DEPARTAMENTO
DE CIENCIAS
SECCIÓN MATEMÁTICAS

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DEL PERÚ

REPORTE DE INVESTIGACIÓN

Nro.29

Serie A

Álgebras de Hopf, Dualidad y Productos Torcidos

Jack Denne Arce Flores

Lima, febrero del 2013

Nro.29

Serie A

Álgebras de Hopf, Dualidad y Productos Torcidos

Jack Denne Arce Flores

Lima, febrero del 2013

Jack Arce
jarcef@pucp.edu.p
Departamento de Ciencias
Sección Matemática
Pontificia Universidad Católica del Perú
Apartado 1761
Lima-Perú

Índice general

Introducción

En sus inicios las álgebras de Hopf fueron estudiadas a un nivel puramente algebraico y sus primeros ejemplos aparecen en las siguientes ramas de la matemática: Topología algebraica, Grupos algebraicos afínes, Teoría de representación de grupos. Estos ejemplos se dividen en dos clases: En las dos primeras las álgebras de Hopf involucradas resultan ser conmutativas, mientras que en la última se satisface una condición, en cierto sentido, dual a la conmutatividad conocida como cocommutatividad. En ambos casos, los ejemplos están estrechamente relacionados al estudio clásico de grupos.

A mediados de los 80's el estudio de las álgebras de Hopf recibió un nuevo y fuerte impulso cuando fueron construidos nuevos ejemplos que no eran ni conmutativos ni coconmutativos: Deformaciones. Los primeros ejemplos en este área fueron dados por Feddeev y la escuela de Leningrado, y más tarde por Drinfeld y Jimbo. Los invariantes de nudos y la ecuación de Yang-Baxter, se deben a la conexión entre la Física y Topología. A diferencia de los primeros ejemplos conmutativos y cocommutativos de álgebras de Hopf, estos nuevos ejemplos ya no se encuentran directamente relacionados al estudio clásico de grupos, y debido a esto es que suelen ser llamados grupos cuánticos.

Por otro lado, a finales de los 90's, Alain Connes y Dirk Kreimer en [27] proporcionan un contexto general para el uso de metodos de la teoría de álgebras de Hopf para dar una formulación matemática simple de la Renormalización en teoría de campo cuántico involucrando tambien los diagramas de Feymann, demostrando que se puede utilizar para sistematizar los cálculos estándar en la teoría de la renormalización.

En 1994 Van Daele introduce las álgebras de Hopf de multiplicadores en [6] como una generalización no unitaria de las álgebras de Hopf y estudia su dualidad en [7], esta dualidad está basada fundamentalmente en las funcionales invariantes a izquierda y derecha, llamadas integrales, que son análogos naturales de las medidas de Haar en el estudio de los grupos Hausdorff localmente compactos. Muy al contrario de los grupos localmente compactos en donde la existencia de medidas invariantes está garantizada, las álgebras de Hopf de multiplicadores no tienen garantizada la existencia de las integrales, sin embargo su unicidad está garantizada bajo ciertas condiciones. De esta manera se llega al concepto de álgebras de Hopf de multiplicadores regulares con integrales a izquierda y derecha A sobre las cuales se puede definir un álgebra de Hopf de multiplicadores dual $\hat{A}$ que resulta mantener la propiedad de regularidad e integrales a izquierda y derecha. Debido a esta propiedad se puede hallar un isomorfismo natural entre el bidual $\hat{\hat{A}}$ yA. Esta dualidad puede ser considerada como el análogo algebraico de la dualidad de Pontrjagin de grupos abelianos localmente compactos.

En 1990 las estructuras de factorización de álgebras fueron introducidas de manera independiente por Daisuke Tambara y Shahn Majid. El termino *factorización de álgebras* fue rebautizado como *producto tensorial torcido* por Andreas Cap, Herman Schichl y Jiri Vanzura en cuyo trabajo [13] sugieren la idea de considerar la estructura de factorización de un álgebra como representante de una variedad producto. Es considerada por muchos autores como una definición apropiada para el representante del producto cartesiano de dos variedades no conmutativas (para mas detalles ver [21]), asi como análogos no conmutativos de la noción de fibrado principal estudiada por Tomasz Brzeziński y Shahn Majid.

Por otro lado, el problema de clasificación concerniente a estos temas es determinar todos los posibles productos tensoriales torcidos de A con B. El primer trabajo que ataca este problema fue [25] donde C. Cibils estudia y soluciona completamente en el caso $B = k \times k$. En [26] se extienden los metodos desarrollados en [25] y se cubre el caso $B = k \times \cdots \times k$ (n-veces). Por otro lado en [15] se obtienen algunos resultados parciales para los casos, en donde $B = k[x]$ el anillo de polinomios y $B = k\,[[x]]$ en anillo de series formales.

La tesis consta de dos temas desarrollados independientemente a partir de la teoría clásica de álgebras de Hopf siguiendo la dependencia lógica del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{1{,}6 - 1{,}7} \arrow[r] & \boxed{2} \\
\boxed{1{,}1 - 1{,}5} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & \boxed{3} \arrow[r] & \boxed{4}
\end{tikzcd}$$

El primero tema corresponde al capítulo 2, donde se presentamos la generalización algebraica no unitaria de las algebras de Hopf, y se obtiene una dualidad que corresponde a un análogo algebraico de la dualidad de Pontrjagin de grupos localmente compactos, y el segundo tema corresponde al capítulo 4 donde estudiamos los entrelazamientos de un álgebra asociativa y el anillos de polinomios de Laurent $k[y^{\pm 1}]$, y definimos estructuras de álgebras de Hopf sobre algunos ejemplos de entrelazados de $k[x]$ y $k[y^{\pm 1}]$. La tesis esta organizada de la siguiente manera: En el capítulo 1, desarrollamos los conceptos básicos y clásicos de la teoría de álgebras de Hopf, en la cual se muestra la dualidad en el caso finito dimensional, y ejemplos relacionados a la teoría de grupos. También tratamos una caracterización de las álgebras de Hopf debida a A. van Daele, que sirve de motivación únicamente para el capítulo siguiente. En el capítulo 2, desarrollamos la teoría de álgebras de Hopf de de multiplicadores desarrollada por A. van Daele, y se extiende la dualidad que existe para ellas a los grupos cuánticos algebraicos. El capítulo 3, es un resumen de resultados (sin pruebas) concernientes a los productos tensoriales torcidos o entrelazamientos de [15], [20], [18] y [19] que serán utilizados en el capítulo 4. En este último capítulo presentamos los entrelazamientos con el álgebra $k[y^{\pm 1}]$. Los principales resultados nuevos de esta tesis son 4.2.5 y 4.2.9 donde establecemos condiciones suficientes para obtener un entrelazamiento de este tipo a partir de uno con el álgebra $k[y]$. Además caracterizamos los casos *separables*, definidos en el mismo capítulo. Finalmente definimos dos familias de álgebras de Hopf, ambas no conmutativas, de las cuales una es coconmutativa.

Capítulo 1

Álgebras de Hopf

El objetivo de este capítulo es dar una breve introducción a la teoría clásica de las álgebras de Hopf, necesaria para la realización del trabajo. En este capítulo presentamos la teoría y ejemplos clásicos sobre álgebras de Hopf, las propiedades de la antípoda y una caracterización de las álgebras de Hopf debida a A. Van Daele, que sirve de motivación para el capitulo 2. Por último presentamos la teoria de dualidad de álgebras de Hopf.
A partir de este capitulo k denotara un cuerpo y $\otimes := \otimes_k$.

1.1. Coálgebras

Un álgebra A (asociativa) puede ser considerada como un espacio vectorial equipado con una aplicación lineal $m : A \otimes A \to A \; : \; a \otimes b \mapsto ab$, donde ser asociativa significa que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes m"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd}$$

Esta definición alternativa de un álgebra nos permite definir la noción de coálgebra, que no es más que su versión dual.

Definición 1.1.1 Una coálgebra coasociativa sobre k, es un espacio vectorial A equipado con una aplicación lineal $\Delta : A \to A \otimes A$ llamada coproducto o comultiplicación, donde ser coasociativa significa que el siguiente digrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & A \otimes A \arrow[d, "\Delta \otimes id"] \\ A \otimes A \arrow[r, "id \otimes \Delta"] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Por otro lado, para cada elemento $a \in A$ de un álgebra, es posible definir la aplicación $\eta : k \to A \ : \ \lambda \mapsto \lambda a$, es asi que un álgebra A posee unidad si y solo si existe un elemento $a_0 \in A$ de manera que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
k \otimes A \arrow[d, "\eta\otimes id"] & A \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, <->, "id"] & A \otimes k \arrow[d, "id\otimes\eta"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A & A \otimes A \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

Definición 1.1.2 Sea (A, Δ) una coálgebra. Una aplicación lineal $\epsilon : A \to k$ es una counidad para (A, Δ) si el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
k \otimes A & A \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, <->, "id"] & A \otimes k \\
A \otimes A \arrow[u, "\epsilon\otimes id"] & A \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] & A \otimes A \arrow[u, "id\otimes\epsilon"']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir: $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = id = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta$

Podemos extraer diagramas similares para definir los morfismos entre álgebras, de los cuales proviene la siguiente definición de morfismo entre coálgebras.

Definición 1.1.3 Un morfismo entre las coálgebras (A, Δ_A) y (B, Δ_B) es una aplicación lineal $F : A \to B$ que satisface:

$$\Delta_B \circ F = (F \otimes F) \circ \Delta_A,$$

lo cual es equivalente a que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Delta_A"] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\
A \otimes A \arrow[r, "F\otimes F"] & B \otimes B
\end{tikzcd}$$

Si (A, Δ_A) y (B, Δ_B) son coálgebras con counidad ϵ_A y ϵ_B respectivamente, diremos que F preserva la counidad si:

$$\epsilon_B \circ F = \epsilon_A$$

o equivalentemente, si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\epsilon_A"] & & B \arrow[dl, "\epsilon_B"] \\
& k &
\end{tikzcd}$$

Observación 1 Una coálgebra a lo más posee una counidad, esto es debido a la linealidad de la counidad que se manifiesta en la siguiente igualdad de aplicaciones: Si ϵ_1 y ϵ_2 son dos counidades, se tiene:

$$\epsilon_1 = (\epsilon_1 \otimes \epsilon_2) \circ \Delta = \epsilon_2.$$

Como ocurre en la teoría de álgebras donde se introduce de manera natural un producto en la suma directa y producto tensorial de álgebras, es posible definir de manera natural una estructura de coálgebras también sobre ellas a partir de las coálgebras involucradas.

Sean (A, Δ_A) y (B, Δ_B) dos coálgebras y denotamos la aplicación flip por:

$$\begin{array}{rcl} \sigma : A \otimes A & \to & A \otimes A \\ a \otimes b & \mapsto & b \otimes a \end{array}$$

El espacio vectorial A junto con la aplicación $\Delta' := \sigma \circ \Delta_A$, es una nueva coálgebra, llamada ***coálgebra coopuesta*** y es denotada por A^{cop}. Además si la coálgebra posee counidad $\epsilon : A \to k$ está también lo es para A^{cop}.
La coálgebra A es llamada ***coconmutativa*** si $\sigma \circ \Delta_A = \Delta_A$.

Supongamos que A y B son coálgebras, entonces el espacio vectorial $A \oplus B$ junto con la aplicación $\Delta_{A\oplus B} := i \circ (\Delta_A \oplus \Delta_B)$ donde:

$$i : (A \otimes A) \oplus (B \otimes B) \hookrightarrow (A \oplus B) \otimes (A \oplus B)$$

es la inclusión natural, es una coálgebra.

Si además A y B tienen counidad ϵ_A y ϵ_B, respectivamente, entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \epsilon_{A\oplus B} : A \oplus B & \to & k \\ a \oplus b & \mapsto & \epsilon_A(a) + \epsilon_B(b) \end{array}$$

es una counidad para $A \oplus B$.

El espacio vectorial $A \otimes B$, junto con la aplicación

$$\Delta_{A\otimes B} := (id \otimes \sigma \otimes id) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_B),$$

donde σ es la aplicación flip:

$$\begin{array}{rcl} \sigma : A \otimes B & \to & B \otimes A \\ a \otimes b & \mapsto & b \otimes a \end{array}$$

es una coálgebra. Si además A y B tienen counidad ϵ_A y ϵ_B, respectivamente, entonces la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \epsilon_{A\otimes B} : A \otimes B & \to & k \\ a \otimes b & \mapsto & \epsilon_A(a)\epsilon_B(b) \end{array}$$

es una counidad para $A \otimes B$.

Desafortunadamente, a diferencia de las álgebras, donde la multiplicación *disminuye* el numero de elementos involucrados, a partir de dos elementos obtenemos uno, después de aplicar la multiplicación, en el caso de las coálgebras, la comultiplicación produce un efecto inverso, a partir de un elemento obtenemos por comultiplicación una familia finita de pares de elementos. Debido a esto, los cálculos en una coálgebra son un poco más complicados que al trabajar con un álgebra.

Veamos esto en más detalle:
Si a es un elemento de una coálgebra A, entonces $\Delta(a) \in A \otimes A$ puede ser escrito de la forma:

$$\Delta(a) = \sum_i a_{1,i} \otimes a_{2,i},$$

donde $a_{1,i}$, $a_{2,i} \in A$; La siguiente notación para la comultiplicación es usualmente llamada la *notación de Sweedler (o sigma)*. Se suprime el indice i de la suma y se escribe:

$$\Delta(a) = \sum_i a_{1,i} \otimes a_{2,i} =: \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}.$$

Aqui los subindices (1) y (2) indican el orden de los factores en el producto tensorial; por ejemplo si aplicamos el flip a $\Delta(a)$ tenemos $\sigma \circ \Delta(a) = \sum a_{(2)} \otimes a_{(1)}$, para extender esta notación a iterados de Δ y permite escribir de manera mucho más facil los diagramas conmutativos, por ejemplo en la coasociatividad:

$$(id \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \sum a_{(1)} \otimes \Delta(a_{(2)}) = \sum a_{(1)} \otimes (a_{(2)})_{(1)} \otimes (a_{(2)})_{(2)}$$

y

$$(\Delta \otimes id)(\Delta(a)) = \sum \Delta(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} = \sum (a_{(1)})_{(1)} \otimes (a_{(1)})_{(2)} \otimes a_{(2)}$$

son elementos iguales, los cuales pueden ser escritos $\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)}$

De esta manera la comultiplicación de la coálgebra coopuesta A^{cop} viene dada por:

$$\Delta'(a) = \sum a_{(2)} \otimes a_{(1)},$$

y la comultiplicación del producto tensorial $A \otimes B$ de coálgebras viene dada por:

$$\Delta_{A \otimes B}(a \otimes b) = \sum (a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)})$$

1.2. Biálgebras

Continuando con el estudio de las coálgebras y álgebras, conviene preguntarse cuándo estas estructuras son compatibles en un sentido natural.

Proposición 1.2.1 Sea A un espacio vectorial equipado con una estructura de álgebra y coálgebra. Entonces la multiplicación

$$m : A \otimes A \to A$$

es un morfismo de coálgebras, si y solo si la comultiplicación

$$\Delta : A \to A \otimes A$$

es un morfimos de álgebras.

Prueba. Por un lado la multiplicación y la comultiplicación de $A \otimes A$ son las siguientes aplicaciones:

$$(A \otimes A) \otimes (A \otimes A) \xrightarrow{id \otimes \sigma \otimes id} A \otimes A \otimes A \otimes A \xrightarrow{m \otimes m} A \otimes A$$

y

$$A \otimes A \xrightarrow{\Delta \otimes \Delta} A \otimes A \otimes A \otimes A \xrightarrow{id \otimes \sigma \otimes id} (A \otimes A) \otimes (A \otimes A)$$

respectivamente, y ambas condiciones en la proposición son equivalentes a la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "m"] \arrow[d, "\Delta \otimes \Delta"'] & & A \arrow[dd, "\Delta"] \\
A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[dr, "id \otimes \sigma \otimes id"] & & \\
& A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes m"] & A \otimes A
\end{tikzcd}$$

$\square$

Definición 1.2.2 Una biálgebra es un espacio vectorial A, equipado con una estructura de álgebra y coálgebra, de modo que la multiplicación es un morfismo de coálgebras o equivalentemente la comultiplicación es un morfismo de álgebras.

Una biálgebra sera llamanda biálgebra con unidad, si tiene unidad como álgebra y la comultiplicación es un morfismo de álgebras con unidad; y será llamada biálgebra con counidad, si posee una counidad como coálgebra y la multiplicación es un morfismo de coálgebras con counidad.

Un morfismo entre las biálgebras A y B es una aplicación lineal $F : A \to B$ que es a la vez un morfismo de álgebras y coálgebras. Decimos que preserva la unidad (counidad) si preserva la unidad (counidad) como morfismo de álgebras (coálgebras, respectivamente).

En el resto de este capítulo, solo trabajaremos con biálgebras con unidad y counidad, salvo que mencionemos explicitamente lo contrario.

Para una biálgebra con unidad (o counidad), la condición de compatibilidad existente entre la unidad y la comultiplicación (o counidad y la multiplicación) queda expresada en la conmutatividad de los siquientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\cong"'] & A \arrow[d, "\Delta"] \\ k \otimes k \arrow[r, "u\otimes u"] & A \otimes A \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\epsilon\otimes\epsilon"] \arrow[d, "m"'] & k \otimes k \arrow[d, "\cong"] \\ A \arrow[r, "\epsilon"] & k \end{tikzcd}$$

De esta manera se puede observar que, A es counital si y solo si la counidad es multiplicativa.

Como ocurría con las coálgebras, la suma y el producto tensorial de biálgebras son biálgebras con las estructuras definidas anteriormente.

Si invertimos la multiplicación de A, la comultiplicación de A o ambas, obtenemos tres nuevas biálgebras, las cuales seran denotadas por A^{op}, A^{cop} y $A^{op,cop}$, respectivamente.

Consideremos ahora el espacio de aplicaciones lineales de una coálgebra sobre un álgebra.

Definición 1.2.3 Sean A una coálgebra y B un álgebra sobre k. Para dos aplicaciones $f, g \in Hom_k(A, B)$, definamos las aplicación $f \star g \in Hom_k(A, B)$ por la formula:

$$f \star g := m_B \circ (f \otimes g) \circ \Delta_A$$

esto es,

$$(f \star g)(a) := \sum f(a_{(1)})g(a_{(2)}) \ \text{ para todo } a \in A$$

La aplicación $f \star g$ es llamada el producto de convolución de f y g.

Proposición 1.2.4 Sean A una coálgebra y B un álgebra sobre k. El conjunto de las aplicaciones lineales $Hom_k(A, B)$ con el producto de convolución es un álgebra asociativa.

Prueba. En efecto, sean $f,\, g,\, h \in Hom_k(A,\, B)$, entonces:

$$\begin{aligned}
(f \star g) \star h &= m_B \circ ((m_B \circ (f \otimes g) \circ \Delta_A) \otimes h) \circ \Delta_A \\
&= m_B \circ (((m_B \otimes id) \circ (f \otimes g \otimes h) \circ (\Delta_A \otimes id)) \circ \Delta_A \\
&= m_B \circ (f \otimes (m_B \circ (g \otimes h) \circ \Delta_A)) \circ \Delta_A \\
&= m_B \circ (f \otimes (g \star h) \circ \Delta_A \\
&= f \star (g \star h)
\end{aligned}$$

□

Observación 2 Si $B = k$, entonces el espacio dual $A' = Hom(A, k)$ de una coálgebra vendría equipado de una estructura de álgebra.

Observación 3 En general, el álgebra de convolución $Hom_k(A, B)$ no tiene unidad. Sin embargo, si A es una coálgebra con counidad ϵ_A y B es un álgebra con unidad u_B, entonces las composición $u_B \circ \epsilon_A$ es una unidad para el álgebra de convolución $Hom_k(A, B)$:

$$((u_B \circ \epsilon_A) \star f)(a) = \sum 1_B \epsilon_A(a_{(1)}) f(a_{(2)}) = \sum f(\epsilon_A(a_{(1)}) a(2)) = f(a),$$

y de manera similar se puede ver que $(f \star (u_B \circ \epsilon_A))(a) = f(a)$ para todo $f \in Hom_k(A, B)$ y $a \in A$.

Observación 4 Todo morfismo de álgebras $F : B \to C$ induce un morfismo entre las álgebras de convolución

$$\begin{aligned}
F_* : Hom_k(A, B) &\to Hom_k(A, C) \\
f &\mapsto F \circ f.
\end{aligned}$$

Para todo $f,\, g \in Hom_k(A, B)$ y $a \in A$,

$$\begin{aligned}
(F_*(f) \star F_*(g))(a) &= \sum F(f(a_{(1)})) F(g(a_{(2)})) \\
&= \sum F(f(a_{(1)}) g(a_{(2)})) \qquad = (F_*(f \star g))(a)
\end{aligned}$$

Si F es un morfismo de álgebras con unidad, entonces F_* es un morfismo de álgebras con unidad.

Por otro lado, si $G : D \to A$ es un morfismo de coálgebras, este también induce un morfismo entre las álgebras de convolución.

$$\begin{array}{rcl} G^* : Hom_k(A,B) & \to & Hom_k(D,B) \\ g & \mapsto & g \circ G. \end{array} \tag{1.2.1}$$

que es un morfismo entre álgebras con unidad si G es un morfismo entre coálgebras con counidad

1.3. Álgebras de Hopf

Usaremos el producto de convolución definido en la sección anterior para definir y caracterizar las álgebras de Hopf entre las biálgebras. Si A es una biálgebra, entonces $Hom_k(A, A)$ posee una estructura de álgebra cuya unidad es la aplicación $u_A \circ \epsilon_A$.

Definición 1.3.1 Sea A una biálgebra. Diremos que A es un álgebra de Hopf si la aplicación identidad id_A tiene inversa en el álgebra de convolución $Hom_k(A, A)$, es decir, si existe $S : A \to A$ tal que

$$S \star id_A = u_A \circ \epsilon_A = id_A \star S$$

lo cual es equivalente a la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[d, "S\otimes id"'] & A \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "u\circ\epsilon"] & A \otimes A \arrow[d, "id\otimes S"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A & A \otimes A \arrow[l, "m"] \end{tikzcd}$$

Definición 1.3.2 Un morfismo entre álgebras de Hopf A y B es un morfismo entre álgebras con unidad $F : A \to B$, compatible con las aplicaciones de estructura, es decir que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Delta_A"] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\ A \otimes A \arrow[r, "F\otimes F"] & B \otimes B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\epsilon_A"] & & B \arrow[dl, "\epsilon_B"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[d, "S_A"] & B \arrow[d, "S_B"] \\ A \arrow[r, "F"] & B \end{tikzcd}$$

es decir:

$$\Delta_B \circ F = (F \otimes F) \circ \Delta_A \ \ ; \ \ \epsilon_B \circ F = \epsilon_A \ \ ; \ \ S_B \circ F = F \circ S_A$$

Veamos ahora algúnos ejemplos de álgebras de Hopf:

Ejemplo 1 Sea G un grupo finito y $k(G)$ el álgebra de funciones con valores en k, donde la adición y la multiplicación son definidas de manera puntual. Las aplicaciones de estructura de G son las siguientes:

Multiplicación:

$$\begin{array}{rcl} m : G \times G & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$$

Inclusión de la unidad:

$$\begin{array}{rcl} i : \{e\} & \hookrightarrow & G \\ e & \mapsto & e \end{array}$$

y la inversión:

$$\begin{array}{rcl} inv : G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

Debido a que G es un grupo finito, se puede identificar $k(G) \otimes k(G)$ con el álgebra $k(G \times G)$ asignando a cada elemento $f \otimes g$ la función:

$$(f \otimes g)(u, v) = f(u)g(v)$$

Es así que las aplicaciones de estructura de G inducen los siguientes morfismos de álgebras:

Comultiplicación:

$$\begin{array}{rcl} \Delta : k(G) & \to & k(G \times G) \\ f & \mapsto & \Delta(f) := f \circ m \end{array} \tag{1.3.1}$$

Counidad:

$$\begin{array}{rcl} \epsilon : k(G) & \to & k \\ f & \mapsto & \epsilon(f) := f \circ i \end{array} \tag{1.3.2}$$

y Antípoda:

$$\begin{array}{rcl} S : k(G) & \to & k(G) \\ f & \mapsto & S(f) := f \circ inv \end{array} \tag{1.3.3}$$

Reescribamos las aplicaciones de estructura de esta álgebra de Hopf en términos de la base canónica y veamos por qué la primera aplicación gana el nombre de comultiplicación.

Para cada $x \in G$, se define la función $\delta_x \in k(G)$ por la siguiente regla de correspondencia:

$$\delta_x(y) := \delta_{x,y} = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La familia $\{\delta_x\}_{x \in G}$ es la base canonica de $k(G)$, y las aplicaciones de estructura se escriben sobre esta base como sigue:

$$\Delta(\delta_x) = \sum_{yz=x} \delta_y \otimes \delta_z,$$

$$\epsilon(\delta_x) = \delta_{x,e},$$

$$S(\delta_x) = \delta_{x^{-1}}$$

para todo $x \in G$

Observación 5 Si el grupo G fuera infinito, se tiene que $k(G) \otimes k(G)$ puede ser identificado con un subespacio de $k(G \times G)$ pero la imagen de $k(G)$ via Δ no esta contenida en $k(G) \otimes k(G)$. Sin embargo, para cada subálgebra con unidad de $k(G)$ que satisface $\Delta(A) \subset A \otimes A$ y $S(A) \subset A$ es un álgebra de Hopf.

Ejemplo 2 El álgebra de funciones representables de un grupo. Sea G un grupo (topológico), diremos que una función $f : G \to k$ es representable si satisface algúna de las siguientes condiciones equivalentes:

Proposición 1.3.3 Sea G es un grupo (topológico) y $f : G \to k$. Son equivalentes:

i) El espacio generado por las traslaciones a izquierda y derecha de f, es decir, las funciones de la forma:

$$f(z \cdot x) : y \mapsto f(zyx)$$

donde x, $z \in G$; es de dimensión finita;

ii) El espacio generado por las traslaciones a derecha de f, es decir, las funciones de la forma:

$$f(\cdot\, x) : y \mapsto f(yx)$$

donde $x \in G$; es de dimensión finita;

iii) El espacio generado por las traslaciones a izquierda de f, es decir, las funciones de la forma:

$$f(z \cdot\,) : y \mapsto f(zy)$$

donde $z \in G$; es de dimensión finita;

iv) Existe una representación (continua)

$$\pi : G \to End(V)$$

sobre algún espacio vectorial (complejo) V de dimensión finita, y elementos $v \in V$ y $\phi \in V'$, de manera que la función f se puede escribir:

$$f(x) = \phi(\pi(x)v)$$

para todo $x \in G$

Prueba. Las implicaciones: $i) \Rightarrow ii), iii)$ son obvias.

Veamos $ii) \Rightarrow iv)$: Sea f una función que satisface $ii)$, entonces las traslaciones a derecha de f generan un espacio vectorial de dimensión finita $V := \{f(\cdot\, x) : x \in G\}$ y además una representación de G sobre dicho espacio:

$$\begin{array}{rcl} \rho : G & \to & End_k(V) \\ x & \mapsto & \rho(x) : \ \rho(x)(g) := g(\cdot\, x) \end{array}$$

pues $\rho(xy)(g) = g(\cdot\, xy) = \rho(x)\rho(y)(g)$, para todo $g \in V$ y $x, y \in G$.

De esta manera f puede ser escrita de la forma:

$$f(x) = (\rho(x)f)(e) = \epsilon(\rho(x)f).$$

Para probar $iii) \Rightarrow iv)$ se usa un argumento completamente similar.

Veamos $iv) \Rightarrow i)$: Sea f una función que satisface $iv)$, entonces existe un espacio vectorial V de dimensión finita y además $f(x) = \phi(\pi(x)v)$.
Escribamos:

$$\mathcal{C}(\pi) = \{h \in k(G) : h(x) = \psi(\pi(x)w), \text{ donde } w \in V,\ \psi \in V'\}$$

La dimensión $dim(\mathcal{C}(\pi)) \leq (dim(V))^2 < \infty$ es finita y para todo $x, z \in G$, la función $f(z\cdot x)$ se puede escribir de la forma:

$$f(z\cdot x) = \phi(\pi(z\cdot x)v) = \psi(\phi(\cdot\,)w)$$

donde $\psi(\cdot\,) = \phi(\pi(z)\cdot\,)$ y $w = \pi(x)v$.
De esta manera f satisface la condición $i)$.

□

Denotemos el espacio de todas las funciones representables por $Rep(G)$, es claro que ellas forman una subálgebra de $k(G)$ y además la aplicación

$$1 : G \to k \ \ : \ x \mapsto 1$$

es una aplicación representable, pues $1(\cdot\, x) = 1$, para todo $x \in G$, es decir satisface $i)$ en la proposición anterior. Y por lo tanto $Rep(G)$ resulta ser una subálgebra con unidad de $k(G)$

Proposición 1.3.4 La subálgebra $Rep(G)$ es un álgebra de Hopf.

Prueba. Como notamos en una observación solo resta mostrar que:

a) $\Delta(Rep(G)) \subset Rep(G) \otimes Rep(G)$, y

b) $S(Rep(G)) \subset Rep(G)$.

Veamos $a)$: Consideremos $f \in Rep(G)$ de la forma $f(x) = \phi(\pi(x)v)$ como en la condición $iv)$, y $\{w_i\}_i$ la base de V y $\{\psi_i\}_i$ la base dual asociada de V'. Entonces todo elemento w de V se puede escribir de la forma

$$w = \sum_i \psi_i(w) w_i$$

De esta manera podemos escribir:

$$(\Delta(f))(x,y) = f(xy) = \phi(\pi(x)\pi(y)v) = \sum_i \phi(\pi(x)w_i)\psi_i(\pi(y)v)$$

para todo $x\, y \in G$. Asi $\Delta(f) = \sum_i f_{1,i} \otimes f_{2,i}$ donde

$$f_{1,i} = \phi(\pi(\cdot\,)w_i) \in Rep(G) \quad \text{y} \quad f_{2,i} = \psi_i(\pi(\cdot\,)v) \in Rep(G)$$

para todo i. Por lo tanto $\Delta(f) \in Rep(G) \otimes Rep(G)$

Para $b)$ consideremos la representación π';

$$\pi' : G \to End(V')$$

dada por $\pi'(x)(\psi) = \psi(\pi(x^{-1})\cdot\,)$ para todo $\psi \in V'$ y $x \in G$. Es compatible con la operación $b)$ pues:

$$\pi'(xy)(\psi) = \psi(\pi((xy)^{-1})\cdot) = \psi(\pi((y)^{-1})\pi(x^{-1}))\cdot\,) = (\pi'(x))(\pi'(y))(\psi)$$

Denotemos por ev_v la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} ev_v : V' & \to & k \\ \psi & \mapsto & \psi(v) \end{array}$$

Entonces:

$$S(f)(x) = f(x^{-1}) = \phi(\pi(x^{-1})v) = ev_v(\pi'(x)\phi)$$

para todo $x \in G$, por lo tanto $S(f) \in Rep(G)$

$\square$

Si ahora consideramos un grupo discreto G, y denotamos por kG al álgebra de grupo de G, el espacio vectorial de todas las aplicaciones sobre G con valores en k con soporte finito, dotado con el producto de convolución:

$$(f * g)(x) := \sum_{yz=x} f(y)g(z)$$

Alternativamente, kG puede ser caracterizado como el álgebra generada por la familia $\{U_x\}_{x\in G}$ sujeta a la relación:

$$U_x U_y = U_{xy}$$

para todo x, $y \in G$; En nuestro primer ejemplo, el caso de un grupo finito, los generadores U_x se corresponden con las aplicaciones $y \mapsto \delta_{x,y}$.

El álgebra de grupo kG posee una estructura de álgebra de Hopf con las siguientes aplicaciones estructurales:

Comultiplicación:

$$\begin{aligned} \Delta : kG &\to kG \otimes kG \\ U_x &\mapsto \Delta(U_x) := U_x \otimes U_x \end{aligned}$$

Counidad:

$$\begin{aligned} \epsilon : kG &\to k \\ U_x &\mapsto \epsilon(U_x) := 1 \end{aligned}$$

y la Antípoda:

$$\begin{aligned} S : kG &\to kG \\ U_x &\mapsto S(U_x) := U_{x^{-1}} \end{aligned}$$

Hasta ahora los ejemplos de álgebras de Hopf que hemos visto son coconmutativos. El siguiente ejemplo es un álgebra de Hopf no conmutativa y no coconmutativa.

EJEMPLO 3 El álgebra de Hopf de dimensión 4 de Sweedler. Asumamos por un momento que la caracteristica de k es distinta de 2. Sea H el álgebra generada por c y x, satisfaciendo la siquiente relación:

$$c^2 = 1, \;\; x^2 = 0, \;\; xc = -cx$$

Entonces H es un espacio vectorial de dimensión 4, con base $\{1, c, x, cx\}$, la estructura de coálgebra es inducida por las siguientes aplicaciones:

Comultiplicación:

$$\begin{aligned} \Delta : H &\to H \otimes H \\ c &\mapsto c \otimes c \\ x &\mapsto c \otimes x + x \otimes 1 \end{aligned}$$

y Counidad:

$$\begin{array}{rcl} \epsilon : H & \to & k \\ c & \mapsto & 1 \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

De esta manera H se convierte en una biálgebra y además se tiene que

$$\sigma(\Delta(x)) \neq \Delta(x),$$

por lo tanto es no coconmutativa.

La antípoda viene dada por la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} S : H & \to & H \\ c & \mapsto & c^{-1} \\ x & \mapsto & -cx. \end{array}$$

Se prueba que H es un álgebra de Hopf.

Una generalización de este ejemplo es:

Ejemplo 4 El álgebra de Taft
Sea $n \geq 2$ un numero entero, y λ una $n-$raiz primitiva de la unidad.
Sea $H_{n^2}(\lambda)$ el álgebra generada por c y x con las relaciones:

$$c^n = 1, \;\; x^n = 0, \;\; xc = \lambda cx$$

Entonces H es un espacio vectorial de dimensión n^2, con base $\{c^i x^j \;:\; 0 \leq i, j \leq n-1\}$, la estructura de coálgebra es inducida por las siguientes aplicaciones:

Comultiplicación:

$$\begin{array}{rcl} \Delta : H & \to & H \otimes H \\ c & \mapsto & c \otimes c \\ x & \mapsto & c \otimes x + x \otimes 1, \end{array}$$

y counidad:

$$\begin{array}{rcl} \epsilon : H & \to & k \\ c & \mapsto & 1 \\ x & \mapsto & 0. \end{array}$$

De esta manera H se convierte en una biálgebra y nuevamente se tiene que

$$\sigma(\Delta(x)) \neq \Delta(x),$$

por lo tanto es no coconmutativa.

La antípoda viene dada por la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} S : H & \to & H \\ c & \mapsto & c^{-1} \\ x & \mapsto & -cx. \end{array}$$

Cuando $n = 2$ y $\lambda = -1$ se obtiene el álgebra de Hopf de dimensión 4 de Sweedler.

1.4. Propiedades de la antípoda

La aplicación antípoda de un álgebra de Hopf satisface muchas relaciones importantes que no son obvias a partir de su definición. Hasta cierto punto, la antípoda de un álgebra de Hopf se comporta como la inversión en un grupo: la inversión en un grupo es una aplicación anti-multiplicativa, y la antípoda de un álgebra de Hopf es anti-multiplicativa y anti-comultiplicativa.

Proposición 1.4.1 La aplicación antípoda de un álgebra de Hopf,

$$S : A \to A^{op,cop}$$

es un morfismo de biálgebras unitario y counitario, esto es, se cumple:

i) $S \circ m = m \circ \sigma \circ (S \otimes S)$, es decir, $S(ab) = S(b)S(a)$ para todo a, $b \in A$;

ii) $S \circ u = u$, es decir, $S(1_A) = 1_A$;

iii) $\Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \sigma \circ \Delta$, es decir,

$$\sum (S(a))_{(1)} \otimes (S(a))_{(2)} = \sum S(a_{(2)}) \otimes S(a_{(1)}),$$

para todo $a \in A$;

iv) $\epsilon \circ S = \epsilon$, es decir, $\epsilon(S(a)) = \epsilon(a)$, para todo $a \in A$.

Prueba. Para la prueba de este resultado usaremos el álgebra de convolución que definimos anteriormente.

i) Consideremos $A \otimes A$ como una coálgebra, y $Hom_k(A \otimes A, A)$ el álgebra de convolución, debido a que ϵ es multiplicativa, la aplicación

$$\epsilon \circ m : A \otimes A \to k$$

es la counidad de $A \otimes A$, de este modo $u \circ \epsilon \circ m$ es la unidad de $Hom_k(A \otimes A, A)$.

Asi por (1.2.1)

$$m^*(u \circ \epsilon) = m^*(S \star id) = (S \circ m) \star m$$

es decir, m es inversible respecto al producto de convolución. Veamos que sucede con el producto:

$$m \star (m \circ \sigma \circ (S \otimes S))$$

si evaluamos esta aplicación en un elemento generador $a \otimes b$ tenemos:

$$\begin{aligned}
[m \star (m \circ \sigma \circ (S \otimes S))](a \otimes b) &= \sum m(a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \cdot m(S(b_{(2)}) \otimes S(a_{(2)})) \\
&= \sum a_{(1)} b_{(1)} S(b_{(2)}) S(a_{(2)}) \\
&= u(\epsilon(a)) u(\epsilon(b)) \\
&= u \circ \epsilon \circ m(a \otimes b)
\end{aligned}$$

por lo tanto, $S \circ m = m \circ \sigma \circ (S \otimes S)$

ii) Aqui utilizamos que id tiene inversa en el álgebra de convolución $Hom_k(A, A)$, entonces se tiene:

$$1_A = (u \circ \epsilon)(1_A) = (S \star id)(1_A) = (m \circ (S \otimes id) \circ \Delta)(1_A) = S(1_A)1_A$$

iii) Consideremos $A \otimes A$ como un álgebra, y el álgebra de convolución $Hom_k(A,\ A \otimes A)$, debido a que Δ es multiplicativa, la aplicación

$$\Delta \circ u : k \to A \otimes A$$

es la unidad de $A \otimes A$, de este modo, $\Delta \circ u \circ \epsilon$ es la unidad de $Hom_k(A,\ A \otimes A)$
Asi

$$\Delta_*(u \circ \epsilon) = \Delta_*(id \star S) = \Delta \star (\Delta \circ S)$$

es decir, Δ es inversible respecto al producto de convolución. Veamos que sucede con el producto:

$$((S \otimes S) \circ \sigma \circ \Delta) \star \Delta$$

Si evaluamos esta aplicación en un elemento generador $a \otimes b$ tenemos:

$$\begin{aligned}
[((S \otimes S) \circ \sigma \circ \Delta) \star \Delta](a) &= \sum (S(a_{(1)}) \otimes S(a_{(2)})) \cdot (a_{(3)} \otimes a_{(4)}) \\
&= \sum S(a_{(2)}) a_{(3)} \otimes S(a_{(1)}) a_{(4)} \\
&= \sum 1_A \otimes \epsilon(a_{(2)}) S(a_{(1)}) a_{(3)} \\
&= \sum 1_A \otimes S(a_{(1)}) a_{(2)} \\
&= \Delta \circ u \circ \epsilon(a)
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \sigma \circ \Delta$

iv) Aquí utilizamos que S es la inversa de id en el álgebra de convolución $Hom_k(A, A)$ y también que ϵ es multiplicativa:

$$\begin{aligned}
\epsilon(S(a)) &= \sum \epsilon(S(a_{(1)}))\epsilon(a_{(2)}) \\
&= \sum \epsilon(S(a_{(1)})a_{(2)}) \\
&= \epsilon \circ u \circ \epsilon(a) = \epsilon(a)
\end{aligned}$$

□

Esta última proposición muestra que en toda álgebra de Hopf, el cuadrado de la aplicación antípoda es un morfismo de álgebras de Hopf. Al contrario de lo que sucede con la inversión de un grupo, la antípoda no es necesariamente involutiva, es decir, S^2 no siempre es igual a la aplicación identidad, la antípoda tampoco es necesariamente biyectiva. La siguiente proposición caracteriza la inversibilidad de la antípoda.

Proposición 1.4.2 Para toda álgebra de Hopf A, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) La antípoda S es biyectiva.

ii) La biálgebra A^{op} es un álgebra de Hopf.

iii) La biálgebra A^{cop} es un álgebra de Hopf.

Si algúna de estas condiciones es satisfecha, entonces S^{-1} es la antípoda de A^{op} y de A^{cop}.

La prueba de este resultado envuelve el siguiente lema:

Lema 1.4.3 Sea A un álgebra de Hopf y sea $T : A \to A$ una aplicación lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) La biálgebra A^{op} es un álgebra de Hopf con antípoda T.

ii) $m \circ \sigma \circ (T \otimes id) \circ \Delta = u \circ \epsilon = m \circ \sigma \circ (id \otimes T) \circ \Delta$

iii) $\sum a_{(2)}T(a_{(1)}) = u(\epsilon(a)) = \sum T(a_{(2)})a_{(1)}$.

iv) $m \circ (T \otimes id) \circ \sigma \circ \Delta = u \circ \epsilon = m \circ (id \otimes T) \circ \sigma \circ \Delta$

v) La biálgebra A^{cop} es un álgebra de Hopf con antípoda T.

Prueba. Es inmediata a partir de la definición de la antípoda

□

Prueba. de la proposición
$i) \Rightarrow ii), iii)$: Supongamos entonces que la aplicación antípoda S es biyectiva, utilicemos el lema anterior para mostrar que S^{-1} es la aplicación antípoda de A^{op} y A^{cop}; por ejemplo en A^{op} debemos mostrar que:

$$(m' \circ (S^{-1} \otimes id) \circ \Delta)(a) = \sum a_{(2)} S^{-1}(a_{(1)}) = u(\epsilon(a))$$

donde $m' = m \circ \sigma$ y σ es el flip, pero

$$\begin{aligned} \sum a_{(2)} S^{-1}(a_{(1)}) &= \sum S^{-1}(a_{(1)} S(a_{(2)})) \\ &= S^{-1}(u(\epsilon(a))) \\ &= u(\epsilon(a)) \end{aligned}$$

y por otro lado de manera completamente análoga se tiene:

$$(m' \circ (id \otimes S^{-1}) \circ \Delta)(a) = \sum S^{-1}(a_{(2)}) a_{(1)} = u(\epsilon(a))$$

$ii), iii) \Rightarrow i)$: Supongamos que A^{op} o A^{cop} son álgebras de Hopf con antípoda T. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} S(T(a)) &= S(\sum \epsilon(a_{(2)}) T(a_{(1)})) \\ &= \sum \epsilon(a_{(2)}) S(T(a_{(1)})) \\ &= \sum a_{(3)} T(a_{(2)}) S(T(a_{(1)})) \\ &= \sum a_{(2)} T(a_{(1)})_{(1)} S(T(a_{(1)})_{(2)}) \\ &= \sum a_{(2)} \epsilon(T(a_{(1)})) \\ &= a \end{aligned}$$

y por otro lado de manera completamente análoga se obtiene: $T(S(a)) = a$ para todo $a \in A$.

□

Podemos observar entonces que para todo álgebra de Hopf, la biálgebra $A^{op,cop}$ es un álgebra de Hopf con la misma antípoda de A.

Corolario 1.4.4 Para toda álgebra de Hopf conmutativa o coconmutativa, se tiene $S^2 = id_A$

Prueba. En ambos casos la aplicación S es antípoda para A^{op} y A^{cop}, por lo tanto $S = S^{-1}$.

□

Proposición 1.4.5 Sean A y B dos álgebras de Hopf, y sea $F : A \to B$ un morfismo entre biálgebras con unidad y counidad. Entonces $F \circ S_A = S_B \circ F$, es decir, F es un morfismo de álgebras de Hopf.

Prueba. Como F es un morfismo entre biálgebras con unidad y counidad se tiene:

$$u_B \circ \epsilon_B \circ F = u_B \circ \epsilon_A = F \circ u_A \circ \epsilon_A.$$

Ahora consideremos en el álgebra de convolución $Hom_k(A, B)$:

$$\begin{aligned}
(S_B \circ F) \star F &= (S_B \star id_B) \circ F \\
&= u_B \circ \epsilon_B \circ F \\
&= F \circ u_A \circ \epsilon_A \\
&= F \circ (id_A \star S_A) \\
&= F \star (F \circ S_A)
\end{aligned}$$

Por lo tanto F tiene inversa con respecto al producto de convolución y su inversa es:

$$S_B \circ F = F \circ S_A$$

□

1.5. Otra caracterización de las álgebras de Hopf

Como vimos antes las álgebras de Hopf pueden ser caracterizadas como aquellas biálgebras para las cuales la aplicación identidad es invertible con respecto al producto de convolución. Ahora, presentaremos otra caracterización de álgebras de Hopf que resulta particularmente muy adecuada para generalizaciones en álgebras no unitarias. Esta caracterización es debida a Van Daele.

Sea A una biálgebra con unidad. Consideremos las aplicaciones lineales:

$$\begin{aligned}
T_1 := (id \otimes m) \circ (\Delta \otimes id) : A \otimes A &\to A \otimes A \\
a \otimes b &\mapsto \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} b = \Delta(a)(1 \otimes b) \\
T_2 := (m \otimes id) \circ (id \otimes \Delta) : A \otimes A &\to A \otimes A \\
a \otimes b &\mapsto \sum ab_{(1)} \otimes b_{(2)} = (a \otimes 1)\Delta(b)
\end{aligned}$$

Teorema 1.5.1 Una biálgebra con unidad A es un álgebra de Hopf si y solo si las aplicaciones T_1 y T_2 son biyectivas.

Este teorema muestra que la existencia de una counidad y de una antípoda puede ser expresada únicamente en términos de la estructura de la biálgebra.

La prueba del teorema se reparte en un lema y una proposición.

Lema 1.5.2 Sea A un álgebra de Hopf. Entonces las aplicaciones T_1 y T_2 son biyectivas.

Prueba. Para mostrar que T_1 y T_2 son biyectivas debemos encontrar sus aplicaciones inversas, para esto consideremos las aplicaciones:

$$R_1 := (id \otimes m) \circ (id \otimes S \otimes id) \circ (\Delta \otimes id) : A \otimes A \to A \otimes A$$

$$a \otimes b \mapsto \sum a_{(1)} \otimes S(a_{(2)})b = ((id \otimes S)(\Delta(a)))(1 \otimes b)$$

y

$$R_2 := (m \otimes id) \circ (id \otimes S \otimes id) \circ (id \otimes \Delta) : A \otimes A \to A \otimes A$$

$$a \otimes b \mapsto \sum aS(b_{(1)}) \otimes b_{(2)} = (a \otimes 1)((S \otimes id)(\Delta(b)))$$

Veamos que la aplicación R_1 es la inversa de T_1:

$$\begin{aligned} R_1(T_1(a \otimes b)) &= R_1(\textstyle\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}b) \\ &= \textstyle\sum a_{(1)} \otimes S(a_{(2)})a_{(3)}b \\ &= \textstyle\sum a_{(1)} \otimes \epsilon(a_{(2)})b \\ &= a \otimes b \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T_1(R_1(a \otimes b)) &= T_1(\textstyle\sum a_{(1)} \otimes S(a_{(2)})b) \\ &= \textstyle\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}S(a_{(3)})b \\ &= \textstyle\sum a_{(1)} \otimes \epsilon(a_{(2)})b \\ &= a \otimes b \end{aligned}$$

Por otro lado, un cálculo similar muestra que R_2 es la inversa de la aplicación T_2

□

Antes de probar la implicación inversa. recojamos algúnas relaciones importantes entre las aplicaciones T_1, T_2, la multiplicación m y la comultiplicación Δ, que provienen de un calculo directo:

$$(\Delta \otimes id) \circ T_1 = (id \otimes T_1) \circ (\Delta \otimes id) : a \otimes b \mapsto \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)} b$$

$$T_1 \circ (id \otimes m) = (id \otimes m) \circ (T_1 \otimes id) : a \otimes b \otimes c \mapsto \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} bc$$

$$(id \otimes \Delta) \circ T_2 = (T_2 \otimes id) \circ (id \otimes \Delta) : a \otimes b \mapsto \sum ab_{(1)} \otimes b_{(2)} \otimes b_{(3)}$$

$$T_2 \circ (m \otimes id) = (m \otimes id) \circ (id \otimes T_2) : a \otimes b \otimes c \mapsto \sum abc_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

La siguiente proposición debida a Van Daele, completa la prueba del teorema:

Proposición 1.5.3 Sea A una biálgebra con unidad. Si las aplicaciones T_1 y T_2 son biyectivas, entonces A es un álgebra de Hopf.

Prueba. Necesitamos construir una counidad y una antípoda para A. Empecemos con la construcción de la counidad. Aprovechemos el lema anterior, pues si A fuera un álgebra de Hopf, entonces podriamos expresar la counidad en terminos de T_1 como sigue:

$$\epsilon(a) = m(T_1^{-1}(a \otimes 1_A))$$

para todo elemento $a \in A$. Es asi que debemos considerar la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} E : A & \to & A \\ a & \mapsto & m(T^{-1}(a \otimes 1_A)) \end{array}$$

El primer paso es mostrar que $im(E) \subset k \cdot 1_A$. Como T_2 es sobreyectiva tenemos que los elementos de la forma $(a \otimes 1)\Delta(b)$ generan $A \otimes A$. Consideremos entonces a, $b \in A$, luego por definición se tiene:

$$(id \otimes E)((a \otimes 1)\Delta(b)) = (a \otimes 1_A) \cdot (id \otimes m)(id \otimes T_1^{-1}) \circ (\Delta \otimes id)(b \otimes 1_A)$$

Por otro lado se tiene:

$$(id \otimes T_1)^{-1} \circ (\Delta \otimes id) = (\Delta \otimes id) \circ T_1^{-1}$$

de esta manera obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} (id \otimes E)((a \otimes 1)\Delta(b)) & = & (a \otimes 1_A) \cdot (id \otimes m)(\Delta \otimes id) \circ T_1^{-1}(b \otimes 1_A) \\ & = & (a \otimes 1_A) \cdot T_1 \circ T_1^{-1}(b \otimes 1_A) \\ & = & ab \otimes 1_A \end{array}$$

con esto concluimos que la imagen de $id \otimes E$ esta incluida en $A \otimes k$ y por lo tanto $im(E) \subset k \cdot 1_A$

De esta manera definimos $\epsilon : A \to k$ por $E(a) = \epsilon(a) \cdot 1_A$ para todo $a \in A$

Afirmación: La aplicación ϵ es una counidad para A.
En efecto, si $b \in A$, por el calculo anterior:

$$\begin{aligned} id \otimes \epsilon(\Delta(b)) &= (id \otimes \epsilon)((1 \otimes 1)\Delta(b)) \\ &= b \otimes 1 \\ &= b. \end{aligned}$$

Aquí identificamos $A \otimes k$ con A. Ahora consideremos:

$$\begin{aligned} (\epsilon \otimes id)(\Delta(b)) &= \sum m(T_1^{-1}(b_{(1)} \otimes 1_A)) \cdot b_{(2)} \\ &= m((id \otimes m)(T_1^{-1}(b_{(1)} \otimes 1_A) \otimes b_{(2)})) \end{aligned}$$

Por otro lado se tiene:

$$(id \otimes m) \circ (T_1 \otimes id)^{-1} = T_1^{-1} \circ (id \otimes m)$$

y de esta manera obtenemos:

$$(\epsilon \otimes id)(\Delta(b)) = m(T_1^{-1}(b_{(1)} \otimes b_{(2)})) = m(b \otimes 1_A) = b,$$

pues $T_1(b \otimes 1_A) = \Delta(b)$.

Resta probar que ϵ es un morfismo de álgebras.

Veamos, que para a, b, $c \in A$ se tiene:

$$(id \otimes \epsilon)((a \otimes 1_A)\Delta(bc)) = abc.$$

Por un lado tenemos que Δ es multiplicativa, entonces

$$(id \otimes \epsilon)((a \otimes 1_A)\Delta(b)\Delta(c)) = (ab)c = (id \otimes \epsilon)((a \otimes 1_A)\Delta(b))c$$

luego

$$(id \otimes \epsilon)(T_2(a \otimes b)\Delta(c)) = (id \otimes \epsilon)(T_2(a \otimes b))c.$$

Debido a la sobreyectividad de T_2 podemos reemplazar $T_2(a \otimes b)$ por $a \otimes b$, pues ambos son generadores de $A \otimes A$. Resulta entonces:

$$(id \otimes \epsilon)((a \otimes b) \cdot \Delta(c)) = (id \otimes \epsilon)(a \otimes b)c = a\epsilon(b)c = \epsilon(b)ac.$$

Ahora utilicemos los extremos de esta igualdad

$$(id \otimes \epsilon)((a \otimes b) \cdot \Delta(c)) = \epsilon(b)ac = \epsilon(b)(id \otimes \epsilon)((a \otimes 1_A)\Delta(c)).$$

Por otro lado $a \otimes b = (1_A \otimes b) \cdot (a \otimes 1_A)$, luego

$$(id \otimes \epsilon)((1_A \otimes b) \cdot (a \otimes 1_A) \cdot \Delta(c)) = \epsilon(b)(id \otimes \epsilon)((a \otimes 1_A)\Delta(c)).$$

Nuevamente apelamos a la sobretectividad de T_2 y obtenemos:

$$(id \otimes \epsilon)((1_A \otimes b) \cdot (a \otimes c)) = \epsilon(b)(id \otimes \epsilon)(a \otimes c)$$

$$(id \otimes \epsilon)(a \otimes bc) = \epsilon(b)(id \otimes \epsilon)(a \otimes c),$$

luego

$$a\epsilon(bc) = a\epsilon(b)\epsilon(c)$$

para todo $a \in A$, por lo tanto $\epsilon(bc) = \epsilon(b)\epsilon(c)$ para todo b, $c \in A$.

Sigamos con la construcción de la aplicación antípoda. Nuevamente aprovechamos el lema anterior, pues si A fuera un álgebra de Hopf, entonces podriamos expresar la antípoda S en términos de T_1 y la counidad ϵ como sigue:

$$S(a) = (\epsilon \otimes id)(T_1^{-1}(a \otimes 1_A)) \tag{1.5.1}$$

para todo $a \in A$ como se puede ver con un cálculo largo pero directo. Usamos (1.5.1) para definir la antípoda $S : A \to A$.

Debemos verificar que S es efectivamente una antípoda para A, para esto elijamos un elemento arbitrario $a \in A$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
(S \star id)(a) &= \sum S(a_{(1)})a_{(2)} \\
&= \sum (\epsilon \otimes id)(T_1^{-1}(a_{(1)} \otimes 1_A)) \cdot a_{(2)} \\
&= \sum m((\epsilon \otimes id)(T_1^{-1}(a_{(1)} \otimes 1_A)) \otimes a_{(2)}) \\
&= \sum m \circ ((\epsilon \otimes id) \otimes id) \circ (T_1^{-1} \otimes id)(a_{(1)} \otimes 1_A \otimes a_{(2)}) \\
&= \sum (\epsilon \otimes id) \circ (id \otimes m) \circ (T_1^{-1} \otimes id)(a_{(1)} \otimes 1_A \otimes a_{(2)})
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene:

$$(id \otimes m) \circ (T_1 \otimes id)^{-1} = T_1^{-1} \circ (id \otimes m),$$

luego

$$\begin{aligned}
(S \star id)(a) &= \sum (\epsilon \otimes id)(T_1^{-1}(a_{(1)} \otimes a_{(2)})) \\
&= (\epsilon \otimes id)(a \otimes 1_A) \\
&= \epsilon(a)1_A
\end{aligned}$$

Ahora consideremos $(id \star S)$:

$$\begin{aligned}
(id \star S)(a) &= \sum a_{(1)} S(a_{(2)}) \\
&= \sum a_{(1)} \cdot (\epsilon \otimes id)(T_1^{-1}(a_{(2)} \otimes 1_A)) \\
&= \sum m \circ (id \otimes (\epsilon \otimes id)) \circ (id \otimes T_1^{-1})(a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes 1_A) \\
&= m \circ (id \otimes (\epsilon \otimes id)) \circ (id \otimes T_1^{-1}) \circ (\Delta \otimes id)(a \otimes 1_A) \\
&= m \circ ((id \otimes \epsilon) \otimes id)) \circ (id \otimes T_1^{-1}) \circ (\Delta \otimes id)(a \otimes 1_A)
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene:

$$(\Delta \otimes id) \circ T_1^{-1} = (id \otimes T_1)^{-1} \circ (\Delta \otimes id) \ \text{ y } \ (id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id$$

luego,

$$\begin{aligned}
(id \star S)(a) &= m \circ ((id \otimes \epsilon) \otimes id)) \circ (\Delta \otimes id) \circ T_1^{-1}(a \otimes 1_A) \\
&= m \circ (((id \otimes \epsilon) \circ \Delta) \otimes id) \circ T_1^{-1}(a \otimes 1_A) \\
&= m \circ (id \otimes id) \circ T_1^{-1}(a \otimes 1_A) \\
&= m \circ T_1^{-1}(a \otimes 1_A) \\
&= \epsilon(a) 1_A
\end{aligned}$$

Por lo tanto S es una antípoda para A.

□

1.6. *-álgebras de Hopf

Las *-álgebras de Hopf son álgebras de Hopf equipadas con una involución lineal-conjugada compatible con la estructura de biálgebra de una manera natural.

Una involución sobre un espacio vectorial complejo A es una aplicación

$$* : A \to A$$

que es lineal-conjugada e involutiva si satisface:

i) $(a+b)^* = a^* + b^*$

ii) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$

iii) $(a^*)^* = a$

Para todo a, $b \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Un espacio vectorial complejo con una involución fijada es llamado un *-espacio vectorial. Y una aplicación lineal $\phi : B \to A$ de *-espacios vectoriales es *-lineal, si esta satisface: $\phi(a^*) = \phi(a)^*$ para todo $a \in A$.

Un *-álgebra es espacio vectorial complejo A equipado con una involución de manera que $(ab)^* = b^*a^*$ para todo a, $b \in A$.

Definición 1.6.1 Una *-coálgebra es un espacio vectorial complejo A equipado con una involución de manera que $\Delta(a^*) = \sum a^*_{(1)} \otimes a^*_{(2)}$ para todo $a \in A$.

Definición 1.6.2 Una *-biálgebra es una biálgebra compleja con una involución que la transforma en *-álgebra y *-coálgebra. Una *-biálgebra que es un álgebra de Hopf sera llamada *-álgebra de Hopf

Ejemplo 5 Si G es un grupo finito, el álgebra de Hopf $\mathbb{C}(G)$ es un *-álgebra de Hopf con respecto a la involución: $f \mapsto f^*$ definida por $f^*(x) := \overline{f(x)}$

Ejemplo 6 El álgebra de Hopf $Rep(G)$ de funciones representables de un grupo con la involución del ejemplo anterior es un *-álgebra de Hopf, pues $Rep(G)$ es cerrado bajo la involución.

En un *-álgebra de Hopf, el comportamiento de la multiplicación y comultiplicación con respecto a la involución esta prescrito por la definición. Para la unidad y la counidad, obtenemos las siguientes relaciones:

Proposición 1.6.3 La counidad de una *-coálgebra (con counidad) es *-lineal.

Prueba. Sea A un *-álgebra de Hopf con counidad ϵ

Afirmación: La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \epsilon' : A & \to & \mathbb{C} \\ a & \mapsto & \epsilon'(a) := \overline{\epsilon(a^*)} \end{array}$$

es una counidad para A

En efecto, sea $a \in A$, entonces

$$(id \otimes \epsilon')(\Delta(a^*)) = \sum a^*_{(1)}\epsilon'(a^*_{(2)}) = \sum (a_{(1)}\epsilon(a_{(2)}))^* = a^*$$

de manera completamente similar se obtiene $(\epsilon' \otimes id)(\Delta(a^*)) = a^*$. Por lo tanto $\epsilon' = \epsilon$,es decir, la counidad es *-lineal.

□

Proposición 1.6.4 La antípoda de un *-álgebra de Hopf es biyectiva y satisface: $S \circ * \circ S \circ * = id$.

Prueba. Sea A un *-álgebra de Hopf con antípoda S

Afirmación: La aplicación

$$\begin{array}{rcl} S' : A & \to & \mathbb{C} \\ a & \mapsto & S'(a) := (S(a^*))^* \end{array}$$

es antípoda para A^{op}

En efecto, sea $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned} (S' \star id)(a^*) &= \sum a^*_{(2)} S'(a^*_{(1)}) \\ &= \sum a^*_{(2)} S(a_{(1)})^* \\ &= \sum (S(a_{(1)}) a_{(2)})^* \\ &= u(\epsilon(a))^* \\ &= u(\epsilon(a^*)) \end{aligned}$$

y de manera similar se obtiene $(id \star S')(a^*) = u(\epsilon(a^*))$. Por lo tanto $S' = S^{-1}$

□

Corolario 1.6.5 La antípoda de un *-álgebra de Hopf es *-lineal si y solo si es involutiva, es decir, $S^2 = id$

Prueba. La proposición anterior muestra que la aplicación $S \circ *$ tiene inversa, entonces

$$\begin{aligned} * \circ S = S \circ * &\Leftrightarrow (S \circ *) \circ (* \circ S) = (S \circ *) \circ (S \circ *) \\ &\Leftrightarrow S^2 = id \end{aligned}$$

□

1.7. La dualidad de álgebras de Hopf

1.7.1. La dualidad de álgebras de Hopf de dimensión finita

Iniciemos fijando algúnas notaciones que involucran el álgebra lineal.

Sea V un espacio vectorial, denotaremos V' su espacio dual $Hom_k(V, k)$ y por

$$i_V : V \to V''$$

la inclusión natural definida por $(i_V(v))(f) := f(v)$ para todo $v \in V$ y $f \in V'$.

Además consideraremos al espacio $V' \otimes V'$ como un subespacio de $(V \otimes V)'$ via la inclusión natural

$$j : V' \otimes V' \to (V \otimes V)'$$

definida por $j(f \otimes g)(v \otimes w) := f(v)g(w)$ para todo $v, w \in V$ y $f, g \in V'$. Un resultado del álgebra lineal muestra que estas inclusiones naturales son isomorfismo si y solo si el espacio vectorial V es de dimensión finita.

Por último, toda aplicación lineal $F : V \to W$ induce una aplicación dual

$$F' : W' \to V'$$

definida por $F'(f) = f \circ F$ para todo $f \in W'$

Teorema 1.7.1 Sea A una coálgebra. Entonces el espacio dual A' es un álgebra con la multiplicación definida como la composición:

$$\begin{array}{rcl} m_{A'} := (\Delta_A)' \circ j : A' \otimes A' & \to & A' \\ f \otimes g & \mapsto & j(f \otimes g) \circ \Delta_A \end{array}$$

El álgebra A' tiene unidad si y solo si A tiene counidad, y en este caso la unidad de A' coincide con la counidad de A.

El problema dual es el siguiente: Si tenemos una álgebra (A, m, u), podemos introducir una estructura canónica de coálgebra sobre A'? Observemos que no es posible realizar una contrucción similar al álgebra dual, debido a que no existe un morfismo canónico $(A \otimes A)' \to A' \otimes A'$. Sin embargo, si A es un álgebra de dimensión finita, el morfismo canónico $j : A' \otimes A' \to (A \otimes A)'$ es biyectivo y podemos usar j^{-1}.

Teorema 1.7.2 Sea A un álgebra de dimensión finita. Entonces el espacio dual A' es una coálgebra con la comultiplicación definida por la composición:

$$\begin{array}{rcl} \Delta_{A'} := j^{-1} \circ (m_A)' : A' & \to & A' \otimes A' \\ f & \mapsto & j^{-1}(f \circ m_A) \end{array}$$

La coálgebra A' tiene counidad si y solo si A tiene unidad, y en este caso la counidad de A' coincide con la evaluacion en la unidad de A.

De esta manera si A es una biálgebra de dimensión finita podemos dotar de una estructura de biálgebra al espacio dual A', más aún:

Teorema 1.7.3 Sea A un álgebra de Hopf de dimensión finita. Entonces A' es un álgebra de Hopf con antípoda

$$\begin{array}{rcl} S_{A'} := (S_A)' : A' & \to & A \\ f & \mapsto & f \circ S_A \end{array}$$

y el isomorfismo de espacios vectoriales $i_A : A \to A''$ es un isomorfismo de álgebras de Hopf.

Teorema 1.7.4 Sea A una *-álgebra de Hopf. Entonces A' es una *-álgebra vía la involución definida por la siguiente ecuación:

$$f^*(a) := \overline{f(S(a)^*)} \tag{1.7.1}$$

para todo $a \in A$ y $f \in A'$.

Si además A es una *-álgebra de Hopf de dimensión finita, entonces A' también es una *-álgebra de Hopf, más aun el isomorfismo canónico $\iota_A : A \to A''$ es un isomorfismo de *-álgebras de Hopf

Prueba. Veamos que la ecuación (4.2.4) define una involución sobre A' y además A' es una *-álgebra:

Denotemos por $*_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la conjugación compleja, entonces $f^* = *_{\mathbb{C}} \circ f \circ *_A \circ S_A$ para todo $f \in A'$, de esta manera:

$$(f^*)^* = * \circ (* \circ f \circ * \circ S_A) \circ * \circ S_A = f$$

y

$$\begin{aligned} (fg)^* &= * \circ (f \otimes g) \circ \Delta_A \circ * \circ S_A \\ &= ((* \circ g \circ * \circ S_A) \otimes (* \circ f \circ * \circ S_A)) \circ \Delta_A \\ &= g^* f^* \end{aligned}$$

Ahora supongamos que A es de dimensión finita y sea $f \in A'$,

$$\Delta_{A'}(f^*) = f^* \circ m_A = * \circ f \circ * \circ S_A \circ m_A = * \circ f \circ m_A \circ ((* \circ S_A) \otimes (* \otimes S_A))$$

por otro lado $f \circ m_A = \Delta_{A'}(f) = \sum f_{(1)} \otimes f_{(2)}$, de esta manera

$$\Delta_{A'}(f^*) = \sum (* \circ f_{(1)} \circ * \circ S_A) \otimes (* \circ f_{(2)} \circ * \circ S_A) = \sum f^*_{(1)} \otimes f^*_{(2)}$$

Así A' es una *-coálgebra y debido al teorema anterior un álgebra de Hopf.

Por último, veamos que el isomorfismo natural $\iota_A : A \to A''$ de álgebras de Hopf es *-lineal:

$$\begin{aligned}(\iota(a))^*(f) &= \overline{\iota(a)(S_{A'}(f)^*)} = \overline{(S_{A'}(f)^*)(a)} \\ &= (S_{A'}(f))(S_A(a)^*) = (f \circ S_A \circ * \circ S_A)(a) = f(a^*) = (\iota(a^*))(f)\end{aligned}$$

para todo $a \in A$ y $f \in A'$

□

1.7.2. El dual restringido de un álgebra de Hopf

Si bien para todo álgebra de Hopf el espacio dual A' no es necesariamente un álgebra de Hopf, los elementos de la mayor subálgebra $A^0 \subset A'$ para la cual la aplicación $\Delta_{A'} = (m_A)' : A' \to (A \otimes A)'$ define una comultiplicación, son caracterizados por el siguiente lema

Lema 1.7.5 Si A es un álgebra unital y $f \in A'$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $\Delta_{A'}(f) \in A' \otimes A'$,

ii) El Ker$f$ contiene un ideal a izquierda de A de codimesión finita,

iii) El Ker$f$ contiene un ideal a derecha de A de codimesión finita,

iv) El Ker$f$ contiene un ideal (bilatero) de A de codimesión finita,

Prueba. Veamos que *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: Podemos escribir $\Delta_{A'}(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$ donde g_i, $h_i \in A'$, el conjunto $\{g_i\}_i$ linealmente independiente y h_i no nulos. Consideremos entonces el conjunto

$$J := \bigcap_i \ker h_i,$$

que tiene codimension finita pues ker h_i tiene codimensión 1 para cada i y la intersección $\cap_i \ker h_i$ es finita
Veamos que J es un ideal a izquierda ($AJ \subset J$):
Si $b \in A$ y $c \in J$, se tiene:

$$0 = \sum_i g_i(ab)h_i(c) = f(abc) = \sum_i g_i(a)h_i(bc)$$

para todo $a \in A$, es decir:

$$\sum_i g_i(\cdot)h_i(bc) = 0$$

y la independencia lineal de $\{g_i\}_i$, se tiene:

$$h_i(bc) = 0, \text{ para todo } i$$

por lo tanto J es un ideal a izquierda de A.

Por otro lado, si $a \in J$ se tiene:

$$f(a) = f(1_A \cdot a) = \sum_i g_i(1_A)h_i(a) = 0$$

luego $J \subset \ker f$

La prueba de $i) \Rightarrow iii)$ es completamente similar.
Veamos $ii) \Rightarrow iv)$: Sea $J \subset A$ ideal a izquierda de codimensión finita, tal que $f(J) = 0$, entonces la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \pi : A & \rightarrow & Hom_k(A/J) \\ a & \mapsto & \pi(a) \end{array}$$

definida por $\pi(a)(b + J) := ab + J$, es un morfismo de álgebras.

Por otro lado $Hom_k(A/J)$ tiene dimensión finita pues A/J la tiene, asi que el nucleo de la aplicación π, $I := \ker\pi$ tiene codimensión finita en A

Por definición tenemos $\pi(I) = 0$, entonces $I \subset J$, por lo tanto $f(I) = 0$

La prueba de $i) \Rightarrow iv)$ es completamente similar.

Veamos $iv) \Rightarrow i)$: Sea $I \subset A$ un ideal de codimensión finita contenido en $\ker f$.
Denotemos la aplicación de pasar al cociente por $\pi : A \rightarrow A/I$ y $\pi' : (A/I)' \rightarrow A'$ su aplicación dual. Por otro lado tenemos que $\Delta_{A'}(f) = f \circ m$ se anula sobre $A \otimes I + I \otimes A$, de esta manera $\Delta_{A'}(f)$ define una aplicación

$$g : \frac{A \otimes A}{A \otimes I + I \otimes A} \rightarrow k$$

la cual podemos identificar como una aplicación en $(A/I \otimes A/I)' \cong (\frac{A \otimes A}{A \otimes I + I \otimes A})'$

Por otro lado A/I tiene dimensión finita, asi :

$$(A/I \otimes A/I)' \cong (A/I)' \otimes (A/I)'$$

tal que $g = \sum g_{(1)} \otimes g_{(2)}$, luego

$$\Delta_{A'}(f) = \sum \pi'(g_{(1)}) \otimes \pi'(g_{(2)}) \in A' \otimes A'$$

□

DEFINICIÓN 1.7.6 El dual restringido de un álgebra con unidad A es el subespacio $A^0 \subset A'$ generado por las aplicaciones que satisfacen algúna de las condiciones del lema anterior.

PROPOSICIÓN 1.7.7 Sea A un álgebra con unidad. Entonces el espacio A^0 satisface $\Delta_{A'}(A^0) \subset A^0 \otimes A^0$, es decir, A^0 con la restricción de $\Delta_{A'}$ es una coálgebra con counidad. La counidad de A^0 es definida por $f \mapsto f(1_A)$.

PRUEBA. Sea $f \in A^0$, podemos escribir $\Delta_{A'}(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$ donde g_i, $h_i \in A'$, de manera que el conjunto $\{h_i\}_i$ sea linealmente independiente, de esta manera podemos elegir para cada j un elemento $a_j \in A$ tal que $h_i(a_j) = \delta_{i,j}$, entonces:

$$g_j(ab) = \sum_i g_i(ab)h_i(a_j) = f(aba_j) = \sum_i g_i(a)h_i(ba_j)$$

para todo a, $b \in A$. Esta igualdad muestra que la aplicación $g_j \in A^0$, pues:

$$\Delta_{A'}(g_j) = \sum_i g_i \otimes h_i(\cdot a_j) \in A' \otimes A'$$

Por lo tanto $\Delta_{A'}(f) \in A^0 \otimes A'$. Un argumento similar muestra que $\Delta_{A'}(f) \in A' \otimes A^0$, luego $\Delta_{A'}(f) \in A^0 \otimes A^0$

□

PROPOSICIÓN 1.7.8 Sea A una biálgebra con unidad. Entonces $A^0 \subset A'$ es una subálgebra, y junto con la comultiplicación de la proposición anterior es una biálgebra con unidad. Si A es un álgebra de Hopf, entonces A^0 es un álgebra de Hopf.

PRUEBA. Supongamos que A es una biálgebra con unidad. Entoncees A^0 es una subálgebra de A', debido a que para todo f, $g \in A^0$, el producto fg pertence aun a A^0, pues

$$\Delta_{A'}(fg) = \Delta_{A'}(f)\Delta_{A'}(g) \in (A' \otimes A') \cdot (A' \otimes A') \subset A' \otimes A'$$

La condición de compatibilidad de la multiplicación y comultiplicación se debe a que ellas son las aplicaciones duales de la multiplicación y comultiplicación de A.

Ahora supongamos que A es un álgebra de Hopf. Denotemos:

$$S_{A^0} := (S'_A|_{A^0}) : A^0 \to A'$$

la restricción de la aplicación dual de S_A, veamos que dicha restricción satisface: $S_{A^0}(A^0) \subset A^0$.

En efecto, sea $f \in A^0$. Entonces

$$\begin{aligned} (\Delta_{A'}(f \circ S_A))(a \otimes b) &= f \circ S_A(ab) \\ &= f(S(b)S(a)) \\ &= (\Delta_{A'}(f)(S_A(b) \otimes S_A(a))) \\ \Rightarrow \Delta_{A'}(f \circ S_A) &= \sum (f_{(2)} \circ S_A) \otimes (f_{(1)} \circ S_A) \in A' \otimes A' \end{aligned}$$

Por lo tanto $f \circ S_A = S_{A^0}(f) \in A^0$

$\square$

Proposición 1.7.9 Para toda *-álgebra de Hopf A, la formula $f^*(a) := \overline{f(S(a)^*)}$ define una involución sobre A^0, la cual convierte A^0 en una *-álgebra de Hopf A.

Prueba. Sea $f \in A^0$. Tenemos:

$$\begin{aligned} (\Delta_{A'}(f^*))(a \otimes b) &= f^*(ab) \\ &= \overline{f(S(a)^* S(b)^*)} \\ &= \overline{(\Delta_{A'}(f)(S_A(a)^* \otimes S_A(b))^*)} \\ &= \overline{(\sum f_{(1)} \otimes f_{(2)})(S_A(a)^* \otimes S_A(b))^*)} \\ &= \sum \overline{(f_{(1)} \circ S_A(a)^*)} \otimes \overline{(f_{(2)} \circ S_A(b)^*))} \\ \Rightarrow \Delta_{A'}(f^*) &= \sum (f^*_{(1)}) \otimes (f^*_{(2)}) \in A' \otimes A' \end{aligned}$$

Por lo tanto $f^* \in A^0$

$\square$

1.7.3. Emparejamiento dual de álgebras de Hopf

Sea A una biálgebra de dimensión finita, como vimos antes el espacio dual A' de A es nuevamente una biálgebra y sus relaciones entre las aplicaciones de estructura de A' y A pueden ser expresadas convenientemente en términos de un emparejamiento natural

$$\begin{array}{rcl} (\cdot|\cdot) : A \times A' & \to & \mathbb{K} \\ (a|f) & := & f(a) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (\cdot|\cdot) : (A \otimes A) \times (A' \otimes A') & \to & \mathbb{K} \\ (a_1 \otimes a_2 | f_1 \otimes f_2) & := & f_1(a_1) \cdot f_2(a_2) \end{array}$$

como sigue :

$$(a|f_1 f_2) = (a|m'(f_1 \otimes f_2)) = (\Delta(a)|f_1 \otimes f_2) = \sum (a_{(1)}|f_1)(a_{(2)}|f_2)$$

y

$$(a_1 a_2|f) = (m(a_1 \otimes a_2)|f) = (a_1 \otimes a_2|\Delta'(f)) = \sum (a_1|f_{(1)})(a_2|f_{(2)})$$

para todo a, a_1, $a_2 \in A$ y f, f_1, $f_2 \in A'$.

Además, si A es un álgebra de Hopf o un *-álgebra de Hopf, también lo es A' y en cada caso la unidad, counidad, antípoda e involución de A y A' se encuentran relacionadas por ecuaciones similares. Estas relaciones son las que motivan las siguiente definición:

Definición 1.7.10 Un emparejamiento entre álgebras de Hopf (o *-álgebras de Hopf) A y B es una aplicación bilineal

$$\begin{array}{rcl} (\cdot|\cdot) : A \times B & \to & \mathbb{K} \\ (a,b) & \mapsto & (a|b) \end{array}$$

que satisface:

$$(a|b_1 b_2) = \sum (a_{(1)}|b_1)(a_{(2)}|b_2), \quad (a_1 a_2|b) = \sum (a_1|b_{(1)})(a_2|b_{(2)})$$

$$(a|1_B) = \epsilon_A(a), \quad (1_A|b) = \epsilon_B(b), \quad (S_A(a)|b) = (a|S_B(b))$$

y

$$((a|b^*) = \overline{(S_A(a)^*|b)}, \quad (a^*|b) = \overline{(a|S_B(b)^*)})$$

para todo a, a_1, $a_2 \in A$ y b, b_1, $b_2 \in B$.

Definición 1.7.11 El emparejamiento dual sera llamado *perfecto* o no degenerado, si para cada par de elementos no nulos $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$, existen $a \in A$ y $b \in B$ de manera que $(a_0|b) \neq 0$ y $(a|b_0) \neq 0$

Observación 6 i) Sea $(\cdot|\cdot) : A \times B \to \mathbb{K}$ un emparejamiento dual de álgebras de Hopf, entonces para cada $a \in A$ se tiene definida una aplicación lineal $(a|\cdot) : B \to \mathbb{K}$, $b \mapsto (a|b)$ y de esta manera un homorfismo natural de álgebras con unidad: $A \to B'$, $a \mapsto (a|\cdot)$. De manera similar, se obtiene un homomorfismo de álgebras con unidad $B \to A'$, $b \mapsto (\cdot|b)$

ii) Para todo álgebra de Hopf de dimension finita A, el emparejamiento canónico entre A y A' es un emparejamiento dual perfecto de álgebras de Hopf. Si B es otra álgebra de Hopf y $(\cdot|\cdot) : A \times B \to \mathbb{K}$ un emparejamiento dual perfecto, entonces B tiene dimensión finita y los homomorfismos $A \to B'$, $a \mapsto (a|\cdot)$, y $B \to A'$, $b \mapsto (\cdot|b)$ son isomorfismos de álgebras de Hopf.

iii) Sea $(\cdot|\cdot) : A \times B \to \mathbb{K}$ un emparejamiento dual de álgebras de Hopf y asumamos que A y B son *álgebras de Hopf. Entonces $(a|b^*) = \overline{(S_A(a)^*|b)}$ para todo $a \in A$ y $b \in B$ si y solo si $(a^*|b) = \overline{(a|S_B(b)^*)}$ para todo $a \in A$ y $b \in B$.
De hecho, si la primera condición es satisfecha, entonces:

$$(a^*|b) = (S_A(S_A(a)^*)|b) = (S_A(a)^*|S_B(b)) = \overline{(a|S_B(b)^*)}$$

para todo $a \in A$ y $b \in B$, la implicación inversa es completamente similar. Así una de estas condiciones puede ser omitida en la definición de emparejamiento dual de *-álgebras de Hopf

Ejemplo 7 Existe un emparejamiento dual $\mathcal{O}(SL_n(\mathbb{C})) \times U(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})) \to \mathbb{C}$ determinado por:

$$(u_{ij}|X) := u_{ij}(X) \text{ para } 1 \leq i,j \leq n, \quad X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$$

donde $u_{ij} : \mathbb{M} \to \mathbb{C}$ denota la (i,j) función coordenada.

Ejemplo 8 Sea G un grupo de Lie compacto con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Existe un emparejamiento dual entre el álgebra de Hopf de funciones representables $Rep(G)$ y el álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$, la cual puede ser descrita como sigue:

Todo $X \in \mathfrak{g}$ determina un campo de vectores invariante a izquierda sobre G y así un operador diferencial de primer orden

$$\mathcal{D}_X : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$$

La aplicación $X \mapsto \mathcal{D}_X$, se extiende a un homomorfismo de álgebras con unidad inyectivo:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D} : U(\mathfrak{g}) & \hookrightarrow & End_{\mathbb{C}}(C^\infty(G)) \\ \omega & \mapsto & \mathcal{D}_\omega \end{array}$$

de manera explícita el operador diferencial $\mathcal{D}_\omega$ asociado al elemento $\omega = X_1 \cdots X_n \in U(\mathfrak{g})$ es dado por:

$$(\mathcal{D}_\omega f)(y) = (\mathcal{D}_{X_1} \cdots \mathcal{D}_{X_n} f)(y)$$

Si denotamos por $e \in G$ el elemento unidad del grupo, la aplicación bilineal:

$$\begin{array}{rcl}(\cdot|\cdot) : U(\mathfrak{g}) \times Rep(G) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (\omega, f) & \mapsto & (\mathcal{D}_\omega f)(e)\end{array}$$

es un emparejamiento dual perfecto de álgebras de Hopf. Para más detalles ver [BD]

PROPOSICIÓN 1.7.12 i) Para toda álgebra de Hopf A, la aplicación natural

$$\begin{array}{rcl}(\cdot|\cdot) : A \times A^0 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (a, f) & \mapsto & f(a)\end{array}$$

es un emparejamiento dual de álgebras de Hopf.

ii) Si $(\cdot|\cdot) : A \times B \rightarrow \mathbb{C}$ es un emparejamiento dual de álgebras de Hopf, entonces las aplicaciones inducidas $A \rightarrow B'$, $a \mapsto (a|\cdot)$ y $B \rightarrow A'$, $b \mapsto (\cdot|b)$ definen morfismos de álgebras de Hopf:

$$A \rightarrow B^0, \quad B \rightarrow A^0.$$

Si el emparejamiento es perfecto, entonces los morfismos resultan inyectivos.

PRUEBA. La prueba es consecuencia directa de la definición del dual restringido.

$\square$

Capítulo 2

Álgebras de Hopf de multiplicadores

El resultado principal de este capítulo es establecer la dualidad de álgebras de Hopf de multiplicadores regulares y grupos cuánticos algebraicos.

Un álgebra de Hopf de multiplicadores es una generalización no unitaria de un álgebra de Hopf, donde el conjunto de llegada de la comultiplicación ya no es el producto tensorial doble del álgebra subyacente, sino un álgebra de multiplicadores. Una de las motivaciones de esta generalización, las definiciones correspondientes, y el principal ejemplo se presentan en la sección 2.1.

Una característica notable de las álgebras de Hopf de multiplicadores es que admite una dualidad buena que extiende la dualidad (incompleta) de álgebras de Hopf presentadas en el capitulo anterior. Esta dualidad se basa en los funcionales lineales invariantes a izquierda y a derecha llamados integrales, que son análogos de las medidas de Haar de un grupo. Estas integrales y sus propiedades modulares se discuten en la sección 2.2, y la teoría de la dualidad se da en la sección 2.3.

La teoría de álgebras de Hopf de multiplicadors fue desarrollada por Van Daele, todos los resultados presentados en este capítulo se han tomado de los artículos [6] y [7].

2.1. Definición de álgebras de Hopf de multiplicadores

Nuestros primeros ejemplos de álgebras de Hopf fueron las álgebras de funciones sobre grupos adecuados, donde se definieron la comultiplicación, counidad y antípoda como la transpuesta de la multiplicación del grupo, de la inclusión de la unidad, y de la inversión del grupo, respectivamente, como en las ecuaciónes 1.2, 1.3 y 1.4 del primer cápitulo. Recordemos que las funciones pertenecientes a una álgebra de Hopf tenía que ser elegidas con cuidado y de conformidad con los grupos, por ejemplo:

- Funciones arbitrarias si los grupos son finitos,

- Funciones representativas si los grupos son compactos.

Ahora supongamos que G es un grupo discreto infinito. En los ejemplos 1, 2 y 3 del primer capitulo mostramos que el álgebra $\mathrm{k}(G)$ de todas las funciones sobre G es muy grande para poder definir la comultiplicación Δ. Un sustituto natural seria el álgebra $\mathrm{k}_{\mathrm{fin}}(G) \subset \mathrm{k}(G)$ de funciones con soporte finito. Pero por desgracia, la imagen $\Delta(\mathrm{k}_{\mathrm{fin}}(G)) \subset \mathrm{k}(G \times G)$ no esta contenida en el subespacio $\mathrm{k}_{\mathrm{fin}}(G) \otimes \mathrm{k}_{\mathrm{fin}}(G) \cong \mathrm{k}_{\mathrm{fin}}(G \times G)$, asi que no es posible restringir Δ a una comultiplicación sobre $\mathrm{k}_{\mathrm{fin}}(G)$.

Para solucionar este problema, extendemos la noción de morfismo de álgebras por otro tipo de morfismo del álgebra A en el álgebra B que toma valores en el álgebra de multiplicadores $\mathcal{M}(A)$. En la situación anterior, el álgebra de multiplicadores $\mathcal{M}(\mathrm{k}_{\mathrm{fin}}(G) \otimes \mathrm{k}_{\mathrm{fin}}(G))$ será igual a $\mathrm{k}(G \times G)$

2.1.1. Álgebra de multiplicadores

El concepto de álgebra de Hopf de multiplicadores esta basada en la siguiente noción de multiplicador de un álgebra:

Definición 2.1.1 Sea A un álgebra. Un multiplicador a izquierda (derecha) de A es una aplicación lineal $T : A \to A$ que satisface:

$$T(ab) = T(a)b \;\; (\, T(ab) = aT(b)\,)$$

respectivamente, para todo a, $b \in A$.
Un multiplicador de A es un par (T_l, T_r) el cual consiste de un multiplicador a izquierda T_l y un multiplicador a derecha T_r, los cuales satisfacen:

$$bT_l(a) = T_r(b)a$$

para todo a, $b \in A$.

El conjunto de todos los multiplicadores de A ser á denotado por $\mathcal{M}(A)$; que además es álgebra con respecto al producto

$$(T_l, T_r) \cdot (T_l', T_r') = (T_l \circ T_l', T_r' \circ T_r).$$

Observación 7 Para un álgebra conmutativada, una aplicación $T : A \to A$ el conjunto de los multiplicadores a izquierda coincide con los multiplicadores a derecha.

Cuando se trabaja con los multplicadores, es conveniente considerar álgebras y homomorfismos de álgebras que resulten no degeneradas en el siguiente sentido.

Definición 2.1.2 i) Un álgebra A es no degenerada si:

a) Para todo $a \in A$, $a \neq 0$ se tiene $aA \neq 0$ y $Aa \neq 0$.

b) El espacio lineal generado por AA es igual a A

ii) Sean A y B álgebras no degeneradas. Un homomorfismo de $\phi : A \to \mathcal{M}(B)$ es no degenerado si el espacio lineal generado por $\phi(A)B$ y el espacio lineal generado por $B\phi(A)$ son ambos iguales a B.

Haremos continuo uso de las siguientes propiedades de multiplicadores:

Proposición 2.1.3 Sean A y B álgebras no degeneradas.

i) Para todo elemento $a \in A$, las aplicaciones $b \mapsto ab$ y $b \mapsto ba$ definen un multiplicador y la aplicación inducida $A \to \mathcal{M}(A)$ encaja A como un ideal en $\mathcal{M}(A)$.
Desde ahora consideraremos A como un ideal de $\mathcal{M}(A)$, como en i).

ii) $aT = T_r(a)$ y $Ta = T_l(a)$ para todo $a \in A$ y $T = (T_l, T_r) \in \mathcal{M}(A)$.

iii) Si A es unitaria, entonces $T1_A = T = 1_A T \in A$ para todo $T \in \mathcal{M}(A)$, y $\mathcal{M}(A) = A$.

iv) Sea A un *-álgebra. Para todo $T \in \mathcal{M}(A)$, las fórmulas

$$T^*(a) := (a^*T)^* \ \text{ y } \ aT^* := (Ta^*)^* \quad a \in A$$

definen un $T^* \in \mathcal{M}(A)$. La involución $T \mapsto T^*$ torna a $\mathcal{M}(A)$ en una *-álgebra.

v) El producto tensorial $A \otimes B$ es tambien no degenerado, y se tiene el encajamiento natural

$$\mathcal{M}(A) \otimes \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A \otimes B).$$

vi) Todo homomorfismo no degenerado $\phi : A \to \mathcal{M}(B)$ se extiende de manera única a un homomorfismo $\mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B)$. Si A y B son *-álgebras, y ϕ es un *-homomorfismo, entonces la extensión es un *-homomorfismo

Prueba. Ver apéndice de [6].

□

2.1.2. Biálgebra de multiplicadores

Motivados por la discusión en la introducción de este capitulo, generalicemos la noción de una biálgebra como sique:

Definición 2.1.4 Una biálgebra de multiplicadores es un álgebra no degenerada A equipada con un homomorfismo no degenerado $\Delta : A \to \mathcal{M}(A \otimes A)$ de manera que:

i) Los siguientes subconjuntos de $\mathcal{M}(A \otimes A)$ se encuentran contenidos en $A \otimes A \subset \mathcal{M}(A \otimes A)$:

$$\Delta(A)(1 \otimes A) \quad \Delta(A)(A \otimes 1) \quad (A \otimes 1)\Delta(A) \quad (1 \otimes A)\Delta(A).$$

ii) Δ es coasociativa en el sentido que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & \mathcal{M}(A \otimes A) \arrow[d, "\Delta\otimes id"] \\ \mathcal{M}(A \otimes A) \arrow[r, "id\otimes\Delta"] & \mathcal{M}(A \otimes A \otimes A) \end{tikzcd}$$

Si A es un *-álgebra y Δ un *-homomorfismo, entonces (A, Δ) es llamada una *-biálgebra de multiplicadores.

Observación 8

i) Los homomorfismos $\Delta \otimes id$, $id \otimes \Delta : A \otimes A \to A \otimes A \otimes A$ y $F \otimes F : A \otimes A \to A \otimes A$ se han extendido a las respectivas álgebras de multiplicadores.

ii) Dadas dos biálgebras de multiplicadores (A, Δ_A) y (B, Δ_B), se pueden construir nuevas biálgebras $(A, \Delta_A)^{op}$, $(A, \Delta_A)^{cop}$, $(A, \Delta_A)^{op,cop}$ y además $A \oplus B$ y $A \otimes B$ con una estructura de biálgebra de multiplicadores de manera similar como en el caso de biálgebras

Un morfismo de (*-)biálgebra de multiplicadores A y B es un (*-) homomorfismo no degenerado $F : A \to \mathcal{M}(B)$ el cual satisface:

$$\Delta_B \circ F = (F \otimes F) \circ \Delta_A$$

es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\Delta"] & \mathcal{M}(B) \arrow[d, "\Delta_B"] \\ \mathcal{M}(A \otimes A) \arrow[r, "F\otimes F"] & \mathcal{M}(B \otimes B) \end{tikzcd}$$

2.1.3. Álgebra de Hopf de multiplicadores

Las álgebras de Hopf de multiplicadores forman una clase especial de las biálgebras de multiplicadores:

Definición 2.1.5 Un (*-) biálgebra de multiplicadores A es llamada un (*-) álgebra de Hopf de multiplicadores, si las aplicaciones lineales $T_1,\ T_2 : A \otimes A \to A \otimes A$ dadas por:

$$T_1(a \otimes b) = \Delta(a)(1 \otimes b) \quad \text{y} \quad T_2(a \otimes b) = (a \otimes 1)\Delta(b),$$

respectivamente, son biyectivas.
Un álgebra de Hopf de multiplicadores será llamada regular, si las biálgebras de multiplicadores A^{op} y A^{cop} son álgebras de Hopf de multiplicadores.
Un morfismo de (*-) álgebras de Hopf de multiplicadores es simplemente un morfismo de las (*-) biálgebras de multiplicadores subyacentes.

Observación 9 Está definición es analoga a la caracterización de las álgebras de Hopf entre las biálgebras dada en el capitulo anterior.

Las álgebras de Hopf de multiplicadores son similares a las álgebras de Hopf en muchos aspectos. por ejemplo, ellas tambien poseen una counidad y una antipoda.

Proposición 2.1.6 Sea A un álgebra de Hopf de multiplicadores.

i) Existe un único homomorfismo no degenerado $\epsilon : A \to k$, llamado la counidad de A, tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(k \otimes A) & \mathcal{M}(A) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{M}(A \otimes k) \\
\mathcal{M}(A \otimes A) \arrow[u, "\epsilon \otimes id"'] & A \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[u, leftrightarrow, "id"'] & \mathcal{M}(A \otimes A) \arrow[u, "id \otimes \epsilon"']
\end{tikzcd}$$

Si A es un *-álgebra de Hopf de multiplicadores, entonces ϵ es un *-homomorfismo.

ii) Existe una única aplicación lineal $S : A \to \mathcal{M}(A)$, llamada la antipoda de A, tal que

$$m_{\mathcal{M}(A)}((S \otimes id_A)(\Delta(a)(1 \otimes b))) = \epsilon(a)b,$$

$$m_{\mathcal{M}(A)}((id_A \otimes S)((a \otimes 1)\Delta(b))) = a\epsilon(b)$$

para todo $a,\, b \in A$. Aqui $m_{\mathcal{M}(A)}$ denota la multiplicación en $\mathcal{M}(A)$. La aplicación S, considerada como una aplicación $A \to \mathcal{M}(A^{op,\,cop})$ es un morfismo de álgebras de Hopf de multiplicadores.

iii) Un álgebra de Hopf de multiplicadores A es regular si y solo si la antipoda S es un isomorfismo lineal $A \cong A$.

iv) Si A es un *-álgebra de Hopf de multiplicadores, entonces $S \circ * \circ S \circ * = id_A$

v) Sea $F : A \to \mathcal{M}(B)$ un morfismo de álgebras de Hopf de multiplicadores. Entonces $S_B \circ F = F \circ S_A$

Prueba. La construcción de la antípoda y la counidad es similar a la vista en seccion 1.6 del primer capitulo. Para mas detalles ver secciones 3, 4 y 5 de [6]

$\square$

Teorema 2.1.7 Una biálgebra de multiplicadores A es un álgebra de Hopf de multiplicadores si y solo si existe un homomorfismo $\epsilon : A \to k$ y una aplicación lineal biyectiva $S : A \to A$ tal que el diagrama y las ecuaciones de i) y ii) de la la proposición anterior son satisfechas.

Prueba. Ver proposición 2.9 de [6]

$\square$

2.2. Integrales y sus propiedades modulares

El concepto de integral sobre un álgebra de Hopf de multiplicadores es el análogo natural de la media de Haar de un grupo localmente compacto, y fundamental para la teoria de dualidad de álgebras de Hopf de multiplicadores presentada en la sección anterior. En contraste a los grupos localmente compactos, los cuales siempre tienen una medida invariante, las álgebras de Hopf de multiplicadores no necesariamente poseen dichas integrales. Unicidad, sin embrago, es satisfecha bajo algunas condiciones.

Esta sección está organizada como sigue. Primero, introduciremos el concepto de integral, daremos algunos ejemplos, y listaremos algunas de las propiedades fáciles que pueden ser encontradas en muchos libros sobre álgebras de Hopf. Seguidamente, mostraremos que las integrales son únicas y fieles. De manera similar a la medida de Haar en grupos localmente compactos, toda integral sobre un álgebra de Hopf de multiplicadores presenta muchas propiedades modulares, las cuales serán estudiadas en las ultimas subsecciones.

2.2.1. El concepto de integral

Para motivar la definicion de integral a izquierda y a derecha, reformulemos el concepto de una medida de Haar en terminos de álgebras de Hopf.

Sea G un grupo localmente compacto con medida de Haar izquierda λ y $A \subset \mathbb{C}(G)$ algun álgebra de Hopf de funciones sobre G con comultiplicación, counidad y antípoda como en las ecuaciónes (1.2)-(1.4) del primer capitulo. Si las funciones en A son integrables, es decir, $A \subset L^1(G, \lambda)$, la medida de Haar define una aplicación lineal

$$\begin{aligned} \phi : A &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto \phi(f) := \int_G f(y)d\lambda(y). \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Por la invarianza a izquierda de λ , para cada función $f \in A$, la función $F : G \to \mathbb{C}$ definida por:

$$F(x) := \int_G f(xy)d\lambda(y) \text{ para todo } x \in G$$

satisface $F(x) = \phi(f)$ para todo $x \in G$. Reemplazamos la multiplicación de G por la comultiplicación de A, usando la relación

$$f(xy) = (\Delta(f))(x, y) = \sum f_{(1)}(x)f_{(2)}(y) \text{ para todo } x, y \in G$$

y obtenemos

$$F = \sum f_{(1)} \int_G f_{(2)}(y)d\lambda(y) = (id \otimes \phi)(\Delta(f)).$$

Asi, la condición de invarianza $F(x) = \phi(f)$, $x \in G$ toma la forma

$$(id \otimes \phi)(\Delta(f)) = \phi(f)1_A$$

Ahora, sea A un álgebra de Hopf de multiplicadores arbitraria. Dada una aplicación lineal $\phi : A \to k$ y un elemento $a \in A$. podemos definir un multiplicador: $(id \otimes \phi)(\Delta(a))$ sobre A via:

$$((id \otimes \phi)(\Delta(a)))b := (id \otimes \phi)(\Delta(a)(b \otimes 1)) = \sum a_{(1)}b\phi(a_{(2)})$$

$$b((id \otimes \phi)(\Delta(a))) := (id \otimes \phi)((b \otimes 1)\Delta(a)) = \sum ba_{(1)}\phi(a_{(2)})$$

de manera completamente similar se puede definir un multiplicador $(\phi \otimes id)(\Delta(a))$

DEFINICIÓN 2.2.1 Sea A un álgebra de Hopf de multiplicadores. Una aplicación lineal $\phi : A \to k$ es llamada:

- invariante a izquierda, si $(id \otimes \phi)(\Delta(a)) = \phi(a)1_{\mathcal{M}(A)}$ para todo $a \in A$;
- invariante a derecha, si $(\phi \otimes id)(\Delta(a)) = \phi(a)1_{\mathcal{M}(A)}$ para todo $a \in A$;

Si ϕ es no nulo e invariante a izquierda o a derecha, diremos que es una integral a izquierda o a derecha sobre A, respectivamente. Una aplicación que es integral a izquierda y a derecha es simplemente llamada una integral.

Diremos que (A, Δ) es un álgebra de multiplicadores con integrales, si existe una integral a izquierda o a derecha sobre (A, Δ), y unimodular si toda integral a izquierda sobre (A, Δ) es una integral a derecha y viceversa.

Observación 10 Recordemos que una aplicación lineal $\phi : A \to k$ sobre un álgebra A es llamada:

- Fiel, si $\phi(aA) \neq 0$ y $\phi(Aa) \neq 0$ para todo elemento no nulo $a \in A$.
- Positiva, si A es una *-álgebra y $\phi(a^*a) \geq 0$ para todo elemento $a \in A$.
- Normalizada, si A es unitaria y $\phi(1_A) = 1$.

Observación 11 Sea (A, Δ) una *-álgebra de multplicadores.

i) Es facil ver que un funcional $\phi \in A'$ es invariante a izquierda si y solo si para todo $f \in A'$ y a, $b \in A$

$$(f \otimes \phi)(\Delta(a)(b \otimes 1)) = f(b)\phi(a), \quad (f \otimes \phi)((b \otimes 1)\Delta(b)) = f(b)\phi(a)$$

igualmente, ϕ es invariante a izquierda si y solo si para todo $f \in A'$ y a, $b \in A$

$$(f \otimes \phi)(\Delta(a)(1 \otimes b)) = \phi(a)f(b), \quad (\phi \otimes f)((1 \otimes b)\Delta(a)) = \phi(a)f(b)$$

ii) Si ϕ es una funcional lineal positiva no nula sobre A, debido a la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que para cada $a \in A$, la funcional $\phi(a\cdot)$ o $\phi(\cdot a)$ se anula sobre A si y solo si $\phi(aa^*) = 0$ o $\phi(a^*a) = 0$, respectivamente; es decir la funcional ϕ es fiel si y solo si $\phi(a^*a) > 0$ para todo elemento no nulo $a \in A$.

iii) Si un álgebra de Hopf tiene una integral a izquierda, entonces su antipoda es biyectiva. [[1] Teorema 5.2.3, corolario 5.4.6], [[5], corolario 5.1.7].

Proposición 2.2.2 Toda integral a izquierda y toda integral a derecha sobre un álgebra de Hopf de multiplicadores regular es fiel.

Prueba. Para simplificar la notación, consideremos el caso en que A es un álgebra de Hopf; para el caso general ver proposición 3.4 en [6].

Sea ϕ una integral a izquierda sobre un álgebra de Hopf regular A. Si $a \in A$ satisface $\phi(ba) = 0$ para todo $b \in A$, entonces

$$0 = c\phi(ba) = (id \otimes \phi)((c \otimes 1)\Delta(b)\Delta(a))$$

para todo $c, b \in A$. Debido a que $T_2 : A \otimes A \to A \otimes A,\ c \otimes d \mapsto (c \otimes 1)\Delta(d)$ es sobreyectiva, podemos reemplazar $(c \otimes 1)\Delta(b)$ por un elemento arbitrario $d \otimes e \in A \otimes A$, y obtenemos que $0 = \sum da_{(1)}\phi(ea_{(2)})$ para todo $d, e \in A$. Hacemos $d = 1_A$ y aplicamos Δ a la ultima relación para obtener

$$0 = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}\phi(ea_{(3)})$$

para todo $e \in A$. Escribimos $\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(3)} = \sum_i a_{1,i} \otimes a_{2,i} \otimes a_{3,i}$ de manera que los elementos $a_{2,i}$ son linealmente independientes. Entonces $0 = a_{1,i}\phi(ea_{3,i})$ para todo $e \in A$ y todo i. Si reemplazamos e por $fS(a_{2,i})$ para cada i, donde f es fijado de manera arbitraria y sumando nuevamente obtenemos

$$0 = \sum_i a_{1,i}\phi(fS(a_{2,i})a_{3,i}) = \sum a_{(1)}\phi(f\epsilon(a_{(2)})) = a\phi(f)$$

para todo $f \in A$. Esto muestra que $a = 0$, el caso de integrales a derecha es completamente similar.

$\square$

Corolario 2.2.3 Toda integral a izquierda o a derecha ϕ sobre un *-álgebra de Hopf de multiplicadores A satisface $\phi(a^*a) > 0$ para todo elemento $a \in A$, $a \neq 0$.

Prueba. Proviene de combinar la proposición 2.2.2 y la observación 11

$\square$

Antes de considerar las cuestiones de unicidad y existencia de las integrales a izquierda y a derecha, clarifiquemos la relación existente entre ellas. Recordemos que para grupos locamente compactos, la inversion del grupo intercambia medidas de Haar a izquierda con las medidas de Haar a derecha, y que para grupos compactos, las medidas de Haar a izquierda y a derecha coinciden. Resultados similares son satisfechos para las álgebras de Hopf de multiplicadores:

Proposición 2.2.4 i) Sea A un álgebra de Hopf de multiplicadores regular con una integral a izquierda (derecha) ϕ. entonces $\phi \circ S$ y $\phi \circ S^{-1}$ son integrales a derecha (izquierda) sobre A.

ii) Sobre todo álgebra de Hopf con al menos una integral a izquierda normalizada ϕ, entonces ϕ es simultaneamente una integral a derecha. En particular, $\phi = \phi \circ S = \phi \circ S^{-1}$.

Prueba. i) Sea ϕ una integral a izquierda. La antípoda S es un isomorfismo lineal de A, y por consiguiente $\phi \circ S$ es no nula. Además:

$$\begin{aligned} S((\phi \circ S \otimes id)(\Delta(a)) &= \sum \phi(S(a_1)) \otimes S(a_2) \\ &= \sum 1 \otimes (S(a))_1 \phi(S(a))_2 \\ &= 1 \otimes \phi(S(a)) \\ &= \phi(S(a)) \end{aligned}$$

para todo $a \in A$. Una aplicación de S^{-1} muestra:

$$(\phi \circ S \otimes id)(\Delta(a)) = \phi(S(a))$$

de esta manera $\phi \circ S$ es invariante a derecha. La otra afirmacion es completamente similar.

ii) Sea A un álgebra de Hopf con integral a izquierda normalizada ϕ, debido a la observación 11 (iii) y un proposicion (2.1.6) (iii), A es regular y asi $\psi := \phi \circ S$ es una integral a derecha. Por otro lado, para toda integral a izquierda normalizada $\tilde{\phi}$, tenemos $\tilde{\phi} = \psi = \phi$, pues

$$\tilde{\phi}(a) = \psi(1_A \tilde{\phi}(a)) = (\psi \otimes \tilde{\phi})(\Delta(a)) = \tilde{\phi}(\psi(a) 1_A) = \psi(a)$$

□

Proposición 2.2.5 Un *-álgebra de Hopf de multiplicadores posee una integral a izquierda positiva si y solo si posee una integral a derecha positiva.

Prueba. Ver teorema 9.9 de [3]

□

Definición 2.2.6 Un ***grupo cuántico algebraico*** es una *-álgebra de Hopf de multiplicadores con una integral a izquierda positiva y una integral a derecha positiva.

2.2.2. Existencia y unicidad

La existencia de integrales sobre álgebras de Hopf de multiplicadores puede ser mostrada unicamente bajo supestos especiales, por ejemplo.

- Toda álgebra de Hopf de dimensión finita posee integrales a izquierda y a derecha.(Ver proposición 5.1 [6])
- Un álgebra de Hopf posee una integral normalizada si y solo si esta es cosemisimple, lo cual de manera suelta significa que el álgebra dual A' es semi-simple. (Ver capitulo xiv [5])

El primer paso principal con rumbo a la prueba de la unicidad es el siguiente resultado.

Proposición 2.2.7 Sea A un álgebra de Hopf de multiplicadores regular con una integral a ziquierda ϕ y una integral a derecha ψ. Entonces

$$\{\psi(\cdot\, a)/a \in A\} = \{\phi(\cdot\, a)/a \in A\} \quad \text{y} \quad \{\psi(a\,\cdot)/a \in A\} = \{\phi(a\,\cdot)/a \in A\}.$$

En particular, estos espacios no dependen de la elección de ϕ y ψ.

Prueba. Mostraremos que para cada $a \in A$ existe $c \in A$ tal que $\phi(\cdot\, a) = \psi(\cdot\, c)$; el resto de la prueba es similar y utiliza la regularidad de A. De esta manera, sea $a \in A$, elijamos $b \in A$ tal que $\psi(b) = 1$, debido a una observación 11 aplicada a ϕ y $f := \psi$ se tiene:

$$\phi(xa) = \psi(b)\phi(xa) = (\psi \otimes \phi)(\Delta(xa)(b \otimes 1))$$

para todo $x \in A$.

Debido a que la aplicación $T_1 : A \otimes A \to A \otimes A,\ c \otimes d \mapsto \Delta(c)(1 \otimes d)$ es sobreyectiva, podemos escribir $\Delta(a)(b\otimes 1) = \sum_i \Delta(c_i)(1 \otimes d_i)$ con c_i, $d_i \in A$ usando nuevmente la observación anterior, pero esta vez para ψ y $f := \phi$, obtenemos

$$\phi(xa) = \sum_i (\psi \otimes \phi)(\Delta(x)\Delta(c_i)(1 \otimes d_i)) = \sum_i \phi(\psi(xc_i)d_i) = \sum_i \psi(xc_i\phi(d_i))$$

para todo $x \in A$. Asi, $\phi(\cdot\, a) = \psi(\cdot\, c)$, donde $c := \sum_i c_i\phi(d_i)$

□

Teorema 2.2.8 Sea A un álgebra de Hopf de multiplicadores regular con una integral a izquierda. Entonces el espacio de las funciones invariantes a izquierda y el espacio de las funcionales invariantes a derecha sobre A tienen ambos dimensión 1.

Prueba. Sea ϕ_1 y ϕ_2 integrales a izquierda, y sea ψ una integral a derecha sobre A. Elijamos a, $b \in A$ de manera que $\psi(ab) = 1$ y $x \in A$. Debido a que la aplicación $T_2 : A\otimes A \to A\otimes A,\ c\otimes y \mapsto (c\otimes 1)\Delta(y)$ es sobreyectiva, podemos elegir c_i, $y_i \in A$ de manera adecuada tal que $\sum_i (c_i \otimes 1)\Delta(y_i) = (1\otimes x)\Delta(a)$. Entonces

$$\begin{aligned}\phi_1(x) = \psi(ab)\phi_1(x) &= (\psi \otimes \phi_1)((1 \otimes x)\Delta(a)\Delta(b)) \\ &= (\psi \otimes \phi_1)(\textstyle\sum_i (c_i \otimes 1)\Delta(y_i)\Delta(b)) \\ &= \textstyle\sum_i \psi(c_i)\phi_1(y_i b)\end{aligned}$$

Debido a la proposición anterior, existe $d \in A$ tal que $\phi_1(\cdot\, b) = \phi_2(\cdot\, d)$, entonces:

$$\phi_1(x) = \sum_i \psi(c_i)\phi_2(y_i d) = \psi(ad)\phi_2(x)$$

para todo $x \in A$

□

Observación 12 Si A es un *-álgebra de Hopf de multiplicadores con una integral a izquierda positiva ϕ. Entonces existe un número $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ tal que la integral a derecha $z\phi \circ S$ es positiva. Esto se sigue de las dos ultimas proposiciones 2.2.4, 2.2.5 y del teorema 2.2.8.

2.2.3. El elemento modular de una integral

Las integrales sobre un álgebra de Hopf de multiplicadores tiene propiedades modulares similares a las medidas de Haar de grupos localmente compactos: Toda integral a izquierda ϕ es relacionada a la integral a derecha asociada $\phi \circ S$ via un mulplicador modular, lo cual es un análogo de las funciones modulares de grupos localmente compactos. Para la motivación recordemos estas funciones modulares. Asi, sea G un grupo localmente compacto con medida de Haar a izquierda λ y denotemos por $i : G \to G$ a la inversion $x \mapsto x^{-1}$. Entonces la imagen $\lambda^{-1} := i_*(\lambda)$ de la medida de Haar a izquierda es una medida invariante a derecha, y existe una función estrictamente positiva δ sobre G-llamada función modular de G- tal que:

$$\int_G f(y)d\lambda(y) = \int_G f(y^{-1})\delta(y^{-1})d\lambda(y) = \int_G f(z)\delta(z)d\lambda^{-1}(z)$$

para toda función medible positiva f sobre G. Se puede mostrar que δ es un homomorfismo al grupo multiplicativo de los numeros reales positivos, es decir,

$$\delta(xy) = \delta(x)\delta(y), \quad \delta(e) = 1, \quad \delta(x^{-1}) = \delta(x)^{-1} \quad \text{para todo } x,\, y \in G;$$

aqui, $e \in G$ denota la unidad como es usual.

Traducimos estas dos ecuaciones al lenguaje de integrales sobre álgebras de Hopf de multiplicadores. Si $A \subset L^1(G)$ es un álgebra de Hopf de multiplicadores con las aplicaciones de estructura vistas antes, y si ϕ es una integral a izquerda sobre A dada por integración con respecto a λ, entonces la ecuación toma la forma:

$$\phi(f) = (\phi \circ S)(f\delta) \ \text{ para todo } \ f \in A$$

aqui, asumimos por un momento que δ pertenece a $\mathcal{M}(A)$, las ultimas ecuaciones son equivalentes a las siguientes relaciones:

$$\Delta(\delta) = \delta \otimes \delta, \quad \epsilon(\delta) = 1, \quad S(\delta) = \delta^{-1}$$

Ahora, mostraremos que toda álgebra de Hopf de multiplicadores con integrales posee un elemento modular δ que satisface las ultimas cuatro ecuaciones. El siguiente lema sirve de preparación, pero es también de interes por si mismo.

Lema 2.2.9 Sea A un álgebra de Hopf de multiplicadores regular con integral a izquierda ϕ e integral a derecha ψ. Entonces

$$(\psi \otimes S)((x \otimes 1)\Delta(a)) = (\psi \otimes id)(\Delta(x)(a \otimes 1))$$

y

$$(S \otimes \phi)(\Delta(b)(1 \otimes x)) = (id \otimes \phi)((1 \otimes b)\Delta(x))$$

para todo a, b, $x \in A$

Prueba. Probaremos únicamente la primera ecuación, la seguna ecuación es completamente similar. Para simplificar la notación, asumimamos que A es un álgebra de Hopf; para el caso general ver [6] proposición 3.11. Sea x, $a \in A$. Debido a que ψ es invariante a derecha,

$$\begin{aligned}(\psi \otimes S)((x \otimes 1)\Delta(a)) &= \sum \psi(xa_{(1)})S(a_{(2)}) \\ &= \sum \psi(x_{(1)}a_{(1)})x_{(2)}a_{(2)}S(a_{(3)})\end{aligned}$$

Ahora usamos el axioma de la antipoda sobre $a_{(2)}S(a_{(3)})$ para reescribir esta expresion como sigue:

$$\sum \psi(x_{(1)}a_{(1)})x_{(2)}\epsilon(a_{(2)}) = \sum \psi(x_{(1)}a)x_{(2)} = (\psi \otimes id)(\Delta(x)(a \otimes 1))$$

$\square$

Proposición 2.2.10 Sea A un álgebra de Hopf de multiplicadores regular con integral a izquierda ϕ. Entonces existe un multiplicador invertible $\delta \in \mathcal{M}(A)$ tal que

$$(\phi \otimes id)(\Delta(a)) = \phi(a)\delta \ \text{ para todo } a \in A \tag{2.2.2}$$

Las extensiones de Δ, ϵ, y S a $\mathcal{M}(A)$ actuan sobre δ como sigue:

$$\Delta(\delta) = \delta \otimes \delta, \quad \epsilon(\delta) = 1, \quad S(\delta) = \delta^{-1} \tag{2.2.3}$$

Además, $\phi(S(a)) = \phi(a\delta)$ para todo $a \in A$

Prueba. Para simplificar la notación asumamos que A es un álgebra de Hopf; el caso general es tratado de manera similar, ver [6] proposición 3.8-3.10.

Para probar la existencia de un elemento $\delta \in A$ que satisface las ecuaciones, es suficiente mostrar que la aplicación $(\phi \otimes id) \circ \Delta$ se factoriza a traves de ϕ. Debido a una observación anterior se tiene que para todo $w \in A'$, el producto de convolución $\phi \star w$ es invariante a izquierda; por un teorema anterior, este producto se anula sobre $Ker\phi$. Ahora, $(\phi \otimes id)(\Delta(Ker\phi)) = 0$ se sigue de la ecuación:

$$w((\phi \otimes id)(\Delta(Ker\phi))) = (\phi \star w)(Ker\phi) = 0$$

para todo $w \in A'$

Para probar la ecuación (2.2.3), aplicamos Δ y ϵ a la ecuación:

$$\phi(a)\delta = (\phi \otimes id)(\Delta(a)) = \sum \phi(a_{(1)})a_{(2)}$$

y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta(\phi(a)\delta) &= \sum \phi(a_{(1)})a_{(2)} \otimes a_{(3)} = \sum \phi(a_{(1)})\delta \otimes a_{(2)} \\
&= \delta \otimes \phi(a)\delta. \\
\epsilon(\phi(a)\delta) &= \sum \phi(a_{(1)})\epsilon(a_{(2)}) = \phi(a)
\end{aligned}$$

para todo $a \in A$. Para las dos primeras realciones de (2.2.3). Por otro lado

$$S(\delta)\delta = m((S \otimes id)(\Delta(\delta))) = \epsilon(\delta)1_A = 1_A$$

de manera similar $\delta S(\delta) = 1_A$; en particular, δ es invertible.

Por ultimo, debido a la invarianza a izquierda de $\phi \circ S$ y al lema anterior, tenemos para todo a, $b \in A$

$$\phi(S(a))\phi(b) = \sum \phi(S(a_{(1)}))\phi(a_{(2)}b) = \sum \phi(b_{(1)})\phi(ab_{(2)}) = \phi(b)\phi(a\delta)$$

$\square$

Observación 13 Sean A, ϕ y δ como vimos antes.

i) Si ψ es una integral a derecha sobre A, entonces $(id \otimes \psi)(\Delta(a)) = \psi(a)\delta^{-1}$ para todo $a \in A$. Para ver esto, reemplace a en lugar de $S(a)$ en las ecuaciónes (2.2.2), (2.2.3) y use el hecho que ψ es un multiplo de $\phi \circ S$

ii) Note que $\phi(S^2(a)) = \phi(S(a)\delta) = \phi(S(\delta^{-1}a)) = \phi(\delta^{-1}a\delta)$ para todo $a \in A$

2.2.4. El automorfismo modular de una integral

En general, un integral ϕ sobre un álgebra de Hopf de multiplicadores A no se comporta necesariamente como una traza en el sentido que $\phi(ab) = \phi(ba)$ para todo $a, b \in A$. Sin embargo, existe cierto control sobre la no conmutatividad de A con respecto de ϕ, de hecho, existe un automorfismo σ de A que satisface $\phi(ab) = \phi(b\sigma(a))$ para todo $a, b \in A$.

La construcción de este automorfismo modular procede en muchos pasos.

Lema 2.2.11 Para toda álgebra de Hopf A, las aplicaciones $R, T : A \otimes A \to A \otimes A$ definidas por $T(a \otimes b) := \sum a_{(1)} \otimes bS^2(a_{(2)})$ y $R(a \otimes b) := \sum a_{(1)} \otimes bS^2(a_{(2)})$ para todo $a, b \in A$, respectivamente, son inversas una de la otra.

Prueba. Debido a la proposición 1.5.1, tenemos que para todo $a, b \in A$

$$\begin{aligned} T(R(a \otimes b)) &= \sum T(a_{(1)} \otimes bS(a_{(2)})) = \sum a_{(1)} \otimes bS(a_{(3)})S^2(a_{(2)}) \\ &= \sum a_{(1)} \otimes bS(S(a_{(2)})a_{(3)}) = \sum a_{(1)} \otimes bS(u(\epsilon(a_{(2)}))) = a \otimes b \end{aligned}$$

De manera completamente similar se tiene: $R(T(a \otimes b)) = a \otimes b$

□

Proposición 2.2.12 Sea ϕ una integral a izquierda sobre un álgebra de Hopf de multiplicadores regular A. Entonces los subespacios $\{\phi(\cdot a)/ \ a \in A\}$ y $\{\phi(b\cdot)/ \ b \in A\}$ de A' coinciden.

Prueba. Para simplificar notaciones, asumamos que A es un álgebra de Hopf; para el caso general ver proposición 3.11 en [6]. Mostraremos que para todo $a \in A$, existe un elemento $b \in A$ de manera que $\phi(\cdot\, a) = \phi(b\, \cdot)$, el reciproco se sigue de un argumento similar.

Sea ψ una integral a derecha sobre A, debido a la proposición 2.2.7 existe $a' \in A$ tal que $\phi(\cdot\, a) = \phi(\cdot\, a')$, aplicando dos veces un lema 2.2.12, encontramos $c, d, x \in A$

$$\sum \psi(xc_{(1)})\phi(dS(c_{(2)})) = \sum \psi(x_{(1)})\phi(dx_{(2)}) = \sum \psi(S(d_{(1)})c)\phi(d_{(2)}x)$$

Debido a que la aplicación R definida en el lema 2.2.11 es sobreyectivo, la composición $(id \otimes \phi) \circ R : A \otimes A \to A$ tambien es sobreyectiva. Asi que podemos escribir a' de la forma:

$$a' = \sum_i (id \otimes \phi)(R(c_i \otimes d_i)) = \sum_i c_{i(1)} \phi(d_i S(c_{i(2)}))$$

para adecuados c_i, $d_i \in A$, y por la ecuación anterior, aplicada a: $c := c_i$ y $d := d_i$ para cada $i$individualmente, el elemento $b := \sum_i \psi(S(d_{i(1)})c)d_{i(2)}$ satisface:

$$\psi(\cdot\, a') = \phi(b\, \cdot)$$

□

Sea ϕ una integral a izquierda sobre un álgebra de Hopf de multiplicadores regular A. Debido a que la aplicación $\phi \circ S^2$ es invariante q izquierda, existe un único escalar $\tau \in k$ de manera que $\phi \circ S^2 = \tau\phi$ (teorema 2.2.8), este elemento τ figura en la siguiente proposición

Teorema 2.2.13 Sea A un álgebra de Hopf de multiplicadores regular con integral a izquierda ϕ. Entonces existe un automorfismo σ de A tal que

$$\phi(ax) = \phi(x\sigma(a)) \text{ para todo } a,\, x \in A$$

y además,

$$\phi \circ \sigma = \phi, \quad \Delta \circ \sigma = (S^2 \otimes \sigma) \circ \Delta, \quad \sigma(\delta) = (\frac{1}{\tau})\delta$$

Prueba. Debido a la proposición 2.2.12, Para todo $a \in A$ existe un elemento $\sigma(a) \in A$ de manera que $\phi(ax) = \phi(x\sigma(a))$ para todo $x \in A$, y además este elemento es unico debido a que ϕ es fiel (proposición 2.2.2). La asignación $\sigma : A \to A$, $a \mapsto \sigma(a)$ es inyectivo debido a que ϕ es fiel y sobreyectiva debido a la proposición 2.2.12 y un homomorfismo debido a que:

$$\phi(x\sigma(ab)) = \phi(abx) = \phi(bx\sigma(a)) = \phi(x\sigma(a)\sigma(b))$$

para todo a, b, $x \in A$.

Si eleminamos x en la relación anterior, obtenemos $\phi(\sigma(c)) = \phi(c)$ para todo $c \in span\, A^2 = A$.

Probaremos $\Delta \circ \sigma = (S^2 \otimes \sigma) \circ \Delta$. Debido a que los funcionales de la forma $w := \phi(b\, \cdot)$ donde $b \in A$, separan los elementos de A (proposición 2.2.2), es suficiente mostrar que para todas aquellas funcionales w y para todo $a \in A$:

$$(id \otimes w)(\Delta(\sigma(a))) = (id \otimes w)((S^2 \otimes \sigma)(\Delta(a))),$$

esto es,

$$(id \otimes \phi)((1 \otimes b)\Delta(\sigma(a))) = (id \otimes \phi)((1 \otimes b)(S^2 \otimes \sigma)(\Delta(a)))$$

Aplicando dos veces un lema 2.2.12, obtenemos que la mano izquierda de la igualdad es igual a:

$$\begin{aligned}(S \otimes \phi)(\Delta(b)(1 \otimes \sigma(a))) &= (S \otimes \phi)((1 \otimes a)\Delta(b)) \\ &= (S^2 \otimes \phi)(\Delta(a)(1 \otimes b)) \\ &= (id \otimes \phi)((1 \otimes b)((S^2 \otimes \sigma)(\Delta(a))))\end{aligned}$$

Finalmente, por la definición de τ y la observación 13:

$$\tau\phi(a) = \phi(S^2(a)) = \phi(\delta^{-1}a\delta) = \phi(a\delta\sigma(\delta^{-1}))$$

para todo $a \in A$, de esta manera se tiene que $\delta\sigma(\delta^{-1}) = \tau$ y $\delta/\tau = \sigma(\delta)$

□

Observación 14 i) Para toda integral a derecha ψ sobre un álgebra de Hopf de multiplicadores regular A, existe un automorfismo modular σ' de A de manera que $\psi(ax) = \psi(x\sigma'(a))$ para todo a, $x \in A$ y esta σ' satisface:

$$\sigma' = S^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ S = \delta\sigma(\cdot)\delta^{-1} \quad \text{y} \quad \Delta \circ \sigma' = (\sigma' \otimes S^{-2} \circ \Delta)$$

Esto se sigue fácilmente, pues ψ es un multiplo de $\phi \circ S = \phi(\cdot\delta)$

ii) Para toda *-álgebra de Hopf de multiplicadores, el automorfismo modular a izquierda o derecha no es necesariamente un *-homomorfismo.

2.3. Dualidad

Sea A un álgebra de Hopf de multiplicadores regular con integrales a izquierda y derecha. Entonces es posible definir un álgebra de Hopf de multiplicadores dual $\hat{A}$ que es regular y además posee integrales a izquierda y derecha, y mostrar que el bidual $\hat{\hat{A}}$ es isomorfa de manera natural con A. Esta dualidad se extiende a grupos cuánticos algebraicos y puede ser considerada como un análogo algebraico de la dualidad de Pontrjagin.

2.3.1. La dualidad de álgebras de Hopf de multiplicadores regulares

Sea ϕ una integral a izquierda y ψ una integral a derecha sobre A. Escribamos

$$\hat{A} := \{\phi(\cdot a) \,/\, a \in A\} \subset A'$$

Por el teorema 2.2.13 y la proposición 2.2.7

$$\hat{A} = \{\phi(a\cdot) \,/\, a \in A\} = \{\psi(a\cdot) \,/\, a \in A\} = \{\phi(\cdot a) \,/\, a \in A\}$$

En particular $\hat{A}$ no depende de la elección de ϕ, esto se sigue del teorema 2.2.8

Equipemos ahora $\hat{A}$ con una multiplicación y una comultiplicación que son duales a la comultiplicación y a la multiplicación, respectivamente, de A. Iniciemos con la multiplicación. Dados dos elementos $w_1 = \phi(\cdot a_1)$ y $w_2 = \phi(\cdot a_2)$ de $\hat{A}$, podemos definir una aplicación lineal $w_1 w_2 : A \to k$ por la fórmula

$$(w_1 w_2)(x) := (w_1 \otimes w_2)(\Delta(x)) = (\phi \otimes \phi)(\Delta(x)(a_1 \otimes a_2)) \tag{2.3.1}$$

Lema 2.3.1 La ecuación 4.2.5 define una multiplicación asociativa y no-degenerada sobre $\hat{A}$

Prueba. Sea $w_1 = \phi(\cdot\, a_1)$ y $w_2 = \phi(\cdot\, a_2)$ como antes. Debemos mostrar que la aplicación $w_1 w_2$ es un elemento de $\hat{A}$. Por otro lado debido a que A es regular, podemos escribir $a_1 \otimes a_2 = \sum_i \Delta(c_i)(d_i \otimes 1)$ con una elección adecuada de c_i, $d_i \in A$. Entonces

$$(w_1 w_2)(x) = \sum_i (\phi \otimes \phi)(\Delta(x c_i)(d_i \otimes 1)) = \sum_i \phi(x c_i)\phi(d_i) = \phi(xb)$$

para todo $x \in A$, donde $b = \sum c_i \phi(d_i)$, por lo tanto $w_1 w_2 \in \hat{A}$

La asociatividad de la multiplicación se sigue de la coasociatividad de Δ.

Mostremos que la multiplicación es no degenerada. Si $w_1 w_2 = 0$ para todo w_2, entonces:

$$0 = (w_1 w_2)(b) = (\phi \otimes \phi)(\Delta(b)(a_1 \otimes a_2))$$

para todo b, $a_2 \in A$. Debido a que la aplicación $T_1 : A \otimes A \to A \otimes A$, $b \otimes a_2 \mapsto \Delta(b)(1 \otimes a_2)$ es sobreyectiva, podemos reemplazar $\Delta(b)(1 \otimes a_2)$ por un elemento arbitrario $c \otimes d \in A \otimes A$. Entonces obtenemos: $\phi(c a_1)\phi(d)$ para todo c, $d \in A$, asi por la proposición 2.2.2 tenemos: $a_1 = 0$ y $w_1 = 0$

$\square$

Continuando, es turno de la comultiplicación $\hat{\Delta} : \hat{A} \to \mathcal{M}(\hat{A} \otimes \hat{A})$ La fórmula obvia:

$$(\hat{\Delta}(w))(x \otimes y) = w(xy)$$

únicamente define una aplicación $\hat{\Delta} : \hat{A} \to (A \otimes A)'$ y además, no es inmediatamente claro que la imagen de esta aplicación pueda ser identificada con un subespacio de $\mathcal{M}(\hat{A} \otimes \hat{A})$. Por otro lado, podemos aprovechar lo siguiente.

Lema 2.3.2 Existe un homomorfismo $\hat{\Delta} : \hat{A} \to \mathcal{M}(\hat{A} \otimes \hat{A})$ tal que:

i) $(w \otimes 1)\hat{\Delta}(w_2) \in \hat{A} \otimes \hat{A}$ y $\hat{\Delta}(w_2)(1 \otimes w_1) \in \hat{A} \otimes \hat{A}$ para todo $w_1,\ w_2 \in \hat{A}$

ii) Para todo $x,\ y \in A$,

$$((w_1 \otimes 1)\hat{\Delta}(w_2))(x \otimes y) = (w_1 \otimes w_2)(\Delta(x)(1 \otimes y)),$$

$$(\hat{\Delta}(w_2)(1 \otimes w_1))(x \otimes y) = (w_2 \otimes w_1)((x \otimes 1)\Delta(y)).$$

Prueba. Ver sección 4 en [6]

□

Proposición 2.3.3 El par $(\hat{A}, \hat{\Delta})$ es un álgebra de Hopf de multiplicadores regular. Su antipoda $\tilde{S}$ y counidad $\tilde{\epsilon}$ vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{S}(w)(a) &= w(S(a)), \\ \hat{\epsilon}(\phi(\cdot\, a)) &= \phi(a) = \hat{\epsilon}(\phi(a\, \cdot)), \\ \hat{\epsilon}(\psi(\cdot\, a)) &= \psi(a) = \hat{\epsilon}(\psi(a\, \cdot)) \end{aligned}$$

para todo $a \in A$.

Prueba. Ver sección 4 en [6]

□

Observación 15 Si A es un álgebra de Hopf, entonces la counidad $\hat{\epsilon}$ sobre el álgebra de Hopf de multiplicadores dual $\hat{A}$ es dada por $\hat{\epsilon}(w) = w(1_A)$ para todo $w \in \hat{A}$.

Ahora, identificamos la integrales "duales"sobre $\hat{A}$. Reservamos el simbolo $\hat{\phi}$ para funcionales invariantes a izquierda y el simbolo $\hat{\psi}$ para las funcionales invariantes a derecha.

Proposición 2.3.4 Las aplicaciones $\hat{\psi} : \hat{A} \to k$ y $\hat{\phi} : \hat{A} \to k$ dadas por:

$$\hat{\psi}(w) := \epsilon(a) \text{ para } \ w = \phi(\cdot\, a) \quad \text{y} \quad \hat{\phi}(w) := \epsilon(a) \text{ para } \ w = \psi(a\, \cdot)$$

son integrales invariantes a derecha e izquierda sobre A, respectivamente.

Prueba. Veamos la invarianza a izquierda de $\hat{\phi}$.

Consideremos los elementos $w_1 = \psi(a_1 \cdot)$ y $w_2 = \psi(a_2 \cdot)$ en $\hat{A}$. Primero calculemos el producto $(w_1 \otimes 1)\hat{\Delta}(w_2)$. Por definición para todo x, $y \in A$ se tiene:

$$((w_1 \otimes 1)\hat{\Delta}(w_2))(x \otimes y) = (\psi \otimes \psi)((a_1 \otimes a_2)\Delta(x)(1 \otimes y))$$

Debido a que A es regular, podemos escribir $a_1 \otimes a_2 = \sum_i (1 \otimes c_i)\Delta(b_i)$ con una elección adecuada de b_i, $c_i \in A$. Entonces:

$$\begin{aligned} ((w_1 \otimes 1)\hat{\Delta}(w_2))(x \otimes y) &= \textstyle\sum_i (\psi \otimes \psi)((a \otimes c_i)\Delta(b_i x)(1 \otimes y)) \\ &= \textstyle\sum_i \psi(b_i x)\psi(c_i y) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(w_1 \otimes 1)\hat{\Delta}(w_2) = \sum_i \psi(b_i \cdot) \otimes \psi(c_i \cdot)$$

y debido a la definición de $\hat{\phi}$ se tiene:

$$(id \otimes \hat{\phi})((w_1 \otimes 1)\hat{\Delta}(w_2)) = \sum \psi(b_i \cdot)\epsilon(c_i)$$

Por otro lado

$$\sum_i b_i \epsilon(c_i) = \sum_i (id \otimes \epsilon)((1 \otimes c_i)\Delta(b_i)) = (id \otimes \epsilon)(a_1 \otimes a_2) = a_1 \epsilon(a_2)$$

De esta manera encontramos:

$$(id \otimes \hat{\phi})((w_1 \otimes 1)\Delta(\hat{w_2})) = \psi(a_1 \cdot)\epsilon(a_2) = w_1 \hat{\phi}(w_2)$$

Esto implica:

$$(id \otimes \hat{\phi})(\hat{\Delta}(w_2)) = 1_{M(\hat{A})} \cdot \hat{\phi}(w_2)$$

y debido a que $w_2 \in \hat{A}$ era arbitrario, se sigue que $\hat{\phi}$ es invariante a izquierda.

□

En resumen tenemos el siguiente resultado

Teorema 2.3.5 [Dualidad] Si A es un álgebra de Hopf de multiplicadores regular con una integral a izquierda y una integral a derecha, entonces el dual $\tilde{A}$ definido como antes es un álgebra de Hopf de multiplicadores regular tambien con integrales a izquierda y derecha.

Lema 2.3.6 Sea w_1, $w_2 \in \tilde{A}$, y supongamos que $w_2 = \phi(\cdot\, a_2)$, donde $a_2 \in A$. Entonces

$$\tilde{\psi}(w_1 w_2) = w_1(S^{-1}(a_2))$$

Prueba. Para simplificar notación, asumamos que A es un álgebra de Hopf; para el caso general ver [6] lema 4.11.

Sea $w_1 = \phi(\cdot a_1) \in \hat{A}$, donde $a_1 \in A$ y consideremos c_i, $d_i \in A$ de manera que:

$$a_1 \otimes a_2 = \sum_i \Delta(c_i)(d_i \otimes 1) = \sum c_{i(1)} d_i \otimes c_{i(2)}$$

Por otro lado, $w_1 w_2 = \phi(\cdot b)$, donde $b := \sum_i c_i \phi(d_i)$ y por la definición de $\hat{\psi}$ se tiene:

$$\hat{\psi}(w_1 w_2) = \epsilon(b) = \sum_i \epsilon(c_i)\phi(d_i) = \sum_i \phi(\epsilon(c_i) d_i$$

Ahora, podemos usar la relación $u(\epsilon(c_i)) = \sum S^{-1}(c_{i(2)})c_{i(1)}$ y obtenemos:

$$\hat{\psi}(w_1 w_2) = \sum_i \sum \phi(S^{-1}(c_{i(2)})c_{i(1)} d_i) = \phi(S^{-1}(a_2)a_1) = w_1(S^{-1}(a_2)$$

$\square$

Teorema 2.3.7 [Bidualidad] Sea A un álgebra de Hopf de multiplicadores regular con una integral a izquierda y una integral a derecha. Entonces la aplicación $\iota : A \to (\hat{A})'$ dada por $(\iota(a))(w) := w(a)$ para todo $a \in A$ y $w \in \hat{A}$ toma valores en $\hat{\hat{A}}$ y define un isomorfismo de álgebras de Hopf de multiplicadores $A \cong \hat{\hat{A}}$

Prueba. Primero, mostremos que la aplicación ι es inyectiva. Asumamos que $\iota(a) = 0$ para algun $a \in A$. Entonces $\phi(ab) = (\iota(a))(\phi(\cdot b)) = 0$ para todo $b \in A$ y debido a que ϕ es fiel se sigue que $a = 0$.

Ahora mostremos que la imagen de ι es $\hat{\hat{A}}$. Todo elemento de $\hat{\hat{A}}$ es de la forma $\hat{\psi}(\cdot w)$, donde $w \in A$. Además, debido a que la antipoda S es una aplicación biyectiva, todo elemento $w \in A$ puede ser escrito en la forma $w = \phi(\cdot S(a))$ para algun $a \in A$. Si w es escrito de esta forma, entonces $\hat{\psi}(\cdot w) = \iota(a)$, debido al lema previo se tiene:

$$\hat{\psi}(w_1 w) = w_1(S^{-1}(S(a))) = w_1(a) = (\iota(a))(w_1)$$

para todo $w_1 \in \hat{A}$

De esta manera la aplicación ι se restringe aun isomorfismo de espacios vectoriales $A \cong \hat{\hat{A}}$

En [6] teorema 4.12 se puede ver que cálculos largos muestran que el isomorfismo ι es compatible con la multiplicación y la comultiplicación.

$\square$

2.3.2. La Dualidad de Grupos cuánticos algebraicos

La dualidad de álgebras de Hopf de multiplicadores regular se extiende a una dualidad de grupos cuánticos algebraicos de la siguiente manera.

Lema 2.3.8 Sea A un *-álgebra de Hopf de multiplicadores. Entonces la fórmula

$$w^*(a) := \overline{w(S(a)^*)},$$

donde $a \in A$ y $w \in \hat{A}$, define una involución sobre $\hat{A}$, lo cual convierte $\hat{A}$ en un *-álgebra de Hopf de multiplicadores.

Prueba. Se sigue de manera similar a la demostración del teorema 1.8.4 y la proposición 1.8.9.

□

El siguiente resultado es un análogo a la identidad de Plancherel/parseval conocida en la teoría de Fourier.

Teorema 2.3.9 Sea A un *-álgebra de Hopf de multiplicadores con una integral a izquierda positiva ϕ y denotemos por $\hat{\psi}$ la integral a derecha sobre $\hat{A}$ definida como en la proposición 2.3.4. Entonces

$$\hat{\psi}(\phi(\cdot\, a_1)^*\phi(\cdot\, a_2)) = \phi(a_1^* a_2) \quad \text{para todo } a_1,\, a_2 \in A \tag{2.3.2}$$

En particular, $\hat{\psi}$ es positivo. Tambien, si ψ es una integral a derecha positiva sobre A, entonces la integral a izquierda $\hat{\phi}$ definida en la proposición 2.3.4 es positiva.

Prueba. Unicamente probaremos la ecuación 2.3.2. Dados $a_1,\, a_2 \in A$ aplicamos el lema 2.3.6 a $w_1 = \phi(\cdot a_1)^*$ y $w_2 = \phi(\cdot a_2)$, desarrollamos la definición de w_1^* y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\phi(\cdot a_1)^*\phi(\cdot a_2)) &= \hat{\varphi}(w_1^* w_2) = w_1^*(S^{-1}(a_2)) \\
&= \overline{w_1(S(S^{-1}(a_2))^*)} = \overline{w_1(a_2^*)} \\
&= \overline{\varphi(a_2^* a_1)} = \phi(a_1^* a_2)
\end{aligned}$$

□

Como resumen de estos resultados tenemos el siguiente teorema de dualidad de grupos cuánticos algebraicos

Teorema 2.3.10 Sea A un grupo cuántico algebraico.

i) El dual $\hat{A}$ como fue definido antes es un grupo cuántico algebraico.

ii) La aplicación $\iota : A \to (\hat{A})'$ dada por $(\iota(a))(w) := w(a)$ para todo $a \in A$ y $w \in \hat{A}$ toma valores en $\hat{\hat{A}}$ y define un isomorfismo de grupos cuánticos algebraicos $A \cong \hat{\hat{A}}$

Prueba.

i) Resulta directamente del teorema 2.3.5, lema 2.3.8 y del teorema 2.3.9.

ii) La aplicación ι es un isomorfismo debido al teorema 2.3.7 y de manera similar a la demostración del teorema 1.8.4 y la proposición 1.8.9, muestran que es $*$-lineal.

$\square$

Capítulo 3

Entrelazamiento de álgebras

El presente capítulo escapa de los dos primeros para presentar la teoría de productos tensoriales torcidos de álgebras y algunos resultados sobre las extensiones polinomiales no conmutativas, las cuales corresponden a considerar productos tensoriales torcidos con $B = k[y]$ el anillo de polinomios y $B = k[y]/(y^n)$ el anillo de polinomios truncados, necesarias para el capitulo 4. Los resultados son presentados sin pruebas pero dejando la referencia exacta donde pueden ser encontrados, estos constituyen basicamente las notas de clase [18], [19] y los articulos [15], [20] y [21].

3.1. Generalidades y nociónes basicas

Un entrelazamiento (o producto tensorial torcido) $A \otimes_s B$ de las álgebras A y B es cierta estructura de álgebra asociativa sobre el espacio vectorial $A \otimes B$, definida en términos de una aplicación $s : B \otimes A \to A \otimes B$ que coincide con el producto tensorial usual si consideramos la aplicación flip. Esta construcción fue propuesta en [13] para representar el producto cartesiano de espacios no conmutativos.

Definición 3.1.1 Sean A y B k-álgebras. Un entrelazamiento (o producto tensorial torcido) de A y B es un álgebra C y un par de morfismos de álgebras inyectivos $\iota_A : A \to C$ y $\iota_B : B \to C$ donde la aplicación lineal asociada

$$\begin{aligned} \varphi : A \otimes B &\to C \\ a \otimes b &\mapsto \iota_A(a) \cdot \iota_B(b) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Una forma muy simple para construir candidatos a entrelazamientos (o productos tensoriales torcidos) es la siguiente: Sea $s : B \otimes A \to A \otimes B$ una aplicación k-lineal, tal que:

$$s(b \otimes 1) = 1 \otimes b, \quad s(1 \otimes a) = a \otimes 1. \tag{3.1.1}$$

Definimos en $A \otimes B$ la multiplicación μ_s de la siguiente manera:

$$\mu_s := (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (id_A \otimes s \otimes id_B)$$

Debido (3.1.1) se tiene que las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{rrl} \iota_A : & A \to & A \otimes B \\ & a \mapsto & \iota_A(a) := a \otimes 1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rrl} \iota_B : & B \to & A \otimes B \\ & b \mapsto & \iota_B(b) := 1 \otimes b \end{array}$$

son morfismos de álgebras.

Por ultimo, si μ_s es asociativo entonces $(A \otimes B, \mu_s)$ es un entrelazamiento de A y B.

La asociatividad de la multiplicación μ_s puede caracterizarse en términos de s como sigue:

Proposición 3.1.2 Sea $s : B \otimes A \to A \otimes B$ una aplicación k-lineal, tal que:

$$s(b \otimes 1) = 1 \otimes b \ \text{ y } \ s(1 \otimes a) = a \otimes 1$$

Entonces la multiplicación μ_s es asociativa si y solo si se tiene:

$$s \circ (\mu_B \otimes \mu_A) = \mu_s \circ (s \otimes s) \circ (B \otimes s \otimes A) \tag{3.1.2}$$

o de manera equivalente s satisface las siguientes dos condiciónes:

$$s \circ (B \otimes \mu_A) = (\mu_A \otimes B) \circ (A \otimes s) \circ (s \otimes A) \tag{3.1.3}$$

$$s \circ (\mu_B \otimes A) = (A \otimes \mu_B) \circ (s \otimes B) \circ (B \otimes s) \tag{3.1.4}$$

donde $A = id_A$ y $B = id_B$.

Prueba. Ver [13] o en mas detalle proposición 2.1 en [19].

□

Una aplicación s que satisface las condiciónes de la proposición será llamada aplicación de **entrelazamiento** (en inglés **twisting map**) de A y B, y denotaremos por $A \otimes_s B$ al álgebra $(A \otimes B, \mu_s)$.

Los entrelazamientos $A \otimes_s B$ de A y B satisfacen la siguiente propiedad universal: Dado un álgebra C y un par de morfismos de álgebras $f : A \to C$ y $g : B \to C$ tales que

$$\mu_C \circ (g \otimes f) = \mu_C \circ (f \otimes g) \circ s$$

entonces existe un único morfismo de álgebras $h : A \otimes_s B \to C$ que satisface:

$$f = h \circ i_A \ \text{ y } \ g = h \circ i_B$$

En efecto, es facíl verificar que $h = \mu_C \circ (f \otimes g)$.

Un morfismo entre dos entrelazamientos $A \otimes_s B$ y $C \otimes_t D$ es un par de morfimos $f : A \to C$ y $g : B \to D$ tales que

$$t \circ (g \otimes f) = (f \otimes g) \circ s$$

De esta manera dos entrelazamientos s, $t : B \otimes A \to A \otimes B$ serán llamados equivalentes si son isomorfos. Esto es, si existen automorfismos $f : A \to A$ y $g : B \to B$ tales que

$$t = (f^{-1} \otimes g^{-1}) \circ s \circ (g \otimes f)$$

Ejemplo 9 [El producto tensorial clásico]. Para cualquier par de álgebras A y B, la aplicación flip clásica está dada por:

$$\begin{aligned} \tau : B \otimes A &\to A \otimes B \\ b \otimes a &\mapsto a \otimes b \end{aligned}$$

Trivialmente satisface todas las condiciónes necesarias para ser un entrelazamiento. El producto tensorial torcido inducido por esta aplicación de entrelazamiento es el **producto tensorial clásico** $A \otimes B$

Ejemplo 10 [Álgebra de cuaterniones generalizada]. Sean a, $b \in k$ elementos de cuerpo base, sean $A := k[x]/(x^2 - a)$ y $B := k[y]/(y^2 - b)$, e identifiquemos x e y con sus imagenes en A y B, respectivamente. Definimos la aplicación $s : B \otimes A \to A \otimes B$ por:

$$s(y \otimes x) := -x \otimes y$$

Como caso particular de este ejemplo, consideremos $k = \mathbb{R}$, $a = b = -1$ y obtenemos que A y B son isomorfas al cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ y el producto torcido $A \otimes_s B$ es:

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \otimes_s \mathbb{C}$$

Ejemplo 11 [Anillo de matrices], ver [14]. Supongamos que nuestro cuerpo k contiene a q una n-raiz primitiva de la unidad. Entonces el anillo de matrices $M_n(k)$ se factoriza como un producto tensorial torcido $M_n(k) = k\mathbb{Z}_n \otimes_s k\mathbb{Z}_n$, donde consideramos las dos copias de $k\mathbb{Z}_n$ generadas por:

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q^{n-1} \end{pmatrix} \qquad h := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Estos elementos satisfacen $hg = qgh$, asi podemos definir el entrelazamiento s sobre los generadores:

$$s(1 \otimes 1) := 1 \otimes 1,\ s(1 \otimes g) := g \otimes 1,\ s(h \otimes 1) := 1 \otimes h,\ s(h \otimes g) := q \cdot g \otimes h$$

3.2. El caso $B = k[y]$ (extensiones polinomiales)

En esta sección estudiamos los entrelazamientos considerando $B = k[y]$, el álgebra de polinomios sobre y. Las llamadas extensiones polinomiales son caracterizadas por una familia de aplicaciones lineales $\{\alpha_i : A \to A\}_{i \in I}$, a partir de las cuales se puede reconstruir la aplicación de entrelazamiento. En esta sección seguimos: [15], [20], [18] y [19].

Si $B = k[y]$, la aplicación de entrelazamiento $s : k[y] \otimes A \to A \otimes k[y]$ puede ser determinada por los morfismos $\gamma_j^r : A \to A$, definidos por la siguiente ecuación:

$$s(y^r \otimes a) = \sum_{j \geq 0} \gamma_j^r(a) \otimes y^j, \tag{3.2.1}$$

De esta manera las condiciónes impuestas sobre s se traducen en las siguientes condiciónes sobre las aplicaciones γ_j^r

Proposición 3.2.1 Un conjunto de aplicaciones $\gamma_j^i : A \to A$ define un entrelazamiento si y solamente si las siguientes propiedades son satisfechas:

a) $\gamma_j^0 = \delta_{j0} id$.

b) $\gamma_j^i(1) = \delta_j^i$

c) para todo r, j, se tiene:

$$\gamma_j^r(ab) = \sum_{k \geq 0} \gamma_k^r(a) \gamma_j^k(b)$$

d) para todo $0 \leq k \leq r$, se tiene:

$$\gamma_j^r = \sum_{l=0}^{j} \gamma_l^k \circ \gamma_{j-l}^{r-k}$$

e) Para cada $a \in A$ y r fijos existe un $N = N(a, r)$ tal que

$$\gamma_j^r(a) = 0 \quad \text{para todo} \quad j > N(a, r).$$

Prueba. La prueba de este resultado pueder encontrarse en detalle en [19] proposición 3.1

□

Observación 16 El item d) puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\gamma_j^{m+n} = \sum_{l=0}^{j} \gamma_l^m \circ \gamma_{j-l}^n$$

lo cual muestra que las aplicaciones γ_j^i se pueden obtener a partir de las aplicaciones $\gamma_j^1 =: \alpha_j$, de esta manera:

$$\gamma_j^{1+n} = \sum_{l=0}^{j} \gamma_l^1 \circ \gamma_{j-l}^n = \sum_{l=0}^{j} \alpha_l \circ \gamma_{j-l}^n \tag{3.2.2}$$

Por otro lado, para cada entrelazamiento s tenemos asociadas dos matrices infinitas: $M^s, \Gamma^s \in M_\infty(\mathcal{L}(A))$, definidas de la siguiente manera:

$$M_{ij}^s := \gamma_{j-1}^{i-1}, \quad \Gamma_{ij}^s := \begin{cases} \alpha_{i-j}, & i-j \leq 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \tag{3.2.3}$$

y se relaciónan debido a la ecuación (3.2.2) de la siguiente manera, para i_0 fijo, se tiene:

$$(M_{i_0+1,\bullet}^s) = \Gamma^s(M_{i_0,\bullet}^s)$$

y en términos de matrices tenemos el siguiente arreglo:

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^{i_0} \\ \gamma_1^{i_0} \\ \gamma_2^{i_0} \\ \gamma_3^{i_0} \\ \gamma_4^{i_0} \\ \gamma_5^{i_0} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & . \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 & . \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \gamma_0^{i_0-1} \\ \gamma_1^{i_0-1} \\ \gamma_2^{i_0-1} \\ \gamma_3^{i_0-1} \\ \gamma_4^{i_0-1} \\ \gamma_5^{i_0-1} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Donde $\circ$ corresponde a la composición de morfismos. Más aún, se tiene:

$$(M_{i_0+1,\bullet}^s) = (\Gamma^s)^{i_0}\Gamma_1 \tag{3.2.4}$$

donde $\Gamma_1 := (\Gamma_{\bullet 1}^s)$.

Mostremos en detalle como se construye M^s a partir de Γ^s, es decir, los γ_j^i y el entrelazado de los α_j's. Dada una familia de aplicaciones lineales $(\alpha_j : A \to A)_{j\geq 0}$ y un conjunto de índices $n_1, \ldots, n_r \geq 0$, denotemos:

$$|n_1, \ldots, n_r| = n_1 + \ldots + n_r \quad \text{y} \quad \alpha_{n_1 \ldots n_r} = \alpha_{n_1} \circ \ldots \circ \alpha_{n_r}.$$

Motivado por la ecuación (3.2.4) escribamos:

$$\gamma_j^0 = \delta_{j0} id \quad \text{y} \quad \gamma_j^r = \sum_{|n_1,\ldots,n_r|=j} \alpha_{n_1\ldots n_r} \ \text{para } r > 0 \tag{3.2.5}$$

donde δ_{0j} denota, como es usual, el simbolo de Kronecker. Además conviene observar que $\gamma_j^1 = \alpha_j$.

Corolario 3.2.2 Sea A un álgebra y $s : k[y] \otimes A \to A \otimes k[y]$ un entrelazamiento. La ecuación:

$$s(y \otimes a) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(a) \otimes y^j,$$

define una familia de aplicaciones $\alpha_j : A \to A$ que satisfacen las siguientes propiedades:

a) Para cada $a \in A$ existe $j_0 \geq 0$, tal que $\alpha_j(a) = 0$ cuando $j > j_0$.

b) $\alpha_j(1) = \delta_{j1}$.

c) Para todo $j \geq 0$ y todo a, $b \in A$,

$$\alpha_j(ab) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r(a)\gamma_j^r(b) \tag{3.2.6}$$

Más aún,

$$s(y^r \otimes a) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j^r(a) \otimes y^j$$

para todo $r \geq 0$ y $a \in A$. Por otro lado, dadas aplicaciones $\alpha_j : A \to A$ ($j \geq 0$) satisfaciendo a), b) y c), esta última fórmula define un entrelazamiento poniendo $s(1 \otimes a) = a \otimes 1$.

Prueba. La prueba se sigue directamente de la proposición 3.2.1.

□

Por otro lado, regresando a la ecuación (3.2.4), se tiene el siguiente resultado:

Corolario 3.2.3 a) Si $\alpha_0 = 0$, entonces $\gamma_j^i = 0$ si $i > j$. Más aún, la ecuación (3.2.6) muestra que α_1 es un morfismo de álgebras

b) Si $n > 1$, $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_j = 0$ para $1 < j < n$, entonces

$$\alpha_n(ab) = \alpha_1(a)\alpha_n(b) + \alpha_n(a)\alpha_1^n(b).$$

Observación 17 La ecuación (3.2.3), asocia a cada elemento $a \in A$ una matriz infinita $M^s(a) \in M_\infty(A)$ donde: $M^s(a)_{ij} = \gamma_j^i(a)$, es decir:

$$M^s(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ \alpha_0(a) & \alpha_1(a) & \alpha_2(a) & \alpha_3(a) & \alpha_4(a) & \alpha_5(a) & . \\ \gamma_0^2(a) & \gamma_1^2(a) & \gamma_2^2(a) & \gamma_3^2(a) & \gamma_4^2(a) & \gamma_5^2(a) & . \\ \gamma_0^3(a) & \gamma_1^3(a) & \gamma_2^3(a) & \gamma_3^3(a) & \gamma_4^3(a) & \gamma_5^3(a) & . \\ \gamma_0^4(a) & \gamma_1^4(a) & \gamma_2^4(a) & \gamma_3^4(a) & \gamma_4^4(a) & \gamma_5^4(a) & . \\ \gamma_0^5(a) & \gamma_1^5(a) & \gamma_2^5(a) & \gamma_3^5(a) & \gamma_4^5(a) & \gamma_5^5(a) & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Si $\alpha_0 = 0$, tenemos:

$$M^s(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & \alpha_1(a) & \alpha_2(a) & \alpha_3(a) & \alpha_4(a) & \alpha_5(a) & \alpha_6(a) & . \\ 0 & 0 & \gamma_2^2(a) & \gamma_3^2(a) & \gamma_4^2(a) & \gamma_5^2(a) & \gamma_6^2(a) & . \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_3^3(a) & \gamma_4^3(a) & \gamma_5^3(a) & \gamma_6^3(a) & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_4^4(a) & \gamma_5^4(a) & \gamma_6^4(a) & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_5^5(a) & \gamma_6^5(a) & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_6^6(a) & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

De esta manera el ítem a) suguiere la siguiente definición:

Definición 3.2.4 Los entrelazamientos tales que $\alpha_0 = 0$ serán llamados entrelazamientos *triangulares superiores* y aquellos tales que $\alpha_i = 0$ para $i \geq 2$ serán llamados *triangulares inferiores.*

Ejemplo 12 [Extensiones de Ore] Si $\alpha : A \to A$ es un endomorfismo de álgebras y $\delta : A \to A$ es una α-derivación (esto es $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$), entonces existe un único entrelazamiento $s : k[y] \otimes A \to A \otimes k[y]$ tal que

$$s(y \otimes a) = \alpha(a) \otimes y + \delta(a) \otimes 1 \quad \text{para todo } a \in A$$

El producto tensorial $A \otimes_s k[y]$ es isomorfo a la extensión de Ore $A[y; \alpha, \delta]$

Observación 18 En realidad, se tiene que cada entrelazamiento triangular inferior corresponde con una extensiones de Ore.

3.3. Extensiones polinomiales truncadas no conmutativas (el caso $B = k[y]/(y^n)$)

En [20] se obtienen resultados muy impotantes encuanto al caso $B = k[y]/(y^n)$, de los cuales tan sólo consideramos algunos relacionados con los ejemplos que obtenemos en el capitulo 4.

El corolario 3.2.2 se puede modificar para caracterizar este tipo de entrelazamientos. Asociada a una aplicación de entrelazamiento:

$$s : \frac{k[y]}{(y^n)} \otimes A \to A \otimes \frac{k[y]}{(y^n)}$$

tenemos la matriz $M^s \in M_n(End_k(A))$, en este caso:

$$M^s = \begin{pmatrix} id & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \gamma_0^{n-1} & \gamma_1^{n-1} & \cdots & \gamma_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Más aún, cada $a \in A$ define una matriz $M^s(a) \in M_n(A)$ con la evaluación de M^s en a, es decir:

$$M^s(a)_{ij} = \gamma_j^i(a) \;\; (0 \leq i, j < n)$$

Corolario 3.3.1 La matriz $M^s(a)$ satisface:

i) $M(1) = Id$.

ii) $M^s(ab) = M^s(a)M^s(b)$

Prueba. ver corolario 4.4 [19].

□

Teorema 3.3.2 La aplicación $\varphi_s : A \otimes_s \frac{k[y]}{(y^n)} \to M_n(A)$ definida por:

$$\varphi_s(a) = M^s(a), \quad \varphi_s(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

es una representación fiel.

Prueba. Ver teorema 4.5 [19].

□

El siguiente resultado de [15] brinda muchos ejemplos en el capitulo 4.

Teorema 3.3.3 Si la aplicación $s : \frac{k[y]}{(y^2)} \otimes A \to A \otimes \frac{k[y]}{(y^2)}$ define un entrelazamiento, entonces las aplicaciones $\alpha_0, \alpha_1 : A \to A$ definidas por la ecuación:

$$s(y \otimes a) = \alpha_0(a) + \alpha_1(a)y \tag{3.3.1}$$

satisfacen:

i) α_1 es morfismo de álgebras.

ii) $\alpha_0(ab) = \alpha_0(a)b + \alpha_1(a)\alpha_0(b)$, (es decir, α_0 es una α_1-derivación)

iii) $\alpha_0 \circ \alpha_0 = 0$ y $\alpha_0 \circ \alpha_1 + \alpha_1 \circ \alpha_0 = 0$

Reciprocamente, si las aplicaciones α_0 y α_1 satisfacen $i), ii), iii)$ entonces la ecuación (3.3.1) define un entrelazamiento

Prueba. Ver teorema 4.1 en [15].

□

3.4. El caso $A = k[x]$ y $B = k[y]$ o $B = k[y]/(y^n)$

Como vimos en la primera sección dos entrelazamientos de $A \otimes_s B$ y $A \otimes_t B$ son isomorfos o equivalentes, si existen automorfismos $f : A \to A$ y $g : B \to B$ tales que

$$t = (f^{-1} \otimes g^{-1}) \circ s \circ (g \otimes f)$$

En esta sección tenemos $A = k[x]$ y $B = k[y]$ o $\dfrac{k[y]}{(y^n)}$, asi el isomorfismo $f \otimes g$ es determinado por sus valores sobre x e y, respectivamente.

Lema 3.4.1 El isomorfismo $g : \dfrac{k[y]}{(y^n)} \to \dfrac{k[y]}{(y^n)}$ dado por $g(y) = y(1 - \lambda y^k)$, tiene por inversa:

$$g^{-1}(y) = y(1 + a_{k,1}\lambda y^k + a_{k,2}(\lambda y^k)^2 + \cdots + a_{k,m}(\lambda y^k)^m),$$

donde $k(m+1) \geq n$ y los coeficientes $a_{k,j}$ dependen únicamente de k y j. Se obtienen de la siguiente formula:

$$a_{k,j} = 1 - \sum_{i=[|\frac{j-1}{k}|]}^{j-1} \binom{ki}{j-i} (-1)^{j-i} a_{k,i}.$$

en particular se tiene $a_{k,1} = 1$, $a_{k,2} = k + 1$ y $a_{k,3} = \frac{1}{2}(3k + 2)(k + 1)$.

Prueba. La prueba de este resultado puede ser vista en detalle en [18] Lema 4.2.

□

En cuanto a la clasificación por equivalencias tenemos:

Proposición 3.4.2 Consideremos los polinomios $\gamma_j^i(x) \in k[x]$ determinados por el entrelazamiento s. Entonces los polinomios correspondientes al entrelazamiento $\bar{s} = (f^{-1} \otimes g^{-1}) \circ s \circ (f \otimes g)$ son los siguientes:

a) $B = k[y]$

i) Si consideramos $f(x) = c_1x + c_0$ y $g(y) = r_1y$, los polinomios son dados por:

$$\overline{\gamma_j^i}(x) = r_1^{j-i}c_1\gamma_j^i(\frac{x - c_0}{c_1}) + c_0\delta_{ij}$$

ii) Si consideramos $f = Id$ y $g(y) = y + r_0$, entonces los morfismos $\overline{\gamma_j^{(i)}}$ correspondientes a $\bar{s}$ son dados por:

$$\overline{\gamma_j^n} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i\geq l}(-1)^{n+i-j-l}\binom{n}{j}\binom{i}{l}\gamma_i^j$$

b) $B = \dfrac{k[y]}{(y^n)}$, consideremos $f = Id$ y $g(y) = y(1 - \lambda y^k)$., entonces los morfismos $\bar{\alpha_j}$ correspondientes a $\bar{s}$ vienen expresados de la siguiente manera:

$$\bar{\alpha_j} = \sum_{t=0}^{s} b_{j,t}\lambda^t(\alpha_{tk+r} + \lambda\gamma_{tk+r}^{k+1})$$

donde: $j = sk + r$ con $0 < r \leq k$ (*i.e.* $s = [|\frac{j-1}{k}|]$ y $r = j - [|\frac{j-1}{k}|]k$) y $b_{j,t}$ viene dado por la siguiente ecuación:

$$(1 + z + a_{k,2}z^2 + \cdots + a_{k,m}z^m)^j = b_{j,0} + b_{j,1}z + b_{k,2}z^2 + \cdots + b_{k,mj}z^{mj}$$

Prueba. La prueba de este resultado puede ser vista en detalle en [18], proposición 4.3.

$\square$

3.4.1. El caso $n = 2$

Uno de los resultados importantes que encontramos en [18] corresponde al caso (n=2), donde se muestra una clasificación completa de los entrelazamientos modulo equivalencias. Además se encuentra un representante canónico para cada clase con los cuales podemos construir varios ejemplos en el capitulo 4 y ademas establecer estructuras de álgebras de Hopf en algunos casos.

Lema 3.4.3 Si s y $\bar{s}$ son entrelazamientos equivalentes de $k[x] \otimes \frac{k[y]}{(y^2)}$, entonces los isomorfismos f y g son:$f(x) = c_1x + c_0$ y $g(y) = r_1y$, tal que:

$$\bar{s} = (f^{-1} \otimes g^{-1}) \circ s \circ (g \otimes f)$$

Prueba. La prueba de este resultado puede ser vista en detalle en [18] Lema 4.4.

□

PROPOSICIÓN 3.4.4 Los entrelazamientos de $k[x] \otimes \frac{k[y]}{(y^2)}$ son de dos tipos:

1) Si $\alpha_0 = 0$, entonces cualquier elección $P = \alpha_1(x) \in k[x]$ determina un entrelazamiento via: $\alpha_1(x^n) = P^n$.

   - Si $grad(P) = 0$ podemos elejir un entrelazamiento equivalente con $\alpha_1(x) = 0$, *i.e.* $\alpha_1 = ev_0$.
   - Si $grad(P) = 1$ podemos encontrar un entrelazamiento equivalente con $\alpha_1(x) = ux$ para algun elemento invertible $u \in k$.
   - Si $grad(P) > 1$, entonces $s \cong \bar{s}$, si existen $c_0, c_1 \in k[x]$, $\quad c_1 \neq 0$ tales que:
   $$\bar{P} = c_1 P(\frac{x - c_0}{c_1}) + c_0$$

2) Si $\alpha_0 \neq 0$, entonces es equivalente al entrelazamiento con: $\alpha_1(x) = -x$ y $\alpha_0(x) = Q \in k[x^2]$. Entonces $\alpha_1(x^n) = (-x)^n$ y $\alpha_0(P_0 + xP_1) = QP_1$ para $P_0, P_1 \in k[x^2]$. Mas aun, $s \cong \bar{s}$ si existen $c_1, r_1 \in k[x] \setminus \{0\}$ tal que:
$$\bar{Q} = r_1 c_1 Q(\frac{x}{c_1}).$$

PRUEBA. La prueba de este resultado puede ser vista en detalle en [18], proposición 4.5.

□

Capítulo 4

Entrelazamientos y Álgebras de Hopf

Iniciamos este capitulo con el estudio de los entrelazamientos entre un álgebra asociativa A y $k[y^{\pm 1}]$, luego motivados por un ejemplo de [24] trataremos de obtener condiciones para obtener un entrelazamiento entre A y $k[y^{\pm 1}]$ apartir de uno entre A y $k[y]$. Caracterizamos algunos casos particulares y luego partimos en la busqueda de estructuras de álgebra de Hopf sobre ellas, provenientes de entrelazamientos muy particulares.

4.1. Motivación

Un ejemplo particular de extensiones de Ore y por lo tanto de entrelazamientos, es el **Plano cuántico**, $k_q[x, y]$ donde:

$$yx = qxy,$$

que proviene de considerar entre $k[x]$ y $k[y]$ el entrelazamiento s, definido por las aplicaciones:

$$\alpha_0 = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_1(x) = qx$$

donde $q \in k^*$.

De esta manera si consideramos $q \in k^*$ y H el álgebra generada por y, y^{-1}, x sujeta a las siguientes relaciones:

$$yx = qxy, \quad yy^{-1} = 1 = y^{-1}y$$

Entonces la siguiente igualdad:

$$y^{-1}x = q^{-1}xy^{-1}$$

establece un entrelazamiento t entre $k[x]$ y $k[y^{-1}]$, definido mediante las aplicaciones

$$\beta_i : k[x] \to k[x], \; i = 0, 1$$

definidas :

$$\beta_0 = 0 \text{ y } \beta_1(x) := q^{-1}x$$

donde $t(y^{-1} \otimes x) = \beta_1(x) \otimes y^{-1}$.

Observación 19 Podemos representar ambos entrelazamientos en una matriz, donde el cuadrante izquierdo superior corresponde a t y el cuadrante inferior derecho a s:

$$\begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . & . \\ . & q^{-2}x & 0 & 0 & . & . & . \\ . & 0 & q^{-1}x & 0 & . & . & . \\ . & 0 & 0 & x & 0 & 0 & . \\ . & . & . & 0 & qx & 0 & . \\ . & . & . & 0 & 0 & q^2x & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Esta observación da paso a la siguiente sección:

4.2. Entrelazamientos entre A y $k[y^{\pm 1}]$

Estudiemos ahora los entrelazamientos entre A y $k[y^{\pm 1}]$, en este caso el entrelazamiento $s : k[y^{\pm 1}] \otimes A \to A \otimes k[y^{\pm 1}]$ puede ser determinado por los morfismos $\gamma_j^r : A \to A$ definidos por la siguiente ecuacion:

$$s(y^r \otimes a) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma_j^r(a) \otimes y^j \tag{4.2.1}$$

de esta manera las condiciones impuestas sobre s se traducen en las siguientes condiciones sobre las aplicaciones γ_j^r, donde $r, j \in \mathbb{Z}$.

Proposición 4.2.1 Un conjunto de aplicaciones $\gamma_j^i : A \to A$ define un entrelazamiento si y solamente si las siguiente propiedades son satisfechas:

a) $\gamma_j^0 = \delta_{j0} id$.

b) $\gamma_j^i(1) = \delta_{ji}$

c) para todo r, j, se tiene:

$$\gamma_j^r(ab) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^r(a)\gamma_j^k(b)$$

d) para todo r, $k \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$\gamma_j^{r+k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \gamma_l^r \circ \gamma_{j-l}^k$$

e) Para cada $a \in A$ y r fijos existen $N = N(a,r)$ y $M = M(a,r)$ tal que

$$\gamma_j^r(a) = 0 \quad \text{para todo} \quad j > N(a,r) \text{ o } j < M(a,r)$$

Prueba. Es claro que los items (a) y (b) corresponden a los mismos de la proposición (3.1.2). También se puede verificar directamente que sucede lo mismo para los items (c) y (d). Por ultimo el item (e) vale si y solo si la ecuación (4.2.1) define una aplicación $s : k[y^{\pm 1}] \otimes A \to A \otimes k[y^{\pm 1}]$.

□

Observación 20 Como vimos en el capitulo anterior, debido al item d) podemos obtener las aplicaciones γ_j^r a partir de composiciones de las aplicaciones:

- γ_j^1, cuando $r > 0$, y
- γ_j^{-1}, cuando $r < 0$.

Denotemos estas aplicaciones como sigue:

$$\alpha_j := \gamma_j^1 \quad \text{y} \quad \beta_j := \gamma_{-j}^{-1}$$

de esta manera se tiene:

$$s(y \otimes a) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i(a) \otimes y^i, \quad s(y^{-1} \otimes a) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_j(a) \otimes y^{-j}$$

Así, para todo $a \in A$ se tienen las siguientes igualdades:

$$a \otimes 1 = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \alpha_i(\beta_j(a)) \otimes y^{i-j} = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \beta_i(\alpha_j(a)) \otimes y^{j-i}$$

Esto nos muestra las relaciones de compatibilidad existente entre ellas:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \circ \beta_{k+l} = \delta_{0,l} id_A, \quad \text{para todo} \quad l \in \mathbb{Z} \tag{4.2.2}$$

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} \beta_r \circ \alpha_{r+s} = \delta_{0,s} id_A, \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{Z} \tag{4.2.3}$$

De esta manera si contamos con dos familias de aplicaciones

$$(\alpha_j, \beta_j : A \to A)_{j \in \mathbb{Z}}$$

e índices $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}$ y consideremos las notaciones vistas en el capitulo anterior:

$$|n_1, \ldots, n_r| = n_1 + \ldots + n_r,$$

$$\beta_{n_1 \ldots n_r} = \beta_{n_1} \circ \ldots \circ \beta_{n_r}$$

y

$$\alpha_{n_1 \ldots n_r} = \alpha_{n_1} \circ \ldots \circ \alpha_{n_r}.$$

Más aún, escribamos

- $\gamma_j^0 = \delta_{0j} id$
- $\gamma_j^{-r} = \sum_{|n_1,\ldots,n_r|=j} \beta_{n_1 \ldots n_r}$ para $r > 0$; (4.2.4)
- $\gamma_j^r = \sum_{|n_1,\ldots,n_r|=j} \alpha_{n_1 \ldots n_r}$ para $r > 0$.

donde δ_{0j} denota, como es usual, el simbolo de Kronecker. Además conviene observar que $\gamma_j^{-1} = \beta_j$ y $\gamma_j^1 = \alpha_j$

De esta manera tenemos el siguiente resultado:

Corolario 4.2.2 Sea A un álgebra y $s : k[y^{\pm 1}] \otimes A \to A \otimes k[y^{\pm 1}]$ un entrelazamiento. Las ecuaciones:

$$s(y \otimes a) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j(a) \otimes y^j, \quad s(y^{-1} \otimes a) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_j(a) \otimes y^j$$

definen dos familias de aplicaciones $\alpha_j, \beta_j : A \to A$ que satisfacen las siguientes propiedades:

a) Satisface las condiciones de compatibilidad 4.2.2 y 4.2.3

b) Para cada $a \in A$ existen $i_0 \leq 0$ y $j_0 \geq 0$, tal que $\alpha_j(a) = 0$, $\beta_j(a) = 0$ cuando $j < i_0$ y $j > j_0$.

c) $\alpha_j(1) = \delta_{j1} = \beta_j(1)$.

d) Para todo $j \geq 0$ y todo a, $b \in A$,

$$\alpha_j(ab) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \alpha_r(a)\gamma_j^r(b), \quad \beta_j(ab) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \beta_r(a)\gamma_j^{-r}(b)$$

Más aún,

$$s(y^r \otimes a) = \sum_{j=0} \gamma_j^r(a) \otimes y^j$$

para todo $r \in \mathbb{Z}$ y $a \in A$.

Por otro lado, dadas aplicaciones $\alpha_j, \beta_j : A \to A$ ($j \in \mathbb{Z}$) satisfaciendo a)-e), esta última fórmula define un entrelazamiento.

Prueba. La prueba se sigue directamente de la proposición (4.2.1).

□

OBSERVACIÓN 21 El álgebra que aparece en la motivación es un entrelazamiento de este tipo, considerando las aplicaciones:

$$\alpha_1(x) = qx, \quad \beta_1(x) = q^{-1}x \quad \text{y} \quad \alpha_i = 0 = \beta_i, \quad i \neq 1$$

En este caso particular conviene tambien resaltar que las aplicaciones $\{\alpha_i\}_{i\geq 0}$ y $\{\beta_j\}_{j\geq 0}$ definen entralazamientos entre A y $k[y]$ y entre A y $k[y^{-1}]$, respectivamente.

Abordemos esta última observación considerando un entrelazamiento

$$s : k[y^{\pm 1}] \otimes A \to A \otimes k[y^{\pm 1}]$$

tal que las aplicaciones $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y $\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ satisfagan las siguientes condiciones:

- Si $i < 0$, entonces $\alpha_i = \beta_i = 0$,
- Las aplicaciones $\{\alpha_i\}_{i\geq 0}$ y $\{\beta_j\}_{j\geq 0}$ definen entralazamientos (entre A y $k[y]$ y entre A y $k[y^{-1}]$, respectivamente.).

DEFINICIÓN 4.2.3 Un entrelazamiento s de A y $k[y^{\pm 1}]$ de este tipo será llamado *Separable*.

Bajo este supuesto las ecuaciones de compatibilidad se convierten en las siguientes:

$$\sum_{k\geq 0} \alpha_k \circ \beta_{k+l} = \delta_{0,l} id_A \ \forall \ \ l \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k\geq 0} \beta_k \circ \alpha_{k+l} = \delta_{0,l} id_A \ \forall \ \ l \in \mathbb{Z}$$

Estas ecuaciones pueden ser reescritas de manera matricial, como sigue:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & . \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & . \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & . \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 & 0 & 0 & 0 & . \\ \beta_1 & \beta_0 & 0 & 0 & . \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & 0 & . \\ \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & id & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & id & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & id & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & . \\ 0 & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & . \\ 0 & 0 & \beta_0 & \beta_1 & . \\ 0 & 0 & 0 & \beta_0 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & . \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 & . \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & . \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & id & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & id & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & id & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Por otro lado en el capitulo 3 vimos que un entrelazamiento triangular inferior entre A y $k[y]$ (o extensión de Ore) es definida por las aplicaciones

$\alpha_0,\ \alpha_1 : A \to A$ tales que α_0 es una α_1- derivación y α_1 es un morfismo de álgebras, es decir:

$$\alpha_0(ab) = \alpha_0(a)b + \alpha_1(a)\alpha_0(b) \ \text{ y } \ \alpha_1(ab) = \alpha_1(a)\alpha_1(b)$$

Observación 22 En nuestra motivación aparece un entrelazamiento de este tipo con: $\alpha_0 = 0$ y α_1 un automorfismo de álgebras.

La siguiente definición es necesaria para enunciar el teorema siguiente.

Definición 4.2.4 Diremos que la aplicación δ es localmente nilpotente, si para cada $a \in A$ existe $n_a \in \mathbb{N}$ talque $\delta^n(a) = 0$ para todo $n \geq n_a$

El siguiente resultado muestra una dualidad entre los entrelazamientos triangulares inferiores y los triangulares superiores.

Teorema 4.2.5 Supongamos que α_0 y α_1 definen un entrelazamiento triangular inferior, con α_1 un automorfismo de álgebras y la aplicación $\delta = -\alpha_0 \circ \alpha_1^{-1}$ localmente nilpotente. Entonces las aplicaciones:

$$\beta_0 = 0,\ \ \beta_1 = \alpha_1^{-1},\ \ \beta_{j+1} = \beta_1 \circ \delta^j,\ j \geq 1$$

definen un entrelazamiento triangular superior entre A y $k[y^{-1}]$ vía las ecuaciones (4.2.4) y

$$t(y^{-r} \otimes a) = \sum_{j\leq 0} \gamma_j^{-r} \otimes y^j.$$

Más aún las aplicaciones $\{\alpha_i\}_i$ y $\{\beta_j\}_j$ satisfacen las ecuaciones de compatibilidad y de esta manera definen un entrelazamiento entre A y $k[y^{\pm 1}]$

La prueba de este teorema será presentada en las siguientes observaciones:

Observación 23 Las aplicaciónes δ y β satisfacen las siguientes propiedades:

- $\beta_{k+1} = \beta_1 \circ \delta \circ \beta_1^{-1} \circ \beta_k = \beta_2 \circ \beta_1^{-1} \circ \beta_k$
- $\delta(ab) = \delta(a)\beta_1(b) + a\delta(b)$
- $\beta_1 \circ \delta(ab) = \beta_1 \circ \delta(a)\beta_1^2(b) + \beta_1(a)\beta_1 \circ \delta(b)$, es decir:

$$\beta_2(ab) = \beta_2(a)\beta_1^2(b) + \beta_1(a)\beta_2(b) \tag{4.2.5}$$

- Ademas las aplicaciones $\eta_j^i := \gamma_j^{-i}$ asociadas por medio de las ecuaciones (4.2.4) a las $\{\beta_j\}_j$ satisfacen las siguientes relaciones:

$$\eta_{j+1}^{i+1} = \sum_{k=0}^{j} \beta_1 \circ \delta^{j-k} \circ \eta_k^i = \sum_{k=0}^{j} \beta_{j+1-k} \circ \eta_k^j$$

PROPOSICIÓN 4.2.6 Las aplicaciones η_j^i satisfacen la siguiente relación:

$$\eta_{j+1}^{i+1} = \beta_2 \circ \beta_1^{-1} \circ \eta_j^{i+1} + \beta_1 \circ \eta_j^i$$

PRUEBA.

$$\begin{aligned}
\eta_{j+1}^{i+1} &= \textstyle\sum_{k=0}^{j-1} \beta_{j+1-k} \circ \eta_k^j + \beta_1 \circ \eta_j^i \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} \beta_1 \circ \delta^{j-k} \circ \eta_k^j + \beta_1 \circ \eta_j^i \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} \beta_1 \circ \delta \circ \delta^{j-1-k} \circ \eta_k^j + \beta_1 \circ \eta_j^i \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} \beta_1 \circ \delta \circ \beta_1^{-1} \circ \beta_1 \circ \delta^{j-1-k} \circ \eta_k^j + \beta_1 \circ \eta_j^i \\
&= \beta_1 \circ \delta \circ \beta_1^{-1} \circ \eta_j^{i+1} + \beta_1 \circ \eta_j^i \\
\eta_{j+1}^{i+1} &= \beta_2 \circ \beta_1^{-1} \circ \eta_j^{i+1} + \beta_1 \circ \eta_j^i
\end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 24

i) Debido a que β_1 es un morfismo de álgebras, tenemos:

$$\beta_1(ab) = \beta_1(a)\eta_1^1(b)$$

ii) Además podemos reescribir la ecuación (4.2.5), ya que $\eta_2^2 = \beta_1^2$ de la siguiente manera,

$$\beta_2(ab) = \beta_1(a)\eta_2^1(b) + \beta_2(a)\eta_2^2(b)$$

Veamos ahora que las aplicaciones $\{\beta_j\}_j$ definen un entrelazamiento:
PRUEBA.DEL TEOREMA

a) Tenemos: $\delta(1) = -\alpha_0 \circ \alpha_1^{-1}(1) = 0$, por lo tanto: $\beta_j(1) = \delta_{j1}$

b) Debido a que la aplicación δ es localmente nilpontente tenemos satisfecha la siguiente condición, es decir: Dado $a \in A$ existe n_a de manera que:

$$\beta_{j+1}(a) = \beta_1 \circ \delta^j(a) = 0, \text{ si } j > n_a$$

c) Debemos verificar que para todo a, $b \in A$ se satisface:

$$\beta_j(ab) = \sum_{r\geq 1} \beta_r(a)\eta_j^r(b)$$

En efecto, para $j = 0$ es completamente trivial y además la observación anterior muestra que es válida para $j = 1, 2$. Procedamos por inducción:

$$\begin{aligned}
\beta_{k+1}(ab) &= \beta_2 \circ \beta_1^{-1} \circ \beta_k(ab) = \sum_{r\geq 1} \beta_2 \circ \beta_1^{-1}(\beta_r(a)\eta_k^r(b)) \\
&= \sum_{r\geq 1} \beta_2(\beta_1^{-1} \circ \beta_r(a)\beta_1^{-1} \circ \eta_k^r(b)) \\
&= \sum_{r\geq 1} \beta_1 \circ \beta_1^{-1} \circ \beta_r(a)\beta_2 \circ \beta_1^{-1} \circ \eta_k^r(b) + \\
&\quad + \sum_{r\geq 1} \beta_2 \circ \beta_1^{-1} \circ \beta_r(a)\beta_1^2 \circ \beta_1^{-1} \circ \eta_k^r(b) \\
&= \sum_{r\geq 1} \beta_r(a)\beta_2 \circ \beta_1^{-1} \circ \eta_k^r(b) + \beta_{r+1}(a)\beta_1 \circ \eta_k^r(b) \\
&\quad (\beta_2 \circ \beta_1^{-1} \circ \eta_k^r = \eta_{k+1}^r - \beta_1 \circ \eta_k^{r-1}) \\
&= \sum_{r\geq 1} \beta_r(a)(\eta_{k+1}^r - \beta_1 \circ \eta_k^{r-1})(b) + \beta_{r+1}(a)\beta_1 \circ \eta_k^r(b) \\
&= \sum_{r\geq 1} \beta_r(a)\eta_{k+1}^r(b) + \beta_{r+1}(a)\beta_1 \circ \eta_k^r(b) - \\
&\quad - \sum_{r\geq 1} \beta_r(a)\beta_1 \circ \eta_k^{r-1}(b) \\
&= \sum_{r\geq 1} \beta_r(a)\eta_{k+1}^r(b) + \sum_{r\geq 1} \beta_{r+1}(a)\beta_1 \circ \eta_k^r(b) - \\
&\quad - \sum_{r\geq 1} \beta_r(a)\beta_1 \circ \eta_k^{r-1}(b) \\
&= \sum_{r\geq 1} \beta_r(a)\eta_{k+1}^r(b) + \beta_{k+1}(a)\beta_1 \circ \eta_k^k(b)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{r\geq 1} \beta_r(a)\eta^r_{k+1}(b) + \beta_{k+1}(a)\eta^{k+1}_{k+1}(b)$$

$$\beta_{k+1}(ab) = \sum_{r\geq 1} \beta_r(a)\eta^r_{k+1}(b)$$

De esta manera las aplicaciones $\{\beta_i\}_i$ definen un entrelazamiento.

Bajo las hipótesis sobre las aplicaciones $\{\alpha_i\}_i$ y $\{\beta_j\}_j$ las condiciones de compatibilidad se reducen a verificar:

$$\alpha_0 \circ \beta_0 + \alpha_1 \circ \beta_1 = id, \quad \alpha_1 \circ \beta_0 = 0, \quad \alpha_0 \circ \beta_l + \alpha_1 \circ \beta_{l+1} = 0, \ \ l \geq 1$$

$$\beta_0 \circ \alpha_0 + \beta_1 \circ \alpha_1 = id, \quad \beta_s \circ \alpha_0 + \beta_{s+1} \circ \alpha_1 = 0, \quad \beta_0 \circ \alpha_1 = 0, \ \ s \geq 1$$

lo cual es un cálculo directo, por ejemplo

$$\beta_s \circ \alpha_0 + \beta_{s+1} \circ \alpha_1 = \beta_1 \circ \delta^{s-1} \circ (\alpha_0 + \delta \circ \alpha_1) = 0$$

y

$$\begin{aligned} \alpha_0 \circ \beta_j + \alpha_1 \circ \beta_{j+1} &= \alpha_0 \circ \beta_1 \circ \delta^{j-1} + \alpha_1 \circ \beta_1 \circ \delta^j \\ &= (\alpha_0 \circ \beta_1 + \delta) \circ \delta^{j-1} = 0 \end{aligned}$$

□

Consideremos ahora el entrelazamiento $\{\beta_i\}_{i\geq 0}$ triangular superior entre A y $k[y]$, $(\beta_0 = 0)$ y supongamos que β_1 es un automorfismo. Además, si denotamos $\delta := \beta_1^{-1} \circ \beta_2$ y supongamos que se satisface la siguiente condición:

$$\beta_{i+1} = \beta_1 \circ \delta^i, \ \ i \geq 2. \tag{4.2.6}$$

Proposición 4.2.7 La aplicación δ es localmente nilpotente y además satisface la siguiente relación:

$$\delta(ab) = \delta(a)\beta_1(b) + a\delta(b)$$

Prueba. Es clara al reemplazar δ

□

Entonces encontramos el siguiente resultado recíproco al teorema 4.2.5:

Teorema 4.2.8 Si $\{\beta_i\}_i$ define un entrelazamiento triangular superior y $\delta := \beta_1^{-1} \circ \beta_2$ satiface las ecuaciones (4.2.6), entonces las aplicaciones :

$$\alpha_0 := -\delta \circ \beta_1^{-1} \ \text{ y } \ \alpha_1 := \beta_1^{-1}$$

definen un entrelazamiento triangular inferior entre A y $k[y^{-1}]$. Más aún, las aplicaciones $\{\beta_i\}_i$ y $\{\alpha_j\}_j$ satisfacen las condiciones de compatibilidad y de esta manera definen un entrelazamiento entre A y $k[y^{\pm 1}]$.

Prueba. Usar la proposición anterior.

□

El siguiente resultado muestra otra forma de obtener entrelazamientos entre A y $k[y^{\pm 1}]$. Además, cabe resaltar que estos nuevos entrelazamientos en su mayoría no provienen de entrelazamientos triangulares superiores ni inferiores.

Teorema 4.2.9 Sea s un entrelazamiento de A y $k[y]$ definido por (γ_j^i) donde $i, j \in \mathbb{N}_0$. Supongamos que existe $n > 1$ tal que $\gamma_j^n = \delta_{n,j} Id_A, \ \ \forall j \in \mathbb{N}_0$. Entonces se tiene:

a) Para todo $i,\, j \geq 0$
$$\gamma_j^i = \gamma_{j+n}^{i+n} \tag{4.2.7}$$

b) Si definimos:
$$\gamma_j^i = \begin{cases} 0, & \text{cuando } i \geq 0,\ j < 0, \\ \\ \gamma_{j+kn}^{i+kn}, & \text{cuando } i < 0,\ \text{para algún}\, k\, \text{tal que}\ \ i + kn \geq 0. \end{cases} \tag{4.2.8}$$
entonces las aplicaciónes $\{\gamma_j^i\}_{i\, j \in \mathbb{Z}}$ definen un entrelazamiento $\bar{s}$ de A y $k[y^{\pm 1}]$

En particular, si denotamos $\beta_j := \gamma_{n-j}^{n-1}$ $j \in \mathbb{Z}$, entonces $\bar{s}$ es separable si y solo si $\beta_j = 0$ para $j < 0$

Antes de iniciar la prueba del teorema veamos la siguiente observación que ayudará a la prueba.

Observación 25 Las aplicaciones $(\gamma_j^i)_{i,j \in \mathbb{Z}}$ y $(\gamma_j^i)_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ satisfacen
$$\gamma_j^i = 0 \ \text{ si } j < n \left[\!\left[\frac{i}{n} \right]\!\right]. \tag{4.2.9}$$

Prueba. Veamos:

i) Para todo $i,\, j \geq 0$ se tiene:
$$\gamma_{j+n}^{i+n} = \sum_{l=0}^{j+n} \gamma_l^n \circ \gamma_{j+n-l}^i = \sum_{l=0}^{j+n} \delta_{n,l} id_A \circ \gamma_{j+n-l}^i = \sum_{l=0}^{j+n} \delta_{n,l} \gamma_{j+n-l}^i = \gamma_j^i$$

ii) Debido al item i) y la ecuación 4.2.9 se safisfacen a) y b) de la proposición 4.2.1. Ahora reescribamos las leyes de composición y producto para $(\gamma_j^i)_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ con ayuda de la ecuación 4.2.9:

a) Ley de composición

$$\begin{aligned}
\gamma_j^{r+s} &= \gamma_{j+kn+pn}^{r+s+kn+pn} &= \sum_{l=0}^{j+kn+pn} \gamma_l^{r+kn} \circ \gamma_{j+kn+pn-l}^{s+pn} \\
& &= \sum_{l=n[\![\frac{r}{n}]\!]+kn}^{j+kn-n[\![\frac{s}{n}]\!]} \gamma_l^{r+kn} \circ \gamma_{j+kn+pn-l}^{s+pn} \\
& &= \sum_{w=n[\![\frac{r}{n}]\!]}^{j-n[\![\frac{s}{n}]\!]} \gamma_{w+kn}^{r+kn} \circ \gamma_{j+pn-w}^{s+pn}
\end{aligned}$$

b) Ley de producto

$$\begin{aligned}
\gamma_j^r(ab) &= \gamma_{j+kn}^{r+kn}(ab) &= \sum_{s\geq n[\![\frac{r+kn}{n}]\!]} \gamma_s^{r+kn}(a)\gamma_{j+kn}^{s}(b) \\
& &= \sum_{s\geq n[\![\frac{r}{n}]\!]+kn} \gamma_s^{r+kn}(a)\gamma_{j+kn}^{s}(b) \\
& &= \sum_{w\geq n[\![\frac{r}{n}]\!]} \gamma_{w+kn}^{r+kn}(a)\gamma_{j+kn}^{w+kn}(b)
\end{aligned}$$

De aquí se deducen facilmente las leyes de composición y producto para $\bar{s}$, es decir c) y d) de la proposición 4.2.1

Por último, para cada $a \in A$ y $r \geq 0$ fijos existe $N := N(a,r)$ tal que

$$\gamma_j^r(a) = 0 \quad \text{para todo} \quad j > N(a,r).$$

Esto en conjunto con la ecuación 4.2.9 y el item i) muestran que se satisface el item e) de la proposición 4.2.1.

Por lo tanto las aplicaciones $(\gamma_j^i)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ definen un entrelazamiento de A y $k[y^{\pm 1}]$

□

Ahora construiremos ejemplos para este tipo de entrelazamientos. Para este fin en conveniente recordar teorema 3.3.3 del capítulo anterior, concerniente a los entrelazamientos entre A y $k[t]/(t^2)$.

Teorema 4.2.10 Sea A un álgebra y $s : \frac{k[t]}{(t^2)} \otimes A \to A \otimes \frac{k[t]}{(t^2)}$ un entrelazamiento. Entonces las aplicaciones θ_0 y θ_1 asociadas satisfacen:

i) θ_1 es un morfismo de algebras.

ii) $\theta_0(ab) = \theta_0(a)b + \theta_1(a)\theta_0(b)$, es decir, θ_0 es una θ_1-derivación.

iii) $\theta_0^2 = \theta_0 \circ \theta_0 = 0$ y $\theta_0 \circ \theta_1 = -\theta_1 \circ \theta_0$

Reciprocamente, si las aplicaciones θ_0, θ_1 satisacen i) - iii), entonces determinan un entrelazamiento entre A y $k[t]/(t^2)$.

Ahora, consideremos el entrelazamiento triangular inferior entre A y $k[y]$ asociado a estas aplicaciones θ_0, θ_1, que satistacen las hipótesis del teorema 4.2.10.

Corolario 4.2.11 Si θ_1 es un automorfismo y denotamos $\delta := -\theta_0 \circ \theta_1^{-1}$ entonces

$$\delta = \theta_1^{-1} \circ \theta_0 \ \text{ y } \ \delta^2 = 0$$

Más aún, el entrelazamiento triangular superior entre A y $k[y^{-1}]$asociado, via el teorema 4.2.5, es definido por las aplicaciones:

$$\beta_0 = 0,\ \beta_1 = \theta_1^{-1},\ \ \beta_2 = \beta_1 \circ \delta,\ \ \beta_i = 0,\ i \geq 3$$

Prueba. Como la aplicación θ_1 es un automorfismo, se satisface:

$$\theta_0 \circ \theta_1^{-1} = -\theta_1^{-1} \circ \theta_0,$$

entonces $\delta = -\theta_0 \circ \theta_1^{-1} = \theta_1^{-1} \circ \theta_0$ y por lo tanto

$$\delta^2 = -\theta_1^{-1} \circ \theta_0 \circ \theta_0 \circ \theta_1^{-1} = -\theta_1^{-1} \circ \theta_0^2 \circ \theta_1^{-1} = 0$$

las demás afirmaciones siguen directamente del teorema 4.2.5.

□

Corolario 4.2.12 Si $\theta_1^2 = id$, entonces

$$\beta_0 = 0,\ \beta_1 = \theta_1,\ \ \beta_2 = \theta_0,\ \ \beta_i = 0,\ i \geq 3.$$

Por otro lado, cuando $\theta_1^2 = id$, las propiedades de las aplicaciones θ_0 y θ_1 permiten definir entrelazamientos de la siguiente manera:

Sea $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset 2\mathbb{N} \cup \{0\}$ y $C = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset k$, entonces definamos aplicaciones $\alpha_i : A \to A$, por:

$$\alpha_i := \begin{cases} \theta_1, & \text{si } i = 1, \\ a_i\theta_0, & \text{cuando } i \in I, \\ 0, & i \notin I \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 26 Si $i \neq 1$, entonces se cumple:

$$\alpha_i(ab) = \alpha_1(a)\alpha_i(b) + \alpha_i(a)b, \text{ para todo } a, b \in A$$

Además las aplicaciones γ_j^i asociadas a $\{\alpha_i\}_i$ satisfacen las siguientes condiciones:

- Si $i \in 2\mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces:

$$\gamma_j^i = \delta_{ij} id$$

- Si $i \notin 2\mathbb{N}$, entonces:

$$\gamma_j^i = \begin{cases} 0, & \text{si } j+1 < i, \\ \alpha_{j-i+1}, & \text{cuando } j+1 \geq i \end{cases}$$

PROPOSICIÓN 4.2.13 Las aplicaciones α_i verifican la siguiente ecuación:

$$\alpha_i(ab) = \sum_{j \geq 0} \alpha_j(a)\gamma_i^j(b), \text{ para todo } a, b \in A$$

PRUEBA. En efecto:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j\geq 0} \alpha_j(a)\gamma_i^j(b) &= \alpha_1(a)\gamma_i^1(b) + \textstyle\sum_{j\in I} \alpha_j(a)\gamma_i^j(b) \\ &= \alpha_1(a)\gamma_i^1(b) + \textstyle\sum_{j\in I} \alpha_j(a)\delta_{ij} id(b). \end{aligned}$$

Si $i = 1$, entonces: $\delta_{j1} = 0$, $\forall j \in I$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j\geq 0} \alpha_j(a)\gamma_1^j(b) &= \alpha_1(a)\gamma_1^1(b) \\ &= \alpha_1(ab). \end{aligned}$$

Si $i \neq 1$, se tiene:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j\geq 0} \alpha_j(a)\gamma_i^j(b) &= \alpha_1(a)\alpha_i(b) + \alpha_i(a)b \\ &= \alpha_i(ab). \end{aligned}$$

□

En resumen tenemos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 4.2.14 Las aplicaciones $\{\alpha_i\}_i$ definen un entrelazamiento.

Por ejemplo, si consideramos $n = 2$, $I = \{0, 2\}$ las siguientes aplicaciones definen un entrelazamiento entre A y $k[y^{\pm 1}]$:

- $\alpha_0 = \theta_0,\ \alpha_1 = \theta_1,\ \ \alpha_2 = \theta_0,$
- $\beta_0 = \theta_0,\ \beta_1 = \theta_1,\ \ \beta_2 = \theta_0.$

expresadas en terminos de matrices se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccc}
 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \\
 & . & \theta_0 & \theta_1 & \theta_0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & \\
 & . & 0 & 0 & id & 0 & 0 & . & . & . & . & . & \\
(\beta_i) & . & 0 & 0 & \theta_0 & \theta_1 & \theta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & \\
 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & id & 0 & 0 & 0 & 0 & . & \\
 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_0 & \theta_1 & \theta_0 & 0 & 0 & . & (\alpha_i) \\
 & . & . & . & . & . & 0 & 0 & id & 0 & 0 & . & \\
 & . & . & . & . & . & 0 & 0 & \theta_0 & \theta_1 & \theta_0 & . & \\
 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . &
\end{array}\right)$$

4.3. El caso $A = k[x]$ y álgebras de Hopf

En esta sección volvemos al ejemplo que motiva este capítulo, es decir, consideramos $q \in k^*$ y H el álgebra generada por y, y^{-1}, x sujeta a las siguientes relaciones:

$$yx = qxy, \quad yy^{-1} = 1 = y^{-1}y$$

en [24] y muchos otros textos se define una estructura de álgebra de Hopf sobre H, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lllllllll}
\Delta(x) & = & x \otimes y + 1 \otimes x, & \varepsilon(x) & = & 0, & S(x) & = & -xy^{-1} \\
\Delta(y) & = & y \otimes y, & \varepsilon(y) & = & 1, & S(y) & = & y^{-1}
\end{array}$$

Como vimos en la sección anterior el álgebras subyacente H es en realidad un entrelazamiento de la forma $k[x] \otimes_s k[y^{\pm 1}]$.

En esta sección $A = k[x]$ y en este caso los entrelazamientos entre $k[x]$ y $k[t]/(t^2)$ con $\gamma_0^1 \neq 0$, como vimos en el item 2) de la proposición (3.4.4), son basicamente generados por las aplicaciones θ_0, θ_1 tales que:

$$\theta_0(x) = p(x), \quad \theta_1(x) = -x$$

donde $p(x) \in k[x^2]$.

Para este tipo de entrelazamientos se tiene $\theta_1^2 = id$ y por lo tanto podemos definir entrelazamientos entre $k[x]$ y $k[y]$.

Observación 27 Si consideramos $p(x) = 1$ y los conjuntos $I \subset 2\mathbb{N} \cup \{0\}$ y $C \subset k$, entonces se tiene el entrelazamiento:

$$yx = -xy + \sum_{i \in I} a_i y^i, \quad a_i \in C$$

El cual corresponde a un entrelazamiento entre $k[y]$ y $k[x]$ si consideramos las aplicaciones:

$$\theta_0(y) = \sum_{i\in I} a_i y^i \in k[y^2] \ \text{ y } \ \theta_1(y) = -y$$

El último resultado de este trabajo, corresponde a construir dos estructuras de álgebras de Hopf sobre $k[x] \otimes_s k[y^{\pm 1}]$ para lo cual debemos considerar el entrelazamiento

$$s : k[y^{\pm 1}] \otimes k[x] \to k[x] \otimes k[y^{\pm 1}]$$

definido por las aplicaciones $\{\alpha_i\}_i$ y $\{\beta_j\}_j$ asociadas a los conjuntos $I \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $C \in k$ y las aplicaciones

$$\theta_0(x) = 1, \ \ \theta_1(x) = -x$$

Teorema 4.3.1 El algebra $k[x] \otimes_s k[y^{\pm 1}]$ tiene una estructura de álgebra de Hopf si definimos:

a) Si $I = \{m\} \subset 2\mathbb{N} \cup \{0\}$:

La comultiplicación:

$$\Delta(x) = x \otimes y^{m-1} + y^{m-1} \otimes x - \frac{1}{2} y^{m-1} \otimes y^{m-1}, \ \ \Delta(y) = y \otimes y,$$

La counidad y antípoda:

$$\varepsilon(x) = 1/2, \ \ \varepsilon(y) = 1, \ \ S(x) = y^{2-m} x y^{-m}, \ \ S(y) = y^{-1}$$

b) Si $I = \{n, m\} \subset 2\mathbb{N} \cup \{0\}, n \neq m$:

La comultiplicación:

$$\Delta(x) = x \otimes y^{m-1} + y^{n-1} \otimes x - y^{n-1} \otimes y^{m-1}, \ \ \Delta(y) = y \otimes y,$$

La counidad y antípoda:

$$\varepsilon(x) = 1, \ \ \varepsilon(y) = 1, \ \ S(x) = y^{2-n} x y^{-m}, \ \ S(y) = y^{-1}$$

Prueba. En efecto, las aplicaciones definen una estructura de álgebra de Hopf sobre $k[x] \otimes_s k[y^{\pm 1}]$, únicamente mostramos que se verifican para x, pues para y se satisfacen trivialmente.

1. *a*) $(id \otimes \Delta) \circ \Delta(x) = (\Delta \otimes id) \circ \Delta(x)$.
   En efecto: $(id \otimes \Delta) \circ \Delta(x) =$

$$
\begin{aligned}
&= (id \otimes \Delta)(x \otimes y^{m-1} + y^{m-1} \otimes x - \tfrac{1}{2} y^{m-1} \otimes y^{m-1}) \\
&= x \otimes \Delta(y^{m-1}) + y^{m-1} \otimes \Delta(x) - \tfrac{1}{2} y^{m-1} \otimes \Delta(y^{m-1}) \\
&= x \otimes \Delta(y^{m-1}) + y^{m-1} \otimes x \otimes y^{m-1} + \Delta(y^{m-1}) \otimes x \\
&\quad - y^{m-1} \otimes \Delta(y^{m-1}) \\
&= \Delta(x) \otimes y^{m-1} + \Delta(y^{m-1}) \otimes x - \tfrac{1}{2} \Delta(y^{m-1}) \otimes y^{m-1} \\
&= (\Delta \otimes id)(x \otimes y^{m-1} + y^{m-1} \otimes x - \tfrac{1}{2} y^{m-1} \otimes y^{m-1}) \\
&= (\Delta \otimes id) \circ \Delta(x)
\end{aligned}
$$

   b) $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta(x) = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta(x)$.
   En efecto: $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta(x) =$

$$
\begin{aligned}
&= (\epsilon \otimes id)(x \otimes y^{m-1} + y^{m-1} \otimes x - \tfrac{1}{2} y^{m-1} \otimes y^{m-1}) \\
&= \epsilon(x) \otimes y^{m-1} + \epsilon(y^{m-1}) \otimes x - \tfrac{1}{2} \epsilon(y^{m-1}) \otimes y^{m-1} \\
&= \tfrac{1}{2} y^{m-1} + x - \tfrac{1}{2} y^{m-1} \\
&= x \\
&= x \otimes \epsilon(y^{m-1}) + y^{m-1} \otimes \epsilon(x) - \tfrac{1}{2} y^{m-1} \otimes \epsilon(y^{m-1}) \\
&= (id \otimes \epsilon)(x \otimes y^{m-1} + y^{m-1} \otimes x - \tfrac{1}{2} y^{m-1} \otimes y^{m-1}) \\
&= (id \otimes \epsilon) \circ \Delta(x)
\end{aligned}
$$

   c) $m \circ (S \otimes id) \circ \Delta(x) = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta(x)$.
   Antes de probar esta igualdad, es conveniente recordar:

   1) $yx + xy = y^m$,
   2) $y^2 x = x y^2$,
   3) $y^{-m} xy + y^{1-m} x = 1 = y x y^{-m} + x y^{1-m}$

De esta manera, tenemos: $m \circ (S \otimes id) \circ \Delta(x) =$

$$= m \circ (S \otimes id)(x \otimes y^{m-1} + y^{m-1} \otimes x - \tfrac{1}{2} y^{m-1} \otimes y^{m-1})$$

$$= S(x)y^{m-1} + S(y^{m-1})x - \tfrac{1}{2} S(y^{m-1})y^{m-1}$$

$$= y^{2-m}xy^{-m}y^{m-1} + y^{1-m}x - \tfrac{1}{2}$$

$$= y^{2-m}xy^{-1} + y^{1-m}x - \tfrac{1}{2}$$

$$= y^{-m}y^2xy^{-1} + y^{1-m}x - \tfrac{1}{2}$$

$$= y^{-m}xy + y^{1-m}x - \tfrac{1}{2}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2} = u(\epsilon(x))$$

$$= yxy^{-m} + xy^{1-m} - \tfrac{1}{2}$$

$$= y^{m-1}y^{2-m}xy^{-m} + xy^{1-m} - \tfrac{1}{2}$$

$$= y^{m-1}S(x) + xy^{1-m} - \tfrac{1}{2}$$

$$= y^{m-1}S(x) + xS(y^{m-1}) - \tfrac{1}{2} y^{m-1}S(y^{m-1})$$

$$= m \circ (id \otimes S) \circ \Delta(x)$$

2. *a*) $(id \otimes \Delta) \circ \Delta(x) = (\Delta \otimes id) \circ \Delta(x)$.

En efecto: $(id \otimes \Delta) \circ \Delta(x) =$

$$= (id \otimes \Delta)(x \otimes y^{m-1} + y^{n-1} \otimes x - y^{n-1} \otimes y^{m-1})$$

$$= x \otimes \Delta(y^{m-1}) + y^{n-1} \otimes \Delta(x) - y^{n-1} \otimes \Delta(y^{m-1})$$

$$= x \otimes \Delta(y^{m-1}) + y^{n-1} \otimes x \otimes y^{m-1} + \Delta(y^{n-1}) \otimes x$$

$$-\Delta(y^{n-1}) \otimes y^{m-1} - y^{n-1} \otimes \Delta(y^{m-1})$$

$$= \Delta(x) \otimes y^{m-1} + \Delta(y^{n-1}) \otimes x - \Delta(y^{n-1}) \otimes y^{m-1}$$

$$= (\Delta \otimes id)(x \otimes y^{m-1} + y^{n-1} \otimes x - y^{n-1} \otimes y^{m-1})$$

$$= (\Delta \otimes id) \circ \Delta(x)$$

b) $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta(x) = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta(x)$.

En efecto: $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta(x) =$

$$= (\epsilon \otimes id)(x \otimes y^{m-1} + y^{n-1} \otimes x - y^{n-1} \otimes y^{m-1})$$

$$= \epsilon(x) \otimes y^{m-1} + \epsilon(y^{n-1}) \otimes x - \epsilon(y^{n-1}) \otimes y^{m-1}$$

$$= y^{m-1} + x - y^{m-1}$$

$$= x$$

$$= x + y^{n-1} - y^{n-1}$$

$$= x \otimes \epsilon(y^{m-1}) + y^{n-1} \otimes \epsilon(x) - y^{n-1} \otimes \epsilon(y^{m-1})$$

$$= (id \otimes \epsilon)(x \otimes y^{m-1} + y^{n-1} \otimes x - y^{n-1} \otimes y^{m-1})$$

$$= (id \otimes \epsilon) \circ \Delta(x)$$

c) $m \circ (S \otimes id) \circ \Delta(x) = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta(x)$

Antes de probar esta igualdad, es conveniente recordar:

$$yx + xy = y^n + y^m$$

De esta manera, tenemos: $m \circ (S \otimes id_A) \circ \Delta(x) =$

$$= m \circ (S \otimes id_A)(x \otimes y^{m-1} + y^{n-1} \otimes x - y^{n-1} \otimes y^{m-1})$$

$$= S(x)y^{m-1} + S(y^{n-1})x - S(y^{n-1})y^{m-1}$$

$$= y^{2-n}xy^{-m}y^{m-1} + y^{1-n}x - y^{1-n}y^{m-1}$$

$$= y^{1-n}(yxy^{-1} + x - y^{m-1})$$

$$= y^{1-n}(y^{n-1}) = 1 = u \circ \epsilon(x) = (y^{m-1})y^{1-m}$$

$$= (x + yxy^{-1} - y^{n-1})y^{1-m}$$

$$= xy^{1-m} + y^{n-1}y^{2-n}xy^{-m} - y^{n-1}y^{1-m}$$

$$= xS(y^{m-1}) + y^{n-1}S(x) - y^{n-1}S(y^{m-1})$$

$$= m \circ (id \otimes S)(x \otimes y^{m-1} + y^{n-1} \otimes x - y^{n-1} \otimes y^{m-1})$$

$$= m \circ (id \otimes S) \circ \Delta(x)$$

□

Bibliografía

[1] S. Dascalescu, C. Nastasescu, and S. Raianu. *Hopf algebras*, volume 235 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., New York, 2001.

[2] C. Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] J. Kustermans and A. van Daele. *C*-algebraic quantum groups arising from algebraic quantum groups*. Internat. J. Math., 8(8): 1067-1139, 1997.

[4] T. Timmermann, *An invitation to quantum groups and duality. From Hopf algebras to multiplicative unitaries and beyond*. European Mathematical Society, 2008.

[5] M. E. Sweedler. *Hopf algebras*. Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[6] A. Van Daele. *Multiplier Hopf algebras*. Trans. Amer.Math. Soc., 342(2):917-932, 1994.

[7] A. Van Daele. *An algebraic framework for group duality*, Adv. Math. 140(2), 323-366, 1998.

[8] A. Van Daele. *The Haar Measure on Finite Quantum Groups*, Proc. Amer. Math. Soc., 125(12):3489-3500, 1997.

[9] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly, and H. Figueroa. *Elements of noncommutative geometry*. Birkhauser Advanced Texts: Basler Lehrbucher. Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 2001.

[10] L. Pontrjagin. *Topological Groups*. Princeton Mathematical Series, v. 2. Princeton University Press, Princeton, 1939. Translated from the Russian by Emma Lehmer.

[11] A. Van Daele and S. Van Keer. *The Yang-Baxter and Pentagon equation*. Compositio Math., 91:201-221, 1994.

[12] S. Majid. *Foundations of quantum group theory.* Cambridge Univ. Press, 1995.

[13] A. Cap, H. Schichl, and J. Vanzura. *On twisted tensor products of algebras.* Comm. Algebra, 23:4701-4735, 1995.

[14] A. Borowiec and W. Marcinek. *On crossed product of algebras.* J. Math. Phys., 41:6959-6975, 2000.

[15] J. A. Guccione, J. J. Guccione and C. Valqui, *Twisted planes*, Commun. Algebra, Vol 38 (5) (2010) 1930-1956.

[16] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol 82 AMS Providence Rhode Island (1993).

[17] T. Brzezinski and S. Majid. *Quantum geometry of algebra factorisations and coalgebra bundles.* Commun. Math. Phy, 213:491- 521, 2000.

[18] C. Valqui. *Notas de clase.* 2010.

[19] C. Valqui. *Planos torcidos.* 2010.

[20] J. A. Guccione, J. J. Guccione and C. Valqui, *Non commutative polynomial truncated extensions*, arXiv:1008.4076v2.

[21] J. López Pena, *Factorization estructures. An cartesian products for noncommutative geometry*, PhD Thesis, 2007

[22] D. Tambara. *The coendomorphism bialgebra of an algebra.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., 37:425-456, 1990.

[23] T. Brocker and T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups.* Grad. Texts in Math. 98, Springer-Verlag, NewYork 1995.

[24] S. Withersponn, *Skew derivations and deformations of a family of group crossed products.* Communications in algebra, vol 34 : 4187-4206, 2006.

[25] C. Cibils, *Non-commutive duplicates of finite sets*, Journal of Algebra Appl., Vol 5(3)(2006) 361-377.

[26] P. Jara, J. López Peña, G. Navarro and D. Stefan, *On the classification of twisting maps between k^n and k^m*, Journal of Algebra and Representation Theory, 2010.

[27] Connes, Alain; Kreimer, Dirk,*Hopf Algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry*, Communications in Mathematical Physics 199: 203-242. 1998.

Los reportes de investigación son una publicación del Departamento de Ciencias, de la Pontificia Universidad Católica del Perú, cuya finalidad es presentar a la comunidad científica los resultados de los últimos trabajos realizados por los profesores de la Sección Matemáticas y sus estudiantes. Las series de esta colección reúnen tesis de maestría o doctorado, artículos que contienen los resultados de investigaciones recientes, conferencias magistrales o seminarios.

Serie A : Matemáticas Puras
Serie B : Matemáticas Aplicadas
Serie C : Probabilidad y Estadística
Serie D : Didáctica de las Matemáticas