-1}) \neq \emptyset$. Por el lema 11 y por el teorema de Categorización de Banach, tanto A como gB^{-1} son comagros en W, por tanto, su intersección es comagro en W. Por el Lema 13, el conjunto vacío no es comagro en W, ya que G no es magro al contener a A y a B. Así, $A \cap gB^{-1} \neq \emptyset$, de donde $g \in AB$. Si A fuese Baire medible y no magro, por el lema $\square$

Corolario 6. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo. Si H contiene un conjunto Baire medible que no es magro, entonces H es abierto.*

Demostración. Si H contiene a un conjunto Baire medible que no es magro, por el teorema anterior, $H^{-1}H$ es una vecindad de la identidad, por tanto, contiene un abierto no vacío, de allí que sea abierto por la Proposición 3. $\square$

Proposición 8. *Los conjuntos Baire medibles de un espacio topológico X forman una $\sigma - algebra$ que contiene a todos los abiertos. Así todo conjunto de Borel en X es Baire medible.*

Demostración. Todo conjunto abierto es Baire medible, en particular, el conjunto abierto es Baire medible. Sea entonces $A \subseteq X$ Baire medible. Para demostrar que su complemento es Baire medible, sea U un abierto tal que $(U \cup A) - (U \cap A)$ es magro. Si $V = X - \overline{U}$, notando que $M = \overline{U} - U$ es raro, se tiene que la diferencia simétrica de dos conjuntos es igual a la diferencia simétrica de sus complementos, de allí que

$$(V \cup B) - (V \cap B) = (\overline{U} \cup A) - (\overline{U} \cap A) \subseteq ((U \cup A) - (U \cap A)) \cup M$$

El cual es magro, de donde B es Baire medible. Finalmente, si $(A_n)_{n \geq 0}$ es una colección de conjuntos Baire medibles, para cada A_n existe un abierto U_n tal que $M_n = (A_N \cup U_n) - (A_n \cap U_n)$ es magro. Si A es la unión de los elementos de la colección, M es la unión de los conjuntos magros y U es la unión de los conjuntos abiertos, entonces

$$A_n - U \subseteq A_n - U_n \subseteq M_n$$

Implica que $A - U \subseteq M$, y bajo un argumento análogo, se tiene entonces que $U - A \subseteq M$. Por tanto,

$$(A \cup U) - (A \cap U) = (A - U) \cup (U - A) \subseteq M$$

Es magro. Así, los conjuntos Baire medibles forman una $\sigma - algebra$.Además, como todo conjunto abierto es Baire medible, todo conjunto de Borel es Baire medible. $\square$

Definición 13. *Se dice que un espacio topológico X es de Lindelöf si toda cubierta abierta tiene una sub cubierta contable.*

Teorema 5. *Sean G, K grupos topológicos y $f : G \to K$ un homomorfismo de grupos. Si K es Lindelöf y G no es magro en sí mismo, y para todo abierto U de K, $f^{-1}(U)$ es Baire medible, entonces f es continua.*

Demostración. Todo cerrado en un espacio de Lindelöf es de Lindelöf. Sin perdida de generalidad, se supone que K es la adherencia de $f(G)$. Sea $V \subseteq K$ una vecindad de la identidad. Sea U una vecindad de la identidad tal que $UU^{-1} \subseteq V$. Se tiene por suposición que $E = f^{-1}(U)$ es Baire medible. Ahora, como K es Lindelöf y $f(G)$ es denso, existen elementos $G_n \in G$ tales qué $K = \cup_{n\geq 0} f(g_n)U$. De donde $G = \cup_{n\geq} g_n E$. Como G no es magro, E no puede ser magro, por tanto, $E^{-1}E$ es una vecindad de la identidad por el teorema 4, y $f(E^{-1}E) \subseteq V$. Se sigue entonces que f es continua en el elemento neutro de G, de donde es continua y es así un morfismo de grupos topológicos. □

Definición 14. *Se dice que una aplicación entre espacios topológicos es Borel medible si la pre imagen de todo abierto es un conjunto de Borel.*

Corolario 7. *Si un grupo topológico G es localmente compacto, o bien, completamente metrizable, y un grupo topológico K es $\sigma-$compacto, o bien, $2-$contable, entonces un homomorfismo de grupos $f : G \to K$ es continuo si y sólo si f es Borel medible.*

Demostración. Si f es Borel medible, se satisfacen las condiciones del teorema 5, mientras que si f es continua, la pre imagen de todo abierto va a ser abierto, en particular, va a ser un conjunto de Borel. □

1.6. Espacios Topológicos Vectoriales sobre Cuerpos Locales

Definición 15. *Un Valor absoluto en un cuerpo F es una aplicación no nula*

$$|-| : F \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ con\ |0| = 0$$

Que satisface la desigualdad triangular y es multiplicativa, esto es,

$$|a + b| \leq |a| + |b| y |ab| = |a||b|$$

para cualesquiera $a, b \in F$.

Se concluye entonces que $|a| > 0$ para todo $a \in F^*$. Este valor absoluto determina una métrica, por tanto, una topología sobre F. Si |a|=1 para todo $a \in F^*$, se dice que el valor absoluto es trivial. El campo F se dice un campo local si, dotado de la topología heredada por un valor absoluto no trivial, es localmente compacto.

Lema 15. *Sea $\mathbb{K}$ un campo local. Para todo $r > 0$, el conjunto*

$$B_r^{\mathbb{K}}(0) = \{a \in \mathbb{K} : |a| \leq r$$

es compacto. En particular, $\mathbb{K}$ es $\sigma - compacto$

Demostración. Sea C una vecindad compacta de 0. Entonces, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_r^{\mathbb{K}}(0) \subseteq C$, por lo tanto, la bola misma es compacta. Si a es un elemento de $B_r^{\mathbb{K}}(0)$ tal que $|a| < \frac{1}{r}$, el cual se puede elegir, ya que el valor absoluto no es trivial, entonces $\frac{1}{a} B_r^{\mathbb{K}}(0) = B_{\frac{\epsilon}{|a|}}^{\mathbb{K}}(0)$ es compacto, por tanto, $B_r^{\mathbb{K}}(0) \subseteq B_{\frac{\epsilon}{a}}^{\mathbb{K}}(0)$ es también compacto. □

Definición 16. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo local. Un espacio Topológico Vectorial sobre K es un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$ el cual es un grupo topológico de Hausdorff, tal que la multiplicación por escalar es continua. Un morfismo de espacios topológicos vectoriales sobre $\mathbb{K}$ es una aplicación continua y $\mathbb{K} - Lineal$.*

Teorema 6. *Sea E un espacio topológico vectorial sobre un cuerpo local $\mathbb{K}$.Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *E tiene dimensión finita.*
- *E es un espacio topológico vectorial isomorfo a $\mathbb{K}^m$ para algún $m \geq 0$*
- *E es localmente compacto*

Demostración. Si E tiene dimensión finita y $v_1, \ldots, v_m$ es una base para E, entonces la aplicación f : $\mathbb{K}^m \to E$ dada por $f(z_1, \ldots, z_m) = z_1 v_1 + \cdots + z_m v_m$ es un morfismo biyectivo de espacios vectoriales. Si se dota $\mathbb{K}$ de la norma de cajas:

$$|(z_1, \ldots, z_m)| = max\{|z_1|, \ldots, |z_m|\}$$

y V_ϵ el conjunto de los elementos de $\mathbb{K}^m$ con norma menor que ϵ, se define entonces para $\delta > 0$ el conjunto $L_\delta = \{z \in \mathbb{K} : |z| > \delta$. Se supone sin perdida de generalidad que $\epsilon < 1$ y que existe un $a \in \mathbb{K}$ tal que $|a| = \epsilon$. Sea entonces $S_\epsilon = \{u \in \mathbb{K} : |u| = \epsilon$. Entonces S_ϵ es compacto, por tanto, su imagen mediante f es cerrada en E. Entonces existe un $\delta > 0$ y una vecindad abierta V de 0 tal que la imagen W de $L_\delta \times V$ bajo la multiplicación está contenida en $E - f(S_\epsilon$. Entonces, como

$$W = \cup\{zV : 0 < |z| < \delta\}$$

se tiene que W es abierto. Más aún, para todo $s \in L_1$ se tiene que $sw \in W$, siempre que w sea elemento de W. Entonces si u es un vector con norma r mayor que ϵ, existe entonces una constante b tal que $|b| = \epsilon r^{-1}$. Entonces $bu \in S_\epsilon$ y $|b| < 1$, por lo cual $f(u)$ no pertenece a W, de donde se concluye qué $W \subseteq f(v_\epsilon)$. Así, se tiene la continuidad de la inversa de f en 0, por tanto, en todo punto, con lo cual es un morfismo
Si E es un espacio topológico isomorfo a $\mathbb{K}$, se tiene directamente que es localmente compacto, pues $\mathbb{K}$ es localmente compacto, luego su m-esima potencia también lo es, por lo cual el isomorfismo garantiza la compacidad local de E.
Finalmente, se supone que E es localmente compacto. Sea W una vecindad compacta de 0 y $a \in \mathbb{K}$ tal que $0 < |a| < 1$. Existe entonces un conjunto finito A contenido en E tal que $W \subseteq A + aW$. Sea F el espacio lineal generado por A. Se tiene qué $W \subseteq F + aW$. Iterando esta inclusión se tiene entonces que $W \subseteq F + a^m W$, para $m \geq 1$. Sea $w \in W - F$, Como F es cerrado, existe una vecindad simétrica U tal que $(W + U) \cap F = \emptyset$, de donde w no pertenece a $F + U$. Por otra parte, por el Lema de Wallace aplicado al compacto $\{0\} \times W \subseteq \mathbb{K} \times E$, existe $\delta > 0$ tal que $zW \subseteq U$ para todo $z \in L_\delta$. Pero, si m es suficientemente grande, $|a^m| = |a|^m < \delta$. Luego $am \subseteq U$, por tanto $w \in F + a^m W \subseteq F + U$, lo cual es absurdo. Entonces W está contenido en F. Finalmente, para mostrar que $E = F$, basta con notar que para todo elemento u de E, existe un $\delta > 0$ tal que zu pertenece a W, para todo $z \in L_\delta$. Así, W genera E y $F = E$. □

2. Grupos Localmente Compactos y la Integral de Haar

2.1. Propiedades Generales de los Grupos Localmente Compactos

Definición 17. *Se dice que un grupo topológico G es localmente compacto (Respectivamente compacto) si la topología en G es Hausdorff y localmente compacta (Respectivamente compacta).*

Proposición 9. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces un subgrupo H es cerrado si y sólo si H es localmente compacto. Si H es un subgrupo cerrado, entonces G/H es localmente compacto*

Demostración. Un subespacio cerrado de un espacio localmente compacto es localmente compacto, cumpliendo Así la primera implicación, y en el otro sentido se tiene que un subgrupo localmente compacto de un grupo topológico de Hausdorff es cerrado por el corolario 2.
Sea ahora H un subgrupo cerrado de G, $g \in G$. Si V es una vecindad abierta de la identidad con adherencia compacta, entonces $p(Vg)$ es una vecindad abierta de g, pues la aplicación cociente p es abierta. Así, $p(\overline{V}g)$ es una vecindad compacta de gH. □

Lema 16. *Sea G un grupo localmente compacto y H un subgrupo cerrado de índice contable. Entonces H es abierto.*

Demostración. Sea $(g_n)_{n\geq 0}$ una colección contable de elementos de G tales qué $G = \cup_{n\geq 0} g_n H$. Al ser G un espacio de Baire, y las coclases $g_n H$ cerrados, existirá entonces un índice m tal que $g_m H$ tiene interior no vacío. Por lo tanto, $H = \lambda_{g_m^{-1}} g_m H$ tiene interior no vacío y es abierto por la Proposición 3. □

Lema 17. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces G tiene un subgrupo abierto $\sigma - compacto$, En particular, todo grupo conexo localmente compacto es $\sigma - compacto$*

Demostración. Si C es una vecindad simétrica de la identidad y C es compacto, entonces el generado por C, H, es $\sigma - compacto$, pues $H = C \cup CC \cup CCC \cup \cdots$. Como C contiene un abierto no vacío, H es abierto. □

Proposición 10. *Sean G un grupo localmente compacto y $\sigma - compacto$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una colección contable de vecindades de la identidad. Entonces existe un subgrupo normal N que es compacto, con $N \subseteq \cap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ tal que G/N es metrizable*

Demostración. En esta prueba se utilizan varios resultados del Lema 10.
Como G es $\sigma - compacto$, existe una colección de compactos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales qué $G = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Se define entonces, para $n \geq 0$, $L_n = A_0 \cup \cdots \cup A_n$. Si se define a $K_n = G$ sí $n \geq 1$. Para enteros $n \leq 0$, se van a definir de forma recursiva las vecindades de la identidad K_n simétricas como sigue:
Dado K_{n+1}, se toma una vecindad de la identidad W tal que $\gamma_a(b) = aba^{-1} \in K_{n+1}$ para todo $(a, b) \in L_{-n} \times W$. La existencia de W se tiene garantizada por el Lema de Wallace, considerando el compacto L_{-n}, y el hecho qué $\gamma_a(e) = e$. Ahora, tomando vecindades simétricas de la identidad $K_n \subseteq W \cap V_{-n}$ tal que $K_n K_n K_n \subseteq K_{n+1}$. Sí l denota la función de longitud continua dada en el Lema 10. Entonces $n = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{g \in G : l(g) = 0\}$ es un subgrupo compacto de G. Para demostrar que N es un subgrupo normal, sea $a \in L_m$, se tiene que $a \in L_{m+s}$ para todo $s \geq 0$. Sí $g \in N$, entonces $g \in K_{-m-s}$ para todo $s \geq 0$. Así, $\gamma_a(g) \in K_{-m-s+1}$ para todo $s \geq 0$. Como $K_n \subseteq K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, de allí que $\gamma_a(g) \in N$, por lo tanto, N es normal en G.
Como $l(g) = l(h)$ se cumple siempre que $g^{-1}h \in N$, se obtiene que una función de longitud bien definida $\bar{l}$ en G/N, dada por $\bar{l}(gN) = l(g)$. Ya que la aplicación p es cociente, $\bar{l}$ es continua. Además, $\bar{l}(gN) = 0$ si y sólo sí $g \in N$. Si se considera la métrica $\bar{d}(gN, hN) = l(g^{-1}h)$ es continua e invariante a izquierda sobre G/N. Falta entonces demostrar que $\bar{d}$ determina una topología en G/N. Sea $W \subseteq G/N$ una vecindad simétrica de la identidad. Se afirma que existe un entero $m \leq 0$ con $p(K_m) \subseteq W$. Sea $U = p^{-1}(W)$. Entonces U es una vecindad abierta de la identidad y $N \subseteq U$. Se supone que no existe un $m \leq 0$

con $K_m \subseteq U$, entonces $(K_n - u)_{n\leq 0}$ es una colección anidada de conjuntos no vacíos. De ser Así, $\cap(K_n - u) = N - U$ sería no vacío, lo cual es absurdo. Entonces existe un entero m con $p(K_m) \subseteq W$. Así, sí $g \in G$, entonces $\{hN \in G/N : \overline{d}(hN, gN) < 2^m\} \subseteq p(g)W$. Por lo tanto, la métrica $\overline{d}$ determina una topología en G/N. $\square$

Definición 18. *Se dice que un espacio topológico de Hausdorff no tiene subgrupos pequeños si existe una vecindad de la identidad U tal que el único subgrupo de G contenido en U es el subgrupo trivial $\{e\}$, Si G no tiene subgrupos pequeños y K es un grupo topológico, si existe un morfismo inyectivo $f : K \to G$ de grupos topológicos, entonces K tampoco tiene subgrupos pequeños.*

Nótese que es equivalente decir que existe una vecindad de la identidad que no contiene subgrupos no triviales cerrados, ya que G es regular.

Corolario 8. *Sea G un grupo localmente compacto que no tiene subgrupos pequeños. Entonces G tiene un subgrupo abierto metrizable.*

Demostración. Sea U una vecindad de la identidad que no contiene subgrupos triviales de G. Por el lema 17, el grupo G tiene un subgrupo abierto y $\sigma - compacto$ H. Por la proposición 10, considerando la colección constante $U_n = U \cap H$, para $n \in \mathbb{N}$, existe un subgrupo normal y compacto N, que es trivial, por tanto, H es metrizable. $\square$

Lema 18. *Sean G un grupo localmente compacto y V una vecindad abierta y compacta de la identidad. Entonces V contiene un subgrupo abierto H de G.*

Demostración. Aplicando el Lema de Wallace al compacto $V \times \{e\} \subseteq V \times V$, existe una vecindad abierta de la identidad U que es simétrica, con $U \subseteq V$ tal que $VU \subseteq V$. En particular, se tendrá qué $UU \subseteq V$. Si se repite este proceso tantas veces como sea necesario, se tiene que el subgrupo abierto H generado por U esta contenido en V. $\square$

Lema 19. *Sea X un espacio compacto y de Hausdorff, y $x \in X$. Entonces el conjunto*

$$Q(x) = \cap\{D \subseteq X : x \in D \wedge D \textit{ es cerrado y abierto}\}$$

es conexo. El conjunto $Q(x)$ se conoce como una cuasí-componente de x.

Demostración. Por definición, $Q(x)$ es cerrado y contiene a X. Se demuestra por contradicción, sean A, B conjuntos disjuntos y cerrados, tales que $x \in A$ y $Q(x) = A \cup B$. Por hipótesis X es compacto y de Hausdorff, por lo tanto, es normal, luego existen abiertos disjuntos $U, V \subseteq X$, con $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Sea entonces $C = X - (U \cup V)$, notando que C y $Q(X)$ son disjuntos. para todo $c \in C$ se puede elegir entonces un conjunto W_c que sea abierto y cerrado que contenga a x pero no contenga a c. Entonces los abiertos $X - W_c$ forman una cubierta de C, luego existe una sub cubierta finita de C. Entonces $W = W_{c_1} \cap \cdots \cap W_{c_n}$ es disjunto de C, además, es cerrado y abierto, por lo cual $Q(x) \subseteq W$. Al ser W disjunto de C, se tiene entonces que $W \subseteq U \cap V$. Si se define entonces $Y = U \cap (X - W)$ este va a ser abierto, y $Z = V \cap W$ también es abierto y contiene a B. Como $X = Y \cup Z$ y $Y \cap Z = \emptyset$, el conjunto Y es entonces cerrado, por lo cual contiene a $Q(x)$. Se sigue entonces que $B = \emptyset$. $\square$

Lema 20. *Sea X un espacio localmente compacto y totalmente disconexo. Sí $x \in X$, entonces x tiene vecindades abiertas compactas arbitrariamente pequeñas.*

Demostración. Sea V una vecindad de x. Sí $A = \overline{V} - V$, se tiene el resultado directamente si A fuese vacío, tomando $U = V$. Ahora, si $A \neq \emptyset$, teniendo en cuenta que X es totalmente disconexo, entonces $Q(x) = \{x\}$, por el Lema 19. Entonces, para todo $a \in A$, existe una vecindad compacta $U_a \subseteq V$ de x que no contiene a a, la cual es abierta en $\overline{V}$. Luego $\cap\{U_a : a \in A\} \cap A = \emptyset$. Así, existen m puntos tales que $U = U_{a_1} \cap \cdots \cap U_{a_m}$ es disjunto de A. Por lo tanto, U es cerrado y abierto en $\overline{V}$, de donde se tiene el resultado, pues U es abierto en X. $\square$

Teorema 7. *Teorema de van Dantzig*
Sea G un grupo localmente compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- *G es totalmente disconexo*
- *Toda vecindad de la identidad en G contiene un subgrupo abierto*

Demostración. Si G es totalmente disconexo, y U es una vecindad de la identidad, por el Lema 20, existe una vecindad de la identidad V, que es compacta y abierta, con $V \subseteq U$, luego por el Lema 18, existe un subgrupo abierto $H \subseteq V$. Ahora, suponiendo la segunda proposición, sea $g \in G - \{e\}$. Existe entonces un subgrupo abierto $H \subseteq G - \{g\}$, por tanto, no existe ningún conjunto conexo que contenga tanto a e como a g. Esto es, G es totalmente disconexo. □

Corolario 9. *Si un grupo localmente compacto G es totalmente disconexo y no tiene subgrupos pequeños, G es discreto.*

Demostración. Al ser G totalmente disconexo, por el Teorema de Van Dantzing, toda vecindad de la identidad de G contiene un subgrupo abierto, pero G no tiene subgrupos pequeños, Así toda vecindad de la identidad necesariamente es abierta, por tanto, todo subconjunto de G es abierto. Esto es, G está dotado de la topología discreta. □

Teorema 8. *Teorema fuerte de van Dantzing*
Sea G un grupo compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- *G es totalmente disconexo.*
- *Toda vecindad de la identidad contiene un subgrupo normal y abierto.*

Demostración. Si toda vecindad de G contiene un subgrupo normal y abierto, se tiene por el Teorema de van Dantzing que G es totalmente disconexo. Ahora, si G es totalmente disconexo, nuevamente por el Teorema de van Dantzing, si U es una vecindad de la identidad arbitraria, existe un subgrupo abierto H tal que $H \subseteq U$. Teniendo que $G = \cup G/H$ es compacto, se concluye que G/H es finito. Si N denota el núcleo de la acción de F sobre G/H, N tiene índice finito en G y $N = \cap\{\gamma_a(H) : a \in G\}$ es cerrado. Ahora, como G/N es finito, será discreto, por tanto, N es abierto. Así, $N \subseteq H \subseteq U$. □

2.2. Comentarios sobre Grupos Profinitos

Un grupo compacto que satisface las condiciones del teorema fuerte de van Dantzing se conoce como un grupo profinito. Sea $(F_i)_{i\in I}$ una familia de grupos finitos. Si se dota a cada grupo F_i de la topología discreta, cada uno de estos va a ser compacto y el producto

$$G = \prod_{i\in I} F_i$$

es un grupo compacto y totalmente disconexo, como se demuestra a continuación

Teorema 9. *El producto de espacios totalmente disconexos es totalmente disconexo.*

Demostración. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una colección de espacios totalmente disconexos. Se define entonces $X = \prod_{i\in I} X_i$ y se supone que $C \subseteq X$ es conexo y no vacío. Como cada X_i es totalmente disconexo, $pr_i(C) \subseteq X_i$ es para todo $i \in I$ un conjunto unipuntual, por lo tanto, C mismo es unipuntual. □

Definición 19. *Sea G un grupo. Una representación matricial de G es un homomorfismo $\Lambda : G \to GL_n(K)$. Se dice que Λ es una representación fiel si es un monomorfismo.*

Lema 21. *Teorema débil de Peter-Weyl*
Sean G un grupo profinito y $g \in G - \{e\}$. Entonces existe un entero $n \geq 1$ y un morfismo de grupos topológicosρ :$G \to GL_n(\mathbb{C})$ con $\rho(G) \neq I_n$, donde I_n es la matriz identidad de tamaño n.

Demostración. Por el Teorema fuerte de van Dantzing, existe un subgrupo abierto $N \subseteq G\{g\}$. Entonces $F = G/N$ es un grupo finito con $gN \neq N$. Sea $f : F \to GL_n(\mathbb{C})$ una representación fiel, la cual existe mediante el embebimiento de F en el grupo-anillo $\mathbb{C}[F]$, que se definirá más adelante. Entonces

$$\rho = f \circ p : G \to G/N \to GL_n(\mathbb{C})$$

□

Proposición 11. *Sea G un grupo profinito. Entonces existe una familia de grupos finitos $(F_i)_{i\in I}$ y un morfismo uno a uno y cerrado $f : G \to \prod_{i\in I} F_i$. Así G es isomorfo como grupo topológico a un subgrupo cerrado del producto de grupos finitos.*

Demostración. Si I denota el conjunto de todos los subgrupos normales y abiertos de G, se define para cada $N \in I$ la coclase $F_N = G/N$, donde $f_N(g) = gN$. Entonces cada F_N es un grupo finito, y la función $f : G \to \prod : N \in IF_N$ es un morfismo dado por el producto de los f_n. Como los subgrupos normales y abiertos forman una base de vecindades de la identidad en G, por el teorema fuerte de van Dantzing, se tiene que el morfismo f es inyectivo. Así, al ser G compacto, f es cerrada. □

2.3. Integral de Haar

Sea X un espacio de Hausdorff. El soporte de una aplicación continua $\phi : X \to \mathbb{R}$ es el conjunto cerrado

$$supp(\phi) = \overline{\{x \in X : \phi(x) \neq 0\}}$$

Se dice que ϕ tiene soporte compacto si $supp(\phi)$ es compacto. Las funciónes reales y continuas con soporte compacto forman un espacio vectorial que se denota con $C_c(X)$. Para $\phi, \psi \in C_c(X)$ se escribe $\phi \leq \psi$ si, para todo $x \in X, \phi(x) \leq \psi(x)$.Las funciónes no negativas en $C_c(X)$ forman un cono positivo que se denota por

$$C_c{}^+ = \{\phi \in C_c(X) : 0 \leq \phi\}$$

Nótese que $C_c(X)$ es un espacio vectorial normado respecto a la norma del supremo

$$|\phi|_\infty = sup\{\phi(x) : x \in X\}$$

Lema 22. *Sea X un espacio localmente compacto y $C \subseteq X$ compacto. Entonces existe una aplicación continua $\phi : X \to [0,1]$ con soporte compacto tal que $\phi(C) \subseteq \{1\}$*

Demostración. Para todo $c \in C$, se toma una vecindad abierta U_c de c con adherencia compacta. Al ser C compacto, existen $c_1, \ldots, c_m \in C$, con $C \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n} = U$. Así, U tiene adherencia compacta. Como $\overline{U}$ es normal, existe una aplicación continua $\phi : \overline{U} \to [0,1]$ con $\phi(C) \subseteq \{1\}$ y $\phi(\overline{U} - U) \subseteq \{0\}$. Si se extiende ϕ a todo X Asígnandole a $x \in X - U$ como imagen 0, entonces ϕ es continua y satisface las condiciones deseadas.

□

Lema 23. *Sean G un grupo localmente compacto y $\phi \in C_c(G)$. Para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad de la identidad V simétrica tal que $|\phi(g) - \phi(h)| < \epsilon$ para $g, h \in G$ tales qué $gh^{-1} \in V$.*

Demostración. Para todo $a \in G$, se define una vecindad de la identidad W_a tal que $|\phi(a) - \phi(g)| < \frac{\epsilon}{2}$ siempre que $g \in aW_a$, y también una vecindad U_a tal que $U_aU_a \subseteq W_a$. Como $C = supp(\phi)$ es compacto, existen $a_1, \cdots, a_m \in G$ tales qué $C \subseteq a_1U_{a_1} \cup \cdots \cup a_mU_{a_m}$. Tomando una vecindad simétrica de la identidad V tal que $V^{-1}V \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m}$, y se afirma que V satisface la condición deseada. Sea $h \in gV$. Si $gV \cap a_kU_{a_k} = \emptyset$ para $k = 1, \ldots, m$, entonces $\phi(g) = \phi(h) = 0$. Por otra parte, sí $gV \cap a_kU_{a_k} \neq \emptyset$, entonces $g \in a_kU_{a_k}V^{-1}$, por lo tanto $gV \subseteq a_kU_{a_k}V^{-1}V \subseteq a_kU_{a_k}U_{a_k} \subseteq a_kW_{a_k}$. Se concluye entonces que si $h \in gV$, entonces $|\phi(a_k) - \phi(h)| < \frac{\epsilon}{2}$, con lo cual se tiene qué $|\phi(g) - \phi(h)| < \epsilon$. $\square$

Definición 20. *Sea G un grupo y R un anillo conmutativo. El grupo-anillo $R[G]$ es el R-módulo libre con base G. Los elementos de $R[G]$ son entonces combinaciones lineales $\sum_{g\in G} c_g g$, con $c_g \in R$, donde solo una cantidad finita de coeficientes es no nula. La multiplicación de grupo se extiende a una multiplicación bilineal $R[G] \times R[G] \to R[G]$, la cual hace de $R[G]$ una R-álgebra asociativa. Esta multiplicación está dada por*

$$\left(\sum_{x\in G} a_x x\right)\left(\sum_{y\in G} b_y y\right) = \sum_{x\in G}\sum_{y\in G} a_y b_{y^{-1}x} x$$

Siempre que G actúa linealmente sobre un R-módulo M, esta acción se extiende sobre $R[G]$ y hace de M un $R[G]$—módulo. La aplicación

$$\epsilon : R[G] \to R$$
$$\sum_{g\in G} c_g g \to \sum_{g\in G} c_g$$

se llama aplicación de aumentación y es un homomorfismo de álgebras.

Observación 1. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces G actúa a izquierda sobre el espacio vectorial $C_c(G)$ de la siguiente forma*

$$(a\phi)(x) = \phi(a^{-1}x) = (\phi \circ \lambda_{a^{-1}})(x)$$

En efecto,

$$b(a\phi) = b(\phi \circ \lambda_{a^{-1}}) = \phi \circ \lambda_{a^{-1}} \circ \lambda_{b^{-1}} = \phi \circ \lambda_{(ba)^{-1}} = (ba)\phi$$

para todo $a, b \in G$. Ahora, si se toma $a = \sum_{g\in G} a_g g \in \mathbb{R}[G]$ y $\phi \in C_c(G)$ se tiene que

$$a\phi = \sum_{g\in G} a_g \phi \circ \lambda_{g^{-1}}$$

Donde la suma al lado derecho de la igualdad es finita

Definición 21. *Se dice que un funciónal lineal*

$$I : C_c(G) \to \mathbb{R}$$

es una integral invariante si satisface que

1. *Si $\phi \in C_c^+(G)$, entonces $I(\phi) \geq 0$*
2. *Si $g \in G$ y $\phi \in C_c(G)$, entonces $I(g\phi) = I(\phi)$*
3. *Existe una función $\phi \in C_c^+(G)$ con $I(\phi) > 0$.*

Nótese que la primera condición implica que $I(\phi) < I(\psi)$ sí $\phi < \psi$. Además, si I es una integral invariante y $s > 0$, si también es una integral invariante.
Se define $\mathbb{R}[G]^+ = \{\sum_{g\in G} c_g g : c_g \geq 0\}$. Nótese también que $\mathbb{R}[G]$ es cerrado bajo la multiplicación, adición y multiplicación por escalar no negativo. Si $a \in \mathbb{R}[G]$ y $\phi \in C_c^+(G)$, entonces $a\phi \in C_c^+(G)$

Lema 24. *Sean G un grupo localmente compacto, $\phi, \alpha \in C_c^+(G)$. Sí $\alpha \neq 0$, entonces existe $a \in \mathbb{R}[G]$ con $\phi \leq a\alpha$.*

Demostración. Sean $t = |\alpha|_\infty, s = |\phi|_\infty$ y $U = \{x \in G : \alpha(x) > \frac{t}{2}\}$. Entonces U es un abierto no vacío. Como $C = supp(\phi)$ es compacto, existen $g_1, \ldots, g_m \in G$ tales qué $C \subseteq g_1 U \cup \cdots \cup g_m U$. para $x \in g_k U$, por definición de la acción se tiene qué $g_k\alpha(x) = \alpha(g_k^{-1}x) > \frac{t}{2}$. Entonces, si se define $a = \frac{2s}{t}(g_1 + \cdots + g_m)$, a va a cumplir la condición deseada. □

Definición 22. *Sea G un grupo localmente compacto. Para $\phi, \alpha \in C_c^+(G)$, con $\alpha \neq 0$, se define su cociente como*

$$(\phi : \alpha) = inf\{\epsilon(a) : a \in \mathbb{R}[G] \wedge \phi \leq a\alpha\}$$

Lema 25. *Sea G un grupo localmente compacto. para funciónes $\phi, \psi, \alpha, \beta \in C_c^+(G)$, con $\alpha, \beta \neq 0$. Entonces, si $g \in G$ y $s \in \mathbb{R}$, se tiene que*

1. $(g\phi : \alpha) = (\phi : \alpha) = (\phi : g\alpha)$
2. $(s\phi : \alpha) = s(\phi : \alpha)$
3. $\phi \leq \psi \Rightarrow (\phi : \alpha) \leq (\psi : \alpha)$
4. $(\phi + \psi : \alpha) \leq (\phi : \alpha) + (\psi : \alpha)$
5. $(\phi : \beta) \leq (\phi : \alpha)(\alpha : \beta)$
6. $|\phi|_\infty \leq (\phi : \alpha)|\alpha|_\infty$

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}[G]^+$.

1. Considerando que $\phi \leq a\alpha$ si y sólo si $g\phi \leq ga\alpha$, entonces $inf\{\epsilon(a) : a \in \mathbb{R}[G] \wedge \phi \leq a\alpha\} = inf\{\epsilon(ga) : a \in \mathbb{R}[G] \wedge g\phi \leq ga\alpha\} = inf\{\epsilon(a) : a \in \mathbb{R}[G] \wedge g\phi \leq a\alpha\} = inf\{\epsilon(a) : a \in \mathbb{R}[G] \wedge \phi \leq ga\alpha\}$.
2. Considerando que $s\phi \leq a\alpha$ si y sólo si $g\phi \leq \frac{1}{s}a\alpha$, para $s > 0$, y que $(0 : \alpha) = 0$, por un proceso análogo al ítem anterior y propiedades del ínfimo y la función ϵ de aumentación, se concluye el resultado.
3. Sí $\psi \leq a\alpha$, entonces $\phi \leq \psi \leq a\alpha$, con lo cual queda demostrado por propiedades del ínfimo.
4. Si $\phi \leq a\alpha$ y $\psi \leq b\alpha$, entonces $\phi + \psi \leq a\alpha + b\alpha = (a + b)\alpha$, con lo cual queda demostrado por propiedades del ínfimo.
5. Si $\phi \leq a\alpha$ y $\alpha \leq b\beta$, entonces $\phi \leq ab\beta$, luego $(\phi : \beta) \leq \epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b)$, que se cumple para todo a, b; entonces se cumple en particular para el ínfimo que satisface las condiciones de la definición del cociente.
6. Sí $\phi \leq a\alpha$, entonces $\phi(x) \leq (a\alpha)x \leq \epsilon(a)|\alpha|_\infty$ para todo $x \in G$, luego por definición de cociente e ínfimo, se tiene el resultado deseado.

□

Lema 26. *Sea G un grupo localmente compacto. Dadas funciónes $\phi, \psi \in C_c^+(G)$, existe una función $\eta \in C_c(G)$ tal que, para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad V simétrica tal que*

$$(\phi : \alpha) + (\psi : \alpha) \leq (1 + \epsilon)(\phi + \psi : \alpha) + \epsilon(\epsilon + 1) + (\eta : \alpha)$$

para todo $\alpha \in C_c^+(G) - \{0\}$ con $supp(\alpha) \subseteq V$

Demostración. Existe una función $\eta : G \to [0,1]$ con soporte compacto tal que $\eta(x) = 1$ para todo x que pertenece a la unión de los soportes. Sí $\xi(x) = \phi(x) + \psi(x) 9\epsilon\eta(x)$, se definen entonces funciónes $\hat{\phi}, \hat{\psi}$ como sigue:
Los puntos donde ϕ se anula, también se anula $\hat{\phi}$. Para los x que pertenecen al soporte de ϕ, se tiene qué $\hat{\phi(x)} = \frac{\phi(x)}{\xi(x)}$. De la misma manera, se define $\hat{\psi}$. Sea $\delta > 0$ tal que $6|\xi|_\infty \delta \leq \epsilon^3$ y $2\delta < \epsilon^2$. Ahora, por un lema anterior existe una vecindad de la identidad V tal que, sí $x^{-1}y \in V$, entonces

$$|\phi(x) - \phi(y)|, |\psi(x) - \psi(y)| < \delta$$

Ahora, si se toman x, y en el soporte de ϕ, se tiene que

$$|\hat{\phi(x)} - hat\phi(y)| = |\frac{\phi(x)\xi(y) - \phi(y)\xi(x)}{\xi(x)\xi(y)}$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon^2}|\phi(x)\xi(y) - \phi(y)\xi(x)|$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon^2}|\phi(x)\xi(y) - \phi(x)\xi(x)||\phi(x)\xi(x) - \phi(y)\xi(x)|$$

$$\leq 2\delta|\phi|_\infty + \frac{\delta}{\epsilon^2}|\xi|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Además, si $x^{-1}y \in V$ y $\hat{\phi(x)} = 0 \neq \hat{\phi(y)}$, también se cumplirá la desigualdad. Para demostrar que V satisface las propiedades deseadas, sea $\alpha \in C - c^+(G) - \{0\}$ una función cuyo soporte está contenido en V. Sí $a = \sum_{g \in G} a_g g \in \mathbb{R}[G]$ es tal que $\xi \leq a\alpha$, entonces $\phi = \xi\hat{\phi} \leq (a\alpha)\hat{\phi}$. Sí $\alpha(g^{-1}x) \neq 0$, entonces $g^{-1}x \in V$, por lo tanto $\hat{\phi(x)} \leq \hat{\phi(g)} + \frac{\epsilon}{2}$. Por lo tanto $\phi(x) \leq \sum_{g \in G} a_g(\hat{\phi(g)} + \frac{\epsilon}{2})\alpha(g^{-1}x)$. Así, se concluye qué $(\phi : \alpha) \leq \sum_{g \in G} a_g(\hat{\phi(g)} + \frac{\epsilon}{2})$. Se tiene, mediante un razonamiento análogo, un resultado equivalente para ψ, con lo cual

$$(\phi : \alpha) + (\psi : \alpha) \leq \sum_{g \in G} a_g(\hat{\phi(g)} + \epsilon) \leq \sum_{g \in G} a_g(1 + \epsilon) = \epsilon(a)(1 + \epsilon$$

Así, se tiene el resultado deseado.

$$(\phi : \alpha) + (\psi : \alpha) \leq (\phi + \psi + \epsilon\eta : \alpha)(1 + \epsilon) \leq (\phi + \psi : \alpha)(1 + \epsilon) + \epsilon(1 + \epsilon)(\eta : \alpha)$$

□

Construcción 1. *Sea $\phi_0 \in C_c^+(G)$ una función no nula fija. Se define entonces*

$$I(\phi, \alpha) = \frac{(\phi : \alpha)}{(\phi_o : \alpha)}$$

donde $\phi, \alpha \in C_c^+(G) - \{0\}$. Nótese que $(\phi_0 : \alpha) > 0$ por el Lema 25.6. Por este mismo lema, y la definición de $I(\phi, \alpha)$,si $g \in G, s \geq 0, \psi \in C_c^+(G) - \{0\}$ se concluye que:

$$I(\phi, \alpha) \leq (\phi : \phi : 0)$$
$$\frac{1}{(\phi_0 : \phi)} \leq I(\phi, \alpha)$$
$$I(g\phi, \alpha) = I(\phi, \alpha)$$
$$I(s\phi, \alpha) = sI(\phi, \alpha)$$
$$I(\phi + \psi, \alpha) \leq I(\phi, \alpha) + I(\psi, \alpha)$$

Es también de notar que, por el lema 26, existe una función $\eta \in C_c^+(G)$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad simétrica V tal que, si $\alpha \in C_c^+(G) - \{0\}$ satisface que $supp(\alpha) \subseteq V$, entonces

$$I(\phi, \alpha) + I(\psi, \alpha) \leq I(\phi + \psi, \alpha)(1 + \epsilon) + \epsilon(1 + \epsilon)I(\eta, \alpha) \leq I(\phi + \psi, \alpha)(1 + \epsilon) + \epsilon(1 + \epsilon)(\eta : \phi_0)$$

Sean ahora $P = C_c^+(G) - \{0\}$, $Q = \prod_{\phi \in P}[\frac{1}{\phi_o:\phi)}, (\phi : \phi_0)]$.*Dada una vecindad simétrica de la identidad* V *y una función no nula* $\alpha \in C_c^+(G)$ *con* $supp(\alpha) \subseteq V$, *se considera* $(I(\phi, \alpha))_{\phi \in P} \in Q$ *y el conjunto* $Q_v \subset Q$ *que consiste de dichos elementos. Dichos conjuntos satisfacen la propiedad de la intersección finita, por lo tanto,*

$$\cap\{\overline{Q_v} : V \subseteq G es\ una\ vecindad\ simétrica\ de\ la\ identidad\} \subseteq Q$$

Es no vacío. Si se toma un I *que pertenezca a esta intersección,* I *será una aplicación definida de* P *en el conjunto de los números reales, dada por*

$$I(\phi) = pr_\phi(I) \in [\frac{1}{(\phi_o : \phi)}, (\phi : \phi_0)] \subseteq \mathbb{R}$$

Y $I \in \overline{Q_v}$ *para toda vecindad de la identidad* V.

Teorema 10. *Todo grupo localmente compacto admite una integral invariante*

Demostración. Sea P como en la construcción anterior, $\phi, \psi \in P$, s>0. Para toda vecindad de la identidad V y todo $\alpha \in P$ Con $supp(\alpha) \subseteq V$ se satisface qué $I(\phi+\psi, \alpha) \leq I(\phi, \alpha)+I(\psi, \alpha)$. Como I está contenida en la adherencia de P_V, se va a cumplir qué $I(\phi+\psi) \leq I(\phi)+I(\psi)$. Así mismo, la relación $I(s\phi, \alpha) = sI(\phi, \alpha)$ implica que $I(s\phi) = sI(\phi)$.
Existe una constante $c > 0$ tal que, para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad simétrica V con $I(\phi, \alpha)+I(\psi, \alpha) \leq I(\phi + \psi, \alpha)(1 + \epsilon) + \epsilon(1 + \epsilon)c$ para todo α con $supp(\alpha) \subseteq V$. Al estar I contenido en la adherencia de P_V, se tiene entonces que $I(\phi) + I(\psi) \leq I(\phi + \psi)(1 + \epsilon) + \epsilon(1 + \epsilon)c$. Como se cumple para todo épsilon positivo, se concluye qué $I(\phi) + I(\psi) = I(\phi + \psi)$.
Ahora, como toda función $\phi \in C_c(G)-\{0\}$ se puede escribir como la diferencia de dos funciónes $\phi_1, \phi_2 \in P$, se va a demostrar que $I(\phi) = I(\phi_1) - I(\phi_2)$ está bien definida. Para ello, sean $\phi_3, \phi_4 \in P$ tales qué $\phi = \phi_3 - \phi_4$. Entonces $\phi_1 + \phi_4 = \phi_2 + \phi_3$, de donde $I(\phi_1) + I(\phi_4) = I(\phi_2) + I(\phi_3)$, luego $I(\phi_1) - I(\phi_2) = I(\phi_3) + I(\phi_4)$. Entonces, toda extensión lineal de I a $C_c(G)$ tiene que satisfacer estas fórmulas.
Finalmente, se tiene que I es aditiva, por tanto, un funciónal lineal. Además, I es invariante bajo la acción de G por construcción, y $I(\phi_0, \alpha) = 1$ sin importar quienes sean α y V. Luego $I(\phi_o) = 1$. □

Teniendo Así la existencia de la integral de Haar en todo grupo localmente compacto.

Lema 27. *Sean* J *una integral invariante sobre un grupo localmente compacto* G *y* $\phi \in C_c(G)$. *Para todo* $a \in \mathbb{R}[G]$ *se tiene que*

$$J(a\phi) = \epsilon(a)J(\phi)$$

Si Además $\phi, \alpha \in C_c^+(G)$ *y* $\alpha \neq 0$, *entonces* $J(\alpha) \neq 0$ *y* $J(\phi) \leq (\phi : \alpha)J(\alpha)$.

Demostración. Sí $a = \sum_{g \in G} a_g g$, entonces $J(a\phi) = \sum_{g \in G} a_g J(\phi)$ por la invarianza respecto a la acción de G. Así, se tiene la primera parte, ahora, sean $\alpha, \phi \in C_c^+(G) - \{0\}$. Si $a \in \mathbb{R}[G]$ y $\phi \leq a\alpha$, entonces $J(\phi) \leq \epsilon(a)J(\alpha)$, de donde se tiene la segunda parte. Además, por suposición, existe $\phi \in C_c^+(G)$ con $(J\phi) > 0$. Entonces por el Lema 25 existe un elemento a en el grupo-anillo con $\phi \leq a\alpha$, lo que implica que $0 \leq J(\phi)\epsilon(a)J(\alpha)$. □

Finalmente, se demuestra la unicidad, salvo por constantes positivas, de la integral invariante, pero antes de ello es necesario demostrar un lema.

Lema 28. *Dados* $\phi_1, \phi_2 \in C_c^+(G) - \{0\}$ *y un real positivo* ϵ, *existe una función* α *positiva con soporte compacto tal que, para toda integral invariante* J

$$(1 - \epsilon)(\phi : j : \alpha)J(\alpha) \leq K(\phi_j)$$

donde $j = 1, 2$.

Demostración. Sea C la unión de los soportes de ϕ_1, ϕ_2. Si η es una función con soporte compacto definida de G en el intervalo cerrado [0,1], tal que $\eta(C) \subseteq \{1\}$, dada por el Lema 22. De aquí en adelante, $j = 1, 2$. Si s es un real positivo tal que $\epsilon > 2s(\eta : \phi_j)$, se define una vecindad de la identidad tal que $|\phi_j(x) - \phi_j(y)| < s$ siempre que $xy^{-1} \in V$. Sea β una función positiva con soporte compacto contenido en V, entonces se define $\alpha(x) = \beta(x) + \beta(x^{-1})$. Se desea demostrar que

$$(1 - \epsilon)(\phi_j : \alpha)J(\alpha) \leq J(\phi_j)$$

Para ello, sea t un real positivo tal que $tJ(\phi_j) < J(\alpha)$. Entonces, se define una vecindad simétrica de la identidad W con adherencia compacta, tal que $|\alpha(x) - \alpha(y)| < t$ siempre que $xy^{-1} \in W$. Al ser C compacto, existe una cubierta finita de este, dada por $g_kW, k = 1, \ldots, m$. Si $U_0 = G - C$ y $U_k = g_kW$, se tiene entonces una cubierta abierta de G. Así, existe una partición de la unidad $\psi_0, \ldots, \psi_m$ subordinada a esta cubierta, esto es, $\psi_k : G \to [0, 1]$ es continua, su soporte está contenido en U_k, para cada $k = 1, \ldots, m$ y $\sum_{k=0}^{m} \psi_k = 1$. Entonces, para todo elemento c de C, $\sum_{k=0}^{m} \psi_k(c) = 1$, y cada función de estas será positiva y tendrá soporte compacto. En particular, se tiene que

$$\phi_j = \sum_{k=1}^{m} \psi_k \phi_j$$

Sean x, y elementos arbitrarios de G. Sí $y \in xV$, entonces $\phi_j(x) - s \leq \phi_j(y)$ por lo cual $\phi_j(x) - s) \cdot (x\alpha) \leq (\phi_j) \cdot (x\alpha)$ para todo x. Si se integra esta desigualdad, se obtiene que

$$\phi_j(x) - s)J(\alpha) \leq J(\phi_j \cdot x\alpha)$$

Ahora, si $y \in g_kW$, se tiene que $g_k^{-1}y = (g_k^{-1})(x^{-1}y) \in W$, por lo tanto $\alpha(x^{-1}y) \leq \alpha(g_k^{-1}x) + t$. Esto implica qué $\psi_k \cdot (x\alpha) \leq \psi_k \cdot (g_k\alpha)(x) + t$. Si en ambos lados se multiplica por ϕ_j, se suma sobre k y se integra, se obtiene la siguiente desigualdad

$$J(\phi_j \cdot (x\alpha)) \leq \sum_{k=1}^{m} J(\phi : j\psi_k)(g_k\alpha)(x) + tJ(\alpha_j)$$

Como se tiene que $tJ(\phi_j) < sJ(\alpha)$, se concluye entonces que

$$(\phi_j(x) - 2s)J(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{m} J(\phi : j\psi_k)(g_k\alpha)(x)$$

Si $\phi_j' = max\{0, \phi_j - 2s\}$, se tiene que

$$(\phi_j' : \alpha)J(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{m} J(\phi_j\psi_k) = J(\phi_j)$$

Luego por el Lema 27 $J(\phi : j) \leq (\phi_j : \alpha)J(\alpha)$. Como también se tiene que $\phi_j \leq \phi_j' + 2s\eta$, se obtiene entonces que

$$(\phi_j : \alpha) \leq (\phi_j' + 2s\eta : \alpha) \leq (\phi_j' : \alpha) + 2s\eta(\eta : \alpha) \leq (\phi_j' : \alpha) + 2s(\eta : \phi_j)(\phi_j : \alpha)$$

Por lo tanto,

$$(1 - \epsilon)(\phi_j : \alpha)J(\alpha) \leq (\phi_j' : \alpha) \leq J(\phi_j)$$

Que es lo que se quería demostrar. □

Teorema 11. *Sea G un grupo localmente compacto y suponga que I, J son integrales invariantes sobre G. Entonces existe un real $s > 0$ tal que $J = sI$.*

Demostración. Basta con demostrar que, dadas dos funciónes ϕ_1, ϕ_2 positivas con soporte compacto, y dos integrales invariantes I, J, se cumple que

$$\frac{J(\phi_1)}{J(\phi_2)} = \frac{I(\phi_1)}{I(\phi_2)}$$

Como $J(\phi_2) \leq (\phi_2 : \alpha)J(\alpha)$, se tiene que

$$(1-\epsilon)\frac{(\phi_1 : \alpha)}{(\phi_2 : \alpha)} \leq \frac{1}{(\phi_2 : \alpha)}\frac{J(\phi_1)}{J(\alpha)} \leq \frac{J8\phi_1)}{J(\phi_2)}$$

Desigualdad que se cumple aun si cambia intercambian ϕ_1 y ϕ_2 por simetría. Más aún, se obtiene también reemplazando a J por I. Entonces, tomando inversos en ambos lados de la desigualdad, se obtiene que

$$\frac{I(\phi_1)}{I(\phi_2)} \leq \frac{1}{1-\epsilon}\frac{(\phi_1 : \alpha)}{(\phi_2 : \alpha)}$$

por lo cual se tiene para un ϵ arbitrario que

$$\frac{I(\phi_1)}{I(\phi_2} \leq \frac{1}{(1-\epsilon)^2}\frac{J(\phi_1)}{J(\phi_2)}$$

Y por simetría, se obtiene la otra desigualdad, de donde ambas fracciones son iguales. □

Así, se tiene garantizada la existencia y unicidad, salvo por constantes positivas, de la integral invariante I sobre un grupo localmente compacto. Se dice entonces que dicha integral es la integral de Haar y se denota por

$$I(\phi) = \int_G \phi$$

Ejemplo 2. *A continuación se muestra la integral de Haar en algúnos grupos conocidos:*

1. *Si $G = \mathbb{R}$ es el grupo aditivo de los reales, dotado con la topología usual, sea $\phi \in C_c(G)$. Entonces, existe un intervalo $[u, v]$ que contiene al soporte de ϕ. Si se considera la integral de Riemann sobre este intervalo, esta es una integral de Haar. En efecto, si se toma un intervalo $[u', v']$, que contenga al intervalo $[u, v]$, se tiene qué $\int_u^v \phi(t)dt = \int_{u'}^{v'} \phi(t)dt$. Así, se tiene que la integral está bien definida. Finalmente, se tiene la invarianza respecto a la traslación a derecha considerando el cambio de variable $t = x - s$, con el cual $\int_u^v \phi(t)dt = \int_{u+s}^{v+s} \phi(x-s)dx$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Así, $\int_G \phi = \int_u^v \phi(t)dt$*

2. *Si $G = U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es la circunferencia unitaria, entonces la integral de Riemann compleja coincide con la integral de Haar. En efecto,*

$$\textstyle\int_0^1 \phi(exp(2\pi it))dt = \int_0^1 \phi(exp(2\pi i(t-s)))dt$$

   para todo $s \in \mathbb{R}$.

3. *Si $G = \mathbb{R}^m$ y λ denota la medida de Lebesgue, la integral de Haar coincide con la integral de Lebesgue directamente de la invarianza respecto a traslación de la medida λ.*

2.4. La función Modular

Construcción 2. *Sea G un grupo localmente compacto. El espacio vectorial real $C_c(G)$ es un $\mathbb{R}[G]-$módulo respecto a la G-acción por izquierda $g\phi = \phi \circ \lambda_{a^{-1}}$ y para $a \in \mathbb{R}[G]$, el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
C_c(G) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\int_G"] & C_c(G) \arrow[d, "\int_G"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\epsilon(a)"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esto es,

$$\int_G : C_c(G) \to \mathbb{R}$$

Es un homomorfismo de $\mathbb{R}[G]$—módulos, donde $\mathbb{R}[G]$ actúa sobre $\mathbb{R}$mediante la aplicación de aumentación ϵ.
Si ahora se considera una estructura diferente para él $\mathbb{R}[G]$-módulo sobre $C_c(G)$, dada por

$$G \times C_c(G) \to C_c(G)$$

$$(g, \phi) \to \phi \circ \gamma_{g^{-1}}$$

Esta acción hace de $C_c(G)$ un $\mathbb{R}[G]$—módulo a izquierda de forma distinta. Se define

$$I_g(\phi) = \int_G \phi \circ \gamma_{g^{-1}}$$

Como $\gamma_g = \lambda_g \circ \rho_g = \rho_g \circ \lambda_g$, se tiene entonces que $I_G = \int_G \phi \circ \rho_{g^{-1}}$, por lo tanto $I_G(\phi \circ \lambda_a) = I_G(\phi)$. Por lo tanto, I_g es una integral invariante. Luego, por el teorema de unicidad, existe un real positivo s tal que $sI = I_g$. Se define entonces $mod(g) = s$. Entonces

$$mod(g) \int_G \phi = \int_G \phi \circ \gamma_{g^{-1}} = \int_G \phi \circ \rho_{g^{-1}}$$

Ahora, sí $g, h \in G$. se tiene que

$$I_{gh} = \int_G \phi \circ \rho_{(gh)^{-1}} = \int_G \phi \circ \rho_h^{-1} \circ \rho_{g^{-1}} = mod(g)mod(h) \int_G \phi$$

con lo cual se concluye qué $mod(gh) = mod(g)mod(h)$. Así, $mod : G \to \mathbb{R}^+$ es un homomorfismo de grupos, llamado la función modular. Si se extiende mod al grupo-anillo $\mathbb{R}[G]$ de forma que $mod\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g mod(g)$, entonces $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}[G]$—módulo y

$$\int_G C_c(G) \to \mathbb{R}$$

es nuevamente un homomorfismo de $\mathbb{R}[G]$—módulos, pero para una estructura diferente sobre $C_c(G)$ y sobre $\mathbb{R}$.

Proposición 12. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces la función modular definida de G en el conjunto de los números reales es un morfismo de grupos topológicos, el cual no depende de la integral de haar.*

Demostración. Sea ϕ una función positiva con soporte compacto. Si I, J son integrales invariantes, existe entonces por el teorema de unicidad una constante real positiva s tal que $J = sI$. Por lo tanto $0 \neq J(\phi \circ \gamma_{g^{-1}}) = sI(\phi \circ \gamma_{g^{-1}}) = smod(g)I(\phi) = mod(g)J(\phi)$, con lo cual se concluye que el módulo es independiente de la integral de Haar elegida.
Ahora, se demuestra que la función modular es continua en la identidad, con lo cual será continua en

todo punto de G. Sean C el soporte de ϕ y $\epsilon > 0$. Si U es una vecindad simétrica de la identidad con adherencia compacta, existe una función continua con soporte compacto $\eta : G \to [0,1]$ con $\eta(C\overline{U}) \subseteq \{1\}$. Si V es una vecindad simétrica de la identidad contenida en U tal que

$$|\phi(x) - \phi(y)| \int_G \eta \leq \epsilon \int : g\phi$$

para todo par de puntos x e y de G tales qué $x^{-1}y \in V$. Ahora, si x es un elemento de V, y un elemento de F, entonces se tiene que

$$|\phi(yx) - \phi(y)| \int_G \eta \leq \epsilon\eta(y) \int_G \phi$$

En efecto, si $y \in CU$, entonces $\eta(y) = 1$ y $y^{-1}(yx) = x \in V$. Por otra parte, si y no pertenece a CU, entonces y no pertenece a C ni a Cx^{-1}, con lo cual $\phi(y) = 0 = \phi(yx)$.
Ahora, integrando el resultado anterior respecto a y se obtiene que

$$|\int_G (\phi \circ \rho_{x^{-1}} - \phi)| \int_G \eta \leq \epsilon \int_G \eta \int_G \phi \neq 0$$

Si se simplifica la integral de Haar de η y se utiliza la definición de módulo, se tiene que

$$|mod(x) - 1 \leq \epsilon$$

para todo x que pertenece a V. ☐

Definición 23. *Un grupo localmente compacto se dice unimodular si la función modular es constante en G. Esto se tiene si y sólo si la integral es bi-invariante, esto es,*

$$\int_G \phi \circ \rho_a = \int_g \phi = \int_G \phi \circ \lambda_a$$

Para todo $a \in G$

Proposición 13. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces G es unimodular si*

1. *G es abeliano.*
2. *G es compacto.*
3. *$\overline{[G,G]} = G$*

Demostración. Sí G es abeliano. entonces $\rho_a = \lambda_{a^{-1}}$, luego por la invarianza a izquierda de la integral de Haar se tiene el resultado.
Si G es compacto, entonces $mod(G) \subseteq \mathbb{R}^+$. Como todo subgrupo no trivial de $(\mathbb{R}^+ . \cdot)$ es no acotado, $mod(G) = \{1\}$.
Finalmente, considerando que la función modular es continua y que $(\mathbb{R}^+ . \cdot)$ es abeliano, se concluye directamente que G es unimodular. ☐

Bibliografía

[1] Kramer, L.(2017) Locally Compact Groups

[2] Munkres, J. (2001). Topología. Madrid: Prentice Hall.

[3] Charris, J; Aldana,B; Acosta,P. (2013) Álgebra Fundamentos, Grupos, Anillos, Cuerpos y Teoría de Galois.

[4] Abuabara, T; Lesmes, C. (2008)Elementos del Análisis funciónal

[5] Roth, R. (1969) Representación de Grupos Finitos.