



Facultad de Ciencias  
Departamento de Matemáticas

Tesis Doctoral en Matemáticas

# Diseño óptimo aerodinámico a través del método adjunto continuo

por

**Francisco de Asís Palacios Gutiérrez**

Tutor: Prof. Enrique Zuazua Iriondo

Madrid, 6 de mayo de 2008



*Dedicado a mi esposa Tatiana, por todo el tiempo que esta tesis me ha robado y que sin duda le correspondía a Ella.*



---

# Índice general

---

<b>Índice general</b>	<b>I</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Optimización de sistemas gobernados por la ecuación de Burgers . . . . .	6
1.1.1. Sensibilidad en presencia de choques . . . . .	9
1.1.2. Método de las direcciones de descenso alternantes . . . . .	11
1.2. Avances en la metodología de optimización aerodinámica . . . . .	13
1.2.1. Sistemas gobernados por las ecuaciones de Euler . . . . .	14
1.2.2. Sistemas gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	17
<b>2 Panorámica del diseño óptimo aerodinámico</b>	<b>21</b>
2.1. Consideraciones históricas . . . . .	21
2.1.1. El comienzo: los hermanos Wright . . . . .	21
2.1.2. La aeronáutica de finales del siglo XX . . . . .	22
2.1.3. Los retos actuales de la aeronáutica . . . . .	23
2.2. Cálculo aerodinámico: modelización, resolución numérica y análisis . . . . .	24
2.2.1. Evolución de la Dinámica de Fluidos Computacional . . . . .	25
2.2.2. Ecuaciones que modelizan los problemas aeronáuticos . . . . .	27
2.2.3. Discretización del dominio físico en problemas aeronáuticos . . . . .	29
2.2.4. Esquemas numéricos empleados en el ámbito aeronáutico . . . . .	30
2.3. Diseño óptimo en aeronáutica . . . . .	31
2.3.1. Técnicas de optimización en aerodinámica . . . . .	32
2.3.2. Variables de diseño aeronáuticas . . . . .	33
2.3.3. Diseño óptimo basado en el cálculo de gradientes . . . . .	33
2.4. Método de los conjuntos de nivel . . . . .	38
2.4.1. Aplicación al diseño óptimo aerodinámico . . . . .	39
2.4.2. Modularización del algoritmo . . . . .	40
<b>3 Control óptimo de la ecuación de Burgers</b>	<b>43</b>
3.1. Introducción . . . . .	43
3.2. Existencia de minimizadores . . . . .	47
3.3. El problema de minimización discreto . . . . .	49
3.4. Análisis de la sensibilidad: el enfoque continuo . . . . .	51
3.4.1. Sensibilidad sin choques . . . . .	52

3.4.2.	Sensibilidad del estado en presencia de choques . . . . .	54
3.4.3.	Sensibilidad del funcional $J$ en presencia de choques . . . . .	56
3.5.	Método de las direcciones de descenso alternantes . . . . .	62
3.6.	Aproximaciones numéricas de las direcciones de descenso . . . . .	65
3.6.1.	El enfoque discreto: esquemas numéricos diferenciables . . . . .	66
3.6.2.	El enfoque discreto: esquemas numéricos no diferenciables . . . . .	68
3.6.3.	Enfoque continuo: condiciones internas de contorno en el choque . . . . .	70
3.7.	Experimentos numéricos . . . . .	72
3.8.	Algoritmos numéricos . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Análisis de la sensibilidad de las ecuaciones de Euler estacionarias</b>	<b>87</b>
4.1.	Introducción . . . . .	87
4.2.	Ecuaciones de Euler en forma conservativa . . . . .	90
4.2.1.	Relaciones de Rankine-Hugoniot . . . . .	91
4.2.2.	Análisis de las condiciones de contorno numéricas . . . . .	92
4.3.	Ecuaciones linealizadas de Euler en régimen estacionario . . . . .	96
4.3.1.	Relaciones linealizadas de Rankine-Hugoniot . . . . .	98
4.3.2.	Condiciones de contorno externas . . . . .	98
4.4.	Análisis de la sensibilidad de un funcional: el enfoque continuo . . . . .	101
4.4.1.	Condiciones de contorno internas . . . . .	105
4.4.2.	Condiciones de contorno externas . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Análisis de la sensibilidad de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias</b>	<b>109</b>
5.1.	Ecuaciones de Navier-Stokes en forma conservativa . . . . .	109
5.2.	Ecuaciones linealizadas de Navier-Stokes en régimen estacionario . . . . .	111
5.3.	Análisis de la sensibilidad: el enfoque continuo . . . . .	113
5.3.1.	Formulación con pared adiabática (condiciones de contorno) . . . . .	115
5.3.2.	Reducción de las derivadas de alto orden . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Resolución numérica de las ecuaciones adjuntas 2D de Euler y Navier-Stokes</b>	<b>119</b>
6.1.	Discretización del dominio físico . . . . .	119
6.2.	Discretización espacial de las ecuaciones adjuntas de Euler . . . . .	120
6.2.1.	Esquema centrado tipo Lax-Friedrichs . . . . .	121
6.2.2.	Esquema centrado con disipación artificial de alto orden . . . . .	122
6.2.3.	Esquema de tipo upwind . . . . .	122
6.2.4.	Condiciones de contorno numéricas . . . . .	124
6.3.	Discretización espacial de los términos viscosos . . . . .	127
6.3.1.	Condiciones de contorno . . . . .	128
6.4.	Discretización temporal . . . . .	129
6.5.	Inestabilidades en el proceso de optimización . . . . .	130
6.5.1.	Gradiente de Sobolev modificado . . . . .	130
6.5.2.	Filtrado bimalla de la sensibilidad del funcional . . . . .	131
<b>7</b>	<b>Experimentos numéricos empleando las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes</b>	<b>135</b>
7.1.	Aplicación al diseño de forma aerodinámica . . . . .	135
7.1.1.	Modelización mediante las ecuaciones de Euler . . . . .	135
7.1.2.	Modelización mediante las ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	136
7.1.3.	Variables de diseño aeronáuticas . . . . .	137

7.2. Validación de los esquemas numéricos desarrollados . . . . .	138
7.2.1. Ecuaciones de Euler (solución regular) . . . . .	139
7.2.2. Ecuaciones de Euler (solución no regular, sin RH adjunto) . . . . .	143
7.2.3. Ecuaciones de Euler (solución no regular, con RH adjunto) . . . . .	148
7.2.4. Ecuaciones de Navier-Stokes en régimen laminar . . . . .	152
7.2.5. Método de conjuntos de nivel . . . . .	157
7.3. Validación del proceso de optimización aerodinámica . . . . .	162
7.3.1. Rediseño transónico de un perfil aerodinámico . . . . .	162
7.3.2. Método adjunto vs. diferencias finitas . . . . .	163
7.3.3. Optimización con discontinuidades . . . . .	164
7.3.4. Rediseño subsónico de un perfil aerodinámico . . . . .	166
7.3.5. Diseño empleando el método de los conjuntos de nivel . . . . .	166
7.4. Validación de la estrategia bimalla de filtrado . . . . .	170
7.4.1. Inestabilidades en el proceso de diseño óptimo de forma . . . . .	170
7.4.2. Optimización de forma aerodinámica mediante filtrado . . . . .	171
<b>8 Conclusiones</b>	<b>175</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>179</b>
<b>A Desarrollo de flujos adjuntos</b>	<b>187</b>
A.1. Flujos convectivos . . . . .	187
A.2. Flujos viscosos . . . . .	188
<b>B Derivada de forma</b>	<b>191</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>193</b>



---

# Agradecimientos

---

Mi primer agradecimiento es para mi mujer Tatiana que representa lo mejor de mí, sin su amor la elaboración de esta tesis carecería de valor. Ella ha sabido comprender la importancia que constituía para mí este trabajo y con infinita paciencia ha estado siempre a mi lado. También quiero agradecer a mi padre Pedro, que me enseñó las matemáticas y siempre ha estado junto a mí, aconsejándome con toda su experiencia cuando más lo he necesitado. A mi madre Mercedes, por su amor y comprensión inagotable. A mi hermano Tomás a quien, a pesar de estar lejos, lo siento siempre muy cerca. A mis abuelos: Tomás, Paco, Estrella y Matilde. A mis tíos, tías, primas, madrinas, suegros, cuñada, a mi ahijado Juan Francisco y a mi prima Paula. Todo lo que pudiera decir de mi Familia no sería suficiente.

Quiero también agradecer a Enrique, mi director de Tesis, y digo bien "Enrique" y no Prof. Zuazua porque a lo largo de estos años lo profesional ha pasado a ser amistad y una profunda admiración. Lo considero un magnífico Director, el matemático español más destacado y sin duda un referente internacional en su especialidad, para mi su tutela y amistad ha sido el mayor de los honores.

Esta ha sido una tesis atípica pues la investigación la he compatibilizado con mi actividad profesional que me ha permitido entablar contacto, a través de proyectos, con una infinidad de investigadores e instituciones. En estos años hemos organizado muchos proyectos: DOMINO, SIMUMAT, AeroFAST, DOVRES, MTM2005-00714, FuSimE, IMDEA Matemáticas, AeroMATH Laboratory... Tengo un especial agradecimiento para el Prof. Carlos Castro, Carlos Artilles, Fernando Monge, Antonio González García-Conde, Carlos Lozano y el Prof. Antonio Crespo. Pero hay muchos otros que han contribuido en IMDEA Matemáticas y la en UAM a que yo haya encontrado un clima adecuado de trabajo: Toni, Miguel Ángel, José María, Marta, Fátima, María, Blanca, Rafa y muchos otros.

Quiero agradecer el apoyo que siempre he tenido desde AIRBUS España y de mis colegas del Centro Aeroespacial Alemán (DLR), el Prof. Norbert Kroll, el Ing. Markus Widhalm y el Prof. Nicolas Gauger, y tantos otros compañeros de profesión de todo el mundo, que me han ayudado, apoyado y animado en mis proyectos.

Por último, deseo destacar que esta tesis ha sido posible gracias cinco instituciones que han participado en mi formación: el Instituto Madrileño de Estudios Avanzados en Matemáticas (IMDEA Matemáticas), la Universidad Autónoma de Madrid (UAM), el Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial (INTA), la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) y el ICAI de la Universidad Pontificia de Comillas (UPCo).



---

## Resumen

---

El diseño óptimo de forma es fundamental en múltiples disciplinas de la ciencia, en particular, el diseño aerodinámico [111, 72, 50, 20] es una de las disciplinas de la aeronáutica de mayor tradición y que en la actualidad, gracias al avance de la computación y los métodos numéricos, está adquiriendo más relevancia en el sector industrial y en los centros de investigación. Este interés ha venido precedido por la exactitud de cálculo que empieza a lograrse mediante el empleo de técnicas de análisis computacional [75, 52, 58] para estudiar el comportamiento de los fluidos en configuraciones de interés industrial.

Una vez que el análisis de las configuraciones aerodinámicas se puede realizar en un tiempo reducido y con un error controlado [30, 28], es posible plantear el problema de diseño óptimo sobre los complejos sistemas de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) que modelizan el comportamiento de los fluidos.

El objetivo del diseño óptimo aerodinámico es minimizar un determinado funcional a través de controlar el sistema de EDPs que modeliza el fluido sobre la aeronave. El control se ejerce sobre la forma de la superficie a diseño con el objeto de mejorar las prestaciones de la aeronave en régimen estacionario.

Existe una importante tradición en la aplicación de la teoría de control al diseño óptimo de sistemas gobernados por EDPs, desde los trabajos iniciales de J.-L. Lions [77], pasando por los primeros desarrollos en el ámbito de la mecánica de los fluidos de O. Pironneau [93, 94] y terminando en A. Jameson quien, junto con sus colaboradores, en una serie de artículos, trató la aplicación de estas técnicas a las ecuaciones de Euler [54, 65, 62] y ecuaciones de Navier-Stokes [86, 85]. Mención aparte merecen los trabajos de M. Giles [42] y S. Ulbrich [108] en el ámbito de la optimización con discontinuidades en las variables de flujo.

A lo largo de esta memoria se plantean y resuelven cuestiones relevantes en los problemas de diseño óptimo a través del estado adjunto en sistemas gobernados por las ecuación de Burgers, las ecuaciones de Euler o las ecuaciones de Navier-Stokes. Esta tesis doctoral está estructurada de la siguiente manera: En primer lugar, en el Capítulo 1 se describirán brevemente los aspectos más relevantes de los problemas estudiados, los resultados obtenidos y los métodos que se han desarrollado durante esta tesis. A continuación, en el Capítulo 2 se expone una panorámica general de los métodos de diseño óptimo en aerodinámica. En el Capítulo 3, se abordará un análisis riguroso del problema de control óptimo para la ecuación de Burgers. Además se introduce el novedoso método de las direcciones de descenso alternantes para el diseño óptimo en sistemas gobernados por las ecuaciones de Burgers. En el Capítulo 4 se aborda el problema del

diseño óptimo en sistemas gobernados por las ecuaciones de Euler y en el Capítulo 5 se hace lo propio con las ecuaciones de Navier-Stokes. El Capítulo 6 está destinado a mostrar los detalles de la implementación numérica de la resolución de las ecuaciones adjuntas de Euler y Navier-Stokes. Por último, en el Capítulo 7 se presentan los resultados numéricos más relevantes en el ámbito aeronáutico. Y la tesis terminará con una serie de conclusiones que recogemos en el Capítulo 8.

Esta tesis de Matemática Aplicada parte de un estudio del control óptimo de sistemas gobernados por la ecuación de Burgers (donde se desarrolla el método de las direcciones de descenso alternantes) y es posible un estudio más riguroso, para terminar haciendo aportaciones (metodológicas y computacionales) en sistemas modelizados por las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes en aplicaciones de interés aeronáutico. Las aportaciones más relevantes que contiene esta Tesis pueden sintetizarse en los siguientes tres avances con respecto del estado del arte:

- Avance 1. En el Capítulo 3 se ha desarrollado el método de las direcciones de descenso alternantes que consisten en una nueva estrategia de optimización, en dos fases, para el cálculo de aproximaciones numéricas de minimizadores en sistemas gobernados por las ecuaciones de Burgers. En particular este método está adaptado a la presencia de discontinuidades en la soluciones.
- Avance 2. En el Capítulo 4 se ha desarrollado el método adjunto continuo en sistemas gobernados por las ecuaciones de Euler (soluciones regulares y no regulares). En esta memoria se presenta la formulación completa de las relaciones adjuntas de Rankine-Hugoniot, una útil versión simplificada y la aplicación de la estrategia de filtrado bimalla para evitar las inestabilidades que se producen en el proceso de diseño.
- Avance 3. En el ámbito de Navier-Stokes, en el Capítulo 5 se han desarrollado unas expresiones matemáticas que permiten la evaluación de los gradientes de un funcional de interés aeronáutico sin necesidad del empleo de esquemas de alto orden [4]. A su vez, en el Capítulo 7 se presenta una aplicación de la optimización de sistemas gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes empleando la técnica de los conjuntos de nivel o *level set*.

Más que escasez de medios, lo que hay es miseria de voluntad. El entusiasmo y la perseverancia hacen milagros. Desde el punto de vista del éxito, lo costoso, lo que pide tiempo, brío y paciencia, no son los instrumentos sino desarrollar y madurar una aptitud.

(S. RAMÓN Y CAJAL)

El éxito no se consigue con comenzar la empresa más o menos arriesgada, es preciso sostenerla y perseverar hasta el final.

(J. A. PÉREZ DEL PULGAR S.J.)

## Capítulo 1

---

# Introducción

---

El objeto de este trabajo es el desarrollo de la metodología adjunta continua aplicada al diseño óptimo de forma en diferentes sistemas físicos modelizados por la ecuación de Burgers o bien las ecuaciones de Euler o Navier-Stokes. A lo largo de esta memoria, se han desarrollado nuevos métodos matemáticos de optimización como el método de las direcciones alternantes desarrollado en el Capítulo 3 y se han aplicado, por primera vez en el ámbito de la Mecánica de los Fluidos Computacional (MFC), nuevas técnicas basadas en el empleo del estado adjunto para el cálculo de los gradientes de un funcional que se pretenden minimizar (ver Capítulos 4 y 5).

En definitiva, los trabajos presentados en esta memoria evolucionan desde sistemas físicos gobernados por la ecuación de Burgers, pasando por las ecuaciones de Euler y terminando en las ecuaciones de Navier-Stokes. En cada uno de estos sistemas se han realizado aportaciones con respecto del estado del arte en ingeniería y matemáticas, destacando las siguientes:

- Desarrollo del método de las direcciones de descenso alternantes en sistemas gobernados por la ecuación de Burgers. Este método se encuentra especialmente adaptado para la optimización de sistemas con discontinuidades en sus variables de estado (ver Sección 3.5).
- Desarrollo de una formulación basada en la superficie, para el cálculo de la sensibilidad de un funcional frente a deformaciones infinitesimales de la superficie que se pretende diseñar en sistemas gobernados por las ecuaciones de Euler (Sección 4.4) y Navier-Stokes (Sección 5.3) y el desarrollo de los esquemas numéricos apropiados para la resolución eficiente de estos problemas (Capítulo 6).
- Aplicación de la técnica de conjuntos de nivel, o *level set*, al diseño óptimo empleando las ecuaciones de Navier-Stokes (Sección 2.4) y desarrollo de una formulación que permite la evaluación de la sensibilidad de estos sistemas sin recurrir a métodos de alto orden para la resolución del problema directo (Sección 5.3.2).

Los problemas de optimización de forma se plantean en el marco de la resolución discreta de una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP), por ello, el modo más natural

de obtener los gradientes de la función objetivo (que se pretende optimizar) respecto de una serie de variables de diseño, sería a través del llamado adjunto discreto que está basado en calcular el estado adjunto sobre las ecuaciones que modelizan el fluido previamente discretizadas. Sin embargo, para el uso de esta metodología es necesario realizar ciertas suposiciones sobre la diferenciabilidad de los esquemas de discretización espacial que generalmente no se verifican<sup>1</sup>.

La metodología adjunta continua plantea el problema del cálculo de sensibilidades de un funcional a partir del estado adjunto de las ecuaciones linealizadas que gobiernan el fluido previamente linealizadas. Ahora bien, al trabajar con modelos continuos es necesario abordar, entre otros, el hecho de que la linealización formal de la ecuación de los fluidos falla a lo largo del choque y la sensibilidad del modelo necesita ser analizada con respecto a perturbaciones de la solución y a la posición de la discontinuidad.

A continuación, en este capítulo introductorio de esta memoria, se describirán brevemente los aspectos más relevantes de los problemas estudiados, los resultados obtenidos y los métodos que hemos desarrollado.

### 1.1. Optimización de sistemas gobernados por la ecuación de Burgers

Los métodos de descenso para la optimización de un funcional en sistemas gobernados por EDPs con frecuencia producen sucesiones de minimizadores altamente oscilantes cuya convergencia es muy lenta. En esta memoria se introduce una nueva estrategia de optimización a la que denominaremos *método de las direcciones de descenso alternantes*, que está adaptada a la presencia de discontinuidades en la solución, y que exhibe buenas propiedades de descenso. En primer lugar, consideramos el ecuación no viscosa de Burgers:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0, T), \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Dada una función objetivo  $u^d \in L^2(\mathbb{R})$ , que asumimos tiene un soporte compacto, consideramos la función de coste a ser minimizada  $J : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$J(u^0) = \int_{\mathbb{R}} |u(x, T) - u^d(x)|^2 dx, \quad (1.2)$$

donde  $u(x, t)$  es la solución que verifica la condición de Oleinik (o de entropía generalizada) de (1.1). También introducimos un conjunto de valores iniciales admisibles  $\mathcal{U}_{ad} \subset L^1(\mathbb{R})$ , que definiremos más adelante con objeto de garantizar la existencia del mínimo para el siguiente problema de optimización. Encontrar  $u^{0, \min} \in \mathcal{U}_{ad}$  tal que

$$J(u^{0, \min}) = \min_{u^0 \in \mathcal{U}_{ad}} J(u^0). \quad (1.3)$$

La existencia de minimizadores se puede establecer fácilmente bajo ciertas condiciones en  $\mathcal{U}_{ad}$ . Sin embargo, la unicidad es falsa en general, debido a la posible presencia de discontinuidades en la solución de (1.1) y la falta de convexidad del funcional.

---

<sup>1</sup>Los métodos relevantes para la resolución de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes son en general no diferenciables [63, 97]

En aplicaciones prácticas, a través de la simulación numérica, es necesario reemplazar el problema de optimización continuo por su aproximación discreta. Si esto se hace de manera adecuada, cabe esperar que los minimizadores del problema aproximado discreto proporcionen una aproximación del mínimo continuo en mallas lo suficientemente finas.

En adelante denotaremos mediante  $u^{\Delta x}$  la aproximación de  $u$  obtenida por una discretización admisible del sistema (1.1) con un tamaño de malla  $\Delta x$  y  $\Delta t$  para la discretización en tiempo. También denotaremos por  $J^\Delta$  una discretización de  $J$  y por  $\mathcal{U}_{ad,\Delta}$  una versión discreta del conjunto de estados admisibles  $\mathcal{U}_{ad}$ . Finalmente, consideramos la discretización aproximada del problema de minimización

$$J^\Delta(u_\Delta^{0,\min}) = \min_{u_\Delta^0 \in \mathcal{U}_{ad,\Delta}} J^\Delta(u_\Delta^0). \quad (1.4)$$

En los métodos de descenso iterativos, en cada iteración la dirección de descenso se calcula mediante el gradiente del funcional con respecto del control, en este caso el dato inicial. Entonces la sensibilidad del funcional coste discreto  $J^\Delta$  con respecto a  $u_\Delta^0$  depende de la sensibilidad o gradiente de la solución del esquema numérico usado para discretizar (1.1), con respecto a  $u_\Delta^0$ .

Cuando consideramos un esquema numérico diferenciable el estado adjunto proporciona un atajo a la hora de calcular las derivadas con respecto de todos los parámetros de control (puntos de la malla en este caso). Pero en muchos casos los métodos numéricos más eficientes no son diferenciables. En este caso, el gradiente del funcional no está bien definido y no hay un modo natural y sistemático de calcular esas variaciones.

Para resolver esta dificultad, aplicamos el llamado enfoque continuo que consiste en proceder en los siguientes pasos: primero volver al sistema continuo (1.1), linealizarlo y obtener una dirección de descenso del funcional continuo  $J$  y entonces desarrollar una aproximación numérica de la dirección de descenso con los valores discretos proporcionados por el esquema numérico. Por supuesto la validez de esta aproximación para la dirección de descenso del problema discreto no está asegurada.

Pero el enfoque continuo presenta un gran inconveniente cuando la solución desarrolla discontinuidades de choque, como en el contexto de las leyes de conservación hiperbólicas. Es más, la diferenciación formal sólo está justificada cuando el estado  $u$  sobre el que son calculadas las variaciones es lo suficientemente suave. En particular, esto no está justificado cuando las soluciones son discontinuas debido a los términos singulares que aparecen en la linealización sobre la posición del choque. Por lo tanto, en las aplicaciones al control óptimo también debe tenerse en cuenta la sensibilidad para la localización del choque. Esto ha sido estudiado por diferentes autores con diferentes acercamientos [108, 45, 15]. La conclusión es que el sistema linealizado clásico para la variación de la solución debe ser complementado por nuevas ecuaciones para el desplazamiento de la posición del choque. En este caso la localización del choque en soluciones fluidas constituye una intensa área de investigación por parte de diversos autores y mediante diversas aproximaciones [38, 106].

Estos temas han sido objeto de una investigación intensiva. Sin embargo, no hay todavía una receta sistemática sobre el mejor método posible y los diferentes métodos empleados llevan a desiguales conclusiones dependiendo del problema en consideración. Esto es debido al hecho de que dos aspectos relacionados pero diferentes se han tratado de manera simultánea sin distinguir lo suficiente el uno del otro:

1. La falta de regularidad de las soluciones de las ecuaciones del estado continuo hacen difícil la justificación de la linealización y añade algunos términos no esperados a la derivada clásica del funcional para tener en cuenta en la posible contribución del salto de la discontinuidad.
2. Los esquemas numéricos son no diferenciables.

En esta memoria se ha construido un algoritmo eficiente que tiene en cuenta y saca partido de la posible presencia de una discontinuidad en la solución. Se propone un nuevo *método de las direcciones de descenso alternantes* [21] que en el proceso iterativo alterne las direcciones de descenso entre aquellas que varían la posición del choque y aquellas que no lo muevan y sólo afecten a la forma de la discontinuidad lejos del choque, de tal modo que el número de choques no se incremente, manteniendo limitada la complejidad global de las soluciones.

En este capítulo se asumirá que  $u(x, t)$  es una solución débil entrópica de (1.1) con una discontinuidad a lo largo de la curva regular  $\Sigma = \{(t, \varphi(t)), t \in [0, T]\}$ , la cual es Lipschitz continua fuera de  $\Sigma$ . En particular, satisface las relaciones de Rankine-Hugoniot en  $\Sigma$ :

$$\varphi'(t)[u]_{\varphi(t)} = \left[ \frac{u^2}{2} \right]_{\varphi(t)}. \quad (1.5)$$

Aquí hemos empleado la notación:  $[v]_{x_0} = v(x_0^+) - v(x_0^-)$  para el salto en  $x_0$  de una función continua a trozos  $v$  con una discontinuidad en  $x = x_0$ . Nótese que  $\Sigma$  divide  $\mathbb{R} \times (0, T)$  en dos partes:  $Q^-$  y  $Q^+$  los subdominios de  $\mathbb{R} \times (0, T)$  a la izquierda y a la derecha de  $\Sigma$ .

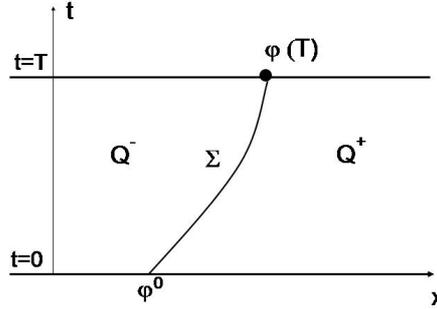


Figura 1.1: Subdominios  $Q^-$  y  $Q^+$  y discontinuidad  $\Sigma$ .

En presencia de choques, para tratar correctamente los problemas de control óptimo y diseño, el estado del sistema tiene que ser estudiado como un par  $(u, \varphi)$  combinando la solución de (1.1) y la posición del choque  $\varphi$ . Esto es relevante en el análisis de la sensibilidad de las funciones y cuando se aplica un algoritmo de descenso.

Consideramos por tanto que el par  $(u, \varphi)$  satisface el sistema

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, & \text{en } Q^- \cup Q^+, \\ \varphi'(t)[u]_{\varphi(t)} = \left[ \frac{u^2}{2} \right]_{\varphi(t)}, & t \in (0, T), \\ \varphi(0) = \varphi^0, \\ u(x, 0) = u^0(x), & \text{en } \{x < \varphi^0\} \cup \{x > \varphi^0\}. \end{cases} \quad (1.6)$$

En esta memoria se analizará la sensibilidad de  $(u, \varphi)$  con respecto de perturbaciones del dato inicial, en particular, con respecto a variaciones  $\delta u^0$  del perfil inicial  $u^0$  y  $\delta \varphi^0$  de la posición del choque  $\varphi^0$ . Se adoptará un marco funcional apropiado basado en la generalización de los vectores tangentes introducidos en [8].

**Definición 1.** Sea  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función Lipschitz continua a trozos con una única discontinuidad en  $y \in \mathbb{R}$ . Sea  $\Sigma_v$  la familia de todas las trayectorias continuas  $\gamma : [0, \varepsilon_0] \rightarrow L^1(\mathbb{R})$  con

1.  $\gamma(0) = v y \varepsilon_0 > 0$  posiblemente dependiente de  $\gamma$ .
2. Para cualquier  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  la función  $u^\varepsilon = \gamma(\varepsilon)$  es una función Lipschitz continua a trozos con una única discontinuidad en  $x = y^\varepsilon$  dependiendo de manera continua de  $\varepsilon$  y existe una constante  $L$  independiente de  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  tal que

$$|v^\varepsilon(x) - v^\varepsilon(x')| \leq L|x - x'|,$$

siempre que  $y^\varepsilon \notin [x, x']$ .

Definimos el conjunto  $T_v$  de vectores tangentes generalizados de  $v$  como el espacio de  $(\delta v, \delta y) \in L^1 \times \mathbb{R}$  para el cual la trayectoria  $\gamma_{(\delta v, \delta y)}$  dada por

$$\gamma_{(\delta v, \delta y)}(\varepsilon) = \begin{cases} v + \varepsilon \delta v + [v]_y \chi_{[y+\varepsilon \delta y, y]} & \text{si } \delta y < 0, \\ v + \varepsilon \delta v - [v]_y \chi_{[y, y+\varepsilon \delta y]} & \text{si } \delta y > 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

satisface  $\gamma_{(\delta v, \delta y)} \in \Sigma_v$ .

Finalmente, consideremos la relación de equivalencia  $\sim$  definida sobre  $\Sigma_v$  por

$$\gamma \sim \gamma' \text{ si y solo si } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\gamma(\varepsilon) - \gamma'(\varepsilon)\|_{L^1}}{\varepsilon} = 0.$$

Decimos que una trayectoria  $\gamma \in \Sigma_v$  genera el vector tangente generalizado  $(\delta v, \delta y) \in T_v$  si  $\gamma$  es equivalente a  $\gamma_{(\delta v, \delta y)}$ , como en (1.7).

Sea  $u^0(x)$  el dato inicial en (1.6) que suponemos Lipschitz continua a ambos lados de una discontinuidad situada en  $x = \varphi^0$ , y sea un vector tangente generalizado  $(\delta u^0, \delta \varphi^0) \in L^1 \times \mathbb{R}$  para todo  $0 \leq T$ . Sea  $u^{0, \varepsilon} \in \Sigma_{u^0}$  una trayectoria que genere  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$ . Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño la solución  $u^\varepsilon(\cdot, t)$  de (3.31) es Lipschitz continua con una única discontinuidad en  $x = \varphi^\varepsilon(t)$ , para todo  $t \in [0, T]$ . Por lo tanto  $u^\varepsilon(\cdot, t)$  genera un vector tangente generalizado  $(\delta u(\cdot, t), \delta \varphi(t)) \in L^1 \times \mathbb{R}$ . Es más, en [8] se prueba que satisface el siguiente sistema linealizado:

$$\begin{cases} \partial_t \delta u + \partial_x (u \delta u) = 0, & \text{en } Q^- \cup Q^+, \\ \delta \varphi'(t) [u]_{\varphi(t)} + \delta \varphi(t) \left( \varphi'(t) [u_x]_{\varphi(t)} - [u_x u]_{\varphi(t)} \right) \\ \quad + \varphi'(t) [\delta u]_{\varphi(t)} - [u \delta u]_{\varphi(t)} = 0, & \text{en } (0, T), \\ \delta u(x, 0) = \delta u^0, & \text{en } \{x < \varphi^0\} \cup \{x > \varphi^0\}, \\ \delta \varphi(0) = \delta \varphi^0, \end{cases} \quad (1.8)$$

con el dato inicial  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$ .

### 1.1.1. Sensibilidad en presencia de choques

Para estudiar la sensibilidad del funcional  $J$  con respecto de variaciones asociadas con el vector tangente generalizado, en primer lugar se introduce la generalización de la derivada Gateaux que tiene en cuenta estas variaciones.

**Definición 2.** (Ref. [16]) Sea  $J : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional dado y  $u^0 \in L^1(\mathbb{R})$ , Lipschitz continua a trozos con una discontinuidad en  $x = \varphi^0$ . Decimos que  $J$  es diferenciable Gateaux en  $u^0$  en un sentido generalizado si para cualquier vector tangente generalizado  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  y cualquier familia  $u^{0,\epsilon} \in \Sigma_{u^0}$  asociada a  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  existe el siguiente límite

$$\delta J = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u^{0,\epsilon}) - J(u^0)}{\epsilon},$$

y sólo depende de  $(u^0, \varphi^0)$  y  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$ , esto es no depende de la familia particular  $u^{0,\epsilon}$  la cual genera  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$ . El límite  $\delta J$  es la derivada Gateaux generalizada de  $J$  en la dirección  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$ .

El siguiente resultado proporciona un modo sencillo de caracterizar la derivada Gateaux generalizada de  $J$  en términos de la solución del problema adjunto asociado.

**Proposición 3.** La derivada Gateaux de  $J$  se puede escribir como

$$\delta J = \int_{\{x < \varphi^0\} \cup \{x > \varphi^0\}} p(x, 0) \delta u^0(x) dx + q(0)[u]_{\varphi^0} \delta \varphi^0, \quad (1.9)$$

donde el par del estado adjunto  $(p, q)$  satisface el sistema

$$\begin{cases} -\partial_t p - u \partial_x p = 0, & \text{in } Q^- \cup Q^+, \\ [p]_{\Sigma} = 0, \\ q(t) = p(\varphi(t), t), & \text{in } t \in (0, T) \\ q'(t) = 0, & \text{in } t \in (0, T) \\ p(x, T) = u(x, T) - u^d, & \text{in } \{x < \varphi(T)\} \cup \{x > \varphi(T)\} \\ q(T) = \frac{\frac{1}{2}[(u(x, T) - u^d)^2]_{\varphi(T)}}{[u]_{\varphi(T)}}. \end{cases} \quad (1.10)$$

La fórmula (1.9) es una generalización del gradiente clásico del funcional en torno a una solución regular en el cual el último término (que refleja el salto) no aparece. Además (1.9) proporciona un modo obvio para calcular una dirección de descenso de  $J$  en  $u^0$ . Sólo debemos tomar

$$(\delta u^0, \delta \varphi^0) = (-p(x, 0), -q(0)[u]_{\varphi^0}). \quad (1.11)$$

Aquí, el valor de  $\delta \varphi^0$  debe ser interpretado como la variación óptima del desplazamiento óptimo diferencial para la discontinuidad de  $u^0$ .

Sin embargo, es importante subrayar que  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  no es un vector tangente generalizado en  $T_{u^0}$  debido a que  $p(x, 0)$  no es continua para todo  $x \neq \varphi^0$ . En efecto,  $p(x, t)$  toma el valor constante  $q(T)$  en la región completa triangular ocupada por las características de (1.1) las cuales se encuentran con el choque  $\Sigma$ . Por lo tanto,  $p$  tendrá en general dos discontinuidades a lo largo del contorno de esta región (ver Figuras 1.2).

Esto es un importante inconveniente en el desarrollo de un algoritmo de descenso para  $J$ . Si  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  es una dirección de descenso perteneciente a  $T_{u^0}$ , el nuevo dato  $u^{0,new}$  debe ser obtenido de  $u^0$  siguiendo el camino asociado a esta dirección de descenso

$$u^{0,new} = \begin{cases} u^0 + \epsilon \delta u^0 + [u^0]_{\varphi^0} \chi_{[\varphi^0 + \epsilon \delta \varphi^0, \varphi^0]} & \text{si } \delta \varphi^0 < 0, \\ u^0 + \epsilon \delta u^0 - [u^0]_{\varphi^0} \chi_{[\varphi^0, \varphi^0 + \epsilon \delta \varphi^0]} & \text{si } \delta \varphi^0 > 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

para algún  $\epsilon > 0$  lo suficientemente pequeño, correctamente escogido. Nótese que, si tomamos (1.11) como dirección de descenso  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$ , que no es un vector tangente

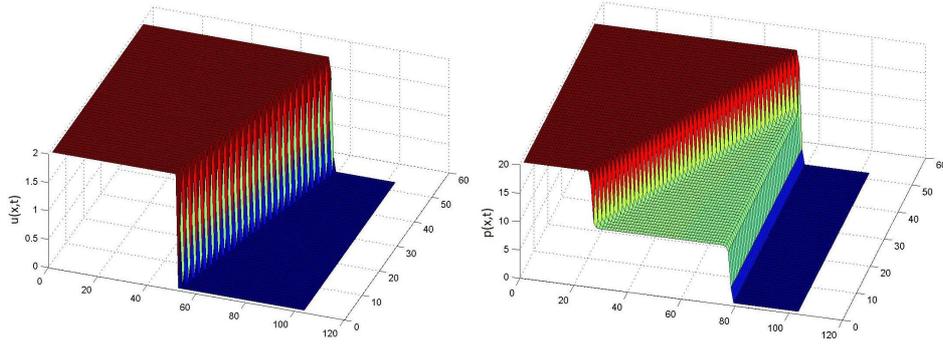


Figura 1.2: Solución  $u(x, t)$  de la ecuación de Burgers con un dato inicial teniendo una discontinuidad (izquierda) y adjunta que toma el valor constante en la región ocupada por las características que se encuentran en el choque (derecha).

generalizado, el nuevo valor  $u^{0,new}$  tendrá tres discontinuidades: la primera que viene del desplazamiento de la discontinuidad  $u^0$  en  $\varphi^0$  y dos más producidas por las discontinuidades de  $p(x, 0)$ . Por lo tanto, en un proceso iterativo, el algoritmo de descenso irá creando más y más discontinuidades incrementando de manera artificial la complejidad de la solución. Esto motiva el método de las direcciones de descenso alternantes que proponemos, basado en la noción de gradientes generalizados, desarrollando un algoritmo de descenso que mantenga la complejidad de las soluciones acotadas.

### 1.1.2. Método de las direcciones de descenso alternantes

Uno de los principales inconvenientes del enfoque continuo, cuando hay discontinuidades, es que, en general, el algoritmo de descenso que usa la dirección de descenso óptima basada en el cálculo del vector tangente generalizado, produce sucesiones minimizantes con complejidad que se incrementa. El remedio es usar verdaderos vectores tangentes generalizados en  $T_{u^0}$  como direcciones de descenso para  $J$ .

Motivado por esta discusión introducimos una descomposición de los vectores tangentes generalizados. Esto requiere en primer lugar introducir cierta notación. Sea

$$x^- = \varphi(T) - u^-(\varphi(T))T, \quad x^+ = \varphi(T) - u^+(\varphi(T))T,$$

y consideremos los siguientes subconjuntos (ver Figura 1.3),

$$\hat{Q}^- = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \text{ tal que } x < \varphi(T) - u^-(\varphi(T))t\},$$

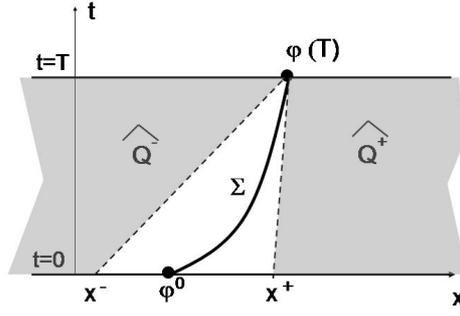
$$\hat{Q}^+ = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \text{ tal que } x > \varphi(T) - u^+(\varphi(T))t\}.$$

**Proposición 4.** Supongamos que hemos restringido el conjunto de trayectorias en  $\Sigma_{u^0}$  a aquellas que pueden ser asociadas a vectores tangentes generalizados  $(\delta u^0, \delta \varphi^0) \in T_{u^0}$  satisfaciendo,

$$\delta \varphi^0 = \frac{\int_{x^-}^{\varphi^0} \delta u^0 + \int_{\varphi^0}^{x^+} \delta u^0}{[u]_{\varphi^0}}. \quad (1.13)$$

Entonces, la solución  $(\delta u, \delta \varphi)$  del sistema (1.8) satisface  $\delta \varphi(T) = 0$  y la derivada Gateaux generalizada de  $J$  en la dirección  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  se puede escribir como

$$\delta J = \int_{\{x < x^-\} \cup \{x > x^+\}} p(x, 0) \delta u^0(x) dx, \quad (1.14)$$

Figura 1.3: Subdominios  $Q^-$  y  $Q^+$ .

donde  $p$  satisface el sistema

$$\begin{cases} -\partial_t p - u \partial_x p = 0, & \text{en } \hat{Q}^- \cup \hat{Q}^+, \\ p(x, T) = u(x, T) - u^d, & \text{en } \{x < \varphi(T)\} \cup \{x > \varphi(T)\}. \end{cases} \quad (1.15)$$

Análogamente, si restringimos el conjunto de trayectorias en  $\Sigma_{u^0}$  a aquellas para las cuales el vector tangente generalizado asociado  $(\delta u^0, \delta \varphi^0) \in T_{u^0}$  satisface  $\delta u^0 = 0$ , entonces  $\delta u(x, T) = 0$  y la derivada Gateaux generalizada de  $J$  en la dirección  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  se puede escribir como

$$\delta J = - \left[ \frac{(u(x, T) - u^d(x))^2}{2} \right]_{\varphi(T)} \frac{[u(\cdot, T)]_{\varphi(T)}}{[u^0]_{\varphi^0}} \delta \varphi^0. \quad (1.16)$$

Los resultados en esta Proposición 4 sugieren una descomposición obvia del conjunto de vectores tangentes generalizados:

$$T_{u^0} = T_{u^0}^1 \oplus T_{u^0}^2 \quad (1.17)$$

donde  $T_{u^0}^1$  contiene aquellos  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  para los cuales se verifica la identidad (1.13), y  $T_{u^0}^2$  denota aquellos para los cuales  $\delta u^0 = 0$ . Esto proporciona dos clases de direcciones de descenso para  $J$  en  $u^0$ . En principio no son óptimas en el sentido de que no son las direcciones de máxima pendiente pero ambas tienen tres propiedades importantes:

1. Ambas son direcciones de descenso.
2. Permiten distinguir el diseño del perfil y de la posición del choque.
3. Son verdaderos gradientes generalizados y por lo tanto mantienen la estructura de datos sin incrementar la complejidad.

Cuando se considera vectores tangentes generalizados perteneciendo a  $T_{u^0}^1$  podemos escoger como dirección de descenso:

$$\delta u^0 = \begin{cases} -p(x, 0) & \text{si } x < x^-, \\ -\lim_{\substack{x \rightarrow x^- \\ x < x^-}} p(x, 0) & \text{si } x^- < x < \varphi^0, \\ -\lim_{\substack{x \rightarrow x^+ \\ x > x^+}} p(x, 0) & \text{si } \varphi^0 < x < x^+, \\ -p(x, 0) & \text{si } x^+ < x, \end{cases} \quad \delta \varphi^0 = - \frac{\int_{x^-}^{\varphi^0} p(x, 0) + \int_{\varphi^0}^{x^+} p(x, 0)}{[u]_{\varphi^0}}, \quad (1.18)$$

mientras que para  $T_{u^0}^2$  una buena elección consiste en:

$$\delta u^0 = 0, \quad \delta \varphi^0 = \left[ \frac{(u(x, T) - u^d(x))^2}{2} \right]_{\varphi(T)} \frac{[u(\cdot, T)]_{\varphi(T)}}{[u^0]_{\varphi^0}}. \quad (1.19)$$

En (1.18) el valor de  $\delta u^0$  en el intervalo  $(x^-, x^+)$  no afecta a la derivada Gateaux generalizada en (1.14) si  $\delta \varphi^0$  se escoge exactamente como se indica (de otra manera el choque se movería y produciría un término extra sobre la derivada del funcional  $J$ ). Hemos seleccionado el valor constante más simple que preserva la continuidad Lipschitz de  $\delta u^0$  en  $x = x^-$  y  $x = x^+$ , pero no necesariamente en  $x = \varphi^0$ . Otras elecciones posibles también proporcionan direcciones de descenso para  $J$  en  $u^0$ , pero deberían producir la misma derivada de Gateaux de acuerdo a (1.14). Esto nos permite definir una estrategia para obtener direcciones de descenso para  $J$  sobre  $u^0$  en  $T_{u^0}$ .

Para ilustrar esto consideramos el caso más sencillo en el cual  $u^d$  es continua Lipschitz con una discontinuidad sobre  $x = x^d$ . Para inicializar el algoritmo de descenso, en vista de la estructura de  $u^d$ , tomamos  $u^0$  con una estructura similar, con una única discontinuidad localizada en  $\varphi^0$ . Típicamente esto produce una solución  $u$  con una discontinuidad de choque que en el tiempo final  $t = T$  está localizada en  $\varphi(T)$ . Entonces, hay dos posibilidades, dependiendo de  $\varphi(T)$ , que conviene distinguir al aplicar el método de descenso:

1.  $\varphi(T) \neq x^d$  consideramos entonces una dirección de descenso de la forma (1.19) que mueva la discontinuidad de  $u^0$  hasta que tengamos  $x^d = \varphi(T)$ .
2. Ya tenemos  $x^d = \varphi(T)$  y consideramos una dirección de descenso de la forma (1.18). Estas direcciones ajustan el valor de la solución  $u$  a ambos lados del choque.

En la práctica, las deformaciones del segundo paso moverán ligeramente la posición del choque debido a la dependencia no lineal en el parámetro  $\varepsilon$ . Por lo tanto, uno debe iterar este procedimiento para asegurar una situación simultánea del choque y el mejor ajuste del valor de la solución a ambos lados de él.

## 1.2. Avances en la metodología de optimización aerodinámica

Existe una amplia literatura alrededor de la optimización aerodinámica mediante el empleo de técnicas basadas en el cálculo de gradientes. A mediados de los años 70 [51, 50] estas técnicas se aplicaban en sistemas modelizados por la ecuación potencial, y en este marco tan elemental era posible el cálculo de los gradientes a través de técnicas de diferencias finitas o bien a través del estado linealizado. A medida que los modelos para representar la aerodinámica se fueron complicando, los tiempos de cálculo requeridos fueron imposibilitando el empleo de técnicas de diferencias finitas y a mediados de los años 80 [65, 66, 54, 62] se empezó a emplear el estado adjunto del sistema para el cálculo de la sensibilidad de un funcional con respecto a variaciones infinitesimales en la superficie a diseño.

Estos problemas de diseño se plantean en un dominio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  (ver Figura 1.4) delimitado por contornos disconexos que se dividen en campo lejano  $\Gamma_\infty$  y en un contorno de pared sólida  $S$ . Dentro de  $\Omega$  se resuelve una EDP que modeliza el comportamiento

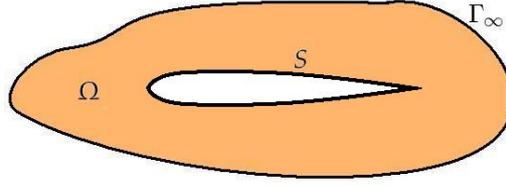


Figura 1.4: Escenario de optimización geométrica de la superficie  $S$ .

del fluido y sobre  $S$  se define un función de coste a ser minimizada  $J$  de las variables fluidas  $U$ :

$$J = \int_S j(U) ds. \quad (1.20)$$

El problema de minimización de  $J$  mediante la variación de la geometría de la frontera  $S$  consistirá en encontrar  $S^{\min}$  para la cual

$$J(S^{\min}) = \min_{S \in \mathcal{S}_{ad}} J(S), \quad (1.21)$$

donde  $\mathcal{S}_{ad}$  es el conjunto de geometrías admisibles del contorno  $S$ .

### 1.2.1. Sistemas gobernados por las ecuaciones de Euler

En su forma conservativa las ecuaciones de Euler en régimen estacionario se expresan como:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0, & \text{en } \Omega, \\ \vec{v} \cdot \vec{n}_S = 0, & \text{sobre } S, \end{cases} \quad (1.22)$$

donde, en el campo lejano  $\Gamma_\infty$  las condiciones de contorno son especificadas para las ondas entrantes, mientras que las ondas salientes son determinadas por la propia solución en el interior del dominio  $\Omega$ . El vector  $\vec{n}_S$  es un vector unitario normal a la pared  $S$  apuntando hacia afuera del dominio  $\Omega$ ,  $U^T = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho E)$  son las variables conservativas y los flujos convectivos se pueden escribir como  $\vec{F} = (F_x, F_y)$ , con

$$F_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_x H \end{pmatrix}, F_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + P \\ \rho v_y H \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  es la velocidad en un sistema de referencia cartesiano,  $E$  es la energía total,  $P$  la presión del sistema y  $H$  la entalpía.

Los flujos no viscosos y compresibles modelizados por las ecuaciones de Euler pueden evolucionar hacia la formación de discontinuidades. Las relaciones de Rankine-Hugoniot gobiernan el comportamiento de un fluido al atravesar una discontinuidad  $\Sigma$  que se desplaza con una velocidad  $s$  en la dirección normal a la curva de discontinuidad  $\vec{n}_\Sigma = (n_{\Sigma x}, n_{\Sigma y})$ , respecto de un observador en reposo en relación al fluido.

$$[\vec{F} \cdot \vec{n}_\Sigma]_\Sigma - s [U]_\Sigma = 0, \quad (1.24)$$

donde  $[A]_\Sigma$  representa el salto en la cantidad  $A$  al atravesar la curva de discontinuidad  $\Sigma$ .

Una vez planteado el sistema de EDPs que gobierna el sistema físico a estudio, nos planteamos el diseño a través del empleo de la metodología adjunta continua. La formulación que presentaba el estado del arte en este ámbito, no era satisfactoria pues para el cálculo de la sensibilidad del funcional exigía la evaluación de unas integrales sobre todo el dominio físico [54] o bien el empleo de una elaborada formulación denominada *Reduced Gradient Formulation* [65, 60].

En el Capítulo 4 se ha desarrollado un método sistemático para el cálculo de la sensibilidad de un funcional sobre la superficie a diseño sin recurrir a integrales sobre todo el dominio [20], además se ha realizado un estudio sobre la necesidad de incorporar información procedente del adjunto de las condiciones de Rankine-Hugoniot sobre el choque, aspecto que si bien había sido abordado en escenarios simplificados [42] no había sido tratado en un sistema bidimensional de las ecuaciones de Euler.

A lo largo de la Sección 4.4, se demuestra que las variaciones de  $J(S)$  se pueden calcular como

$$\begin{aligned} \delta J(S) = & \int_S ((\partial_n j(P) - \kappa j(P)) \delta S ds \\ & + \int_{S-\cup S^+} ((\partial_n \vec{v} \cdot \vec{n}_S) \vartheta + \partial_{tg} ((\vec{v} \cdot \vec{t}_S) \vartheta)) \delta S ds - [j(P)]_{x_b} (\vec{n}_S \cdot \vec{n}_\Sigma) \delta S(x_b) \end{aligned} \quad (1.25)$$

donde  $\vec{\varphi} = (\psi_2, \psi_3)$ ,  $\vartheta = \rho\psi_1 + \rho\vec{v}_S \cdot \vec{\varphi} + \rho H\psi_4$ , y los valores de las variables adjuntas  $\Psi$  se calculan a través de la resolución de la siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$-\vec{A}^T \cdot \vec{\nabla} \Psi = 0, \quad (1.26)$$

donde las matrices jacobianas en 2D responden a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} A_x = \partial_U F_x = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}v_x^2 + \frac{\gamma-1}{2}v_y^2 & (3-\gamma)v_x & -(\gamma-1)v_y & \gamma-1 \\ -v_x v_y & v_y & v_x & 0 \\ -\gamma v_x E + (\gamma-1)v_x |\vec{v}|^2 & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(v_y^2 + 3v_x^2) & -(\gamma-1)v_x v_y & \gamma v_x \end{pmatrix}, \\ A_y = \partial_U F_y = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_x v_y & v_y & v_x & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}v_y^2 + \frac{\gamma-1}{2}v_x^2 & -(\gamma-1)v_x & (3-\gamma)v_y & \gamma-1 \\ -\gamma v_y E + (\gamma-1)v_y |\vec{v}|^2 & -(\gamma-1)v_x v_y & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(v_x^2 + 3v_y^2) & \gamma v_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sobre el sistema (1.26) se aplican las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{cases} \vec{\varphi} \cdot \vec{n}_S = j'(P) & \text{sobre } S^+ \cup S^-, \\ \Psi^T (\vec{A} \cdot \vec{n}_{\Gamma_\infty}) \delta U = 0 & \text{sobre } \Gamma_\infty. \end{cases} \quad (1.27)$$

Y las siguientes condiciones internas de contorno sobre el choque

$$\begin{cases} \partial_{tg} \bar{\Psi}^T [\vec{F} \cdot \vec{t}_\Sigma]_\Sigma = ([\rho \vec{v}]_\Sigma \cdot \vec{t}_\Sigma) (\partial_{tg} \Psi_1 + H \partial_{tg} \Psi_4) \\ \quad + [\rho (\vec{v})^2 + 2P]_\Sigma \vec{t}_\Sigma \cdot \partial_{tg} \vec{\varphi} = 0, & \text{sobre } \Sigma, \\ \Psi^T(x_b) [\vec{F} \cdot \vec{t}_\Sigma]_{x_b} = [j(P)]_{x_b}, & \text{en } x_b. \end{cases} \quad (1.28)$$

Sobre esta última expresión son posibles importantes simplificaciones al asumir la presencia de choques denominados normales, los cuales son simplificaciones aceptables en condiciones regímenes transónicos moderados.

A lo largo de esta tesis se desarrollarán esquemas numéricos para la resolución del problema adjunto que describimos brevemente. Consideremos un dominio físico  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Con objeto de resolver de manera discreta una ecuación en derivadas parciales definida sobre ese dominio descomponemos  $\Omega$  de la siguiente manera

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau_h} K, \quad (1.29)$$

donde:

- cada  $K$  es un triángulo con interior no vacío  $\mathring{K} \neq \emptyset$ ,
- $\mathring{K}_1 \cap \mathring{K}_2 = \emptyset$  para cada  $K_1, K_2 \in \tau_h$ ,
- si  $F = K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$  ( $K_1$  y  $K_2$  son elementos distintos de  $\tau_h$ ) entonces  $F$  es lado de  $K_1$  y  $K_2$ ,
- $\text{diam}(K) \leq h$  para cada  $K \in \tau_h$ ,

El desarrollo de un esquema *upwind* para la resolución de las ecuaciones adjuntas de Euler en 2D es de especial interés. Este esquema se basa en un análisis similar al realizado para la resolución de las ecuaciones de Euler donde, ahora, la información de las características viaja en la dirección opuesta al problema directo.

Dada una triangularización del dominio  $\Omega$  del tipo (1.29) pretendemos evaluar el flujo numérico entre dos nodos  $j$  y  $k$  conectados por una arista. El valor del flujo numérico en la formulación adjunta se calcula como  $A^T \Psi$ , donde el superíndice  $T$  denota la matriz transpuesta, siendo  $A$  la matriz jacobiana de Euler. Y el esquema *upwind* desarrollado para la resolución del sistema adjunto (1.26) se puede escribir como

$$f_{jk} = \frac{1}{2} \left( A_j^T (\Psi_j + \Psi_k) + (P^T)^{-1} |\Lambda| P^T \delta \Psi \right), \quad (1.30)$$

donde  $A^T = (P^T)^{-1} \Lambda P^T$ , siendo  $\Lambda$  la matriz de autovalores de la matriz jacobiana y que  $P$  la matriz de autovectores que diagonaliza la matriz jacobiana proyectada sobre la arista que une los nodos  $j$  y  $k$ . Por otro lado,  $f_{jk}$  es el flujo numérico *upwind* desde el nodo  $j$  hasta el nodo  $k$ , los subíndices indican sobre qué nodos ( $j$  o  $k$ ) se realizará la evaluación de los términos de la expresión. La ausencia de subíndices indica que se debe tomar un valor promediado de las variables. Respecto de esta ecuación es interesante destacar que no se trata de un sistema conservativo ya que  $f_{jk} \neq f_{kj}$ .

Por otro lado, a lo largo de esta memoria, se verá como el gradiente de un funcional de interés respecto de variaciones infinitesimales de la superficie a diseño (calculado a través del estado adjunto), está generalmente en una clase inferior de suavidad que la forma inicial de la superficie a diseñar. Es por ello que una secuencia de optimización, progresivamente reduce la suavidad, pudiendo conducir hasta la inestabilidad. Mediante numerosos ejemplos numéricos, se ha comprobado que el empleo directo de la sensibilidad de un funcional sobre la superficie conduce a la divergencia del proceso de optimización debido a las oscilaciones de alta frecuencia introducidas [60, 65, 56]. A lo largo de este trabajo, frente a la alternativa tradicional de emplear un gradiente modificado de Sobolev, proponemos el empleo de una técnica de filtrado bimalla [44, 87] inspirado en trabajos recientes de Glowinski.

### 1.2.2. Sistemas gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes

El sistema de las ecuaciones compresibles estacionarias de Navier-Stokes (sin términos fuente y suponiendo condición adiabáticas en la pared sólida), se formula como,

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} - \vec{F}^v) = 0, & \text{en } \Omega \\ \vec{v} = 0, & \text{sobre } S \\ \partial_n T = 0, & \text{sobre } S \end{cases} \quad (1.31)$$

donde, en el campo lejano  $\Gamma_\infty$ , las condiciones de contorno son especificadas para las ondas entrantes, mientras que las ondas salientes son determinadas por la propia solución en el interior del dominio  $\Omega$ . Por otro lado, las variables conservativas son  $U^T = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho E)$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  es la velocidad en un sistema de referencia cartesiano,  $E$  es la energía total,  $P$  la presión del sistema,  $H$  la entalpía,  $T$  es la temperatura del fluido. Los flujos convectivos se modelizan como  $\vec{F} = (F_x, F_y)$  ya definidos en (1.23), y los flujos viscosos como  $\vec{F}^v = (F_x^v, F_y^v)$ , donde

$$F_x^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xx}v_x + \sigma_{xy}v_y + k\partial_x T \end{pmatrix}, F_y^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yx}v_x + \sigma_{yy}v_y + k\partial_y T \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

siendo  $\sigma_{ij}$  el tensor de esfuerzos que agrupa todas las componentes del esfuerzo sobre un volumen de control. El tensor de esfuerzos se puede escribir como

$$\sigma_{ij} = \mu (\partial_i v_j + \partial_j v_i) + \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \delta_{ij}, \quad (1.33)$$

donde la viscosidad dinámica se denota por  $\mu$  y la conductividad térmica por  $k$ . Finalmente, es necesario apuntar que el sistema de ecuaciones (1.31) debe ser completado por una ecuación de estado que define las propiedades termodinámicas del fluido y ciertas relaciones empíricas para definir  $\mu$  y  $k$ .

En este caso, el estado del arte para el cálculo de la sensibilidad de un funcional en sistemas gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes, planteaba dos dificultades que impedían la aplicación de estas técnicas a modelos de interés en ingeniería: por un lado la necesidad de evaluar integrales sobre todo el dominio para el cálculo de la sensibilidad [86] y por otro la necesidad de emplear resolvedores de alto orden para calcular con precisión las derivadas de segundo orden que aparecían en la formulación [4]. Ambas dificultades han sido resueltas en el Capítulo 5 de esta memoria para obtener que la variación de la función objetivo viene dada por

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{\delta S} j(U) ds + \int_S j'(U) \delta U ds \\ &+ \int_S k (\partial_n \psi_4) \delta T ds + \int_S (\vec{n} \cdot \vec{\varphi} \delta P - \vec{n} \cdot \delta \sigma \cdot \vec{\varphi}) ds \\ &+ \int_S (\vec{n} \cdot \delta \vec{v} (\rho \psi_1 + \rho H \psi_4) - \psi_4 \vec{n} \cdot \sigma \cdot \delta \vec{v} + \vec{n} \cdot \Sigma \cdot \delta \vec{v}) ds = 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

En esta expresión las variables  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$  se calculan a través de la siguiente ecuación

$$- \left[ (\vec{A} - \vec{A}^v)^T \cdot \vec{\nabla} \Psi + \vec{\nabla} \cdot (D_{xx}^T \partial_x \Psi + D_{yx}^T \partial_y \Psi, D_{xy}^T \partial_x \Psi + D_{yy}^T \partial_y \Psi) \right] = 0, \quad (1.35)$$

sujeta a las siguientes condiciones de contorno sobre la pared sólida

$$\begin{cases} \bar{\varphi}|_S = (\partial j)/(\partial \vec{f}), \\ k\partial_n \Psi_4|_S = \partial_T j, \end{cases} \quad (1.36)$$

donde  $\varphi = (\psi_2, \psi_3)$  y  $\partial_T$  denota la derivada parcial con respecto de la temperatura. En vista a estas expresiones se deduce que son admisibles funciones objetivo  $J$  de la forma  $J = j(\vec{f}, T)$ , donde  $\vec{f} = P\vec{n} - \vec{n} \cdot \sigma$ . La variación del funcional  $J$  queda entonces como

$$\delta J = \delta \int_S j(\vec{f}, T) dS = \int_{\delta S} j(\vec{f}, T) ds - I_{eq}, \quad (1.37)$$

donde  $\vec{f} = P\vec{n} - \vec{n} \cdot \sigma$  y

$$I_{eq} = \int_S (\vec{n} \cdot \delta \vec{v} (\rho\psi_1 + \rho H\psi_4) - \psi_4 \vec{n} \cdot \sigma \cdot \delta \vec{v} + \vec{n} \cdot \Sigma \cdot \delta \vec{v} - k\psi_4 \partial_n (\delta T)) ds, \quad (1.38)$$

siendo

$$\begin{cases} \delta \vec{v}|_S = -\delta S \partial_n \vec{v} \\ \partial_n (\delta T)|_S = -\delta S \partial_n (\partial_n T) + \partial_{i_g} (\delta S) \partial_{i_g} T, \end{cases}$$

en la que aparecen términos que involucran la segunda derivada y que serán desarrollados en la Sección 5.3.2, donde mediante el empleo de las ecuaciones de Navier-Stokes sobre el contorno e integraciones por partes se obtendrá una expresión final para el cálculo del gradiente  $G$  del funcional  $J$  respecto de modificaciones normales de la superficie

Por último, y en el ámbito del diseño de forma en sistemas gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes, en esta memoria se desarrolla el método de conjuntos de nivel o de *level set* [100, 2, 23, 82, 88] aplicado al diseño óptimo.

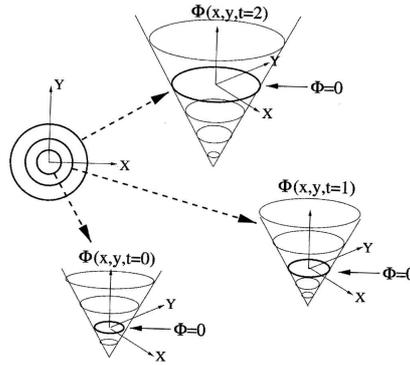


Figura 1.5: Esquema del método de conjuntos de nivel

En el ámbito de la optimización de forma, este tipo de métodos se emplean de tal manera que el conjunto de nivel cero se corresponde con la interfase entre el cuerpo sólido y el fluido que lo rodea. La interfase se moverá con una velocidad normal que proviene del cálculo de gradientes del funcional a optimizar respecto de movimientos infinitesimales en la dirección normal a la superficie.

El frente de avance o interfase se calcula de tal manera que la posición inicial del frente se toma como el nivel 0 de una función  $\Phi$  definida en un dominio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  de la siguiente manera

$$\Phi_t + F \left| \vec{\nabla} \Phi \right| = 0, \quad \text{en } \Omega, \quad t > 0 \quad (1.39)$$

donde  $\Gamma(t) = \{(\vec{x}) \mid \Phi(\vec{x}, t) = 0\}$  es el frente de avance. Como valor inicial se toma la función distancia al frente de avance y  $F$  es la velocidad del *level set* en todo el dominio  $\Omega$ , que en el caso del diseño óptimo forma está relacionado con el gradiente del funcional respecto de variaciones infinitesimales de la forma del frente de avance en la dirección normal al frente. En la Figura 1.5 se presenta un esquema [100] del comportamiento de un método *level set* en la evolución de una circunferencia que se expande.

En esta memoria se ha desarrollado un método de *level set* para la optimización de forma en objetos inmersos en una corriente fluida modelizada por las ecuaciones de Navier-Stokes. Se ha comprobado que los métodos de *level set* proporcionan una gran versatilidad a la hora trabajar con geometrías complejas que, en su evolución a lo largo del tiempo, propician que el objeto se divida o se fusione con otro cuerpo, cosa que está fuera del alcance de los métodos de gradiente clásico de deformación de fronteras.



## Capítulo 2

---

# Panorámica del diseño óptimo aerodinámico

---

El objeto de este capítulo es presentar los problemas existentes en el ámbito industrial para el desarrollo de técnicas de diseño óptimo aeronáutico. Este capítulo está dividido en cuatro secciones: en primer lugar se realizará una introducción a los orígenes y los retos actuales de la aeronáutica, en segundo lugar se comentará el estado del arte, en el ámbito industrial, de la mecánica de los fluidos computacional. Más adelante, se comentarán algunos aspectos de la optimización y el diseño de forma en aeronáutica. Finalmente se discutirá la aplicación de los métodos *level set* al diseño óptimo y se describirán los algoritmos implementados en el ámbito de la optimización.

### 2.1. Consideraciones históricas

#### 2.1.1. El comienzo: los hermanos Wright

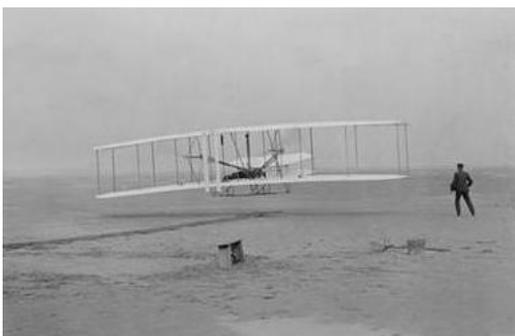


Figura 2.1: Primer vuelo con motor de la historia de los hermanos Wright.

El origen de la aeronáutica, tal y como la conocemos hoy, se remonta a principios del siglo XX. Fueron los hermanos Wright quienes, en el año 1900, comenzaron a probar planeadores y desarrollaron un túnel aerodinámico que les permitió ensayar distintos perfiles aerodinámicos.

Desde que ensayaran su primer aeroplano en el año 1900, los hermanos Wright detectaron la gran importancia del equilibrio en el diseño de los aeroplanos. Tan sólo dos años más tarde, demostraron la eficacia de su sistema para mantener el equilibrio en el aire. Cuando

sólo se apreciaba un atisbo de lo que sería posteriormente la aeronáutica moderna, los hermanos Wright fueron capaces de calcular a priori el funcionamiento de máquinas

voladoras con el mayor grado de exactitud conocido hasta ese momento. Pero el avance definitivo hacia la aeronáutica moderna se produciría cuando Orville y Wilbur Wright comenzaron a desarrollar una nueva máquina propulsada con un motor de explosión.

Tras seis semanas de trabajo, fabricaron un motor de cuatro cilindros capaz de desarrollar 9CV de potencia en bancada. Sin embargo, no contemplaron lubricar ni los cilindros ni los cojinetes mientras el motor estuviese en funcionamiento, por lo que éste no podía permanecer encendido más de un minuto o dos.

El 17 de diciembre de 1903, en Carolina del Norte, cerca de Kity Hawk, Orville pilotó tendido boca abajo el *Flyer III*. Logró volar aproximadamente 40 metros a tres metros de altura, en un vuelo inestable con repentinas subidas y bajadas. Poco más tarde, lograría planear 284 metros en un tiempo de 59 segundos.

### 2.1.2. La aeronáutica de finales del siglo XX

Desde los primeros éxitos de los hermanos Wright la aeronáutica evolucionó muy rápidamente motivada, en gran medida, por las dos guerras mundiales acaecidas en Europa, que hicieron percibir la importancia de movilizar tropas también por el aire. Durante aquella época, las aeronaves incrementaron de forma considerable su potencia y su estabilidad, convirtiéndose así en vehículos capaces de sobrevolar grandes extensiones y derribar barcos y aviones enemigos.

En las últimas cuatro décadas del siglo XX se desarrollaron nuevas tecnologías que permitieron la aplicación de nuevos roles y misiones para los aviones. Sin embargo, debemos destacar que los avances alcanzados no fueron tan notables como los logrados en la primera mitad del siglo XX. Las causas de este aparente estancamiento (que en la práctica no es tal) debemos buscarlas en las propias peculiaridades de la aviación, marcadas, en parte, por el enorme riesgo económico que conlleva y la gran responsabilidad asociada a los fabricantes de aviones.

El desarrollo aeronáutico ha discurrido basándose en dos vertientes complementarias, una más evolutiva y otra de carácter mucho más revolucionario. La vertiente evolutiva es la que nos puede llevar a pensar que, en las últimas décadas, apenas han cambiado ciertos aviones dedicados a roles muy concretos, como el transporte de pasajeros. Pero, aunque la configuración de un avión de pasajeros de tamaño medio parece similar, se ha logrado reducir su coste a la tercera parte inicial, gracias a las mejoras en la aerodinámica, las estructuras, los materiales, los sistemas de control y, sobre todo, a la tecnología de la propulsión.

Los avances más revolucionarios están marcados por el descubrimiento de roles completamente nuevos para la aviación como pueden ser los aviones supersónicos (con fines bélicos o pacíficos), vuelos de larga distancia, a baja o a muy alta altitud (desde aviones pensados para evitar ser detectados por radares, hasta los aviones solares o, incluso, vehículos capaces de salir al espacio).

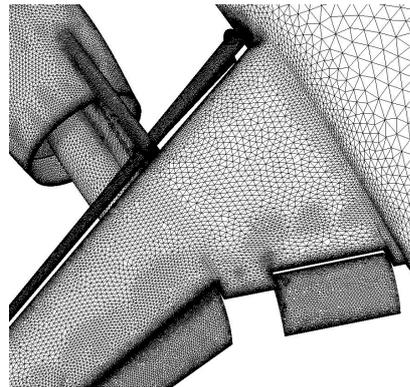


Figura 2.2: Malla superficial sobre un mecanismo hipersustentador.

### 2.1.3. Los retos actuales de la aeronáutica

Aunque la aeronáutica ha evolucionado a un ritmo vertiginoso durante el último siglo, mantiene unos objetivos fundamentales. Éstos han sido acordados en las reuniones *Aeronautics 2001* [5], que fijaron las metas a alcanzar en los próximos años hasta el 2020. Estas metas, pactadas tras la creación de ACARE (*Advisory Council for Aeronautics Research in Europe*) se plasmaron en la SRA (*Strategic Research Agenda*), que es actualizada cada 2 años.

Todas las prioridades aeronáuticas se articulan alrededor de un programa de trabajo dividido en cuatro áreas temáticas.

Área 1) Calidad a costes sostenibles. Esta meta está orientada al diseño y desarrollo del producto mediante el empleo de las herramientas analíticas y experimentales más avanzadas. Uno de los objetivos es reducir los costes directos de operación e incrementar la comodidad de los pasajeros, por ejemplo, a través del estudio de la distribución del aire acondicionado en la cabina.

Área 2) Aumento de la seguridad. No sólo trata la prevención de accidentes aéreos, sino la capacidad de volar con condiciones meteorológicas adversas, teniendo en cuenta efectos de ráfagas, lluvia intensa y formación de hielo.

Área 3) Impacto medioambiental. Este objetivo se basa en la reducción de la resistencia del aire a través de nuevas formas de la aeronave. De esta forma, al reducir la resistencia que el aire ejerce sobre el avión, disminuyen también las emisiones a la atmósfera: disminución del 50 % en las emisiones de  $CO_2$  (la misma disminución en consumo de combustible) y del 80 % en las de  $NO_x$ , lo que impone el diseño de aeronaves más eficientes en crucero y, por lo tanto, la disminución de la resistencia aerodinámica ( $C_D$ ) y el aumento de la relación sustentación / resistencia ( $C_L/C_D$ ).

El descenso de las emisiones acústicas constituye otro pilar básico de la mejora del impacto medioambiental: la reducción a la mitad del ruido percibido se logrará mediante el diseño de mejores dispositivos hipersustentadores durante las fases de despegue y ascenso (máxima potencia) y de aproximación y aterrizaje (máximas deflexiones).

Área 4) Aumento de la capacidad operativa de los aeropuertos. Por ejemplo, reduciendo el tiempo entre dos aterrizajes consecutivos en la misma pista. El aire que ha sido agitado por un avión al aterrizar puede impedir el correcto aterrizaje del siguiente avión. El estudio del tiempo que tarda el aire en volver a su movimiento natural permitirá conocer con exactitud el tiempo entre aterrizaje y aterrizaje requerido en cada situación.

Los objetivos planteados en la SRA determinan en la actualidad las prioridades de la industria aeronáutica, que abarcan desde la optimización de las herramientas de simulación avanzadas hasta el diseño aeroportuario más práctico y eficiente.

## 2.2. Cálculo aerodinámico: modelización, resolución numérica y análisis

En la actualidad, las empresas aeronáuticas de mayor solidez (Airbus, Boeing, Lockheed, Dassault Aviation, etc.) emplean de manera rutinaria ciertos métodos o técnicas computacionales. De entre este software ingenieril caben destacar herramientas como: modelos aerodinámicos, modelos estructurales, sistemas de control básico, etc.

Centrándonos en el área del cálculo aerodinámico, la principal herramienta de la que disponen los ingenieros es la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD, de su acrónimo anglosajón *Computational Fluid Dynamics*). La CFD es una de las ramas de la mecánica de fluidos que se ocupa de la obtención de soluciones numéricas de las ecuaciones que gobiernan los fluidos mediante el empleo de cálculo numérico y ordenadores, a través de la discretización del espacio físico en lo que llamamos mallas computacionales.

Son las ecuaciones de Navier-Stokes las que modelizan de manera más exacta el comportamiento del aire alrededor de un avión. A través de la resolución de estas ecuaciones, se obtienen los campos de densidad, velocidad, temperatura y presión ejercida por el aire. Sin embargo, debido a la complicación y exigencias de cálculo que pueden requerir las ecuaciones de Navier-Stokes, a lo largo de los años se han desarrollado modelos simplificados de cálculo aerodinámico que se seleccionan en función de los diferentes niveles de aproximación que se desee alcanzar en la modelización de la física de los fluidos:

- Para resolver directamente las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden emplear los llamados métodos directos que deben ser planteados sobre una discretización espacial lo suficientemente fina como para resolver todas las escalas de la turbulencia<sup>1</sup> DNS (*Direct Numerical Simulation*) o parcialmente directos LES (*Large Eddy Simulations*) y DES (*Detached Eddy Simulation*) en los cuales no se resuelven todas las escalas de la turbulencia y se emplean ciertas aproximaciones en los torbellinos menores.
- Si evitamos afrontar directamente la resolución de la turbulencia (mallas computacionales considerablemente más bastas de lo que sería necesario) emplearíamos las ecuaciones que tratan de modelizarla a través de los métodos denominados RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*).
- Si se trabaja con altos números de Reynolds<sup>2</sup> y corriente adherida (caso bastante habitual), será posible desacoplar los efectos viscosos resolviendo, por una parte,



Figura 2.3: Mecanismo hipersustentador de una aeronave.

<sup>1</sup>Se llama flujo turbulento o corriente turbulenta al movimiento de un fluido que se da en forma caótica, donde las partículas se mueven desordenadamente y sus trayectorias forman pequeños remolinos aperiódicos

<sup>2</sup>Número de Reynolds,  $R = (\rho v l) / \mu$ , donde  $\rho$  es la densidad del aire,  $v$  su velocidad,  $l$  una dimensión característica (dependiente de cada configuración a análisis) y  $\mu$  la viscosidad dinámica. Este parámetro adimensional representa los efectos de la viscosidad sobre el flujo, de modo que un valor muy alto implica que los efectos viscosos se limitan a una estrecha capa de aire muy pegada a la superficie del avión

las ecuaciones de capa límite y, por otra, el modelo no viscoso (ecuaciones de Euler). Si además, el número de Mach<sup>3</sup> es suficientemente pequeño, entonces existe potencial de velocidad y el sistema de ecuaciones de Euler se reduce a una sola ecuación (potencial).

- En régimen incompresible, la ecuación potencial puede linealizarse (ecuación de Laplace) y resolverse mediante métodos de superposición de singularidades (métodos de paneles).

En la actualidad, las modelizaciones de los fluidos que gozan de mayor aceptación en el ámbito industrial son las ecuaciones de Euler (en las circunstancias aplicables) y la modelización a través del empleo de las ecuaciones RANS con diferentes modelos de turbulencia.

Con objeto de centrar conceptos, si por ejemplo se desea simular el flujo de aire alrededor de un mecanismo hipersustentador<sup>4</sup> (ver Figura 2.3), el primer paso consiste seleccionar el dominio físico sobre el que se van a resolver las ecuaciones. En general se selecciona un dominio físico  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  ( $d=2$  ó  $3$ ) (aire), delimitado por contornos disconexos que se denominan: campo lejano  $\Gamma_\infty$  y una serie de contornos interiores  $S$  (superficie del avión a diseño) (ver Figura 2.4). A continuación se realiza un mallado computacional de dicho elemento (ver Figura 2.2), sobre esa malla computacional finalmente se resuelven las ecuaciones de la mecánica de los fluidos.

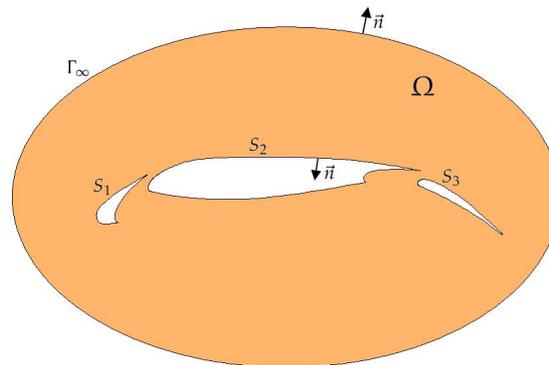


Figura 2.4: Visión esquemática de un hipersustentador en 2D

### 2.2.1. Evolución de la Dinámica de Fluidos Computacional

La CFD ha experimentado un rápido avance desde que las computadoras comenzaron a adquirir relevancia. Fue en el periodo comprendido entre 1967 y 1975, cuando

<sup>3</sup>Número de Mach  $M = v/c$ , donde  $v$  es la velocidad del aire y  $c$  la velocidad del sonido en el aire. Este parámetro adimensional es una medida de la compresibilidad del aire y representa una relación entre la velocidad del fluido y la velocidad del sonido en el mismo. Para valores menores de 0,3 se puede considerar la hipótesis de aire incompresible.

<sup>4</sup>Un mecanismo hipersustentador es un aparato de control directo del flujo aerodinámico empleado para aumentar la sustentación en el despegue y aterrizaje de la aeronave.

se demostró la posibilidad de abordar problemas de interés ingenieril mediante el estudio de modelos simplificados de la realidad. El ejemplo más significativo fue el método de paneles para resolver la ecuación potencial [58] sobre perfiles bidimensionales.

A principios de los 80 el grupo de Dassault/INRIA calculó por primera vez el flujo transónico potencial alrededor de un avión completo [17, 18], lo que fue una inspiración para la comunidad de la CFD al demostrarse, en verdaderos casos de interés industrial, la viabilidad de los esquemas matemáticos desarrollados durante años.

A mediados de la misma década, gracias a los avances en hardware y algoritmia [22, 63, 109, 97] fue posible la resolución de las ecuaciones de Euler sobre un avión completo.

A finales de los años 80 y principios de los años 90 aparecieron los procedimientos para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes [9, 68, 112, 61, 57], de modo que fueron posibles las primeras simulaciones de flujos viscosos complejos.

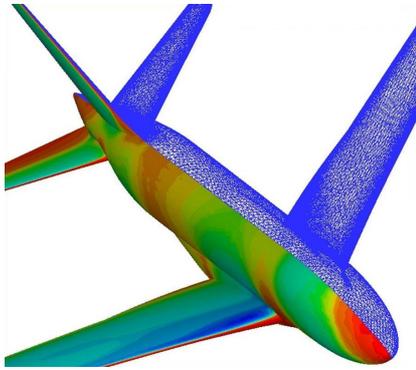


Figura 2.5: Solución de las ecuaciones de Euler (variable presión) sobre medio avión.

La introducción de los modelos de turbulencia elaborados se produjo en los años 90 [102, 7, 116]. De esta manera se empezó a trabajar con flujos a altos números de Reynolds en los cuales era necesario estimar efectos turbulentos mediante el promedio de Reynolds de las componentes que fluctúan.

En definitiva, el desarrollo intensivo de algoritmos numéricos en las últimas dos décadas del siglo XX ha hecho de la CFD una herramienta consolidada y clave para el análisis aerodinámico. A día de hoy, se encuentran bien definidos los principios en el diseño e implementación de esquemas numéricos robustos que resuelven con exactitud ondas de choque y discontinuidades de contacto en regímenes compresibles.

La CFD ha sido aplicada con éxito a multitud de actividades dentro del campo aeronáutico. En algunas de ellas resulta actualmente imprescindible y su aplicación ha sido masiva como es el caso del análisis/diseño de la forma de las superficies de sustentación (ala), el diseño de dispositivos de punta de ala, el diseño de las superficies de cola, el diseño del fuselaje, la corrección de resultados de ensayos en túnel aerodinámico, la integración del grupo moto-propulsor o el diseño de las tomas del motor.

En cualquier caso, a medida que los métodos de diseño y la computación avanzan, en igual medida se desarrollan nuevas y más importantes aplicaciones de la CFD. En la actualidad, las áreas con mayores necesidades de desarrollo son el análisis de generadores de vórtices, los límites de bataneo<sup>5</sup>, la aeroelasticidad, el diseño para la estabilidad y control o el análisis del ruido en cabina y el ruido exterior

<sup>5</sup>Antes de alcanzar la pérdida, en el denominado límite de bataneo, el avión se ve afectado por fenómenos y comportamientos particulares (alabeo, cabeceo, vibraciones, sacudidas, temblores, etc), que indican la proximidad de una condición crítica.

### 2.2.2. Ecuaciones que modelizan los problemas aeronáuticos

En este apartado se describirán las modelizaciones más usuales en la industria, para el estudio del comportamiento de los fluidos (ecuaciones de Euler y ecuaciones RANS).

#### Ecuaciones de Euler

El comportamiento de los fluidos ideales está gobernado por las ecuaciones de Euler, que modelizan la conservación de masa, el momento (con viscosidad nula) y la energía para un fluido ideal<sup>6</sup>. La forma más habitual de plantear las ecuaciones de Euler es en su forma conservativa:

$$\begin{cases} \partial_t U + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0, & \text{en } \Omega, \quad t > 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{n}_S = 0, & \text{sobre } S, \quad t > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

donde, en el campo lejano  $\Gamma_\infty$ , al tratarse de un sistema hiperbólico, las condiciones de contorno son especificadas para las ondas entrantes (en función del problema a simular), mientras que las ondas salientes son determinadas por la propia solución en el interior del dominio  $\Omega$ . El vector  $\vec{n}_S$  es un vector unitario normal a la pared  $S$  apuntando hacia afuera del dominio  $\Omega$ ,  $U^T = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, \rho E)$  son las variables conservativas y los flujos convectivos se pueden escribir como  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$$F_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_x v_z \\ \rho v_x H \end{pmatrix}, \quad F_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x \\ \rho v_y^2 + P \\ \rho v_y v_z \\ \rho v_y H \end{pmatrix}, \quad F_z = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x \\ \rho v_z v_y \\ \rho v_z^2 + P \\ \rho v_z H \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  es la velocidad en un sistema de referencia cartesiano,  $E$  es la energía total,  $P$  la presión del sistema y  $H$  la entalpía.

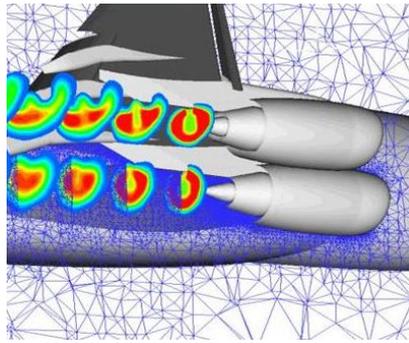


Figura 2.6: Solución de las ecuaciones RANS sobre un avión.

Al sistema de ecuaciones de Euler se le debe añadir la ecuación de estado que define las propiedades termodinámicas del fluido. En el caso de suponer un gas perfecto ( $P/\rho = \mathcal{R}eT$ ) se tiene que:

$$P = (\gamma - 1) \rho \left[ E - \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right], \quad (2.3)$$

donde  $E = H - P/\rho$  y la relación de calores específicos es  $\gamma = C_p/C_v \approx 1,4$ .

Los flujos no viscosos modelizados por las ecuaciones de Euler pueden evolucionar hacia discontinuidades (choques o discontinuidades de contacto). Esas situaciones vienen descritas por soluciones débiles (integrales) de las ecuaciones conservativas de Euler. Las relaciones de Rankine-Hugoniot permiten calcular el salto de las variables del fluido al atravesar una discontinuidad  $\Sigma$  que se desplaza con una

<sup>6</sup>Un fluido ideal es aquel cuyo comportamiento es de régimen estable, irrotacional, incompresible y no viscoso.

velocidad  $s$  en la dirección  $\vec{n}_\Sigma = (n_{\Sigma x}, n_{\Sigma y}, n_{\Sigma z})$ , normal a la curva de discontinuidad respecto de un observador en reposo respecto del fluido:

$$\left[ \vec{F} \cdot \vec{n}_\Sigma \right]_\Sigma - s [U]_\Sigma = 0, \quad (2.4)$$

donde  $[A]_\Sigma$  representa el salto en la cantidad  $A$  al atravesar la curva de discontinuidad  $\Sigma$ .

### Ecuaciones *Reynolds-Averaged Navier-Stokes*

Una gran variedad de problemas de dinámica de fluidos de la vida real requiere modelizar y simular flujos turbulentos complejos. Sin embargo, es bien sabido que el coste de simular tales flujos, incluso para números modestos de Reynolds, es extremadamente alto [27]. Por otro lado, la simulación numérica directa de flujos turbulentos, con números razonablemente grandes de Reynolds, excede sencillamente la capacidad de computación actual. Un enfoque muy extendido en la CFD para solucionar este problema es el empleo del modelos RANS (*Reynolds Average Navier-Stokes*), que consisten en las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas, a las que se le añade un modelo de turbulencia.

El sistema completo de las ecuaciones compresibles de Navier-Stokes (sin términos fuente y suponiendo condición adiabática en la pared sólida), se puede formular de manera conservativa de la siguiente forma,

$$\begin{cases} \partial_t U + \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} - \vec{F}^v) = 0, & \text{en } \Omega, \quad t > 0 \\ \vec{v} = 0, & \text{sobre } S, \quad t > 0 \\ \partial_n T = 0, & \text{sobre } S, \quad t > 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

donde  $\partial_n = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$  es la derivada normal, y las condiciones de contorno en el campo lejano se definen igual que en el caso de las ecuaciones de Euler. Los flujos viscosos se denotan como  $\vec{F}^v = (F_x^v, F_y^v, F_z^v)$  siendo

$$F_i^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{ix} \\ \sigma_{iy} \\ \sigma_{iz} \\ \sigma_{ij} v_j + k \partial_i T \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

donde se aplica el criterio de suma para los índices repetidos, y  $\sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzos que agrupa todas las componentes del esfuerzo sobre un volumen de control. De manera estandar  $i$  indica el plano normal sobre el que actúa el esfuerzo y  $j$  es la dirección de la componente del esfuerzo. Si empleamos las suposiciones de gases perfectos y un fluido Newtoniano además de la relación de Stokes, el tensor de esfuerzos se puede escribir como:

$$\sigma_{ij} = (\mu + \mu_t) (\partial_i v_j + \partial_j v_i) + \frac{2}{3} (\mu + \mu_t) (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \delta_{ij}, \quad (2.7)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica y  $\mu_t$  la viscosidad turbulenta. La viscosidad dinámica  $\mu$  y la conductividad térmica  $k$  se obtienen de relaciones empíricas (ley de Sutherland

y fórmula de Eucken, respectivamente). Por otro lado, la viscosidad turbulenta se obtiene de las ecuaciones de cierre que modelizan la turbulencia. Además, este sistema de ecuaciones debe ser completado por una ecuación de estado (2.3).

Por último, respecto del modelo de cierre de la turbulencia, a modo ilustrativo, seleccionaremos el modelo Spalart-Allmaras de una ecuación [102], en el cual se introduce una variable de trabajo  $\tilde{\nu}$  para evaluar la viscosidad dinámica turbulenta, que es gobernada por la siguiente ecuación de transporte

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = c_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left[ \nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu})\nabla\tilde{\nu}) + c_{b2}(\nabla\tilde{\nu})^2 \right] - c_{w1}f_w \left[ \frac{\tilde{\nu}}{d} \right]^2. \quad (2.8)$$

En este caso se está suponiendo que el flujo es completamente turbulento. Por lo tanto la viscosidad turbulenta dinámica se calcula como

$$\mu_t = \rho\nu_t, \quad \nu_t = \tilde{\nu}f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad (2.9)$$

donde el término de producción se expresa como

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad (2.10)$$

donde  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i)$  es el tensor de vorticidad y  $d$  es la distancia a la pared más cercana. La función  $f_w$  viene dada por

$$f_w = g \left[ \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2}. \quad (2.11)$$

Finalmente, se debe asignar un valor a todas las constantes presentes en la formulación [102] con objeto de cerrar la formulación de este modelo de turbulencia.

### 2.2.3. Discretización del dominio físico en problemas aeronáuticos

La discretización del dominio físico continuo en un dominio computacional discreto constituye un aspecto fundamental de cualquier método numérico de resolución de EDPs. En el campo aeronáutico son dos las principales alternativas a la hora de trabajar con geometrías complejas:

- Métodos estructurados multibloque [110, 96, 98] (ver Figura 2.7). En estos métodos el dominio físico se divide en bloques en cuyo interior se generan mallas estructuradas que se caracterizan por presentar los datos ordenados en celdas de cuadriláteros o hexaedros donde son fácilmente identificables las 2 ó 3 direcciones espaciales y los nodos vecinos a un nodo al estar asociados a un sistema de coordenadas curvilíneas con las líneas de malla. Todo ello lleva a una simplicidad y rapidez de los algoritmos empleados. Sin embargo, la estrategia estructurada multibloque presenta grandes dificultades de mallado en configuraciones complejas.
- Métodos no estructurados [10, 76, 81] (ver Figura 2.7). Los métodos no estructurados surgieron con los métodos de elementos finitos y en la actualidad están

adquiriendo mayor relevancia que los mallados estructurados multibloque debido a que permiten el mallado de superficies altamente complejas. En estas mallas compuestas generalmente por triángulos o tetraedros no existen direcciones identificables lo cual produce una menor eficiencia en la resolución numérica de las EDPs.

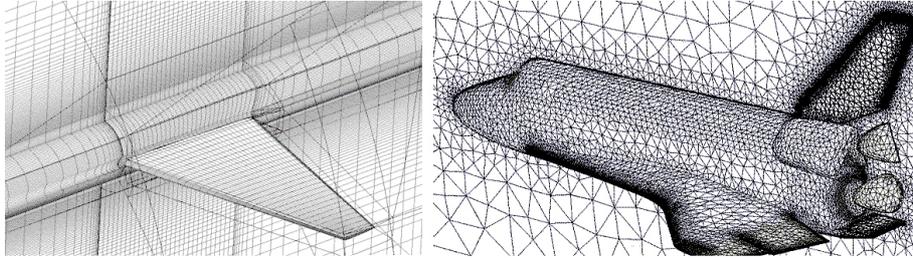


Figura 2.7: Malla estructurada (izq.) y no estructurada (der.).

En las aplicaciones CFD más avanzadas, denominadas híbridas, la base de generación de mallas para flujos viscosos se encuentra en la creación de una malla anisotrópica (no estructurada) cerca del campo lejano y una malla isotrópica (estructurada) en la cercanía del objeto que se quiere mallar para poder captar los detalles de un flujo viscoso.

#### 2.2.4. Esquemas numéricos empleados en el ámbito aeronáutico

En el ámbito industrial aeronáutico los métodos más populares para realizar la discretización espacial de las ecuaciones de Euler son [52, 95, 89, 75]:

- Los esquemas centrados a los que se añade cierta disipación artificial necesaria para resolver ecuaciones de carácter hiperbólico. En la actualidad, los métodos que han gozado de mayor popularidad en las últimas dos décadas han sido aquellos basados en un esquema de Lax-Wendroff [74] y en el esquema de Jameson-Schmidt-Turkel (JST) [63] que está asociado a una técnica de Runge-Kutta para la integración del tiempo y debido a su robustez y facilidad de implementación, se ha consolidado como el más popular de los métodos centrados entre la comunidad aeronáutica de la CFD.
- Por otro lado, se encuentran los métodos de tipo *upwind* que utilizan directamente la información ligada al aspecto hiperbólico de las ecuaciones de Euler propagándose a lo largo de las líneas características. Este punto de vista ha generado dos clases de esquemas: los *flux vector splitting* y los resolvedores del problema de Riemann (método de Godunov). El más empleado es el método del Roe [97], que considera una aproximación continua a trozos del campo fluido en cada celdilla y luego plantea la resolución local de un problema de Riemann en cada interfaz.

Respecto a la integración temporal, existen dos grandes posibilidades: los métodos implícitos y los métodos explícitos.

- Los esquemas implícitos [64] consisten en actualizar la solución a partir de los valores obtenidos en el estado actual. En este caso son admisibles grandes pasos

de tiempo siempre y cuando los autovalores de la matriz de amplificación sean pequeños. Se trata de métodos muy eficientes, capaces de alcanzar rápidamente la convergencia de la solución. Sin embargo, para las ecuaciones de Navier-Stokes no se suele resolver la formulación exacta implícita debido a la gran capacidad de memoria y coste de CPU requeridos, por lo que se emplean operadores linealizados que están asociados a una factorización exacta (ADI, LDU) o resolución aproximada (GG, GMRES, LU).

- Por otro lado, se encuentran los métodos explícitos [109] en los cuales la actualización de la solución se realiza a partir de los valores obtenidos en la iteración anterior. Estos métodos tienen limitado el paso de tiempo a través de la condición de Courant-Friedrichs-Lewy [26].

Otra técnica fundamental en la CFD se basa en el empleo de algoritmos multimalla [113, 80, 90, 91, 98, 110, 61]. Los métodos multimalla consisten en transferir los residuos a mallas más bastas, resolviendo el sistema modificado en estas mallas e interpolando los residuos otra vez a la malla fina. Los métodos multimalla poseen la característica de eliminar, en un proceso de convergencia iterativo, los errores de baja frecuencia de la solución mucho más rápidamente que si se usase solamente la malla fina.

### 2.3. Diseño óptimo en aeronáutica

La optimización es el objetivo final de todos los proyectos prácticos de diseño en los cuales han de combinarse análisis, experimentos e intuición [69]. Es bien sabido que, tal y como ocurre en el ámbito aeronáutico, cuando las variables en un problema se hacen numerosas, los experimentos caros o la intuición falla, es necesaria una aproximación sistemática al problema. Esta aproximación sistemática consiste en la moderna teoría matemática de optimización que permite modelizar las relaciones matemáticas entre las diferentes variables y, haciendo uso de las ventajas de la rápida computación, localizar la solución óptima del problema.

El diseño aeronáutico se enfrenta a problemas que combinan e involucran varias disciplinas de la física (estructuras, fluidos, propulsión, etc.) en diferentes rangos de funcionamiento (aterrizaje, despegue, vuelo estable, viento racheado, etc.) y con una gran cantidad de variables de diseño (posiciones relativas de los componentes del avión, ángulos de ataque, flecha del ala, etc.). Antes de entrar a fondo sobre las técnicas matemáticas a emplear, es necesario definir cuales deben ser las características del “mejor” avión posible. Si seleccionamos la meta incorrecta, no importa cómo de bueno sea el método de análisis, ni cómo de eficiente sea nuestro procedimiento de optimización, el trabajo realizado resultará inútil.

En definitiva, en la actualidad, ciertos criterios como la función objetivo, o las variables de diseño a emplear no se pueden dejar a decisión del algoritmo o de la máquina, lo que nos obliga a responder a priori a tres cuestiones básicas [72, 70]: ¿Qué significa

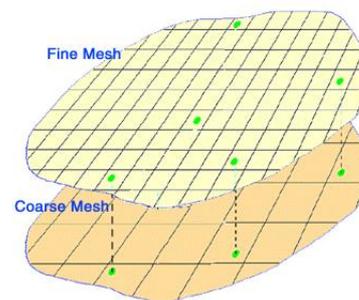


Figura 2.8: Esquema multimalla en 2 dimensiones.

“lo mejor posible”?, ¿Cómo podemos estimar las características de diseños para poder compararlos de una manera cuantitativa? y finalmente ¿Cómo podemos seleccionar las variables de diseño que rendirán en un grado óptimo?.

### 2.3.1. Técnicas de optimización en aerodinámica

En diseño aerodinámico, a pesar de los importantes avances científicos realizados la MFC todavía no ha sido explotada de manera efectiva en un ámbito industrial debido a ciertos requerimientos esenciales en el diseño que no han sido completamente resueltos [55]. Algunas de estas dificultades son las siguientes:

1. No se dispone de una precisión asegurada. Este aspecto incide sobre la exactitud necesaria en las predicciones (especialmente en el cálculo de la resistencia), modelizando correctamente todos los fenómenos físicos involucrados en los regímenes turbulentos a alto número de Reynolds.
2. Un coste computacional y humano aceptable. Ciertas aplicaciones de diseño, aún siendo factibles, deben ser descartadas debido a la gran cantidad de tiempo de cálculo requerido. Asimismo, la necesidad de contratar personas exclusivamente dedicadas a ciertos procesos sin automatización frena el desarrollo y aplicación de la MFC en el sector industrial privado.
3. El análisis de una configuración completa del avión es algo complejo, incluso sin la optimización, son pocos los programas lo suficientemente bien documentados y mantenidos que se pueden emplear.
4. Son posibles funciones objetivo ruidosas que varían de una manera no suave causando dificultades a muchos optimizadores.
5. Un optimizador se limita a considerar diseños que pueden ser descritos por el sistema de parámetros seleccionado. Esto hace que las variables de diseño marcarán el espacio de diseño donde nos podemos mover, y diseños revolucionarios sólo pueden venir de parametrizaciones lo suficientemente amplias y generalizadas.

En la actualidad, existe una gran cantidad de métodos de optimización multivariable que se emplean en diferentes ámbitos de la aeronáutica. Estos van desde los simples buscadores en tabla que consisten en un acercamiento estructurado para examinar el espacio de diseño, hasta métodos mucho más sofisticados como son:

- Algoritmos evolutivos y genéticos [18], basados en los principios de la evolución de Darwin.
- Métodos gradiente. Estos métodos implican el cómputo del gradiente de la función objetivo con respecto de las variables del diseño. El vector gradiente apunta en la dirección de la pendiente más escarpada, y existen diferentes alternativas:
  - Método de la máxima pendiente. Las variables del diseño se modifican para buscar el movimiento en la dirección del gradiente. Dicho método se modifica, generalmente, para hacerlo más robusto y eficiente.

- Método del gradiente conjugado y los métodos quasi-Newton que estiman valores de las segundas derivadas para mejorar la dirección de la búsqueda.
- Método de Newton. Es uno de los mejores métodos de optimización pero exige el costoso cálculo del Hessiano  $H$  para poder evaluar la expresión de avance  $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - H^{-1}(\vec{x}_k) \vec{\nabla} f(\vec{x}_k)$ , donde  $\vec{x}$  es el vector de variables,  $f$  la función objetivo que se pretende minimizar y  $k$  la iteración del proceso de optimización.

Respecto de los funcionales a optimizar, es fundamental destacar que el diseño de un avión siempre es un compromiso de varias funciones que miden su comportamiento. Estas funciones pueden ser tan simples como medidas de las fuerzas ejercidas por el aire sobre el avión, véase resistencia, sustentación, o momentos, hasta complejas funciones que miden aspectos mucho más elaborados y difíciles de evaluar como: mínimo gasto directo de explotación, mínimo coste sobre el ciclo vital del avión, máximo beneficio, máximo rendimiento de la inversión, etc.

### 2.3.2. Variables de diseño aeronáuticas

Las variables de diseño tienen un papel fundamental en el proceso de optimización de un avión [3, 31, 32]. De su elección dependerá, en gran medida, el desarrollo de la optimización y el mínimo del funcional alcanzado. Existen diferentes tipos de variables de diseño que pueden ir desde la posición independiente de cada nodo discreto de la superficie del avión hasta los puntos de control de las NURBS [92] que definen una determinada superficie. La elección de una u otra clase de variables de diseño dependerá fuertemente del elemento del avión que se desee diseñar y del funcional que se pretenda optimizar.

### 2.3.3. Diseño óptimo basado en el cálculo de gradientes

En el ámbito aeronáutico, la optimización de forma fue inicialmente planteada, a finales de los 70, por R. Hicks [50], quien con una modelización simplificada de los fluidos y empleando métodos de aproximación de gradientes por diferencias finitas progresivas, logró evaluar el gradiente de un funcional aerodinámico respecto de variables de diseño (funciones de deformación de forma) y cuyo valor empleaba en un algoritmo de minimización. A partir de esos primeros desarrollos el empleo de técnicas basadas en los gradientes se fué haciendo cada vez más popular en el ámbito aeronáutico a medida que aumentaban los recursos computacionales y mejoraba el modelizado de los problemas de la mecánica de los fluidos.

La aplicación aeronáutica del diseño óptimo de forma en sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales considera un dominio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  ( $d=2$  ó  $3$ ), de contorno  $\delta\Omega$ . Este contorno  $\delta\Omega$  está a su vez dividido en una serie de contornos disconexos "regulares"<sup>7</sup> que se denominan: campo lejano  $\Gamma_\infty \subset \delta\Omega$  y una serie de contornos interiores  $S \subset \delta\Omega$  (superficie del objeto a diseño) (ver Figura 2.9).

<sup>7</sup>Si bien, en configuraciones complejas, es fácil encontrar ciertas singularidades geométricas como son los bordes de salida de los perfiles aerodinámicos que termina en forma de cuña.

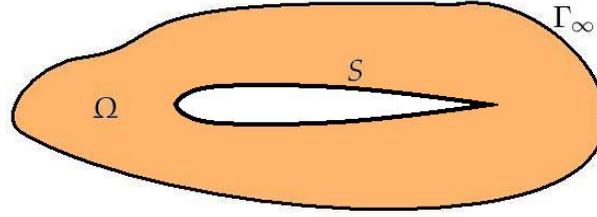


Figura 2.9: Problema de optimización de forma en 2D.

En estos problemas, de manera general, se define la función de coste a ser minimizada  $J$  de las variables fluidas  $U$  sobre el contorno "regular"  $S$ :

$$J = \int_S j(U) ds. \quad (2.12)$$

El problema de optimización del funcional  $J$  mediante la variación de la geometría de la frontera  $S$ , consistirá en encontrar  $S^{\text{mín}}$  para la cual

$$J(S^{\text{mín}}) = \underset{S \in \mathcal{S}_{ad}}{\text{mín}} J(S), \quad (2.13)$$

donde  $\mathcal{S}_{ad}$  es el conjunto de geometrías admisibles del contorno  $S$ .

En la práctica aeronáutica, el funcional más elemental consiste en optimizar los coeficientes adimensionales de resistencia  $C_D$ , sustentación  $C_L$  o fuerza lateral  $C_{SF}$ . En este caso, la función objetivo sobre la superficie  $S$  se define como:

$$\int_S \left( C_P \vec{n} - \frac{1}{C_\infty} \vec{n} \cdot \sigma \right) \cdot \vec{d} ds, \quad C_P = \frac{P - P_\infty}{C_\infty}, \quad (2.14)$$

donde  $\vec{n}$  es el vector unitario normal exterior a la superficie  $S$ , la presión sobre la superficie es  $P$ , el coeficiente de presiones se denota como  $C_P$ , y  $\sigma$  es el tensor de esfuerzos viscosos. Finalmente el subíndice  $\infty$  es empleado para referirnos a cantidades evaluadas en el campo lejano y el vector  $\vec{d}$  se evalúa como

$$\vec{d} = \begin{cases} (\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \beta), & C_D \text{ (coef. de resistencia),} \\ (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0), & C_L \text{ (coef. de sustentación),} \\ (-\sin \beta \cos \alpha, -\sin \beta \sin \alpha, \cos \beta), & C_{SF} \text{ (coef. de fuerza lateral),} \end{cases} \quad (2.15)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de ataque del avión y  $\beta$  es el ángulo de deslizamiento lateral (ver Figura 2.10)

El diseño óptimo aeronáutico pretende encontrar el mínimo de un funcional a través del control de la EDP que modeliza el comportamiento del fluido alrededor del avión y todo ello empleando técnicas de deformación de superficies (contornos del dominio). Antes de desarrollar los procedimientos que se emplearán, es necesario destacar que en el problema clásico de diseño de forma óptima, se deben plantear las siguientes cuestiones matemáticas:

- Existencia de minimizadores. Es preciso modelizar funciones objetivo que garanticen un buen comportamiento del espacio de diseño. La optimización con restricciones también es un ingrediente fundamental en aplicaciones prácticas.

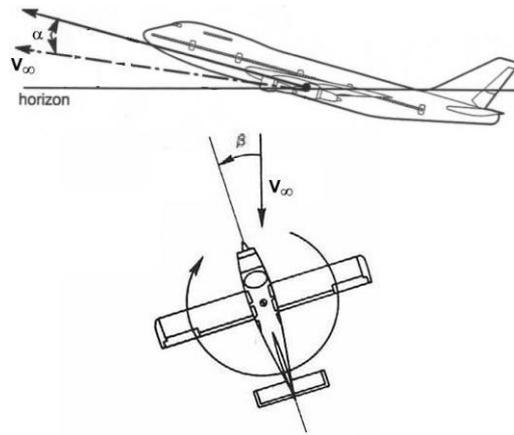


Figura 2.10: Ángulo de ataque  $\alpha$  y deslizamiento lateral  $\beta$ .

- Unicidad. En problemas de esta tipología no es posible, de manera general, asegurar la unicidad de los minimizadores. Además, por otro lado, es frecuente que aparezcan varios mínimos locales. Por ese motivo, al emplear técnicas basadas en el cálculo de los gradientes, usualmente se deben realizar diferentes procesos iterativos de optimización partiendo de diferentes estados iniciales.
- Aproximación numérica. Se debe introducir una discretización adecuada del funcional  $J$ , así como de las ecuaciones diferenciales que proporcionan el valor de  $U$ . En general, el problema en el marco continuo (2.13) se sustituye por el siguiente problema discretizado: Encontrar  $S_h^{\min}$ , dentro de un juego de geometrías discretas admisibles del contorno  $\mathcal{S}_{h,ad}$ , para la cual

$$J_h(S_h^{\min}) = \min_{S_h \in \mathcal{S}_{h,ad}} J_h(S_h),$$

donde  $J_h$  es la discretización espacial de  $J$ , siendo  $h$  una determinada longitud característica de la discretización, la cual es seleccionada en función de una escala característica del problema y las peculiaridades del comportamiento del fluido.

- Cálculo del gradiente. Los métodos numéricos para resolver las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes son generalmente no diferenciables [97, 63] y, por lo tanto, estrictamente hablando, en ciertos puntos del sistema no existe el gradiente de la ecuación discretizada.

Como solución a los enormes recursos computacionales requeridos por los métodos clásicos de optimización de funcionales de interés aerodinámico, la mejor estrategia se encuentra en el empleo sistemático de ideas inspiradas en la teoría de control. Para ello se supondrá que la superficie aerodinámica (típicamente el ala) es un elemento que produce sustentación o resistencia controlando o modificando el flujo de aire. Usando técnicas de la teoría de control, el gradiente de un funcional con respecto a modificaciones en la geometría a diseño puede ser determinado indirectamente solucionando una ecuación adjunta que tenga coeficientes definidos por la solución de las ecuaciones del flujo.

Como introducción [43] a la metodología dual empleada, supongamos que se desea minimizar el funcional  $J(U, \alpha)$  donde  $U$  son las variables fluidas que se obtienen a través de la resolución del problema lineal  $N(U, \alpha) = 0$ . Por otro lado, emplearemos una variable de diseño a la que denominaremos  $\alpha$ . La función de coste  $J$  se puede linealizar alrededor de una solución de referencia  $U_0$  correspondiente a  $\alpha = 0$  y se tiene

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \left. \frac{\partial J}{\partial U} \right|_{U_0} \frac{dU}{d\alpha} + \frac{\partial J}{\partial \alpha}. \quad (2.16)$$

A su vez,  $dU/d\alpha$  debe satisfacer la linealización de las ecuaciones que gobiernan el sistema

$$\frac{\partial N}{\partial U} \frac{dU}{d\alpha} + \frac{\partial N}{\partial \alpha} = 0. \quad (2.17)$$

Introduciendo la siguiente notación

$$V = \frac{dU}{d\alpha}, \quad A = \frac{\partial N}{\partial U}, \quad g^T = \frac{\partial J}{\partial U}, \quad f = -\frac{\partial N}{\partial \alpha}, \quad (2.18)$$

la ecuación (2.16) se puede escribir como

$$\frac{dJ}{d\alpha} = g^T V + \frac{\partial J}{\partial \alpha}, \quad (2.19)$$

sujeto a la resolución de la ecuación linealizada

$$AV = f. \quad (2.20)$$

Según esta formulación, la variación total de la función objetivo  $J$  debido a una variación de la variable de diseño  $\alpha$  se puede calcular mediante la evaluación de dos términos:

- La sensibilidad de la función objetivo  $J$  debido a perturbaciones de las variables de diseño  $\partial J/\partial \alpha$  (término de cómputo no costoso).
- La evaluación de  $g^T V$ , término de cómputo costoso, pues exige conocer  $V$ , solución del sistema linealizado (2.20) que tiene una naturaleza semejante a las ecuaciones de estado. La resolución de este sistema linealizado para cada variable de diseño  $\alpha$  es en la práctica inviable y por ello conviene introducir el estado adjunto  $A^T v = g$  (punto de vista dual), con el que fácilmente se puede demostrar que  $g^T V \equiv v^T f$ .

En problemas de diseño óptimo de forma, el número de diferentes funciones  $f$  a evaluar coincide con el número de variables de diseño, y el número de diferentes funciones  $g$  a evaluar está relacionada con el número de funcionales de los que se desee calcular su gradiente respecto de las variables fluidas. En una aplicación típica aeronáutica el número de funcionales de los que deseamos calcular los gradientes (función objetivo + funcionales que provienen de las restricciones) es muy inferior al número de variables de diseño que se puedan emplear, por lo que la aproximación dual resulta mucho más apropiada dado que sólo exige una resolución del problema directo y otra del problema adjunto para obtener tantos gradientes del funcional  $J$  respecto de las variables de diseño como se desee.

En la práctica existen dos enfoques para formular las ecuaciones adjuntas y por ende para aproximar el gradiente de la función de coste discreta con objeto de poder aplicar un algoritmo clásico de descenso: el método discreto y el método continuo. El enfoque discreto [39, 40, 29, 86] está basado en el cálculo de los gradientes en el problema finito dimensional asociado a la discretización del problema de optimización. En contrapartida, en el enfoque continuo [11, 20, 60] la dirección de descenso es obtenida a través de la aproximación de una dirección de descenso para el problema continuo.

La aplicación de la teoría de control en sistemas reales es complicada pues en el caso de las ecuaciones de Euler en 3D, los métodos numéricos más eficientes (JST, Roe, etc.) no son diferenciables (ver por ejemplo [47] o referencias más prácticas como [52]). En este caso, no hay un modo natural para calcular las variaciones del funcional discreto (adjunto discreto) y para superar esta dificultad se han desarrollado dos enfoques diferentes:

1. Diferenciación Automática [25, 83], que básicamente consiste en diferenciar el esquema numérico, incluso si no es diferenciable. En la práctica, esto se hace mediante diferenciación línea a línea del código computacional.
2. Enfoque continuo consiste primero, en tomar el sistema continuo que gobierna el problema de fluidos, linealizarlo y obtener una dirección de descenso del funcional continuo  $J$  y, en segundo lugar, usar la aproximación numérica de la dirección de descenso en el esquema numérico original.

Respecto de este segundo enfoque del problema, otra dificultad importante reside en la posible falta de regularidad de la solución del modelo continuo. Entonces, incluso al nivel del modelo continuo, la derivada de la función de coste tiene que ser calculada con cuidado alrededor del choque en la solución. Esto ha sido realizado por diferentes autores con diferentes enfoques (ver [108], [45] o [15]). En esta tesis, se realizará un análisis detallado de las ecuaciones continuas linealizadas en presencia de choques para comprobar la necesidad de imponer, o tener en cuenta de algún modo, una condición interna sobre el choque a la hora de resolver la ecuación adjunta (condiciones internas de contorno para el esquema adjunto [42]). Sin embargo, esta técnica requiere un análisis detallado de la posición exacta del choque, lo cual es difícil de obtener numéricamente en problemas complejos.

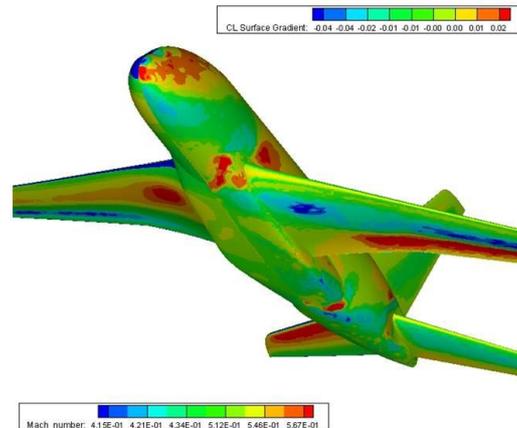


Figura 2.11: Sensibilidad de la sustentación respecto de movimientos infinitesimales de la superficie.

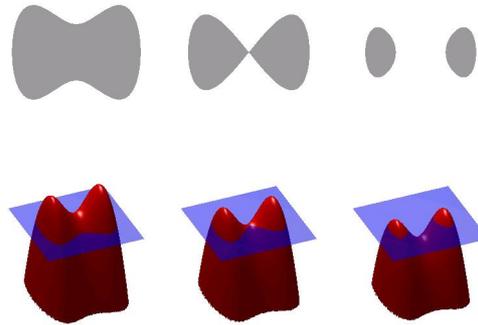


Figura 2.12: Subdominios generados por el contorno  $\Gamma$ .

## 2.4. Método de los conjuntos de nivel

El método de conjuntos de nivel o, en inglés, *level set* [100, 2, 23, 82, 88, 107] es un procedimiento para describir el movimiento de interfases a través del empleo de un punto de vista euleriano<sup>8</sup>.

La principal desventaja de los procedimientos lagrangianos<sup>9</sup> estriba en que si dos superficies en movimiento llegan a chocar entre sí, no es posible obtener una solución a la nueva geometría. En el ámbito de la optimización de forma, este tipo de esquemas se emplean de tal manera que la interfase separa el cuerpo sólido y el fluido que lo rodea, y se mueve con una velocidad normal que proviene del cálculo de gradientes del funcional de interés respecto de movimientos infinitesimales en la dirección normal a la superficie.

La metodología de *level set* permite calcular la evolución de una interfase o frente de avance, de tal manera que la posición inicial del frente se toma como el nivel 0 de una función  $\Phi$  definida en un dominio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ó  $3$ ) de la siguiente manera

$$\Phi_t + F \left| \vec{\nabla} \Phi \right| = 0, \quad \text{en } \Omega \quad (2.21)$$

donde  $\Gamma(t) = \{\vec{x} | \Phi(\vec{x}, t) = 0\}$  es el frente de avance, y  $F$  es la velocidad del *level set* en todo el dominio  $\Omega$ .

La posición del frente en el tiempo  $t$  está dada por  $\{\vec{x} | \Phi(\vec{x}, t) = 0\}$  donde este corte no tiene porqué ser una curva única a medida que el tiempo avanza (ver Figura 2.12).

La optimización mediante *level set* permite resolver una serie de problemáticas que se plantean al tratar de diseñar mediante el empleo de optimización de forma. En la Figura 2.13 se exponen los problemas clásicos que puede resolver esta formulación:

- El primer ejemplo refleja el problema resultante cuando se cruzan los vectores de desplazamiento de puntos sobre la superficie. En esta situación, una formulación tradicional no permitiría el cálculo de una nueva forma del objeto dado que existe un área (rayada en rojo) común al desplazamiento de los contornos.

<sup>8</sup>Según este punto de vista, el marco de referencia permanece fijo en el espacio y las coordenadas están fijas en el espacio

<sup>9</sup>Según este punto de vista, el marco de referencia (observador) envuelve a la interfase en movimiento y las coordenadas se mueven junto con la interfase.

- El segundo ejemplo ocurre cuando la superficie se deforma de tal manera que alcanza a otro objeto. La metodología *level set* permite que los dos objetos se fusionen.
- Por último, el caso de un cuerpo que se divide en dos debido a la distribución de velocidades de la interfase que induce esa división.

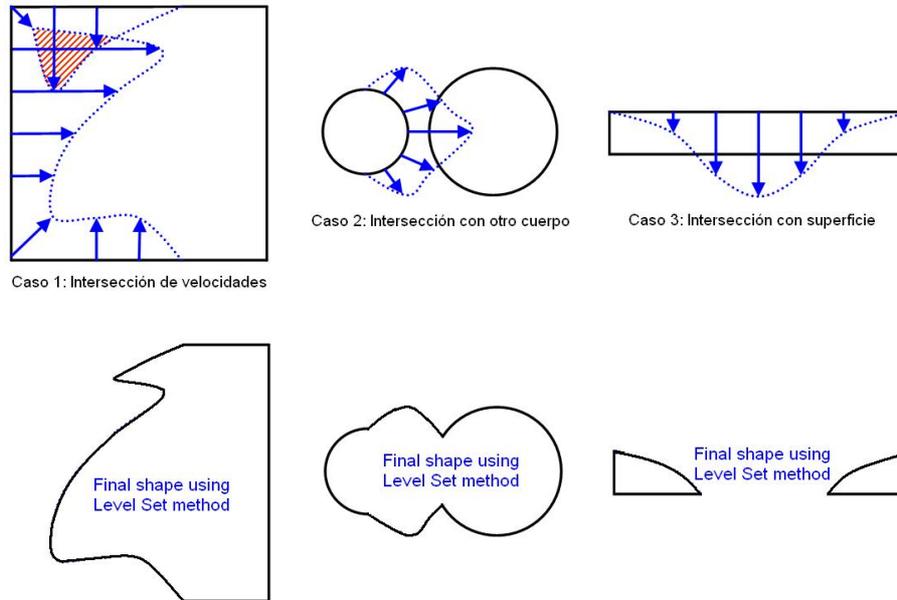


Figura 2.13: Problemas resolubles mediante la técnica de conjuntos de nivel (arriba). Forma final al aplicar la técnica de conjuntos de nivel (abajo).

### 2.4.1. Aplicación al diseño óptimo aerodinámico

Técnicamente la aplicación del método de conjuntos de nivel al ámbito aeronáutico es compleja debido a que la discretización del espacio física empleada para la resolución de las ecuaciones que rigen el comportamiento de los fluidos es muy diferente a la necesaria para la resolución de la ecuación de los *level set* (2.21).

Otro aspecto importante de la implementación de este método es la necesidad de definir un campo de velocidades  $F$  sobre todo el dominio  $\Omega$ . Es decir, la velocidad  $F$  debe ser definida para todos los niveles y no sólo en el nivel cero que se corresponde con la interfase. En un problema de diseño de forma donde el funcional a minimizar está definido sobre el nivel 0, sólo se conoce la velocidad de avance de la interfase (gradiente del funcional respecto de variaciones infinitesimales de la superficie) y es por ello necesario determinar una velocidad extrapolada  $F_{ext}$ .

La propiedad más deseable para la velocidad extrapolada es que mueva los niveles vecinos de tal manera que la función de distancia<sup>10</sup> con signo se preserve. El modo de conseguir esto definiendo la velocidad extrapolada de modo que

$$\vec{\nabla} F_{ext} \cdot \vec{\nabla} \Phi^{temp} = 0, \quad (2.22)$$

<sup>10</sup>Función que mide la distancia euclídea al conjunto de nivel 0 desde un punto cualquiera.

donde  $\phi^{temp}$  es la función de distancia con signo y tal que

$$F_{ext} = F \text{ en los puntos } (x, y) \text{ donde } \Phi = 0. \quad (2.23)$$

Una vez aclarado el significado de la velocidad  $F$  en todo el dominio  $\Omega$ , a la hora de resolver (2.21), debemos tener en cuenta que se trata de una EDP cuyos términos se pueden identificar con la forma general de una ecuación de Hamilton-Jacobi [100]:

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}(\vec{\nabla}u) = 0, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.24)$$

donde  $\mathcal{H}$  es el operador hamiltoniano. Por otro lado,  $\tau$  denota una triangularización en  $\mathbb{R}^d$ ,  $\tau = \{T_1, T_2, \dots, T_{|\tau|}\}$  cubriendo todo un dominio  $\Omega$  (nótese que esta triangularización es diferente a la empleada para discretizar la ecuación de los fluidos). Por último la solución numérica en el vértice  $v_j$  de la triangularización en el tiempo  $n\Delta t$  se denotará como  $u_j^n$ . Una aproximación para la ecuación (2.24) es de la forma

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \mathcal{H}_j(\vec{\nabla}u_1^n, \vec{\nabla}u_2^n, \dots, \vec{\nabla}u_{|\tau|}^n, x), \quad (2.25)$$

donde  $\mathcal{H}_j$  es el Hamiltoniano numérico. A continuación se describe el algoritmo del esquema explícito implementado para la resolución de la ecuación de *level set* en mallados triangulares no estructurados en dos dimensiones [100]. Este algoritmo se desarrolla en los siguientes pasos

Paso 1. Inicializar  $\phi_i^* = \omega_i = 0, i = 1, 2, \dots, |V|$ .

Paso 2. Para cada  $T \in \tau, i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} & T \xrightarrow{\text{local}} \text{simplex}(x_1, x_2, x_3) \\ & \text{Función base lineal: } N_i(x) = \{N_i(x) \in P_1 | N_i(x_j) = \delta_{ij}, j = 1, 2, 3, x \in T\} \\ & \bar{F} = \frac{1}{\text{área}(T)} \int_T F(x) dx \\ & \vec{n}_i = 2 \text{área}(T) \vec{\nabla}_i \\ & \vec{\nabla} \phi = \sum_{j=1}^3 \vec{\nabla} N_j \phi_j \\ & K_i = \frac{\bar{F} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n}_i}{2 |\vec{\nabla} \phi|} \\ & \delta \phi = \sum_{l=1}^3 K_l \phi_l \\ & \delta \phi_i = K_i^+ (\sum_{l=1}^3 K_l^-)^{-1} \sum_{l=1}^3 K_l^- (\Phi_i - \Phi_l) \\ & \tilde{\alpha}_i = \frac{\text{máx}(0, \delta \Phi_i / \delta \phi)}{\sum_{l=1}^3 \text{máx}(0, \delta \Phi_l / \delta \phi)} \\ & \phi_i^* = \phi_i^* + \tilde{\alpha}_i \delta \phi \\ & \omega_i = \omega_i + \tilde{\alpha}_i \text{área}(T) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Paso 3. Para cada  $v_i \in V$  realizar una integración temporal de un paso

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \Delta t \frac{(\phi_i^*)^n}{\omega_i^n} \quad (2.27)$$

#### 2.4.2. Modularización del algoritmo

La optimización mediante el empleo de una técnica de *level set* es delicada debido a la gran cantidad de herramientas computacionales que deben emplearse y al modo robusto en el que deben interrelacionar unas con otras. El algoritmo básico de optimización

mediante *level set* está dividido en cinco partes que se repetirán en bucle hasta obtener la convergencia deseada

- Paso 1. Sobre la configuración geométrica de partida se deben resolver las ecuaciones de la mecánica de los fluidos.
- Paso 2. Tras la resolución del problema directo, se resuelve el problema adjunto (empleando la misma malla que para la resolución del problema directo). Como resultado de la resolución del problema adjunto se obtiene la sensibilidad del funcional a minimizar respecto de variaciones geométricas.
- Paso 3. El gradiente del funcional debe ser combinado con las restricciones geométricas, adimensionalizado y filtrado con objeto de obtener una velocidad de avance del frente de la interfase.
- Paso 4. Se define un nuevo mallado para la resolución de la ecuación *level set* y se extrapola la velocidad de la interfase del conjunto de nivel 0 al resto del dominio.
- Paso 5. Se hace avanzar el *level set* según las velocidades calculadas en el paso anterior.
- Paso 6. Finalmente, se recupera la geometría final del *level set* y se vuelve a construir una malla con las propiedades adecuadas para la resolución de las ecuaciones de la mecánica de los fluidos.

La combinación de todos estos métodos hace que la aplicación del método de *level set* sea compleja, sobre todo si se le pretende dotar de robustez al método.

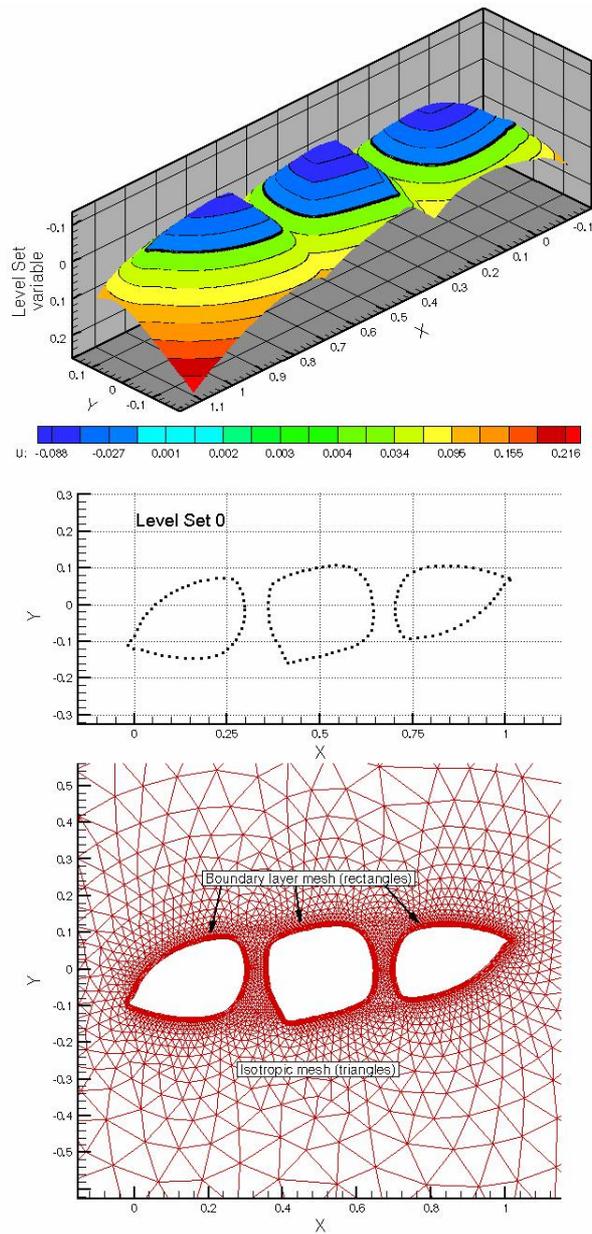


Figura 2.14: Extracción del conjunto de nivel 0 y remallado de su entorno exterior.

## Capítulo 3

---

# Control óptimo de la ecuación de Burgers

---

El objeto de este capítulo es por un lado plantear de manera rigurosa el problema de control óptimo de la ecuación hiperbólica de Burgers en una dimensión espacial lo que permitirá extraer ideas relevantes en sistemas más complejos como Euler y Navier-Stokes. Por otro lado, se introducirá el método de las direcciones de descenso alternantes que es una nueva estrategia para el cálculo de aproximaciones numéricas de minimizadores adaptada a la presencia de discontinuidades en la soluciones.

En primer lugar probaremos la existencia de minimizadores y la convergencia de las aproximaciones numéricas obtenidas minimizando aproximaciones del funcional coste obtenidas mediante esquemas de discretización de la ecuación de de Burgers. Para ello será indispensable que el esquema verifique propiedades de consistencia y monotonía que permitan asegurar que el límite de la solución aproximada es solución de entropía de la ecuación de Burgers. Luego nos centraremos en la aproximación del gradiente de la función de coste discreta con objeto de aplicar un algoritmo clásico de descenso. En particular, consideramos la aproximación basada en el cálculo de los gradientes en el problema finito dimensional asociado a la discretización del problema de optimización, y el método continuo donde la dirección de descenso es obtenida a través de la aproximación de una dirección de descenso para el problema continuo. Se verá que ambas aproximaciones producen sucesiones de minimizadores altamente oscilantes cerca de las discontinuidades. Para evitar esto, se propondrá una nueva estrategia de optimización donde la posición de la discontinuidad y el valor de la solución fuera de la discontinuidad serán tratados de manera separada. Este *método de las direcciones de descenso alternantes* es la primera aportación novedosa de esta memoria [20]. Por último se ilustrará la eficiencia de esta nueva estrategia con algunos test numéricos.

### 3.1. Introducción

El control óptimo Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) y en concreto de leyes de conservación hiperbólicos es un tema complejo desde un punto de vista teórico [118] que requiere un considerable esfuerzo computacional.

El propósito de este capítulo es presentar y discutir las aproximaciones a este problema y las dificultades que presentan en el contexto de un modelo simple de una ecuación unidimensional como la ecuación no viscosa de Burgers. Sin embargo, la mayoría de los resultados se pueden extender a ecuaciones más generales con flujos convexos. Mostraremos que los métodos de descenso desarrollados sobre la base de los enfoques actuales producen sucesiones minimizantes altamente oscilantes cuya convergencia es muy lenta. Luego, a lo largo de este capítulo, introduciremos una nueva estrategia de optimización a la que denominaremos *método de las direcciones de descenso alternantes*, que está bien adaptada a la presencia de discontinuidades en la solución, y que exhibe buenas propiedades de descenso. Es más, como se mostrará en los experimentos numéricos, el nuevo método que proponemos es mucho más robusto y eficiente en un número significativo de iteraciones del método de descenso.

Para ser más precisos, dado un horizonte de tiempo  $T > 0$ , consideramos el ecuación no viscosa de Burgers:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, & \text{en } \mathbb{R} \times (0, T), \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Dado una función objetivo  $u^d \in L^2(\mathbb{R})$  que asumimos tiene un soporte compacto con el objeto de simplificar la demostración, consideramos la función de coste a ser minimizada  $J : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$J(u^0) = \int_{\mathbb{R}} |u(x, T) - u^d(x)|^2 dx, \quad (3.2)$$

donde  $u(x, t)$  es la solución que verifica la condición de Oleinik (o de entropía generalizadas) de (3.1). Aunque este capítulo está dedicado a esta particular elección de  $J$ , la mayoría del análisis y los algoritmos numéricos se pueden adaptar a muchos otros funcionales y problema de control (ver por ejemplo [53] donde la variable de control es la no linealidad de la ley de conservación escalar).

También introducimos un conjunto de valores iniciales admisibles  $\mathcal{U}_{ad} \subset L^1(\mathbb{R})$ , que definiremos más adelante con objeto de garantizar la existencia del mínimo para el siguiente problema de optimización. Encontrar  $u^{0, \min} \in \mathcal{U}_{ad}$  tal que

$$J(u^{0, \min}) = \min_{u^0 \in \mathcal{U}_{ad}} J(u^0). \quad (3.3)$$

Este es uno de los tipos de problemas de optimización que generalmente se encuentran en el contexto de los problemas de diseño óptimo aeronáutico [42]. En esta literatura, estos problema se denominan problemas de diseño inverso, en los cuales el objetivo es localizar la superficie aerodinámica que produce una determinada distribución de presiones sobre ella. El punto débil de estas técnicas es que es necesario un diseñador experimentado que decida cual debe ser la distribución de presiones objetivo.

Como veremos, la existencia de minimizadores se puede establecer fácilmente bajo ciertas condiciones sobre  $\mathcal{U}_{ad}$ . Sin embargo, la unicidad es falsa en general, debido a la posible presencia de discontinuidades en la solución de (3.1) y la falta de convexidad del funcional.

En aplicaciones prácticas, a través de la simulación numérica, es necesario reemplazar el problema de optimización continuo por la aproximación discreta. Es entonces natural considerar la discretización del sistema (3.1) y el funcional  $J$ . Si esto se hace

de manera adecuada, cabe esperar que los minimizadores del problema aproximado discreto proporcionen aproximaciones del mínimo continuo en mallas lo suficientemente finas. Hay sin embargo pocos resultados en el contexto de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación que prueben rigurosamente que los controles óptimos discretos tienden hacia los continuos cuando el tamaño de malla tiende a cero.

Un objetivo importante de este capítulo es proporcionar un resultado de convergencia basado en el empleo de las propiedades conocidas de los esquemas monótonos conservativos y más precisamente de aquellos que satisfacen la denominada *one-sided Lipschitz condition* (OSLC) o condición unilateral de Lipschitz.

En adelante denotaremos mediante  $u_\Delta$  la aproximación de  $u$  obtenida por una discretización admisible del sistema (3.1), con un tamaño de malla  $\Delta x$  y  $\Delta t$  para la discretización en espacio y tiempo, respectivamente. También denotaremos por  $J^\Delta$  una discretización de  $J$  y por  $\mathcal{U}_{ad,\Delta}$  una versión discreta del conjunto de estados admisibles  $\mathcal{U}_{ad}$ . Finalmente, consideramos la discretización aproximada del problema de minimización

$$J^\Delta(u_\Delta^{0,\min}) = \min_{u_\Delta^0 \in \mathcal{U}_{ad,\Delta}} J^\Delta(u_\Delta^0). \quad (3.4)$$

Para valores fijos del tamaño de malla  $\Delta$ , en la mayoría de los casos es fácil probar la existencia de minimizadores del problema discreto. Pero, incluso en ese caso, su convergencia a medida que  $\Delta \rightarrow 0$  es difícil de mostrar. Esto se hará, como se menciona más arriba, en la clase de esquemas OSLC que garantizan las propiedades de compacidad necesarias.

Desde el punto de vista práctico es sin embargo más importante ser capaz de desarrollar algoritmos eficientes para calcular aproximaciones precisas de los mínimos discretos. Esto no es siempre una tarea fácil debido al gran número de parámetros involucrados, y la falta de convexidad del funcional en consideración.

Los métodos más eficientes para aproximar minimizadores son los métodos basados en los gradientes (máxima pendiente, métodos de gradiente conjugado, etc.). Nótese sin embargo que uno de los principales inconvenientes de estos métodos es que no distinguen mínimos locales de mínimos globales. Esta es una dificultad añadida en problemas con muchos mínimos locales, y esta situación no puede ser excluida en este caso debido a la dependencia no lineal del estado con respecto del dato inicial.

En cada iteración la dirección de descenso se calcula mediante el gradiente del funcional con respecto del control, en este caso el dato inicial. Entonces la sensibilidad del funcional coste discreto  $J^\Delta$  con respecto a  $u_\Delta^0$  depende de la sensibilidad de la solución del esquema numérico usado para discretizar (3.1), con respecto a  $u_\Delta^0$ , lo que implica en la práctica un número infinito de parámetros, uno para cada punto de la malla. Por lo tanto, en la práctica, calcular la sensibilidad de la función de coste requiere diferenciar el esquema numérico respecto del dato inicial.

Cuando consideramos un esquema numérico diferenciable el estado clásico adjunto proporciona un atajo a la hora de calcular las derivadas con respecto de todos los parámetros de control (puntos de la malla en este caso).

Pero para grandes y complejos sistemas, como las ecuaciones de Euler en tres dimensiones, los métodos numéricos más eficientes (*upwind*, Godunov, Roe, etc.) no son diferenciables (ver por ejemplo [47] o referencias más prácticas como [52]). En este caso, el gradiente del funcional no está bien definido y no hay un modo natural y sistemático de calcular esas variaciones.

Para resolver esta dificultad, sería natural explorar la posibilidad de emplear métodos basados en optimización no-suave, hasta ahora poco utilizadas en este contexto. Por el contrario, los siguientes dos enfoques si han sido desarrollados: la diferenciación automática, que básicamente consiste en diferenciar el esquema numérico (incluso si no es diferenciable), diferenciando línea a línea del código computacional (ver por ejemplo [83, 25]). Este enfoque frecuentemente produce oscilaciones que son precisamente debidas a la falta de diferenciabilidad. El segundo enfoque, denominado enfoque *continuo* consiste en proceder en los siguientes pasos: primero volver al sistema continuo (3.1), linealizarlo y obtener una dirección de descenso del funcional continuo  $J$  y entonces desarrollar una aproximación numérica de la dirección de descenso con los valores discretos proporcionados por el esquema numérico. Por supuesto la validez de esta aproximación para la dirección de descenso del problema discreto no está asegurada.

Pero el enfoque continuo debe hacer frente a importantes dificultades técnicas que aparecen cuando la solución desarrolla discontinuidades de choque, como en el contexto de las leyes de conservación hiperbólicas que se consideran en este capítulo. Es más, la diferenciación formal de la ecuación del estado continuo nos lleva a

$$\partial_t \delta u + \partial_x (u \delta u) = 0. \quad (3.5)$$

Pero esto sólo está justificado cuando el estado  $u$  sobre el que son calculadas las variaciones, es lo suficientemente suave y en particular continuo. En particular, esto no está justificado cuando las soluciones son discontinuas debido a los términos singulares que aparecen en la linealización sobre la posición del choque. Por lo tanto, en las aplicaciones al control óptimo también debe tenerse en cuenta la sensibilidad con respecto a la localización del choque. Esto ha sido estudiado por diferentes autores con diferentes planteamientos (ver [108, 45, 15]). La conclusión es que el sistema linealizado clásico para la variación de la solución debe ser complementado por nuevas ecuaciones derivadas de la contribución del choque.

Estos temas han sido objeto de una investigación intensiva. Sin embargo, no hay todavía una receta sistemática sobre el mejor método posible y los diferentes métodos empleados llevan a diferentes conclusiones dependiendo del problema en consideración. Esto es debido al hecho de que dos aspectos relacionados pero diferentes se han tratado de manera simultánea sin distinguir lo suficiente el uno del otro: a) la falta de regularidad de las soluciones de las ecuaciones del estado continuo hacen difícil la justificación de la linealización y añade algunos términos no esperados a la derivada clásica del funcional para tener en cuenta la contribución del salto, y b) los esquemas numéricos son no diferenciables.

El segundo objetivo de este trabajo es proponer una nueva metodología, que combine los diferentes métodos existentes y que, no sólo tenga en cuenta la presencia de choques sino que incluso pueda sacar ventaja de este hecho, en particular, se emplearán resultados que permiten derivar la linealización correcta del sistema en presencia de choques. Luego se derivará el sistema adjunto, que contiene una condición de contorno interna a lo largo del choque, la cual ha sido denominada en la literatura como *condición interna de contorno* para el esquema adjunto (ver [42] donde se considera el caso Euler quasi-1D estacionario). Desde el punto de vista numérico, el uso de este sistema adjunto hace el método más eficiente, debido a que tiene en cuenta explícitamente la sensibilidad de la solución con respecto de variaciones en el choque. Pero aplicado directamente (con la ayuda de la noción de vectores tangentes generalizados [15, 16]) el

método de descenso, en cada paso de la iteración, añade una nueva discontinuidad al estado, aumentando la complejidad de la solución.

Para solucionar esta dificultad, en el presente trabajo, se propone el nuevo *método de las direcciones de descenso alternantes* que en el proceso iterativo alterna las direcciones de descenso entre aquellas que varían la posición del choque y aquellas que no lo mueven y sólo afectan a la forma de la discontinuidad lejos del choque, de tal modo que el número de choques no se incrementa, manteniendo la complejidad global de las soluciones.

Las ecuaciones continuas linealizadas en presencia de choques solamente están bien entendidas en situaciones sencillas: leyes de conservación escalar 1-d (ver [12], [35]) con la ayuda de nociones de dualidad y soluciones reversible, con valor de medida, el caso multidimensional de leyes de conservación bajo condiciones adicionales tipo Lipschitz unilateral [13], y también cuando se sabe a priori que el choque está localizado en una única curva regular, o una hipersuperficie en mayores dimensiones (ver [16, 15, 108] para problemas 1-d), y en el caso multidimensional [78, 84] donde se consideran sistemas generales de leyes de conservación en mayores dimensiones). También nos referimos a [45] para un análisis de la linealización para perturbaciones multi-dimensionales de leyes de conservación escalares 1-d. Pero los principios generales del *método de las direcciones de descenso alternantes* que se propone en este trabajo tiene una aplicación mucho más amplia, pudiendo ser empleados también en problemas en los que la posible estructura de los choques o singularidades de la solución no está del todo entendida.

Este capítulo se divide de la siguiente manera: en la sección 3.2 se estudia la existencia de minimizadores para el problema (3.3). En la sección 3.3 se analiza la convergencia de mínimos discretos obtenidos mediante la discretización de la función de coste y del sistema (3.1) por medio de esquemas OSLC. En la sección 3.6.1 se repasan algunos resultados conocidos sobre la sensibilidad de los funcionales continuos mediante la linealización del sistema (3.1) en presencia de un choque. En la sección 3.4 se propone el nuevo *método de las direcciones de descenso alternantes* empleados en el marco continuo. En la sección 3.6 se discuten métodos más clásicos de descenso basados en el esquema continuo y en el esquema discreto. Finalmente en la sección 3.7 se presentan algunos experimentos numéricos que confirman la eficiencia de la nueva estrategia introducida en este trabajo. En la sección 3.8 se presentan los algoritmos.

## 3.2. Existencia de minimizadores

En esta sección se prueba que, bajo ciertas condiciones en el conjunto de datos admisibles para las condiciones iniciales  $\mathcal{U}_{ad}$ , existe al menos un minimizador de la función  $J$  definida por (3.2).

Para simplificar la presentación, consideramos la clase de datos iniciales admisibles  $\mathcal{U}_{ad}$ :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}), \text{sop}(f) \subset K, \|f\|_\infty \leq C\}, \quad (3.6)$$

donde  $K \subset \mathbb{R}$  un intervalo cerrado y acotado y  $C > 0$  una constante positiva dada. Nótese sin embargo que los mismos resultados teóricos y estrategias de descenso se pueden aplicar a una clase de conjuntos admisibles mucho más amplia.

**Teorema 5.** *Supongamos que  $u^d \in L^2(\mathbb{R})$  y que  $\mathcal{U}_{ad}$  está definida en (3.6). Entonces el problema de minimización*

$$\min_{u^0 \in \mathcal{U}_{ad}} J(u^0), \quad (3.7)$$

tiene al menos un minimizador  $u^{0,\min} \in \mathcal{U}_{ad}$ . La unicidad es en general falsa para este tipo de problemas de optimización.

*Demostración.* En primer lugar probamos la existencia. Sea  $u_n^0 \in \mathcal{U}_{ad}$  una sucesión de minimizante de  $J$ . Entonces  $u_n^0$ , por definición de  $\mathcal{U}_{ad}$ , está acotada en  $L^\infty$  y existe una subsucesión, denotada por  $u_n^0$ , tal que  $u_n^0 \rightharpoonup u_*^0$  debil-\* en  $L^\infty$ . Es más,  $u_*^0 \in \mathcal{U}_{ad}$ .

Sean  $u_n(x, t)$  y  $u_*(x, t)$  la solución de entropía de (3.1) con datos iniciales  $u_n^0$  y  $u_*^0$  respectivamente. Asumiendo que

$$u_n(\cdot, T) \rightarrow u_*(\cdot, T), \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}), \quad (3.8)$$

entonces, claramente,

$$\inf_{u^0 \in \mathcal{U}_{ad}} J(u^0) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n^0) = J(u_*^0),$$

y deducimos que  $u_*^0$  es un minimizador de  $J$ .

Por lo tanto, el aspecto clave es probar el resultado de convergencia fuerte (3.8). Para ello es necesario realizar dos pasos: a) La compacidad relativa de  $u_n(\cdot, T)$  en  $L^2$ . Teniendo en cuenta la estructura de  $\mathcal{U}_{ad}$  y usando el principio máximo y la velocidad finita de propagación que verifican las soluciones de entropía, es fácil ver que el soporte de todas las soluciones en tiempo  $t = T$ , está uniformemente incluido en el mismo conjunto compacto de  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto, es suficiente probar la compacidad en  $L^2_{loc}$ . Esto se obtiene de la condición unilateral de Lipschitz de Oleinik

$$\frac{u(x, t) - u(y, t)}{x - y} \leq \frac{1}{t}, \quad (3.9)$$

la cual garantiza una cota uniforme de la norma  $BV$  de  $u_n(\cdot, T)$ , localmente en espacio (ver [14]). La propiedad de compacidad necesaria es entonces una consecuencia de la compacidad de  $BV(I) \subset L^2(I)$ , para todo intervalo acotado  $I$ . b) La identificación del límite como la solución de (3.1) con valor inicial  $u_*^0$ . Esto puede ser probado usando la compacidad, pasado al límite en la formulación variacional de (3.1). Remitimos a [33] para una descripción detallada de este proceso límite en una situación más delicada donde el dato inicial converge a una delta de Dirac. Esto completa la prueba de la existencia de al menos un minimizador.

A continuación probemos que la unicidad es en general falsa en este tipo de problemas de optimización. En concreto, se probará que hay funciones objetivo  $u^d$  para las cuales existen dos minimizadores diferentes  $u_1^0$  y  $u_2^0$  tales que las soluciones correspondientes  $u_j$ , para  $j = 1, 2$  satisfacen  $u_j(T) = u^d$ ,  $j = 1, 2$  de tal modo que el mínimo valor de  $J$  es cero. Esto es siempre posible tan pronto como trabajemos con soluciones que tienen choques. Por ejemplo,

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq t/2, \\ 0 & \text{si } x > t/2, \end{cases} \quad u_2(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq t - 1/2, \\ (x - 1/2)(t - 1) & \text{si } t - 1/2 \leq x \leq 1/2, \\ 0 & \text{si } x > 1/2, \end{cases}$$

son dos soluciones de entropía diferentes para las cuales  $u_1(x, T) = u_2(x, T)$  en  $T = 1$ . Por lo tanto si tomamos  $T = 1$  y  $u^d(x) = u_1(x, 1)$  entonces existe dos valores iniciales diferentes  $u_1^0(x, 0)$  y  $u_2^0(x, 0)$  para los cuales  $J$  alcanza su mínimo. Nótese que esto es imposible dentro de una clase de funciones suaves por unicidad retrograda.

Nótese que  $u^d$  no pertenece a  $L^2(\mathbb{R})$  pero, el mismo argumento es válido si  $u^d$  se trunca para tomar valor cero en el infinito.  $\square$

**Comentario 6.** La prueba anterior es en efecto bastante general y puede ser adaptada a otros problemas de optimización con otros funcionales  $J$  y para otros conjuntos  $\mathcal{U}_{ad}$  de datos iniciales admisibles. En particular puede adaptarse a conjuntos de datos iniciales admisibles de la forma  $\mathcal{U}_{ad} = \{f \in L^1(\mathbb{R}), \text{sop}(f) \subset K, \|f\|_1 \leq C\}$ .

### 3.3. El problema de minimización discreto

El propósito de esta sección es mostrar que un minimizador discreto obtenido a través de un esquema numérico para (3.1) que satisfaga la propiedad OSLC, converge a un minimizador del problema continuo a medida que el tamaño de la malla tiende a cero. Esto justifica, en este caso particular, la práctica usual en la ingeniería de reemplazar el funcional y modelo continuo por uno discreto para calcular una aproximación del minimizador continuo.

Introduzcamos una malla de  $\mathbb{R} \times [0, T]$  dada por  $(x_j, t^n) = (j\Delta x, n\Delta t)$  ( $j = -\infty, \dots, \infty$ ;  $n = 0, \dots, N + 1$  de tal manera que  $(N + 1)\Delta t = T$ ), y sea  $u_j^n$  una aproximación de  $u(x_j, t^n)$  que viene de una discretización apropiada de la ecuación (3.1).

Consideremos la siguiente aproximación del funcional  $J$  en (3.2):

$$J^\Delta(u_\Delta^0) = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (u_j^{N+1} - u_j^d)^2, \quad (3.10)$$

donde  $u_\Delta^0 = \{u_j^0\}$  es el dato inicial discreto y  $u_\Delta^d = \{u_j^d\}$  es la discretización del objetivo  $u^d$  en  $x_j$ . Una elección común consiste en tomar,

$$u_j^d = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u^d(x) dx, \quad (3.11)$$

donde  $x_{j\pm 1/2} = x_j \pm \Delta x/2$ .

Además introducimos una aproximación de la clase de datos iniciales admisibles  $\mathcal{U}_{ad}$  denotados por  $\mathcal{U}_{ad}^\Delta$  y que están constituidos por sucesiones  $\varphi_\Delta = \{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  para las cuales la función interpolación constante a trozos asociada, denotada como  $\varphi_\Delta$ , está definida por

$$\varphi_\Delta(x) = \varphi_j, \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2},$$

y satisface  $\varphi_\Delta \in \mathcal{U}_{ad}$ . Obviamente,  $\mathcal{U}_{ad}^\Delta$  coincide con la clase de vectores discretos apoyados en los índices  $j$  para los cuales  $x_j \in K$  y de modo que la norma  $L^\infty$  está acotada por la misma constante  $C$ .

Finalmente introducimos un esquema conservativo de aproximación numérica de 3-puntos para (3.1):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left( g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n \right) = 0, \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n = 0, \dots, N, \quad (3.12)$$

donde,

$$g_{j+1/2}^n = g(u_j^n, u_{j+1}^n),$$

y  $g$  es el flujo numérico. Estos esquemas son consistentes con (3.1) cuando  $g(u, u) = u^2/2$ . Cuando la función

$$H(u, v, w) = v - \lambda(g(u, v) - g(v, w))$$

es una función monótona creciente en cada argumento, el esquema se dice que es monótono. Hay esquemas particularmente interesantes debido a que la solución discreta que proporcionan converge a las soluciones débiles de entropía de la ley de conservación continua, a medida que el paso de la discretización tiende a cero, bajo una condición adecuada de CFL (ver Ref. [46], Chp.3, Th. 4.2).

Para cada  $\Delta x > 0$  es muy fácil ver que la analogía discreta del Teorema 5 se mantiene. En efecto esto es automático en el presente caso pues  $\mathcal{U}_{ad}^\Delta$  sólo emplea un número finito de puntos de la malla. Pero pasando al límite, en la medida que  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$  se requiere un tratamiento más cuidadoso. En efecto, para que eso sea hecho, es necesario asumir que el esquema bajo consideración satisface la condición OSLC, la cual es una versión discreta de la condición de Oleinik,

$$\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \leq \frac{1}{n\Delta t}. \quad (3.13)$$

Entonces consideramos el siguiente problema de minimización discreto: Encontrar  $u_\Delta^{0,\min}$  tal que

$$J^\Delta(u_\Delta^{0,\min}) = \min_{u_\Delta^0 \in \mathcal{U}_{ad}^\Delta} J^\Delta(u_\Delta^0). \quad (3.14)$$

Es bien conocido que los esquemas de Godunov, Lax-Friedrichs y Engquits-Osher satisfacen esta condición de OSLC. Referimos a [14] para una discusión sobre este tema y también para la construcción de un método de segundo orden MUSCL que satisface OSLC.

**Teorema 7.** *Supongamos que la aproximación numérica  $u_\Delta^n$  está obtenida a través del empleo de un esquema numérico monótono conservativo consistente con (3.1) y satisfaciendo la condición OSLC.*

Entonces:

- Para todo  $\Delta x, \Delta t > 0$ , el problema discreto de minimización (3.14) tiene al menos una solución  $u_\Delta^{0,\min} \in \mathcal{U}_{ad}^\Delta$ .
- Cualquier punto de acumulación de  $u_\Delta^{0,\min}$  con respecto de la topología debil-\* en  $L^\infty$ , como  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$  (con  $\Delta t/\Delta x = \lambda$  fijado bajo una condición de CFL adecuada), es un minimizador del problema continuo (3.7).

**Comentario 8.** *La mayoría de los esquemas numéricos conservativos de 3 puntos derivados para aproximar (3.1) satisfacen la hipótesis del Teorema 7. Este es el caso particular de los esquemas de Lax-Friedrichs, Engquist-Osher o Godunov cuyos flujos numéricos para la ecuación de Burgers son, respectivamente,*

$$g^{LF}(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{4} - \frac{v - u}{2\lambda}, \quad (3.15)$$

$$g^{EO}(u, v) = \frac{u(u + |u|)}{4} + \frac{v(v - |v|)}{4}, \quad (3.16)$$

$$g^G(u, v) = \begin{cases} \min_{w \in [u, v]} w^2/2, & \text{si } u \leq v, \\ \max_{w \in [u, v]} w^2/2, & \text{si } u \geq v. \end{cases} \quad (3.17)$$

*Demostración.* (del Teorema 7) La existencia de minimizadores discretos de la primera parte del Teorema es obvia en este caso debido a que estamos trabajando con problema

de dimensión finita. En realidad, en este punto la propiedad OSCL no es necesaria. Sin embargo, en situaciones más generales (para otras clases de controles admisibles discretos) podemos aplicar el mismo argumento de la prueba del Teorema 5 basado en la propiedad OSLC y en estimaciones  $BV$  (ver Ref. [14]).

El segundo enunciado es menos trivial y requiere de la propiedad OSLC para garantizar la compacidad de la solución numérica cuando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ .

Seguiremos un argumento estándar de  $\Gamma$ -convergencia. El ingrediente clave es la propiedad de continuidad: Asumiendo que  $u_{\Delta x}^0 \in \mathcal{U}_{ad}^{\Delta x}$  satisface  $u_{\Delta x}^0 \rightarrow u^0$  en  $L^\infty(\mathbb{R})$  con respecto a la topología débil-\*, entonces

$$J^\Delta(u_\Delta^0) \rightarrow J(u^0).$$

Esto es debido al hecho de que la condición OSLC garantiza cotas  $BV$  locales uniformes en la solución discreta, y la velocidad finita de propagación en vista de la clase de datos iniciales  $\mathcal{U}_{ad}^\Delta$  que estamos considerando y la compacidad de la inclusión  $BV$  en  $L^2$  en intervalos acotados (ver Ref. [14]) la cual garantiza que  $u_\Delta^{N+1} \rightarrow u(\cdot, T)$  en  $L^2(\mathbb{R})$ , bajo la condición de CFL que garantice la convergencia del esquema numérico, y su monotonía.

Ahora, sea  $\hat{u}^0 \in \mathcal{U}_{ad}$  un punto de acumulación de  $u_\Delta^{0,\min}$  cualquiera con respecto de la topología débil-\*. Para simplificar la notación, denotaremos por  $u_\Delta^{0,\min}$  la subsucesión para la cual  $u_\Delta^{0,\min} \rightarrow \hat{u}^0$ , débilmente-\* en  $L^\infty(\mathbb{R})$ , a medida que  $\Delta x \rightarrow 0$ . Sea  $v^0 \in \mathcal{U}_{ad}$  cualquier otra función. Vamos a probar que

$$J(\hat{u}^0) \leq J(v^0). \quad (3.18)$$

Para hacer esto construimos una sucesión  $v_\Delta^0 \in \mathcal{U}_{ad}^\Delta$  tal que  $v_\Delta^0 \rightarrow v^0$  en  $L^1(\mathbb{R})$ , cuando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$  (podemos considerar en particular la aproximación en (3.11)).

Teniendo en cuenta la propiedad de continuidad anterior, tendremos lo siguiente:

$$J(v^0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} J^\Delta(v_\Delta^0) \geq \lim_{\Delta \rightarrow 0} J^\Delta(u_\Delta^{0,\min}) = J(\hat{u}^0),$$

lo cual prueba (3.18). □

**Comentario 9.** *El Teorema 7 se refiere a mínimos globales. Sin embargo, los funcionales continuos y discretos pueden tener mínimos locales. Extender este tipo de resultado de  $\Gamma$ -convergencia a mínimos locales requiere desarrollos más complejos.*

### 3.4. Análisis de la sensibilidad: el enfoque continuo

En esta sección nos centraremos en la *formulación continua* para obtener una dirección de descenso del funcional discreto  $J^\Delta$ .

Dividiremos esta sección en cuatro secciones más: en la primera se considerará el caso en el que la solución  $u$  de (3.1) no presenta choques, en la segunda y tercera secciones analizaremos respectivamente la sensibilidad de la solución y el funcional en el caso de un único choque situado sobre una curva regular y, finalmente, en la última sección se pondrán diferentes métodos para obtener direcciones discretas de descenso.

### 3.4.1. Sensibilidad sin choques

En esta sección se dará una expresión para la sensibilidad del funcional  $J$  con respecto del dato inicial basado en el cálculo clásico del adjunto para soluciones suaves. En primer lugar presentamos el cálculo formal y luego mostramos cómo justificarlo cuando trabajamos con soluciones clásicas para (3.1), es decir, cuando no hay discontinuidades.

Sea  $C_0^1(\mathbb{R})$  el conjunto de funciones  $C^1$  con soporte compacto y sea  $u^0 \in C_0^1(\mathbb{R})$  un dato inicial dado para el cual existe una solución clásica  $u(x, t)$  de (3.1) en  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ , la cual puede ser extendida a una solución clásica en  $t \in [0, T + \tau]$  para algún  $\tau > 0$ . Nótese que ésto impone algunas restricciones sobre  $u^0$  además de ser suave. Más precisamente, debemos tener  $T + \tau < -1/\min(\min_x u^{0'}(x), 0)$  para garantizar que dos características diferentes no se crucen en el intervalo de  $[0, T + \tau]$ . Sea  $\delta u^0 \in C_0^1(\mathbb{R})$  cualquier posible variación de dato inicial  $u^0$ . Por la velocidad finita de propagación, esta perturbación sólo afecta a la solución en un conjunto acotado de  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ . Esto simplifica el argumento que presentamos a continuación.

Entonces, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, la solución  $u^\varepsilon(x, t)$  correspondiente al dato inicial

$$u^{\varepsilon,0}(x) = u^0(x) + \varepsilon \delta u^0(x), \quad (3.19)$$

es también una solución clásica en  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  y  $u^\varepsilon \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T])$  se puede escribir como

$$u^\varepsilon = u + \varepsilon \delta u + o(\varepsilon), \quad \text{con respecto de la topología } C^1, \quad (3.20)$$

donde la función  $\delta u$  es la solución de la ecuación linealizada,

$$\begin{cases} \partial_t \delta u + \partial_x (u \delta u) = 0, \\ \delta u(x, 0) = \delta u^0(x). \end{cases} \quad (3.21)$$

Sea  $\delta J$  la derivada de Gateaux de  $J$  en  $u^0$  en la dirección  $\delta u^0$ . Se tiene que

$$\delta J = \int_{\mathbb{R}} (u(x, T) - u^d(x)) \delta u(x, T) dx, \quad (3.22)$$

donde  $\delta u$  resuelve el sistema linealizado (3.21). Ahora, introducimos el sistema adjunto

$$\begin{cases} -\partial_t p - u \partial_x p = 0, \\ p(x, T) = p^T(x), \end{cases} \quad (3.23)$$

donde  $p^T = u(x, T) - u^d(x)$ . Multiplicando la ecuación que satisface  $\delta u$  por  $p$  e integrando por partes, y teniendo en cuenta que  $p$  satisface (3.23), fácilmente se puede obtener

$$\int_{\mathbb{R}} (u(x, T) - u^d(x)) \delta u(x, T) dx = \int_{\mathbb{R}} p(x, 0) \delta u^0 dx. \quad (3.24)$$

Por lo tanto,  $\delta J$  se puede escribir como,

$$\delta J = \int_{\mathbb{R}} p(x, 0) \delta u^0(x) dx. \quad (3.25)$$

Esta expresión proporciona un modo sencillo de calcular la dirección de descenso para el funcional continuo  $J$ , una vez se haya calculado la ecuación adjunta. Simplemente se debe tomar

$$\delta u^0 = -p(x, 0). \quad (3.26)$$

Bajo los supuestos de arriba sobre  $u^0$ , los valores de  $u$ ,  $\delta u$ , y  $p$  se pueden obtener de los datos  $u^0(x)$ ,  $\delta u^0(x)$  y  $p^T(x)$  por medio de las curvas características asociadas a (3.1). A continuación se explica brevemente este hecho.

Las curvas características asociadas a (3.1) están definidas por

$$x'(t) = u(t, x(t)), \quad t \in (0, T); \quad x(0) = x_0. \quad (3.27)$$

Se trata de líneas rectas cuyas pendientes dependen del dato inicial:

$$x(t) = x_0 + tu^0(x_0), \quad t \in (0, T).$$

Como se trata de soluciones clásicas,  $u$  es constante a lo largo de dichas curvas. Por hipótesis: dos curvas características diferentes no se cortan una con otra en  $\mathbb{R} \times [0, T + \tau]$ . Esto también permite definir  $u$  en  $\mathbb{R} \times [0, T + \tau]$ , de un modo único, a partir del dato inicial.

Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, la solución  $u^\varepsilon(x, t)$  correspondiente al dato inicial (3.19) tiene características similares a  $u$ . Esto permite garantizar que dos líneas características no se intersectarán cuando  $0 \leq t \leq T$  si  $\varepsilon > 0$  es lo suficientemente pequeño. Nótese que  $u^\varepsilon$  puede ser discontinua para  $t \in (T, T + \tau]$  si  $u^0$  genera una discontinuidad en  $t = T + \tau$  pero esto es irrelevante para el análisis en  $[0, T]$  que estamos llevando a cabo. Por lo tanto  $u^\varepsilon(x, t)$  es también una solución clásica en  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$  y es fácil ver que la solución  $u^\varepsilon$  puede escribirse como (3.20) donde  $\delta u$  satisface (3.21).

El sistema (3.21) se puede resolver utilizando características. En efecto, como  $u$  es una función regular, la primera ecuación de (3.21) se puede escribir como

$$\partial_t \delta u + u \partial_x \delta u = -\partial_x(u) \delta u, \quad (3.28)$$

es decir,

$$\frac{d}{dt} \delta u(x(t), t) = -\partial_x(u) \delta u, \quad (3.29)$$

donde  $x(t)$  son las curvas características definidas por (3.27). Por lo tanto, la solución  $\delta u$  a lo largo de la línea de característica se puede obtener de  $\delta u^0$  resolviendo la ecuación diferencial, esto es

$$\delta u(x(t), t) = \delta u^0(x_0) \exp \left( - \int_0^t \partial_x u(x(s), s) ds \right).$$

Finalmente, el sistema adjunto (3.23) se resuelve también mediante características, es decir

$$p(x(t), t) = p^T(x(T)).$$

Esto proporciona la dirección de máxima pendiente en (3.26) para el funcional continuo.

**Comentario 10.** Nótese que para soluciones clásicas la derivada Gateaux de  $J$  en  $u^0$  está dada por (3.25) y esto proporciona una dirección obvia de descenso de  $J$  en  $u^0$ , dada por  $\delta u^0 = -p(x, 0) \in C_0^1(\mathbb{R})$ . Sin embargo, esto no es muy útil en la práctica, pues incluso si inicializamos el algoritmo iterativo de descenso con una  $u^0$  suave, no podemos garantizar que la solución permanecerá clásica a lo largo de todo el proceso iterativo.

### 3.4.2. Sensibilidad del estado en presencia de choques

En esta sección recogemos algunos resultados existentes sobre la sensibilidad de la solución de leyes de conservación en presencia de choques. Seguiremos el análisis en Ref. [16] pero se pueden encontrar resultado similares en diferentes formas y grados de generalidad en, por ejemplo, Ref. [8, 12, 35, 108] o Ref. [45].

Nos centramos en el caso particular de soluciones que tienen un único choque, pero el análisis puede extenderse a sistemas unidimensionales más generales de leyes de conservación con un número finito de choques que no interactuen (ver Ref. [16]). La teoría de dualidad y soluciones reversibles desarrollada en Ref. [12] y [35] es una de las guías para obtener resultados más generales.

Introduciremos las siguientes hipótesis:

(H) Asumiremos que  $u(x, t)$  es una solución débil entrópica de (3.1) con una discontinuidad a lo largo de la curva regular  $\Sigma = \{(t, \varphi(t)), t \in [0, T]\}$ , la cual es Lipschitz continua fuera de  $\Sigma$ . En particular, satisface las relaciones de Rankine-Hugoniot en  $\Sigma$ :

$$\varphi'(t)[u]_{\varphi(t)} = \left[ \frac{u^2}{2} \right]_{\varphi(t)}. \quad (3.30)$$

Aquí hemos empleado la notación,  $[v]_{x_0} = v(x_0^+) - v(x_0^-)$  para el salto en  $x_0$  de una función constante a trozos  $v$  con una discontinuidad en  $x = x_0$ .

Nótese que  $\Sigma$  divide  $\mathbb{R} \times (0, T)$  en dos partes:  $Q^-$  y  $Q^+$ , los subdominios de  $\mathbb{R} \times (0, T)$  a la izquierda y a la derecha de  $\Sigma$ .

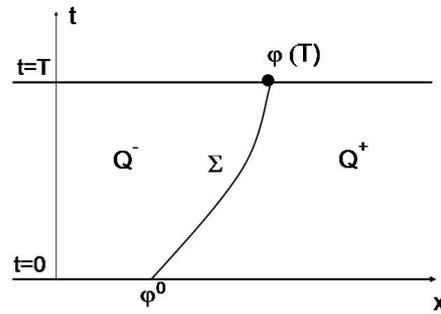


Figura 3.1: Subdominios  $Q^-$  y  $Q^+$ .

Como se puede ver, en presencia de choques, para tratar correctamente los problemas de control óptimo y diseño, el estado del sistema tiene que ser estudiado como un par  $(u, \varphi)$  combinando la solución de (3.1) y la posición del choque  $\varphi$ . Esto es relevante en el análisis de la sensibilidad del sistema para aplicar un algoritmo de descenso.

Consideramos por tanto que el par  $(u, \varphi)$  satisface el sistema

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, & \text{en } Q^- \cup Q^+, \\ \varphi'(t)[u]_{\varphi(t)} = \left[ \frac{u^2}{2} \right]_{\varphi(t)}, & t \in (0, T), \\ \varphi(0) = \varphi^0, \\ u(x, 0) = u^0(x), & \text{en } \{x < \varphi^0\} \cup \{x > \varphi^0\}. \end{cases} \quad (3.31)$$

Ahora analizaremos la sensibilidad de  $(u, \varphi)$  con respecto de perturbaciones del dato inicial, en particular, con respecto a variaciones  $\delta u^0$  del perfil inicial  $u^0$  y  $\delta \varphi^0$  de la posición del choque  $\varphi^0$ . Para ser más precisos, adoptamos un marco funcional apropiado basado en la generalización de los vectores tangentes introducidos en [8].

**Definición 11.** Sea  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función Lipschitz continua y constante a trozos con una única discontinuidad en  $y \in \mathbb{R}$ . Sea  $\Sigma_v$  la familia de todas las trayectorias continuas  $\gamma : [0, \varepsilon_0] \rightarrow L^1(\mathbb{R})$  con

1.  $\gamma(0) = v$  y  $\varepsilon_0 > 0$  posiblemente dependiente de  $\gamma$ .
2. Para cualquier  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  la función  $u^\varepsilon = \gamma(\varepsilon)$  es una función Lipschitz constante a trozos con una única discontinuidad en  $x = y^\varepsilon$ , dependiendo de manera continua en  $\varepsilon$  y de modo que existe una constante  $L$  independiente de  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  tal que

$$|v^\varepsilon(x) - v^\varepsilon(x')| \leq L|x - x'|,$$

siempre que  $y^\varepsilon \notin [x, x']$ .

Es más, definimos el conjunto  $T_v$  de vectores tangentes generalizados de  $v$  como el espacio de  $(\delta v, \delta y) \in L^1 \times \mathbb{R}$  para el cual la trayectoria  $\gamma_{(\delta v, \delta y)}$  dada por

$$\gamma_{(\delta v, \delta y)}(\varepsilon) = \begin{cases} v + \varepsilon \delta v + [v]_y \chi_{[y+\varepsilon \delta y, y]} & \text{si } \delta y < 0, \\ v + \varepsilon \delta v - [v]_y \chi_{[y, y+\varepsilon \delta y]} & \text{si } \delta y > 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

satisface  $\gamma_{(\delta v, \delta y)} \in \Sigma_v$ .

Finalmente, consideremos la relación de equivalencia  $\sim$  definida sobre  $\Sigma_v$  por

$$\gamma \sim \gamma' \text{ si y solo si } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|\gamma(\varepsilon) - \gamma'(\varepsilon)\|_{L^1}}{\varepsilon} = 0.$$

Decimos que una trayectoria  $\gamma \in \Sigma_v$  genera el vector tangente generalizado  $(\delta v, \delta y) \in T_v$  si  $\gamma$  es equivalente a  $\gamma_{(\delta v, \delta y)}$ , como en (3.32).

**Comentario 12.** La trayectoria  $\gamma_{(\delta v, \delta y)} \in \Sigma_v$  en (3.32) representa una aproximación de orden uno de la variación de una función  $v$  que añade una función de perturbación  $\varepsilon \delta v$  y desplaza la discontinuidad de  $\varepsilon \delta y$ .

Nótese que, para un valor dado de  $v$  (función Lipschitz continua a trozos con una única discontinuidad en  $y \in \mathbb{R}$ ), los vectores tangentes generalizados asociados  $(\delta v, \delta y) \in T_v$  son aquellos pares para los cuales  $\delta v$  es Lipschitz continua con una única discontinuidad en  $x = y$ .

Sea  $u^0(x)$  el dato inicial en (3.31) que suponemos Lipschitz continuo a ambos lados de una discontinuidad situada en  $x = \varphi^0$ , y sea un vector tangente generalizado  $(\delta u^0, \delta \varphi^0) \in L^1 \times \mathbb{R}$  para todo  $0 \leq T$ . Sea  $u^{0, \varepsilon} \in \Sigma_{u^0}$  una trayectoria que genere  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$ . Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño la solución  $u^\varepsilon(\cdot, t)$  de (3.31) es Lipschitz continua con una única discontinuidad en  $x = \varphi^\varepsilon(t)$ , para todo  $t \in [0, T]$ . Por lo tanto  $u^\varepsilon(\cdot, t)$  genera un vector tangente generalizado  $(\delta u(\cdot, t), \delta \varphi(t)) \in L^1 \times \mathbb{R}$ . Es más, en [8] se prueba que satisface el siguiente sistema linealizado:

$$\begin{cases} \partial_t \delta u + \partial_x (u \delta u) = 0, & \text{en } Q^- \cup Q^+, \\ \delta \varphi'(t) [u]_{\varphi(t)} + \delta \varphi(t) \left( \varphi'(t) [u_x]_{\varphi(t)} - [u_x u]_{\varphi(t)} \right) \\ \quad + \varphi'(t) [\delta u]_{\varphi(t)} - [u \delta u]_{\varphi(t)} = 0, & \text{en } (0, T), \\ \delta u(x, 0) = \delta u^0, & \text{en } \{x < \varphi^0\} \cup \{x > \varphi^0\}, \\ \delta \varphi(0) = \delta \varphi^0, \end{cases} \quad (3.33)$$

con el dato inicial  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$ .

**Comentario 13.** El sistema linealizado (3.33) se puede obtener, al menos formalmente, por un argumento de perturbación en dos pasos: primero hacemos el cambio de variables  $\hat{x} = x - \varphi(t)$  que transforma el sistema (3.33) en un nuevo sistema acoplado pero en un dominio fijo  $\{\hat{x} < 0\} \cup \{\hat{x} > 0\}$ , y donde la variable  $\varphi$  entra en la ecuación que satisface  $u$  a ambos lados de  $\hat{x} = 0$ . Luego, introducimos una perturbación del dato  $(u_\varepsilon^0, \varphi_\varepsilon^0) = (u^0, \varphi^0) + \varepsilon(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  y calculamos las ecuaciones para el primer orden de perturbación de la solución. Este es el punto de vista más común al estudio de la estabilidad linealizada de choques. Véase [45] para una descripción detallada de este método en el caso escalar y [78], [84] para sistemas de conservación más generales en mayores dimensiones.

De este modo, podemos obtener formalmente la expansión

$$(u_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) = (u, \varphi) + \varepsilon(\delta u, \delta \varphi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Sin embargo, esta expansión sólo está justificada para leyes de conservación escalares en una única dimensión de la forma

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0,$$

cuando la función  $f \in C^1$  es convexa. En este caso, es posible establecer resultados de diferenciabilidad de la solución  $u$  con respecto de pequeñas perturbaciones del dato inicial  $u^0$  y la posición de la discontinuidad  $\varphi^0$  (ver [35]). Para una situación más general esta diferenciabilidad ha sido probada sólo en el sentido débil, como en [16] para sistema de leyes de conservación, o en [108], para ecuaciones escalares en varias dimensiones espaciales.

**Comentario 14.** El sistema linealizado (3.33) tiene una única solución que puede ser calculada en dos pasos. El método de las características determina  $\delta u$  en  $Q^- \cup Q^+$ , es decir, fuera de  $\Sigma$ , a partir del dato inicial  $\delta u^0$ , por el método de las características (nótese que el sistema (3.33) tiene las mismas características que (3.31)). Esto proporciona el valor de  $u$  y  $u_x$  a ambos lados del choque  $\Sigma$  y permite determinar los coeficientes de la EDO que satisface  $\delta \varphi$ . Luego resolvemos la ecuación diferencial ordinaria para obtener  $\delta \varphi$ .

### 3.4.3. Sensibilidad del funcional $J$ en presencia de choques

En esta sección se estudiará la sensibilidad del funcional  $J$  con respecto de variaciones asociadas con el vector tangente generalizado en la sección anterior. En primer lugar se define la generalización de la derivada Gateaux que tiene en cuenta estas variaciones.

**Definición 15.** (Ref. [16]) Sea  $J : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional dado y  $u^0 \in L^1(\mathbb{R})$ , Lipschitz continua con una discontinuidad en  $x = \varphi^0$ , y un dato inicial para el cual la solución de (3.1) satisface la hipótesis (H). Decimos que  $J$  es diferenciable Gateaux en  $u^0$  en un sentido generalizado si para cualquier vector tangente generalizado  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  y cualquier familia  $u^{0,\varepsilon} \in \Sigma_{u^0}$  asociada a  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  existe el siguiente límite

$$\delta J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(u^{0,\varepsilon}) - J(u^0)}{\varepsilon},$$

y sólo depende de  $(u^0, \varphi^0)$  y  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$ . Esto es, no depende de la familia particular  $u^{0,\varepsilon}$  que genera  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$ .

El límite  $\delta J$  es la derivada Gateaux generalizada de  $J$  en la dirección  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$ .

El siguiente resultado proporciona un modo sencillo de caracterizar la derivada Gateaux generalizada de  $J$  en términos de la solución del problema adjunto asociado. En [42] se obtiene un resultado similar en el contexto de sistemas de Euler casi-1D. En [15] se muestra cómo esta generalización de la derivada Gateaux se puede emplear también para obtener algunas condiciones de optimalidad en problemas de optimización semejantes pero, en nuestro conocimiento, no ha sido empleado para desarrollar algoritmos completos de descenso como el que se presenta aquí.

**Proposición 16.** *La derivada Gateaux de  $J$  se puede escribir como*

$$\delta J = \int_{\{x < \varphi^0\} \cup \{x > \varphi^0\}} p(x, 0) \delta u^0(x) dx + q(0) [u]_{\varphi^0} \delta \varphi^0, \quad (3.34)$$

donde el par del estado adjunto  $(p, q)$  satisface el sistema

$$\begin{cases} -\partial_t p - u \partial_x p = 0, & \text{en } Q^- \cup Q^+, \\ [p]_{\Sigma} = 0, \\ q(t) = p(\varphi(t), t), & \text{en } t \in (0, T) \\ q'(t) = 0, & \text{en } t \in (0, T) \\ p(x, T) = u(x, T) - u^d, & \text{en } \{x < \varphi(T)\} \cup \{x > \varphi(T)\} \\ q(T) = \frac{\frac{1}{2} [(u(x, T) - u^d)^2]_{\varphi(T)}}{[u]_{\varphi(T)}}. \end{cases} \quad (3.35)$$

**Comentario 17.** *El sistema (3.35) tiene solución única. En efecto, para resolver hacia atrás el sistema (3.35) debemos definir la solución  $q$  en el choque  $\Sigma$  desde la condición  $q' = 0$ , con el valor final  $q(T)$  dado en (3.35). Esto determina el valor de  $p$  a lo largo del choque. Luego debemos propagar esta información, junto con el valor de  $p$  en tiempo  $t = T$  a ambos lados de  $\varphi(T)$ , por características. Como ambos sistemas (3.1) y (3.35) tienen las mismas características, cualquier punto  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  es alcanzado hacia atrás en el tiempo por una única característica que viene del choque  $\Sigma$  o del dato final en  $(x, T)$  (ver Figura 3.4 donde ilustramos esta construcción en el caso de un choque localizado a lo largo de una línea recta, como ocurre en el problema de Riemann). La solución obtenida por este procedimiento coincide con la solución reversible introducida en Ref. [12, 35]*

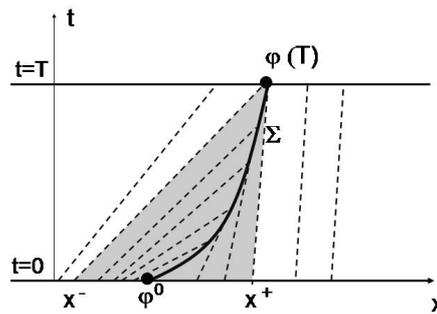


Figura 3.2: Líneas características entrando en un choque y cómo se deben emplear para construir la solución del sistema adjunto a ambos lados del choque en su región de influencia.

**Comentario 18.** Nótese que la segunda, tercera y cuarta ecuaciones en (3.35) vienen, por dualidad, de las relaciones de Rankine-Hugoniot (3.30). Además, ellas son en realidad las condiciones que permiten obtener una única solución en (3.35). Son necesarias para determinar el valor de  $p$  sobre  $\Sigma$ .

Las soluciones de (3.35) se pueden obtener también como límite de las soluciones de la ecuación de transporte con viscosidad artificial dependiendo de un pequeño parámetro  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{cases} -\partial_t p - u \partial_x p = \varepsilon \partial_{xx} p, & \text{in } x \in \mathbb{R}, t \in (0, T), \\ p(x, T) = p_n^T(x), & \text{in } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.36)$$

y una adecuada selección del dato inicial  $p_n^T(x)$ , dependiendo sobre  $n \rightarrow \infty$ . Más precisamente, sea  $p_n^T(x)$  una sucesión de funciones Lipschitz continuas, acotadas uniformemente en  $BV_{loc}(\mathbb{R})$ , tal que

$$p_n^T(x, T) \rightarrow p^T(x) = u(x, T) - u^d(x), \quad \text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}),$$

y

$$p_n^T(\varphi(T), T) = \frac{\frac{1}{2} \left[ (u(x, T) - u^d)^2 \right]_{\varphi(T)}}{[u]_{\varphi(T)}}.$$

Primero tomaremos el límite de las soluciones  $p_{\varepsilon, n}$  de (3.36) cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , para obtener la solución  $p_n$  de

$$\begin{cases} -\partial_t p - u \partial_x p = 0, & \text{en } x \in \mathbb{R}, t \in (0, T), \\ p(x, T) = p_n^T(x), & \text{en } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

la llamada solución reversible (ver Ref. [12]). Estas soluciones se caracterizan por el hecho de que toman el valor  $p_n(\varphi(T), T)$  en la región completa ocupada por las características que se encuentran el choque (ver Ref. [12], Th. 4.1.12). Por lo tanto, en particular ellas satisfacen las 2ª, 3ª, 4ª y 6ª ecuaciones en (3.35). Es más,  $p_n \rightarrow p$  a medida que  $n \rightarrow \infty$ , y  $p$  toma valor constante en la región ocupada por las características que cruzan con el choque. Nótese que, por construcción, esta constante tiene el mismo valor para todas  $p_n$  en esta región. Por lo tanto, esta solución límite  $p$  coincide con la solución de (3.35) construida más arriba. Esto permite, en efecto, extender la noción de soluciones reversibles en Ref. [12] a datos que, sobre el punto  $x(T)$ , están completamente desconexos con los valores de  $p$  a ambos lados de él. Esto es precisamente debido al punto de vista que hemos adoptado en el cual el estado linealizado tiene dos componentes diferentes  $(\delta u, \delta \varphi)$ . Por lo tanto el estado adjunto tiene también dos componentes  $(p, q)$  con diferentes datos iniciales en tiempo  $t = T$ .

**Comentario 19.** En la expresión (3.34) para la derivada de  $J$  el choque del dato inicial aparece  $u^0$ . Cuando  $u^0$  no presenta un choque, obviamente, este término se cancela en  $\delta J$ . Es sin embargo, importante apuntar que esto es compatible con la posible aparición de choques para tiempos  $\tau \in (0, T)$ . En ese caso, este término singular no afecta aparentemente el valor de  $\delta J$  pero en la práctica sí lo hace. Es más, en este caso el sistema adjunto tiene que ser escrito en la forma (3.35) para  $\tau < t < T$  y posteriormente extendido al intervalo de tiempo  $(0, \tau)$  como el sistema clásico adjunto (3.23). Por lo tanto, la presencia de un choque no afecta el valor del estado adjunto  $p$  en el tiempo inicial  $t = 0$  y consecuentemente, además, el valor de  $\delta J$ .

El sistema adjunto, está entonces dado por

$$\begin{cases} -\partial_t p - u \partial_x p = 0, & \text{en } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \setminus \Sigma, \\ [p]_{\Sigma} = 0, \\ q(t) = p(\varphi(t), t), & \text{en } t \in (\tau, T), \\ q'(t) = 0, & \text{en } t \in (\tau, T), \\ p(x, T) = u(x, T) - u^d, & \text{en } \{x < \varphi(T)\} \cup \{x > \varphi(T)\}, \\ q(T) = \frac{\frac{1}{2}[(u(x, T) - u^d)^2]_{\varphi(T)}}{[u]_{\varphi(T)}}. \end{cases} \quad (3.37)$$

Vamos a comentar brevemente los resultados de la Proposición 16 antes de dar su prueba. La fórmula (3.34) proporciona un modo obvio para calcular una dirección de descenso de  $J$  en  $u^0$ . Sólo debemos tomar

$$(\delta u^0, \delta \varphi^0) = (-p(x, 0), -q(0)[u]_{\varphi^0}). \quad (3.38)$$

Aquí, el valor de  $\delta \varphi^0$  debe ser interpretado como el desplazamiento óptimo diferencial para la discontinuidad de  $u^0$ .

Sin embargo, es importante subrayar que  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  no es un vector tangente generalizado en  $T_{u^0}$  debido a que  $p(x, 0)$  no es continua para todo  $x \neq \varphi^0$ . En efecto,  $p(x, t)$  toma el valor constante  $q(T)$  en la región completa triangular ocupada por las características de (3.1) que se encuentran con el choque  $\Sigma$ . Por lo tanto,  $p$  tendrá en general dos discontinuidades a lo largo del contorno de esta región (véase Figura 3.3).

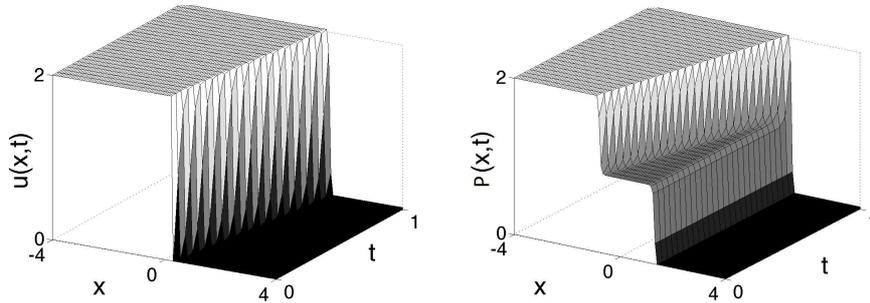


Figura 3.3: Solución  $u(x, t)$  de la ecuación de Burgers con un dato inicial teniendo una discontinuidad (izquierda) y adjunta que toma el valor constante en la región ocupada por las características que se encuentran en el choque (derecha).

Esto es un importante inconveniente en el desarrollo de un algoritmo de descenso para  $J$ . Si  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  es una dirección de descenso perteneciente a  $T_{u^0}$ , el nuevo dato  $u^{0, new}$  debe ser obtenido de  $u^0$  siguiendo el camino asociado a esta dirección de descenso

$$u^{0, new} = \begin{cases} u^0 + \varepsilon \delta u^0 + [u^0]_{\varphi^0} \chi_{[\varphi^0 + \varepsilon \delta \varphi^0, \varphi^0]} & \text{si } \delta \varphi^0 < 0, \\ u^0 + \varepsilon \delta u^0 - [u^0]_{\varphi^0} \chi_{[\varphi^0, \varphi^0 + \varepsilon \delta \varphi^0]} & \text{si } \delta \varphi^0 > 0, \end{cases} \quad (3.39)$$

para algún  $\varepsilon > 0$  lo suficientemente pequeño, correctamente escogido. Nótese que, si tomamos (3.38) como dirección de descenso  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$ , que no es vector tangente generalizado como se explicó más arriba, el nuevo valor  $u^{0, new}$  tendrá tres discontinuidades:

la primera que viene del desplazamiento de la discontinuidad  $u^0$  en  $\varphi^0$  y dos más producidas por las discontinuidades de  $p(x, 0)$ . Por lo tanto, en un proceso iterativo, el algoritmo de descenso irá creando más y más discontinuidades incrementando de manera artificial la complejidad de la solución. Esto motiva el método de las direcciones alternadas de descenso que proponemos, basado en la noción de gradientes generalizados, pero que preserva bajo control la complejidad de las soluciones a lo largo del proceso iterativo. Esto se realizará en la siguiente Sección.

Terminamos esta sección con la prueba de la Proposición 16.

*Demostración.* (de la Proposición 16) Un cálculo directo muestra que  $J$  es Gateaux diferenciable en el sentido de la Definición 15 y que, la derivada Gateaux generalizada de  $J$  en la dirección del vector tangente generalizado  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$ , está dada por

$$\delta J = \int_{\{x < \varphi(T)\} \cup \{x > \varphi(T)\}} (u(x, T) - u^d(x)) \delta u(x, T) - \left[ \frac{(u(x, T) - u^d(x))^2}{2} \right]_{\varphi(T)} \delta \varphi(T), \quad (3.40)$$

donde el par  $(\delta u, \delta \varphi)$  resuelve el problema linealizado (3.33) con dato inicial  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$ .

Ahora introducimos el sistema adjunto (3.37). Multiplicando la ecuación de  $\delta u$  por  $p$  e integrando obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{Q^- \cup Q^+} (\partial_t \delta u + \partial_x (u \delta u)) p \, dx dt = - \int_{Q^- \cup Q^+} (\partial_t p + u \partial_x p) \delta u \, dx dt \\ &+ \int_{\{x < \varphi(T)\} \cup \{x > \varphi(T)\}} \delta u(x, T) p(x, T) \, dx - \int_{\{x < \varphi^0\} \cup \{x > \varphi^0\}} \delta u^0(x) p(x, 0) \, dx \\ &- \int_{\Sigma} ([\delta u p]_{\Sigma} n_t + [u \delta u p]_{\Sigma} n_x) \, d\Sigma, \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde  $(n_x, n_t)$  son las componentes cartesianas del vector normal a la curva  $\Sigma$ .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{\{x < \varphi(T)\} \cup \{x > \varphi(T)\}} \delta u(x, T) (u(x, T) - u^d(x)) \, dx \\ &- \left[ \frac{(u(x, T) - u^d(x))^2}{2} \right]_{\varphi(T)} \delta \varphi(T) \\ &= \int_{\{x < \varphi^0\} \cup \{x > \varphi^0\}} \delta u^0(x) p(x, 0) \, dx + \int_{\Sigma} ([\delta u p]_{\Sigma} n_t + [u \delta u p]_{\Sigma} n_x) \, d\Sigma \\ &- \left[ \frac{(u(x, T) - u^d(x))^2}{2} \right]_{\varphi(T)} \delta \varphi(T). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Supongamos, por el momento, que se cumple la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} ([\delta u p]_{\Sigma} n_t + [u \delta u p]_{\Sigma} n_x) \, d\Sigma &= \int_{\Sigma} [p]_{\Sigma} (\overline{\delta u} n_t + \overline{u \delta u} n_x) \, d\Sigma \\ &- \int_{\Sigma} \partial_t \bar{p} (\delta \varphi(t) [u]_{\varphi(t)}) \, d\Sigma + \bar{p}^T(\varphi(T)) \delta \varphi(T) [u]_{\varphi(T)} \\ &- \bar{p}(\varphi(0), 0) \delta \varphi^0 [u]_{\varphi(0)}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Aquí  $\bar{g}$  representa la media de  $g$  a ambos lados del choque  $\Sigma$ , es decir

$$\bar{g}(x) = \frac{1}{2} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(x + \varepsilon n_{\Sigma}) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(x - \varepsilon n_{\Sigma}) \right), \quad x \in \Sigma.$$

Entonces, sustituyendo (3.43) en (3.42) y teniendo en cuenta la condición final sobre  $(p, q)$  para  $t = T$  en (3.37), obtenemos

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{\mathbb{R}} \delta u^0(x) p(x, 0) dx + \int_{\Sigma} [p]_{\Sigma} (\overline{\delta u} n_t + \overline{u \delta u} n_x) d\Sigma \\ &\quad - \int_{\Sigma} \partial_{t\bar{g}} \bar{p} \left( \delta \varphi(t) [u]_{\varphi(t)} \right) d\Sigma - \bar{p}(\varphi(0), 0) \delta \varphi^0 [u]_{\varphi(0)}. \end{aligned}$$

Para obtener la fórmula (3.34), el segundo y tercer término en esta expresión deben desaparecer. Este es el caso si  $(p, q)$  satisface (3.37). Esto concluye la prueba de la Proposición 16.

Ahora vamos a probar la fórmula (3.43). Usando la identidad elemental

$$[fg]_{\Sigma} = [f]_{\Sigma} \bar{g} + [g]_{\Sigma} \bar{f}, \quad (3.44)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} ([\delta u p]_{\Sigma} n_t + [u \delta u p]_{\Sigma} n_x) d\Sigma &= \int_{\Sigma} [p]_{\Sigma} (\overline{\delta u} n_t + \overline{u \delta u} n_x) d\Sigma \\ &\quad + \int_{\Sigma} \bar{p} ([\delta u]_{\Sigma} n_t + [u \delta u]_{\Sigma} n_x) d\Sigma, \end{aligned}$$

y obtenemos el primer término en la identidad (3.43). Ahora simplificamos el segundo término:

$$\int_{\Sigma} \bar{p} ([\delta u]_{\Sigma} n_t + [u \delta u]_{\Sigma} n_x). \quad (3.45)$$

Las componentes cartesianas del vector normal a  $\Sigma$  están dadas por

$$n_t = \frac{-\varphi'(t)}{\sqrt{1 + (\varphi'(t))^2}}, \quad n_x = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi'(t))^2}}.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la segunda ecuación en el sistema (3.33),

$$\begin{aligned} [\delta u]_{\Sigma} n_t + [u \delta u]_{\Sigma} n_x &= \frac{-\varphi'(t) [\delta u]_{\Sigma} + [u \delta u]_{\Sigma}}{\sqrt{1 + (\varphi'(t))^2}} \\ &= \frac{\delta \varphi'(t) [u]_{\varphi(t)} + \delta \varphi(t) \left( \varphi'(t) [u_x]_{\varphi(t)} - [\partial_x (u^2/2)]_{\varphi(t)} \right)}{\sqrt{1 + (\varphi'(t))^2}} \\ &= \frac{\delta \varphi'(t) [u]_{\varphi(t)} + \delta \varphi(t) \left[ \frac{d}{dt} u(\varphi(t), t) \right]_{\varphi(t)}}{\sqrt{1 + (\varphi'(t))^2}} = \partial_{t\bar{g}} \left( \delta \varphi(t) [u]_{\varphi(t)} \right). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \bar{p} ([\delta u]_{\Sigma} n_t + [u \delta u]_{\Sigma} n_x) d\Sigma &= \int_{\Sigma} \bar{p} \partial_{t\bar{g}} \left( \delta \varphi(t) [u]_{\varphi(t)} \right) d\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma} \partial_{t\bar{g}} \bar{p} \left( \delta \varphi(t) [u]_{\varphi(t)} \right) + \bar{p}^T(\varphi(T)) \delta \varphi(T) [u]_{\varphi(T)} d\Sigma - \bar{p}(\varphi(0), 0) \delta \varphi^0 [u]_{\varphi(0)}. \end{aligned}$$

□

### 3.5. Método de las direcciones de descenso alternantes

Como se comentó al final de la sección previa, uno de los principales inconvenientes del enfoque continuo, cuando hay discontinuidades, es que, en general, el algoritmo de descenso que usa la dirección de descenso óptima basada en el cálculo del vector tangente generalizado, produce sucesiones minimizantes con complejidad creciente. El remedio es usar verdaderos vectores tangentes generalizados en  $T_{u^0}$  como direcciones de descenso para  $J$  [21].

Motivados por esta discusión introducimos una descomposición de los vectores tangentes generalizados. Esto requiere en primer lugar introducir cierta notación. Sea

$$x^- = \varphi(T) - u^-(\varphi(T))T, \quad x^+ = \varphi(T) - u^+(\varphi(T))T,$$

y consideremos los siguientes subconjuntos (ver Figura 3.4),

$$\hat{Q}^- = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \text{ tal que } x < \varphi(T) - u^-(\varphi(T))t\},$$

$$\hat{Q}^+ = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \text{ tal que } x > \varphi(T) - u^+(\varphi(T))t\}.$$

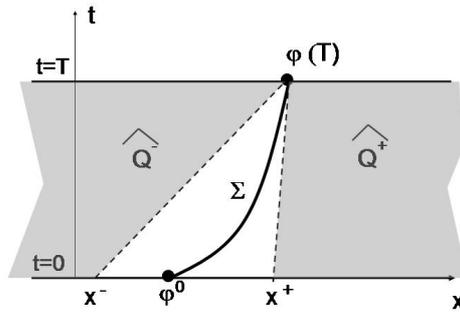


Figura 3.4: Subdominios  $\hat{Q}^-$  y  $\hat{Q}^+$ .

**Proposición 20.** Supongamos que hemos restringido el conjunto de trayectorias en  $\Sigma_{u^0}$  a aquellas que pueden ser asociadas a vectores tangentes generalizados  $(\delta u^0, \delta \varphi^0) \in T_{u^0}$  satisfaciendo,

$$\delta \varphi^0 = \frac{\int_{x^-}^{\varphi^0} \delta u^0 + \int_{\varphi^0}^{x^+} \delta u^0}{[u]_{\varphi^0}}. \quad (3.46)$$

Entonces, la solución  $(\delta u, \delta \varphi)$  del sistema (3.33) satisface  $\delta \varphi(T) = 0$  y la derivada Gateaux generalizada de  $J$  en la dirección  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  se puede escribir como

$$\delta J = \int_{\{x < x^-\} \cup \{x > x^+\}} p(x, 0) \delta u^0(x) dx, \quad (3.47)$$

donde  $p$  satisface el sistema

$$\begin{cases} -\partial_t p - u \partial_x p = 0, & \text{en } \hat{Q}^- \cup \hat{Q}^+, \\ p(x, T) = u(x, T) - u^d, & \text{en } \{x < \varphi(T)\} \cup \{x > \varphi(T)\}. \end{cases} \quad (3.48)$$

Análogamente, si restringimos el conjunto de trayectorias en  $\Sigma_{u^0}$  a aquéllas para las cuales el vector tangente generalizado asociado  $(\delta u^0, \delta \varphi^0) \in T_{u^0}$  satisface  $\delta u^0 = 0$ , entonces  $\delta u(x, T) = 0$  y la derivada Gateaux generalizada de  $J$  en la dirección  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  se puede escribir como

$$\delta J = - \left[ \frac{(u(x, T) - u^d(x))^2}{2} \right]_{\varphi(T)} \frac{[u(\cdot, T)]_{\varphi(T)}}{[u^0]_{\varphi^0}} \delta \varphi^0. \quad (3.49)$$

**Comentario 21.** La fórmula (3.47) establece una expresión simplificada para la derivada Gateaux generalizada de  $J$  cuando consideramos direcciones  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  que no mueven la posición del choque en  $t = T$ . Estas direcciones están caracterizadas por la fórmula (3.46) que restringe los desplazamientos infinitesimales de la posición del choque  $\delta \varphi^0$  en términos de la variación de  $u^0$  a ambos lados de  $x = \varphi^0$ . Nótese, en particular, que a cualquier valor  $\delta u^0$  a ambos lados del salto  $\varphi^0$  le corresponde una única traslación infinitesimal  $\delta \varphi^0$  de la posición del choque inicial que no mueve el choque en  $t = T$ .

Nótese también que el sistema (3.48) no permite determinar la función  $p$  fuera de la región  $\hat{Q}^- \cup \hat{Q}^+$ , es decir en la región bajo la influencia del choque por las líneas características que emanan desde él. Sin embargo el valor de  $p$  en esta región no requiere evaluar la derivada generalizada de Gateaux en (3.47).

Análogamente, la fórmula (3.49) proporciona una expresión simplificada para la derivada Gateaux generalizada de  $J$  cuando se consideran direcciones  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  que únicamente mueven la posición del choque en  $t = T$ .

A continuación se explicará el principal interés de la Proposición 20 antes de dar su prueba. Los resultados en esta Proposición 20 sugieren una descomposición obvia del conjunto de vectores tangentes generalizados:

$$T_{u^0} = T_{u^0}^1 \oplus T_{u^0}^2 \quad (3.50)$$

donde  $T_{u^0}^1$  contiene aquellos  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  para los cuales se verifica la identidad (3.46), y  $T_{u^0}^2$  denota aquellos para los cuales  $\delta u^0 = 0$ . Esto proporciona dos clases de direcciones de descenso para  $J$  en  $u^0$ . En principio no son óptimas en el sentido de que no son las direcciones de máxima pendiente pero ambas tienen tres propiedades importantes:

1. Ambas son direcciones de descenso.
2. Permiten dividir el diseño del perfil y de la posición del choque.
3. Son verdaderos gradientes generalizados y por lo tanto mantienen la estructura de datos sin incrementar su complejidad.

Cuando se consideran vectores tangentes generalizados perteneciendo a  $T_{u^0}^1$  podemos escoger como dirección de descenso:

$$\delta u^0 = \begin{cases} -p(x, 0) & \text{si } x < x^-, \\ -\lim_{\substack{x \rightarrow x^- \\ x < x^-}} p(x, 0) & \text{si } x^- < x < \varphi^0, \\ -\lim_{\substack{x \rightarrow x^+ \\ x > x^+}} p(x, 0) & \text{si } \varphi^0 < x < x^+, \\ -p(x, 0) & \text{si } x^+ < x, \end{cases} \quad \delta \varphi^0 = - \frac{\int_{x^-}^{\varphi^0} p(x, 0) + \int_{\varphi^0}^{x^+} p(x, 0)}{[u]_{\varphi^0}}, \quad (3.51)$$

mientras que para  $T_{u^0}^2$  una buena elección consiste en:

$$\delta u^0 = 0, \quad \delta \varphi^0 = \left[ \frac{(u(x, T) - u^d(x))^2}{2} \right]_{\varphi(T)} \frac{[u(\cdot, T)]_{\varphi(T)}}{[u^0]_{\varphi^0}}. \quad (3.52)$$

En (3.51) el valor de  $\delta u^0$  en el intervalo  $(x^-, x^+)$  no afecta a la derivada Gateaux generalizada en (3.47) siempre que  $\delta \varphi^0$  se escoja como se indica (de otra manera el choque se movería y produciría un término extra sobre la derivada del funcional  $J$ ). En los intervalos  $(x^-, \varphi^0)$  y  $(\varphi^0, x^+)$ , hemos seleccionado los valores constantes más simples que preservan la continuidad Lipschitz de  $\delta u^0$  en  $x = x^-$  y  $x = x^+$ , pero no necesariamente en  $x = \varphi^0$ . Otras elecciones posibles también proporcionan direcciones de descenso para  $J$  en  $u^0$ , pero deberían producir la misma derivada de Gateaux de acuerdo a (3.47). Esto nos permite definir una estrategia para obtener direcciones de descenso para  $J$  sobre  $u^0$  en  $T_{u^0}$ .

Para ilustrar ésto consideramos el caso más sencillo en el cual

$$u^d \text{ es Lipschitz a trozos con una discontinuidad sobre } x = x^d. \quad (3.53)$$

Para inicializar el algoritmo de descenso, en vista de la estructura de  $u^d$  tomamos  $u^0$  con una estructura similar, con una única discontinuidad localizada en  $\varphi^0$ . Típicamente esto produce una solución  $u$  con una discontinuidad de choque que en el tiempo final  $t = T$  está localizada en  $\varphi(T)$ . Entonces, hay dos posibilidades dependiendo del valor de  $\varphi(T)$  antes de aplicar el método de descenso:

1.  $\varphi(T) \neq x^d$  y consideramos una dirección de descenso de la forma (3.52) que mueva la discontinuidad de  $u^0$  hasta que tengamos  $x^d = \varphi(T)$ .
2. Ya tenemos  $x^d = \varphi(T)$  y consideramos una dirección de descenso de la forma (3.51). Estas direcciones ajustan el valor de la solución  $u$  a ambos lados del choque.

En la práctica, las deformaciones del segundo paso moverán ligeramente la posición del choque debido a la dependencia no lineal en el parámetro  $\varepsilon$ . Por lo tanto, uno debe iterar este procedimiento para asegurar una situación simultánea del choque y el mejor ajuste del valor de la solución a ambos lados de él.

En la siguiente sección se explicará cómo implementar un algoritmo de descenso siguiendo esta idea. Por supuesto, se puede emplear en el caso en que el número de choques de  $u^0$  y  $u^d$  no sea necesariamente uno, o el mismo.

*Demostración.* (Proposición 20) Supongamos que  $(\delta u^0, \delta \varphi^0)$  es el vector tangente generalizado para el cual la solución de (3.37) satisface  $\delta \varphi(T) = 0$ . La primera ecuación en (3.33) se puede escribir como

$$\operatorname{div}_{t,x}(\delta u, u \delta u) = 0.$$

Por lo tanto, integrando esta ecuación sobre el triángulo  $Q^- \setminus \hat{Q}^-$  y usando el teorema de la divergencia obtendremos

$$0 = - \int_{x^-}^{\varphi^0} \delta u^0 dx + \int_{\Sigma} (\delta u, u \delta u) \cdot \mathbf{n} ds,$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal a  $\Sigma$ . Por supuesto obtenemos una fórmula análoga si integramos sobre  $Q^+ \setminus \hat{Q}^+$ . Combinando esas dos identidades, y (3.46), tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\varphi^0}^{x^+} \delta u^0 dx + \int_{x^-}^{\varphi^0} \delta u^0 dx \\ &= - \int_{\Sigma} ([\delta u], [u \delta u]) \cdot \mathbf{n} ds = - \int_{\Sigma} \partial_{tg}(\delta \varphi[u]_{\Sigma}) ds = \delta \varphi(0)[u]_{\varphi(0)} \end{aligned} \quad (3.54)$$

de donde se deduce (3.46).

Ahora vamos a probar la fórmula (3.48). Seguimos el argumento de la prueba de la Proposición 16. Debido a que  $\delta \varphi(T) = 0$ , en este caso, la fórmula (3.40) se reduce a

$$\delta J = \int_{\{x < \varphi(T)\} \cup \{x > \varphi(T)\}} (u(x, T) - u^d(x)) \delta u(x, T). \quad (3.55)$$

Cuando multiplicamos la ecuación de  $\delta u$  por la solución  $p$  de (3.48) e integramos, esta vez sobre  $\bar{Q}^- \cup \hat{Q}^+$ , fácilmente obtenemos (3.48).  $\square$

### 3.6. Aproximaciones numéricas de las direcciones de descenso

Hemos calculado el gradiente del funcional continuo  $J$  en varios casos ( $u$  suave y teniendo discontinuidades de choque) pero, en la práctica, se deben buscar direcciones de descenso para el funcional discreto  $J^{\Delta}$ . En esta sección discutiremos varias posibilidades para el cálculo de los gradientes dependiendo del enfoque seleccionado (continuo vs. discreto) y el grado de sofisticación adoptado. Consideraremos las siguientes posibilidades:

- El enfoque discreto: esquemas diferenciables.
- El enfoque discreto: esquemas no diferenciables.
- El enfoque continuo: condiciones internas de contorno sobre el choque.
- El enfoque continuo: el método de las direcciones alternadas.

El último de ellos es el método nuevo que se propone en este trabajo. En la sección siguiente presentamos algunos experimentos numéricos que nos permitirán comparar fácilmente la eficacia de cada método. Como se verá, el método de las direcciones de descenso alternantes que proponemos, alternando los vectores tangentes generalizados para mover a veces el choque y otras veces corregir el perfil a ambos lados de él, es superior de varias maneras a los métodos clásicos. En primer lugar, evita las desventajas de los otros métodos métodos diferenciables derivados de su ineficacia en la captura de los choques, la dificultad de tratar con esquemas no diferenciables y la incertidumbre de usar “pseudo-linearizaciones”, o la dificultad para imponer eficientemente, en la práctica, condiciones internas de contorno. Como consecuencia de esto, el método que proponemos es mucho más robusto y la minimización del funcional se realiza de una manera mucho más eficiente en un número perceptiblemente más pequeño de iteraciones.

El resto de esta sección se divide de la siguiente manera: primero calcularemos el gradiente del funcional discreto cuando el esquema numérico elegido para aproximar

la ecuación de Burgers es diferenciable. Cuando el esquema numérico no es diferenciable el gradiente del funcional coste no está bien definido y el cálculo de la dirección de la pendiente se debe realizar de manera distinta. En la segunda subsección presentamos un método alternativo que consiste en calcular un subgradiente del funcional discreto. Las dos subsecciones anteriores contienen los métodos basados en el enfoque continuo. El tercero describe *a priori* el método más natural basado en la discretización del gradiente continuo mientras que la cuarta subsección se dedica al nuevo método introducido en este trabajo en el cual consideramos una descomposición conveniente de los vectores tangentes generalizados.

### 3.6.1. El enfoque discreto: esquemas numéricos diferenciables

Calcular el gradiente del funcional discreto  $J^\Delta$  requiere calcular una derivada de  $J^\Delta$  con respecto a cada nodo de la malla. Esto se puede hacer de una manera computacionalmente barata usando el estado adjunto. Lo ilustraremos sobre dos esquemas numéricos diferentes: Lax-Friedrichs y Engquist-Osher. Nótese que ambos esquemas satisfacen la hipótesis del Teorema 7 y por lo tanto los minimizadores numéricos son buenas aproximaciones de los minimizadores del problema continuo. Sin embargo, como los funcionales discretos  $J^\Delta$  no son necesariamente convexos, los métodos de gradiente podrían proporcionar sucesiones que no converjan a un minimizador global de  $J^\Delta$ . Pero este inconveniente y dificultad aparece en la mayoría de las aplicaciones de métodos de descenso en los problemas de diseño óptimo y control. Como veremos, en este contexto, la aproximación obtenida por métodos de gradiente es satisfactoria, aunque su convergencia es lenta debido a las innecesarias oscilaciones que introduce el método de descenso.

Calcular el gradiente de  $J^\Delta$ , de manera rigurosa, requiere que el esquema numérico (3.12) en consideración sea diferenciable y, a menudo, este no es el caso. Para ser más precisos, para la ecuación de Burgers (3.1) podemos escoger algunos métodos eficientes que son diferenciables (como el de Lax-Friedrichs y Engquist-Osher) pero esta no es la situación para sistemas generales de leyes de conservación en mayores dimensiones, como las ecuaciones de Euler. Para esos sistemas complejos los métodos eficientes, como Godunov, Roe, etc., no son diferenciables (ver, por ejemplo [47] o [75]) y por lo tanto hacer el enfoque de esta sección no tiene utilidad.

Hemos observado que cuando se emplea un esquema conservativo de aproximación numérica de tres puntos (3.12) para aproximar la ecuación de Burgers (3.1) y tiene una función de flujo diferenciable  $g$ , entonces la linealización es fácil de calcular. Obtenemos

$$\begin{cases} \delta u_j^{n+1} = \delta u_j^n - \lambda \left( \partial_1 g_{j+1/2}^n \delta u_j^n + \partial_2 g_{j+1/2}^n \delta u_{j+1}^n - \partial_1 g_{j-1/2}^n \delta u_{j-1}^n - \partial_2 g_{j-1/2}^n \delta u_j^n \right) \\ = 0, \\ j \in \mathbb{Z}, \quad n = 0, \dots, N. \end{cases} \quad (3.56)$$

En vista de esto, el sistema adjunto discreto también se puede escribir para cualquier función de flujo  $g$  y diferenciable:

$$\begin{cases} p_j^n = p_j^{n+1} + \lambda \left( \partial_1 g_{j+1/2}^n (p_{j+1}^{n+1} - p_j^{n+1}) + \partial_2 g_{j-1/2}^n (p_j^{n+1} - p_{j-1}^{n+1}) \right), \\ p_j^{N+1} = p_j^T, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n = 0, \dots, N. \end{cases} \quad (3.57)$$

En efecto, multiplicando las ecuaciones (3.56) por  $p_j^{n+1}$  y sumando en  $j \in \mathbb{Z}$  y  $n = 0, \dots, N$ , se puede obtener fácilmente la siguiente identidad,

$$\Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j^T \delta u_j^{N+1} = \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j^0 \delta u_j^0. \quad (3.58)$$

Esto es la versión discreta de la fórmula (3.24) que nos permite simplificar la derivada del funcional discreto.

Por lo tanto, para cualquier variación  $\delta u_\Delta^0 \in \mathcal{U}^\Delta$  de  $u_\Delta^0$ , la derivada Gateaux de la función de coste definida en (3.10) está dada por

$$\delta J^\Delta = \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} (u_j^{N+1} - u_j^d) \delta u_j^{N+1}, \quad (3.59)$$

donde  $\delta u_j^n$  resuelve el sistema linealizado (3.56). Si consideramos  $p_j^n$  la solución de (3.57) con dato final

$$p_j^T = u_j^{N+1} - u_j^d, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.60)$$

entonces  $\delta J^\Delta$  en (3.59) se puede escribir como,

$$\delta J^\Delta = \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j^0 \delta u_j^0, \quad (3.61)$$

y esto permite obtener fácilmente la dirección de descenso de máxima pendiente para  $J^\Delta$ :

$$\delta u_\Delta^0 = -p_\Delta^0. \quad (3.62)$$

Ahora presentaremos dos ejemplos particulares. Primero consideraremos el esquema de Lax-Friedrichs:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n}{2}}{\Delta t} + \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0, & n = 0, \dots, N, \\ u_j^0 = u_{0,j}, & j \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.63)$$

donde  $f(s) = s^2/2$ . El esquema numérico (3.63) se puede escribir en forma conservativa con el flujo numérico dado en (3.15). Es más, satisface las hipótesis del Teorema 7, bajo la condición de Courant-Friedrichs-Levy (CFL)  $\lambda |\max u^0| \leq 1$ , y es diferenciable.

Para cualquier variación  $\delta u_\Delta^0 \in \mathcal{U}^\Delta$  de  $u_\Delta^0$ , la derivada Gateaux de la función de coste está dada por (3.61) donde los valores  $p_j^n$  satisfacen el sistema adjunto,

$$\begin{cases} \frac{p_j^n - \frac{p_{j+1}^{n+1} + p_{j-1}^{n+1}}{2}}{\Delta t} + u_j^n \frac{p_{j-1}^{n+1} - p_{j+1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0, & n = 0, \dots, N, \\ p_j^{N+1} = p_j^T, & j \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.64)$$

con  $p_j^T = (u_j^{N+1} - u_j^d) \in \mathcal{U}_{ad}^\Delta$ .

Nótese que, formalmente, (3.64) es en efecto el esquema numérico de Lax-Friedrichs aplicado al sistema adjunto continuo (3.23).

El esquema de Engquist-Osher se puede tratar de manera similar. En este caso el flujo numérico está dado por (3.16) y tenemos el sistema adjunto

$$\begin{cases} p_j^n = p_j^{n+1} + \lambda \left( \frac{u_j^n + |u_j^n|}{2} (p_{j+1}^{n+1} - p_j^{n+1}) + \frac{u_j^n - |u_j^n|}{2} (p_j^{n+1} - p_{j-1}^{n+1}) \right) = 0, \\ p_j^{N+1} = p_j^T, & j \in \mathbb{Z}, \quad n = 0, \dots, N. \end{cases} \quad (3.65)$$

La derivada  $\delta J^\Delta$  está dada de nuevo por (3.61) y la dirección de descenso de máxima pendiente es (3.62) donde, ahora,  $p$  resuelve (3.65).

Observamos que (3.65) es el método *upwind* para el sistema adjunto continuo. Por lo tanto, este es otro caso en el cual el adjunto de la discretización corresponde con la bien conocida discretización del problema adjunto.

**Comentario 22.** *Aquí no abordaremos el problema de la convergencia de estos esquemas adjuntos a través de la solución del sistema adjunto continuo. Por supuesto, esto es fácil cuando  $u$  es suave pero está lejos de ser trivial cuando  $u$  tiene discontinuidades de choque.*

*El análisis de si a medida que  $\Delta \rightarrow 0$ , estos esquemas permiten reconstruir el sistema adjunto completo, con la condición interna de Dirichlet a lo largo del choque, es un problema interesante para la investigación futura. El trabajo [48] contiene un estudio preliminar en esta dirección.*

### 3.6.2. El enfoque discreto: esquemas numéricos no diferenciables

Aquí describimos los métodos más comunes para calcular “gradientes” de funcionales cuando el esquema numérico empleado para la aproximación de (3.1) no es diferenciable (ver por ejemplo [45] donde este método es empleado en el contexto de la estabilidad linealizada). Para ilustrar este método nos centraremos en el esquema de Roe que es uno de los más populares para aproximar soluciones de leyes de conservación.

En el caso particular de la ecuación de Burgers el esquema de Roe en consideración coincide con el de Godunov y por lo tanto se aplica el Teorema 7.

Sin embargo, el esquema de Roe no es monótono para flujos generales  $f$  y es bien sabido que puede proporcionar soluciones que admiten discontinuidades que violan la condición de entropía (ver [46]). Por lo tanto, la convergencia de los minimizadores discretos hacia los continuos no puede ser garantizada en flujos más generales.

El esquema puede ser modificado para obtener la conservación de la entropía (ver [46] para la modificación de Harten y Hyman) pero no consideraremos estas modificaciones puesto que estamos principalmente interesados en la linealización de un esquema no diferenciable.

El esquema de Roe para una ley de conservación general de la forma

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0,$$

es un esquema conservativo de tres puntos de la forma (3.12) con flujo numérico,

$$g^R(u, v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v) - |A(u, v)|(v - u)),$$

donde la matriz  $A(u, v)$  es una linealización de Roe la cual es una aproximación de  $f'$  (ver, por ejemplo, [45]). En el caso escalar en consideración  $f(u) = u^2/2$  y

$$A(u, v) = \begin{cases} \frac{f(u)-f(v)}{u-v} = \frac{u+v}{2}, & \text{si } u \neq v, \\ f'(u) = u, & \text{si } u = v. \end{cases}$$

Nótese que el esquema previo no es diferenciable, en general, debido a la presencia de valor absoluto de  $A$  en  $g^R$ . Por lo tanto, no podemos linealizar este sistema y obtener su adjunto, en un sentido riguroso. En [45] se propone el siguiente esquema para la linealización

$$\delta u_j^{n+1} = \delta u_j^n - \lambda(h_{j+1/2}^n - h_{j-1/2}^n),$$

donde

$$\begin{aligned} h_{j+1/2}^n &= h(u_j^n, u_{j+1}^n; \delta u_j^n, \delta u_{j+1}^n), \\ h(u, v; w, z) &= \frac{1}{2} (A(u, v)(w + z) - |A(u, v)|(z - w)). \end{aligned} \quad (3.66)$$

La ecuación (3.66) es una aproximación de una selección natural

$$h(u, v; w, z) = \frac{\partial g^R}{\partial u} w + \frac{\partial g^R}{\partial v} z,$$

donde  $\frac{\partial f}{\partial u}$  es aproximado por la linealización de Roe  $A(u, v)$ , y suponiendo que el término no-diferenciable  $|A(u, v)|$  en (3.66) tiene derivada nula. Esta última hipótesis puede ser formalmente interpretada como una elección particular del subgradiente de la función valor absoluto  $a(x) = |x|$  en  $x = 0$ .

De este modo

$$\begin{aligned} h_{j+1/2}^n &= \frac{1}{2} (A_{j+1/2}(\delta u_j^n + \delta u_{j+1}^n) - |A_{j+1/2}|(\delta u_{j+1}^n - \delta u_j^n)), \\ A_{j+1/2} &= A(u_j^n, u_{j+1}^n). \end{aligned}$$

El sistema adjunto correspondiente al sistema de las ecuaciones linealizadas viene dado por

$$\begin{cases} p_j^n = p_j^{n+1} + \lambda (\alpha_j^n(p_{j+1}^{n+1} - p_j^{n+1}) + \beta_j^n(p_j^{n+1} - p_{j-1}^{n+1})), & n = 0, \dots, N, \\ p_j^{N+1} = p_j^T, & j \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.67)$$

donde

$$\alpha_j^n = \frac{1}{2}(A_{j+1/2} + |A_{j+1/2}|), \quad \beta_j^n = \frac{1}{2}(A_{j+1/2} - |A_{j+1/2}|).$$

Multiplicando por  $p_j^{n+1}$  y sumando en  $j \in \mathbb{Z}$  y  $n = 0, \dots, N$  obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^N (\delta u_j^{n+1} - \delta u_j^n + \lambda(h_{j+1/2}^n - h_{j-1/2}^n)) p_j^{n+1} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n=0}^N (p_j^n - p_j^{n+1} - \lambda [\alpha_j^n(p_{j+1}^{n+1} - p_j^{n+1}) + \beta_j^n(p_j^{n+1} - p_{j-1}^{n+1})]) \delta u_j^n \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta u_j^{N+1} p_j^{N+1} - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta u_j^0 p_j^0 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta u_j^{N+1} p_j^{N+1} - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta u_j^0 p_j^0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Para obtener (3.68) hemos empleado la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{j+1/2}^n p_j^{n+1} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} A_{j+1/2} (\delta u_j^n + \delta u_{j+1}^n) p_j^{n+1} \\ &\quad - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} |A_{j+1/2}| (\delta u_{j+1}^n - \delta u_j^n) p_j^{n+1} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} (A_{j+1/2} p_j^{n+1} + A_{j-1/2} p_{j-1}^{n+1}) \delta u_j^n \\ &\quad - \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} (|A_{j-1/2}| p_{j-1}^{n+1} - |A_{j+1/2}| p_j^{n+1}) \delta u_j^n, \end{aligned}$$

y la análoga para el término  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} h_{j-1/2}^n p_j^{n+1}$ .

Luego, como para los esquemas diferenciables, la expresión (3.68) permite simplificar la “derivada”  $\delta J^\Delta$ , la cual se escribe formalmente como (3.61). Por lo tanto, una dirección de descenso tentativa para  $J^\Delta$  está dada por (3.62), donde  $p_j^n$  es la solución del sistema adjunto (3.67) con valor final  $p_j^{N+1} = u_j^{N+1} - u_j^d$ .

El cálculo de más arriba no proporciona el gradiente del funcional discreto, el cual no es diferenciable en este caso. Pero el valor obtenido en a través de este cálculo se podría emplear como una “dirección de descenso” alternativa en un algoritmo de tipo gradiente.

Nótese que el enfoque de usar “pseudogradientes” presentado aquí es una práctica común en diseño óptimo en aeronáutica donde los resolvidores eficientes son frecuentemente no diferenciables (ver [86]).

### 3.6.3. Enfoque continuo: condiciones internas de contorno en el choque

Este método está basado en la Proposición 16 que indica que la sensibilidad del funcional se obtiene mediante la aproximación de  $(-p(x, 0), -q(0)[u]_{\varphi^0})$ . Debemos recordar que el sistema adjunto está bien puesto y su solución puede obtenerse en dos pasos: Primero debemos obtener el valor de  $p$  sobre el choque  $\varphi$  de  $u$  de la ecuación diferencial  $q'(t) = 0$  y las condiciones finales en  $q(T)$ . Nótese que, en nuestro caso,  $p$  toma el valor constante de  $q(T)$  en el choque  $\Sigma$ . Entonces resolvemos hacia atrás la ecuación adjunta teniendo en cuenta el valor de  $p$  en  $t = T$  y el valor de  $p$  sobre el choque.

A nivel numérico podemos proceder de manera similar distinguiendo el cálculo del estado adjunto discreto en la región de influencia del choque y fuera de él. Primero presentaremos una discretización factible de la ecuación adjunta en el dominio completo (por ejemplo tomando el adjunto de un esquema numérico linealizable), que resolveremos. Esto proporciona una aproximación del estado adjunto fuera de la influencia de la región del choque. Luego determinamos el valor de  $j_n$  que se corresponde con el punto de la malla más cercano  $x = x_{j_n}$  a la posición del choque  $t = t^n$ , e imponemos  $p_{j_n}^n = q(T)$  para este  $j_n$  concreto. Finalmente, tomamos  $p_j^n = p_{j_n}^n$  en la región de influencia del choque. De este modo obtendremos una dirección de descenso de la forma

$$(\delta u_j^0, \delta \varphi^0) = (-p_j^0, -q^0[u_j^0]_{\varphi^0}). \quad (3.69)$$

En particular, el segundo valor debe interpretarse como el desplazamiento de la posición de la discontinuidad de  $u^0$ . Nótese que esta interpretación es formal al nivel continuo debido a que la expresión (3.39) fue derivada para vectores tangentes generalizados, que no son los que aquí se obtienen, como se discutió después del enunciado de la Proposición 16.

Para ser más preciso, ahora debemos describir cómo obtener un nuevo dato inicial a partir del anterior en el proceso iterativo de descenso, en vista de la aproximación de los gradientes.

Por ejemplo, si  $\delta \varphi^0 > 0$ , se puede escoger

$$u_j^{0,new} = \begin{cases} u_j^0 + \varepsilon \delta u_j^0, & \text{si } j < \varphi^0 \text{ o } j > \varphi^0 + \varepsilon \delta \varphi^0 / \Delta x, \\ u_j^0 + \varepsilon \delta u_j^0 + [u_j^0]_{\varphi^0}, & \text{si } \varphi^0 \leq j \leq \varphi^0 + \varepsilon \delta \varphi^0 / \Delta x. \end{cases}$$

Las principales desventajas de este enfoque son las siguientes:

1. En cualquier paso del algoritmo de descenso, se requiere una aproximación numérica de la posición del choque.
2. El par  $(p(x, 0), q(0))$  no es un vector tangente generalizado y, como se discutió después del enunciado de la Proposición 16, por lo que este procedimiento iterativo proporcionaría datos crecientemente complejos.
3. Un desplazamiento puro de la discontinuidad nunca será una dirección de descenso calculada por este método. Es más, un vector generalizado de la forma  $(0, \alpha)$ , que mueve sólo el choque, no puede ser obtenido como  $(p(x, 0), q(0))$  a partir de una solución de (3.37). En efecto, si  $p(x, 0) = 0$  entonces  $q(0) = 0$ , debido a que  $p(x, T) = q(T) = q(0)$  en toda la región ocupada por las características de  $u$  que se encuentran con  $\Sigma$ .

### Método de las direcciones alternadas

Aquí proponemos un nuevo método sugerido por los resultados de la Proposición 20 y la discusión posterior. Nos referiremos a este método como el método de las direcciones alternadas de descenso.

Con objeto de ilustrar cómo se puede implementar este método, asumimos que tenemos un objetivo final  $u^d$  el cual es una función Lipschitz continua con una única discontinuidad en  $x = x_T$  con un salto negativo, esto es  $[u^d]_{x_T} < 0$ , para garantizar que esta discontinuidad puede ser generada por una solución discontinua de (3.1) en  $t = T$ . Para inicializar el método iterativo de descenso escogemos el dato inicial  $u^0$  de tal manera que la solución en tiempo  $t = T$  tenga un perfil similar a  $u^d$ , esto es, sea una función Lipschitz continua con una única discontinuidad de salto negativo, localizada en un punto arbitrario de  $x \in \mathbb{R}$ . La idea principal es aproximar un minimizador de  $J$  alternando los siguientes dos pasos de la iteración: primero perturbamos el dato inicial  $u^0$  simplemente moviendo la discontinuidad de la solución  $u$  de (3.1) en tiempo  $t = T$ , sin tener en cuenta su valor a ambos lados de la discontinuidad. Una vez que tengamos esto perturbamos el dato  $u^0$  resultante sin alterar la posición de la discontinuidad de  $u(x, T)$ . Esto se hace descomponiendo la familia de vectores tangentes generalizados asociados a  $u^0$  en dos subfamilias introducidas en (3.50) considerando alternativamente (3.51) y (3.52) como direcciones de descenso.

Más precisamente, para una inicialización de  $u^0$  como la de arriba, en cada paso del proceso iterativo de descenso procedemos de la siguiente manera en dos subetapas:

1. Calcular (3.52) y encontrar el tamaño óptimo del paso  $\varepsilon$  de avance. Esto necesita de un problema de optimización unidimensional que podemos resolver con métodos clásicos (bisección, regla de Armijo, etc.). De esta manera obtenemos la mejor localización de la discontinuidad para este  $u^0$ .
2. Luego usamos la dirección de descenso (3.51) para modificar el valor de la solución en tiempo  $t = T$  a ambos lados de la discontinuidad. Aquí, podemos estimar otra vez el tamaño del paso resolviendo un problema de optimización unidimensional o simplemente tomando un paso constante.

La mayor ventaja de este método es que para un valor inicial  $u^0$  con una única discontinuidad, la hipótesis (3.53) se mantiene y las direcciones de descenso son vectores tangentes generalizados, esto es, introducen variaciones Lipschitz continuas de  $u^0$  a ambos lados de la discontinuidad y un desplazamiento de la posición del choque. De este modo, el nuevo valor obtenido modifica el antiguo, en la dirección de este vector tangente generalizado, y volveremos a tener una única discontinuidad. Por lo tanto, el proceso de optimización iterativo no introducirá nuevas discontinuidades en  $u^0$ , como en el método anterior.

Hemos desarrollado un método para el caso particular en el cual el objetivo  $u^d$  y el dato inicial  $u^0$  que inicializa el proceso tiene una única discontinuidad de choque. Pero estas ideas se pueden aplicar en contextos mucho más generales en los cuales el número de choques no necesariamente coincide. En efecto, como hemos comprobado en varios experimentos numéricos, este método es capaz de generar choques y destruirlos, si ésto contribuye al decrecimiento del funcional.

Este método está en cierto sentido cercano al método empleado en diseño de forma en elasticidad en el cual las deformaciones topológicas (que corresponderían a controlar la localización del choque) son combinadas con las clásicas deformaciones de forma (que simplemente modifican la forma de la solución fuera del choque) [37].

### 3.7. Experimentos numéricos

En esta sección presentamos algunos experimentos numéricos que ilustran los resultados obtenidos en problemas modelo de optimización con cada uno de los métodos numéricos descritos en las secciones previas.

Hemos escogido como dominio computacional el intervalo  $(-4, 4)$  y como condiciones de contorno de (3.1) hemos seleccionado, en cada paso de tiempo  $t = t^n$ , el valor del dato inicial en el contorno. Esto se puede justificar si asumimos que el valor inicial  $u^0$  es constante en un número suficiente de vecinos interiores del contorno  $x = \pm 4$  (los cuales dependen del tamaño de la norma  $L^\infty$ , del número de datos en consideración y del horizonte de tiempo  $T$ ), debido a la velocidad finita de propagación. Para la ecuación adjunta usamos un procedimiento similar.

Es importante recalcar una vez más que las soluciones obtenidas con cada método deben corresponder con un mínimo global o local debido a que los métodos gradiente no los distinguen.

Experimento 1. Primero consideramos el perfil objetivo contante a trozos  $u^d$  dado por

$$u^d = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad (3.70)$$

y el tiempo  $T = 1$ . Nótese que en este caso conocemos una solución explícita del problema de optimización que viene dada por

$$u^{0,min} = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1/2, \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (3.71)$$

Esto significa que el valor óptimo  $u^{0,min}$  puede ser alcanzado y el valor mínimo de  $J$  en este caso es cero. Resolvemos el problema de optimización (3.14) con los diferentes

métodos descritos más arriba empezando con la siguiente inicialización para  $u^0$ :

$$u^0 = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1/4, \\ 0 & \text{si } x \geq 1/4, \end{cases} \quad (3.72)$$

que también tiene una discontinuidad, pero localizada en un punto diferente.

Para comparar la eficiencia de los diferentes métodos consideraremos unos valores de  $\Delta x > 0$  y  $\lambda = \Delta t/\Delta x = 1/2$  fijos y nos centraremos en el número de iteraciones necesarias para que cada método alcance un valor prescrito del funcional. En el Cuadro 3.1 damos esos valores cuando el parámetro de discretización espacial es  $\Delta x = 1/20$  y  $\Delta x = 1/80$  respectivamente.

$\log(J^\Delta)$	-3	-4	-5	-6	-7
Lax-Friedrichs	14	39	> 1000		
Engquist-Osher	26	85	288	> 1000	
Roe	18	33	54	114	> 1000
Imponiendo c.c.	5	6	9	21	> 1000
Descenso alternado	3	3	3	No alcanzado	

$\log(J^\Delta)$	-3	-4	-5	-6	-7
Lax-Friedrichs	15	49	> 1000		
Engquist-Osher	115	673	> 1000		
Roe	185	> 1000			
Imponiendo c.c.	5	6	52	440	> 1000
Descenso alternado	3	3	3	3	No alcanzado

Cuadro 3.1: Experimento 1. Número de iteraciones que se necesitan en un algoritmo de descenso para alcanzar el valor de  $\log(J)$  indicado en la fila superior, por los diferentes métodos presentados. La tabla superior corresponde a  $\Delta x = 1/20$  y la inferior a  $\Delta x = 1/80$ . En ambos casos  $\lambda = \Delta t/\Delta x = 1/2$ .

En la Figura 3.5 se muestra el valor inicial  $u^0$  obtenido con los diferentes métodos después de 30 iteraciones para  $\Delta x = 1/20$  y en la Figura 3.6 se muestra el valor del funcional alcanzado, con  $\Delta x = 1/20$  y  $\Delta x = 1/80$ . En ambos casos  $\lambda = \Delta t/\Delta x = 1/2$ .

Observamos lo siguiente:

1. En la Figura 3.5, vemos que aproximaciones numéricas y métodos de descenso diferentes nos llevan a soluciones diferentes.

Obviamente, la calidad de los resultados también de la inicialización  $u^0$ . Esto será discutido en otros experimentos, más adelante. En este la inicialización es la misma para los 5 métodos en consideración.

2. Para los cuatro primeros métodos el dato inicial  $u^0$  que obtenemos después del proceso iterativo presenta fuertes oscilaciones. Ese no es el caso para el método que hemos desarrollado en este artículo basado en las direcciones alternantes de descenso. Nótese que, realmente, las mayores oscilaciones son las que se producen cuando empleamos el esquema de Lax-Friedrichs, que es el más disipativo.

3. En la Figura 3.6 y el Cuadro 3.1 vemos que los métodos numéricos que ignoran la presencia del choque (Lax-Friedrichs, Engquist-Osher y Roe) descienden más lentamente que aquellos que tienen en cuenta la sensibilidad con respecto de la posición del choque (por medio de imponer la condición de contorno sobre el choque o el método de descenso de las direcciones alternantes).
4. Para un  $\Delta x$  fijo, el método de las direcciones alternantes se estabiliza rápidamente en pocas iteraciones. Esto es debido a que la dirección de descenso se calcula para el sistema continuo y no para el discreto, y por lo tanto  $\Delta x$  debe ser pequeña para que ese cálculo sea válido también a nivel discreto.
5. Para valores más pequeños de  $\Delta x$  el único método que continua siendo efectivo es el de las direcciones alternantes de descenso. Los otros métodos descienden más lentamente.

Experimento 2. Consideramos el mismo objetivo  $u^d$ , como en el experimento previo, pero con diferentes datos iniciales. Vemos que diferentes funciones de inicialización  $u^0$ , con más o menos discontinuidades, no alteran la eficiencia del método de descenso de las direcciones alternantes. Los resultados numéricos se pueden ver en la Figura 3.7.

Experimento 3. Ahora consideramos un perfil contante a trozos  $u^d$  con dos discontinuidades:

$$u^d = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1/4, \\ 1/2 & \text{si } -1/4 \leq x < 3/2, \\ 0 & \text{si } x \geq 3/2, \end{cases} \quad (3.73)$$

y el tiempo  $T = 1$ .

Resolvemos el problema de optimización (3.14) con los métodos descritos más arriba empezando con el dato inicial

$$u^0 = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0, \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ 0 & \text{si } x \geq 2. \end{cases} \quad (3.74)$$

el cual también tiene dos discontinuidades, como el objetivo. Las conclusiones son similares a aquéllas obtenidas para los primeros experimentos.

En el Cuadro 3.2 damos el número de iteraciones que necesitamos para cada método con objeto de alcanzar un determinado valor del funcional cuando el parámetro de discretización espacial es  $\Delta x = 1/20$  y  $\lambda = \Delta t/\Delta x = 1/2$ . La solución obtenida después de 30 iteraciones para cada método viene dada en la Figura 3.8. Por supuesto, como en el primer experimento, el método de las direcciones alternantes se vuelve mucho más eficiente para valores bajos de  $\Delta x$ .

Experimento 4. Ahora consideramos un perfil objetivo  $u^d$  constante a trozos con una discontinuidad de salto positiva:

$$u^d = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x < 1/4, \\ 1 & \text{si } x \geq 1/4, \end{cases} \quad (3.75)$$

y el tiempo  $T = 1$ .

Con el método de las direcciones alternantes de descenso obtenemos los mismos valores que con los otros pero en menos iteraciones (ver Figuras 3.9 y 3.10).

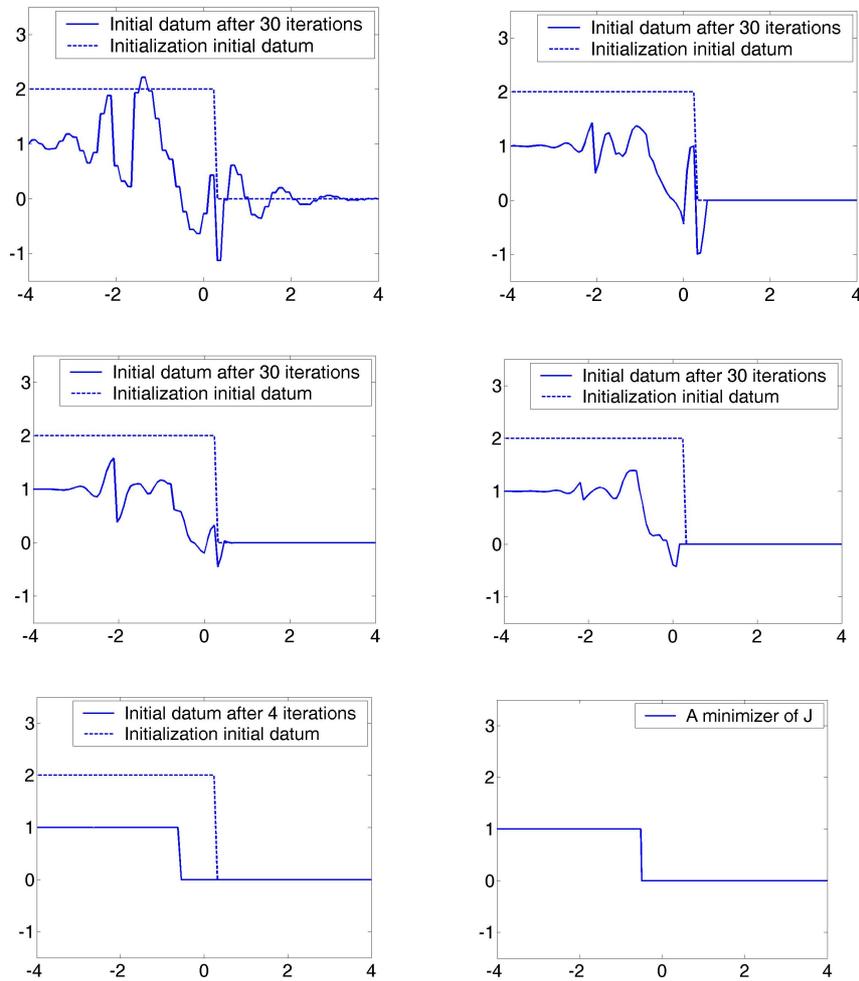


Figura 3.5: Experimento 1. Inicialización (línea punteada) y el dato inicial obtenido después de 30 iteraciones (línea sólida) con Lax-Friedrichs (arriba izquierda), Engquist-Osher (arriba derecha), Roe (mitad izquierda), el enfoque continuo imponiendo una condición de contorno sobre el choque (mitad derecha) y la dirección alternante de descenso (inferior izquierda). En la figura inferior derecha, viene dado un minimizador  $u^0$  del funcional continuo.

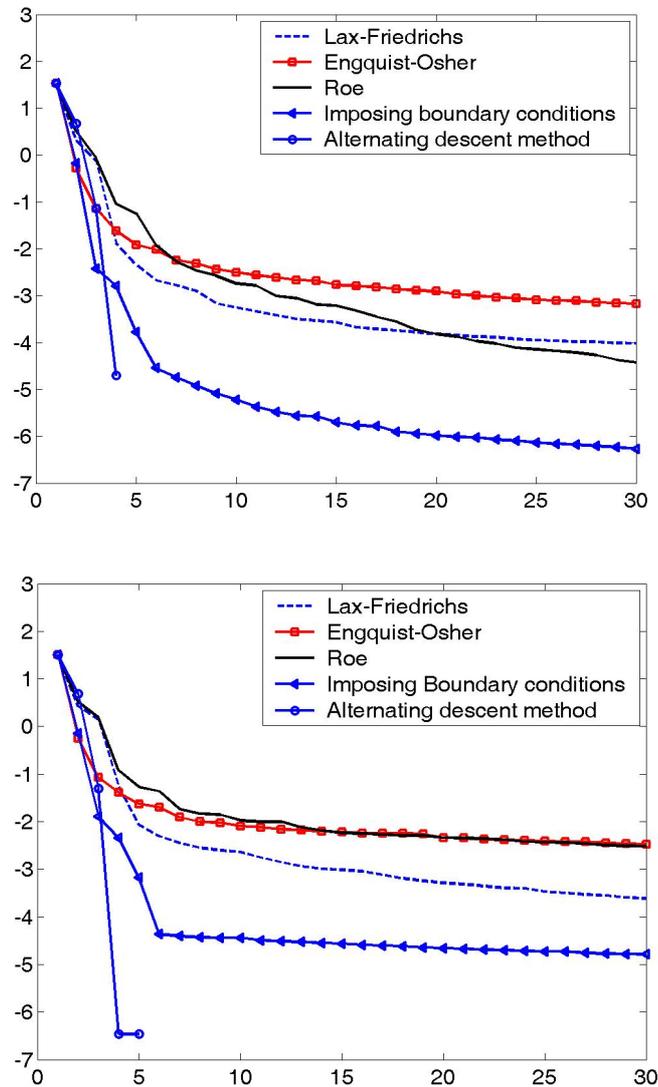


Figura 3.6: Experimento 1. Logaritmo del valor del funcional frente al número de iteraciones en el algoritmo de descenso para los esquemas de Lax-Friedrichs, Engquist-Osher y Roe, el enfoque continuo imponiendo las condiciones internas de contorno sobre el choque y el método de las direcciones alternantes propuesto en este trabajo. La figura de arriba corresponde a  $\Delta x = 1/20$  y la de abajo a  $\Delta x = 1/80$ . Vemos que el último método se estabiliza en pocas iteraciones y es mucho más eficiente cuando consideramos valores lo suficientemente pequeños de  $\Delta x$  con objeto de ser capaces de resolver el choque suficientemente bien.

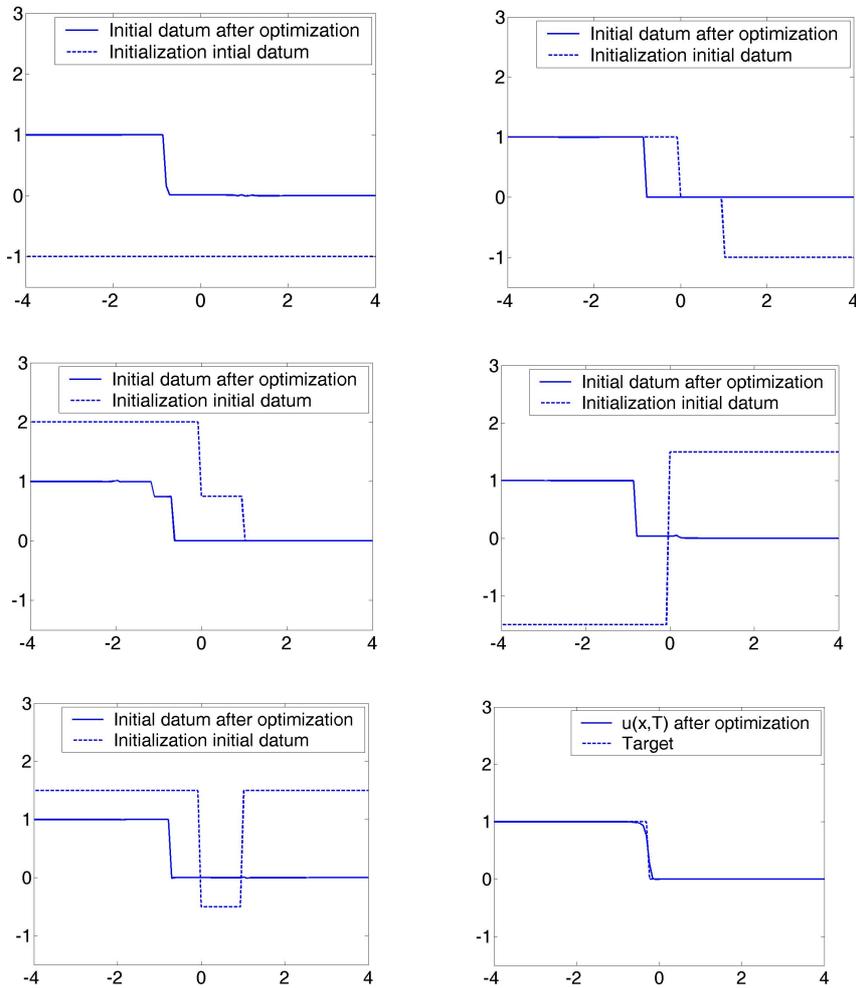


Figura 3.7: Experimento 2. Las cuatro figuras de arriba y la figura inferior izquierda muestran en valor inicial obtenido una vez que las iteraciones de descenso finalizan (línea continua) con diferentes funciones de inicialización  $u^0$  (línea punteada) con el método propuesto en este artículo de las direcciones alternantes de descenso. En la figura inferior derecha, el objetivo  $u^d(x)$  y la solución  $u(x, T)$  (aquí en  $T = 1$ ) corresponde a la obtenida para  $u^0$  se dibujan para la última inicialización. La función  $u(x, T)$  que obtenemos para otras inicializaciones es muy similar a esta. En este experimento  $\Delta x = 1/20$  y  $\lambda = \Delta t / \Delta x = 1/2$ .

$\log(J^\Delta)$	-3	-4	-5	-6	-7
Lax-Friedrichs	5	8	30	> 1000	
Engquist-Osher	5	17	54	> 1000	
Roe	4	6	13	34	101
Imponiendo c.c.	3	5	16	55	> 1000
Descenso alternado	3	4	4	4	No alcanzado

$\log(J^\Delta)$	-3	-4	-5	-6	-7
Lax-Friedrichs	6	10	270	> 1000	
Engquist-Osher	10	235	> 1000		
Roe	20	No alcanzado			
Imponiendo c.c.	8	No alcanzado			
Descenso alternado	3	4	4	5	No alcanzado

Cuadro 3.2: Experimento 3. Número de iteraciones necesarias para el algoritmo de descenso para obtener el valor de  $\log(J)$  indicado en la fila superior, cuando consideramos diferentes estrategias de descenso. Aquí  $\Delta x = 1/20$  en la tabla superior y  $\Delta x = 1/80$  en la inferior. En ambos casos  $\lambda = \Delta t/\Delta x = 1/2$ .

### 3.8. Algoritmos numéricos

En esta sección vamos a comentar los algoritmos que se han implementado en los métodos numéricos.

Primero consideramos el enfoque discreto. El algoritmo es el mismo para los esquemas diferenciables y no diferenciables y emplea un paso de descenso constante. Por supuesto, cuando el esquema numérico no es diferenciable uno debe escoger una pseudolinealización adecuada del flujo numérico, como hemos descrito en el contexto del esquema de Roe.

*Algoritmo 1: resolver la ec. de Burgers con dato inicial*  $\{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}^k \rightarrow \{u_j^n\}_{j=1,\dots,N}^{n=1,\dots,M}$

```

1  input  $\Delta x, \Delta t, \{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}$ 
2  set  $\lambda = \Delta t/\Delta x$ 
3  for  $n = 0(1)M - 1$  repeat
4      set  $u_1^{n+1} = u_1^0, u_N^{n+1} = u_N^0$ 
5      for  $j = 2(1)N - 1$  repeat
6          set  $u_j^{n+1} = u_j^n + \lambda(g(u_j^n, u_{j+1}^n) - g(u_{j-1}^n, u_j^n))$ 
7      end
8  end

```

Línea	Comentarios
2	$\lambda$ satisface la condición de CFL.
6	$g$ es el flujo numérico convectivo.

*Algoritmo 2: resolver la ec. adjunta con dato final*  $\{p_j^T\}_{j=1,\dots,N} \rightarrow \{p_j^0\}_{j=1,\dots,N}$

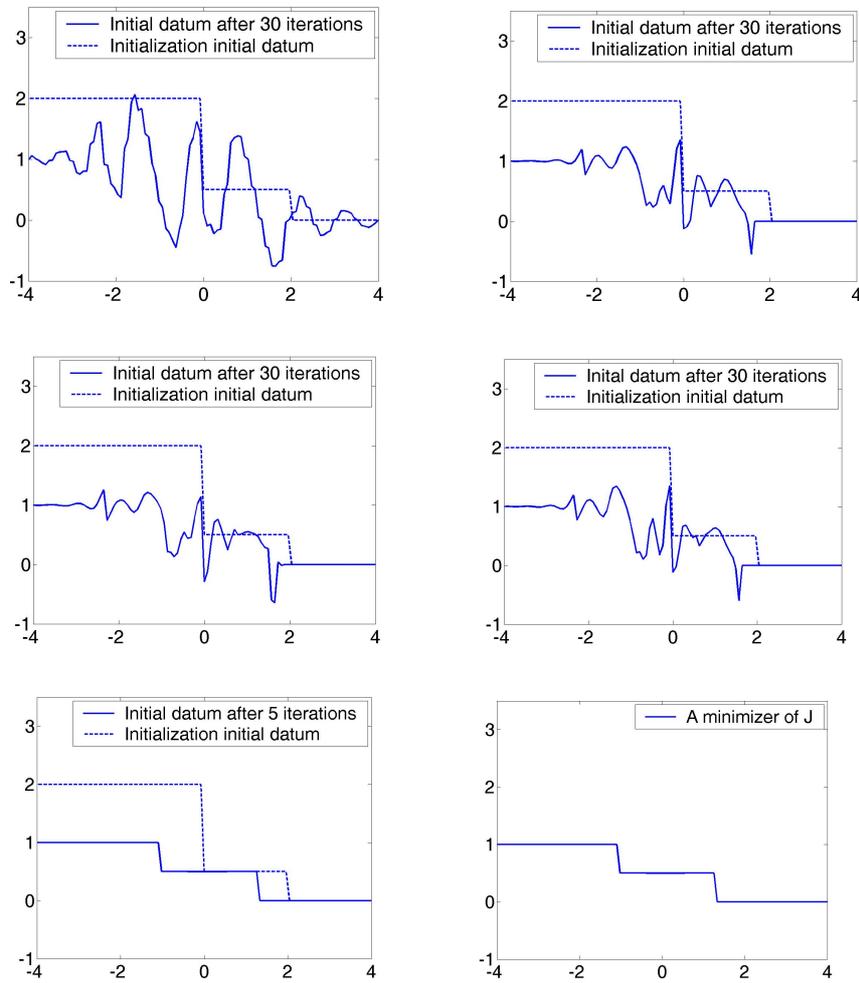


Figura 3.8: Experimento 3. Inicialización (línea punteada) y el dato inicial obtenido después de 30 iteraciones (línea sólida) con Lax-Friedrichs (arriba a la izquierda), Engquist-Osher (arriba a la derecha), Roe (mitad izquierda), el enfoque continuo imponiendo las condiciones de contorno sobre el choque (mitad derecha) y el método de las direcciones alternantes de descenso (inferior izquierda). Un minimizador  $u^0$  del funcional continuo se muestra en la figura inferior de la derecha.

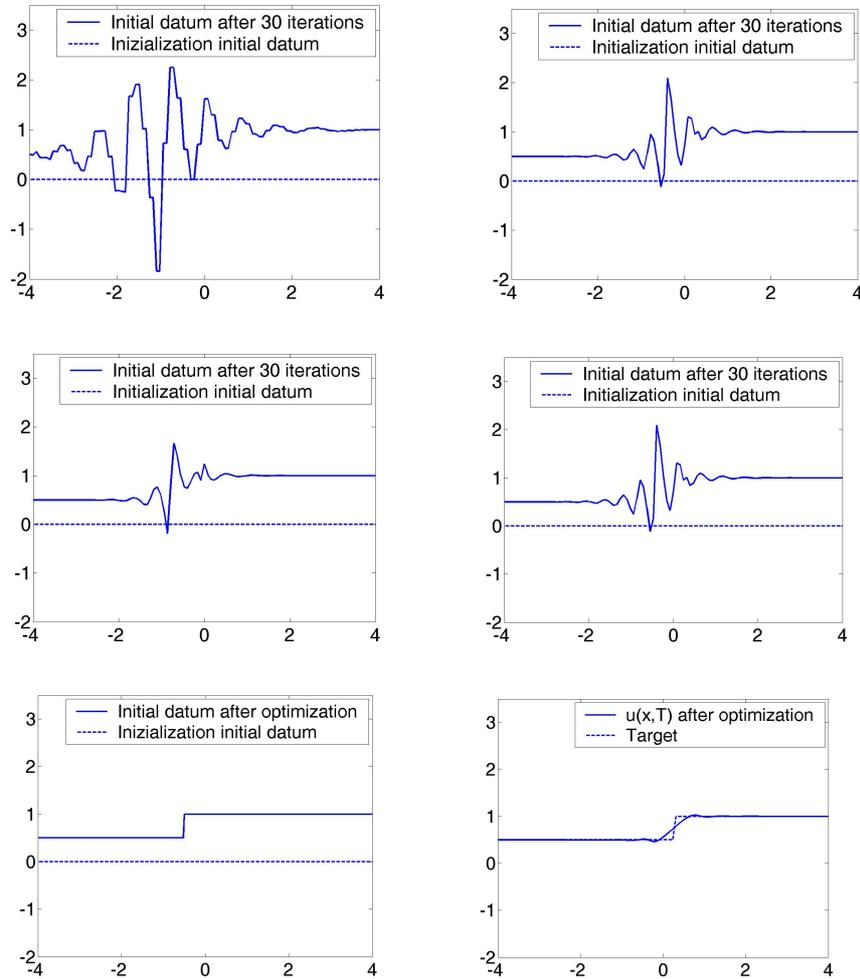


Figura 3.9: Experimento 4. Dato inicial obtenido después de 30 iteraciones con los esquemas Lax-Friedrichs (arriba izquierda) , Engquist-Osher (arriba derecha), Roe (en la mitad izquierda), imponiendo condiciones internas de contorno (en la mitad derecha) y el método de las direcciones alternantes de descenso (inferior izquierda). En la figura inferior derecha están representados la función objetivo  $u^d$  dado en (3.75) (línea punteada) y la solución de la ecuación de Burgers  $u$  en tiempo  $t = T = 1$  con el valor inicial obtenido después de optimizar con el método de las direcciones alternantes de descenso (línea sólida).

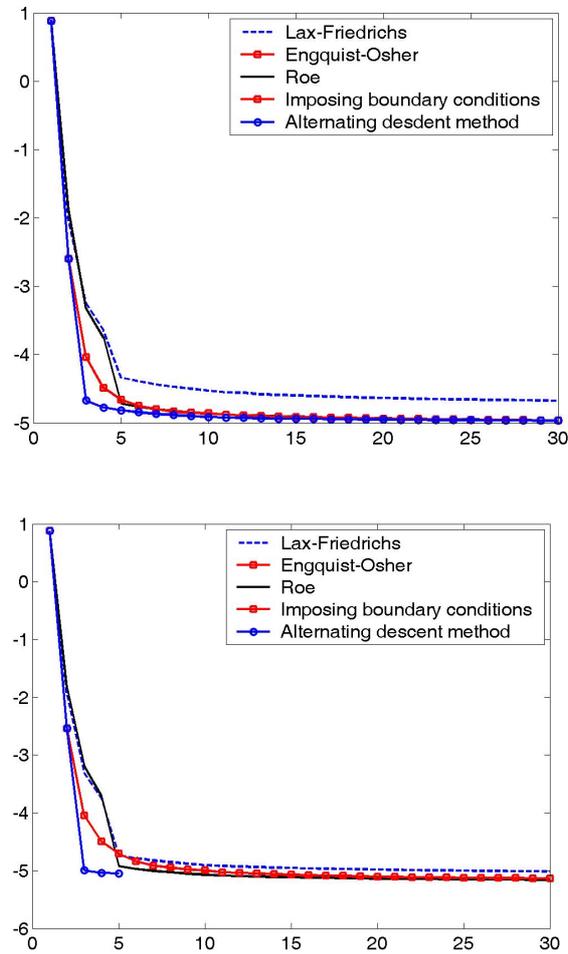


Figura 3.10: Experimento 4. Valor logarítmico del funcional con respecto al número de iteraciones en el algoritmo de descenso para los esquemas de Lax-Friedrichs, Engquist-Osher, Roe, imponiendo las condiciones internas de contorno y el método de las direcciones de descenso alternantes propuesto. Nótese que, en este caso, no hay choques y por lo tanto coinciden el esquema de Engquist-Osher y el método continuo imponiendo las condiciones de contorno. Aquí la figura de arriba corresponde a  $\Delta x = 1/20$  y la inferior a  $\Delta x = 1/40$ . En ambos casos  $\lambda = \Delta t/\Delta x = 1/2$ .

```

1  input  $\Delta x, \Delta t, \{u_j^n\}_{j=1,\dots,N}$ 
2  set  $\lambda = \Delta t / \Delta x$ 
3  for  $n = 0(1)M$  repeat
4      set  $p_1^{n-1} = p_1^M, p_N^{n-1} = p_N^M,$ 
5      for  $j = 2(1)N - 1$  repeat
6          set  $p_j^{n-1} = p_j^n + \lambda(\partial_1 g(u_j^{n-1}, u_{j+1}^{n-1}) * (p_j^n - p_{j+1}^n)$ 
7               $+ \partial_2 g(u_{j-1}^{n-1}, u_j^{n-1}) * (p_{j-1}^n - p_j^n))$ 
8      end
9  end

```

Línea	Comentarios
2	$\lambda$ satisface la condición de CFL.
6	$g$ es el flujo numérico convectivo.

Algoritmo 3: Enfoque discreto

PASO 0: Inicialización

```

1  input  $\Delta x, \Delta t, \{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}, \{u^d\}_{j=1,\dots,N}$ 
2  set  $\lambda = \Delta t / \Delta x$ 
3  resolver la ec. de Burgers con dato inicial  $\{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}^k \rightarrow \{u_j^n\}_{j=1,\dots,N}^{n=1,\dots,M}$ 
4  for  $j = 1(1)N$  repeat
5      set  $p_j^T = u_j^M - u_j^d, p_j^M = p_j^T$ 
6  end
7  resolver la ec. adjunta con dato final  $\{p_j^T\}_{j=1,\dots,N} \rightarrow \{p_j^0\}_{j=1,\dots,N}$ 

```

PASO 1: Bucle de optimización

```

1  input  $\varepsilon$ 
2  for  $k = 0, 1, \dots$  repeat
3      resolver la ec. de Burgers con dato inicial  $\{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}^k \rightarrow \{u_j^n\}_{j=1,\dots,N}^{n=1,\dots,M}$ 
4      for  $j = 1(1)N$  repeat
5          set  $p_j^T = u_j^M - u_j^d$ 
6      end
7      resolver la ec. adjunta con dato final  $\{p_j^T\}_{j=1,\dots,N} \rightarrow \{p_j^0\}_{j=1,\dots,N}$ 
8      set  $g_k = \{p_j^0\}_{j=1,\dots,N},$ 
9      compute  $\alpha_k$ 
10     set  $\{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}^{k+1} = \{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}^k - \alpha_k * g_k$ 
11  end until  $\|g_{k+1}\| < \varepsilon$ 

```

Línea	Comentarios
1	$\varepsilon$ es la tolerancia.
9	Calcula el paso de descenso $\alpha_k \arg \min. J(\{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}^k - \alpha_k * g_k)$ .
11	$\ \cdot\ $ es la norma Euclidea en $\mathbb{R}^N$ .

Ahora consideramos el enfoque continuo, imponiendo condiciones de contorno internas a lo largo del choque. En este caso el algoritmo debe ser ligeramente modificado para tener en cuenta la presencia de discontinuidades. Por lo tanto primero debemos

describir una subrutina para encontrar las "discontinuidades" de un vector  $\{u_j\}_{j=1,\dots,N}$  basado en una condición de cambio. Introducimos dos parámetros  $\alpha$  y  $\rho$  y buscamos los índices  $j$  donde

$$\frac{u_{j-\alpha} - u_{j+\alpha}}{|u_{j-\alpha}|} > \rho.$$

Para simplificar la presentación consideraremos el caso en el que sólo una discontinuidad es relevante en el experimento numérico, que identificamos en el vector discreto por el siguiente criterio.

**Algoritmo 4: resolver salto** ( $\{u_j\}_{j=1,\dots,N}, \Delta x$ )  $\rightarrow$  ( $index, u_{left}, u_{right}$ )

```

1  input  $sh, js, \{u_j\}_{j=1,\dots,N}, \Delta x$ 
2  set  $\alpha = \text{INT}(sh/\Delta x)$ 
3  set  $max = \arg \text{máx}_j (u_{j-\alpha} - u_{j+\alpha}) / \text{ABS}(u_{j-\alpha})$ 
4  if  $max > js$  then
5      set  $index = max$ 
6      set  $u_{left} = u_{j-index}, u_{right} = u_{j+index}$ 
7  end

```

Línea

Comentarios

1  $sh$  es el parámetro de cambio y  $js$  es el parámetro de la sensibilidad del salto

El algoritmo completo es el siguiente:

**Algoritmo 5: Enfoque continuo: condiciones internas sobre el choque**

PASO 0: inicialización

```

1  input  $\Delta x, \Delta t, \{u^d\}_{j=1,\dots,N}, \{u^0\}_{j=1,\dots,N}$ 
2  resolver salto ( $\{u_j^{obj}\}_{j=1,\dots,N}, \Delta x$ )  $\rightarrow$  ( $index^{obj}, ul^{obj}, ur^{obj}$ )
3  resolver salto ( $\{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}, \Delta x$ )  $\rightarrow$  ( $index^0, ul^0, ur^0$ )
4  resolver la ec. de Burgers con dato inicial  $\{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}^k \rightarrow \{u_j^n\}_{j=1,\dots,N}^{n=1,\dots,M}$ 
5  resolver salto ( $\{u_j^M\}_{j=1,\dots,N}, \Delta x$ )  $\rightarrow$  ( $index^T, ul^T, ur^T$ )
    ! Posición del choque en  $t = T$ 
6  for  $j = 1(1)N$  repeat
7      set  $p_j^T = u_j^M - u_j^d, p_j^M = p_j^T$ 
8  end
9  set  $q^T = ((ur^T - ur^{obj})^2/2 - (ul^T - ul^{obj})^2/2) / (ur^T - ul^T)$ 
10 resolver la ec. adjunta con dato final  $\{p_j^T\}_{j=1,\dots,N} \rightarrow \{p_j^0\}_{j=1,\dots,N}$ 
11 for  $j = index^0 - \text{INT}(ul^T * T)(1)index^0 - \text{INT}(ur^T * T)$  repeat
12      $p_j^0 = q^T$ 
13 end
14 set  $(g_1, g_2) = (\{p_j^0\}_{j=1,\dots,N}, q^T / (ur^0 - ul^0))$ 

```

Línea

Comentarios

11 Impone las condiciones de contorno internas sobre el choque.

14  $(g_1, g_2)$  es el gradiente.

PASO 1: bucle de optimización

```

1  input  $\varepsilon$ 
2  for  $k = 0, 1, \dots$  repeat
3    compute  $\alpha_k$ 
4    set  $\{u_j^0\}_{j=1, \dots, N}^{k+1} = \{u_j^0\}_{j=1, \dots, N}^k - \alpha_k * g_{1,k}$ 
5    if  $g_2 > 0$  then
6      for  $j = \text{index}^0(1) \text{index}^0 + \text{INT}(g_2 * \alpha_k / \Delta x)$ 
7        set  $u_j^0 = ul^0$ 
8      end
9    else
10     for  $j = \text{index}^0 + \text{INT}(g_2 * \alpha_k / \Delta x)(1) \text{index}^0$ 
11       set  $u_j^0 = ur^0$ 
12     end
13   end
14   resolver la ec. de Burgers con dato inicial  $\{u_j^0\}_{j=1, \dots, N}^k \rightarrow \{u_j^n\}_{j=1, \dots, N}^{n=1, \dots, M}$ 
15   resolver salto  $(\{u_j^M\}_{j=1, \dots, N}, \Delta x) \rightarrow (\text{index}^T, ul^T, ur^T)$ 
      ! Posición del choque en  $t = T$ 
16   for  $j = 1(1)N$  repeat
17     set  $p_j^T = u_j^M - u_j^d$ 
18   end
19   set  $q^T = ((ur^T - ur^{obj})^2 / 2 - (ul^T - ul^{obj})^2 / 2) / (ur^T - ul^T)$ 
20   resolver la ec. adjunta con dato final  $\{p_j^T\}_{j=1, \dots, N} \rightarrow \{p_j^0\}_{j=1, \dots, N}$ 
21   set condición interna de contorno sobre el choque
22   set  $(g_1, g_2)_k = (\{p_j^0\}_{j=1, \dots, N}, q^T / (ur^0 - ul^0))$ 
23 end until  $\| (g_1, g_2)_{1, k+1} \| < \varepsilon$ 

```

Línea	Comentarios
1	$\varepsilon$ es la tolerancia.
3	Calcula el paso de descenso $\alpha_k \arg \min J(\{u_j^0\}_{j=1, \dots, N}^k - \alpha_k * g_{1,k})$
5:13	Mueve la discontinuidad.
22	$(g_1, g_2)$ es el gradiente.
23	$\  \cdot \ $ es la Norma Euclídea en $\mathbb{R}^{N+1}$ .

Finalmente describimos el algoritmo para el nuevo método alternante de descenso que proponemos.

*Algoritmo 6:* Método de las direcciones alternantes de descenso

PASO 0: inicialización

```

1  input  $\Delta x, \Delta t, \{u^d\}_{j=1, \dots, N}, \{u_j^0\}_{j=1, \dots, N}$ 
2  resolver salto  $(\{u_j^{obj}\}_{j=1, \dots, N}, \Delta x) \rightarrow (\text{index}^{obj}, ul^{obj}, ur^{obj})$ 
3  resolver salto  $(\{u_j^0\}_{j=1, \dots, N}, \Delta x) \rightarrow (\text{index}^0, ul^0, ur^0)$ 
4  resolver la ec. de Burgers con dato inicial  $\{u_j^0\}_{j=1, \dots, N}^k \rightarrow \{u_j^n\}_{j=1, \dots, N}^{n=1, \dots, M}$ 
5  resolver salto  $(\{u_j^M\}_{j=1, \dots, N}, \Delta x) \rightarrow (\text{index}^T, ul^T, ur^T)$ 

```

```

6  set  $q^T = ((ur^T - ur^{obj})^2/2 - (ul^T - ul^{obj})^2/2)/(ur^T - ul^T)$ 
7  set  $(g_1, g_2) = (0, q^T)$  ! primer vector tangente generalizado
8  resolver posición de la discontinuidad (usando paso óptimo)  $\rightarrow \{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}$ 
9  resolver salto  $(\{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}, \Delta x) \rightarrow (index^0, ul^0, ur^0)$ 
10 resolver la ec. de Burgers con dato inicial  $\{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}^k \rightarrow \{u_j^n\}_{j=1,\dots,N}^{n=1,\dots,M}$ 
11 resolver salto  $(\{u_j^M\}_{j=1,\dots,N}, \Delta x) \rightarrow (index^T, ul^T, ur^T)$ 
12 for  $j = 1(1)N$  repeat
13     set  $p_j^T = u_j^M - u_j^d, p_j^M = p_j^T$ 
14 end
15 set  $q^T = ((ur^T - ur^{obj})^2/2 - (ul^T - ul^{obj})^2/2)/(ur^T - ul^T)$ 
16 resolver la ec. adjunta con dato final  $\{p_j^T\}_{j=1,\dots,N} \rightarrow \{p_j^0\}_{j=1,\dots,N}$ 
17 resolver salto  $(\{u_j^M - u_j^{obj}\}_{j=1,\dots,N}, \Delta x) \rightarrow (index^T, pl^T, pr^T)$ 
18 for  $j = index^0 - INT(ul^T * T)(1)index^0$  repeat
19      $p_j^0 = pl^T$ 
20 end
21 for  $j = index^0(1)index^0 - INT(ur^T * T)$ 
22      $p_j^0 = pr^T$ 
23 end
24 set  $(g_1, g_2) = (\{p_j^0\}_{j=1,\dots,N}, q^T/(ur^0 - ul^0))$ , ! segundo vector tangente generalizado

```

Línea	Comentarios
4:9	Optimiza la posición del choque.
8	Ver líneas 5:13 de <i>Algoritmo 4</i> , PASO 1.
17:23	Impone las condiciones en (3.51).
24	$(g_1, g_2)$ es el gradiente.

PASO 1: bucle de optimización

```

1  input  $\epsilon$ 
2  for  $k = 0, 1, \dots$  repeat
3      compute  $\alpha_k$ 
4      set  $\{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}^{k+1} = \{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}^k - \alpha_k * g_{1,k}$ 
5      resolver la ec. de Burgers con dato inicial  $\{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}^k \rightarrow \{u_j^n\}_{j=1,\dots,N}^{n=1,\dots,M}$ 
6      resolver salto  $(\{u_j^M\}_{j=1,\dots,N}, \Delta x) \rightarrow (index^T, ul^T, ur^T)$ 
          ! Posición del choque para  $t = T$ 
7      for  $j = 1(1)N$  repeat
8          set  $p_j^T = u_j^M - u_j^d$ 
9      end
10     set  $q^T = ((ur^T - ur^{obj})^2/2 - (ul^T - ul^{obj})^2/2)/(ur^T - ul^T)$ 
11     resolver la ec. adjunta con dato final  $\{p_j^T\}_{j=1,\dots,N} \rightarrow \{p_j^0\}_{j=1,\dots,N}$ 
12     set imponer la condición en (3.51)
13     set  $(g_1, g_2)_k = (\{p_j^0\}_{j=1,\dots,N}, q^T/(ur^0 - ul^0))$ 
14 end until  $\|(g_1, g_2)_{1,k+1}\| < \epsilon$ 

```

Línea	Comentarios
1	$\epsilon$ es la tolerancia.
3	Calcula el paso de descenso $\alpha_k \arg \min J(\{u_j^0\}_{j=1,\dots,N}^k - \alpha_k * g_{1,k})$ .



## Capítulo 4

---

# Análisis de la sensibilidad de las ecuaciones de Euler estacionarias

---

Tras haber analizado el problema de diseño óptimo en sistemas gobernados por la ecuación de Burgers, este capítulo tiene por objeto desarrollar, de manera práctica, el diseño óptimo de sistemas gobernados por las ecuaciones de Euler.

El presente capítulo está organizado de la siguiente manera: en primer lugar en la Sección 4.1 se planteará el problema de diseño óptimo de forma aerodinámica y se realizará, en la Sección 4.2, un breve repaso de la formulación matemática de las ecuaciones de Euler en fluidos compresibles. Más adelante, en la Sección 4.3 se desarrollarán las ecuaciones linealizadas de Euler y finalmente, en la Sección 4.4 mediante el enfoque adjunto continuo, se planteará la formulación matemática que permite el cálculo de gradientes de un funcional de interés aerodinámico respecto de modificaciones en la geometría. Se prestará una especial atención a aquellos casos en los que existen discontinuidades en las variables de flujo.

### 4.1. Introducción

En el ámbito de la aerodinámica externa, los problemas de diseño óptimo de forma se plantean en un dominio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  ( $d=2$  ó  $3$ ), de contorno  $\delta\Omega$ . El contorno  $\delta\Omega$  está a su vez dividido en una serie de contornos disconexos “regulares” que se denominan: campo lejano  $\Gamma_\infty \subset \delta\Omega$  y un número finito  $n$  de contornos de pared sólida  $S_i \subset \delta\Omega$  a los que nos referiremos individualmente con el subíndice  $i$  y de manera conjunta como  $S$  (ver Figura 4.1).

En la aplicación estándar [50, 54] se asume que el dominio  $\Omega$  contiene aire y que las fuerzas que experimenta el cuerpo inmerso en el fluido vienen determinadas por la resolución de las ecuaciones de Euler que gobierna la física del fluido en aquellas situaciones en las que las fuerzas inerciales son mucho mayores que las viscosas.

El objetivo de los problemas de diseño óptimo de forma aerodinámica es minimizar una función de coste  $J$  de las variables fluidas  $U$  que ha sido definido sobre parte o todo el contorno  $\delta\Omega$ .

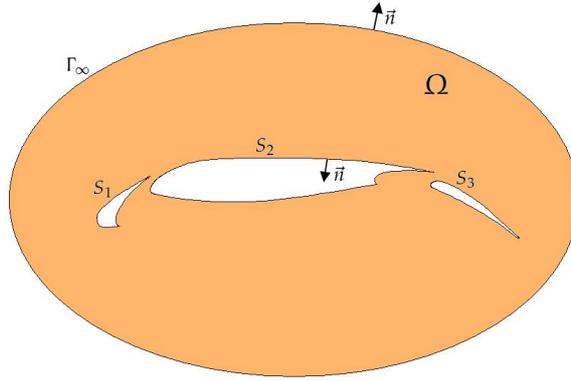


Figura 4.1: Problema 2D de optimización de la forma en aerodinámica

El valor del funcional  $J$  depende de las variables de flujo  $U$  fruto de la resolución de las ecuaciones de Euler que modelizan el comportamiento de los fluidos, que a su vez dependen de la forma del contorno  $S$  que es frontera del dominio  $\Omega$  sobre el que se resuelve el sistema de EDPs. En definitiva, a través de la variación de  $S \subset \delta\Omega$  se pretende la minimización del funcional  $J$ ,

$$J(S^{\text{mín}}) = \min_{S \in \mathcal{S}_{ad}} J(S), \quad (4.1)$$

donde  $S^{\text{mín}}$  es la geometría de  $S$  buscada, que pertenece al conjunto de geometrías admisibles<sup>1</sup>  $\mathcal{S}_{ad}$  para  $S \subset \delta\Omega$ , y

$$J(S) = \int_S j(U) ds \quad (4.2)$$

Suponiendo que  $U$  es solución regular de las ecuaciones de Euler sobre todo el dominio  $\Omega$  y dado un funcional  $J$  definido sobre  $S$ , consideramos variaciones infinitesimales en  $\delta S$  de un subcontorno  $S \subset \delta\Omega$  en la dirección normal al contorno  $S$ , a lo largo del vector  $\vec{n}_S$  normal unitario apuntando al exterior del dominio  $\Omega$ :

$$S' = \{\vec{x} + \delta S(\vec{x}) \vec{n}_S(\vec{x}), \vec{x} \in S\}. \quad (4.3)$$

Entonces la variación [101] de este funcional  $J$  debido a la deformación es de la forma

$$\delta J(S) = \int_{\delta S} j(U) ds + \int_S j'(U) \delta U ds, \quad (4.4)$$

donde el primer término es debido a la deformación del contorno  $S$  y el segundo proviene de la variación de las variables de flujo  $U$  que la variación de  $S$  induce.

Como se puede apreciar, para la evaluación de  $\delta J$  es necesaria la evaluación de  $\delta U$ , que ha de calcularse a través de la linealización de las ecuaciones que gobiernan el sistema. Para un conjunto amplio de geometrías admisibles del contorno  $S$ , el cómputo de  $\delta U$  puede ser extremadamente costoso pues exige la resolución de las ecuaciones linealizadas de las ecuaciones que gobiernan el fluido para cada deformación admisible

<sup>1</sup>En relación a las geometrías admisibles  $\mathcal{S}_{ad}$ , en la práctica ingenieril estas geometrías vienen condicionadas por aquellas formas superficiales cuya fabricación es posible (de manera rentable económicamente) y que cumplen con los criterios estructurales del elemento a diseño.

$\mathcal{S}_{ad}$ . Para salvar este obstáculo, y realizar una evaluación eficiente de (4.4), se recurrirá a ideas que provienen de la teoría de control y al empleo del estado adjunto del sistema.

Por otro lado, en aplicaciones aeronáuticas son comunes soluciones  $U$  no regulares de las ecuaciones de Euler (regímenes transónicos y supersónicos). En 2D, si el cuerpo inmerso en el fluido es aerodinámicamente afilado [79], entonces la discontinuidad (onda de choque) generalmente toca la superficie del cuerpo en un punto [114]. En estos casos se debe considerar una discontinuidad a lo largo de la curva regular  $\Sigma$ .

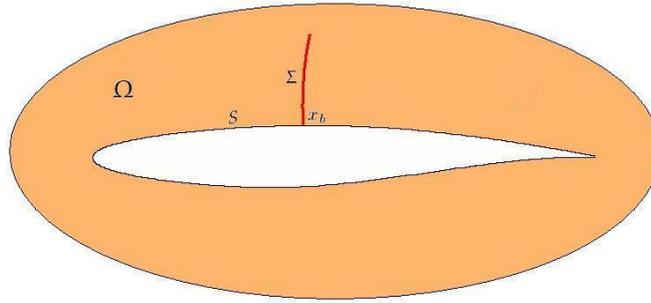


Figura 4.2: Problema típico aerodinámico con una discontinuidad  $\Sigma$

Al tener en cuenta la existencia de discontinuidades en las variables de flujo, el cálculo clásico (4.4) de la derivada del funcional falla y éste debe ser modificado para incluir el efecto de la sensibilidad de la posición del choque con respecto a la deformación de la superficie [8].

Sea  $x_b = \Sigma \cap S$  el único punto donde la discontinuidad toca la superficie, y suponiendo que la curva bidimensional  $\Sigma$  que sufre un desplazamiento infinitesimal de valor  $\delta\Sigma$  en la dirección  $\vec{n}_\Sigma$  normal a la discontinuidad. Entonces la expresión para  $\delta J$  es

$$\delta J(S) = \int_{\delta S} j(U) ds + \int_{S \setminus \{x_b\}} j'(U) \delta U ds - [j(U)]_{x_b} \delta\Sigma(x_b) - [j(U)]_{x_b} (\vec{n}_S \cdot \vec{n}_\Sigma) \delta S(x_b). \quad (4.5)$$

En esta expresión el primer término representa la contribución de la variación de la forma del contorno, el segundo refleja el efecto de una variación de valor  $\delta U$  en las variables de flujo, y los dos últimos recogen la influencia de la variación  $\delta\Sigma$  en la posición de la discontinuidad  $\Sigma$ . Respecto del último término, más adelante se comprobará que, en ciertas circunstancias, la onda de choque se puede suponer normal a la superficie con lo que ese término se anula.

En la expresión (4.5) los términos de cómputo más costoso el proceso de diseño son aquellos que contienen  $\delta U$  y  $\delta\Sigma$ , pues para cada variable de diseño (variación de la superficie  $\delta S$ ) deberían volver a ser calculados a través de la resolución de las ecuaciones linealizadas de Euler más las relaciones linealizadas de Rankine-Hugoniot. Para salvar este obstáculo, volveremos a recurrir al empleo del estado adjunto del sistema que, mediante la introducción de multiplicadores de Lagrange y utilizando las condiciones de contorno adecuadas en el estado adjunto, fuerza la desaparición de estos términos dependientes de las variables linealizadas. En las siguientes secciones se desarrollará el método adjunto continuo para la evaluación de la variación del funcional  $J$  en sistemas

gobernados por las ecuaciones de Euler en régimen estacionario en el caso de que exista una única discontinuidad en las variables de flujo.

## 4.2. Ecuaciones de Euler en forma conservativa

Los fluidos ideales<sup>2</sup> compresibles están gobernados por las ecuaciones de Euler [73, 114, 24]. Este sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales expresa la conservación de masa, momento y energía. En su forma conservativa<sup>3</sup>, sin presencia de fuerzas externas, las ecuaciones de Euler en régimen no estacionario se expresan como

$$\begin{cases} \partial_t U + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0, & \text{en } \Omega, t > 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{n}_S = 0, & \text{sobre } S, \end{cases} \quad (4.6)$$

donde, en el campo lejano  $\Gamma_\infty$ , las condiciones de contorno son especificadas para las ondas entrantes, mientras que las ondas salientes son determinadas por la propia solución en el interior del dominio  $\Omega$ . El vector  $\vec{n}_S$  es un vector unitario normal a la pared  $S$  apuntando hacia afuera del dominio  $\Omega$ ,  $U^T = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho E)$  son las variables conservativas y los flujos convectivos se pueden escribir, empleando variables primitivas  $V^T = (\rho, v_x, v_y, P)$ , como  $\vec{F} = (F_x, F_y)$ , con

$$F_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_x H \end{pmatrix}, F_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + P \\ \rho v_y H \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  es la velocidad en un sistema de referencia cartesiano,  $E$  es la energía total,  $P$  la presión del sistema y  $H$  la entalpía. El sistema de ecuaciones (4.6) debe ser completado por una ecuación de estado que define las propiedades termodinámicas del fluido. En el caso de modelizar el fluido mediante un gas ideal se tiene que

$$P = (\gamma - 1) \rho \left[ E - \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2) \right], \quad H = E + \frac{P}{\rho}, \quad (4.8)$$

donde el índice adiabático toma un valor constante de  $\gamma = C_p/C_v \approx 1,4$ , siendo  $C_p$  el calor específico a presión constante y  $C_v$  el calor específico a volumen constante.

**Proposición 23.** Si la solución  $U$  de las ecuaciones de Euler es regular entonces se verifica que

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial U} U. \quad (4.9)$$

*Demostración.* El vector de flujos convectivos  $\vec{F}$  expresado en variables conservativas  $U^T = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho E) = (\rho, m, n, l)$  queda como

$$F_x = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + (\gamma - 1) \left[ l - \frac{1}{2\rho} (m^2 + n^2) \right] \\ \frac{mn}{\rho} \\ \frac{ml}{\rho} + \frac{(\gamma-1)m}{\rho} \left[ l - \frac{1}{2\rho} (m^2 + n^2) \right] \end{pmatrix}, F_y = \begin{pmatrix} n \\ \frac{mn}{\rho} + (\gamma - 1) \left[ l - \frac{1}{2\rho} (m^2 + n^2) \right] \\ \frac{n^2}{\rho} + (\gamma - 1) \left[ l - \frac{1}{2\rho} (m^2 + n^2) \right] \\ \frac{nl}{\rho} + \frac{(\gamma-1)n}{\rho} \left[ l - \frac{1}{2\rho} (m^2 + n^2) \right] \end{pmatrix},$$

<sup>2</sup>Los fluidos ideales son aquellos en los que la conductividad térmica y la viscosidad que carecen de importancia.

<sup>3</sup>La forma conservativa es especialmente útil tanto para desarrollar esquemas numéricos como para obtener soluciones integrales de la ecuación de Euler.

donde se verifica que  $\vec{F}$  es función homogénea de grado 1 de las variables conservativas  $U$ . Esto supone que  $\vec{F}(\lambda U) = \lambda \vec{F}(U)$ . Por lo tanto

$$\frac{\partial \vec{F}(\lambda U)}{\partial(\lambda U)} \frac{\partial(\lambda U)}{\partial \lambda} = \vec{F}(U). \quad (4.10)$$

Si  $\lambda = 1$  entonces fácilmente obtenemos la expresión (4.9).  $\square$

Con las consideraciones anteriormente descritas, los flujos no viscosos y compresibles modelizados por las ecuaciones de Euler pueden evolucionar hacia la formación de discontinuidades (choques o discontinuidades de contacto). Esas situaciones están descritas por soluciones débiles (integrales) de las ecuaciones conservativas de Euler.

#### 4.2.1. Relaciones de Rankine-Hugoniot

Las relaciones de Rankine-Hugoniot gobiernan el comportamiento de un fluido al atravesar una discontinuidad  $\Sigma$  que se desplaza con una velocidad  $s$  en la dirección normal a la curva de discontinuidad  $\vec{n}_\Sigma = (n_{\Sigma x}, n_{\Sigma y})$ , respecto de un observador en reposo en relación al fluido.

$$[\vec{F} \cdot \vec{n}_\Sigma]_\Sigma - s [U]_\Sigma = 0, \quad (4.11)$$

donde  $[A]_\Sigma$  representa el salto en la cantidad  $A$  al atravesar la curva de discontinuidad  $\Sigma$ . De manera explícita, al sustituir el valor de los flujos convectivos y las variables conservativas de las ecuaciones de Euler en las relaciones de Rankine-Hugoniot se tiene

$$\begin{cases} [\rho \vec{v} \cdot \vec{n}_\Sigma]_\Sigma - s [\rho]_\Sigma = 0, \\ [(\rho \vec{v} \cdot \vec{n}_\Sigma) v_x + P n_{\Sigma x}]_\Sigma - s [\rho v_x]_\Sigma = 0, \\ [(\rho \vec{v} \cdot \vec{n}_\Sigma) v_y + P n_{\Sigma y}]_\Sigma - s [\rho v_y]_\Sigma = 0, \\ [H \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_\Sigma]_\Sigma - s [\rho E]_\Sigma = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

En el caso de tratar con una discontinuidad estacionaria  $s = 0$ , las relaciones (4.12) se simplifican a

$$\begin{cases} [\rho \vec{v} \cdot \vec{n}_\Sigma]_\Sigma = 0, \\ [v_x]_\Sigma \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_\Sigma + [P]_\Sigma n_{\Sigma x} = 0, \\ [v_y]_\Sigma \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_\Sigma + [P]_\Sigma n_{\Sigma y} = 0, \\ [H]_\Sigma = 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

de donde es posible calcular [52] el valor de los siguientes saltos a lo largo de la discontinuidad

$$[\rho \vec{v} \cdot \vec{n}_\Sigma]_\Sigma = 0, \quad [\rho]_\Sigma \neq 0, \quad [P]_\Sigma \neq 0, \quad [\vec{v} \cdot \vec{n}_\Sigma]_\Sigma \neq 0, \quad [\vec{v} \cdot \vec{t}_\Sigma]_\Sigma = 0, \quad (4.14)$$

siendo  $\vec{t}_\Sigma = (t_{\Sigma x}, t_{\Sigma y})$  un vector unitario tangente a la discontinuidad obtenido al rotar el vector  $\vec{n}_\Sigma$  un ángulo de  $\pi/2$  en el sentido de las agujas del reloj.

#### Formación de ondas de choque normales

Se denominan ondas de choque normales a aquellas que son perpendiculares a la dirección del flujo [104, 117, 36, 71]. Una onda de choque normal comienza a formarse justo después de que la velocidad de la corriente libre pasa el llamado número de Mach crítico. Una vez formada se produce un gran incremento en la resistencia del perfil aerodinámico.

En una situación de corriente mixta, donde una parte del flujo de aire es subsónica y otra es supersónica todas las ondas de presión se acumulan, añadiéndose unas a otras para formar una onda de choque sobre el contorno entre el flujo supercrítico y el flujo subsónico. Esta onda de choque es normal a la superficie del perfil aerodinámico. Las ondas de choque normales se vuelven oblicuas cuando la corriente libre de aire alcanza el número de Mach igual a la unidad.

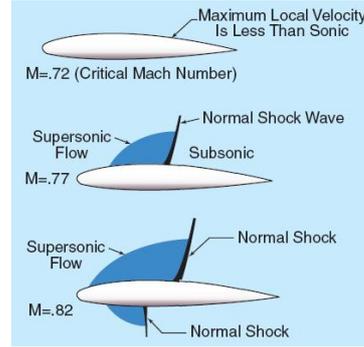


Figura 4.3: Onda de choque normal.

#### 4.2.2. Análisis de las condiciones de contorno numéricas

A lo largo de esta subsección se discutirán algunos aspectos relevantes en el tratamiento de las condiciones de contorno de las ecuaciones de Euler.

Es conveniente recordar que las condiciones de contorno numéricas deben garantizar que las perturbaciones no deseadas, generadas en el dominio computacional, abandonen el dominio sin ser reflejadas en la frontera [22].

#### Variables características de las ecuaciones de Euler

Como complemento a las variables conservativas  $U = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho E)^T$ , y a las variables primitivas  $V = (\rho, v_x, v_y, P)^T$ , se definen las variables características  $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$  relacionadas con las variables fluidas mediante su variación y una determinada dirección de propagación espacial  $\vec{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y)$ ,

$$\delta W = \begin{pmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \\ \delta w_3 \\ \delta w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \rho - \frac{\delta P}{c^2} \\ \kappa_y \delta v_x - \kappa_x \delta v_y \\ \vec{\kappa} \cdot \delta \vec{v} + \frac{\delta P}{\rho c} \\ -\vec{\kappa} \cdot \delta \vec{v} + \frac{\delta P}{\rho c} \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

donde de manera conjunta,  $\delta W$  denota  $\partial_t W$  ó  $\vec{\nabla} W$ . Por otro lado, la primera variable característica  $w_1$  describe las perturbaciones de entropía. La segunda  $w_2$ , se corresponde con ondas de vorticidad en la superficie característica normal a la dirección de propagación  $\vec{\kappa}$ . Las dos últimas ( $w_3$  y  $w_4$ ) están asociadas con ondas acústicas de presión.

#### Relaciones de compatibilidad y condiciones de contorno

Las relaciones de compatibilidad se derivan al proyectar la formulación cuasilínea de las ecuaciones de Euler en una determinada dirección de propagación espacial  $\vec{\kappa}$ . Para ello se multiplica

$$\partial_t U + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} U = 0, \quad \text{en } \Omega, \quad t > 0, \quad (4.16)$$

por los autovectores por la izquierda de la matriz  $K = \vec{A} \cdot \vec{\kappa}$ , donde  $\vec{A} = \partial_U \vec{F}$ , y se realiza la siguiente descomposición  $K = P \Lambda P^{-1}$  siendo los autovectores izquierdos de  $K$  las líneas de  $P^{-1}$ , los autovectores derechos de  $K$  las columnas de  $P$  y  $\Lambda$  es la matriz

diagonal de autovalores. Finalmente las relaciones de compatibilidad son las siguientes

$$P^{-1} \left( \partial_t + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \right) U = 0, \quad (4.17)$$

donde, empleando las variables características (4.15), podemos reescribir las relaciones de compatibilidad de una manera compacta y de forma similar a la formulación cuasi-lineal (4.16):

$$\partial_t W + \left( P^{-1} \vec{A} P \right) \cdot \vec{\nabla} W = 0, \quad \text{en } \Omega, \quad t > 0, \quad (4.18)$$

donde  $W$  son las variables características asociadas a una determinada dirección de propagación  $\vec{\kappa}$ . Mediante el empleo de las relaciones de compatibilidad será posible definir correctamente las condiciones de contorno numéricas a imponer en el problema de Euler directo y adjunto. Para ello desarrollaremos esas relaciones sobre un contorno  $\delta\Omega$  cuyo vector normal unitario interior es  $\vec{n} = (n_x, n_y)$  y definiendo  $\vec{t} = (t_x, t_y)$  como un vector unitario en la dirección tangente a la superficie, girando  $\vec{n}$  en sentido horario  $\pi/2$  (ver Figura 4.4). Sustituyendo los valores de la matriz  $P$  en la ecuación (4.18), es posible escribir las siguientes relaciones de compatibilidad

$$\begin{cases} (\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) w_1 = 0, \\ (\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) w_2 = \frac{c}{2} (n_x \partial_y - n_y \partial_x) (w_3 + w_4) = -\frac{1}{\rho} (\vec{t} \cdot \vec{\nabla}) p, \\ (\partial_t + (\vec{v} + c\vec{n}) \cdot \vec{\nabla}) w_3 = c (n_x \partial_y - n_y \partial_x) w_2 = -c\vec{t} \cdot (\vec{t} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v}, \\ (\partial_t + (\vec{v} - c\vec{n}) \cdot \vec{\nabla}) w_4 = c (n_x \partial_y - n_y \partial_x) w_2 = -c\vec{t} \cdot (\vec{t} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{v}, \end{cases} \quad (4.19)$$

donde  $c = \gamma P / \rho$  es la velocidad del sonido y  $\vec{v}$  es la velocidad sobre la superficie del contorno.

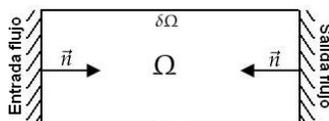


Figura 4.4: Criterio de signos para las variables características

A partir de estas expresiones es posible encontrar el modo de imponer numéricamente las condiciones de contorno teniendo en cuenta las ecuaciones de propagación de las características. Para ello habrá que considerar que el número de condiciones físicas a imponer en un contorno del problema de Euler, vendrá definido por el signo de los autovalores de la matriz  $K = \vec{A} \cdot \vec{n}$ . Los autovalores  $\lambda$  de esa matriz  $K$  en un flujo bidimensional están relacionados con la componente normal de las velocidades y las ondas acústicas y son:

$$\lambda_1 = \vec{v} \cdot \vec{n}, \quad \lambda_2 = \vec{v} \cdot \vec{n}, \quad \lambda_3 = \vec{v} \cdot \vec{n} + c, \quad \lambda_4 = \vec{v} \cdot \vec{n} - c, \quad (4.20)$$

donde, según el criterio de signos empleados, si un autovalor  $\lambda$  es positivo, la información transportada por las características se traslada desde el contorno al interior del dominio y se debe imponer una condición de contorno física. Por otro lado, cuando un autovalor es negativo, la información se propagará desde el interior del dominio al contorno, modificando las condiciones sobre la superficie del contorno.

### Condiciones de contorno sobre el campo lejano

Para la determinación de las condiciones de compatibilidad de Euler sobre el campo lejano, una hipótesis habitual consiste en suponer que el gradiente de la velocidad y la presión no varían a lo largo de ese contorno  $\vec{t} \cdot \vec{\nabla} P = 0$  y  $(\vec{t} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0$ . De esta manera, tenemos el siguiente sistema desacoplado que es fácilmente integrable

$$\begin{cases} \left( \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) w_1 = 0, \\ \left( \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) w_2 = 0, \\ \left( \partial_t + (\vec{v} + c\vec{n}) \cdot \vec{\nabla} \right) w_3 = 0, \\ \left( \partial_t + (\vec{v} - c\vec{n}) \cdot \vec{\nabla} \right) w_4 = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Con esta simplificación, se recupera localmente la situación 1D sobre el contorno y de manera compacta el sistema (4.21) se escribe como

$$\partial_t W + \lambda \vec{\nabla} W = 0, \quad \text{en } \Omega, \quad t > 0, \quad (4.22)$$

donde se observa la gran utilidad de emplear las variables características  $w_j$  que se propagan con una velocidad  $\lambda_j$  a lo largo de las líneas características de pendiente  $d\vec{n}/dt$ . Las perturbaciones propagadas respecto al fluido con velocidad del sonido  $c\vec{n}$  en el sentido positivo o negativo del eje  $\vec{n}$ , se mueven respecto del sistema fijo con una velocidad  $\vec{v} \pm c\vec{n}$ . Estas características se denominan  $C_+$  y  $C_-$ . Por otro lado, las perturbaciones transmitidas con el fluido (a velocidad  $\vec{v}$ ) se propagan en el plano  $\vec{n}t$  a lo largo de características que pertenecen a una familia  $C_0$ . Sustituyendo en (4.21) los valores de (4.15) se tiene que:

1. La primera ecuación característica expresa el transporte constante de entropía (denotada por  $s$ ) mientras no existan discontinuidades en el fluido

$$w_1 = s \text{ a lo largo de la característica } C_0, \quad \frac{d\vec{n}}{dt} = \vec{v}. \quad (4.23)$$

2. La segunda ecuación característica expresa el transporte constante de la velocidad tangencial

$$w_2 = \vec{v} \cdot \vec{t} \text{ a lo largo de la característica } C_0, \quad \frac{d\vec{n}}{dt} = \vec{v}. \quad (4.24)$$

3. Las dos últimas se obtienen para flujos isentrópicos y las perturbaciones que se desplazan a la velocidad del sonido son

$$\begin{aligned} w_3 &= \vec{v} \cdot \vec{n} + \frac{2c}{\gamma - 1} \text{ a lo largo de la característica } C_+, \quad \frac{d\vec{n}}{dt} = \vec{v} + c\vec{n}, \\ w_4 &= \vec{v} \cdot \vec{n} - \frac{2c}{\gamma - 1} \text{ a lo largo de la característica } C_-, \quad \frac{d\vec{n}}{dt} = \vec{v} - c\vec{n}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

A partir de las expresiones (4.23), (4.24) y (4.25), y estudiando el signo de los autovectores (sentido de propagación de las características), es posible imponer de manera correcta las condiciones de contorno en el campo lejano de forma que las perturbaciones no deseadas en el flujo no sean reflejadas por los contornos. A modo de ejemplo, a continuación, se estudia el caso de entrada de flujo subsónica:

- En la superficie de entrada tres autovalores serán positivos y uno negativo. Normalmente, la presión de remanso, la temperatura (o equivalentemente la entropía) y una de las componentes de la velocidad son impuestas en el contorno, viniendo la otra componente de la velocidad impuesta por el tratamiento numérico. Empleando las variables características se tiene que:

- El autovalor  $\lambda_1 = \vec{v} \cdot \vec{n}$  asociado a  $w_1$  es positivo. La relación de compatibilidad se reduce un transporte constante de entropía

$$s_{cont} = s_{\infty}. \quad (4.26)$$

- El autovalor  $\lambda_2 = \vec{v} \cdot \vec{n}$  asociado a  $w_2$  es positivo. Se toma un sistema local de coordenadas de tal manera que  $x$  esté en la dirección normal. Entonces  $w_2$  se reduce a la velocidad tangencial

$$\vec{v} \cdot \vec{t}_{cont} = \vec{v} \cdot \vec{t}_{\infty}. \quad (4.27)$$

- El autovalor  $\lambda_3 = \vec{v} \cdot \vec{n} + c$  asociado a  $w_3$  es positivo. Se impone una condición física sobre (4.25) de la siguiente manera

$$\vec{v}_{cont} \cdot \vec{n} + \frac{2c_{cont}}{\gamma - 1} = \vec{v}_{\infty} \cdot \vec{n} + \frac{2c_{\infty}}{\gamma - 1}. \quad (4.28)$$

- El autovalor  $\lambda_4 = \vec{v} \cdot \vec{n} - c$  asociado a  $w_4$  es negativo. Se impone una condición numérica, que se calcula desde el interior del dominio a partir de (4.25):

$$\vec{v}_{cont} \cdot \vec{n} - \frac{2c_{cont}}{\gamma - 1} = \vec{v}_{int} \cdot \vec{n} - \frac{2c_{int}}{\gamma - 1}. \quad (4.29)$$

Por último, debido a que  $H$  no está asociada a ninguna variable característica, se debe imponer que la entalpía de remanso es constante e igual a un valor impuesto:

$$H_{cont} = H_{\infty}. \quad (4.30)$$

- En la superficie de salida, tres autovalores serán negativos y uno positivo. En este caso, la condición física más apropiada consiste en fijar la presión estática. Sin embargo, en el caso de flujos externos se suele imponer la velocidad de corriente libre. Las mismas relaciones de la entrada se pueden aplicar a la salida con la diferencia de que los valores de  $s_{cont}$ ,  $\vec{v} \cdot \vec{t}_{cont}$  y  $\vec{v}_{cont} \cdot \vec{n} + \frac{2c_{cont}}{\gamma - 1}$  son determinados desde valores interiores.
- El autovalor  $\lambda_4 = -|\vec{v} \cdot \vec{n}| + c$  asociado a  $w_4$  es positivo. Se impone una condición física sobre (4.25):

$$-|\vec{v}_{cont} \cdot \vec{n}| + \frac{2c_{cont}}{\gamma - 1} = -|\vec{v}_{\infty} \cdot \vec{n}| + \frac{2c_{\infty}}{\gamma - 1}. \quad (4.31)$$

### Condiciones de contorno sobre pared sólida

En las paredes sólidas, la velocidad normal es cero  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ , debido a que no existen masas u otro flujo convectivo que pueda penetrar en el cuerpo sólido. Para el cálculo del

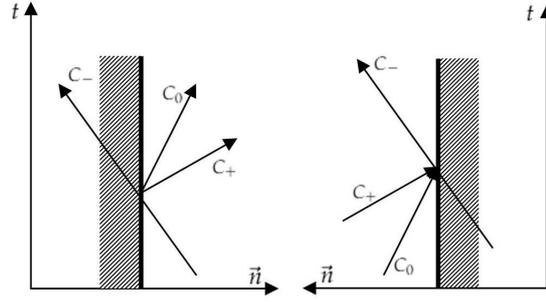


Figura 4.5: Características en la entrada (izquierda), salida (derecha)

flujo que entra o sale de la pared, se proyectan los flujos sobre un vector normal exterior a la pared sólida:

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = F_x n_x + F_y n_y = (0, P n_x, P n_y, 0)^T. \quad (4.32)$$

Por otro lado, sólo un autovalor es positivo  $\lambda_3 = \vec{v} \cdot \vec{n} + c$  y sólo una condición física puede ser impuesta. Las otras condiciones, en particular, la velocidad y la presión, deben ser calculadas por extrapolación desde el interior hasta el contorno o bien utilizar las relaciones de compatibilidad para determinar el valor de la presión.

La presión de la pared puede ser calculada empleando las relaciones de compatibilidad (4.19), donde  $w_3$  es sustituida por la forma diferencial de la condición física  $d_t(\vec{v} \cdot \vec{n}) = 0$ . En este caso la ecuación para  $w_4$  en el contorno es:

$$\left( \partial_t + (\vec{v} - c\vec{n}) \cdot \vec{\nabla} \right) w_3 = c (\kappa_x \partial_y - \kappa_y \partial_x) w_2 = -c\vec{t} \cdot (\vec{t} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}. \quad (4.33)$$

Desarrollando y empleando (4.15) la relación de compatibilidad en la pared sólida queda como:

$$\rho \kappa (\vec{v} \cdot \vec{t})^2 = \partial_n P, \quad (4.34)$$

donde  $\kappa$  es la curvatura de la curva. La ecuación de compatibilidad (4.34) permite obtener el valor de la presión (como alternativa de la interpolación), una vez discretizada la derivada normal de la presión sobre la pared. A la hora de desarrollar métodos numéricos, ésta es una condición que se debe imponer directamente para evitar que se reflejen perturbaciones no deseadas.

### 4.3. Ecuaciones linealizadas de Euler en régimen estacionario

Una vez planteadas las ecuaciones de Euler, es posible estudiar la estabilidad de sus soluciones con respecto de pequeñas perturbaciones  $\delta U$  que producen variaciones en la solución  $U$ .

**Proposición 24.** *Dada una solución estacionaria y regular  $U_0$  del problema de Euler, la variación infinitesimal  $\delta U$  de la solución en  $U_0$  verifica la siguiente ecuación*

$$\partial_t(\delta U) + \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{A} \Big|_{U_0} \delta U \right) = 0, \quad (4.35)$$

donde  $\vec{A} = \partial_U \vec{F}$  y  $\vec{F}$  es el operador (no lineal) de flujos convectivos (4.7).

*Demostración.* En un marco clásico de análisis de la estabilidad de una solución regular de las ecuaciones de Euler, dada una solución estacionaria del problema  $U_0$ , entonces  $U' = U_0 + \delta U$  verifica las ecuaciones de Euler, donde  $\delta U$  es una perturbación infinitesimal de la solución

$$\partial_t (U_0 + \delta U) + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(U_0 + \delta U) = 0. \quad (4.36)$$

El flujo no-lineal  $\vec{F}$  puede aproximarse linealmente alrededor del punto  $U_0$  como

$$\vec{F}(U) \approx \vec{F}(U_0) + \vec{A}\Big|_{U_0} (U - U_0). \quad (4.37)$$

Sustituyendo (4.37) en (4.36) y simplificando, se obtiene la expresión (4.35).  $\square$

En el ámbito del diseño óptimo de forma, los funcionales a minimizar dependen, además de la solución del flujo, de la forma  $S$  del contorno de la pared sólida que delimitan parte del dominio  $\Omega$  donde es resuelta la ecuación de estado. En este caso es necesario valorar, además de perturbaciones  $\delta U$  alrededor de la solución  $U_0$ , perturbaciones  $\delta S$  de la forma del contorno  $S_0$

$$\delta S = S' - S_0, \quad S' = \{\vec{x} + \delta S \vec{n}_S(\vec{x}), \quad \vec{x} \in S\}, \quad (4.38)$$

donde  $\vec{n}_S$  es un vector normal unitario a la superficie  $S$  apuntando hacia el exterior del dominio  $\Omega$ . Finalmente, haciendo uso de (4.35), el Lema 45 (en el apéndice B) y suponiendo que las condiciones de contorno en el campo lejano  $\Gamma_\infty$  permanecen inalteradas, las ecuaciones linealizadas de Euler se pueden escribir como

$$\begin{cases} \partial_t (\delta U) + \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{A}\Big|_{U_0} \delta U \right) = 0, & \text{en } \Omega, \quad t > 0, \\ \delta \vec{v} \cdot \vec{n}_S = -\delta S \partial_n \vec{v} \cdot \vec{n}_S + \partial_{t_S} (\delta S) \vec{v} \cdot \vec{t}_S, & \text{sobre } S, \quad t > 0, \end{cases} \quad (4.39)$$

donde, en el campo lejano  $\Gamma_\infty$ , las condiciones de contorno son especificadas para las ondas entrantes a través de imponer el valor 0 a las variables características  $\delta w$  asociadas a una dirección de propagación normal a  $\Gamma_\infty$ . Los vectores  $\vec{n}_S$  y  $\vec{t}_S$  son respectivamente los vectores normal y tangente a la superficie sólida  $S$ . Con  $\partial_n = \vec{n}_S \cdot \vec{\nabla}$  y  $\partial_{t_S} = \vec{t}_S \cdot \vec{\nabla}$  denotamos respectivamente la derivada normal y tangente a la superficie  $S$ . Las variables conservativas linealizadas son  $\delta U = (\delta \rho, \delta(\rho u), \delta(\rho v), \delta(\rho E))^T$  y las matrices jacobianas en 2D responden a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \partial_U F_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} v_x^2 + \frac{\gamma-1}{2} v_y^2 & (3-\gamma)v_x & -(\gamma-1)v_y & \gamma-1 \\ -v_x v_y & v_y & v_x & 0 \\ -\gamma v_x E + (\gamma-1)v_x |\vec{v}|^2 & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(v_y^2 + 3v_x^2) & -(\gamma-1)v_x v_y & \gamma v_x \end{pmatrix}, \\ \partial_U F_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_x v_y & v_y & v_x & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} v_y^2 + \frac{\gamma-1}{2} v_x^2 & -(\gamma-1)v_x & (3-\gamma)v_y & \gamma-1 \\ -\gamma v_y E + (\gamma-1)v_y |\vec{v}|^2 & -(\gamma-1)v_x v_y & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(v_x^2 + 3v_y^2) & \gamma v_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si, además, contemplamos la existencia de una discontinuidad en las variables fluidas a lo largo de la curva regular  $\Sigma$ , la sensibilidad del modelo debe analizarse con respecto a perturbaciones infinitesimales en la posición de la discontinuidad (tal y como se realizó para el caso de la ecuación de Burgers en la Sección 3.4). En esta situación, las ecuaciones del flujo linealizado se reinterpretarán como dos ecuaciones linealizadas de Euler a ambos lados de  $\Sigma$  (ver Figura 4.2) y una ecuación de transporte lineal que se obtiene de la linealización de las relaciones de Rankine-Hugoniot.

#### 4.3.1. Relaciones linealizadas de Rankine-Hugoniot

Asumiendo la presencia de una discontinuidad en las variables fluidas a lo largo de la curva bidimensional  $\Sigma$  que sufre un desplazamiento infinitesimal de valor  $\delta\Sigma$  en la dirección  $\vec{n}_\Sigma$  normal a la discontinuidad<sup>4</sup> se tiene que

$$\delta\Sigma = \Sigma' - \Sigma_0, \quad \Sigma' = \{\vec{x} + \delta\Sigma(\vec{x})\vec{n}_\Sigma(\vec{x}), \vec{x} \in \Sigma\}. \quad (4.40)$$

**Lema 25.** *Suponiendo que la solución presenta una única discontinuidad (o varias discontinuidades que no interactúan entre sí) estacionaria en el campo fluido, a lo largo de la curva regular  $\Sigma$ , las relaciones de Rankine-Hugoniot se pueden linealizar como*

$$\delta\Sigma\vec{n}_\Sigma \left[ \vec{A}\partial_n U \right]_\Sigma + \vec{n}_\Sigma \left[ \vec{A}\delta U \right]_\Sigma + \delta\vec{n}_\Sigma \left[ \vec{F} \right]_\Sigma = 0, \quad (4.41)$$

donde  $\vec{A} = \partial_U \vec{F}$  y  $[A]_\Sigma$  representa el salto de la magnitud  $A$  al atravesar  $\Sigma$ .

*Demostración.* La variación de una función vectorial  $\vec{F}$  definida sobre una curva  $\Sigma$  se calcula como

$$\delta\vec{F}(U) = \vec{F}_U(U) (\delta\Sigma\partial_n U + \delta U). \quad (4.42)$$

Por otro lado, la variación del vector normal  $\delta\vec{n}_\Sigma$  a la superficie de la discontinuidad es

$$\delta\vec{n}_\Sigma = -(\partial_{t_g} \delta\Sigma) \vec{t}_\Sigma. \quad (4.43)$$

Suponiendo una única discontinuidad estacionaria en la solución del campo fluido  $U$ , empleando (4.42) y (4.43), a partir (4.11), se puede obtener fácilmente (4.41).  $\square$

#### 4.3.2. Condiciones de contorno externas

El análisis de las condiciones de contorno en las ecuaciones linealizadas de Euler es muy similar al realizado para las ecuaciones de Euler. En aquél caso se empleaba la formulación cuasilineal que se recuperará en este caso al suponer una solución regular y emplear el resultado de la Proposición 4.9.

Todos los desarrollos realizados para el estudio de las características y relaciones de compatibilidad serán válidos también aquí.

**Proposición 26.** *Si la solución  $U$  de las ecuaciones de Euler es regular sobre el contorno entonces se verifica que*

$$\partial_t U + \vec{\nabla}(\vec{A}U) = \partial_t U + \vec{A}\vec{\nabla}U \quad (4.44)$$

*Demostración.* Las ecuaciones de Euler se pueden escribir como  $\partial_t U + \vec{\nabla}\vec{F}$  donde  $\vec{F}$  sólo depende de las variables conservativas  $U$ , por lo tanto

$$\partial_t U + \vec{\nabla}\vec{F} = \partial_t U + \vec{A}\vec{\nabla}U = 0. \quad (4.45)$$

Por otro lado, a partir de la propiedad de homogeneidad de grado uno de  $\vec{F}$  respecto de las variables conservativas (ver Proposición 23):

$$\vec{\nabla}\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{A}U) = 0. \quad (4.46)$$

La identidad (4.44) se deduce inmediatamente de (4.45) y (4.46) para soluciones regulares.  $\square$

<sup>4</sup>El vector normal a la discontinuidad  $\vec{n}_\Sigma$  queda definido como el vector resultante de girar un ángulo de  $\pi/2$  en dirección horaria al vector  $\vec{t}_\Sigma$  tangente a la discontinuidad y orientado desde la superficie sólida  $S$  hasta el campo lejano  $\Gamma_\infty$ .

**Comentario 27.** Nótese que pese a que desde un punto analítico no hay diferencia entre que el jacobiano de los flujos  $\vec{A}$  esté dentro o fuera del gradiente, desde un punto de vista numérico si existe, y se deberá contemplarse en el desarrollo de esquemas numéricos para la resolución de las ecuaciones linealizadas.

### Condiciones de contorno sobre el campo lejano

En los problemas de diseño óptimo se pretende estudiar la variación del flujo de aire al modificar la forma de la superficie sólida interior. Por ello, en el contorno lejano se considera nula la variación de las características entrantes  $\delta w_j$  para los autovalores  $\lambda_j$  positivos (la información que entra del infinito al interior del dominio  $\Omega$  no varía), y en el caso de autovalores  $\lambda_j$  negativos, la variación de la característica será calculada por interpolación desde el interior del dominio.

- Al igual que en el análisis de las condiciones de contorno para las ecuaciones de Euler en regímenes subsónicos, en la superficie de entrada tres autovalores serán positivos y uno negativo.

$$\begin{cases} \delta w_1 = \delta \rho - \frac{\delta p}{c^2} = \delta w_{1\infty} = 0, \\ \delta w_2 = \vec{t} \cdot \delta \vec{v} = \delta w_{2\infty} = 0, \\ \delta w_3 = \vec{n} \cdot \delta \vec{v} + \frac{\delta p}{\rho c} = \delta w_{3\infty} = 0, \end{cases} \quad (4.47)$$

que de manera compacta se puede escribir como  $(P^{-1}\delta U)_+ = (\delta W)_+ = 0$ , donde el signo + denota que las variables características  $W$  se corresponden con autovalores positivos. En el caso particular de  $\delta w_4$  su valor será calculado mediante interpolación desde el interior, esto es

$$\delta w_4 = -\vec{n} \cdot \delta \vec{v} + \frac{\delta p}{\rho c} = \delta w_{4int}. \quad (4.48)$$

- En la superficie de salida, tres autovalores serán negativos y uno positivo. Empleando las variables características se tiene que para el autovalor positivo

$$\delta w_4 = -|\vec{n} \cdot \delta \vec{v}| + \frac{\delta p}{\rho c} = \delta w_{4\infty} = 0. \quad (4.49)$$

El resto de variaciones de las variables características se calcularán mediante interpolación desde el interior del dominio. De forma compacta las condiciones de contorno salientes en el contorno lejano se resumen como  $(P^{-1}\delta U)_- = (\delta W)_- = (\delta W)_{int}$ , donde el signo - denota que se corresponden con autovalores negativos.

### Condiciones de contorno sobre la pared sólida

Las condiciones de contorno de las variables linealizadas provienen de linealizar las condiciones de contorno del problema de Euler. En el caso de pared sólida, admitiendo que sólo se producirán deformaciones de valor  $\delta S$  en la dirección  $\vec{n}_S$  normal a la superficie  $S$  de la forma  $S' = \{\vec{x} + \delta S(\vec{x})\vec{n}_S(\vec{x}), \vec{x} \in S\}$ , se tiene que

$$\delta \vec{v} \cdot \vec{n}_S = -(\delta S) \partial_n \vec{v} \cdot \vec{n} + (\partial_{tg}(\delta S)) \vec{v} \cdot \vec{t}, \quad (4.50)$$

donde, de manera análoga a las ecuaciones de Euler, resulta conveniente el cálculo del flujo convectivo linealizado que atraviesa la pared sólida.

**Proposición 28.** *El flujo convectivo que entra o sale de la pared sólida  $S$  al resolver las ecuaciones linealizadas de Euler 2D sobre una solución regular y estacionaria de las ecuaciones de Euler es*

$$\vec{F}|_{\text{pared}} = \begin{pmatrix} -\rho (\delta S \partial_n \vec{v}_y \cdot \vec{n} - \partial_{tg} (\delta S) \vec{v} \cdot \vec{t}) \\ \left[ \left( \frac{3-\gamma}{2} v_x^2 - \frac{\gamma+1}{2} v_y^2 \right) \delta \rho + (2-\gamma) v_x \rho \delta v_x - \gamma v_y \rho \delta v_y + (\gamma-1) \delta (\rho E) \right] n_x \\ \left[ \left( \frac{3-\gamma}{2} v_y^2 - \frac{\gamma+1}{2} v_x^2 \right) \delta \rho - \gamma v_x \rho \delta v_x + (2-\gamma) v_y \rho \delta v_y + (\gamma-1) \delta (\rho E) \right] n_y \\ -\rho H (\delta S \partial_n \vec{v} \cdot \vec{n} - \partial_{tg} (\delta S) \vec{v} \cdot \vec{t}) \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

donde  $\vec{n} = (n_x, n_y)$  es un vector normal unitario a la pared sólida (apuntando hacia el exterior del dominio  $\Omega$ ).

*Demostración.* La evaluación del flujo que atraviesa la pared implica el cálculo de

$$\left( \vec{A} \delta U \right) \cdot \vec{n} = (A_x n_x + A_y n_y) \delta U, \quad (4.52)$$

donde  $\vec{n}$  es la normal unitaria exterior a la pared,  $\vec{A} = (A_x, A_y)$  siendo  $A_x = \partial_U F_x$  y  $A_y = \partial_U F_y$ . Además se debe tener en cuenta la condición de no penetración de fluido sobre la pared sólida  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ :

$$A_x n_x + A_y n_y = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y & 0 \\ \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) |\vec{v}|^2 n_x & (2-\gamma) v_x n_x & -\gamma v_y n_x & (\gamma-1) n_x \\ \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) |\vec{v}|^2 n_y & -\gamma v_x n_y & (2-\gamma) v_y n_y & (\gamma-1) n_y \\ 0 & H n_x & H n_y & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

donde, multiplicando por el vector de variables linealizadas y usando la condición de contorno linealizadas (4.50), se obtiene la expresión (4.51).  $\square$

Para evaluar el flujo numérico que entra/sale de la pared sólida es necesario evaluar las variables linealizadas sobre el contorno. El cálculo de estas variables en la superficie se puede hacer mediante una simple interpolación de los valores en el interior del dominio o bien recurriendo a la linealización de la relación de compatibilidad sobre el contorno sólido para poder imponer las condiciones de contorno numéricas. La relación de compatibilidad para las ecuaciones de Euler que permiten evaluar el valor de la presión mediante una discretización apropiada es

$$\kappa (\vec{v} \cdot \vec{t})^2 = \frac{1}{\rho} \partial_n P. \quad (4.54)$$

Si linealizamos esta expresión, será posible determinar una ecuación que ligue las diferentes variables linealizadas

$$\begin{aligned} & \delta \kappa (\vec{v} \cdot \vec{t})^2 + 2\kappa (\vec{v} \cdot \vec{t}) ((\delta S \partial_n \vec{v} + \delta \vec{v}) \cdot \vec{t}) \\ & = \frac{1}{\rho} \left( \delta \vec{n} \cdot \vec{\nabla} P + \delta S \vec{\nabla}^2 P + \partial_n (\delta P) \right) - \frac{\delta S \partial_n \rho + \delta \rho}{\rho^2} \partial_n P, \end{aligned} \quad (4.55)$$

que junto a

$$\delta (\rho E) = \frac{\delta P}{\gamma-1} + \frac{(\gamma-1) (v_x \delta v_x + v_y \delta v_y)}{2\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}}, \quad (4.56)$$

permite obtener un valor para  $\delta (\rho E)$ , compatible con las ecuaciones de Euler linealizadas en la frontera, a partir de interpolar los valores de  $\rho$ ,  $\rho v_x$  y  $\rho v_y$ .

#### 4.4. Análisis de la sensibilidad de un funcional: el enfoque continuo

Tal y como se avanzó en la introducción, este capítulo está orientado al desarrollo del método continuo para el diseño óptimo de forma en un ámbito aeronáutico en el marco de las ecuaciones de Euler. En esta sección, al igual que en la sección 3.4 para la ecuación de Burgers, se desarrollarán las fórmulas necesarias para aplicar el método adjunto continuo al diseño de forma en sistemas gobernados por las ecuaciones de Euler.

Las ecuaciones adjuntas a las ecuaciones de Euler se plantean asociadas al problema de optimización (4.1) que consiste en la minimización del funcional  $J$  definido en (4.2) mediante la variación de la geometría de la frontera  $S$ . Para la determinación del valor del funcional  $J$  será necesaria la obtención de las variables fluidas  $U$ , soluciones del problema de Euler estacionario, más las relaciones de Rankine-Hugoniot (ver Figura 4.2)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0, & \text{en } \Omega \setminus \Sigma, \\ \vec{v} \cdot \vec{n}_S = 0, & \text{sobre } S, \\ [\vec{F} \cdot \vec{n}_\Sigma]_\Sigma = 0, & \text{sobre } \Sigma, \end{cases} \quad (4.57)$$

donde, en el campo lejano  $\Gamma_\infty$ , las condiciones de contorno son especificadas para las ondas entrantes, mientras que las ondas salientes son determinadas por la propia solución en el interior del dominio  $\Omega$ .

**Notación 29.** A lo largo de esta sección haremos uso frecuente de la siguiente notación:

$\vec{n}_S$  y  $\vec{n}_{\Gamma_\infty}$  son vectores normales unitarios a los contornos  $S$  y  $\Gamma_\infty$  respectivamente, apuntando hacia el exterior del dominio  $\Omega$ .

$\vec{t}_S$  y  $\vec{t}_{\Gamma_\infty}$  son los vectores tangentes unitarios a los contornos  $S$  y  $\Gamma_\infty$  respectivamente, resultado de girar los vectores normales  $\vec{n}_S$  y  $\vec{n}_{\Gamma_\infty}$  un ángulo de  $\pi/2$  en sentido horario.

$\vec{t}_\Sigma$  es el vector tangente unitario a la curva  $\Sigma$  cuyo sentido va desde  $S$  hasta  $\Gamma_\infty$ .

$\vec{n}_\Sigma$  es el vector normal a la discontinuidad  $\Sigma$  resultado de girar el vector tangente unitario  $\vec{t}_\Sigma$  un ángulo de  $\pi/2$  en sentido horario.

El vector de matrices jacobianas se denotará de manera compacta como  $\vec{A} = \partial_U \vec{F}$ .

$\partial_n = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$  y  $\partial_{tg} = \vec{t} \cdot \vec{\nabla}$  son respectivamente la derivada normal y la derivada tangencial.

A lo largo de esta sección, se supondrá la existencia de una discontinuidad en las variables de flujo  $U$  situada sobre la curva regular  $\Sigma$  que toca el contorno  $S$  en un punto  $x_b = \Sigma \cap S$ . Además, esta discontinuidad está orientada de tal manera que empieza en  $x_b$  (ver Figura 4.2) y es normal a la superficie en el punto  $x_b$  (ver Sección 4.2.1). En estas condiciones, la variación del funcional  $J$ , a partir de (4.5) se calcula como

$$\delta J(S) = \int_{\delta S} j(U) ds + \int_{S \setminus \{x_b\}} j'(U) \delta U ds - [j(U)]_{x_b} \delta \Sigma(x_b), \quad (4.58)$$

donde  $\delta S$  y  $\delta \Sigma$  son las variaciones infinitesimales en la posición de las curvas de superficie  $S$  y discontinuidad  $\Sigma$ , respectivamente

$$S' = \{\vec{x} + \delta S(\vec{x}) \vec{n}_S(\vec{x}), \vec{x} \in S\}, \quad \Sigma' = \{\vec{x} + \delta \Sigma(\vec{x}) \vec{n}_\Sigma(\vec{x}), \vec{x} \in \Sigma\}. \quad (4.59)$$

Con objeto de obtener los valores de  $\delta U$  y  $\delta \Sigma$  una vez conocida  $\delta S$  se recurre a la solución de las ecuaciones linealizadas de Euler (estacionaria) más las relaciones de

Rankine-Hugoniot

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \delta U) = 0, & \text{en } \Omega \setminus \Sigma, \\ \delta \vec{v} \cdot \vec{n}_S = -\delta S \partial_n \vec{v} \cdot \vec{n} + (\partial_{t_g}(\delta S)) \vec{v} \cdot \vec{t}, & \text{sobre } S, \\ (\delta W)_+ = 0, & \text{sobre } \Gamma_\infty, \\ \delta \Sigma \vec{n}_\Sigma \left[ \vec{A} \partial_n U \right]_\Sigma + \vec{n}_\Sigma \left[ \vec{A} \delta U \right]_\Sigma + \delta \vec{n}_\Sigma \left[ \vec{F} \right]_\Sigma = 0, & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (4.60)$$

Es importante destacar que el coste computacional de resolver las ecuaciones linealizadas es equivalente al de una resolución de las ecuaciones no-linealizadas. Por ello, este modo de calcular las variaciones de  $U$  y  $\Sigma$  no es eficiente si el número de deformaciones admisibles  $\delta S$  es alto. Por ello, se recurre al planteamiento del problema adjunto a través del uso de los multiplicadores de Lagrange<sup>5</sup>  $\Psi^T = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ . De esta manera se pretende eliminar la dependencia de  $\delta U$  y  $\delta \Sigma$  en la expresión (4.58) y evitar el paso por la resolución de las ecuaciones linealizadas (4.60) para cada variable de diseño.

El primer paso del procedimiento consiste en multiplicar las ecuaciones linealizadas de Euler por  $\Psi$  e integrarlas sobre el dominio  $\Omega$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega \setminus \Sigma} \Psi^T \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \delta U) d\Omega \\ &= - \int_{\Omega \setminus \Sigma} \vec{\nabla} \Psi^T \cdot \vec{A} \delta U d\Omega + \int_{S \setminus \{x_b\}} \Psi^T \vec{A} \delta U \cdot \vec{n}_S ds \\ &\quad + \int_{\Sigma} \left[ \Psi^T \vec{A} \delta U \right]_\Sigma \vec{n}_\Sigma ds + \int_{\Gamma_\infty} \Psi^T \vec{A} \delta U \cdot \vec{n}_{\Gamma_\infty} ds. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Seguidamente, se analizará término a término la ecuación (4.61) con objeto de eliminar la dependencia de  $\delta U$  y  $\delta \Sigma$  mediante la elección del valor adecuado para las variables adjuntas:

- El primer término de (4.61) es una integral de volumen sobre todo el dominio  $\Omega$ . Con objeto de eliminar la dependencia de  $\delta U$  se construye la ecuación adjunta de la siguiente manera

$$-\vec{A}^T \cdot \vec{\nabla} \Psi = 0. \quad (4.62)$$

- El segundo término de (4.61) se trata de una integral sobre la superficie sólida  $S$ . Para evaluar esta integral es conveniente sustituir la matriz jacobiana  $\vec{A}$  por su valor analítico y emplear las condiciones de contorno linealizadas. Obtenemos así

$$\begin{aligned} &\int_{S \setminus \{x_b\}} \Psi^T \vec{A} \delta U \cdot \vec{n}_S ds \\ &= \int_{S \setminus \{x_b\}} (\delta \vec{v} \cdot \vec{n}_S) \vartheta ds + \int_{S \setminus \{x_b\}} (\vec{\varphi} \cdot \vec{n}_S) \delta P ds \\ &= - \int_{S \setminus \{x_b\}} ((\partial_n \vec{v} \cdot \vec{n}_S) \vartheta + \partial_{t_g}((\vec{v} \cdot \vec{t}_S) \vartheta)) \delta S ds \\ &\quad + \int_{S \setminus \{x_b\}} (\vec{\varphi} \cdot \vec{n}_S) \delta P ds. \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde  $\vec{\varphi} = (\psi_2, \psi_3)$  y  $\vartheta = \rho \psi_1 + \rho \vec{v}_S \cdot \vec{\varphi} + \rho H \psi_4$ .

<sup>5</sup>El método de los multiplicadores de Lagrange permite el cálculo del mínimo de una función multivariable con restricciones, en este caso las restricciones son las ecuaciones de Euler

- El tercer término de (4.61) es una integral a lo largo de la discontinuidad  $\Sigma$  que toca la superficie sólida en el punto  $x_b$ . A continuación se desarrollan los términos de esa integral.

**Lema 30.** Sean  $f : C \rightarrow \mathbb{R}^q$  y  $g : C \rightarrow \mathbb{R}^q$  unas funciones definidas en un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^p$ , y considérese un punto  $a \in C$ . Se verifica que

$$[fg]_a = [\bar{f}g]_a + [\bar{g}f]_a, \quad (4.64)$$

donde  $[f]_a = f(a^+) - f(a^-)$  representa el salto de  $f$  en  $a$ , y  $\bar{f} = \frac{f(a^+) + f(a^-)}{2}$  su media.

Empleando el Lema 30, es posible escribir:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} [\Psi^T \vec{A} \delta U]_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} ds \\ &= \int_{\Sigma} [\Psi^T]_{\Sigma} \overline{\vec{A} \delta U} \cdot \vec{n}_{\Sigma} ds + \int_{\Sigma} \bar{\Psi}^T [\vec{A} \delta U]_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} ds. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Por otro lado, de la relación linealizada de Rankine-Hugoniot (4.41) se tiene que

$$\begin{aligned} [\vec{A} \delta U]_{\Sigma} &= -\delta \Sigma [\vec{A} \partial_n U]_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} - [\vec{F}]_{\Sigma} \cdot \delta \vec{n}_{\Sigma} \\ &= -\delta \Sigma [\partial_n (\vec{F} \cdot \vec{n}_{\Sigma})]_{\Sigma} + \partial_{tg}(\delta \Sigma) [\vec{F}]_{\Sigma} \cdot \vec{t}_{\Sigma}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

donde  $\delta \vec{n}_{\Sigma} = -(\partial_{tg}(\delta \Sigma)) \vec{t}_{\Sigma}$  y sobre  $\Sigma$  se puede descomponer el operador divergencia en su componente tangencial y normal de la siguiente manera:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \Big|_{\Sigma} = \partial_{tg}(\vec{F} \cdot \vec{t}_{\Sigma}) + \kappa_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}_{\Sigma} + \partial_n(\vec{F} \cdot \vec{n}_{\Sigma}), \quad (4.67)$$

lo que permite simplificar la derivada normal de  $\vec{F} \cdot \vec{n}_{\Sigma}$  en (4.66). Por lo tanto, teniendo en cuenta las relaciones de Rankine-Hugoniot  $[\vec{F} \cdot \vec{n}_{\Sigma}]_{\Sigma} = 0$ , se obtiene que

$$[\vec{A} \delta U]_{\Sigma} = \partial_{tg}(\delta \Sigma [\vec{F} \cdot \vec{t}_{\Sigma}]_{\Sigma}). \quad (4.68)$$

Reemplazamos esta expresión en (4.65) e integramos por partes para tener,

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} [\Psi^T \vec{A} \delta U]_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} ds \\ &= - \int_{\Sigma} \partial_{tg} \bar{\Psi}^T [\vec{F} \cdot \vec{t}_{\Sigma}]_{\Sigma} \delta \Sigma ds - \bar{\Psi}^T(x_b) [\vec{F} \cdot \vec{t}_{\Sigma}]_{x_b} \delta \Sigma(x_b), \end{aligned} \quad (4.69)$$

donde se ha supuesto  $[\Psi^T]_{\Sigma} = 0$ , es decir la continuidad de las variables adjuntas a través del choque. A continuación, bajo la hipótesis de choque normal  $\vec{v} \cdot \vec{t}_{\Sigma} = 0$ , desarrollamos  $\vec{F}$  para tener

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} [\Psi^T \vec{A} \delta U]_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} ds \\ &= [P]_{x_b} \vec{n}_S \cdot \vec{\varphi}(x_b) \delta \Sigma(x_b) - \int_{\Sigma} ([\rho \vec{v}]_{\Sigma} \cdot \vec{t}_{\Sigma}) (\partial_{tg} \Psi_1 + H \partial_{tg} \Psi_4) ds \\ & \quad - \int_{\Sigma} [\rho |\vec{v}|^2 + 2P]_{\Sigma} \vec{t}_{\Sigma} \cdot \partial_{tg} \vec{\varphi} ds \end{aligned} \quad (4.70)$$

Por último, a lo largo de  $\Sigma$  se verifica que  $[\rho \vec{v}]_{\Sigma} \cdot \vec{t}_{\Sigma} = [\rho \vec{v} \cdot \vec{t}_{\Sigma}]_{\Sigma} = 0$ , ya que  $[\vec{v} \cdot \vec{t}_{\Sigma}]_{\Sigma} = 0$  con lo que finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} [\Psi^T \vec{A} \delta U]_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} ds \\ &= [P]_{x_b} \vec{n}_S \cdot \vec{\varphi}(x_b) \delta \Sigma(x_b) - \int_{\Sigma} [\rho |\vec{v}|^2 + 2P]_{\Sigma} \vec{t}_{\Sigma} \cdot \partial_{tg} \vec{\varphi} ds \end{aligned} \quad (4.71)$$

- El cuarto término de (4.61) se corresponde con una integral sobre el campo lejano  $\Gamma_{\infty}$ . El campo lejano constituye una entrada/salida de flujo y el modo más natural de imponer las condiciones de contorno es a través de las variables características, para ello se escribe este término como

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{\infty}} \Psi^T \frac{\partial \vec{F}}{\partial U} \delta U \cdot \vec{n}_{\Gamma_{\infty}} ds = \int_{\Gamma_{\infty}} \Psi^T (\vec{A} \cdot \vec{n}_{\Gamma_{\infty}}) P \delta W ds \\ &= \int_{\Gamma_{\infty}} (\Psi^T P) \wedge \delta W ds = \int_{\Gamma_{\infty}} (W^*)^T \wedge \delta W ds, \end{aligned} \quad (4.72)$$

donde  $P$  es la matriz que diagonaliza la matriz jacobiana proyectada en una determinada dirección  $\vec{\kappa}$ , la matriz de autovalores se denota como  $\Lambda$  y finalmente se verifica la siguiente relación  $\Lambda = P^{-1}(\vec{A} \cdot \vec{\kappa})P$ . Por analogía denominaremos  $W^* = P^T \Psi$  a las variables características de las variables adjuntas. Es posible hacer que esta integral sobre el campo lejano se anule.

Una vez analizados todos los términos de la ecuación (4.61) es posible reescribirla de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \int_{S \setminus \{x_b\}} (\vec{\varphi} \cdot \vec{n}_S) \delta P ds = - \int_{\Sigma} [\rho |\vec{v}|^2 + 2P]_{\Sigma} \vec{t}_{\Sigma} \cdot \partial_{tg} \vec{\varphi} ds + [P]_{x_b} \vec{n}_S \cdot \vec{\varphi}(x_b) \delta \Sigma(x_b) \\ &+ \int_{S \setminus \{x_b\}} ((\partial_n \vec{v} \cdot \vec{n}_S) \vartheta + \partial_{tg} ((\vec{v} \cdot \vec{t}_S) \vartheta)) \delta S ds + \int_{\Gamma_{\infty}} \Psi^T \vec{A} \delta U \cdot \vec{n}_{\Gamma_{\infty}} ds. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Esta ecuación será empleada para eliminar la variables linealizadas de la variación del funcional  $J$  en (4.58). A través de la identificación de los términos correspondientes en (4.73) y (4.58).

Debido a que sólo son desconocidas las variaciones  $\delta U$  de las variables (4.73) correspondientes a la presión, sólo consideraremos funcionales que dependan de la presión  $P$ . Por lo tanto en (4.58), se asume que  $j(U) = j(P)$  [6]. Afortunadamente, los funcionales que dependen sólo de la presión son los más comunes en las aplicaciones de diseño aeronáutico con las ecuaciones de Euler. En definitiva, la ecuación (4.58) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \delta J(S) &= \int_S ((\partial_n j(P) - \kappa j(P)) \delta S ds \\ &+ \int_{S \setminus \{x_b\}} ((\partial_n \vec{v} \cdot \vec{n}_S) \vartheta + \partial_{tg} ((\vec{v} \cdot \vec{t}_S) \vartheta)) \delta S ds \\ &- \int_{\Sigma} [\rho |\vec{v}|^2 + 2P]_{\Sigma} \vec{t}_{\Sigma} \cdot \partial_{tg} \vec{\varphi} ds + ([P]_{x_b} \vec{n}_S \cdot \vec{\varphi}(x_b) - [j(P)]_{x_b}) \delta \Sigma(x_b), \end{aligned} \quad (4.74)$$

donde las variables adjuntas se calculan resolviendo la ecuación (4.62) con las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{cases} \vec{\varphi} \cdot \vec{n}_S = j'(P) & \text{sobre } S \setminus \{x_b\}, \\ \Psi^T (\vec{A} \cdot \vec{n}_{\Gamma_\infty}) \delta U = 0 & \text{sobre } \Gamma_\infty. \end{cases} \quad (4.75)$$

Por último destacar que en (4.74),  $\delta S$  es conocida (variables de diseño), pero la dependencia entre  $\delta \Sigma$  y  $\delta S$  (a través de las ecuaciones linealizadas de Euler y las relaciones de Rankine-Hugoniot) es desconocida. De esta manera, la expresión (4.74) para la evaluación de la variación del funcional  $J$  no es del todo satisfactoria pues depende de la variación de la posición del choque  $\Sigma$ .

#### 4.4.1. Condiciones de contorno internas

A lo largo de las Secciones 3.4 y 3.5 de esta memoria, se describió el llamado método de las direcciones alternantes para la optimización de sistemas gobernados por las ecuaciones de Burgers. En el caso de las ecuaciones de Euler, se ha optado por emplear un método basado en imponer numéricamente una serie de condiciones internas de contorno para eliminar la dependencia de (4.74) respecto  $\delta \Sigma$ . Los pasos a seguir son los siguientes:

Paso 1) Localizar la curva de discontinuidad  $\Sigma$ .

Paso 2) Imponer ciertas relaciones adjuntas de Rankine-Hugoniot sobre la discontinuidad. Estas condiciones deben cancelar la dependencia del funcional  $J$  con respecto de  $\delta \Sigma$ .

Paso 3) Resolver (4.62) empleando (4.75) y las condiciones internas calculadas.

Paso 4) Finalmente evaluar (4.74).

**Proposición 31.** *Supongamos que el funcional a ser optimizado es una función lineal de la variable presión. Entonces las condiciones de contorno internas a imponer sobre la discontinuidad  $\Sigma$  son*

$$\begin{cases} \vec{t}_\Sigma \cdot \partial_{t_g} \vec{\varphi} = 0, & \text{sobre } \Sigma, \\ \vec{n}_S \cdot \vec{\varphi} = j'(P), & \text{en } x_b, \end{cases} \quad (4.76)$$

donde la variación del funcional  $J(S)$  se calcula como

$$\delta J(S) = \int_S ((\partial_n j(P) - \kappa j(P)) \delta S ds + \int_{S \setminus \{x_b\}} ((\partial_n \vec{v} \cdot \vec{n}_S) \vartheta + \partial_{t_g} ((\vec{v} \cdot \vec{t}_S) \vartheta)) \delta S ds. \quad (4.77)$$

*Demostración.* Si  $j(P)$  es una función lineal de la presión  $P$ , entonces se verificará que

$$\frac{[j(P)]_{x_b}}{[P]_{x_b}} = j'(P)|_{x_b}, \text{ si } j(P) \text{ es función lineal de } P. \quad (4.78)$$

En estas circunstancias la condición a imponer sobre el punto  $x_b$  es  $\vec{\varphi} \cdot \vec{n}_S|_{x_b} = j'(P)$  que es idéntica a la condición sobre la superficie sólida (4.75) que se impone de manera habitual sobre toda la superficie  $S$  en el problema de diseño óptimo con las ecuaciones de Euler.  $\square$

**Comentario 32.** *Dos importantes funcionales empleados en la aeronáutica son lineales respecto de la presión: el coeficiente resistencia  $C_D$  y el de sustentación  $C_L$  para los cuales se verifica que*

$$j(P) = \frac{P - P_\infty}{C_\infty} (\vec{n}_S \cdot \vec{d}), \quad (4.79)$$

donde  $C_\infty = 0,5\gamma M_\infty^2 P_\infty$ ,  $\vec{n}_S$  es el vector unitario interior del dominio,  $P$  es la presión y  $M_\infty$  es el número de Mach de corriente libre y, finalmente, el vector  $\vec{d}$  toma valores que dependen de la configuración geométrica.

Por último, nótese que  $[\rho |\vec{v}|^2 + 2P]_\Sigma \neq 0$ , lo que nos permite simplificar la condición de contorno sobre el choque.

#### 4.4.2. Condiciones de contorno externas

Empleando la notación del problema de Euler directo, a continuación se determinarán las matrices que diagonalizan el jacobiano adjunto. Al tomar las ecuaciones de Euler, la matriz jacobiana  $\vec{A}$  proyectada en una determinada dirección  $\vec{\kappa}$ , se puede diagonalizar como

$$\Lambda = P^{-1}(\vec{A} \cdot \vec{\kappa})P = P^{-1}KP, \quad (4.80)$$

donde  $\Lambda$  es la matriz diagonal de autovalores,  $P$  es la matriz de los autovectores y  $K = \vec{A} \cdot \vec{\kappa}$ . De manera análoga tendremos que

$$\Lambda = P^{-1}KP = P^T(P^{-1}K)^T = P^T K^T (P^T)^{-1}. \quad (4.81)$$

Si ahora denotamos la matriz jacobiana proyectada como  $K^* = -\vec{A}^T \cdot \vec{\kappa} =$  entonces la diagonalización se realiza de la siguiente manera  $K^* = (P^T)^{-1}\Lambda^*P^T$  y sus autovalores son  $\Lambda^* = -\Lambda$ .

#### Condiciones de contorno sobre el campo lejano

En el problema de diseño óptimo, con objeto de eliminar la dependencia en  $\delta J$  de las variables de Euler linealizadas, la condición que deben de verificar las variables adjuntas sobre el campo lejano es

$$\int_{\Gamma_\infty} \Psi (\vec{n}_{\Gamma_\infty} \cdot \vec{A}) \delta U = 0, \quad (4.82)$$

donde  $\vec{A}$  es la matriz jacobiana y  $\vec{n}_{\Gamma_\infty}$  es ahora un vector normal unitario apuntando hacia el interior del dominio. Por otro lado, el campo lejano puede ser dividido entre la zona de entrada de flujo  $\Gamma_{\infty,in}$  donde  $\vec{v} \cdot \vec{n}_{\Gamma_\infty} > 0$  y de salida  $\Gamma_{\infty,out}$  donde  $\vec{v} \cdot \vec{n}_{\Gamma_\infty} < 0$ , con lo que se tiene, sustituyendo (4.81),

$$\int_{\Gamma_\infty} \Psi (\vec{n}_{\Gamma_\infty} \cdot \vec{A}) \delta U = \int_{\Gamma_{\infty,in}} (\Psi P) \Lambda (P^{-1} \delta U) + \int_{\Gamma_{\infty,out}} (\Psi P) \Lambda (P^{-1} \delta U) = 0, \quad (4.83)$$

donde  $(P^{-1} \delta U) = \delta W$ , siendo  $W$  las variables características. En el problema de diseño planteado, se establece que las condiciones de contorno en el campo lejano no están sujetas a variación. Por ello se verificará que  $\delta W = 0$  para las características entrantes que se corresponden con autovalores positivos, en cambio para las características salientes

en general se tendrá  $\delta W \neq 0$ . En adelante, resultará conveniente separar en (4.83) las características entrantes  $\Lambda_+$  y las características salientes  $\Lambda_-$  de tal manera que:

$$(\Psi P) \wedge (\delta W) = (\Psi P)_+ \Lambda_+ (\delta W)_+ + (\Psi P)_- \Lambda_- (\delta W)_- = 0. \quad (4.84)$$

Por otro lado,  $W^* = \Psi P$  debe interpretarse como las variables características para el problema adjunto. El valor de las variables características  $W^*$  deberá evaluarse en función de si se trata de una entrada o salida de flujo (en condiciones subsónicas):

- En la superficie de entrada subsónica  $\Gamma_{\infty, in}$  tres autovalores del problema adjunto serán negativos y uno positivo (esto es debido a que los autovalores del problema adjunto tienen signo opuesto a los del problema directo, ver Sección 4.2.2).
  - En el caso de ser positivo, la información del problema adjunto entra al dominio y será necesario especificar el valor de  $(\Psi P)_+$ . Debido a que se desea eliminar la contribución del contorno al cálculo de la sensibilidad (4.75), se tomará como valor más simple  $(W^*)_+ = 0$ .
  - En el caso de los autovalores negativos, la información sale del dominio y no es posible imponer una condición sobre las variables adjuntas. Sin embargo, dado que no existe variación de las variables características en el campo lejano tendremos que  $(\delta W)_- = 0$ .
- En la superficie de salida subsónica  $\Gamma_{\infty, out}$ , tres autovalores del problema adjunto serán positivos y uno negativo.
  - Empleando las variables características tendremos que, para los autovalores positivos, la información entra al dominio y por lo tanto se impondrá que  $(\Psi P)_+ = 0$ .
  - En el caso del autovalor negativo tendremos que la variación de las variables características es  $(\delta W)_- = 0$ .

En resumen, a través de las variables características y estudiando las direcciones de propagación de la información en la ecuación adjunta, es posible imponer las condiciones de contorno en el campo lejano con objeto de eliminar la dependencia de  $\delta U$  en (4.82).

#### Condiciones de contorno sobre la pared sólida

Teniendo en cuenta que la variación del funcional  $J$  a minimizar se calcula como

$$\delta J(S) = \int_{\delta S} j(U) ds + \int_{S \setminus \{x_b\}} j'(U) \delta U ds - [j(U)]_{x_b} \delta \Sigma(x_b), \quad (4.85)$$

empleando la expresión (4.73) es posible deducir unas condiciones de contorno sobre la pared sólida que eliminen la dependencia de las variables linealizadas  $\delta P$  en la variación del funcional:

$$\varphi \cdot \vec{n}_S = j'(P) \quad \text{sobre } S \setminus \{x_b\}, \quad (4.86)$$

donde  $\varphi = (\psi_2, \psi_3)$ ,  $\vec{n}_S$  es un vector normal exterior a la superficie sólida  $S$ , siendo  $P$  la presión del fluido y  $j'(P) = \partial_P j(P)$ .

**Proposición 33.** *El flujo adjunto que atraviesa la superficie sólida en caso de partir de una solución regular de las ecuaciones de Euler 2D, se calcula como*

$$\vec{F}|_{pared} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) |\vec{v}|^2 j'(U) \\ [\psi_1 + v_x \psi_2 + v_y \psi_3 + H\psi_4] n_x - v_x (\gamma - 1) j'(U) \\ [\psi_1 + v_x \psi_2 + v_y \psi_3 + H\psi_4] n_y - v_y (\gamma - 1) j'(U) \\ (\gamma - 1) j'(U) \end{pmatrix}. \quad (4.87)$$

*Demostración.* Un modo de imponer estas condiciones de contorno es a través de los flujos convectivos adjuntos que atraviesan la pared. Para ello es necesario calcular la proyección del flujo sobre la normal a la pared,

$$-\left(\vec{A}^T \Psi\right) \cdot \vec{n}_S = -\left(\vec{A}_x^T n_x + \vec{A}_y^T n_y\right) \Psi, \quad (4.88)$$

donde  $\vec{A} = (A_x, A_y)$ , teniendo en cuenta que sobre la pared sólida se verifica  $\vec{v} \cdot \vec{n}_S = 0$ , entonces se obtiene la siguiente expresión,

$$\vec{A}_x^T n_x + \vec{A}_y^T n_y = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) |\vec{v}|^2 n_x & \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) |\vec{v}|^2 n_y & 0 \\ n_x & (2 - \gamma) v_x n_x & -\gamma v_x n_y & H n_x \\ n_y & -\gamma v_y n_x & (2 - \gamma) v_y n_y & H n_y \\ 0 & (\gamma - 1) n_x & (\gamma - 1) n_y & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.89)$$

Multiplicando este último resultado por el vector de variables adjuntas y empleando la condición de contorno (4.86), de manera inmediata se obtiene la expresión (4.87).  $\square$

## Capítulo 5

---

# Análisis de la sensibilidad de las ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias

---

En este capítulo, continuación de los desarrollos realizados para sistemas gobernados por la ecuación de Burgers (Capítulo 3) y las ecuaciones de Euler (Capítulo 4), se abordará la extensión de la metodología adjunta continua a sistemas gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes en régimen estacionario.

La organización de este capítulo es la siguiente: en primer lugar se realizará un breve repaso a las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles. Más adelante, se desarrollarán las ecuaciones linealizadas de Navier-Stokes y finalmente, mediante el enfoque adjunto continuo, se planteará la formulación matemática que permite el cálculo de gradientes de un funcional de interés aerodinámico en sistemas gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes.

### 5.1. Ecuaciones de Navier-Stokes en forma conservativa

Las ecuaciones compresibles Navier-Stokes [73, 68] consisten en un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que proporciona una modelización completa del comportamiento de un fluido Newtoniano<sup>1</sup> a través de la conservación de la masa, momento y energía en el fluido.

En el ámbito aeronáutico (ver Figura 4.1), las ecuaciones de Navier-Stokes se plantean en un dominio  $\Omega$  delimitado por contornos disconexos que se dividen en campo lejano  $\Gamma_\infty$  y en varios contornos de pared sólida que denominaremos de manera genérica  $S$ . El sistema completo de las ecuaciones compresibles de Navier-Stokes (sin términos fuente y suponiendo condiciones adiabáticas en la pared sólida), se puede formular de diferentes maneras, siendo el modo conservativo el más apropiado [52] en relación con la

---

<sup>1</sup>Un fluido newtoniano es un fluido con viscosidad en que las tensiones tangenciales de rozamiento son directamente proporcionales al gradiente de velocidades

formulación integral de las leyes de conservación,

$$\begin{cases} \partial_t U + \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} - \vec{F}^v) = 0, & \text{en } \Omega, t > 0 \\ \vec{v} = 0, & \text{sobre } S \\ \partial_n T = 0, & \text{sobre } S \end{cases} \quad (5.1)$$

donde, en el campo lejano  $\Gamma_\infty$ , las condiciones de contorno son especificadas para las ondas entrantes, mientras que las ondas salientes son determinadas por la propia solución en el interior del dominio  $\Omega$ . Por otro lado, se ha supuesto pared sólida  $S$  adiabática,  $\partial_n$  denota la derivada normal, las variables conservativas son  $U^T = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho E)$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  es la velocidad en un sistema de referencia cartesiano,  $E$  es la energía total,  $P$  la presión del sistema,  $H$  la entalpía,  $T$  es la temperatura del fluido. Los flujos convectivos se modelizan como  $\vec{F} = (F_x, F_y)$  ya definidos en (4.7), y los flujos viscosos como  $\vec{F}^v = (F_x^v, F_y^v)$  donde

$$F_x^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xx}v_x + \sigma_{xy}v_y + k\partial_x T \end{pmatrix}, F_y^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yx}v_x + \sigma_{yy}v_y + k\partial_y T \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Aquí y en lo sucesivo  $\sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzos que agrupa todas las componentes del esfuerzo sobre un volumen de control. De manera estándar  $i$  indica el plano normal sobre el que actúa el esfuerzo y  $j$  es la dirección de la componente del esfuerzo. Asumiendo el empleo de gases perfectos, fluidos Newtoniano y equilibrio térmico, entonces se verifica la relación de Stokes, y el tensor de esfuerzos se puede escribir como

$$\sigma_{ij} = \mu (\partial_i v_j + \partial_j v_i) + \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \delta_{ij}, \quad (5.3)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker,  $\mu$  es la viscosidad dinámica y  $k$  es la conductividad térmica. Finalmente las componentes  $x$  e  $y$  del vector de flujos viscosos compresibles en 2D se puede desarrollar como

$$F_x^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \mu \partial_x v_x - \frac{2}{3} \mu \partial_y v_y \\ \mu \partial_y v_x + \mu \partial_x v_y \\ \frac{4}{3} \mu v_x \partial_x v_x - \frac{2}{3} \mu v_x \partial_y v_y + \mu v_y \partial_y v_x + \mu v_y \partial_x v_y + k \partial_x T \end{pmatrix},$$

$$F_y^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \partial_x v_y + \mu \partial_y v_x \\ \frac{4}{3} \mu \partial_y v_y - \frac{2}{3} \mu \partial_x v_x \\ \frac{4}{3} \mu v_y \partial_y v_y - \frac{2}{3} \mu v_y \partial_x v_x + \mu v_x \partial_x v_y + \mu v_x \partial_y v_x + k \partial_y T \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Por último, el sistema de ecuaciones (5.1) debe ser completado por una ecuación de estado que define las propiedades termodinámicas del fluido (4.8). La viscosidad dinámica y la conductividad térmica se obtienen de relaciones empíricas. En el caso de la viscosidad dinámica se emplea la ley de Sutherland [105],

$$\mu = \frac{\mu_1 T^{3/2}}{T + \mu_2}. \quad (5.5)$$

En el caso de la conductividad usando la fórmula de Eucken [34] se tiene que

$$k = \frac{C_p \mu}{Pr}, \quad (5.6)$$

donde  $C_p$  es el calor específico a presión constante y el número de Prandtl  $Pr$  tiene un valor de 0,72.

## 5.2. Ecuaciones linealizadas de Navier-Stokes en régimen estacionario

Una vez planteadas las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma conservativa es posible estudiar la estabilidad de la solución con respecto a pequeñas perturbaciones. Tal y como se vio en el caso de las ecuaciones de Euler, en los problemas de diseño óptimo de forma son posibles dos tipos de perturbaciones sobre las condiciones iniciales: perturbaciones de valor  $\delta U$  en las variables del flujo  $U$  y perturbaciones de valor  $\delta S$  de la forma del contorno de pared sólida  $S$  en la dirección normal a la superficie  $\vec{n}_S$  (apuntando hacia el exterior del dominio)

$$\begin{aligned} \delta U &= U' - U_0, \quad \partial_t U' + \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(U') = 0, \\ \delta S &= S' - S_0, \quad S' = \{\vec{x} + \delta S \vec{n}_S(\vec{x}), \vec{x} \in S\}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde es importante destacar que, al tratarse de las ecuaciones de Navier-Stokes, no se contemplará la existencia de discontinuidades físicas en la solución del fluido. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que, en ciertas circunstancias físicas, la relación entre términos convectivos y viscosos puede ser tan alta que a nivel discreto sí podamos hablar de discontinuidades en la solución numérica del problema.

**Notación 34.** Antes de definir las ecuaciones linealizadas de Navier-Stokes es conveniente introducir la siguiente notación (ver [41]) para las derivadas calculadas alrededor de una solución regular  $U(x, y)$ :

$$\begin{aligned} A_x &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial U} \Big|_{U(x,y)}, \quad A_y \equiv \frac{\partial F_y}{\partial U} \Big|_{U(x,y)}, \quad A_x^v \equiv \frac{\partial F_x^v}{\partial U} \Big|_{U(x,y)}, \quad A_y^v \equiv \frac{\partial F_y^v}{\partial U} \Big|_{U(x,y)}, \\ D_{xx} &\equiv \frac{\partial F_x^v}{\partial (\partial_x U)} \Big|_{U(x,y)}, \quad D_{xy} \equiv \frac{\partial F_x^v}{\partial (\partial_y U)} \Big|_{U(x,y)}, \\ D_{yx} &\equiv \frac{\partial F_y^v}{\partial (\partial_x U)} \Big|_{U(x,y)}, \quad D_{yy} \equiv \frac{\partial F_y^v}{\partial (\partial_y U)} \Big|_{U(x,y)}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones linealizadas de Navier-Stokes en régimen estacionario, aplicadas a un dominio  $\Omega$  delimitado por contornos disconexos  $S$ , superficie sólida, y  $\Gamma_\infty$ , campo lejano, son

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \left( (\vec{A} - \vec{A}^v) \delta U \right) - \partial_x (D_{xx} \partial_x (\delta U) + D_{xy} \partial_y (\delta U)) \\ \quad - \partial_y (D_{yx} \partial_x (\delta U) + D_{yy} \partial_y (\delta U)) = 0, & \text{en } \Omega \\ \delta \vec{v} = -\delta S \partial_n \vec{v}, & \text{sobre } S \\ \partial_n (\delta T) = -\delta S \partial_n (\partial_n T) + \partial_{tg} (\delta S) \partial_{tg} T, & \text{sobre } S, \end{cases} \quad (5.8)$$

donde en el campo lejano  $\Gamma_\infty$ , las condiciones de contorno se imponen de manera análoga al caso de las ecuaciones de Euler linealizadas. Recordemos que  $\vec{n}_S$  es un vector unitario normal a la superficie sólida  $S$  (apuntando hacia el exterior del dominio  $\Omega$ ) y  $\vec{t}_S$

es el vector resultado de girar  $\pi/2$  en sentido antihorario el vector  $\vec{n}_s$ . Finalmente, las variables conservativas linealizadas son  $(\delta U) = (\delta\rho, \delta(\rho u), \delta(\rho v), \delta(\rho E))^T$ .

A continuación se desarrollarán las matrices de la ecuación (5.8), introducidas en la Notación 34. Comenzamos por las matrices jacobianas para los flujos convectivos  $\vec{A} = (A_x, A_y)$

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}v_x^2 + \frac{\gamma-1}{2}v_y^2 & (3-\gamma)v_x & -(\gamma-1)v_y & \gamma-1 \\ -v_x v_y & v_y & v_x & 0 \\ -\gamma v_x E + (\gamma-1)v_x |\vec{v}|^2 & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(v_y^2 + 3v_x^2) & -(\gamma-1)v_x v_y & \gamma v_x \end{pmatrix},$$

$$A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_x v_y & v_y & v_x & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}v_y^2 + \frac{\gamma-1}{2}v_x^2 & -(\gamma-1)v_x & (3-\gamma)v_y & \gamma-1 \\ -\gamma v_y E + (\gamma-1)v_y |\vec{v}|^2 & -(\gamma-1)v_x v_y & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(v_x^2 + 3v_y^2) & \gamma v_y \end{pmatrix}.$$

**Notación 35.** Con objeto de simplificar las matrices resultantes, en adelante, emplearemos la siguiente notación

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \mu (\partial_i v_j + \partial_j v_i) - \frac{2}{3} \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \delta_{ij}, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu} \\ \sigma^* &= \frac{u}{\rho} \sigma_{xx} + \frac{v}{\rho} \sigma_{xy}, \quad \sigma^{**} = \frac{u}{\rho} \sigma_{yx} + \frac{v}{\rho} \sigma_{yy}, \\ \hat{\sigma}^* &= u \hat{\sigma}_{xx} + v \hat{\sigma}_{xy}, \quad \hat{\sigma}^{**} = u \hat{\sigma}_{yx} + v \hat{\sigma}_{yy}, \\ \vartheta &= \frac{\gamma}{(\gamma-1)Pr}. \end{aligned}$$

Las matrices jacobianas que provienen de términos viscosos  $A^v = (A_x^v, A_y^v)$  se pueden expresar de la siguiente manera

$$A_x^v \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sigma^* + \frac{\gamma\mu}{Pr} \left( \frac{|\vec{v}|^2}{2} \partial_x \left( \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{(\gamma-1)} \partial_x \left( \frac{P}{\rho^2} \right) \right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \sigma_{xx} - \frac{\gamma\mu u}{Pr} \partial_x \left( \frac{1}{\rho} \right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \sigma_{xy} - \frac{\gamma\mu v}{Pr} \partial_x \left( \frac{1}{\rho} \right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma\mu}{Pr} \partial_x \left( \frac{1}{\rho} \right) \end{pmatrix}^T,$$

$$A_y^v \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sigma^{**} + \frac{\gamma\mu}{Pr} \left( \frac{|\vec{v}|^2}{2} \partial_y \left( \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{(\gamma-1)} \partial_y \left( \frac{P}{\rho^2} \right) \right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \sigma_{yx} - \frac{\gamma\mu u}{Pr} \partial_y \left( \frac{1}{\rho} \right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \sigma_{yy} - \frac{\gamma\mu v}{Pr} \partial_y \left( \frac{1}{\rho} \right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma\mu}{Pr} \partial_y \left( \frac{1}{\rho} \right) \end{pmatrix}^T,$$

donde se ha estimado que la variación de la viscosidad  $\mu$  con respecto de la densidad  $\rho$  y la presión  $P$  es despreciable. En el caso de las derivadas cruzadas de los flujos viscosos  $D_{xx}$ ,  $D_{xy}$ ,  $D_{yx}$  y  $D_{yy}$  tendremos que

$$D_{xx} = \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}v_x & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{(\gamma-1)Pr} \left( \frac{(\gamma-1)|\vec{v}|^2}{2} - \frac{P}{\rho} \right) - v_y^2 - \frac{4}{3}v_x^2 & \frac{4}{3}v_x - \frac{\gamma u}{Pr} & v_y - \frac{\gamma v_y}{Pr} & \frac{\gamma}{Pr} \end{pmatrix},$$

$$D_{xy} = \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}v_y & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -v_x & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}v_xv_y & v_y & -\frac{2}{3}v_x & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{yx} = \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3}v_x & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}uv_y & -\frac{2}{3}v_y & v_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{yy} = \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_x & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}v_y & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{\gamma}{(\gamma-1)Pr} \left( \frac{(\gamma-1)|\vec{v}|^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right) - v_x^2 - \frac{4}{3}v_y^2 & u - \frac{\gamma u}{Pr} & \frac{4}{3}v_y - \frac{\gamma v_y}{Pr} & \frac{\gamma}{Pr} \end{pmatrix}.$$

Las condiciones de contorno sobre las variables linealizadas se impondrán de manera fuerte sobre el contorno sólido, esto es, imponiendo directamente  $\delta\vec{v}|_S = -\delta S\partial_n\vec{v}$ . Por otro lado, la condición sobre la proyección normal de la temperatura linealizada  $\partial_n(\delta T)|_S = \vec{n}_S \cdot \vec{\nabla}(\delta T)|_S = -\delta S\partial_n(\vec{\nabla}T) \cdot \vec{n}_S + \partial_{tg}(\delta S)(\vec{\nabla}T) \cdot \vec{t}_S$  se impondrá de manera débil, es decir, a través de los flujos viscosos que entran/salen de la pared sólida  $S$ . Finalmente, en el campo lejano, se asumirá que no hay efectos viscosos y el modo de imponer las condiciones de contorno es idéntico al desarrollado en el caso de la resolución de las ecuaciones de Euler.

### 5.3. Análisis de la sensibilidad: el enfoque continuo

Las ecuaciones adjuntas de las ecuaciones de Navier-Stokes compresible, se plantean asociadas al problema de optimización (4.1). En este problema se pretende minimizar el siguiente funcional  $J$  (ver Figura 4.1)

$$J(S) = \int_S j(U) ds, \quad (5.9)$$

donde  $U$  es la solución del problema de Navier-Stokes compresible ya definido en (5.1). En definitiva, el objetivo es evaluar la variación del funcional  $J$  en (5.9), que depende de la variación  $\delta S$  de la geometría  $S$  y de la propia variación  $\delta U$  de las variables de flujo  $U$ . Finalmente, la variación  $\delta J$  se calcula de la siguiente manera

$$\delta J = \int_{\delta S} j(U) ds + \int_S j'(U)\delta U ds. \quad (5.10)$$

Tal y como se estudió en el caso de las ecuaciones de Euler, mediante la resolución de las ecuaciones linealizadas de Navier-Stokes (5.8), es posible el cálculo de la variación de las variables conservativas  $\delta U$  al variar la superficie  $S$ . Sin embargo, como ya se ha visto, este procedimiento es muy costoso computacionalmente, pues para cada variación  $\delta S$  de la superficie  $S$  es necesaria la resolución de una ecuación linealizada de Navier-Stokes. A continuación introduciremos la formulación adjunta con objeto de eliminar la dependencia de  $\delta U$  en la expresión para la variación del funcional  $J$  de la ecuación (5.10).

El primer paso de este procedimiento consiste en multiplicar las ecuaciones linealizadas de Navier-Stokes por el vector de variables adjuntas  $\Psi$  e integrar sobre el dominio

Ω. Finalmente, tras simplificar las expresiones resultantes, se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \Psi^T \vec{\nabla} \cdot \left( (\vec{A} - \vec{A}^v) \delta U \right) d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \Psi^T \vec{\nabla} \cdot (D_{xx} \partial_x (\delta U) + D_{xy} \partial_y (\delta U), D_{yx} \partial_x (\delta U) + D_{yy} \partial_y (\delta U)) d\Omega \\
 & = \int_{\delta\Omega} \Psi^T (\vec{A} - \vec{A}^v) \delta U dl - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \Psi^T \cdot (\vec{A} - \vec{A}^v) \delta U d\Omega \\
 & - \int_{\delta\Omega} \Psi^T (D_{xx} \partial_x (\delta U) + D_{xy} \partial_y (\delta U), D_{yx} \partial_x (\delta U) + D_{yy} \partial_y (\delta U)) ds \\
 & + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \Psi^T \cdot (D_{xx} \partial_x (\delta U) + D_{xy} \partial_y (\delta U), D_{yx} \partial_x (\delta U) + D_{yy} \partial_y (\delta U)) d\Omega. \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

La última integral de volumen de (5.11) se puede desarrollar como

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \vec{\nabla} \Psi^T \cdot (D_{xx} \partial_x (\delta U) + D_{xy} \partial_y (\delta U), D_{yx} \partial_x (\delta U) + D_{yy} \partial_y (\delta U)) d\Omega \\
 & = \int_{\Omega} \left( \partial_x \Psi^T D_{xx} + \partial_y \Psi^T D_{yx}, \partial_x \Psi^T D_{xy} + \partial_y \Psi^T D_{yy} \right) \cdot \vec{\nabla} (\delta U) d\Omega \\
 & = \int_{\delta\Omega} \left( \partial_x \Psi^T D_{xx} + \partial_y \Psi^T D_{yx}, \partial_x \Psi^T D_{xy} + \partial_y \Psi^T D_{yy} \right) \delta U ds \\
 & - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \left( \partial_x \Psi^T D_{xx} + \partial_y \Psi^T D_{yx}, \partial_x \Psi^T D_{xy} + \partial_y \Psi^T D_{yy} \right) \delta U d\Omega. \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

Finalmente, reagrupando y ordenando los términos adecuados de las expresiones (5.11) y (5.12) es posible escribir

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \int_{\Omega} \left( \vec{\nabla} \Psi^T \cdot (\vec{A} - \vec{A}^v) + \vec{\nabla} \cdot \left( \partial_x \Psi^T D_{xx} + \partial_y \Psi^T D_{yx}, \partial_x \Psi^T D_{xy} + \partial_y \Psi^T D_{yy} \right) \right) \delta U d\Omega \right] \\
 & + \int_{\delta\Omega} \Psi^T (\vec{A} - \vec{A}^v) \delta U ds + \int_{\delta\Omega} \left( \partial_x \Psi^T D_{xx} + \partial_y \Psi^T D_{yx}, \partial_x \Psi^T D_{xy} + \partial_y \Psi^T D_{yy} \right) \delta U ds \\
 & - \int_{\delta\Omega} \Psi^T (D_{xx} \partial_x (\delta U) + D_{xy} \partial_y (\delta U), D_{yx} \partial_x (\delta U) + D_{yy} \partial_y (\delta U)) ds = 0. \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

**Notación 36.** Con objeto de simplificar las expresiones resultantes, en adelante, emplearemos la siguiente notación

$$\begin{aligned}
 \vec{n} \cdot \Sigma \cdot \delta \vec{v} &= n_x \Sigma_{xx} \delta v_x + n_x \Sigma_{xy} \delta v_y + n_y \Sigma_{yx} \delta v_x + n_y \Sigma_{yy} \delta v_y, \\
 \Sigma_{ij} &= \mu (\partial_i \varphi_j + \partial_j \varphi_i) + \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}) \delta_{ij}.
 \end{aligned}$$

A continuación, se analizará término a término la ecuación (5.13) con objeto de simplificarla y obtener el sistema adjunto que permita el cálculo directo de la variación del funcional a estudio:

- El primer término de la ecuación (5.13) corresponde con una integral sobre todo el dominio Ω. Con objeto de que el valor de esta integral sea nulo se obtiene la ecuación adjunta:

$$- \left[ (\vec{A} - \vec{A}^v)^T \cdot \vec{\nabla} \Psi + \vec{\nabla} \cdot \left( D_{xx}^T \partial_x \Psi + D_{yx}^T \partial_y \Psi, D_{xy}^T \partial_x \Psi + D_{yy}^T \partial_y \Psi \right) \right] = 0. \quad (5.14)$$

- En los términos (5.13) definidos sobre el contorno δΩ es necesario distinguir entre el contorno lejano Γ<sub>∞</sub> y el contorno de pared sólida S. Aquellos relacionados con

el contorno lejano se pueden eliminar con las condiciones de contorno apropiadas como se vio en el caso de las ecuaciones de Euler. Por otro lado, en el caso de pared sólida, tras sustituir las matrices por sus valores y simplificar, se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} & \int_S (k\partial_n\psi_4\delta T - k\psi_4\partial_n(\delta T)) ds + \int_S (\vec{n} \cdot \vec{\varphi}\delta P - \vec{n} \cdot \delta\sigma \cdot \vec{\varphi}) ds \\ & + \int_S (\vec{n} \cdot \delta\vec{v}(\rho\psi_1 + \rho H\psi_4) - \psi_4\vec{n} \cdot \sigma \cdot \delta\vec{v} + \vec{n} \cdot \Sigma \cdot \delta\vec{v}) ds = 0, \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde se han impuesto las condiciones de velocidad nula sobre la superficie.

A continuación se le resta a la variación de la función objetivo (5.10) la ecuación (5.15), para tener

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{\delta S} j(U) ds + \int_S j'(U)\delta U ds \\ &- \int_S (k\partial_n\psi_4\delta T - k\psi_4\partial_n(\delta T)) ds - \int_S (\vec{n} \cdot \vec{\varphi}\delta P - \vec{n} \cdot \delta\sigma \cdot \vec{\varphi}) ds \\ &- \int_S (\vec{n} \cdot \delta\vec{v}(\rho\psi_1 + \rho H\psi_4) - \psi_4\vec{n} \cdot \sigma \cdot \delta\vec{v} + \vec{n} \cdot \Sigma \cdot \delta\vec{v}) ds = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

### 5.3.1. Formulación con pared adiabática (condiciones de contorno)

A partir de la expresión (5.16) es posible determinar una clase de funciones objetivo  $J$  que son admisibles pues su empleo permite la eliminación directa de las variables linealizadas  $\delta U$ . En concreto, son admisibles funcionales lineales de la forma  $j = j(\vec{f}, T)$ , donde  $\vec{f} = P\vec{n} - \vec{n} \cdot \sigma$ . En este caso, las condiciones de contorno a imponer sobre la pared sólida serían

$$\begin{cases} \vec{\varphi} = \frac{\partial j}{\partial \vec{f}}, & \text{sobre } S \\ k\partial_n\psi_4 = \partial_T j, & \text{sobre } S \end{cases} \quad (5.17)$$

donde  $\varphi = (\psi_2, \psi_3)$  y  $\partial_T$  es la derivada parcial con respecto de la temperatura. Por último, la variación del funcional  $J$  se calcula como

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_S [\partial_n j(\vec{f}, T) - \kappa j(\vec{f}, T)] \delta S ds \\ &- \int_S (\vec{n} \cdot \delta\vec{v}(\rho\psi_1 + \rho H\psi_4) - \psi_4\vec{n} \cdot \sigma \cdot \delta\vec{v} + \vec{n} \cdot \Sigma \cdot \delta\vec{v} - k\psi_4\partial_n(\delta T)) ds, \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde las variaciones sobre la superficie de  $\delta\vec{v}$  y  $\partial_n(\delta T)$  se calculan en (5.8). Sustituyendo el valor de las variables linealizadas, finalmente se tiene que,

$$\begin{aligned} \delta J &= \delta \int_S j(\vec{f}, T) dS = \int_S [\partial_n j(P\vec{n} - \vec{n} \cdot \sigma, T) - \kappa j(P\vec{n} - \vec{n} \cdot \sigma, T)] \delta S ds \\ &+ \int_S (\vec{n} \cdot \partial_n \vec{v}(\rho\psi_1 + \rho H\psi_4) - \psi_4\vec{n} \cdot \sigma \cdot \partial_n \vec{v} + \vec{n} \cdot \Sigma \cdot \partial_n \vec{v}) \delta S ds \\ &+ \int_S k\psi_4(\partial_{tg}(\delta S) \partial_{tg} T - \delta S \partial_n(\partial_n T)) ds, \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde aparecen dos términos  $\int_S \partial_n(\vec{n} \cdot \sigma) \delta S ds$  y  $\int_S k\psi_4 \delta S \partial_n(\partial_n T) ds$  que involucran derivadas de segundo orden. En una aplicación práctica esto requeriría esquemas numéricos de alto orden. Como solución a este problema, en la siguiente Sección se detalla el análisis necesario para evitar el tener que evaluar estas segundas derivadas.

### 5.3.2. Reducción de las derivadas de alto orden

Al analizar el problema de diseño de forma gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes e introducir el efecto de la variación del contorno sobre la integral, se obtiene que la variación del funcional a minimizar se puede evaluar a través de (5.19). Pese a que todos los términos son conocidos y en teoría evaluables, algunos de ellos involucran derivadas segundas de las variables conservativas y los métodos numéricos típicamente empleados son, en el mejor de los casos, de segundo orden, por lo que es inasumible el error numérico cometido en la evaluación de los términos:

$$\int_S \partial_n(\vec{n} \cdot \sigma) \delta S ds \text{ y } \int_S k\psi_4 \delta S \partial_n (\partial_n T) ds. \quad (5.20)$$

A continuación, mediante un cambio de sistema de coordenadas y el empleo de las ecuaciones de Navier-Stokes sobre el contorno, se desarrollarán expresiones que permitirán evaluar los términos requeridos, sin el empleo de segundas derivadas.

#### Término dependiente de la temperatura

Para evitar el cálculo de la segunda derivada en la expresión

$$\delta J = \dots + \int_S k\psi_4 \partial_{t_g} (\delta S) \partial_{t_g} T ds - \int_S k\psi_4 \delta S \partial_n (\partial_n T) ds, \quad (5.21)$$

se recurre a evaluar las ecuaciones de Navier-Stokes sobre el contorno. Se tiene que

$$\vec{\nabla}(k\vec{\nabla}T) = k\partial_n^2 T + k\partial_{t_g}^2 T = -\sigma : \vec{\nabla}\vec{v}, \quad (5.22)$$

por lo que la expresión (5.21) queda como

$$\delta J = \dots + \int_S k\psi_4 \partial_{t_g} (\delta S) \partial_{t_g} T ds \quad (5.23)$$

$$+ \int_S k\psi_4 (\sigma : \vec{\nabla}\vec{v}) \delta S ds + \int_S k\psi_4 \delta S \partial_{t_g} (\partial_{t_g} T) ds. \quad (5.24)$$

Integrando por partes para eliminar la segunda derivada tangencial del segundo término obtenemos

$$\delta J = \dots + \int_S k\psi_4 (\sigma : \vec{\nabla}\vec{v}) \delta S ds + \int_S k\psi_4 \partial_{t_g} (\delta S \partial_{t_g} T) ds, \quad (5.25)$$

y, volviendo a integrar por partes, finalmente tenemos que

$$\delta J = \dots + \int_S k\psi_4 (\sigma : \vec{\nabla}\vec{v}) \delta S ds - \int_S k(\partial_{t_g} \psi_4)(\partial_{t_g} T) \delta S ds. \quad (5.26)$$

#### Término dependiente del tensor viscoso

Sea  $\vec{r}_s(\eta)$  la parametrización longitud de arco de la curva  $S$ . Llamaremos  $\vec{t}(\eta)$  al vector tangente y  $\vec{n}(\eta)$  al vector normal unitario que se obtiene al girar  $\vec{t}(\eta)$  un ángulo  $\pi/2$  en sentido antihorario. Se introduce el sistema de coordenadas locales  $(\eta, \theta)$  que describe  $\mathbb{R}^2$  de la siguiente forma

$$\vec{r}(\eta, \theta) = \vec{r}_s(\eta) + \theta \vec{n}(\eta), \quad (5.27)$$

donde la curva  $S$  está descrita por  $\theta = 0$ . La base local asociada a este sistema de coordenadas es

$$\vec{g}_\eta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \frac{d\vec{r}_s(\eta)}{d\eta} + \theta \frac{d\vec{n}(\eta)}{d\eta} = (1 + \theta\kappa(\eta))\vec{t}(\eta), \quad \vec{g}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \vec{n}(\eta), \quad (5.28)$$

donde  $\kappa(\eta)$  es la curvatura, cuyo signo depende de si  $S$  se curva en el sentido de  $\vec{n}(\eta)$  (signo -) o en el contrario (signo +). Los factores de escala se calculan como

$$h_1 = |\vec{g}_\eta| = (1 + \theta\kappa(\eta)), \quad h_2 = |\vec{g}_\theta| = 1, \quad (5.29)$$

Usando la base local (5.28) el tensor newtoniano se puede escribir como

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}_x \\ \vec{\sigma}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( \vec{\sigma}_x \cdot \frac{\vec{g}_\eta}{|\vec{g}_\eta|} \right) \vec{\eta} + \left( \vec{\sigma}_x \cdot \frac{\vec{g}_\theta}{|\vec{g}_\theta|} \right) \vec{\theta} \\ \left( \vec{\sigma}_y \cdot \frac{\vec{g}_\eta}{|\vec{g}_\eta|} \right) \vec{\eta} + \left( \vec{\sigma}_y \cdot \frac{\vec{g}_\theta}{|\vec{g}_\theta|} \right) \vec{\theta} \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

La divergencia en coordenadas locales de  $\vec{\sigma}_x$  se calcula como

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_x &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h_2 \sigma_{xx}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (h_1 \sigma_{xy}) \right] \\ &= \frac{1}{(1 + \theta\kappa(\eta))} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\vec{\sigma}_x \cdot \vec{g}_\eta}{|\vec{g}_\eta|} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (1 + \theta\kappa(\eta)) \frac{\vec{\sigma}_x \cdot \vec{g}_\theta}{|\vec{g}_\theta|} \right) \right] \\ &= \frac{1}{(1 + \theta\kappa(\eta))} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\vec{\sigma}_x \cdot \vec{g}_\eta}{(1 + \theta\kappa(\eta))} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} ((1 + \theta\kappa(\eta)) (\vec{\sigma}_x \cdot \vec{g}_\theta)) \right] \\ &= \frac{1}{(1 + \theta\kappa(\eta))} \left( \frac{\partial_\eta (\vec{\sigma}_x \cdot \vec{g}_\eta)}{1 + \theta\kappa(\eta)} - (\vec{\sigma}_x \cdot \vec{g}_\eta) \frac{\theta\kappa'(\eta)}{(1 + \theta\kappa(\eta))^2} \right) + \\ &\quad \frac{1}{(1 + \theta\kappa(\eta))} (\kappa(\eta) (\vec{\sigma}_x \cdot \vec{g}_\theta) + (1 + \theta\kappa(\eta)) \partial_\theta (\vec{\sigma}_x \cdot \vec{g}_\theta)), \end{aligned} \quad (5.31)$$

donde, evaluando sobre la curva ( $\theta = 0, \vec{g}_\theta = \vec{n}, \vec{g}_\eta = \vec{t}$ ), tendremos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_x = \partial_{t_g} (\vec{\sigma}_x \cdot \vec{t}) + \kappa (\vec{\sigma}_x \cdot \vec{n}) + \partial_n (\vec{\sigma}_x \cdot \vec{n}). \quad (5.32)$$

Análogamente, la divergencia en coordenadas locales de  $\vec{\sigma}_y$  se calcula como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_y = \partial_{t_g} (\vec{\sigma}_y \cdot \vec{t}) + \kappa (\vec{\sigma}_y \cdot \vec{n}) + \partial_n (\vec{\sigma}_y \cdot \vec{n}). \quad (5.33)$$

Finalmente, combinando la ecuación (5.32) y (5.33) tenemos

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma}_x + \vec{\sigma}_y) - \partial_{t_g} (\vec{\sigma} \cdot \vec{t}) - \kappa (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) = \partial_n (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}), \quad (5.34)$$

donde, esta expresión es multiplicada por  $\delta S$  e integrada sobre la superficie para tener

$$\int_S \partial_n (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \delta S ds = \int_S \left[ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma}_x + \vec{\sigma}_y) - \partial_{t_g} (\vec{\sigma} \cdot \vec{t}) - \kappa (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \right] \delta S ds. \quad (5.35)$$

A continuación, se emplean las ecuaciones de Navier-Stokes sobre la superficie evaluadas sobre la superficie.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_x = \partial_x P \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_y = \partial_y P. \end{cases} \quad (5.36)$$

Sustituyendo (5.36) en (5.35) e integrando por partes finalmente tendremos

$$\begin{aligned}
 & \int_S \partial_n(\vec{n} \cdot \sigma) \delta S \, ds \\
 &= \int_S [\vec{\nabla} P - \kappa(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})] \delta S \, ds - \int_S \partial_{t_g}(\vec{\sigma} \cdot \vec{t}) \delta S \, ds \\
 &= \int_S [\vec{\nabla} P - \kappa(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})] \delta S \, ds + \int_S \vec{\sigma} \cdot \vec{t} \partial_{t_g}(\delta S) \, ds. \tag{5.37}
 \end{aligned}$$

Y de esta manera evitamos el tener que calcular derivadas de segundo orden para la evaluación del gradiente del funcional en sistemas gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes.

## Capítulo 6

---

# Resolución numérica de las ecuaciones adjuntas 2D de Euler y Navier-Stokes

---

Este capítulo tiene por objeto presentar la resolución numérica de las ecuaciones adjuntas (enfoque continuo) de Navier-Stokes mediante el empleo de una técnica de volúmenes finitos: En primer lugar se caracterizará el modo en que discretizaremos el dominio físico. Más adelante, se comentará la discretización numérica empleada en los términos convectivos para continuar con los términos viscosos y terminar con la discretización temporal. Por último se describirá la técnica del filtrado bimalla.

### 6.1. Discretización del dominio físico

Supongamos un dominio físico  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Con objeto de resolver de manera discreta una ecuación en derivadas parciales definida sobre ese dominio es necesario descomponer  $\Omega$  de la siguiente manera

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau_h} K, \quad (6.1)$$

donde:

- cada  $K$  es un triángulo con interior no vacío  $\mathring{K} \neq \emptyset$ ,
- $\mathring{K}_1 \cap \mathring{K}_2 = \emptyset$  para cada  $K_1, K_2 \in \tau_h$ ,
- si  $F = K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$  ( $K_1$  y  $K_2$  son elementos distintos de  $\tau_h$ ) entonces  $F$  es lado de  $K_1$  y  $K_2$ ,
- $\text{diam}(K) \leq h$  para cada  $K \in \tau_h$ ,

la familia de triángulos  $\tau_h$  se denomina triangulación de  $\overline{\Omega}$ . Sobre esta triangulación del dominio físico, los métodos de volúmenes finitos definen un volumen de control dual sobre el que se discretizarán las ecuaciones adjuntas.

A continuación se describirá el modo en el que se construyen los volúmenes de control: consideremos el grafo plano  $G$  compuesto por los vértices y aristas de la triangulación  $\tau_h$ . Sobre este grafo definiremos el grafo dual  $G_{dual}$  como cualquier grafo que cumpla las siguientes propiedades:

- Cada vértice de  $G_{dual}$  está asociado con una cara de  $G$ .
- Cada arista de  $G$  está asociado con una arista de  $G_{dual}$ .
- Si una arista separa dos caras,  $f_i$  y  $f_j$  de  $G$ , entonces la arista dual asociada conecta dos vértices de  $G_{dual}$  asociados con  $f_i$  y  $f_j$ .

En la Figura 6.1 (izquierda) se presentan diferentes métodos para la generación de las mallas duales, la más usual en MFC es la formada por segmentos de mediana y segmentos de centroide.

Este tipo de esquemas numéricos que usan las mallas duales construidas a partir de, por ejemplo, los segmentos de mediana, se denominan esquemas centrados en los vértices [9], pues el valor de las variables se calculará en los vértices de la malla no estructurada. En la Figura 6.1 puede observarse una típica triangulación no estructurada (en rojo) junto con la malla dual (en azul) sobre la que se resolverán las EDPs.

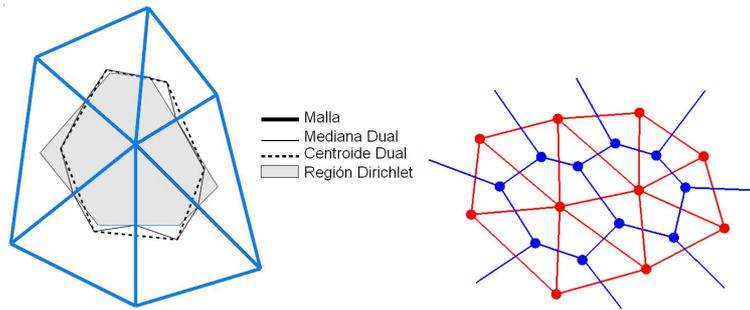


Figura 6.1: Grafos duales (izq.). Triangulación en rojo y volúmenes de control asociados en azul (der.).

## 6.2. Discretización espacial de las ecuaciones adjuntas de Euler

Al emplear el enfoque adjunto continuo disponemos de libertad para seleccionar aquel método numérico cuyas características se ajusten mejor al problema planteado. A lo largo de esta sección se discutirán diferentes métodos para la resolución de las ecuaciones adjuntas en régimen estacionario (4.62) con las condiciones de contorno expresadas en (4.75). Una estrategia habitual para la resolución de estas ecuaciones es la llamada *time marching* mediante la cual añadimos un tiempo ficticio  $t$  al sistema de ecuaciones de la siguiente manera

$$\begin{cases} \partial_t \Psi - \vec{A}^T \cdot \vec{\nabla} \Psi = 0, & \text{en } Q^- \cup Q^+, t > 0 \\ \vec{\varphi} \cdot \vec{n}_S = j'(P), & \text{sobre } S, \\ (W^*)^T \wedge \delta W = 0, & \text{sobre } \Gamma_\infty, \end{cases} \quad (6.2)$$

donde  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$  son las variables adjuntas. Denotando  $\vec{\varphi} = (\psi_2, \psi_3)$ , la matriz jacobiana de flujos se expresa como  $A = \partial_U \vec{F}$  y  $\vec{n}_S$  es un vector normal unitario apuntando hacia el exterior. Respecto de las condiciones en el campo lejano,  $W^*$  son las variables características adjuntas,  $\Lambda$  son los autovalores de la matriz jacobiana  $\vec{A}$  proyectada según la normal exterior al campo lejano, y  $W$  son las variables características del problema de Euler.

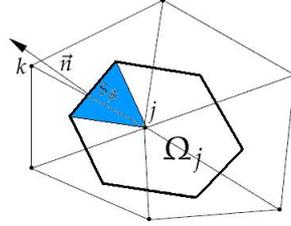


Figura 6.2: Triangularización alrededor del nodo  $j$  y volumen de control  $\Omega_j$  asociado.

A continuación, planteamos la formulación integral de las ecuaciones adjuntas de Euler (6.2) sobre un volumen de control  $\Omega_j$  que rodea a un nodo  $j$  (ver Figura 6.2).

$$|\Omega_j| \frac{d\Psi_j}{dt} - \vec{A}_j^T \int_{\Gamma_j} \Psi \vec{n} dS = |\Omega_j| \frac{d\Psi_j}{dt} - \vec{A}_j^T \sum_{k=1}^{m_j} \Psi_{jk} \vec{n}_{jk} S_{jk} = 0, \quad (6.3)$$

donde  $|\Omega_j|$  es el área del volumen de control,  $\Psi_j$  es la media volumétrica de  $\Psi$  en el nodo  $j$ ,  $\Psi_{jk}$  es un valor promediado entre el nodo  $j$  y el nodo  $k$ , el vector  $\vec{n}$  es la normal exterior al volumen de control,  $m_j$  es el número de vecinos al nodo  $j$  y la superficie  $S_{jk}$  y el vector  $\vec{n}_{jk}$  son respectivamente la dimensión de la cara y el vector normal unitario exterior al volumen de control que es atravesado por la arista  $jk$ .

Por otro lado, la derivada temporal  $d\Psi_j/dt$  en la discretización (6.3) se aproximará mediante un esquema de primer orden en tiempo,

$$\Psi_j^{n+1} = \Psi_j^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \vec{A}_j^T \cdot \sum_{k=1}^{m_j} \Psi_{jk}^n \vec{n}_{jk} S_{jk} = 0, \quad (6.4)$$

donde  $\Delta t$  es el paso de tiempo que deberá ser compatible con la condición de CFL en esquemas explícitos y  $n$  representa el paso de iteración temporal.

### 6.2.1. Esquema centrado tipo Lax-Friedrichs

El esquema de Lax-Friedrichs es el más elemental de los denominados centrados, y se trata de una discretización de primer orden en espacio y tiempo. La idea básica de este esquema es estabilizar el esquema inestable centrado explícito tomando como valor de la variable en  $\Psi$  en el paso de tiempo  $n$  como un promedio de su valor en la celdilla dual, es decir:

$$\Psi_j^n = \frac{1}{m_j} \sum_{k=1}^{m_j} \Psi_k^n, \quad (6.5)$$

donde  $k$  es un índice que recorre todos los vecinos del nodo  $j$  y  $m_j$  es el número de vecinos del nodo  $j$  (nodos unidos por una arista). Por otro lado, el flujo en la cara que

separa dos nodos  $j$  y  $k$  se calculará como el promedio de los flujos

$$\Psi_j^{n+1} = \frac{1}{m_j} \sum_{k=1}^{m_j} \Psi_k^n - \frac{\Delta t}{|\Omega_j|} \vec{A}_j^T \cdot \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\Psi_j^n + \Psi_k^n}{2} \cdot \vec{n} S_{jk} = 0. \quad (6.6)$$

El esquema de Lax-Friedrichs tiene un error de truncación proporcional a la segunda derivada que actúa como una viscosidad numérica añadida, amortigua las altas frecuencias y alisa, en exceso, los fuertes gradientes. A continuación se desarrollarán dos métodos que mejoran este aspecto: esquema centrado con disipación de alto orden y esquema de tipo *upwind*.

### 6.2.2. Esquema centrado con disipación artificial de alto orden

En este esquema centrado el flujo convectivo a través de la cara del volumen de control que separa los vértices  $j$  y  $k$  se calcula como

$$f_{jk} = \vec{A}_j^T \cdot \left( \frac{\Psi_j + \Psi_k}{2} \right) \cdot \vec{n} + d_{jk}, \quad (6.7)$$

donde  $d_{jk}$  denota la disipación artificial. Se elegirá como disipación artificial un término proporcional a diferencias de cuarto orden de las variables, lo que corresponde a una diferencia de tercer orden para los flujos. La expresión para esta disipación artificial es

$$d_{jk} = \epsilon_{jk}^{(4)} \left( \vec{\nabla}^2 \Psi_j - \vec{\nabla}^2 \Psi_k \right) \Phi_{jk} \lambda_{jk}, \quad (6.8)$$

donde  $\epsilon_{jk}^{(4)}$  es una constante calibrada por el usuario y

$$\nabla^2 \Psi_j = -m_j \Psi_j + \sum_{k=1}^{m_j} \Psi_k, \quad \lambda_{jk} = \left( |\vec{u}_{jk} \cdot \vec{n}_{jk}| + c_{jk} \right) S_{jk}, \quad (6.9)$$

donde  $u_{jk} = (u_j + u_k)/2$  y  $c_{jk} = (c_j + c_k)/2$  denotan la velocidad del fluido y la velocidad del sonido en la cara de la celdilla. El factor  $\Phi_{jk}$  se introduce para tener en cuenta el estiramiento de las celdillas y se define como  $\Phi_{jk} = 4\Phi_j\Phi_k / (\Phi_j + \Phi_k)$  donde  $\Phi_j = 0,25\lambda_j/\lambda_{jk}$ .

### 6.2.3. Esquema de tipo *upwind*

El desarrollo de un esquema *upwind* [4] para la resolución de las ecuaciones adjuntas de Euler en 2D es de especial interés. Este esquema se basa en un análisis similar al realizado para la resolución de las ecuaciones de Euler donde, ahora, la información de las características viaja en la dirección opuesta al problema directo.

En la práctica, en problemas multidimensionales, se debe realizar un cambio de base de tal manera que en la nueva, a la que denominaremos  $L$ , un eje coordenado coincida con la arista que atraviesa la cara en la que deseamos calcular el flujo numérico.

El primer paso consiste en proyectar la matriz jacobiana transpuesta  $\vec{A}^T$  sobre la arista  $jk$ . De esta manera tenemos que  $A^T = \vec{A}^T \cdot \vec{n}$ , donde  $\vec{n}$  es un vector normal a la cara del volumen de control que separa los nodos  $j$  y  $k$  (en el sentido de  $j$  a  $k$ ). Una vez proyectada la matriz jacobiana sobre la arista resolveremos el problema como si se tratase de una única dimensión. Al finalizar el cálculo de flujos, desharemos el cambio de base.

Pretendemos la evaluación de un flujo numérico de la forma  $A^T\Psi$ , teniendo presente que  $A^T = (P^T)^{-1} \Lambda P^T$ , donde  $\Lambda$  es la matriz de autovalores de la matriz jacobiana y que  $P$  son las matrices de autovectores que diagonalizan la matriz jacobiana proyectada sobre la arista  $jk$ . De esta forma el esquema *upwind* se puede escribir como

$$\begin{aligned} f_{jk} &= \frac{1}{2} \left( A_j^T (\Psi_j + \Psi_k) - |A^T| (\Psi_k - \Psi_j) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( A_j^T (\Psi_j + \Psi_k) + (P^T)^{-1} |\Lambda| P^T \delta\Psi \right) = \frac{1}{2} \left( A_j^T (\Psi_j + \Psi_k) + f_{upwind} \right), \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde el subíndice indica de qué vértice se tomarán los valores. Por otro lado, la ausencia de subíndices indica que se debe tomar un valor promedio de las variables, es decir  $A = 0,5(A_j + A_k)$ . Finalmente tenemos que  $|A^T| = (P^T)^{-1} |\Lambda| P^T$ , y la matriz  $A^T$  se calcula como

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma-3}{2}v_x^2 + \frac{\gamma-1}{2}v_y^2 & -v_xv_y & -\gamma v_x E + (\gamma-1)v_x q^2 \\ 1 & (3-\gamma)v_x & v_y & \gamma E - \frac{\gamma-1}{2}(v_y^2 + 3v_x^2) \\ 0 & -(\gamma-1)v_y & v_x & -(\gamma-1)v_x v_y \\ 0 & \gamma-1 & 0 & (\gamma-1)v_x \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

**Notación 37.** A continuación, con objeto de evaluar el producto  $(P^T)^{-1} |\Lambda| P^T \delta\Psi$ , es conveniente introducir la siguiente notación

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\gamma-1}{2}M^2, \quad \beta = (\gamma-1)\frac{v_x}{c}, \quad \beta^* = (\gamma-1)\frac{v_y}{c}, \\ Q &= \Psi_1 + v_x\Psi_2 + v_y\Psi_3 + H\Psi_4, \quad \xi = c\Psi_2 + cv_x\Psi_4, \quad Q^* = Q - \frac{c^2}{\gamma-1}\Psi_4. \end{aligned}$$

**Proposición 38.** El valor del flujo  $f_{upwind}$  se calcula en coordenadas locales a la arista  $jk$  como

$$f_{upwind}|_L = \begin{cases} f_\rho|_L = ((1-\alpha)Q^* - v_y(\delta\Psi_3 + v_y\delta\Psi_4))|v_x| \\ \quad + 0,5(\alpha - v_x/c)(Q + \xi)|u + c| + 0,5(\alpha + v_x/c)(Q - \xi)|v_x - c|, \\ f_{\rho v_x}|_L = (\gamma-1)\frac{v_x}{c^2}Q^*|v_x| + \frac{1}{2c}(1-\beta)(Q + \xi)|v_x + c| \\ \quad - \frac{1}{2c}(1+\beta)(Q - \xi)|v_x - c|, \\ f_{\rho v_y}|_L = ((\gamma-1)\frac{v_y}{c^2}Q^* + (\delta\Psi_3 + v_y\delta\Psi_4))|v_x| \\ \quad - \frac{1}{2c}\beta^*(Q + \xi)|v_x + c| - \frac{1}{2c}\beta^*(Q - \xi)|v_x - c|, \\ f_{\rho E}|_L = -\frac{\gamma-1}{c^2}Q^*|v_x| + \frac{\gamma-1}{2c^2}(Q + \xi)|v_x + c| \\ \quad + \frac{\gamma-1}{2c^2}(Q - \xi)|v_x - c| \end{cases} \quad (6.12)$$

donde el subíndice  $L$  denota que este flujo está calculado sobre una base local a la arista  $jk$ .

*Demostración.* El primer paso consiste en proyectar las matrices  $P, P^{-1}$  sobre un vector  $\vec{n}$  unitario en la dirección de la arista  $jk$  y plantear la matriz diagonal  $\lambda$  construida a partir de los autovalores del problema directo de Euler

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\rho}{2c} & \frac{\rho}{2c} \\ v_x & 0 & \frac{\rho}{2c}(v_x + c) & \frac{\rho}{2c}(v_x - c) \\ v_y & -\rho & \frac{\rho}{2c}v_y & \frac{\rho}{2c}v_y \\ \frac{|\vec{v}|^2}{2} & -\rho v_y & \frac{\rho}{2c}(H + cv_x) & \frac{\rho}{2c}(H - cv_x) \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma-1}{2} M^2 & (\gamma-1) \frac{v_x}{c^2} & (\gamma-1) \frac{v_y}{c^2} & -\frac{\gamma-1}{c^2} \\ \frac{c}{\rho} \left( \frac{\gamma-1}{2} M^2 - \frac{v_x}{c} \right) & \frac{1}{\rho} (1 - (\gamma-1) \frac{v_x}{c}) & \frac{-1}{\rho} (\gamma-1) \frac{v_y}{c} & \frac{\gamma-1}{\rho c} \\ \frac{c}{\rho} \left( \frac{\gamma-1}{2} M^2 + \frac{v_x}{c} \right) & \frac{-1}{\rho} (1 + (\gamma-1) \frac{v_x}{c}) & \frac{-1}{\rho} (\gamma-1) \frac{v_y}{c} & \frac{\gamma-1}{\rho c} \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \vec{v} \cdot \vec{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{v} \cdot \vec{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{v} \cdot \vec{n} + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{v} \cdot \vec{n} - c \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

donde  $M$  es el número de Mach (cociente entre la velocidad del fluido y la velocidad del sonido). Usando la notación anterior, es posible evaluar los siguientes productos

$$\begin{aligned} & (P^T)^{-1} |\Lambda| P^T \delta \Psi \\ &= \begin{pmatrix} (1 - \alpha) |\vec{v} \cdot \vec{n}| & \frac{v}{\rho} |\vec{v} \cdot \vec{n}| & \frac{c}{\rho} (\alpha - \frac{v_x}{c}) |\vec{v} \cdot \vec{n} + c| & \frac{c}{\rho} (\alpha + \frac{v_x}{c}) |\vec{v} \cdot \vec{n} - c| \\ (\gamma-1) \frac{v_x}{c^2} |\vec{v} \cdot \vec{n}| & 0 & \frac{1}{\rho} (1 - \beta) |\vec{v} \cdot \vec{n} + c| & \frac{-1}{\rho} (1 + \beta) |\vec{v} \cdot \vec{n} - c| \\ (\gamma-1) \frac{v_y}{c^2} |\vec{v} \cdot \vec{n}| & \frac{-1}{\rho} |\vec{v} \cdot \vec{n}| & \frac{-\beta^*}{\rho} |\vec{v} \cdot \vec{n} + c| & \frac{-\beta^*}{\rho} |\vec{v} \cdot \vec{n} - c| \\ -\frac{\gamma-1}{c^2} |\vec{v} \cdot \vec{n}| & 0 & \frac{\gamma-1}{\rho c} |\vec{v} \cdot \vec{n} + c| & \frac{\gamma-1}{\rho c} |\vec{v} \cdot \vec{n} - c| \end{pmatrix} \\ & \cdot \begin{pmatrix} Q - \frac{c^2}{\gamma-1} \delta \Psi_4 \\ -\rho (\delta \Psi_3 + v \delta \Psi_4) \\ \frac{\rho}{2c} (Q + \xi) \\ \frac{\rho}{2c} (Q - \xi) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

de donde, de manera inmediata, es posible deducir la expresión (6.12).  $\square$

Por último, será necesario proyectar el flujo calculado en una base local a lo largo de la arista, a una base global del sistema

$$f|_G = \begin{pmatrix} f_{\rho}|_L \\ f_{\rho u}|_L \cos \theta - f_{\rho v}|_L \sin \theta \\ f_{\rho u}|_L \sin \theta + f_{\rho v}|_L \cos \theta \\ f_{\rho E}|_L \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por la arista con un sistema de coordenadas cartesiano. El subíndice  $G$  hace mención a las coordenadas globales y el subíndice  $L$  indica que los flujos son calculados en coordenadas locales de la arista  $jk$ .

#### 6.2.4. Condiciones de contorno numéricas

Este apartado está destinado a discutir el modo práctico de imponer las condiciones de contorno tanto en el campo lejano  $\Gamma_{\infty}$  como en la pared sólida  $S$ .

##### Condición de contorno sobre el campo lejano

En el problema de diseño, la condición que deben verificar las variables adjuntas sobre el campo lejano  $\Gamma_{\infty}$  es

$$\int_{\Gamma_{\infty}} \Psi^T \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial U} \cdot \vec{n}_{\Gamma_{\infty}} \right) \cdot \delta U ds = 0, \quad (6.18)$$

donde  $\vec{n}_{\Gamma_\infty}$  es un vector unitario normal exterior del campo lejano. Es posible expresar este problema en función de las variables características del flujo y de la ecuación adjunta. Además, se pueden separar las características entrantes asociadas con autovalores positivos de la ecuación adjunta  $\Lambda_+^*$  de las características salientes que están asociadas a autovalores negativos  $\Lambda_-^*$ . De esta manera se tiene que

$$\left(\Psi^T P\right)_+ \Lambda_+^* (\delta W)_+ + \left(\Psi^T P\right)_- \Lambda_-^* (\delta W)_- = 0, \quad (6.19)$$

donde, en el caso de autovalores de la ecuación adjunta positivos, la información entra al dominio y será necesario especificar el valor de  $(\Psi Q)_+ = 0$ . Por el contrario, en el caso de autovalores de la ecuación adjunta negativos, la información sale del dominio y no es posible imponer una condición sobre las variables adjuntas. Sin embargo, dado que no existe variación de las variables características, en el campo lejano tendremos que  $(\delta W)_- = 0$ .

Empleando este método de fácil implementación es posible hacer que la integral (6.18) se anule en el campo lejano, de modo que su contribución global sea nula.

### Condiciones de contorno sobre la pared sólida

Sobre el contorno de pared sólida  $S$  se debe imponer la siguiente condición de contorno

$$\vec{\varphi} \cdot \vec{n}_S = j'(P), \quad (6.20)$$

donde  $\vec{\varphi} = (\psi_2, \psi_3)$ . El vector  $\vec{n}_S$  es unitario normal interior a la pared sólida y  $j$  es la función cuya integral a lo largo de la superficie  $S$  se pretende minimizar. Dos métodos son frecuentemente empleados para la imposición de las condiciones de contorno sobre la pared sólida: celdillas fantasmas o cálculo directo del flujo que entra o sale por la normal.

**Proposición 39.** *Si se emplea una técnica de celdillas fantasmas, el modo de actualizar las variables adjuntas en cada paso de tiempo es*

$$\begin{cases} \psi_{1F} = \psi_{1R}, \\ \psi_{2F} = \psi_{2R} + 2n_x (j'(P) - n_x \psi_{2R} - n_y \psi_{3R}), \\ \psi_{3F} = \psi_{3R} + 2n_y (j'(P) - n_x \psi_{2R} - n_y \psi_{3R}), \\ \psi_{4F} = \psi_{4R}, \end{cases} \quad (6.21)$$

donde se ha definido un conjunto de celdillas denominadas fantasmas (subíndice  $F$ ) distribuidas a lo largo del contorno sólido y enfrentadas a las celdillas reales (subíndice  $R$ ) que constituyen la primera fila de celdillas que lindan con la superficie sólida.

*Demostración.* El objetivo es determinar el valor que debemos asignarle a las variables adjuntas en la celdilla fantasma con objeto de que, al calcular el flujo entre la celdilla real y la fantasma se imponga la condición (6.20). El primer paso consiste en calcular el vector  $\vec{\varphi}_F$  en función del valor del vector  $\vec{\varphi}_R$ . Para ello lo separaremos en su componente normal y tangente. De esta manera, la componente tangente a la superficie  $\vec{\varphi}_F$  se calcula como

$$\vec{\varphi}_F \cdot \vec{t} = \vec{\varphi}_R - (\vec{\varphi}_R \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (6.22)$$

donde  $\vec{t}$  es el vector tangente resultado de girar el vector  $\vec{n}$  un ángulo de  $\pi/2$  en sentido antihorario. Por otro lado, según la ecuación (6.22), la componente tangente del vector

$\vec{\varphi}_F$  será igual a la componente tangente del vector  $\vec{\varphi}_R$  por lo que el flujo en la dirección tangencial a la superficie es nulo. Respecto de la componente normal, se impondrá la condición (6.20) de la siguiente manera

$$\vec{\varphi}_F \cdot \vec{n} = (2j'(P) - \vec{\varphi}_R \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (6.23)$$

donde, finalmente, el cálculo de la variable  $\vec{\varphi}_F$  se realiza sumando las componentes tangentes (6.22) y normales (6.23) para tener

$$\vec{\varphi}_F = \vec{\varphi}_R - (\vec{\varphi}_R \cdot \vec{n}) \vec{n} + (2j'(P) - \vec{\varphi}_R \cdot \vec{n}) \vec{n}. \quad (6.24)$$

Desarrollando esta última expresión, obtenemos las relaciones expresadas en (6.21). Es importante destacar que no existen condiciones de contorno sobre la primera y la última variable adjuntas. Una posibilidad numéricamente adecuada es la planteada en (6.21).  $\square$

**Proposición 40.** *La condición de contorno sobre la pared sólida también puede imponerse a través de la evaluación directa del flujo que entra o sale de la misma de la siguiente manera*

$$f_{wall} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) |\vec{v}|^2 \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \\ [\psi_1 + v_x \psi_2 + v_y \psi_3 + H\psi_4] n_x - v_x (\gamma - 1) \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \\ [\psi_1 + v_x \psi_2 + v_y \psi_3 + H\psi_4] n_y - v_y (\gamma - 1) \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \\ (\gamma - 1) \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

donde la evaluación de las variables adjuntas se realizará mediante interpolaciones desde el interior del dominio y la condición de contorno  $\vec{\varphi} \cdot \vec{n} = j'(P)$  se impone actualizando el valor de  $\vec{\varphi} = (\psi_2, \psi_3)$  de la siguiente manera

$$\begin{cases} \psi_2 = \psi_2 + n_x (f'(P) - \vec{\varphi} \cdot \vec{n}), \\ \psi_3 = \psi_3 + n_y (f'(P) - \vec{\varphi} \cdot \vec{n}), \end{cases} \quad (6.26)$$

donde los nuevos valores de  $\vec{\varphi}$  serán sustituidos en la expresión (6.25) para el flujo sobre la pared.

*Demostración.* La demostración simplemente consiste en evaluar la proyección del flujo sobre la normal a la pared,

$$-\left(\vec{A}^T \Psi\right) \cdot \vec{n}_S = -\left(\vec{A}_x^T n_x + \vec{A}_y^T n_y\right) \Psi, \quad (6.27)$$

donde  $\vec{A} = \partial \vec{F} / \partial U = (A_x, A_y)$ . Teniendo en cuenta que sobre la pared sólida se verifica  $\vec{v} \cdot \vec{n}_S = 0$ , entonces se obtiene de manera inmediata la expresión (6.25).  $\square$

### Condiciones internas de contorno sobre una discontinuidad

Las condiciones de contorno internas sobre una discontinuidad  $\Sigma$  de las variables fluidas, fueron deducidas en la Sección 4.4.1,

$$\begin{cases} \vec{t}_\Sigma \cdot \partial_{t_g} \vec{\varphi} = 0, & \text{sobre } \Sigma, \\ \vec{\varphi} \cdot \vec{n}_\Sigma = j'(P), & \text{en } x_b. \end{cases} \quad (6.28)$$

El problema se reduce a imponer que la segunda y tercera variables adjuntas debe ser por ejemplo constantes a lo largo de la discontinuidad  $\Sigma$  y su valor igual al valor que adquieren en  $x_b$ , punto de intersección entre la curva discontinuidad y la superficie sólida  $S$

$$(\psi_2, \psi_3)|_\Sigma = (\psi_2, \psi_3)_{x_b}. \quad (6.29)$$

### 6.3. Discretización espacial de los términos viscosos

Las ecuaciones adjuntas han sido planteadas a partir de la formulación continua del problema de Navier-Stokes. Por ello, a la hora de abordar la resolución de estas ecuaciones se dispone de libertad para seleccionar aquel método cuyas características se ajusten mejor al problema planteado. A lo largo de esta sección se presentará un método para la evaluación numérica de los términos fuentes y viscosos que aparecen en la formulación adjunta de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t \Psi - (\vec{A} - \vec{A}^v)^T \cdot \vec{\nabla} \Psi \\ - \vec{\nabla} \cdot (D_{xx}^T \partial_x \Psi + D_{yx}^T \partial_y \Psi, D_{xy}^T \partial_x \Psi + D_{yy}^T \partial_y \Psi) = 0, & \text{en } \Omega, t > 0 \\ \vec{\phi} = \partial j / \partial \vec{f}, & \text{sobre } S, \\ k \partial_n \Psi_4|_S = \partial j / \partial T, & \text{sobre } S, \\ (W^*)^T \wedge \delta W = 0, & \text{sobre } \Gamma_\infty. \end{cases} \quad (6.30)$$

En la expresión (6.30) es posible separar los términos convectivos (ya evaluados en apartados anteriores) de los términos viscosos. De esta manera la ecuación adjunta de Navier-Stokes queda como

$$\partial_t \Psi - (\vec{A})^T \cdot \vec{\nabla} \Psi + [(\vec{A}^v)^T \cdot \vec{\nabla} \Psi - \vec{\nabla} \cdot (F_x^v, F_y^v)] = 0, \quad (6.31)$$

donde  $\vec{A}$  y  $\vec{A}^v$  son, respectivamente, las matrices jacobianas de los flujos convectivos y viscosos. Por otro lado, los flujos viscosos adjuntos tienen la siguiente expresión

$$F_x^v = D_{xx}^T \partial_x \Psi + D_{yx}^T \partial_y \Psi, \quad F_y^v = D_{xy}^T \partial_x \Psi + D_{yy}^T \partial_y \Psi, \quad (6.32)$$

donde  $D$  son las matrices que incluyen las derivadas cruzadas de los flujos viscosos respecto de las derivadas de las variables conservativas.

La evaluación numérica del término fuente  $(\vec{A}^v)^T \cdot \vec{\nabla} \Psi$  en un nodo  $j$  se realizará de la siguiente manera

$$\int_{\Omega_j} (\vec{A}^v)^T \cdot \vec{\nabla} \Psi d\Omega \cong |\Omega_j| (\vec{A}_j^v)^T \cdot \vec{\nabla} \Psi_j, \quad (6.33)$$

donde  $|\Omega_j|$  es el área del volumen de control  $\Omega_j$ .

En la evaluación del flujo viscoso, será necesaria la evaluación de los gradientes sobre las aristas. Para ello se empleará un esquema de Green-Gauss. El gradiente promediado entre dos nodos  $i$  y  $j$  unidos por una arista, se calculará como

$$\vec{\nabla}' \Psi_{ij} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Psi_i + \vec{\nabla} \Psi_j), \quad (6.34)$$

donde  $\vec{\nabla} \Psi_i$  es una aproximación al gradiente, en el nodo  $i$ , calculado mediante la formulación de Green-Gauss aplicada en un volumen de control  $V_i$ :

$$\vec{\nabla} \Psi_i = \frac{1}{V_i} \int_{\delta V_i} \Psi \vec{n} dS \cong \frac{1}{V_i} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{1}{2} (\Psi_k + \Psi_i) \vec{n}_{ik} S_{ik}. \quad (6.35)$$

Aquí  $V_i$  es el área (en 2D) de la superficie de control,  $\vec{n}$  es el vector unitario normal exterior a la misma,  $m_i$  es el número de vecinos del nodo  $i$  y  $S_{ik}$  es la superficie de la

cara del volumen de control que separa los nodos  $i$  y  $k$ . Para finalizar, los flujos viscosos en una determinada arista formada por los nodos  $i, j$  se calcularán como:

$$F_x^v|_{ij} = D_{xx}^T \partial'_x \Psi + D_{yx}^T \partial'_y \Psi, \quad F_y^v|_{ij} = D_{xy}^T \partial'_x \Psi + D_{yy}^T \partial'_y \Psi, \quad (6.36)$$

donde  $\vec{\nabla}' = (\partial'_x, \partial'_y)$  es el gradiente promediado en una arista.

### 6.3.1. Condiciones de contorno

Este apartado está destinado a discutir el modo práctico de imponer las condiciones de contorno adjuntas tanto en el campo lejano  $\Gamma_\infty$  como en la pared sólida  $S$ .

#### Condiciones de contorno sobre campo lejano

Las condiciones de contorno sobre el campo lejano son las mismas que en el caso de las ecuaciones adjuntas de Euler. Además, el campo lejano debe situarse lo suficientemente alejado como para que el gradiente de las variables adjuntas no sea significativo y sólo los términos convectivos sean valorados.

#### Condiciones de contorno sobre pared sólida

Las condiciones de contorno sobre la pared sólida adiabática para el problema adjunto de Navier-Stokes están expresadas en (6.30). En este caso será necesario distinguir entre el modo de imponer las condiciones sobre  $\vec{\varphi} = (\psi_2, \psi_3)$  y sobre la cuarta variable adjunta  $\psi_4$ .

La componentes adjuntas  $\vec{\varphi}$  sobre el contorno sólido se imponen de manera fuerte, imponiendo directamente el valor de  $\psi_2 = \partial j / \partial f_x$  y  $\psi_3 = \partial j / \partial f_y$  sobre las variables adjuntas en la superficie, siendo admisibles funcionales lineales de la forma  $j = j(\vec{f}, T)$ , donde  $\vec{f} = P\vec{n} - \vec{n} \cdot \sigma$ .

**Proposición 41.** *La imposición de la condición  $k\partial_n \Psi_4 = \partial j / \partial T$  sobre la pared se realiza a través del siguiente flujo sobre el contorno*

$$\vec{F}^v|_{pared} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{(\gamma-1)C_p} \frac{P}{\rho^2} \partial_T j \\ \left( \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \partial_x \Psi_2 - \frac{2}{3} \mu \partial_y \Psi_3 \right) n_x + \left( \frac{\mu}{\rho} \partial_y \Psi_2 + \frac{\mu}{\rho} \partial_x \Psi_3 \right) n_y \\ \left( \frac{\mu}{\rho} \partial_x \Psi_3 + \frac{\mu}{\rho} \partial_y \Psi_2 \right) n_x + \left( \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \partial_y \Psi_3 - \frac{2}{3} \mu \partial_x \Psi_2 \right) n_y \\ \frac{\gamma}{C_p} \frac{1}{\rho} \partial_T j \end{pmatrix}, \quad (6.37)$$

teniendo presente que los valores de las variables adjuntas  $\Psi_2$  y  $\Psi_3$  se imponen de manera fuerte: tan sólo se deberán calcular en el contorno los valores de los flujos viscosos normales para la primera y cuarta variable. Por otro lado  $\partial_T j$  es la derivada parcial de  $j$  respecto de la temperatura. Por lo tanto para funcionales que no dependan de la temperatura tanto el primer como el último flujo serán nulos en el contorno sólido.

*Demostración.* Es necesario evaluar la proyección de los flujos viscosos adjuntos sobre un vector  $\vec{n}$  normal unitario exterior al dominio

$$F_x^v n_x + F_y^v n_y = \left( D_{xx}^T, D_{yx}^T \right) \vec{\nabla} \Psi n_x + \left( D_{xy}^T, D_{yy}^T \right) \vec{\nabla} \Psi n_y, \quad (6.38)$$

donde partiendo de las expresiones para el cálculo de flujo viscoso linealizado se tiene que el valor de las matrices  $D$  en la superficie sólida  $S$  es

$$D_{xx}|_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0 \\ -\frac{\gamma\mu}{(\gamma-1)Pr}\frac{P}{\rho^2} & 0 & 0 & \frac{\gamma\mu}{Pr}\frac{1}{\rho} \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

$$D_{xy}|_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{yx}|_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\frac{\mu}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.40)$$

$$D_{yy}|_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho} & 0 \\ -\frac{\gamma\mu}{(\gamma-1)Pr}\frac{P}{\rho^2} & 0 & 0 & \frac{\gamma\mu}{Pr}\frac{1}{\rho} \end{pmatrix}. \quad (6.41)$$

Seguidamente se multiplican las matrices  $D$  transpuestas por los gradientes de las variables adjuntas para evaluar finalmente el flujo viscoso adjunto en la pared como

$$F_x^v|_S = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma\mu}{(\gamma-1)Pr}\frac{P}{\rho^2}\partial_x\Psi_4 \\ \frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho}\partial_x\Psi_2 - \frac{2}{3}\frac{\mu}{\rho}\partial_y\Psi_3 \\ \frac{\mu}{\rho}\partial_x\Psi_3 + \frac{\mu}{\rho}\partial_y\Psi_2 \\ \frac{\gamma\mu}{Pr}\frac{1}{\rho}\partial_x\Psi_4 \end{pmatrix}, \quad F_y^v|_S = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma\mu}{(\gamma-1)Pr}\frac{P}{\rho^2}\partial_y\Psi_4 \\ \frac{\mu}{\rho}\partial_y\Psi_2 + \frac{\mu}{\rho}\partial_x\Psi_3 \\ \frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho}\partial_y\Psi_3 - \frac{2}{3}\frac{\mu}{\rho}\partial_x\Psi_2 \\ \frac{\gamma\mu}{Pr}\frac{1}{\rho}\partial_y\Psi_4 \end{pmatrix}. \quad (6.42)$$

Por último, se debe proyectar el flujo viscoso adjunto en la pared sobre un vector normal unitario exterior a la misma  $\vec{n} = (n_x, n_y)$ , para obtener finalmente la expresión (6.37).  $\square$

## 6.4. Discretización temporal

El método seleccionado para hacer avanzar en tiempo las ecuaciones adjuntas es el llamado esquema explícito en el cual la derivada espacial es calculada con valores de las variables conocidos al comienzo de la iteración temporal. Sin embargo, esto impone al método unas determinadas restricciones de estabilidad en  $\Delta t/\Delta x$ , a través de la condición de CFL (Courant-Friedrichs-Lewy), según la cual [26] un esquema diferencial no puede ser una aproximación convergente y estable a menos que su dominio de dependencia contenga al dominio de dependencia de la correspondiente ecuación diferencial.

Al hacer independiente la discretización espacial de la discretización temporal, tendremos un sistema ordinario de ecuaciones diferenciales descrito de la siguiente manera

$$\frac{d\Psi}{dt} + R(\Psi) = 0, \quad (6.43)$$

donde  $\Psi$  es el vector de variables adjuntas en cada vértice de la malla y  $R(\Psi)$  es el llamado vector de residuos, es decir, el balance en cada volumen de control de los flujos

numéricos definidos por el esquema de discretización espacial. Para aproximar las soluciones de la ODE (6.43) emplearemos un esquema explícito multipaso de Runge-Kutta [109]. Este esquema de  $m$  pasos se implementa de la siguiente manera

$$\begin{cases} \Psi^{(n+1,0)} = \Psi^n \\ \dots \\ \Psi^{(n+1,k)} = \Psi^n - \alpha_k \Delta t R^{(k-1)} \\ \dots \\ \Psi^{n+1} = \Psi^{(n+1,m)} \end{cases} \quad (6.44)$$

donde el superíndice  $k$  denota la  $k$ -ésima etapa, los coeficientes  $\alpha_k$  se seleccionan para maximizar la estabilidad a lo largo del intervalo imaginario siendo  $\alpha_m = 1$  y  $\Delta t$  viene determinado por la condición de CFL.

## 6.5. Inestabilidades en el proceso de optimización

Tal y como se ha visto en el Capítulo 4 y en el Capítulo 5, el diseño óptimo de forma aerodinámica consiste en un proceso iterativo de optimización en el que se controlan las ecuaciones que modelizan el fluido empleando como control la superficie aerodinámica. De esta manera se logra minimizar un determinado funcional que depende de las variables fluidas.

En cada paso de optimización, se requiere el cálculo de la sensibilidad (gradiente) del funcional (a minimizar) con respecto de modificación infinitesimales en la superficie aerodinámica, y seguidamente se actúa sobre el control (superficie aerodinámica). Este gradiente calculado, está generalmente en una clase inferior de suavidad que la forma inicial. Es por ello que una secuencia de optimización, progresivamente reduce la suavidad, conduciendo hasta la inestabilidad.

Mediante numerosos ejemplos numéricos, se ha comprobado que el empleo directo de la sensibilidad de un funcional sobre la superficie conduce a la divergencia del proceso de optimización debido a las oscilaciones de alta frecuencia introducidas [60, 65, 56]. A continuación, se ofrecen dos soluciones: la primera introducida por A. Jameson que consiste en emplear un gradiente modificado de Sobolev y la segunda, original de esta tesis, que consiste en el empleo de una técnica de filtrado bimalla inspirado en los trabajos de R. Glowinski [44] entre otros.

### 6.5.1. Gradiente de Sobolev modificado

Con objeto de prevenir las inestabilidades derivadas del empleo directo del gradiente calculado, se introduce un producto interno de Sobolev en la definición del gradiente [103, 67, 60]. El uso de un gradiente de Sobolev modificado permitirá la generación de secuencias de espacios suaves. Esto se puede ilustrar considerando el caso más simple de un problema de cálculo de variaciones. Seleccionar  $y(x)$  para minimizar

$$J = \int_a^b F(y, y') dx \quad (6.45)$$

con valores extremos constantes  $y(a)$  y  $y(b)$ . Bajo una variación  $\delta y(x)$ ,

$$\delta J = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx. \quad (6.46)$$

Por lo tanto, definiendo el gradiente como

$$g = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \quad (6.47)$$

y el producto interno como

$$(u, v) = \int_a^b uv \, dx, \quad (6.48)$$

se tiene que

$$\delta J = (g, \delta y). \quad (6.49)$$

Entonces si fijamos

$$\delta y = -\lambda g, \quad \lambda > 0, \quad (6.50)$$

obtenemos una mejora a menos que  $g = 0$ , la condición necesaria para un mínimo. En la aplicación de la teoría de control a la optimización de forma aerodinámica, el empleo de un gradiente de Sobolev es fundamental para la preservación de la suavidad de las superficies rediseñadas.

### 6.5.2. Filtrado bimalla de la sensibilidad del funcional

Entre las soluciones que se han desarrollado para evitar inestabilidades en los procesos de optimización destaca el algoritmo bimalla propuesto por Glowinski [44, 87]. La estrategia bimalla es una herramienta numérica de gran alcance orientada a filtrar las características numéricas que provienen de errores espurios de alta frecuencia. Para ello, en el problema de diseño de forma óptima el método calculará la dirección de descenso no entre todas las posibles, pues la presencia de las altas frecuencias espúreas podría inestabilizar el método, sino mediante un filtrado previo que elimine éstas para seleccionar entre las soluciones con oscilación lenta.

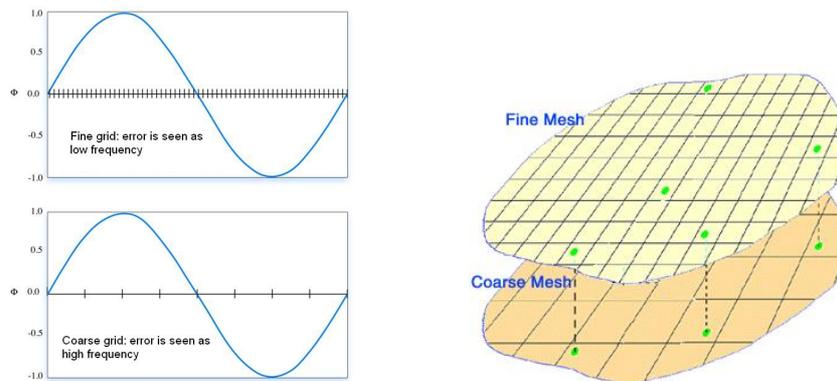


Figura 6.3: Método bimalla en 1D (izquierda) y 2D (derecha)

En los métodos bimalla, se trabaja con dos niveles de malla, una más basta y otra más fina. Hay varias maneras de poner en práctica esta estrategia:

Método A. Resolución del adjunto en malla basta.

Paso 1) Calcular el problema directo en una malla fina.

- Paso 2) Extrapolar la solución del flujo a una malla más basta.
- Paso 3) Obtener la solución al problema adjunto en una malla basta.
- Paso 4) Calcular el control en la malla basta.
- Paso 5) Interpolarse el control a la malla fina superficial.

Método B. Resolución del adjunto en malla fina partiendo del flujo filtrado en malla basta.

- Paso 1) Calcular el problema directo en una malla fina.
- Paso 2) Filtrar la solución del flujo en una malla más basta.
- Paso 3) Obtener la solución al problema adjunto en una malla fina empleando como entrada los datos de flujo filtrados.
- Paso 4) Calcular el control en la malla fina.

Método C. Resolución del adjunto en malla fina y filtrado del control en malla basta.

- Paso 1) Calcular el problema directo en una malla fina.
- Paso 2) Obtener la solución al problema adjunto en una malla fina.
- Paso 3) Calcular el control en la malla fina.
- Paso 4) Filtrar el control empleando una malla basta.

En este trabajo implementaremos la variante descrita en el Método C en el contexto del diseño óptimo de forma para las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes en 2D. En este caso el filtrado se realiza directamente sobre el control. Siguiendo los desarrollos expuestos en [119] se presenta un algoritmo para el filtrado bimalla en 1D mediante diferencias finitas.

Sean dos mallas definidas en el intervalo  $(a, b)$ . En la fina se considera un número impar  $N \in \mathbb{N}$ ,  $h = (b - a)/(N + 1)$  y  $x_i = ih, i = 1, \dots, N$  y en la malla basta, un paso de  $2h$  y los nodos  $y_i = 2ih, i = 1, \dots, (N - 1)/2$ . La idea principal del algoritmo bimalla es analizar la sensibilidad en la malla fina pero tomando el dato inicial o final en la malla basta. De esta manera, las altas frecuencias asociadas con la malla fina son eliminadas.

Entonces, con objeto de resolver la sensibilidad superficial en la malla fina se deben definir dos operadores. Un operador de interpolación  $I_{2h}^h$  que transforme un vector en la malla basta  $\{e_{2h}^i\}_{i=1, \dots, (N-1)/2} \in \mathbb{R}^N$  a un vector en la malla fina  $\{e_h^i\}_{i=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^{(N-1)/2}$ ; y un operador de proyección  $I_h^{2h}$  que transforme un vector de datos en la malla fina a un vector de datos en la malla basta. Una posible elección para el operador de prolongación de la malla fina a la malla basta es

$$\begin{cases} I_{2h}^h : \mathbb{R}^{(N-1)/2} \rightarrow \mathbb{R}^N, \\ e_{2h} \rightarrow e_h, \text{ donde } e_h^{2i} = e_{2h}^i \text{ y } e_h^{2i-1} = \frac{e_{2h}^{i-1} + e_{2h}^i}{2}, i = 1, \dots, \frac{N-1}{2}. \end{cases} \quad (6.51)$$

Y para el operador de restricción de la malla basta a la malla fina la elección adecuada en función del operador de prolongación seleccionado es

$$\begin{cases} I_h^{2h} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{(N-1)/2}, \\ e_h \rightarrow e_{2h}, \text{ donde } e_{2h}^i = e_h^{2i}, i = 1, \dots, \frac{N-1}{2}. \end{cases} \quad (6.52)$$

Una vez definidos estos operadores, la ecuación para el cálculo filtrado de la sensibilidad del funcional es resuelta de la siguiente manera:

- Interpolación de un dato inicial en la malla basta para obtener un valor inicial en la malla fina.
- Solución de la ecuación de sensibilidad en la malla fina.
- Proyección sobre la malla basta del dato final en la malla fina.
- Restricción del resultado sobre la malla fina.



## Capítulo 7

---

# Experimentos numéricos empleando las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes

---

El objetivo de este capítulo es validar las expresiones y algoritmos desarrollados en esta memoria para el diseño óptimo de forma en sistemas gobernados por las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. Este capítulo está dividido en los siguientes apartados:

1. Aplicación aerodinámica de las expresiones desarrolladas a lo largo de esta memoria.
2. Validación de los esquemas numéricos. En esta sección se discutirán los esquemas desarrollados para la resolución de las ecuaciones adjuntas y la ecuación del *level set*.
3. Validación de procesos de optimización de forma 2D en el marco de las ecuaciones de Euler, Navier-Stokes (incluyendo la aplicación *level set* y empleo de la formulación adjunta con condiciones internas de contorno).
4. Validación de la estrategia bimalla para evitar la inestabilidad en el proceso de convergencia de la optimización.

Por último es conveniente destacar que, con objeto de poder estudiar el comportamiento de los métodos desarrollados en aplicaciones reales de interés industrial, se presentan resultados en los que se han utilizado condiciones de simulación bidimensionales típicas aerodinámicas [1].

### 7.1. Aplicación al diseño de forma aerodinámica

#### 7.1.1. Modelización mediante las ecuaciones de Euler

Partiendo de los desarrollos del Capítulo 4, en este apartado se desarrollarán las expresiones concretas para el de diseño de forma en sistemas gobernados por las ecua-

ciones de Euler. En particular se desarrollarán las expresiones para funcionales que involucran el coeficiente adimensional de resistencia  $C_D$  y el coeficiente adimensional de sustentación  $C_L$

$$\int_S C_P (\vec{n} \cdot \vec{d}) ds, \quad C_P = \frac{P - P_\infty}{C_\infty}, \quad (7.1)$$

donde  $\vec{n}$  es el vector unitario normal exterior a la superficie  $S$ . El coeficiente de presiones se denota como  $C_P$ , el subíndice  $\infty$  es empleado para referirnos a cantidades evaluadas en el campo lejano y el vector  $\vec{d}$  se evalúa como

$$\vec{d} = \begin{cases} (\cos \alpha, \sin \alpha), & C_D \text{ (coeficiente de resistencia),} \\ (-\sin \alpha, \cos \alpha), & C_L \text{ (coeficiente de sustentación),} \end{cases} \quad (7.2)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de ataque de la superficie sustentadora<sup>1</sup>. En estas circunstancias, las variables adjuntas deben verificar la siguiente condición sobre el contorno sólido

$$\vec{n} \cdot \vec{\varphi}|_S = \frac{1}{C_\infty} (\vec{n} \cdot \vec{d}), \quad (7.3)$$

donde  $\vec{\varphi} = (\psi_2, \psi_3)$ . Por otro lado, empleando la Proposición 31, las relaciones adjuntas de Rankine-Hugoniot son

$$(\psi_2, \psi_3)|_\Sigma = (\psi_2, \psi_3)_{x_b}. \quad (7.4)$$

Finalmente, la variación completa del funcional resistencia o sustentación queda como

$$\begin{aligned} \delta \left( \int_S C_P (\vec{n} \cdot \vec{d}) ds \right) &= \int_S \left( \frac{1}{C_\infty} (\vec{d} \cdot \vec{\nabla} P) \right) \delta S ds \\ &+ \int_S \left( (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vartheta + (\vec{t} \cdot \vec{v}) \partial_{t_g} \vartheta \right) \delta S ds, \end{aligned} \quad (7.5)$$

donde  $\vec{t}$  es el vector resultante de girar en sentido antihorario  $\pi/2$  el vector  $\vec{n}$ . Por otro lado, las derivadas tangenciales y normales se denotan respectivamente por  $\partial_{t_g} = \vec{t} \cdot \vec{\nabla}$  y  $\partial_n = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$ . Todas las variables fluidas ya han sido definidas en la Sección 4.4, y  $\delta S$  denota la variación de la superficie  $S$  en la dirección normal.

Como se puede observar, la expresión final para las variación del funcional no depende de la componente de tangente de la deformación. Asimismo, se ha aislado la deformación infinitesimal de la superficie  $S$  para poder escribir la variación de  $J$  como

$$\delta J = \int_S G \delta S ds, \quad (7.6)$$

donde  $G$  es esencialmente un gradiente local y proporciona para cada punto en la superficie la dirección óptima de la deformación, es decir, el tamaño de la deformación en la dirección normal que produce la variación más grande de la función de coste.

### 7.1.2. Modelización mediante las ecuaciones de Navier-Stokes

Partiendo de los desarrollos del Capítulo 5, en este apartado se desarrollarán las expresiones para el caso de diseño de forma aerodinámica empleando las ecuaciones

<sup>1</sup>El ángulo de ataque es el ángulo formado entre la línea media del perfil y velocidad incidente.

de Navier-Stokes. En este caso el funcional a optimizar incluye el efecto de las fuerzas viscosas y su forma final será

$$\int_S \left( C_p \vec{n} - \frac{1}{C_\infty} \vec{n} \cdot \sigma \right) \cdot \vec{d} ds, \quad (7.7)$$

donde  $\vec{d}$  ya ha sido definido en el apartado anterior, se está suponiendo pared sólida  $S$  adiabática y  $\sigma$  es el tensor de esfuerzos viscosos. En estas circunstancias, las variables adjuntas deben verificar las siguientes condiciones sobre el contorno sólido

$$\vec{\varphi}|_S = \frac{1}{C_\infty} \vec{d}, \quad \partial_n \psi_4|_S = 0. \quad (7.8)$$

Se obtiene finalmente que la variación completa del funcional resistencia o sustentación se puede finalmente evaluar como

$$\delta \left( \int_S \left( C_p \vec{n} - \frac{1}{C_\infty} \vec{n} \cdot \sigma \right) \cdot \vec{d} ds \right) = \int_S G \delta S ds, \quad (7.9)$$

donde la sensibilidad del funcional sobre la superficie se calculará como

$$G = (\vec{n} \cdot \partial_n \vec{v})(\rho \psi_1 + \rho H \psi_4) + \vec{n} \cdot \Sigma \cdot \partial_n \vec{v} - \psi_4 (\vec{n} \cdot \sigma \cdot \partial_n \vec{v}) + \psi_4 (\sigma : \vec{\nabla} v) - \kappa (\partial_{tg} \psi_4) (\partial_{tg} T), \quad (7.10)$$

donde todas las variables ya han sido definidas a lo largo de la Sección 5.3. En las expresiones (7.9) y (7.10) es destacable que se ha introducido la reducción de los términos de segundo orden (ver Sección 5.3.2) para no tener que emplear un método [19, 6, 4] de alto orden a la hora de obtener los valores de las variables de flujo y adjuntas.

### 7.1.3. Variables de diseño aeronáuticas

Las variables de diseño tienen un papel fundamental en el proceso de optimización de un avión [3, 31, 32, 115]. La elección de una u otra clase de variables de diseño dependerá fuertemente del elemento del avión que se desee diseñar y del funcional que se pretenda optimizar. Las variables de diseño más típicas en el ámbito aeronáutico son:

- Funciones de forma: se trata de funciones en 2 ó 3 dimensiones cuyo valor en cada punto de la superficie del avión se añade al valor inicial de los nodos que conforman la malla superficial del avión. Dentro de esta familia destacan:
  - Las funciones de bache, que recogen un amplio conjunto de deformaciones que se añaden a la geometría inicial del avión. En este apartado los métodos más empleados son los polinomios de deformación de Wagner, funciones de Hicks-Vanderplaats [51], polinomios de Legendre, funciones de Hicks-Henne [50].
  - Deformaciones globales de elementos aeronáuticos, como pueden ser los cambios globales en la forma de las alas: planta, torsión, diedro, flecha, etc.
- *Free Form Deformation (FFD) - 3D*: se trata de una importante herramienta en el diseño de geometrías asistido por ordenador. Desarrollado en la década de los años

80 por Sederberg y Parry [99] consiste en alterar la forma de los objetos deformando el espacio en donde se encuentran embebidos. Se pueden deformar superficies de cualquier tipo (planos, parches de superficies paramétricas o superficies definidas de forma implícita). Esta técnica está basada en los polinomios de Bernstein trivariados y permite la deformación de los objetos a través del cambio en los puntos de control de estos polinomios.

- Definición geométrica de las superficies. En este caso la superficie a diseñar proviene de una definición paramétrica. Dentro de este apartado son destacables el empleo de: superficies de Bezier y las superficies NURBS [92].
- Por último, a través del cálculo de la derivada de un funcional sobre la superficie cuya forma se desea optimizar, es posible el diseño mediante el movimiento individual de los nodos [59] que constituyen la superficie discreta del objeto a diseño.

A continuación, se presenta la formulación analítica de las funciones de Hicks-Henne que se emplearán habitualmente en este Capítulo. Estas funciones aplicadas al diseño de perfiles aerodinámicos permiten calcular el incremento de la posición  $y$  de los nodos que definen el perfil aerodinámico de la siguiente manera

$$\Delta y = \sum_{k=1}^N \delta_k f_k(x), \quad (7.11)$$

donde  $N$  es el número de funciones de deformación,  $\delta_k$  es el incremento de la función de deformación, y la función de deformación  $f_k(x)$  viene dada por

$$f_k(x) = \begin{cases} \sin(\Pi(1-x)^{e_k}), & x_m \leq 0,2 \\ \sin(\Pi x^{e_k}), & 0,2 \leq x_m \leq 0,8 \\ \sin^3(\Pi x^{e_k}), & 0,8 \leq x_m \end{cases} \quad (7.12)$$

siendo

$$e_k = \begin{cases} \frac{\log(0,5)}{\log(1-x_k)}, & x_m \leq 0,2 \\ \frac{\log(0,5)}{\log(x_k)}, & x_m \geq 0,2 \end{cases} \quad (7.13)$$

donde cada función de forma tiene su máximo en el punto  $x_k$  y se aplican por separado a la parte superior (extradós) y a la inferior (intradós) del perfil aerodinámico. Como ampliación de esta parametrización es posible su aplicación en un entorno tridimensional [31, 32].

## 7.2. Validación de los esquemas numéricos desarrollados

En esta sección se abordará un proceso de validación de los esquemas numéricos desarrollados en esta memoria para la resolución de las ecuaciones adjuntas, así como los esquemas desarrollados para la aplicación de la técnica de conjuntos de nivel.

A lo largo de este capítulo se analizará el rediseño de la forma de un perfil aerodinámico denominado NACA 0012<sup>2</sup>. En la Figura 7.1 se puede apreciar la configuración

<sup>2</sup>El perfil NACA 0012 es un perfil simétrico (de curvatura nula) y con un espesor del 12% de la cuerda y constituye un ejemplo clásico de validación aeronáutica.



Figura 7.1: Configuración de un perfil aerodinámico NACA 0012

a estudio. Dependiendo del problema físico a resolver, se impondrán diferentes condiciones de contorno sobre el campo lejano, variando el valor de tres parámetros adimensionales:

- **Ángulo de ataque.** ( $\alpha$ ) Ángulo que forma la línea media del perfil aerodinámico con la corriente de aire incidente.
- **Número de Mach.** ( $M = v/c$ ), donde  $v$  es la velocidad del aire y  $c$  la velocidad del sonido en el aire. Este parámetro adimensional es una medida de la compresibilidad del aire y representa una relación entre la velocidad del fluido y la velocidad del sonido en el mismo. Para valores menores de 0,3 se puede considerar la hipótesis de aire incompresible.
- **Número de Reynolds.** ( $R = (\rho v l)/\mu$ ), donde  $\rho$  es la densidad del aire,  $v$  su velocidad,  $l$  una dimensión característica<sup>3</sup> y  $\mu$  la viscosidad dinámica. Este parámetro adimensional representa los efectos de la viscosidad sobre el flujo.

### 7.2.1. Ecuaciones de Euler (solución regular)

Estudiamos la variación del funcional sustentación  $C_L$  respecto de variaciones en los parámetros de diseño de un perfil NACA 0012 expuesto a una corriente libre de aire a una velocidad de 0,5 Mach y un ángulo de incidencia de  $2,0^\circ$  (configuración subsónica). Como variables de diseño se emplearán un cierto número de funciones de deformación de Hicks-Henne (7.12). En este caso, la primera variable de diseño tiene su máximo cerca del borde de salida en el lado más bajo de la superficie de sustentación (intradós), y las variables siguientes trasladan, en el sentido horario, el máximo de la deformación a lo largo de la superficie del perfil.

#### Análisis de la función objetivo

Como punto de partida se debe analizar la corriente fluida sobre el perfil aerodinámico NACA 0012. Con este objetivo, se han implementado dos métodos de discretización para la resolución de la ecuación Euler: esquema centrado con disipación artificial y el esquema *upwind* (del tipo Roe). En la Figura 7.2 se pueden observar los contornos de velocidad constante (iso mach).

<sup>3</sup>La dimensión característica depende de cada configuración a análisis. En el estudio de perfiles aerodinámicos esta dimensión es la cuerda del perfil.

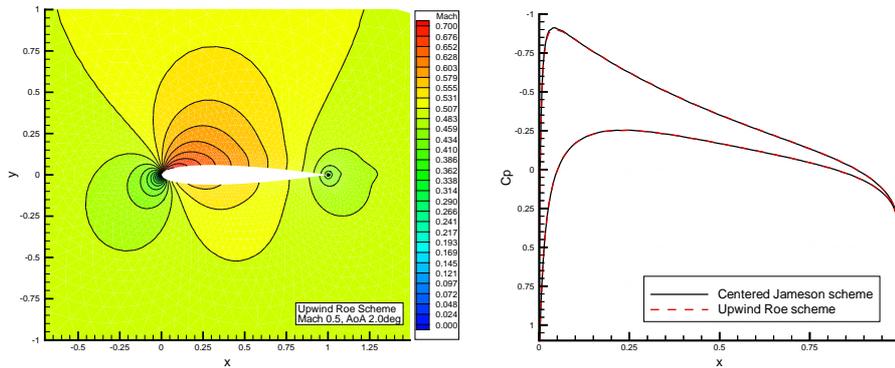


Figura 7.2: Número de Mach (izq) y comparación de  $C_p$  (JST vs. Roe)

Como se puede visualizar en la Figura 7.2, ambos métodos proporcionan prácticamente la misma solución. Los parámetros de calibrado empleados para el esquema centrado con disipación artificial (método de Jameson-Schmidt-Turkel) son los estándares de disipación de primer orden ( $1/2$ ) y disipación de tercer orden ( $1/64$ ).

#### Cálculo de gradientes mediante el método de diferencias finitas

Como paso previo al estudio de los gradientes calculados mediante un método del tipo adjunto, se procederá al cálculo aproximado de los gradientes mediante el empleo de un esquema de diferencias finitas, esto es, calcular el valor del funcional antes y después de la deformación, restar los valores y dividir por el tamaño de la deformación.

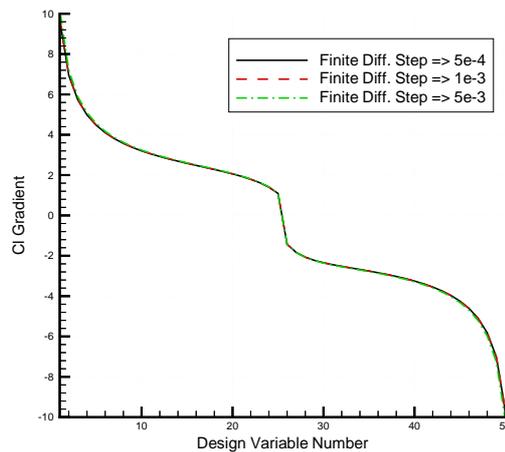


Figura 7.3: Comparación del tamaño de paso de la variable de diseño en Euler subsónico

En la Figura 7.3 se muestra una estimación de la primera derivada de la función

de coste (sustentación aerodinámica) usando diferencias adelantadas para diferentes tamaños de paso. Un tamaño de paso pequeño es deseable para reducir el error de truncamiento del método.

### Aplicación del método adjunto continuo

A través del empleo de la formulación adjunta es posible el cálculo directo de la sensibilidad del funcional sustentación ante variaciones, en la dirección normal, de la geometría inicial.

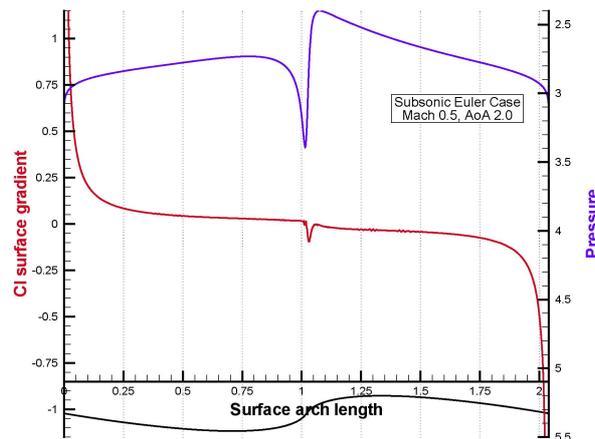


Figura 7.4: Sensibilidad de la sustentación en Euler subsónico

En la Figura 7.4 el valor de la sensibilidad de sustentación se compara con la presión sobre el perfil aerodinámico (parámetro de interés en el proceso de análisis). Fruto de la asimetría en la configuración inicial (debido al ángulo de ataque del perfil) se observa una mínima asimetría en las sensibilidades.

Con objeto de comparar los diferentes esquemas de discretización desarrollados a lo largo de este trabajo, se emplearán 50 variables de Hicks-Henne como parámetros de diseño.

En la Figura 7.5 se muestran los gradientes de la función objetivo  $C_L$  para las 50 variables de diseño. La solución adjunta se ha obtenido mediante una discretización espacial del tipo *upwind* y se han empleado dos modos de imponer las condiciones de contorno: evaluando directamente el flujo convectivo adjunto que entra o sale de la pared sólida, y mediante la definición de un sistema de celdillas fantasmas que permiten el cálculo del flujo que entra/sale por el contorno sólido. Como se puede apreciar, los resultados son prácticamente idénticos, salvo en el punto de remanso donde  $\vec{v} \approx 0$  y las condiciones de contorno de no transpiración se imponen de manera más inexacta  $\vec{v} \cdot \vec{n} \approx 0$ , aspecto que influye sobre la solución del problema adjunto.

Como alternativa al esquema *upwind*, se puede emplear el esquema de alto orden centrado desarrollado en este trabajo. Este esquema de tercer orden presenta un parámetro  $\epsilon^{(4)}$  que debe ser calibrado en condiciones estándar de validación. En la Figura

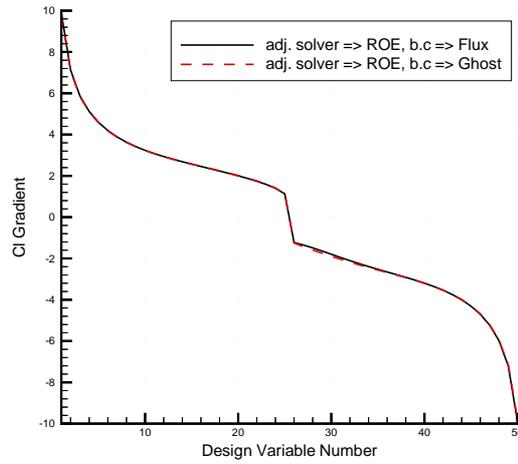


Figura 7.5: Estudio de condición numérica de contorno en Euler subsónico

7.6 se presentan los gradientes de la función objetivo, para varios valores del parámetro de calibración de la disipación artificial necesaria para resolver la ecuación adjunta mediante un esquema que hace uso de la viscosidad artificial. En vista de los resultados, el valor del orden  $1/128 \approx 0,007$  del parámetro  $\epsilon^{(4)}$  proporciona un buen compromiso entre la velocidad de convergencia y la precisión numérica.

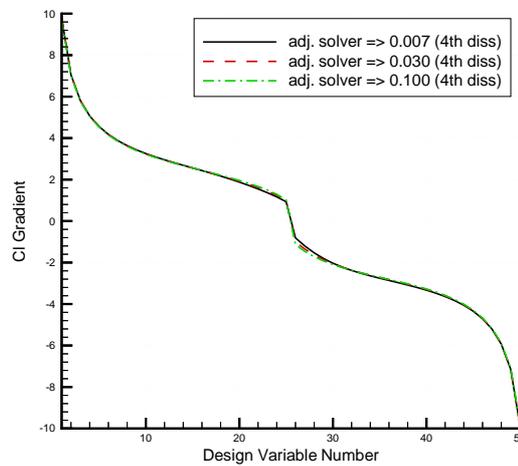


Figura 7.6: Calibración de la disipación artificial (régimen adjunto subsónico)

La implementación del método adjunto exige la evaluación de un término que contiene una derivada sobre la superficie  $(\vec{t} \cdot \vec{v}) \partial_{t_g} (\rho \psi_1 + \rho \vec{v} \cdot \vec{\varphi} + \rho H \psi_4)$  (ver ecuación (4.73)). El cálculo de este tipo de derivadas es delicado y se puede abordar de diferentes modos.

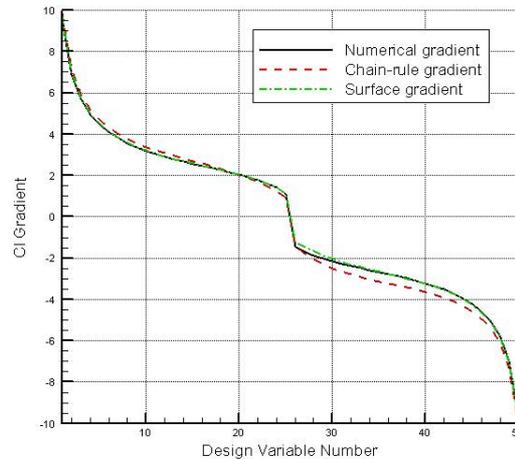


Figura 7.7: Estudio de la integración sobre la superficie en Euler subsónico

En la Figura 7.7 se presenta una comparativa entre las tres posibilidades de integración sobre la superficie:

- Integración directa sobre la superficie: en este caso solamente se contemplan los nodos sobre la superficie para evaluar mediante diferencias finitas el valor de  $\partial_{t_g}$ .
- Evaluación numérica de la integral: el procedimiento consiste en evaluar, mediante el método de Green-Gauss, el gradiente del término  $(\rho\psi_1 + \rho\vec{v} \cdot \vec{\varphi} + \rho H\psi_4)$  y luego proyectarlo sobre el plano tangente a la superficie.
- Por último, cálculo del gradiente de  $(\rho\psi_1 + \rho\vec{v} \cdot \vec{\varphi} + \rho H\psi_4)$  mediante la aplicación de la regla de la cadena y, al igual que en el caso anterior, proceder a su proyección.

Por otro lado, es destacable que si la condición de contorno sobre el problema directo está numéricamente bien impuesta sobre la superficie  $\vec{v} \cdot \vec{n} \approx 0$  entonces es posible escribir que  $(\vec{t} \cdot \vec{v})\partial_{t_g} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$  con lo que el problema queda notablemente simplificado pudiendo emplear tan solo el gradiente normal.

Como última etapa de la validación subsónica, se comparan los resultados obtenidos mediante la formulación adjunta continua con los resultados obtenidos mediante el empleo de diferencias finitas.

Pese a que en realidad los funcionales de los que se calcula el gradiente son diferentes (uno es la versión discreta y otro la continua) es ilustrativo el estudio de la Figura 7.8, donde se aprecia el gran parecido entre las dos estimaciones de los gradientes. La diferencia más notable se encuentra en el borde de ataque que se caracteriza por tener baja velocidad y grandes gradientes de presión.

### 7.2.2. Ecuaciones de Euler (solución no regular, sin RH adjunto)

El diseño mediante el empleo de las ecuaciones de Euler con discontinuidades en las variables de flujo es más complejo que el caso subsónico anteriormente tratado. A lo

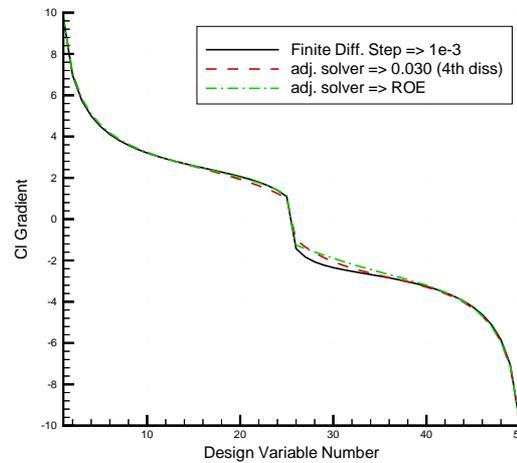


Figura 7.8: Método adjunto vs. diferencias finitas en Euler subsónico

largo de este trabajo, la formulación adjunta continua se ha tratado con rigor en el caso de la presencia de discontinuidades y se han deducido unas expresiones (ver Sección 4.4.1) que requieren, para la evaluación completa de la variación del funcional, imponer una condición de contorno sobre la discontinuidad.

Por otro lado, ha sido posible la deducción de expresiones simplificadas para las condiciones sobre el choque y es posible (sin imponer las condiciones adjuntas de Rankine-Hugoniot) el cálculo de la derivada parcial de la función objetivo respecto de desplazamientos en la dirección normal a la superficie, aunque de esta manera no se tenga en cuenta la sensibilidad del funcional ante un desplazamiento del choque (este aspecto se discutirá en las conclusiones finales).

Al contrario que en el caso subsónico, el problema a estudio en esta sección consiste en la variación del funcional coeficiente de resistencia  $C_D$  respecto de variaciones en los parámetros de diseño de un perfil aerodinámico NACA0012 expuesto a una corriente de aire a una velocidad de 0,8 Mach y un ángulo de incidencia de  $1,25^\circ$  (valores estándares en problemas transónicos).

### Análisis de la función objetivo

Como primer paso en el proceso de cálculo de gradientes, se debe analizar la función objetivo. En este capítulo emplearemos dos métodos para la discretización espacial [52]: el esquema centrado con disipación artificial (JST) [63] o bien un esquema *upwind* (del tipo Roe) [97]. En la Figura 7.9 se pueden observar las isolíneas de velocidad constante sobre la configuración aerodinámica en discusión. Se puede apreciar una onda de choque fuerte en la parte superior del perfil (extradós) y una onda de choque débil en la parte inferior (intradós).

En la Figura 7.9 se presentan los resultados obtenidos mediante las dos metodologías expuestas. Es relevante analizar cómo empleando estos métodos ya se obtienen ciertas diferencias apreciables en la localización de los choques que tienen que ver con el modo

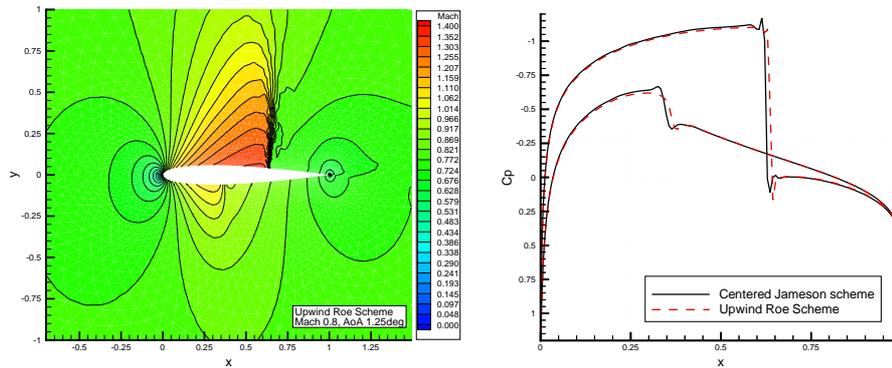


Figura 7.9: Número de Mach (izq) y comparación de Cp (JST vs. Roe)

en que se han discretizado las ecuaciones de Euler. La relevancia de estas discrepancias en el coeficiente de presiones obliga a ser consistente con el método de discretización empleado. Es decir, a lo largo de todo el proceso iterativo de optimización se debe emplear el mismo esquema de discretización para la resolución de las ecuaciones de Euler.

#### Cálculo de gradientes mediante el método de diferencias finitas

Al igual que en el caso subsónico, el cálculo de gradientes mediante diferencias finitas exige el empleo de variables de diseño que en este caso serán funciones de forma (funciones de bache de Hicks-Henne) a lo largo de la superficie del objeto que se pretende diseñar.

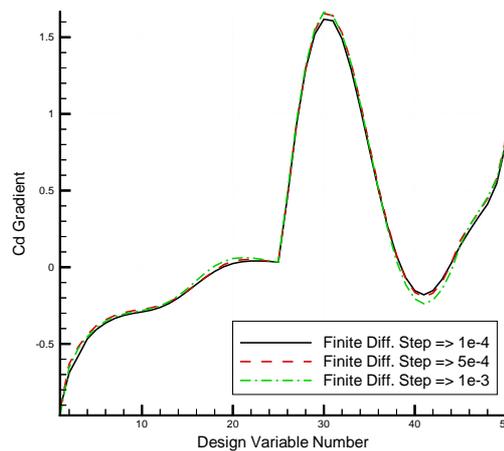


Figura 7.10: Comparación del paso de la variable de diseño en Euler transónico

En la Figura 7.10 se representa el valor del gradiente del funcional  $C_D$  para diferen-

tes variables de diseño Hicks-Henne empleando diferentes pasos en el cálculo de las diferencias finitas con objeto de seleccionar adecuadamente el paso en el cálculo de la diferencia finita adelantada. Es destacable, comparado con el caso subsónico, la mayor influencia del paso de las diferencias finitas debido a la presencia de la onda de choque.

### Cálculo de gradientes mediante el método adjunto continuo

En esta sección se validarán y compararán los gradientes del funcional obtenidos mediante el empleo de la metodología adjunta continua. La onda de choque es el fenómeno más relevante en este problema y en esta validación no se impondrán las condiciones internas adjuntas de Rankine-Hugoniot desarrolladas a lo largo de esta memoria. De esta manera se podrá estudiar la viabilidad del método en configuraciones estándares de aplicación aeronáutica.

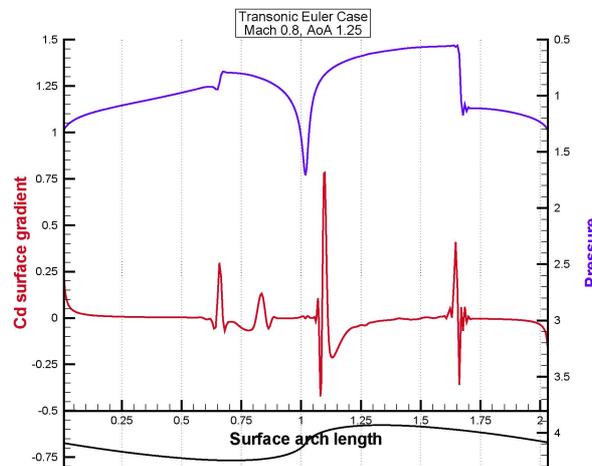


Figura 7.11: Sensibilidad de la resistencia de onda en Euler transónico

La formulación adjunta permite el cálculo de la sensibilidad del funcional resistencia  $C_D$  ante variaciones en la dirección normal de la geometría inicial. La Figura 7.11 muestra la sensibilidad del funcional a lo largo de la superficie a diseñar comparada con la distribución de presiones. Son rasgos destacables de esta gráfica la presencia de grandes gradientes del funcional situados justamente sobre la discontinuidad en las variables del flujo. Por otro lado, existe una zona de interés en el paso de flujo subsónico a supersónico (borde de ataque del perfil). En esta posición pequeñas modificaciones producen grandes cambios en el funcional (mayores incluso que desplazamientos sobre el propio choque). Estas zonas pueden ser empleadas para modificar la onda de choque, a distancia, en aquellos problemas en los que, por restricciones geométricas, no sea posible actuar directamente sobre el choque [59].

Para la resolución de la ecuación adjunta se ha desarrollado un método del tipo *upwind* que será estudiado a través de la comparación con diferencias finitas de los gradientes del funcional respecto de una serie de variables de diseño. Con objeto de

obtener esos gradientes será necesario la integración de la sensibilidad del funcional sobre una parametrización (funciones de deformación de Hicks-Henne).

Si se desea hacer uso de un esquema de discretización centrado para la resolución de las ecuaciones adjuntas de Euler, en el caso de presencia de discontinuidades, se deberá proceder a la calibración de la disipación numérica introducida por el método numérico. Mediante varios ensayos es posible calibrar la disipación artificial necesaria para resolver la ecuación adjunta mediante un esquema centrado de disipación artificial de alto orden. En la Figura 7.12 se observa la influencia de los diferentes valores de calibrado de la disipación artificial (parámetro  $\epsilon^{(4)}$ ), al igual que en el caso subsónico, un valor de compromiso lo encontramos con un parámetro  $\epsilon^{(4)}$  de valor  $1/128 \approx 0,007$ . Es destacable que a lo largo del desarrollo de este esquema de resolución se han realizado numerosas pruebas que apuntan hacia ese valor de  $\epsilon^{(4)}$  como el más idóneo en un amplio rango de aplicaciones transónicas.

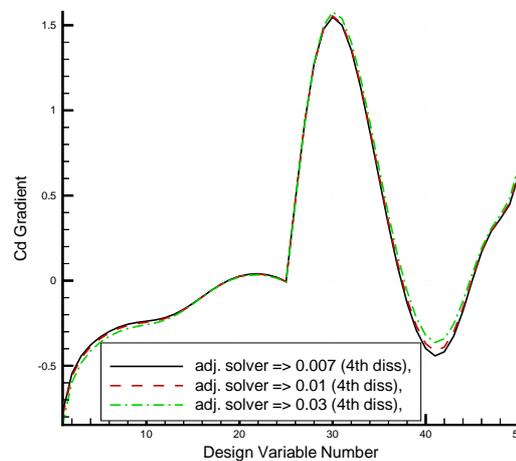


Figura 7.12: Estudio de la disipación artificial en Euler transónico

## Conclusiones

Como última etapa de la validación transónica, se comparan los resultados obtenidos mediante la formulación adjunta continua con los resultados obtenidos mediante el empleo de los métodos de diferencias finitas.

Al igual que ocurría en el caso subsónico, se está comparando la formulación continua del problema con la formulación discreta. Es por ello que, estrictamente, los funcionales de los que se calcula el gradiente son diferentes (uno es la versión discreta y otra la continua).

Por último, destacar que al emplear una estrategia discreta (adjunto discreto o diferencias finitas) no se contempla la sensibilidad del funcional ante desplazamientos de la discontinuidad. En el caso adjunto continuo esta sensibilidad sí se puede calcular, pero para ello es necesario imponer las relaciones adjuntas de Rankine-Hugoniot y, como en esta sección no se están imponiendo, los resultados obtenidos son muy semejantes a los

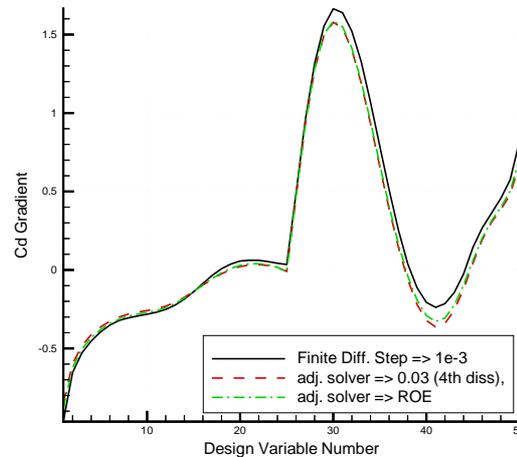


Figura 7.13: Método adjunto vs. diferencias finitas en Euler transónico

obtenidos mediante diferencias finitas. En la siguiente sección, se realizará un estudio de la influencia de imponer las condiciones adjuntas de Rankine-Hugoniot.

### 7.2.3. Ecuaciones de Euler (solución no regular, con RH adjunto)

El diseño mediante el empleo de las ecuaciones de Euler con discontinuidades en las variables de flujo e imponiendo condiciones internas de contorno es algo complejo y novedoso. Novedoso en el sentido de que el análisis completo en configuraciones de interés aeronáutico 2D se realiza por primera vez en esta memoria y complejo en el sentido de que la imposición de condiciones internas de contorno requiere una técnica avanzada para la detección y posicionamiento e imposición de los valores sobre el choque.

Antes de continuar, es importante realizar una serie de consideraciones en lo referente al problema de diseño empleando las ecuaciones de Euler 2D estacionarias en el que las soluciones presentan una discontinuidad u onda de choque:

- La mayoría de los desplazamientos infinitesimales de la superficie provocan un desplazamiento de la discontinuidad.
- Cuando se plantea un problema de diseño inverso, en el caso de las ecuaciones de Euler, solamente una de las variables (la presión) formará parte del funcional.
- Para algunas funciones de coste y forma, la posición del choque es completamente irrelevante (p.e. minimización de la resistencia de onda sobre una placa plana).

Esta sección está dividida en dos apartados: en el primero de ellos se estudiará una configuración simétrica con objeto de valorar la importancia de imponer las condiciones internas de contorno de Rankine-Hugoniot. En el segundo ejemplo, se planteará una configuración transónica asimétrica donde el choque influye de manera notable en el funcional resistencia.

### Caso simétrico transónico

El problema a estudio consiste en el cálculo de la derivada del funcional coeficiente de resistencia  $C_D$  respecto de cambios en la forma de un perfil aerodinámico NACA0012 expuesto a una corriente de aire a una velocidad de 0,8 Mach y un ángulo de incidencia de  $0,0^\circ$  (configuración simétrica). El objetivo final es el cálculo de la sensibilidad de la resistencia de onda incluyendo la sensibilidad de la resistencia ante desplazamientos del choque.

En la Figura 7.14 se puede apreciar el campo de velocidades (izquierda) y la distribución de presiones y número de Mach sobre el perfil aerodinámico (derecha). Simplemente constatar la simetría del problema planteado y que la onda de choque es normal a la superficie y está situada sobre una zona plana (horizontal) del perfil aerodinámico.

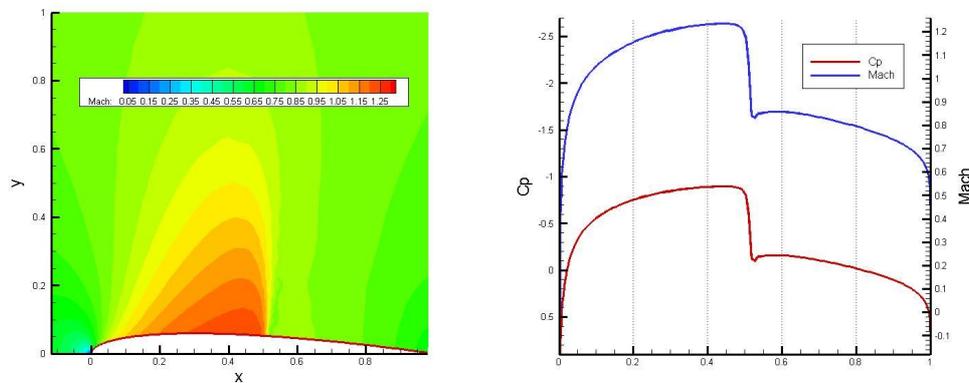


Figura 7.14: Solución transónica Euler 2D (caso simétrico)

En vista a los resultados expuestos en la Figura 7.14, a priori podemos estimar que la influencia del desplazamiento del choque será mínima debido a que el funcional a estudio es la resistencia y el choque se encuentra situado en una zona prácticamente horizontal, por lo que un desplazamiento del choque no debería afectar en gran medida al coeficiente  $C_D$ .

Los resultados numéricos apoyan las previsiones expuestas anteriormente. En la Figura 7.15 se puede apreciar el campo de variables adjuntas (izquierda) y la sensibilidad del funcional  $C_D$  con respecto a variaciones infinitesimales en la forma del perfil NACA 0012 (teniendo o no teniendo en cuenta las condiciones internas sobre el choque). Como era de esperar, las condiciones internas de Rankine-Hugoniot se imponen de manera natural en el caso de que la sensibilidad del funcional respecto de variaciones en la posición del choque es despreciable.

Si nos centramos en la parte izquierda de la Figura 7.14, en el caso de no imponer las condiciones adjuntas de Rankine-Hugoniot sobre el choque, las iso-líneas de la variable adjunta  $\psi_3$  se solapan con la posición del choque y por lo tanto la condición  $\vec{t}_\Sigma \cdot \partial_{t_g} \vec{\varphi} = 0$  se verifica de manera natural, sin necesidad de imponer ninguna condición sobre el choque. Esto ratifica la corrección de las suposiciones realizadas y apunta a como, en ciertas circunstancias, no es necesario la imposición de condiciones internas.

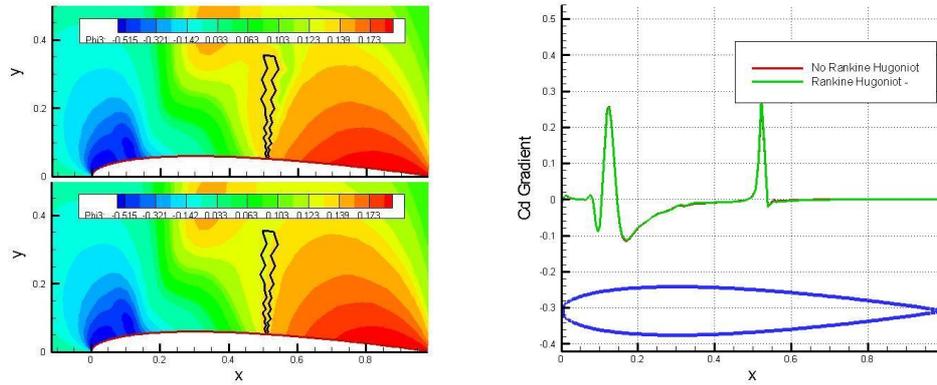


Figura 7.15: Solución adjunta Euler 2D y gradiente de resistencia (caso simétrico)

### Caso asimétrico transónico

El problema simétrico nos ha ayudado a determinar ciertos problemas en los cuales la imposición de las condiciones internas adjuntas de Rankine-Hugoniot es irrelevante. A continuación, vamos a estudiar un caso en el que la imposición de estas condiciones sí es relevante.

El problema que analizamos en esta sección consiste en el estudio del gradiente del funcional coeficiente de resistencia  $C_D$  respecto de cambios en los parámetros de diseño de un perfil aerodinámico NACA0012 expuesto a una corriente de aire a una velocidad de 0,8 Mach y un ángulo de incidencia de  $1,2^\circ$  (configuración asimétrica de validación clásica).

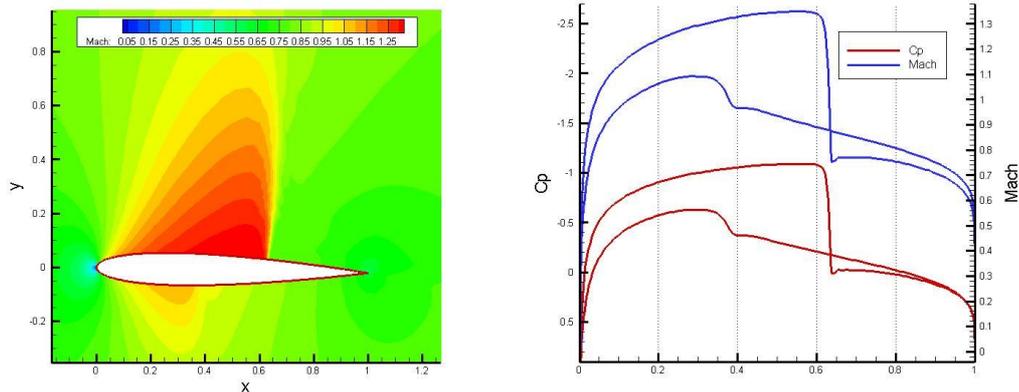


Figura 7.16: Solución transónica Euler 2D (caso asimétrico)

En la Figura 7.16 se puede apreciar el campo de velocidades (izquierda) y la distribución de presiones y número de Mach sobre el perfil aerodinámico (derecha). En este caso, debido a la asimetría de la configuración, que hace que el choque no sea per-

pendicular al eje de abscisas, es de esperar que un desplazamiento del mismo produzca una variación en el funcional a estudio.

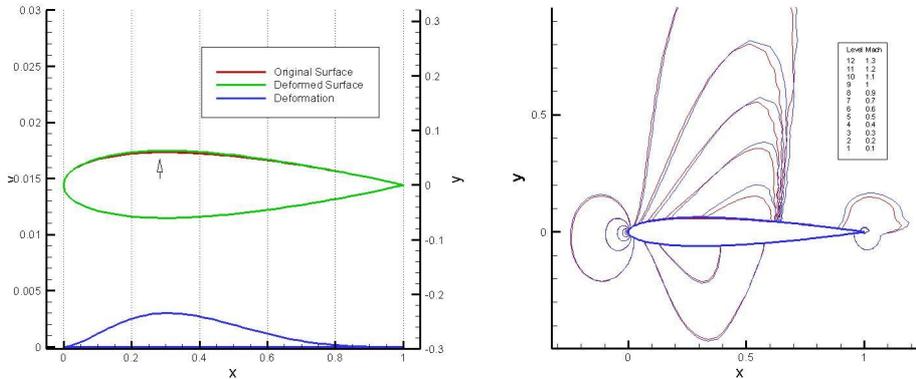


Figura 7.17: Efecto sobre el choque al aplicar una función de Hicks-Henne

Antes de presentar los resultados, es ilustrativo comprobar el efecto sobre el choque de una variación en la geometría del perfil aerodinámico. En la Figura 7.17 se aprecia claramente el efecto de una variable de diseño sobre la solución, en la cual se produce un cambio combinado de valores en la velocidad del fluido y sobre todo un desplazamiento de la posición del choque (cuya sensibilidad estamos en condiciones de calcular).

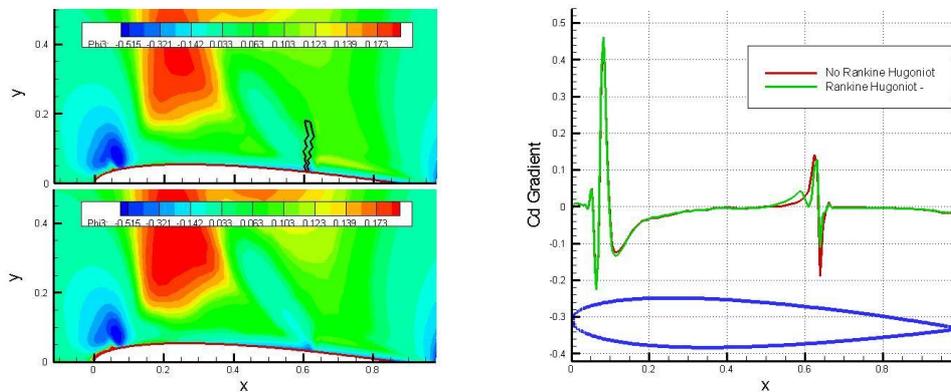


Figura 7.18: Solución adjunta Euler 2D y gradiente de resistencia (caso simétrico)

En la Figura 7.14 se puede apreciar el campo de variables adjuntas (izquierda) y la sensibilidad del funcional  $C_D$  con respecto a variaciones infinitesimales en la forma del perfil NACA 0012 (teniendo o no teniendo en cuenta las condiciones internas sobre el choque). Al igual que en el caso simétrico anterior, el choque se encuentra situado en la región delimitada por la curva negra.

Respecto de la Figura 7.14 ciertos resultados son notables: en primer lugar, en este caso, la imposición de las condiciones internas sobre el choque sí afectan a la sensibilidad del funcional con respecto de variaciones infinitesimales en la superficie del perfil. En

segundo lugar, es importante destacar que esta variación de la sensibilidad se localiza exclusivamente en la zona donde se encuentra el choque.

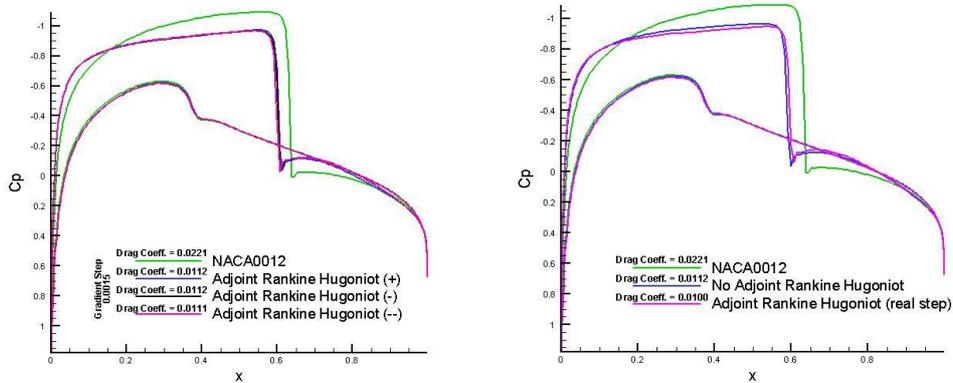


Figura 7.19: Estimación en las mejoras del gradiente calculado

Por último en la Figura 7.19 se presenta un resultado relevante. En este caso, se muestra la mejora que supone la incorporación de las condiciones internas adjuntas de Rankine-Hugoniot en la minimización del funcional. Partiendo de una resistencia de 221 *counts*<sup>4</sup>, si no empleamos las condiciones internas la resistencia se reduce a 112 *counts* y si empleamos las condiciones de contorno la nueva resistencia es de 100 *counts* lo que supone una mejora en aproximadamente un 10 % que constituye un resultado destacable. Se obtienen resultados aún mejores para otros funcionales más sensibles de la posición del choque como es la resistencia.

#### 7.2.4. Ecuaciones de Navier-Stokes en régimen laminar

A continuación se procederá a la validación del esquema adjunto continuo aplicado al cálculo de gradientes en sistemas gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes. Con objeto de proceder a una validación de los resultados, se ha planteado un problema de diseño a bajo número de Reynolds (para forzar con ello un régimen laminar estacionario). El problema consiste en estudiar la variación del funcional del coeficiente de resistencia  $C_D$  respecto de variaciones en los parámetros de diseño de un perfil aerodinámico NACA 0012 expuesto a una corriente libre de aire a una velocidad de 0,3 Mach, un ángulo de incidencia de 2,5°, un número de Reynolds de 1000 y la suposición de pared adiabática sobre el perfil aerodinámico.

##### Análisis de la función objetivo

Como primer paso, se analizará la influencia del método de discretización sobre la solución del problema directo de Navier-Stokes. En la Figura 7.20 se muestra la distribución de isoclinas de Mach sobre la configuración a estudio. Respecto de los resultados anteriores con la modelización de las ecuaciones de Euler, es destacable como, en este caso, se impone la condición de no deslizamiento de velocidades sobre la superficie,

<sup>4</sup>el valor de un *counts* es  $10^{-4}$  unidades de resistencia

con la consecuente formación de una capa límite que tiene un espesor aproximado de  $\delta \approx 1/\sqrt{R} = 0,031$  y que debe ser convenientemente discretizada físicamente mediante el empleo de una capa límite de celdillas, con un alto estiramiento, destinadas a calcular con precisión los gradientes en la dirección normal a la superficie<sup>5</sup> que son los más relevantes en estas circunstancias.

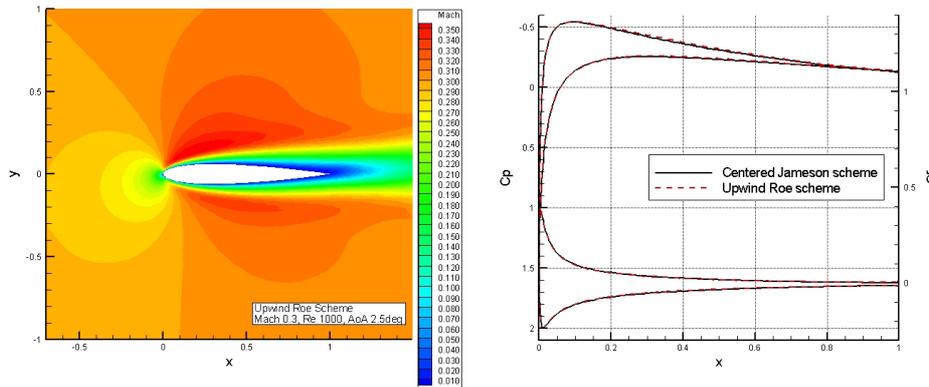


Figura 7.20: Número de Mach (izq) y comparación de  $C_p$  (JST vs. Roe) en Navier-Stokes

Por otro lado, en la parte derecha de la Figura 7.20 se puede visualizar una comparación entre el coeficiente de presiones y fricción calculado a través de un método centrado, y un método *upwind*. A la vista de los resultados, es destacable la gran similitud entre el cálculo obtenido por ambos métodos. En adelante, sólo se empleará el método centrado a lo largo de esta sección de validación.

### Cálculo de gradientes mediante el empleo del método adjunto continuo

La metodología adjunta empleada en el marco de las ecuaciones de Navier-Stokes ha sido descrita a lo largo de este trabajo. Esta sección está encaminada a mostrar parte de las validaciones realizadas con objeto de calibrar los métodos empleados para la resolución de las ecuaciones adjuntas en su versión continua.

Una de las grandes ventajas que proporciona el método adjunto es la posibilidad de calcular directamente la sensibilidad del funcional sobre la superficie a diseño. Este valor tiene especial relevancia en los problemas de Navier-Stokes debido a que la sensibilidad de la resistencia de fricción es una función que, una vez filtrada, puede ser empleada en un proceso de diseño continuo de la superficie.

En la Figura 7.21 se puede observar el valor de la sensibilidad del funcional  $C_D$  sobre la superficie de diseño. Es destacable que se trata de una función suave a excepción del borde de ataque del perfil donde existen unos altos gradientes motivados por la existencia de un punto de remanso. Por otro lado, en la misma Figura 7.21 se presenta

<sup>5</sup>De manera habitual en CFD, a la hora de construir la malla computacional sobre la que se resolverá el flujo numérico, se hace una preadaptación a las características esperables del fluido (capas límites viscosas, discontinuidades, etc). Esta adaptación, si bien condiciona la solución directa se hace con objeto de realizar un ahorro computacional. Sin embargo, no está demostrado que las mallas resultantes sean apropiadas para la resolución de las ecuaciones adjuntas.

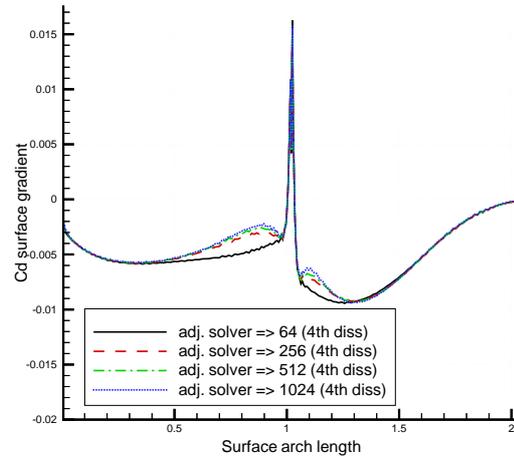


Figura 7.21: Sensibilidad de la resistencia de fricción en Navier-Stokes

la sensibilidad obtenida para diferentes valores de ajuste del parámetro de disipación artificial introducido para hacer converger la ecuación de Navier-Stokes adjunta.

Para la resolución de las ecuaciones adjuntas de Navier-Stokes, se emplea un esquema centrado con disipación artificial de tercer orden que debe ser calibrado con objeto de resolver correctamente las ecuaciones en un amplio espectro de aplicaciones.

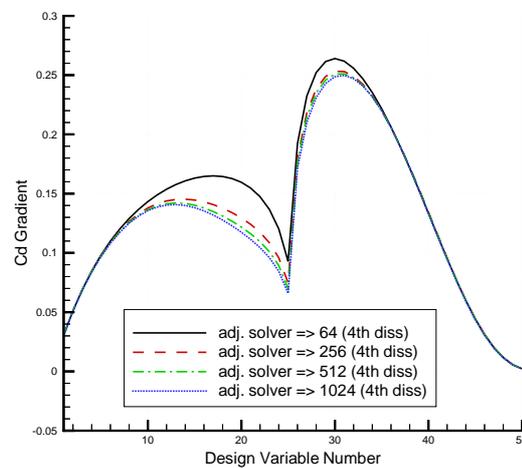


Figura 7.22: Estudio de la disipación artificial en Navier-Stokes

El modo de calibración es análogo al empleado en el caso de las ecuaciones de Euler. El primer paso consiste en seleccionar una serie de funciones de deformación del tipo Hicks-Henne y se va reduciendo la disipación artificial introducida hasta que los resultados convergen a una curva de sensibilidad. A partir de la Figura 7.22 se

puede determinar el valor de la constante  $\epsilon^{(4)}$  que tiene aproximadamente un valor de  $1/512 \approx 0,002$ .

La implementación del método adjunto continuo en el cálculo de sensibilidades exige la evaluación de una derivada sobre la superficie de la temperatura  $T$  y de la cuarta variable adjunta  $\psi_4$ . El modo en el que se realiza numéricamente esta derivada superficial puede afectar al valor de los gradientes obtenidos.

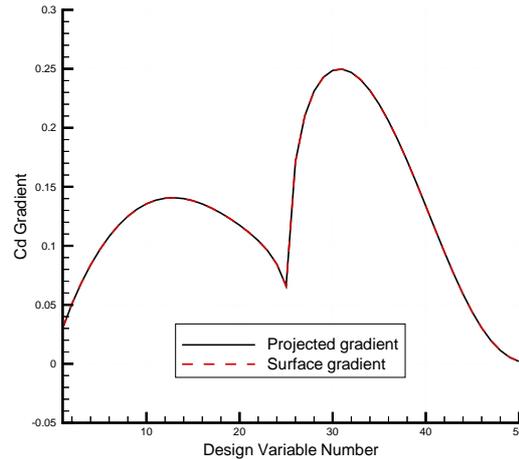


Figura 7.23: Estudio de la integración sobre la superficie en Navier-Stokes

Al contrario que en el caso de las ecuaciones adjuntas de Euler, la sensibilidad del modo en el que se evalúa la derivada superficial es mucho menor. En la Figura 7.23 se pueden comparar los resultados obtenidos al realizar una integración sobre la superficie, o mediante una evaluación numérica de la integral y una posterior proyección sobre la superficie. Los resultados obtenidos en ambos casos son prácticamente idénticos.

Seguidamente, se compararán los resultados obtenidos mediante el empleo de una técnica basada en las diferencias finitas con aquellos gradientes obtenidos a través de la formulación adjunta continua.

A partir de la Figura 7.24 es posible apreciar el gran parecido entre los gradientes determinados mediante una estrategia adjunta continua y aquellos que se han obtenido mediante el procedimiento de una técnica de diferencias finitas. Las fuentes de discrepancia entre ambos métodos se deben de buscar en el hecho de que, en realidad, se están resolviendo dos funcionales diferentes (continuo vs. discreto) que, en el límite de la malla, se espera que converjan al mismo valor.

### Importancia de el empleo del método para la reducción de términos de segundo orden

A lo largo de este apartado, se presenta un ejemplo de la importancia de evaluar con precisión todos los términos necesarios para calcular el gradiente de la resistencia con respecto de variaciones en la forma de la superficie a diseño. Para ello, emplearemos una

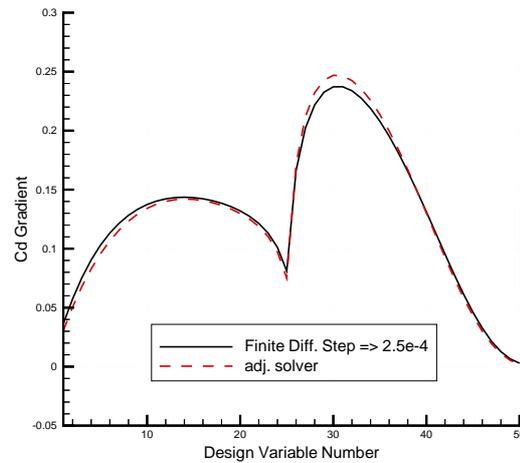


Figura 7.24: Método adjunto vs. diferencias finitas en Navier-Stokes

configuración simple de un cilindro enfrentado a una corriente de aire a baja velocidad (número de Mach de 0,1) y bajo número de Reynolds (igual a 50) lo que nos permite tener una solución estacionaria del problema.

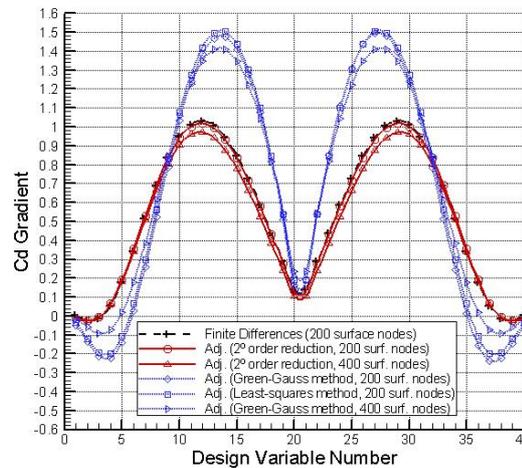


Figura 7.25: Gradientes subsónicos del  $C_D$  para un cilindro.

Este caso de ejemplo ilustra la necesidad de emplear la técnica de reducción de las segundas derivadas. En la Figura 7.25, se compara el cálculo de diferencias finitas con los gradientes calculados por medio del método adjunto (con y sin el método de reducción de las segundas derivadas) para dos mallas diferentes (de 200 y 400 nodos sobre el cilindro). En el caso sin reducción de las segundas derivadas, la primera y segunda derivada de las variables han sido calculadas con dos métodos distintos (Green-Gauss y

mínimos cuadrados). En el caso con reducción, las derivadas han sido calculadas con un método de Green-Gauss o directamente sobre la superficie de la malla (a través de un método de primer orden de diferencias finitas) cuando sólo se requieren derivadas tangentes a la superficie. La discrepancia entre usar y no usar la reducción de las derivadas de segundo orden es muy importante.

Como conclusión, el método adjunto continuo proporciona gradientes muy precisos en situaciones como estas. Además, es fundamental el empleo de la técnica para la reducción de las derivadas de segundo orden con objeto de obtener gradientes precisos.

### 7.2.5. Método de conjuntos de nivel

Esta sección está encaminada a la validación de los diferentes procedimientos que deben emplearse cuando se hace uso de una optimización mediante la metodología de conjuntos de nivel o *level set*. Para el empleo de esta metodología es fundamental atender a una serie de características que deben tenerse en cuenta en una correcta implementación:

1. Capacidad del método para capturar geometrías iniciales complejas.
2. Método robusto para la extrapolación de velocidades al resto del dominio.
3. Versatilidad en la adaptación de malla alrededor del nivel cero.
4. Exactitud en la resolución de las ecuaciones a lo largo del tiempo
5. Extracción precisa del *level set* 0 al finalizar el proceso de optimización.

#### Captura de la geometría inicial

El punto de partida del procedimiento de optimización mediante *level set* es la representación de la superficie que se desea optimizar en un mallado adecuado para la resolución de estas ecuaciones. Los pasos a seguir son los siguientes:

- Paso 1. El programa de *level set* parte de una geometría inicial que puede estar compuesta por una o múltiples curvas cerradas.
- Paso 2. A partir de esa geometría inicial se genera una malla cartesiana que se ajusta a los límites extremos de las curvas cuya forma se pretende optimizar.
- Paso 3. Seguidamente, se dividen en triángulos los cuadrados de la malla donde se resuelve el problema de avance de frente.
- Paso 4. Por último, se adapta la malla alrededor del contorno de nivel 0.

En la Figura 7.26 se aprecia el proceso completo de adaptación de la malla a una circunferencia. Todo ese proceso es una etapa anterior al movimiento del *level set*.

Con objeto de reducir el número de nodos empleados en la discretización, es necesario adaptar la malla computacional alrededor del nivel 0 del *level set*. Mediante este

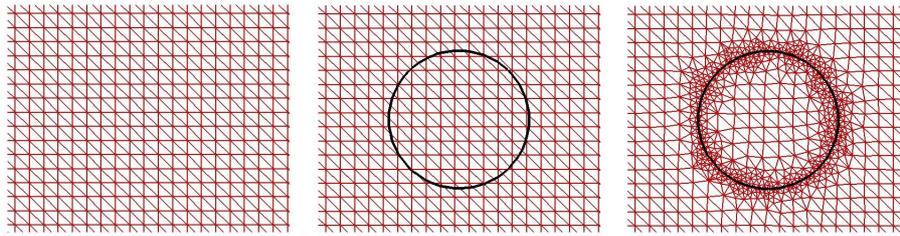


Figura 7.26: Proceso inicial de adaptación de la malla

tipo de técnicas de adaptación, es posible capturar geometrías complejas como la de un dispositivo hipersustentador<sup>6</sup> en la Figura 7.27 (parte de la derecha).

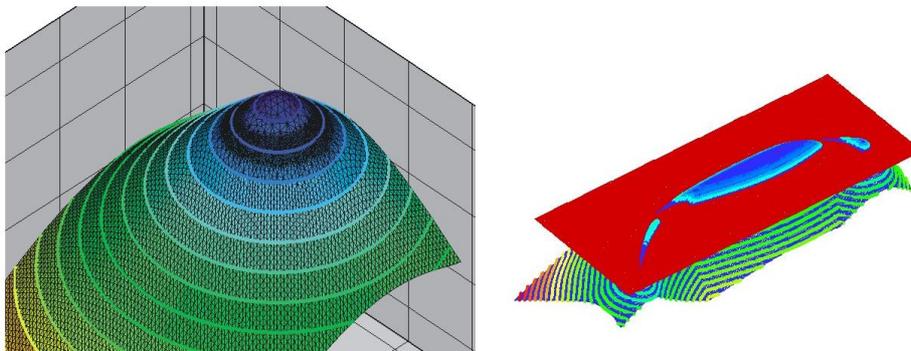


Figura 7.27: Ejemplos de adaptaciones iniciales de geometría en *level set*

De la robustez del proceso de adaptación dependerá el éxito de la optimización mediante *level set*. Los mallados no estructurados tienen la ventaja de facilitar el proceso de adaptación tanto para eliminar como para incluir nuevos nodos.

### Procedimiento de extrapolación de velocidades

Una vez ha sido adaptada la malla de partida del *level set* a la curva a diseño, es necesario el cálculo de la velocidad de avance de todos los conjuntos de niveles través de la velocidad de avance del contorno de nivel cero o interfase (sensibilidad del funcional de diseño con respecto de deformaciones normales en la superficie). El procedimiento para la extrapolación de la velocidad consiste en resolver la ecuación  $\vec{\nabla} F_{ext} \cdot \vec{\nabla} \phi^{dist}$ , donde  $\phi^{dist}$  es la distancia al *level set* cero cuya velocidad es conocida.

En la Figura 7.28 se pueden observar, a la derecha, la variable distancia al *level set* 0 que es, en este caso, un círculo de diámetro la unidad y centrado en  $(-1, 0)$  y a la izquierda se presenta la función de velocidad en el caso en el que el círculo se expanda libremente.

El segundo ejemplo, Figura 7.29, consiste en una circunferencia inmersa en un fluido a bajo número de Reynolds, mediante el procedimiento adjunto. Se ha determinado la

<sup>6</sup>Un dispositivo hipersustentador es un ingenio aerodinámico diseñado para aumentar la sustentación, en determinadas fases del vuelo de una aeronave. Este artilugio permite al avión volar a velocidades más bajas en las fases de despegue, ascenso inicial, aproximación y aterrizaje.

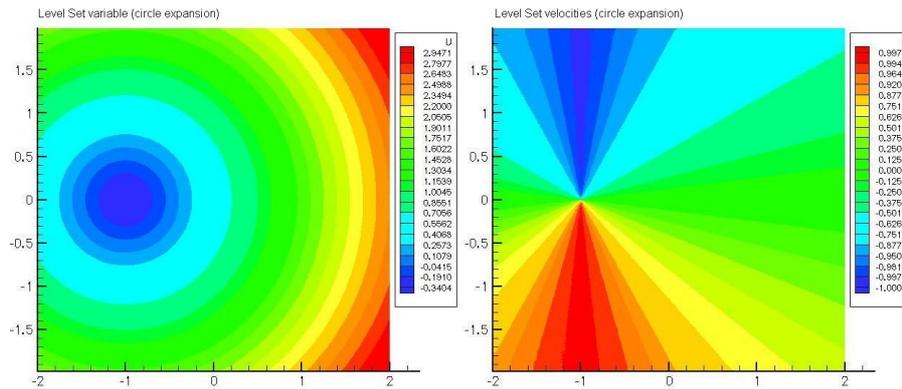


Figura 7.28: Velocidad extendida del *level set* (expansión de círculo)

velocidad de avance para minimizar el coeficiente de resistencia. Las velocidades extendidas se corresponden con el movimiento que debe tener la forma de la circunferencia para minimizar la resistencia al avance.

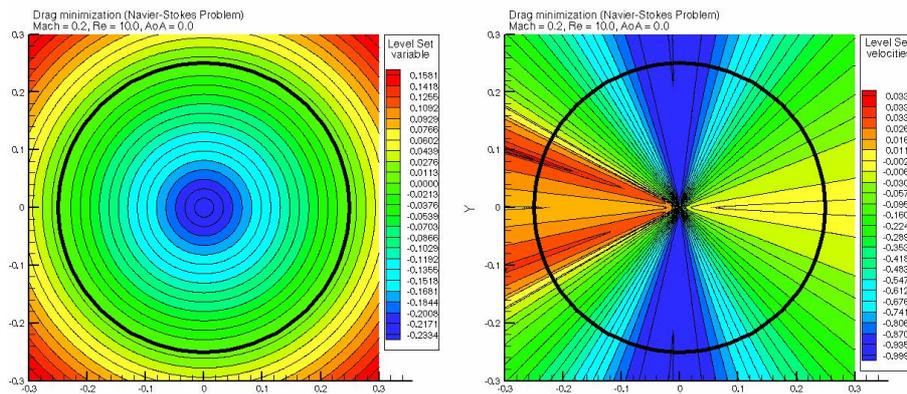


Figura 7.29: Velocidad extendida del *level set* en problema de diseño  $C_D$

### Evolución de la ecuación de *level set*

Una vez que la geometría y la velocidad de avance han sido correctamente evaluadas, es el momento de hacer evolucionar los conjuntos de nivel mediante la resolución exacta en tiempo de la ecuación de evolución. Esta ecuación es resuelta mediante una discretización de elemento finitos (para más detalles consultar la Sección 2.4).

A medida que avanza en nivel 0, la malla debe ser adaptada con objeto de tener una alta definición de la interfase de la que se extraerá el nuevo diseño de forma. En la Figura 7.30 se muestra la evolución de dos circunferencias de diámetro unidad situadas en las coordenadas  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$  que en su expansión colapsarán formando una nueva entidad, de este ensayo es destacable como el mallado acompaña en cada instante a la evolución del frente.

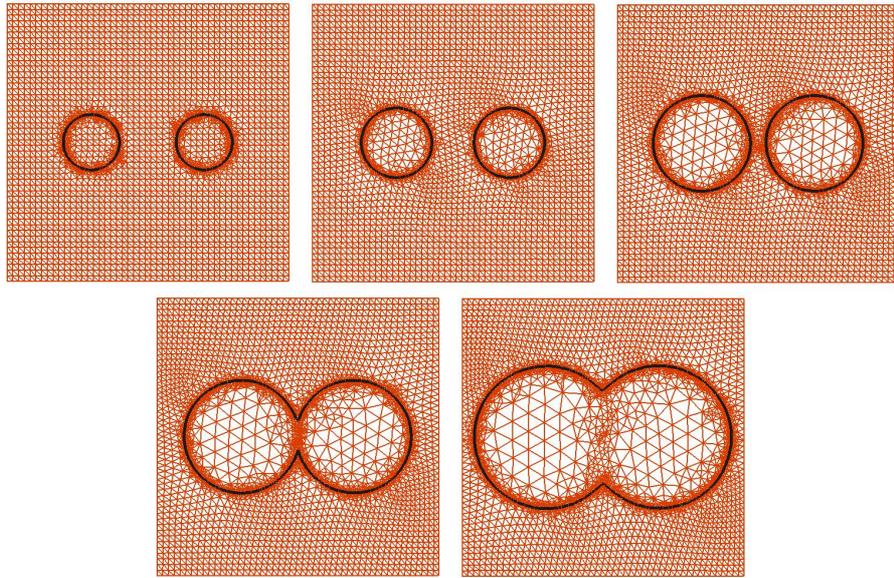


Figura 7.30: Expansión de dos circunferencias con adaptación dinámica de malla

Por otro lado, en la Figura 7.31 se muestra la evolución de una elipse que, debido a las velocidades definidas sobre su interfase, tiende a colapsarse por la mitad formando los nuevos elementos.

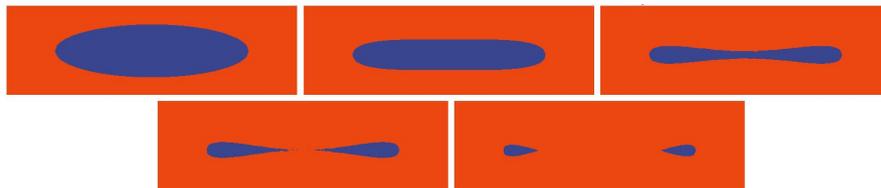


Figura 7.31: Contracción de una elipse

#### Extracción del conjunto de nivel 0

Una vez finalizado el proceso de avance en tiempo, el nuevo conjunto de nivel de valor 0 debe ser extraído de la malla, y la distribución de puntos sobre esa curva debe ser reajustada con objeto de volver a generar una malla de superficie apta para la resolución de las ecuaciones de la mecánica de los fluidos. El algoritmo para extraer el nivel cero se basa en la realización de búsquedas selectivas que permitan localizar aquellos elementos del mallado en los que se produce un cambio de signo en la variable distancia entre los diferentes nodos que lo componen. Una vez localizados los elementos, la curva del nivel cero es calculada.

En la Figura 7.32 se muestra un *level set* que ha terminado su evolución y de la malla (empleada para la evolución del *level set*) se ha extraído el nivel 0 para volver a construir un malla numérica que pueda ser empleada por un resolutor de las ecuaciones de la mecánica de los fluidos.

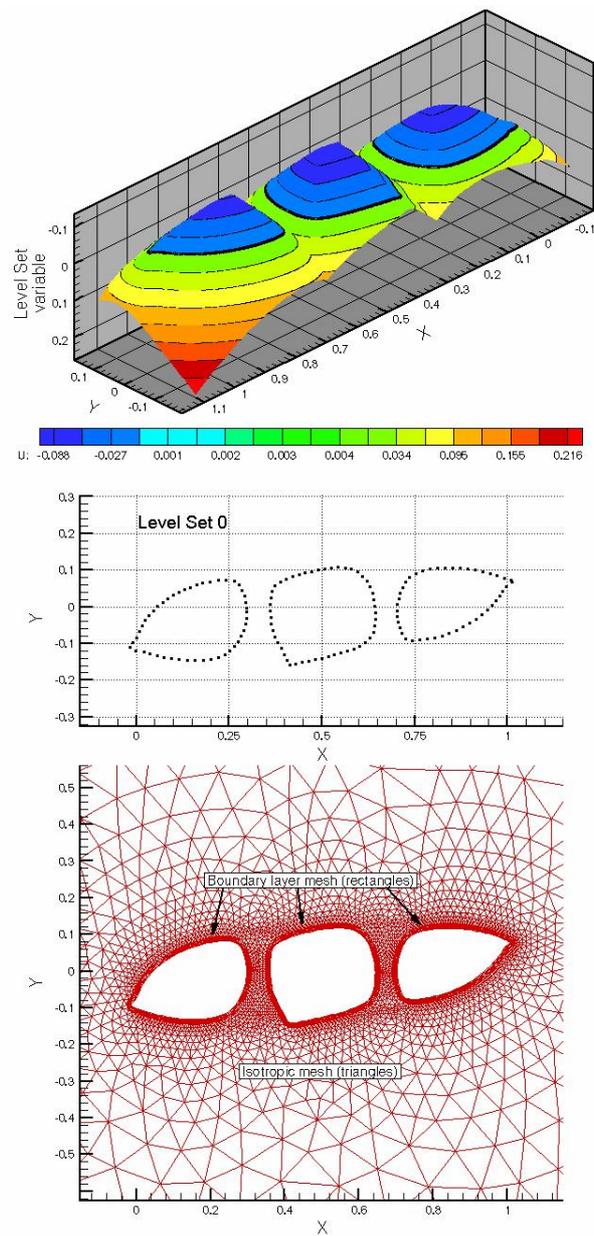


Figura 7.32: Extracción del conjunto de nivel 0.

Es importante destacar que es precisamente la necesidad de generar mallas adecuadas para el cálculo de Navier-Stokes (con capas límites que tienen celdillas con grandes factores de estiramiento para capturar los esfuerzos viscosos en la capa límite) lo que obliga a extraer el nivel 0 del *level set* y generar una malla apta para los resolvers de Navier-Stokes. En otras circunstancias y con otras ecuaciones (como puede ser la ecuación del calor) es posible emplear el mismo mallado para resolver las ecuaciones constitutivas del fenómeno que se pretende estudiar y la de los *level set*, simplificando notablemente el proceso de diseño.

### 7.3. Validación del proceso de optimización aerodinámica

En esta sección se presentarán cinco aplicaciones de las técnicas desarrolladas a lo largo de esta memoria:

- El primer ejemplo consiste en el diseño de un perfil aerodinámico en condiciones transónicas, donde la configuración de partida presenta varias ondas de choque.
- En segundo lugar, se procederá al planteamiento de un problema simplificado transónico de Euler en el cual se comparará la optimización realizada a través del empleo del adjunto continuo y el método de diferencias finitas para el cálculo de gradientes.
- En tercer lugar, se abordará el diseño mediante las ecuaciones de Euler y empleando la formulación adjunta continua completa.
- En cuarto lugar, se estudiará el diseño de perfiles aerodinámicos introducidos en un fluido a bajo número de Reynolds, en el marco de Navier-Stokes laminar estacionario cuyo objeto es reducir la resistencia de fricción.
- Por último, se procederá al diseño mediante *level set* de 7 cuerpos inmersos en una corriente a muy bajo número de Reynolds.

#### 7.3.1. Rediseño transónico de un perfil aerodinámico

En este apartado se realizará un rediseño de un perfil aerodinámico NACA 0012 con objeto de reducir la resistencia de onda  $C_D$ , manteniendo el valor de su sustentación  $C_L$  y sujeto a otras restricciones geométricas.

Las condiciones del flujo de aire en el que se encuentra inmerso el perfil aerodinámico son: número de Mach igual a 0,8 y ángulo de ataque  $1,25^\circ$ . Para realizar este diseño se han empleado como variables de diseño las funciones de deformación de Hicks-Henne. En la Figura 7.33 (izq) se pueden apreciar los gradientes de la función objetivo de resistencia  $C_D$  en la primera iteración de optimización, comparados con los gradientes obtenidos mediante diferencias finitas. La concordancia de los resultados entre ambos métodos es buena, con algunas discrepancias en el lado superior de la superficie de sustentación aguas abajo de la onda de choque.

En este problema de diseño transónico, la función objetivo consiste en la minimización de la resistencia de onda. Como restricciones se obliga al mantenimiento de la sustentación a su valor inicial y que el espesor mínimo sea de un 10 % de la cuerda.

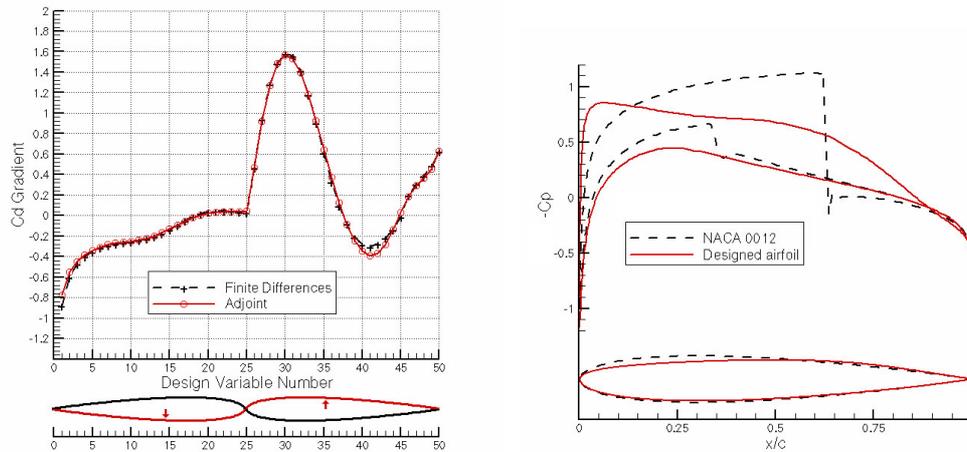


Figura 7.33: Gradientes transónicos del  $C_D$ , caso Euler transónico (izq) y Coeficiente  $C_p$  y geometría inicial y diseñada (der)

Los resultados finales de la optimización se muestran en la Figura 7.33 (der). Después del proceso de la optimización el nuevo perfil aerodinámico tiene un coeficiente de resistencia de 0,0012, que es un 5 % de la resistencia original del NACA 0012 (reducción total de 200 *counts*, la onda de choque ha desaparecido). Por otro lado, el coeficiente de sustentación es un 105 % mayor que el original.

### 7.3.2. Método adjunto vs. diferencias finitas

En esta sección se comparará un proceso de optimización con restricciones en el caso de emplear para el cálculo de los gradientes el método adjunto continuo o bien el cálculo directo de los gradientes aproximados a partir del empleo de las diferencias finitas.

En el problema planteado de diseño transónico (número de Mach igual a 0,8 y ángulo de ataque  $1,25^\circ$ ), la función objetivo consiste en la minimización de la resistencia de onda de un perfil aerodinámico NACA 0012. Las restricciones empleadas son: Coeficiente de sustentación igual al valor inicial y espesor mínimo del perfil del 10 % de la cuerda.

En la Figura 7.34 se puede apreciar el proceso de convergencia del optimizador en el caso de emplear diferencias finitas o el adjunto continuo. Es destacable cómo se obtiene un menor valor de la función objetivo en el caso de emplear el método adjunto continuo en el que la onda de choque ha desaparecido completamente.

Por otro lado, en el caso de emplear diferencias finitas para el cálculo de los gradientes aproximados, la restricción de sustentación mínima (igual o mayor que la inicial) se verifica claramente y se obtiene un valor muy superior al inicial. En el caso del adjunto continuo las mejoras en sustentación no son relevantes. En la Figura 7.35 se muestra el coeficiente final de presiones comparado con el inicial de un perfil NACA 0012.

Es destacable que en el caso de emplear el adjunto continuo, la onda de choque desaparece completamente. Por último, a modo de comparativa, se presentan las geometrías finales e iniciales en la Figura 7.35.

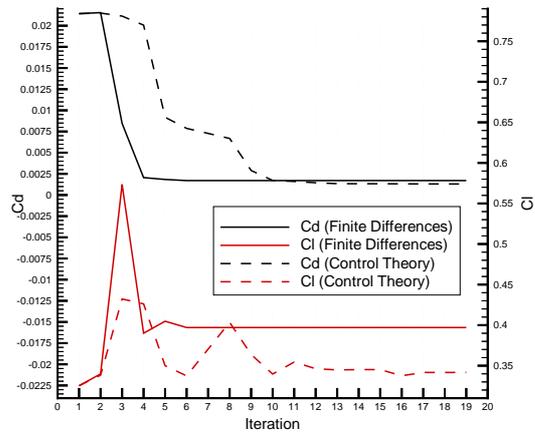


Figura 7.34: Proceso de convergencia

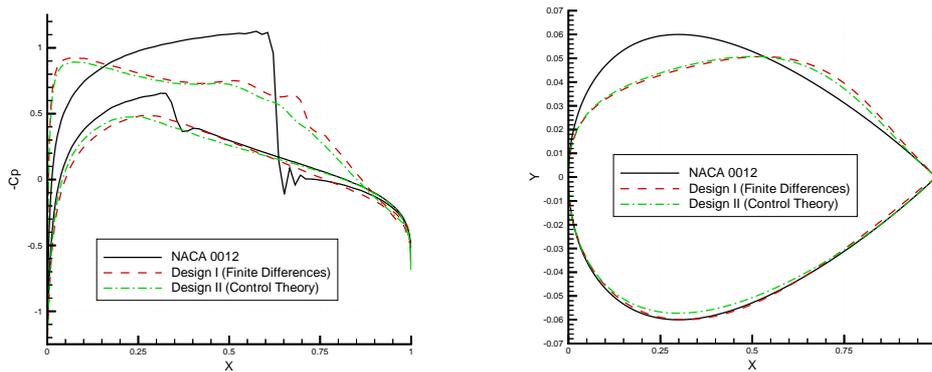


Figura 7.35: Coeficientes de presiones  $C_p$  (izq). Geometría (der)

### 7.3.3. Optimización con discontinuidades

A lo largo de esta memoria, en el caso de soluciones de flujo no regulares, se ha percibido la importancia de tener en cuenta la sensibilidad de un funcional respecto de un desplazamiento de las discontinuidades, ver Capítulo 3 y Sección 4.4.

En esta línea de trabajo, a nivel práctico, se han desarrollado dos métodos con diferente grado de aplicabilidad:

Método 1. Análisis cuidadoso de las condiciones que se deben verificar sobre el choque en el estado adjunto. Este análisis nos permite determinar unas condiciones internas sobre el choque que introducen la sensibilidad del funcional con respecto de variaciones de la posición del choque. Este primer método consiste en la imposición numérica de estas relaciones adjuntas de Rankine-Hugoniot

(ver Sección 4.4.1).

Método 2. Empleo del método de las direcciones de descenso alternantes, desarrollando una estrategia de optimización en dos direcciones de descenso: La primera que desplace el choque y la segunda que mueva la solución a ambos lados. Este método ya ha sido experimentado numéricamente en el Capítulo 3 en el ámbito de la ecuación de Burgers.

Así como en el Capítulo 3 se estudió la importancia del método de las direcciones de descenso alternantes, a continuación se presenta un ejemplo que incide sobre la importancia de imponer las llamadas condiciones internas de contorno que fueron empleadas en la Sección 7.2.3. El problema de optimización seleccionado para validar el Método 1 consiste en la minimización del coeficiente de resistencia  $C_D$  de un perfil aerodinámico NACA0012 expuesto a una corriente de aire a una velocidad de 0,8 Mach y un ángulo de incidencia de  $1,2^\circ$ . Para la optimización se mantiene como restricción la sustentación mayor o igual que la inicial y se han empleado un total de 50 variables de Hicks-Henne aplicadas sobre la parte superior del perfil aerodinámico (desde el 25 % hasta el 75 % de la cuerda). Con estas variables de diseño no es previsible que se pueda eliminar completamente la onda de choque.

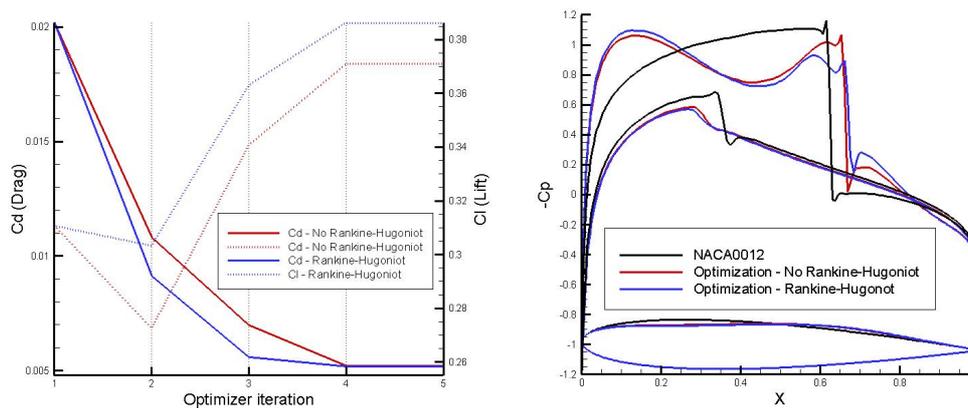


Figura 7.36: Evolución de la optimización (izq). Coeficientes de presiones finales y geometría (der).

En la Figura 7.36 (izq) se puede apreciar la evolución del proceso de optimización imponiendo y sin imponer las relaciones adjuntas de Rankine-Hugoniot. A partir de la cuarta iteración el problema de optimización converge para ambos métodos. Sin embargo, es destacable que empleando las relaciones adjuntas de Rankine-Hugoniot se alcanza casi la convergencia en la tercera iteración, lo que supone un ahorro, en este caso, de aproximadamente un cuarto del tiempo requerido para la simulación completa.

Finalmente, en la Figura 7.36 (der) se comparan los coeficientes finales de presiones a los que se ha llegado con ambas metodologías. Una vez más se comprueba cómo el choque en el caso de haber impuesto las condiciones adjuntas de Rankine-Hugoniot es menor.

### 7.3.4. Rediseño subsónico de un perfil aerodinámico

A continuación se presenta el estudio de la optimización en un caso de flujo viscoso en régimen laminar. Las condiciones del flujo son las siguientes: el número de Mach igual a 0,3, el ángulo de ataque  $2,50^\circ$  y el número de Reynolds de 1000, que garantiza un flujo laminar y estacionario a lo largo del perfil. El problema de diseño propuesto comienza con las condiciones ya descritas, y la función objetivo consiste en la minimización del coeficiente de resistencia aerodinámica  $C_D$ , incrementando el coeficiente de sustentación  $C_L$  a 0,15, y empleando 3 restricciones geométricas: mínimo valor del espesor máximo al 12 % de la cuerda, radio de curvatura congelado en el borde de ataque y mínimo espesor del perfil al 75 % de la cuerda.

Para realizar este diseño se han empleado como variables de diseño las funciones de deformación de Hicks-Henne. En la Figura 7.37 (izq) se pueden apreciar los gradientes de la función objetivo de resistencia  $C_D$  en la primera iteración de optimización, comparados con los gradientes obtenidos mediante diferencias finitas.

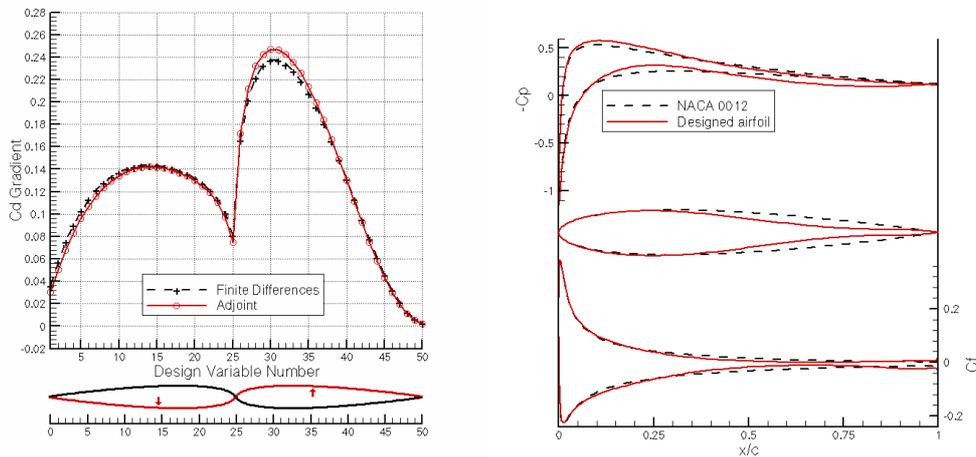


Figura 7.37: Gradientes de  $C_D$ , caso Navier-Stokes laminar (izq).  $C_P$ ,  $C_F$  y geometría inicial y diseñada (der).

En la Figura 7.37 (der) se muestran los resultados de la optimización. Después de 9 ciclos de diseño, el nuevo perfil basado en un NACA 0012 tiene un coeficiente de resistencia de 0,1225, que es un 97 % de la resistencia viscosa original. Además, la sustentación es un 111 % mayor que la original.

### 7.3.5. Diseño empleando el método de los conjuntos de nivel

Los diseños anteriores se han realizado mediante el empleo de un optimizador con restricciones basado en la técnica de las direcciones factibles. En este caso, pretendemos optimizar una configuración no convencional y para ello se empleará el método de los conjuntos de nivel. De manera general, la utilización de esta técnica puede quedar justificada por 3 motivos:

- En primer lugar, esta técnica es apropiada en aquellas circunstancias en las que la parametrización de la superficie no está clara o es muy compleja.
- El empleo del método de *level set* es también válido en aquellas geometrías con aristas o intersecciones que, con gran probabilidad, causarán el cruce de superficies al desarrollarse la optimización.
- Por último, esta técnica es muy recomendable cuando se pretenden optimizar problemas en los que existen múltiples cuerpos inmersos en el fluido y que pueden evolucionar hasta tocarse unos con otros.

Con objeto de validar los desarrollos obtenidos mediante el método de *level set* se ha tomado una configuración peculiar de 7 pequeños cuadrados inmersos en una corriente fluida. Las condiciones del flujo de aire son: número de Mach 0,2, ángulo de ataque 2,5° y un número de Reynolds de 10, que garantiza un flujo laminar estacionario alrededor de los cuerpos inmersos en el fluido. La función objetivo que se pretende maximizar es el cociente entre el coeficiente de sustentación  $C_L$  y el coeficiente de resistencia  $C_D$ .

A partir del análisis de las imágenes de la Figura 7.38 se puede estudiar como han ido evolucionando los diferentes cuerpos inmersos en el fluido.

Esta optimización, constituye una aplicación real y novedosa de la metodología de los conjuntos de nivel al diseño aerodinámico y aporta fundamentalmente la capacidad de diseñar cuerpos cuya geometría es compleja y de difícil parametrización. Elafilamiento de la primera y última forma y la constitución de canales en “S” entre los diferentes bloques son sólo algunos de los interesantes fenómenos que se pueden observar en esta optimización no convencional.

En la Figura 7.39 se puede estudiar la evolución del coeficiente de sustentación  $C_L$  y resistencia  $C_D$  en el proceso global de optimización. En estas primeras 25 iteraciones la eficiencia ha mejorado desde 0,0722 hasta un 0,2875. Si se deja evolucionar el *level set* 10 iteraciones más, la eficiencia alcanzará un valor de 0,3421 con unos altísimos valores de coeficiente de sustentación de 0,7411.

Otro ejemplo de optimización mediante el empleo de la técnica de los conjuntos de nivel, se muestra en la Figura 7.40. En este caso, la configuración inicial es un rectángulo, la función objetivo es la minimización de la resistencia, y se emplean dos restricciones: un coeficiente de sustentación mayor de 0,5, y un coeficiente de momentos que debe estar entre  $-0,02$  y  $0,02$ . Finalmente, la velocidad de la interfase se calcula como:

$$\begin{aligned} speed = C'_d - 4,0\epsilon_1 C'_l (MAX(C_{lmin} - C_l, 0,0))^3 & \quad (7.14) \\ + 4,0\epsilon_2 C'_m \left( (MAX(-C_{mmax} + C_m, 0,0))^3 - (MAX(C_{mmin} - C_m, 0,0))^3 \right), & \end{aligned}$$

donde con objeto de satisfacer las restricciones, en lugar de seleccionar el valor exacto para  $C_{lmin}$ ,  $C_{mmin}$  y  $C_{mmax}$  se seleccionan unos valores ligeramente superiores. Por otro lado  $'$  se emplea para denotar la derivada con respecto de movimientos infinitesimales de la superficie (calculada con la metodología adjunta).

Las condiciones de flujo seleccionadas son número de Mach igual a 0,25, sin ángulo de ataque y número de Reynolds de 500. En la Figura 7.41 se puede estudiar el historial de convergencia de los parámetros adimensionales. En 20 iteraciones todas las restricciones se verifican y la resistencia a disminuido desde 0,2404 hasta 0,2239.

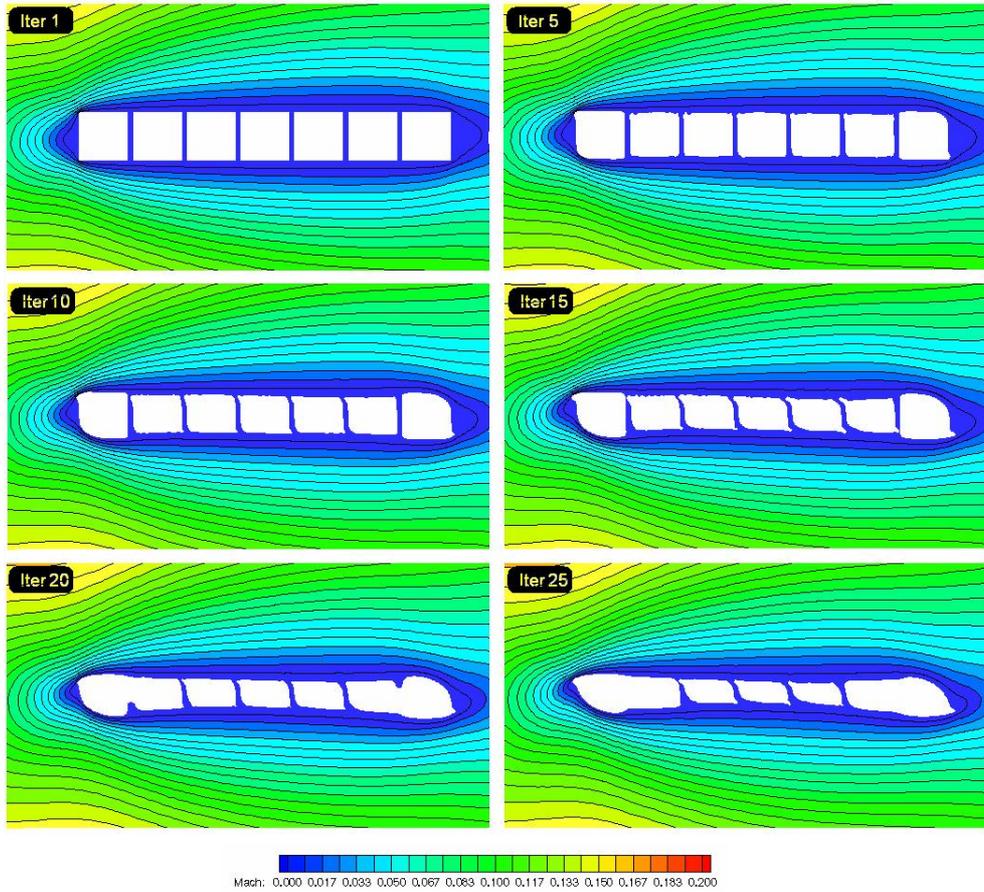


Figura 7.38: Evolución temporal de la optimización mediante *level set*

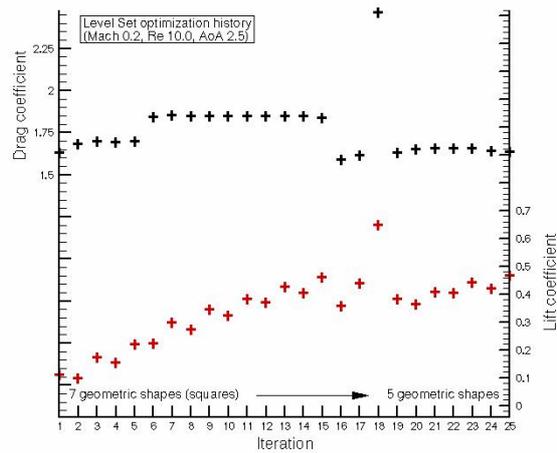


Figura 7.39: Evolución de la optimización mediante el método de conjuntos de nivel.

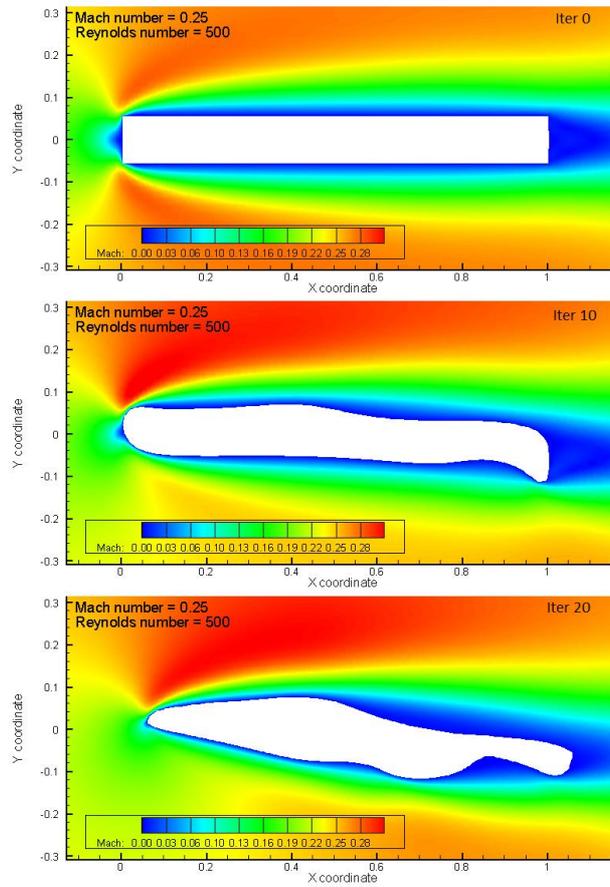


Figura 7.40: Evolución de los conjuntos de niveles en el proceso de optimización.

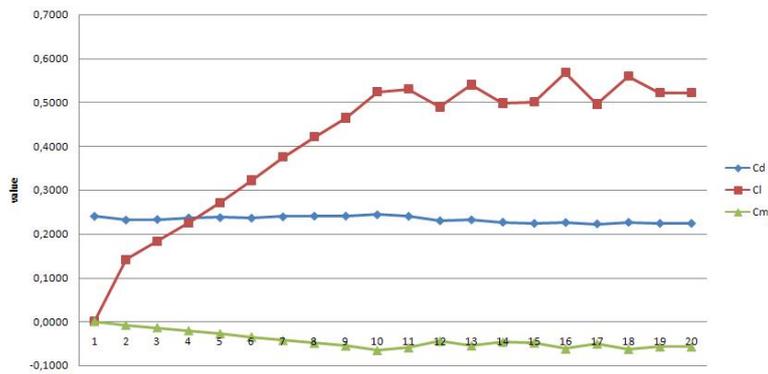


Figura 7.41: Evolución de la optimización.

## 7.4. Validación de la estrategia bimalla de filtrado

A lo largo de la Sección 6.5 se estudió que una secuencia progresiva de iteraciones en un proceso de optimización podía llevar a la divergencia del método debido a inestabilidades. En esta Sección se plantearán algunos ejemplos de este fenómeno y la solución planteada a través de la técnica bimalla. Está dividida en dos apartados: En primer lugar, se plantea la importancia de realizar un filtrado sobre la sensibilidad del funcional calculado mediante el método adjunto continuo. En segundo lugar se planteará un ejemplo práctico de optimización mediante el filtrado.

### 7.4.1. Inestabilidades en el proceso de diseño óptimo de forma

A continuación, se analizará el proceso de diseño óptimo de la superficie de un perfil aerodinámico de la familia NACA0012 en condiciones subsónicas (número de Mach 0,5 y ángulo de ataque  $2,0^\circ$ ). El funcional seleccionado para su optimización es el coeficiente de sustentación adimensional  $C_L$ . Las ecuaciones que describen la dinámica de los fluidos serán las ecuaciones de Euler y como variables de diseño se tomará la posición  $\vec{x} = (x, y)$  de cada nodo discreto sobre la superficie a diseñar (dentro de una determinada zona de la superficie).

El primer paso consiste en simular el perfil aerodinámico NACA0012 inmerso en el fluido y calcular la sensibilidad superficial de  $C_L$  a través de la resolución de la ecuación adjunta. Para realizar este estudio se emplearán tres mallas con diferente número de nodos sobre la superficie (la más fina tiene 400 nodos en la superficie y la más basta tan sólo 100). En la Figura 7.42 (derecha) se representa la velocidad del fluido sobre la superficie de control (para mallas con diferente densidad de nodos). En este caso es posible apreciar la situación del punto de remanso que se corresponde con una zona de altos gradientes en la velocidad.

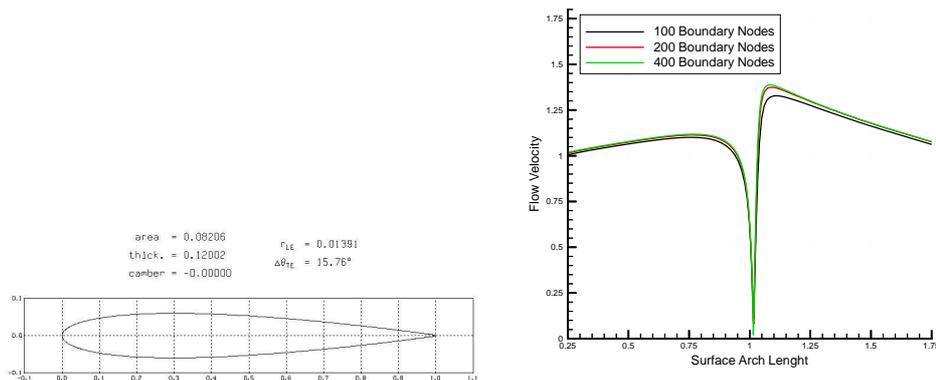


Figura 7.42: Perfil NACA0012 (izq) y velocidad del fluido sobre su superficie (der).

Una vez resueltas las ecuaciones de Euler se procederá al cálculo de la sensibilidad del funcional sobre la superficie. Para ello será necesaria la resolución de las ecuaciones adjuntas de Euler. En la Figura 7.43 (izquierda) se muestran diversos controles (sensibilidades) para diferentes discretizaciones numéricas (100, 200 y 400 nodos sobre la

superficie). Es posible comprobar que para el mallado más fino el control presenta oscilaciones de alta frecuencia muy importantes que pueden causar la divergencia del proceso del control.

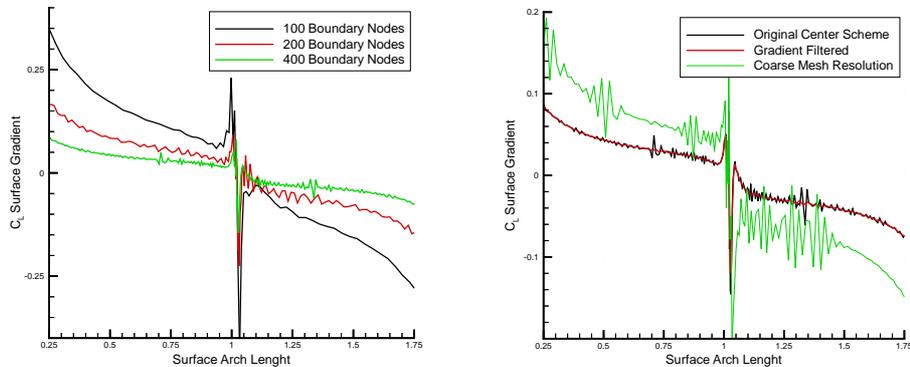


Figura 7.43: Control de mín  $C_L$  (izq) y estrategias para estabilizarlo (der).

Resulta interesante constatar que existe una acusada variación en la sensibilidad en el punto de remanso del perfil aerodinámico. Esta variación es más violenta para mallados más bastos debido a que en este punto de remanso, a medida que la definición de la malla empeora, los gradientes del funcional crecen.

Se han implementado diferentes alternativas para evitar las oscilaciones de alta frecuencia que aparecen en la Figura 7.43. La base de estos métodos consiste en, al calcular la dirección de máxima pendiente, considerar solamente las soluciones del sistema de adjunto que corresponden a los datos que oscilan más lentamente y que son calculados en mallas bastas.

En la Figura 7.43 (derecha) se muestran dos estrategias de filtrado del control: 1) Filtrado de la sensibilidad del funcional, mediante uso de técnica bimalla, sobre la superficie sólida (línea roja). 2) Solución de la ecuación adjunta en una malla más basta que la que se utilizó para solucionar el problema directo. En base a los resultados obtenidos, el uso directo de una estrategia de filtración de bimalla aplicada al control es probablemente la mejor solución para controlar el problema.

#### 7.4.2. Optimización de forma aerodinámica mediante filtrado

Dando un paso más en el análisis del ejemplo antes planteado, ahora emplearemos la sensibilidad superficial del funcional para modificar la forma del objeto a diseño con la finalidad de minimizar el valor del funcional. Como punto de partida, se tomará el problema anterior (con las mismas consideraciones físicas) y dos discretizaciones: la primera de 50 nodos sobre la la superficie sólida y la segunda con 400 nodos. (ver Figura 7.44).

Igual que antes, el objetivo es controlar el sistema de Euler variando la forma de la superficie para de esta manera optimizar la sustentación del perfil aerodinámico. En primer lugar se emplea la malla basta. En la Figura 7.45 (izquierda) se muestran tres

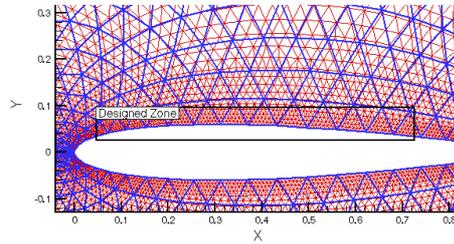


Figura 7.44: Discretizaciones empleadas (50 y 400 nodos sobre la superficie).

pasos del proceso de optimización empleando, así como el valor del control en cada uno de esos pasos de la optimización.

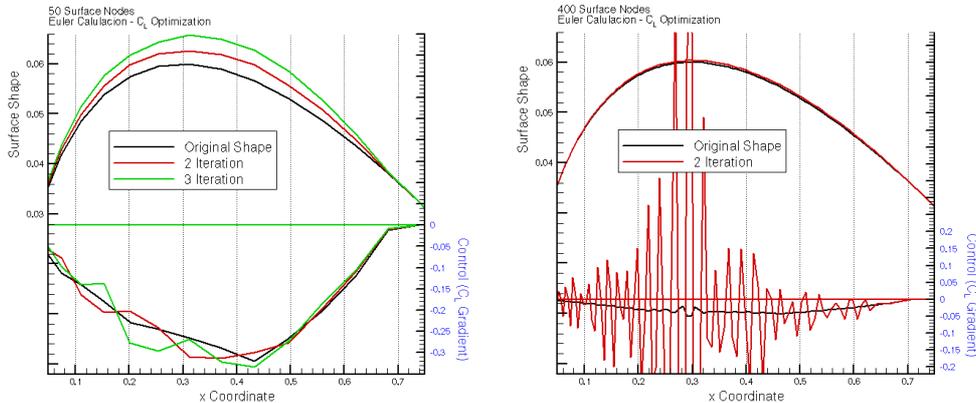


Figura 7.45: Optimización sin filtrado en una malla basta (izq) y en una malla fina (der).

Por otro lado, si se utiliza la malla más fina (véase la Figura 7.45 (derecha)), el control diverge casi inmediatamente. En la segunda iteración, el control ha divergido totalmente y el proceso de la optimización falla. En este caso, para lograr la convergencia del control, será necesario aplicar una estrategia de filtrado. En la Figura 7.46 se muestra el efecto que proporciona una estrategia de filtración bimalla aplicada a la sensibilidad funcional computada sobre la superficie (control).

En conclusión, mediante un algoritmo bimalla aplicado sobre las sensibilidades calculadas en la malla fina, es posible hacer que el proceso del control sea estable, y con ello obtener una buena solución para el problema de la optimización de forma.

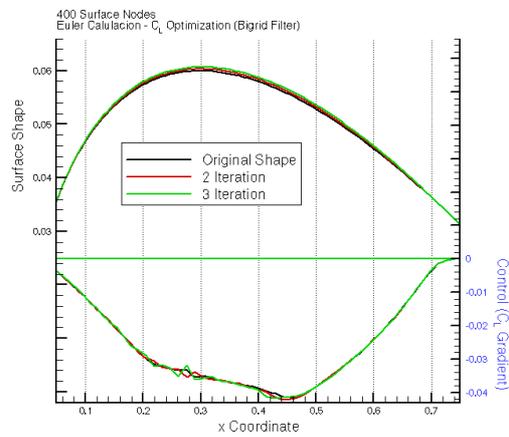


Figura 7.46: Optimización en una malla fina mediante filtrado bimalla.



## Capítulo 8

---

# Conclusiones

---

El cálculo de gradientes de un funcional aerodinámico mediante procedimientos inspirados en la teoría de control a través del empleo del estado adjunto es un campo de gran actividad en la aerodinámica moderna. Estos métodos, en sus dos versiones (continua y discreta), presentan importantes ventajas respecto la técnica clásica de diferencias finitas:

- Ventaja 1. Tal y como se ha estudiado a lo largo del Capítulo 7, estos métodos son muy eficientes aplicados a problemas con un gran número de variables de diseño en relación al número de restricciones (ver Sección 2.3.3).
- Ventaja 2. En el caso del método adjunto continuo con soluciones no regulares, es posible desarrollar métodos optimización que tengan en cuenta la sensibilidad del funcional con respecto desplazamientos de la discontinuidad. En particular, en esta tesis se ha desarrollado un método original (método de las direcciones de descenso alternantes) que saca ventaja a los métodos tradicionales al emplear la información derivada del cálculo de la sensibilidad del funcional a minimizar, con respecto del desplazamiento de la discontinuidad (ver Sección 3.5).
- Ventaja 3. Finalmente, estos métodos permiten el cálculo directo de la sensibilidad de una determinada función objetivo ante variaciones infinitesimales en la forma de la superficie del objeto de diseñar, lo que abre las puertas a la optimización directa de la forma del objeto mediante el empleo de técnicas como los conjuntos de nivel (ver Secciones 2.4 y 7.3.5).

A lo largo de esta tesis se han manejado dos hipótesis de trabajo sobre las que han girado gran parte de las investigaciones:

1. Método adjunto continuo como alternativa viable a los métodos denominados adjuntos discretos (en los que el estado adjunto se calcula sobre las ecuaciones, ya discretizadas, que gobiernan el sistema).
2. Aplicación a la aerodinámica de los métodos de conjuntos de nivel, estudiando su viabilidad en entornos complejos como son las ecuaciones de Navier-Stokes com-

presibles.

Como resultado de esta investigación, se han desarrollado códigos numéricos eficientes para la resolución de las ecuaciones de Burgers, Euler y Navier-Stokes (en sus versiones directa y adjunta) así como un método de elementos finitos para la resolución de las ecuaciones de *level set*, métodos de adaptación, remallado, multimalla y técnicas de optimización (con variables alternantes). Además de estos desarrollos de carácter técnico, son destacables los siguientes avances, más allá del estado del arte actual en esta materia:

- Aportación 1. En el Capítulo 3 se ha desarrollado el método de las direcciones alternantes (ver Sección 3.5) aplicado a las ecuaciones de Burgers, que constituye una nueva estrategia de optimización en dos fases para el cálculo de aproximaciones numéricas de minimizadores y cuyos resultados se presentan en la Sección 3.7.
- Aportación 2. En el Capítulo 4 se ha desarrollado el adjunto continuo de sistemas gobernados por las ecuaciones de Euler 2D (ver Sección 4.4). La formulación completa de las relaciones adjuntas de Rankine-Hugoniot y una útil versión simplificada (ver Sección 4.4.1). En el Capítulo 7, mediante varios ejemplos bidimensionales (ver Sección 7.3.3) se constata que la imposición de las relaciones adjuntas de Rankine-Hugoniot mejora la convergencia del proceso de optimización. Así mismo, se han desarrollado y aplicado técnicas de filtrado bimalla (ver Secciones 6.5 y 7.4) para evitar las inestabilidades desarrolladas al calcular los gradientes en el proceso de diseño óptimo.
- Aportación 3. En el ámbito de Navier-Stokes, en el Capítulo 5 se ha desarrollado un método adjunto continuo que permite la evaluación de los gradientes de un funcional de interés aeronáutico sin necesidad del empleo de esquemas de alto orden (ver Apéndice 5.3.2). Finalmente en el Capítulo 7 se ha planteado la optimización numérica en el ámbito de la Mecánica de los Fluidos mediante técnicas basadas en los métodos de conjuntos de nivel y el adjunto continuo (ver Sección 7.3.5).

A lo largo de esta memoria, se ha planteado la viabilidad del adjunto continuo como esquemas robustos matemáticos frente a la diferenciación automática y el adjunto discreto que en entornos complejos no son formalmente aceptables debido a la no diferenciabilidad de los esquemas numéricos empleados. Como trabajo futuro se abren las siguientes líneas de trabajo:

- Línea de trabajo 1. Continuar el desarrollo del método de las direcciones alternantes para extenderlo a ámbitos más complejos, Burgers 2D, Euler quasi1D y finalmente Euler 2D.
- Línea de trabajo 2. Demostración de la convergencia del método de direcciones alternantes.

- Línea de trabajo 3. Estudios de existencia, unicidad y regularidad de soluciones en problemas de interés industrial.
- Línea de trabajo 4. Desarrollo de una formulación adjunta para problemas gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes turbulentas (RANS). Este tipo de ecuaciones son las que se emplean en los cálculos de interés aeronáutico y es necesario abordar la problemática que plantean.
- Línea de trabajo 5. Por otro lado, es necesario investigar en las variables de diseño y la parametrización. En problemas con restricciones y donde el campo de diseño es grande, la introducción de parametrizaciones adecuadas puede ser fundamental.
- Línea de trabajo 6. Por último, y en línea con el apartado anterior, la optimización mediante métodos de conjuntos de nivel parece ser el algoritmo en la actualidad más robusto para trabajar con el gradiente local, es por ello necesario la investigación en nuevas formulaciones del problema que faciliten su aplicación a entornos industriales.



---

## Bibliografía

---

- [1] I. H. Abbott and A. E. Von Doenhoff. *Theory of Wing Sections*. Dover Publications, 1959. [citado en p. 135]
- [2] G. Allaire and F. Jouve. A level-set method for vibration and multiple loads structural optimization. Technical Report 542, Ecole Polytechnique (Centre de Mathématiques Appliquées), June 2004. [citado en p. 18, 38]
- [3] W.K. Anderson and D.L. Bonhaus. Aerodynamic design on unstructured grids for turbulent flows. Technical Report 112867, Langley Research Center, NASA, Hampton, Virginia, 6 1997. [citado en p. 33, 137]
- [4] W.K. Anderson and V. Venkatakrisnan. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation. *AIAA Paper*, 97-0643, 1997. [citado en p. 4, 17, 122, 137]
- [5] P. Argüelles, A. Bischoff, P. Busquin, B.A.C. Droste, R. Evans, J-L Lagardère, A. Lina, J. Lumsden, D. Ranque, S. Rasmussen, P. Reutlinger, R. Robins, H. Terho, and A. Wittlöv. European aeronautics: a vision for 2020. Technical report, European commission, 1 2001. [citado en p. 23]
- [6] E. Arian and M.D. Salas. Admitting the inadmissible: Adjoint formulation for incomplete cost functionals in aerodynamic optimization. *AIAA Journal*, 37(1):37–44, 1999. [citado en p. 104, 137]
- [7] B. S. Baldwin and H. Lomax. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA Paper*, 78-257, 1978. [citado en p. 26]
- [8] C. Bardos and O. Pironneau. A formalism for the differentiation of conservation laws. *C. R. Acad. Sci., Paris*, I(335):839–845, 2002. [citado en p. 9, 54, 55, 89]
- [9] T.J. Barth. Aspect of unstructured grid and finite volume solvers for the Euler and Navier-Stokes equations. *AIAA Paper*, 91-0237, 1994. [citado en p. 26, 120]
- [10] T.J. Barth. Aspect of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier-Stokes equations. In *Lecture Notes Presented at the VKI Lecture Series, 1994 - 05*, Rhode Saint Genese Begium, 2 1995. Von karman Institute for fluid dynamics. [citado en p. 29]
- [11] O. Baysal and K. Ghayour. Continuous adjoint sensitivities for optimization with general functional on unstructured meshes. *AIAA Journal*, 39(1), 2001. [citado en p. 37]
- [12] F. Bouchut and F. James. One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients. *Nonlinear Analysis, Theory and Applications*, 32(7):891–933, 1998. [citado en p. 47, 54, 57, 58]

- [13] F. Bouchut, F. James, and S. Mancini. Uniqueness and weak stability for multi-dimensional transport equations with one-sided Lipschitz coefficient. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 4(5):1–25, 1999. [citado en p. 47]
- [14] Y. Brenier and S. Osher. The discrete one-sided lipschitz condition for convex scalar conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 25(1):8–23, 1988. [citado en p. 48, 50, 51]
- [15] A. Bressan and A. Marson. A maximum principle for optimally controlled systems of conservation laws. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 94:79–94, 1995. [citado en p. 7, 37, 46, 47, 57]
- [16] A. Bressan and A. Marson. A variational calculus for discontinuous solutions of systems of conservation laws. *Commun. in Partial Differential Equations*, 20(9 10):1491–1552, 1995. [citado en p. 10, 46, 47, 54, 56]
- [17] M. Bristeau, R. Glowinski, J. Periaux, P. Perrier, O. Pironneau, and C. Poirier. On the numerical solution of nonlinear problems in fluid dynamics by least squares and finite element methods (ii), application to transonic flow simulations. *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 51:363–394, 1985. [citado en p. 26]
- [18] M.O. Bristeau, R. Glowinski, B. Mantel, J. Periaux, and M. Sefrioui. *Genetic algorithms for electromagnetic backscattering multiobjective optimization*. John Wiley and Sons, Inc., New York, electromagnetic optimization by genetic algorithms edition, 1999. [citado en p. 26, 32]
- [19] C. Castro, C. Lozano, F. Palacios, and E. Zuazua. A systematic continuous adjoint approach to viscous aerodynamic design on unstructured grids. *AIAA Paper*, 2006-51, 2006. [citado en p. 137]
- [20] C. Castro, C. Lozano, F. Palacios, and E. Zuazua. A systematic continuous adjoint approach to viscous aerodynamic design on unstructured grids. *AIAA Journal*, 45(9):2125–2139, 2007. [citado en p. 3, 15, 37, 43]
- [21] C. Castro, F. Palacios, and E. Zuazua. An alternating descent method for the optimal control of the inviscid Burgers equation in the presence of shocks. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(3):369–416, 2008. [citado en p. 8, 62]
- [22] S.R. Chakravarthy. Euler equations - implicit schemes and implicit boundary conditions. *AIAA Paper*, 82-0228, 1982. [citado en p. 26, 92]
- [23] T. Chan and W. Zhu. Level set based shape prior segmentation. *2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05)*, 2:1164–1170, 1995. [citado en p. 18, 38]
- [24] A. Chorin and J. Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics (3rd edition)*. Springer-Verlag, New York, 1993. [citado en p. 90]
- [25] G. F. Corliss, C. Faure, A. Griewank, and L. Hascoet. *Automatic Differentiation of Algorithms: From Simulation to Optimization*. Springer Verlag, New York, 2002. [citado en p. 37, 46]
- [26] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100(1):32–74, December 1928. [citado en p. 31, 129]
- [27] P. A. Davidson. *Turbulence. An introduction for scientist and engineers*. Oxford University Press Inc., New York, 2004. [citado en p. 28]
- [28] Institute fo Aerodynamics DLR and Flow Technology. Technical documentation of the dlr tau-code. Technical report, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V., DLR, 2007. [citado en p. 3]

- [29] R. Dwight. *Efficiency Improvements of RANS-Based Analysis and Optimization using Implicit and Adjoint Methods on Unstructured Grids*. PhD thesis, School of Mathematics, University of Manchester, 2006. [citado en p. 37]
- [30] P. Eliasson. Edge, a Navier-Stokes solver for unstructured grids. Technical Report FOI-R-0298-SE, FOI Scientific Report, 2002. [citado en p. 3]
- [31] J. Elliot and J. Peraire. Aerodynamic design using unstructured meshes. *AIAA Paper, 33rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada,, 96-1941*, January 1996. [citado en p. 33, 137, 138]
- [32] J. Elliot and J. Peraire. Practical three-dimensional aerodynamic design and optimization using unstructured meshes. *AIAA Journal*, 35(9):1479–1485, September 1997. [citado en p. 33, 137, 138]
- [33] M. Escobedo, J. L. Vázquez, and E. Zuazua. Asymptotic behaviour and source-type solutions for diffusion-convection equation. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 124(1):43–65, 1993. [citado en p. 48]
- [34] A. Eucken. The thermal conductivity, the specific heat and the viscosity of gases. *Physik Z Nr*, 1913. [citado en p. 111]
- [35] Bouchut F. and James F. Differentiability with respect to initial data for a scalar conservation law. *Proceedings of the 7th Int. Conf. on Hyperbolic Problems, Zurich 98, International Series Num. Math.*, 129:113–118, 1998. [citado en p. 47, 54, 56, 57]
- [36] G. E. Gadd. The possibility of normal shock waves on a body with convex surfaces in inviscid transonic flow. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 11(1):51–58, 1960. [citado en p. 91]
- [37] S. Garreau, Ph. Guillaume, and M. Masmoudi. The topological asymptotic for pde systems: the elasticity case. *SIAM J. Control Optim*, 39(6):1756–177, 2001. [citado en p. 72]
- [38] A. Gelb and E. Tadmor. Adaptive edge detectors for piecewise smooth data based on the minmod limiter. *Journal of Scientific Computing*, 28(2/3):279–306, 2006. [citado en p. 7]
- [39] M.B. Giles, M.C. Duta, and J.-D. Müller. Adjoint code developments using the exact discrete approach. *AIAA Paper, 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Anaheim (California)*, 2001-2596, June 2001. [citado en p. 37]
- [40] M.B. Giles, M.C. Duta, J-D. Müller, and N.A. Pierce. Algorithm developments for discrete adjoint methods. *AIAA Journal*, 41(2):198–205, February 2003. [citado en p. 37]
- [41] M.B. Giles and N. Pierce. Adjoint equations in CFD: duality, boundary conditions and solution behaviour. *AIAA Paper, 97-1850*, 1997. [citado en p. 111]
- [42] M.B. Giles and N. Pierce. Analytic adjoint solutions for the quasionedimensional euler equations. *J. Fluid Mechanics*, 426:327–345, 2001. [citado en p. 3, 15, 37, 44, 46, 57]
- [43] M.B. Giles and N.A. Pierce. An introduction to the adjoint approach design. *Flow, Turbulence and Combustion*, 65:393–415, 2000. [citado en p. 36]
- [44] R. Glowinski. Ensuring well-posedness by analogy; Stokes problem and boundary control for the wave equation. *J. Compt. Physics*, 103(2):189–221, 1992. [citado en p. 16, 130, 131]
- [45] E. Godlewski and P. Raviart. The linearized stability of solutions of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. a general numerical approach. *Mathematics and Computer in Simulations*, 50:77–95, 1999. [citado en p. 7, 37, 46, 47, 54, 56, 68]
- [46] E. Godlewski and P.A. Raviart. *Hyperbolic systems of conservation laws*. Ellipses, Paris, 1991. [citado en p. 50, 68]

- [47] E. Godlewski and P.A. Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. Springer Verlag, 1996. [citado en p. 37, 45, 66]
- [48] L. Gosse and F. James. Numerical approximations of one-dimensional linear conservation equations with discontinuous coefficients. *Mathematics of Computation*, 69:987–1015, 2000. [citado en p. 68]
- [49] J. Hadamard. *Leçons sur le calcul des variations*. Gauthier-Villars, Paris, 1910. [citado en p. 191]
- [50] R.M. Hicks and P.A. Henne. Wing design by numerical optimization. *Journal of Aircraft*, 15:407–412, 1978. [citado en p. 3, 13, 33, 87, 137]
- [51] R.M. Hicks and G.N. Vanderplaats. Application of numerical optimization to the design of supercritical airfoils without dragcreep. *SAE Technical Paper 770440*, 1977. [citado en p. 13, 137]
- [52] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*. John Wiley and Sons, Inc., 1988. [citado en p. 3, 30, 37, 45, 91, 109, 144]
- [53] F. James and M. Sepúlveda. Convergence results for the flux identification in a scalar conservation law. *SIAM J. Control and Optimization*, 37(3):869–891, 1999. [citado en p. 44]
- [54] A. Jameson. Aerodynamic design via control theory. *Journal of Scientific Computing*, 3:233–260, 1988. [citado en p. 3, 13, 15, 87]
- [55] A. Jameson. The present status, challenges, and future developments in computational fluid dynamics. In AGARD, editor, *Progress and challenges in CFD methods and algorithms*, 1995. [citado en p. 32]
- [56] A. Jameson. Aerodynamic shape optimization using the adjoint method. In *Lecture Notes Presented at the VKI Lecture Series*, Rhode Saint Genese Begium, 2 2003. Von karman Institute for fluid dynamics. [citado en p. 16, 130]
- [57] A. Jameson, J. Alonso, and L. Martinelli. Multigrid unsteady Navier-Stokes calculations with aeroelastic applications. *AIAA Paper*, 95-0048, 1995. [citado en p. 26]
- [58] A. Jameson and D. A. Caughey. A finite volume method for transonic potential flow calculations. *AIAA Paper*, 77-635, 1977. [citado en p. 3, 26]
- [59] A. Jameson, R. Huy, A.C. Brownz, B. Kerchenfautx, D. Griswold, and K. Leoviriyakitk. Aerodynamic shape optimization for the world’s fastest p-51. *AIAA Paper*, 2006-0048, 2006. [citado en p. 138, 146]
- [60] A. Jameson and S. Kim. Reduction of the adjoint gradient formula in the continuous limit. *AIAA Paper*, 2003-0040, 2003. [citado en p. 15, 16, 37, 130]
- [61] A. Jameson, L. Martinelli, and F. Grasso. A multigrid method for the Navier-Stokes equations. *AIAA Paper*, 86-0208, 1986. [citado en p. 26, 31]
- [62] A. Jameson and J. Reuther. Control theory based airfoil design using the euler equations. *AIAA Paper*, 94-4272, 1994. [citado en p. 3, 13]
- [63] A. Jameson, W. Schmidt, and E. Turkel. Numerical solution of the euler equations by finite volume methods using runge-kutta time stepping schemes. *AIAA Paper*, 81-1259, 1981. [citado en p. 6, 26, 30, 35, 144]
- [64] A. Jameson and Y. Seokkwan. Lower-upper implicit schemes with multiple grids for the euler equations. *AIAA Journal*, 25(7):929–935, 1987. [citado en p. 30]
- [65] A. Jameson, S. Sriram, and L. Martinelli. A continuous adjoint method for unstructured grids. *AIAA Paper*, 2003-3955, 2003. [citado en p. 3, 13, 15, 16, 130]

- [66] A. Jameson, S. Sriram, L. Martinelli, and B. Haimes. Aerodynamic shape optimization of complete aircraft configurations using unstructured grids. *AIAA Paper*, 2004-533, 2004. [citado en p. 13]
- [67] A. Jameson and J.C. Vassberg. Studies of alternative numerical optimization methods applied to the brachistochrone problem. *Computational Fluid Dynamics*, 9:281–296, 2000. [citado en p. 130]
- [68] W.H. Jou, W.P. Huffman, and D.P. Young. Implicit solution of the Navier-Stokes equation on unstructured meshes. *AIAA Journal*, 95-1730-CP, 1995. [citado en p. 26, 109]
- [69] W. Kaplan. *Maxima and minima with applications: practical optimization and duality*. Discrete mathematics and optimization. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1999. [citado en p. 31]
- [70] S. Kim, J.J. Alonso, and A. Jameson. Design optimization of high-lift configurations using a viscous continuous adjoint method. *AIAA Paper*, 2002-0844, 2002. [citado en p. 31]
- [71] B. Koren and E. van der Maarel. On steady, inviscid shock waves at continuously curved, convex surfaces. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 4(4):177–195, 1993. [citado en p. 91]
- [72] I Kroo. Aircraft design: synthesis and analysis. //adg.stanford.edu/aa241/AircraftDesign.html, September 2006. [citado en p. 3, 31]
- [73] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Fluid Mechanics (2nd Edition)*. Pergamon Press, 1993. [citado en p. 90, 109]
- [74] P.D. Lax and B. Wendroff. Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy. *Comm. Pure Appl. Math.*, 17:381–398, 1964. [citado en p. 30]
- [75] R. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002. [citado en p. 3, 30, 66]
- [76] R. Löhner. Some useful data structures for the generation of unstructured grids. *Communications in applied numerical methods*, 4:123–135, 1988. [citado en p. 29]
- [77] J.-L. Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer Verlag, New York, 1971. [citado en p. 3]
- [78] A. Majda. The stability of multidimensional shock fronts. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 41(275):iv+95, 1983. [citado en p. 47, 56]
- [79] W.H. Mason and J. Lee. Aerodynamically blunt and sharp bodies. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 31:378–382, may 1994. [citado en p. 89]
- [80] D.J. Mavriplis. Multigrid techniques for unstructured meshes. Technical Report 95-27, ICASE, 1995. [citado en p. 31]
- [81] J.-D. Müller. *On Triangles and Flow*. PhD thesis, The University of Michigan, 1996. [citado en p. 29]
- [82] A. Münch. Optimal internal stabilization of a damped wave equation by a level set approach. *Prépublication du laboratoire de Mathématique de Besançon 01/05,, 01/05*, 2005. [citado en p. 18, 38]
- [83] B. Mohammadi and O. Pironneau. Shape optimization in fluid mechanics. *Annual Rev. Fluids Mechanics*, 36:255–279, 2004. [citado en p. 37, 46]
- [84] G. Métivier. *Stability of multidimensional shocks, course notes*. <http://www.math.u-bordeaux.fr/~metivier/cours.html>, 2003. [citado en p. 47, 56]

- [85] S.K. Nadarajah. *The discrete adjoint approach to aerodynamic shape optimization*. PhD thesis, Department of Aeronautics and Astronautics (Stanford University), 2003. [citado en p. 3]
- [86] S.K. Nadarajah and A. Jameson. A comparison of the continuous and discrete adjoint approach to automatic aerodynamic optimization. *AIAA Paper*, 2000-0667, 2000. [citado en p. 3, 17, 37, 70]
- [87] M. Negreanu and E. Zuazua. Convergence of a multigrid method for the controllability of a 1-d wave equation. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 338(4):413–418, 2004. [citado en p. 16, 131]
- [88] S. Osher and R. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer Verlag, New York, 2002. [citado en p. 18, 38]
- [89] Wesseling P. *Principles of computational fluid dynamics*, volume 29 of *Springer series in computational mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2000. [citado en p. 30]
- [90] F. Palacios. Estudio de la aceleración de convergencia de un código de Euler mediante un método multimalla. Technical Report AT/TNO/4410/008/INTA/02, Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial, INTA, Torrejón de Ardoz, Madrid, 2002. [citado en p. 31]
- [91] F. Palacios. The multigrid method of nens. Technical Report AT/TNO/4410/005/INTA/06, Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial, INTA, Torrejón de Ardoz, Madrid, 2006. [citado en p. 31]
- [92] L.A. Piegl and W. Tiller. *The NURBS book*. Monographs in visual communications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1997. [citado en p. 33, 138]
- [93] O. Pironneau. On optimum design in fluid mechanics. *J. Fluid Mech.*, 64:97–110, 1974. [citado en p. 3]
- [94] O. Pironneau. *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*. Springer-Verlag, New York, 1984. [citado en p. 3]
- [95] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 23 of *Springer series in computational mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1997. [citado en p. 30]
- [96] A. Rizzi, P. Eliasson, I. Lindblad, C. Hirsch, C. Lacor, and J. Haeuser. The engineering of multiblock/multigrid software for Navier-Stokes flows on structured meshes. *Computers and Fluids*, 22:341–367, 1993. [citado en p. 29]
- [97] P.L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43:357–372, 1981. [citado en p. 6, 26, 30, 35, 144]
- [98] C. Rossow. Efficient computation of inviscid flow fields around complex configurations using a multiblock multigrid method. *Communications in Applied Numerical Methods*, 8:735–747, 1992. [citado en p. 29, 31]
- [99] T. W. Sederberg and S. R. Parry. Free-form deformation of solid geometric models. *Proceedings of SIGGRAPH 89 (Computer Graphics)*, 20(4):151–159, 1986. [citado en p. 138]
- [100] J.A. Sethian. *Level set method and fast marching methods*. Cambridge Monographs in Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, 2002. [citado en p. 18, 19, 38, 40]
- [101] J. Simón. Diferenciación con respecto al dominio. *Lectures Notes, Universidad de Sevilla. Sevilla, Spain*, 1989. [citado en p. 88, 191]
- [102] P. R. Spalart and S. R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA Paper*, 92-0439, 1992. [citado en p. 26, 29]

- [103] S. Sriram and A. Jameson. Adjoint formulations for topology, shape and discrete optimization. *AIAA Paper*, 2007-55, 2007. [citado en p. 130]
- [104] AMES Research Staff. Equations, tables and charts for compressible flow. Technical Report 1135, NACA, 1953. [citado en p. 91]
- [105] W. Sutherland. The viscosity of gases and molecular force. *Philosophical Magazine*, 338(S. 5):507–531, 1893. [citado en p. 110]
- [106] E. Tadmor and J. Zou. Novel edge detection methods for incomplete and noisy spectral data (preprint). Technical report. [citado en p. 7]
- [107] R. Tsai and S. Osher. Level set methods and their applications in image science. [citado en p. 38]
- [108] S. Ulbrich. Adjoint-based derivative computations for the optimal control of discontinuous solutions of hyperbolic conservation laws. *Systems and Control Letters*, 48:313–328, 2003. [citado en p. 3, 7, 37, 46, 47, 54, 56]
- [109] B. van Leer, C.H. Tai, and K.G. Powell. Design of optimally-smoothing multi-stage schemes for the Euler equations. *AIAA Paper*, 89-1933, 1989. [citado en p. 26, 31, 130]
- [110] V.N. Vatsa, M.D. Sanetrik, and E.B. Parlatte. Development of a flexible and efficient multigrid-based multi-block flow solver. *AIAA Paper*, 93-0677, 1993. [citado en p. 29, 31]
- [111] R. von Mises. *Theory of flight*. Dover Publications, INC., New York, 1959. [citado en p. 3]
- [112] J.M. Weiss, J.P. Maruszewski, and A.S. Wayne. Implicit solution of the Navier-Stokes equation on unstructured meshes. *AIAA Journal*, 97-2103, 1997. [citado en p. 26]
- [113] P. Wesseling. *An introduction to multigrid methods*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1991. [citado en p. 31]
- [114] F.M. White. *Viscous Fluid Flow*. McGraw Hill Inc., New York, 1974. [citado en p. 89, 90]
- [115] M. Widhalm, A. Ronzheimer, and M. Hepperlez. Comparison between gradient-free and adjoint based optimization of a flying wing transport aircraft aerodynamic configuration in the preliminary design. *AIAA Paper*, 2007-4060, 2007. [citado en p. 137]
- [116] D.C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. 2nd Ed., DCW Industries, Inc., 1998. [citado en p. 26]
- [117] J. Zierep. New results for the normal shock in inviscid flow at a curved surface. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 83(9):603–610, 2003. [citado en p. 91]
- [118] E. Zuazua. Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods. *SIAM Review*, 47(2):197–243, 2005. [citado en p. 43]
- [119] E. Zuazua et al. Wavecontrol: A program for the control and stabilization of waves. <http://www.uam.es/proyectosinv/cen/informweb/manual200805.pdf>, 2005. [citado en p. 132]



## Apéndice A

# Desarrollo de flujos adjuntos

El objetivo de este apéndice es desarrollar las expresiones analíticas que permiten el cálculo de los flujos adjuntos, desarrolladas en los Capítulos 4 y 5. De esta manera se pretende encontrar unas expresiones finales de fácil implementación en un programa de ordenador.

### A.1. Flujos convectivos

A continuación se describe una implementación práctica para la evaluación numérica de los flujos adjuntos convectivos multiplicados por el promedio de las  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} & \vec{A}^T \cdot \vec{n} \Psi \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma-1}{2} |\vec{v}|^2 n_x - u \vec{v} \cdot \vec{n} & \frac{\gamma-1}{2} |\vec{v}|^2 n_y - v \vec{v} \cdot \vec{n} & \vec{v} \cdot \vec{n} \left( \frac{\gamma-1}{2} |\vec{v}|^2 - H \right) \\ n_x & (2-\gamma) u n_x + \vec{v} \cdot \vec{n} & (1-\gamma) u n_y + v n_x & H n_x + (1-\gamma) u \vec{v} \cdot \vec{n} \\ n_y & (1-\gamma) v n_x + u n_y & (2-\gamma) v n_y + \vec{v} \cdot \vec{n} & H n_y + (1-\gamma) v \vec{v} \cdot \vec{n} \\ 0 & (\gamma-1) n_x & (\gamma-1) n_y & \gamma \vec{v} \cdot \vec{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \\ &= (R_1, R_2, R_3, R_4)^T. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Con objeto de obtener una formulación compacta, definimos las siguientes cantidades

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \frac{1}{2} |\vec{v}|^2, \\ Q = \vec{v} \cdot \vec{n}, \\ \psi^{(1)} = n_x \psi_2 + n_y \psi_3 + Q \psi_4, \\ \psi^{(2)} = \psi_1 + u \psi_2 + v \psi_3 + H \psi_4, \\ \gamma - 1 = \gamma^*. \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Finalmente, tras realizar manipulaciones aritméticas, es posible escribir el vector de residuos  $R$  como

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = Q \psi_1 - \psi^{(2)} Q + \gamma^* \psi^{(1)} q, \\ R_2 = Q \psi_2 + \psi^{(2)} n_x - \gamma^* \psi^{(1)} u, \\ R_3 = Q \psi_3 + \psi^{(2)} n_y - \gamma^* \psi^{(1)} v, \\ R_4 = Q \psi_4 + \gamma^* \psi^{(1)}. \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

## A.2. Flujos viscosos

A continuación se describe una implementación práctica para la evaluación numérica de los flujos adjuntos viscosos.

$$A_x^v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma^* + \frac{\gamma\mu}{Pr} \left( \frac{|\bar{v}|^2}{2} \partial_x \left( \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{(\gamma-1)} \partial_x \left( \frac{P}{\rho^2} \right) \right) & \frac{1}{\rho} \sigma_{xx} - \frac{\gamma\mu u}{Pr} \partial_x \left( \frac{1}{\rho} \right) & \frac{1}{\rho} \sigma_{xy} - \frac{\gamma\mu v}{Pr} \partial_x \left( \frac{1}{\rho} \right) & \frac{\gamma\mu}{Pr} \partial_x \left( \frac{1}{\rho} \right) \end{pmatrix}$$

$$A_y^v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma^{**} + \frac{\gamma\mu}{Pr} \left( \frac{|\bar{v}|^2}{2} \partial_y \left( \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{(\gamma-1)} \partial_y \left( \frac{P}{\rho^2} \right) \right) & \frac{1}{\rho} \sigma_{yx} - \frac{\gamma\mu u}{Pr} \partial_y \left( \frac{1}{\rho} \right) & \frac{1}{\rho} \sigma_{yy} - \frac{\gamma\mu v}{Pr} \partial_y \left( \frac{1}{\rho} \right) & \frac{\gamma\mu}{Pr} \partial_y \left( \frac{1}{\rho} \right) \end{pmatrix},$$

donde

$$\sigma^* = \frac{u}{\rho} \sigma_{xx} + \frac{v}{\rho} \sigma_{xy}, \quad \sigma^{**} = \frac{u}{\rho} \sigma_{yx} + \frac{v}{\rho} \sigma_{yy}.$$

El objetivo es calcular:

$$(\vec{A}^v)^T \cdot \vec{n} \Psi = (R_1^v, R_2^v, R_3^v, R_4^v)^T, \quad (\text{A.4})$$

esto es:

$$(\vec{A}^v)^T \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sigma^* n_x - \sigma^{**} n_y + \frac{\gamma\mu}{Pr} \left( \frac{|\bar{v}|^2}{2} \partial_n \left( \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{(\gamma-1)} \partial_n \left( \frac{P}{\rho^2} \right) \right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y) - \frac{\gamma\mu u}{Pr} \partial_n \left( \frac{1}{\rho} \right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} (\sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y) - \frac{\gamma\mu v}{Pr} \partial_n \left( \frac{1}{\rho} \right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma\mu}{Pr} \partial_n \left( \frac{1}{\rho} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Con objeto de obtener una formulación compacta, definimos las siguientes cantidades

$$\begin{cases} \Sigma^{(1)} = \frac{1}{\rho} (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y), \\ \Sigma^{(2)} = \frac{1}{\rho} (\sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y), \\ \chi = \frac{\gamma\mu}{Pr} \partial_n \left( \frac{1}{\rho} \right). \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, tras realizar manipulaciones aritméticas, es posible escribir el vector de residuos  $R^v$  como

$$\begin{cases} R_1^v = \left( -u \Sigma^{(1)} - v \Sigma^{(2)} + \frac{|\bar{v}|^2}{2} \chi - \frac{\gamma\mu}{(\gamma-1)Pr} \partial_n \left( \frac{P}{\rho^2} \right) \right) \psi_4, \\ R_2^v = \left( \Sigma^{(1)} - u \chi \right) \psi_4, \\ R_3^v = \left( \Sigma^{(2)} - v \chi \right) \psi_4, \\ R_4^v = \chi \psi_4. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

En el caso de los términos viscosos tenemos

$$\begin{aligned}
 D_{xx} &= \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}u & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{(\gamma-1)Pr} \left( \frac{(\gamma-1)|\bar{v}|^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right) - v^2 - \frac{4}{3}u^2 & \frac{4}{3}u - \frac{\gamma u}{Pr} & v - \frac{\gamma v}{Pr} & \frac{\gamma}{Pr} \end{pmatrix}, \\
 D_{xy} &= \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}v & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}uv & v & -\frac{2}{3}u & 0 \end{pmatrix}, \\
 D_{yx} &= \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3}u & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}uv & -\frac{2}{3}v & u & 0 \end{pmatrix}, \\
 D_{yy} &= \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}v & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{\gamma}{(\gamma-1)Pr} \left( \frac{(\gamma-1)|\bar{v}|^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right) - u^2 - \frac{4}{3}v^2 & u - \frac{\gamma u}{Pr} & \frac{4}{3}v - \frac{\gamma v}{Pr} & \frac{\gamma}{Pr} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})
 \end{aligned}$$

El objetivo es la evaluación de los flujos adjuntos viscosos, lo que se resume en

$$\begin{aligned}
 & \left( D_{xx}^T \partial_x \Psi + D_{yx}^T \partial_y \Psi \right) n_x + \left( D_{xy}^T \partial_x \Psi + D_{yy}^T \partial_y \Psi \right) n_y \\
 &= \left( D_{xx}^T n_x + D_{xy}^T n_y \right) \partial_x \Psi + \left( D_{yx}^T n_x + D_{yy}^T n_y \right) \partial_y \Psi = (R_1^v, R_2^v, R_3^v, R_4^v)^T. \quad (\text{A.9})
 \end{aligned}$$

Desarrollando los términos de la ecuación anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}
 & \left( D_{xx}^T n_x + D_{xy}^T n_y \right) \partial_x \Psi + \left( D_{yx}^T n_x + D_{yy}^T n_y \right) \partial_y \Psi \\
 &= \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3}un_x + \frac{2}{3}vn_y & -vn_x - un_y & \left( \left( \frac{\gamma|\bar{v}|^2}{2Pr} - \frac{\gamma p}{(\gamma-1)Pr\rho} \right) - v^2 - \frac{4}{3}u^2 \right) n_x - \frac{1}{3}uvn_y \\ 0 & \frac{4}{3}n_x & n_y & \frac{4}{3}un_x - \frac{\gamma u}{Pr}n_x + vn_y \\ 0 & -\frac{2}{3}n_y & n_x & vn_x - \frac{\gamma v}{Pr}n_x - \frac{2}{3}un_y \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma}{Pr}n_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \psi_1 \\ \partial_x \psi_2 \\ \partial_x \psi_3 \\ \partial_x \psi_4 \end{pmatrix} \\
 &+ \frac{\mu}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & -vn_x - un_y & \frac{2}{3}un_x - \frac{4}{3}vn_y & \left( \left( \frac{\gamma|\bar{v}|^2}{2Pr} - \frac{\gamma p}{(\gamma-1)Pr\rho} \right) - u^2 - \frac{4}{3}v^2 \right) n_y - \frac{1}{3}uvn_x \\ 0 & n_y & -\frac{2}{3}n_x & -\frac{2}{3}vn_x + un_y - \frac{\gamma u}{Pr}n_y \\ 0 & n_x & \frac{4}{3}n_y & un_x + \frac{4}{3}vn_y - \frac{\gamma v}{Pr}n_y \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma}{Pr}n_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_y \psi_1 \\ \partial_y \psi_2 \\ \partial_y \psi_3 \\ \partial_y \psi_4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Con objeto de obtener una formulación compacta, definimos las siguientes cantidades

$$\begin{cases} \Sigma_{xx} = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{4}{3} \partial_x \psi_2 - \frac{2}{3} \partial_y \psi_3 \right) \\ \Sigma_{xy} = \Sigma_{yx} = \frac{\mu}{\rho} \left( \partial_y \psi_2 + \partial_x \psi_3 \right) \\ \Sigma_{yy} = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{4}{3} \partial_y \psi_3 - \frac{2}{3} \partial_x \psi_2 \right) \end{cases} \begin{cases} \Sigma_{xx}^{(4)} = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{4}{3} u \partial_x \psi_4 - \frac{2}{3} v \partial_y \psi_4 \right) \\ \Sigma_{xy}^{(4)} = \Sigma_{yx}^{(4)} = \frac{\mu}{\rho} \left( u \partial_y \psi_4 + v \partial_x \psi_4 \right) \\ \Sigma_{yy}^{(4)} = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{4}{3} v \partial_y \psi_4 - \frac{2}{3} u \partial_x \psi_4 \right) \\ \Sigma^{(4)} = \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\gamma}{Pr} \partial_n \psi_4 \right). \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Finalmente, tras realizar manipulaciones aritméticas, es posible escribir el vector de

residuos  $R^v$  como

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1^v = - \left( u(\Sigma_{xx} + \Sigma_{xx}^{(4)}) + v(\Sigma_{xy} + \Sigma_{xy}^{(4)}) \right) n_x - \left( u(\Sigma_{yx} + \Sigma_{yx}^{(4)}) + v(\Sigma_{yy} + \Sigma_{yy}^{(4)}) \right) n_y + \\ \quad \left( \frac{|\bar{v}|^2}{2} - \frac{P}{\rho(\gamma-1)} \right) \Sigma^{(4)}, \\ R_2^v = \left( \Sigma_{xx} + \Sigma_{xx}^{(4)} \right) n_x + \left( \Sigma_{xy} + \Sigma_{xy}^{(4)} \right) n_y - u \Sigma^{(4)}, \\ R_3^v = \left( \Sigma_{yx} + \Sigma_{yx}^{(4)} \right) n_x + \left( \Sigma_{yy} + \Sigma_{yy}^{(4)} \right) n_y - v \Sigma^{(4)}, \\ R_4^v = \Sigma^{(4)}. \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

## Apéndice B

---

# Derivada de forma

---

En esta sección se evaluará la variación de un funcional  $J = \int_S j(U) ds$  al modificar infinitesimalmente la frontera del dominio sobre el que se han calculado las variables  $U$  mediante una EDP definida en todo el dominio  $\Omega$  [49, 101].

Estamos interesados en calcular el gradiente de  $J$  con respecto a  $\Omega$ , donde sólo son admisibles variaciones de  $\Omega$  obtenidas por variaciones en la frontera  $S$ .

Sea  $\Omega$  un dominio con frontera  $\partial\Omega = \Gamma \cup S$ . Definimos el dominio deformado  $\Omega'$  a través de su frontera

$$S' = \{x + \alpha(x)\vec{n}(x), \quad \alpha \text{ pequeño}, x \in S\}, \quad (\text{B.1})$$

deformación de la frontera original  $S$ . La variación de la solución  $u$  viene entonces dada por

$$\delta u = u(\Omega') - u(\Omega) = u' - u. \quad (\text{B.2})$$

**Lema 42.** Dada  $f$  cualquier función tenemos

$$\int_{\delta\Omega} f = \int_S \alpha f + o(\|\alpha\|_\infty). \quad (\text{B.3})$$

**Lema 43.** La variación del funcional al variar la forma del dominio donde se resuelve la EDP es:

$$\int_{\delta S} j ds = \int_S (\partial_n j - \kappa j) \alpha ds + o(\|\alpha\|_{C^1}), \quad (\text{B.4})$$

donde  $\kappa$  es la curvatura de  $S$ .

**Lema 44.** Si  $u$  satisface una condición de Dirichlet en  $S$ , se tiene

$$\delta u|_S = -\alpha \partial_n u|_S + o(\|\alpha\|_\infty). \quad (\text{B.5})$$

**Lema 45.** Si  $\vec{u}$  es vectorial y  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$  en  $S$  entonces:

$$(\delta \vec{u} \cdot \vec{n})|_S = -(\alpha \delta_n u \cdot n)|_S + (\vec{\nabla} \alpha - \vec{n} \delta_n \alpha) \cdot \vec{u}|_S + o(\|\alpha\|_\infty). \quad (\text{B.6})$$



---

## Índice de figuras

---

1.1. Subdominios $Q^-$ y $Q^+$ y discontinuidad $\Sigma$ . . . . .	8
1.2. Solución $u(x, t)$ de la ecuación de Burgers . . . . .	11
1.3. Subdominios $Q^-$ y $Q^+$ . . . . .	12
1.4. Escenario de optimización geométrica de la superficie $S$ . . . . .	14
1.5. Esquema del método de conjuntos de nivel . . . . .	18
2.1. Primer vuelo con motor de la historia de los hermanos Wright. . . . .	21
2.2. Malla superficial sobre un mecanismo hipersustentador. . . . .	22
2.3. Mecanismo hipersustentador de una aeronave. . . . .	24
2.4. Visión esquemática de un hipersustentador en 2D . . . . .	25
2.5. Solución de las ecuaciones de Euler (variable presión) sobre medio avión. . . . .	26
2.6. Solución de las ecuaciones RANS sobre un avión. . . . .	27
2.7. Malla estructurada (izq.) y no estructurada (der.). . . . .	30
2.8. Esquema multimalla en 2 dimensiones. . . . .	31
2.9. Problema de optimización de forma en 2D. . . . .	34
2.10. Ángulo de ataque $\alpha$ y deslizamiento lateral $\beta$ . . . . .	35
2.11. Sensibilidad de la sustentación respecto de movimientos infinitesimales. . . . .	37
2.12. Subdominios generados por el contorno $\Gamma$ . . . . .	38
2.13. Problemas resolubles mediante la técnica de conjuntos de nivel. . . . .	39
2.14. Extracción del conjunto de nivel 0 y remallado de su entorno exterior. . . . .	42
3.1. Subdominios $Q^-$ y $Q^+$ . . . . .	54
3.2. Líneas características entrando en un choque. . . . .	57
3.3. Solución $u(x, t)$ de la ecuación de Burgers con un dato inicial. . . . .	59
3.4. Subdominios $\hat{Q}^-$ y $\hat{Q}^+$ . . . . .	62
3.5. Experimento 1. Inicialización (línea punteada) y el dato inicial obtenido. . . . .	75
3.6. Experimento 1. Logaritmo del valor del funcional. . . . .	76
3.7. Experimento 2. . . . .	77
3.8. Experimento 3. Inicialización (línea punteada) . . . . .	79
3.9. Experimento 4. Dato inicial obtenido. . . . .	80
3.10. Experimento 4. Valor logarítmico del funcional. . . . .	81
4.1. Problema 2D de optimización de la forma en aerodinámica . . . . .	88
4.2. Problema típico aerodinámico con una discontinuidad $\Sigma$ . . . . .	89

4.3. Onda de choque normal. . . . .	92
4.4. Criterio de signos para las variables características . . . . .	93
4.5. Características en la entrada (izquierda), salida (derecha) . . . . .	96
6.1. Grafos duales y triangularización . . . . .	120
6.2. Triangularización alrededor del nodo $j$ y volumen de control $\Omega_j$ asociado. . .	121
6.3. Método bimalla en 1D (izquierda) y 2D (derecha) . . . . .	131
7.1. Configuración de un perfil aerodinámico NACA 0012 . . . . .	139
7.2. Número de Mach (izq) y comparación de $C_p$ (JST vs. Roe) . . . . .	140
7.3. Comparación del tamaño de paso de la variable de diseño en Euler subsónico	140
7.4. Sensibilidad de la sustentación en Euler subsónico . . . . .	141
7.5. Estudio de condición numérica de contorno en Euler subsónico . . . . .	142
7.6. Calibración de la disipación artificial (régimen adjunto subsónico) . . . . .	142
7.7. Estudio de la integración sobre la superficie en Euler subsónico . . . . .	143
7.8. Método adjunto vs. diferencias finitas en Euler subsónico . . . . .	144
7.9. Número de Mach (izq) y comparación de $C_p$ (JST vs. Roe) . . . . .	145
7.10. Comparación del paso de la variable de diseño en Euler transónico . . . . .	145
7.11. Sensibilidad de la resistencia de onda en Euler transónico . . . . .	146
7.12. Estudio de la disipación artificial en Euler transónico . . . . .	147
7.13. Método adjunto vs. diferencias finitas en Euler transónico . . . . .	148
7.14. Solución transónica Euler 2D (caso simétrico) . . . . .	149
7.15. Solución adjunta Euler 2D y gradiente de resistencia (caso simétrico) . . . . .	150
7.16. Solución transónica Euler 2D (caso asimétrico) . . . . .	150
7.17. Efecto sobre el choque al aplicar una función de Hicks-Henne . . . . .	151
7.18. Solución adjunta Euler 2D y gradiente de resistencia (caso simétrico) . . . . .	151
7.19. Estimación en las mejoras del gradiente calculado . . . . .	152
7.20. Número de Mach (izq) y comparación de $C_p$ (JST vs. Roe) en Navier-Stokes .	153
7.21. Sensibilidad de la resistencia de fricción en Navier-Stokes . . . . .	154
7.22. Estudio de la disipación artificial en Navier-Stokes . . . . .	154
7.23. Estudio de la integración sobre la superficie en Navier-Stokes . . . . .	155
7.24. Método adjunto vs. diferencias finitas en Navier-Stokes . . . . .	156
7.25. Gradientes subsónicos del $C_D$ para un cilindro. . . . .	156
7.26. Proceso inicial de adaptación de la malla . . . . .	158
7.27. Ejemplos de adaptaciones iniciales de geometría en <i>level set</i> . . . . .	158
7.28. Velocidad extendida del <i>level set</i> (expansión de círculo) . . . . .	159
7.29. Velocidad extendida del <i>level set</i> en problema de diseño $C_D$ . . . . .	159
7.30. Expansión de dos circunferencias con adaptación dinámica de malla . . . . .	160
7.31. Contracción de una elipse . . . . .	160
7.32. Extracción del conjunto de nivel 0. . . . .	161
7.33. Gradientes transónicos del $C_D$ . . . . .	163
7.34. Proceso de convergencia . . . . .	164
7.35. Coeficientes de presiones $C_p$ (izq). Geometría (der) . . . . .	164
7.36. Evolución de la optimización . . . . .	165
7.37. Gradientes de $C_D$ , caso Navier-Stokes laminar. . . . .	166
7.38. Evolución temporal de la optimización mediante <i>level set</i> . . . . .	168
7.39. Evolución de la optimización mediante el método de conjuntos de nivel. . . .	168

7.40. Evolución de los conjuntos de niveles en el proceso de optimización. . . . .	169
7.41. Evolución de la optimización. . . . .	169
7.42. Perfil NACA0012 (izq) y velocidad del fluido sobre su superficie (der). . . . .	170
7.43. Control de mín $C_L$ (izq) y estrategias para estabilizarlo (der). . . . .	171
7.44. Discretizaciones empleadas (50 y 400 nodos sobre la superficie). . . . .	172
7.45. Optimización sin filtrado en una malla basta (izq) y en una malla fina (der). .	172
7.46. Optimización en una malla fina mediante filtrado bimalla. . . . .	173