



**“APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE VALOR EXTREMO SOBRE EL
ÍNDICE DE PRECIOS SELECTIVO DE ACCIONES (IPSA) DE LA BOLSA
DE VALORES DE CHILE”**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN FINANZAS**

Alumno: LUIS ALMONACID I.

Profesor Guía: JOSÉ LUIS RUIZ V.

Santiago, Agosto 2017

Índice

1.	Introducción	2
2.	Value at Risk.....	4
2.1	Metodologías tradicionales para estimar el VaR	6
2.1.1	Método Varianza-Covarianza	6
2.1.2	Simulación Histórica	7
2.1.3	Simulación de Montecarlo.....	8
2.2	Críticas al VaR.....	9
3.	Teoría de Valor Extremo (EVT).....	11
3.1	Distribución de Máximos.....	14
3.1.1	Nivel de Retorno.....	16
3.2	Distribución de Excesos.....	17
3.2.1	VaR bajo Distribución Generalizada de Pareto.....	19
3.2.2	Expected Shortfall (ES)	20
4.	Datos	22
5.	Resultados.....	26
5.1	VaR bajo Distribución Normal.....	26
5.2	Método Máximo de Bloques y Nivel de Retorno (<i>Rnk</i>).....	29
5.3	Excesos Sobre el Umbral (Peak Over Threshold).....	33
6.	Conclusiones	45
7.	Bibliografía	47

1. Introducción

Los últimos años, han estado marcados por diversos eventos que han generado una enorme inestabilidad y volatilidad en el actual mercado financiero mundial. Desde elecciones presidenciales en importantes países del mundo, referéndums en Europa, tensiones bélicas en Asia, entre otros; han mantenido entre los agentes incertidumbre y nerviosismo que se ve reflejado a nivel transversal en los distintos mercados financieros. La relevancia de estos eventos, es que, debido a la alta integración de los mercados, a medida que transcurren, y más importante aún, que sorprenden, repercuten fuertemente en las decisiones de inversión y alocaación de recursos por parte de los agentes económicos, lo cual, muchas veces, genera toma de riesgos ineficientes.

Lo anterior, ha motivado el desarrollo e implementación de metodologías de medición de riesgos, que rompen con el supuesto clásico del VaR (Value at Risk), el cual es, normalidad en la serie de retornos de los activos, considerando escenarios más realistas, es decir, toman en cuenta que la distribución de los retornos posee colas pesadas (o exceso de curtosis) las cuales son más claras en mostrar la densidad probabilística en los extremos, que aunque poseen una menor probabilidad de ocurrencia, generan impactos considerablemente más negativos en comparación a situaciones normales.

Es así, como la Teoría del Valor Extremo (EVT), nos proporciona los fundamentos estadísticos que permiten estimar la ocurrencia de eventos extremos¹, con el fin de cuantificar las pérdidas reales de los portfolios en los diferentes mercados financieros.

En términos generales, EVT, posee dos metodologías para modelar el comportamiento de los retornos presentes en los extremos de la distribución (con mayor desviación a la media) llamados en la literatura, Método Máximo de Bloque (Block Maxima Method) y Excesos sobre el Umbral (Peak Over Threshold). Mediante este último método se introduce el concepto Pérdida Esperada (Expected Shortfall), el cual es la aplicación más relevante de EVT y ampliamente usado actualmente, ya que mide la máxima pérdida

¹Evento extremo se entiende por suceso anormal o inesperado que posee una baja probabilidad de ocurrencia pero de alta significancia (positiva o negativa).

esperada una vez superado el VaR.

En este trabajo, siguiendo la metodología empleada en Gilli & Këllezi (2006) se estimará el VaR (diario) del Índice de Precio Selectivo de las Acciones (IPSA) correspondiente al mercado de valores chileno, para una serie de retornos de 10 años (desde enero de 2006 hasta diciembre de 2016). Una vez testeada la hipótesis de que los retornos de dicho índice no se distribuyen normal, se medirá el VaR siguiendo ambas metodologías de EVT, llegando a las mismas conclusiones que los autores señalados; que, asumiendo condiciones normales de los retornos, el VaR subestima la pérdida diaria que cuando consideramos la existencia de eventos extremos.

La sección II presenta una revisión metodológica del VaR, los principales métodos de estimación y críticas. La sección III muestra los fundamentos de la teoría del valor extremo y las metodologías utilizadas para modelar las distribuciones que mejor reflejan las medidas de riesgo de la cola. En la sección IV, se presentan los datos y una breve estadística descriptiva. La Sección V, presenta una aplicación práctica en la que se analizan las medidas de riesgo sobre el IPSA. En particular, se calculan las distribuciones que mejor se ajustan a los retornos, los índices de cola, y los intervalos de confianza de las medidas de riesgo. La Sección VI, concluye.

2. Value at Risk

Value at Risk (Valor en Riesgo), es una de las medidas más populares de medición de riesgo de mercado que resume información sobre la distribución de las pérdidas potenciales de un portfolio. Esta metodología fue desarrollada por el banco J.P.Morgan en 1994, con el fin de mejorar el control de los riesgos financieros. El gran impacto y uso que tuvo esta herramienta en la industria financiera, llevó a que el Comité para la Supervisión Bancaria de Basilea anunciara en 1995 que los requerimientos de capital debían estar basados en las medidas de VaR.

El VaR busca cuantificar, con determinado nivel de significancia, el monto o porcentaje de pérdida que un activo o portfolio enfrentará en un período de tiempo determinado (Jorion 2000, Penza & Bansal 2001). Esta medida resume en un número, la exposición global a los riesgos de mercado y la probabilidad de movimientos adversos en las variables financieras (Jorion 1996).

Las empresas financieras usualmente usan el VaR para el control de riesgo interno considerando un horizonte de un día y un nivel de confianza del 95%, lo que significa que solamente el 5% de las veces, o 1 de 20 veces (es decir, una vez al mes con datos diarios), el retorno del portfolio caerá más de lo que señala el VaR, en comparación con el retorno esperado.

A partir del amplio uso de esta metodología, diversos estudios han surgido con el fin de profundizar y pulir la medición del riesgo financiero. Ahn et al. (1999), proporcionan una solución analítica al problema de una institución que gestiona de forma óptima su exposición al riesgo de mercado al minimizar su valor en riesgo (VaR) utilizando opciones.

Alexander & Baptista (2002), relacionan el valor en riesgo (VaR) con el análisis media-varianza y examinan las implicancias económicas de utilizar un modelo media-VaR para la selección de una cartera. Descubren que cuando se comparan dos carteras eficientes por media-varianza, la cartera de mayor varianza puede tener menor VaR. Por lo tanto, los reguladores deben ser conscientes de que el VaR no es una mejora incondicional sobre la varianza como una medida del riesgo.

Basak & Shapiro (2000), demuestran que las prácticas de gestión de riesgos bajo el enfoque VaR pueden producir un resultado no deseado. Ellos encuentran que quienes son miopes en la medición del VaR, a menudo optan por una mayor exposición a los activos de riesgo que quienes no los toman, en consecuencia, incurren en mayores pérdidas cuando se producen episodios de estrés. Además, sugieren un modelo alternativo de gestión de riesgos, basado en la expectativa de pérdida, para remediar las deficiencias del VaR. Realizan un análisis de equilibrio general, que revela que la presencia de administradores de riesgo que usan VaR, amplifica la volatilidad de los valores bursátiles ante caídas en los mercados y atenúa la volatilidad en momentos de alzas en los mercados.

Boudoukh, Richardson & Whitelaw (1998), proponen un enfoque híbrido de medición del riesgo, que combina los dos enfoques más populares para la estimación del VaR: RiskMetrics y Simulación Histórica. Estiman el VaR de una cartera aplicando ponderaciones exponenciales decrecientes a los rendimientos pasados y luego encontrando el percentil apropiado de esta distribución empírica ponderada en el tiempo. Las pruebas empíricas muestran una mejora significativa en la precisión de los pronósticos del VaR utilizando el enfoque híbrido en relación con los métodos individuales.

Para el caso chileno, tenemos los trabajos previos de Johnson (2001) quien realiza una descripción del Value at Risk, incorporando volatilidad condicional y volatilidad condicional asimétrica. Para ello utiliza el Índice General de Precios (IGPA) de la bolsa de valores de Chile, con una ventana de datos con frecuencia mensuales y corregidos por el Índice de Precios al Consumidor (IPC). Luego propone metodologías para el cálculo del VaR analizando los niveles de riesgo para instrumentos financieros como bonos, acciones, swaps y forwards. Finalmente, estima el VaR sobre las utilidades operacionales a una muestra de tres bancos chilenos, en donde se evidencia el incremento en el riesgo que se presentó desde fines del año 1997, a partir de la crisis asiática, y cómo este ha comenzado a disminuir a partir del año 1999.

Por otro lado, Romero (2004), realiza una interesante revisión histórica del desarrollo de la medición del riesgo en las finanzas modernas, identificando tres períodos importantes:

- Media-Varianza (1952-1956) iniciado por Markowitz, quien establece como

medidas de riesgo sobre el retorno de inversiones individuales, el cuadrado de la desviación con respecto a la media de la distribución de los retornos (la varianza) y para una combinación de activos o portfolio, elegir ponderaciones para cada activo que minimice la varianza de este.

- Modelos en tiempo continuo (1969-1973) iniciado por Robert Merton, Fisher Black y Myron Scholes, quienes permiten abordar problemas asociados a la valoración de opciones y otros derivados.
- Medidas de riesgo 1997 – actualidad, que fue iniciado por Artzner et al (1999), donde se modelan situaciones más reales como el sesgo en el retorno de activos o skewnes, leptocurtosis y/o colas pesadas a partir de la crítica al supuesto de normalidad de los retornos de las series financieras.

2.1 Metodologías tradicionales para estimar el VaR

Los tres métodos más comunes de cálculo de VaR son: Método Varianza-Covarianza, Simulación Histórica y Simulación de Monte Carlo. Todos los métodos utilizan parámetros derivados de datos de precios históricos y valorizan el portfolio en el período siguiente ($t + 1$).

2.1.1 Método Varianza-Covarianza

Este método, es una estimación paramétrica del VaR en la que el principal supuesto es que los retornos siguen una distribución normal. De acuerdo a Fallon (1996), este método fue propuesto por Garbade (1986). Para definir formalmente el VaR de un portfolio, en primer lugar debemos elegir dos factores cuantitativos: el largo del horizonte a medir (t) y el nivel de confianza ($1 - \alpha$). Ambos son números arbitrarios. Por ejemplo, el Comité de Basilea ha propuesto usar un 99% de intervalo de confianza (sobre un horizonte de 10 días de transacción. El VaR resultante es entonces multiplicado por un factor de seguridad de 3^2 para llegar al capital mínimo requerido para fines regulatorios). Así, como se señaló

²El factor de seguridad fue introducido, ya que la hipótesis de normalidad de la distribución de ganancias y pérdidas (P&L) es ampliamente considerada irreal.

anteriormente, para el caso de un portfolio compuesto por un instrumento y siguiendo la metodología en McNeil, Frey, y Embrechts (2015) se llega a lo siguiente:

$$\text{VaR} = \mu - \alpha \equiv \alpha\sigma\sqrt{t}$$

Donde μ es el retorno medio, α es el menor valor tal que a la izquierda la probabilidad sea un cierto nivel (ejemplo: 1%) y t es el horizonte de tiempo para el cual se calculará el factor de riesgo VaR.

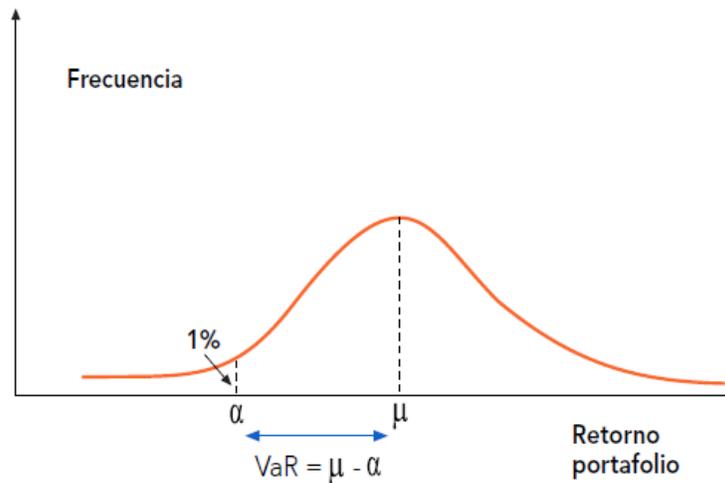


Figura 1. Representación gráfica del VaR

2.1.2 Simulación Histórica

Esta metodología de estimación del VaR, asume que todas las posibles variaciones futuras han sido experimentadas en el pasado, por lo que la distribución histórica es idéntica a la distribución de los retornos en el horizonte de tiempo deseado. La estimación del VaR mediante SH, permite que la información hable por sí misma y así se usa la distribución empírica de los retornos evitando asumir una distribución teórica.

La Simulación Histórica, nos permite estimar empíricamente el VaR directamente de los retornos del activo financiero, teniendo cada uno de estos retornos la misma importancia. Según McNeil, Frey, & Embrechts (2015), la estimación del VaR mediante SH, dado un cierto

nivel de confianza $(1 - \alpha)$ y horizonte de tiempo t , en términos de valor, es el α cuantil de una distribución de utilidades y pérdidas, lo que es equivalente a decir que el VaR expresado como porcentaje de un valor de portfolio, es el α cuantil de la distribución de retornos (el VaR monetario se obtiene sólo multiplicando el porcentaje por el valor actual del portfolio).

2.1.3 Simulación de Montecarlo

Mediante este método, se generan n hipotéticas utilidades ó pérdidas del portfolio. Según Linsmeier & Pearson (1996) y Johnson (2001), y considerando un portfolio de un sólo instrumento, esta metodología consiste en identificar los factores de riesgo y el proceso estocástico que mejor los represente, por ejemplo, los retornos simulados para una acción específica, podrían ser generados a partir de una distribución normal, para luego generar múltiples valores hipotéticos para los retornos del portfolio con un horizonte predefinido t . Una vez simuladas las diversas trayectorias de tamaño t , éstas son usadas para calcular el valor del portfolio para cada una de las simulaciones, y dependiendo de la metodología, se procede a estimar el VaR. En este último paso, Linsmeier & Pearson (1996) proponen determinar el VaR obteniendo el α cuantil de la serie generada (similar a SH), mientras que Johnson (2001) obtiene la desviación estándar y luego estima el VaR.

2.2 Críticas al VaR

Diversos autores han criticado este modelo, entre ellos se destacan, Uryasev et al. (1999), Yamai & Yoshida (2002) y Acerbi & Scandolo (2008) entre otros; quienes concuerdan que el VaR no es una medida coherente de riesgo y que por consiguiente, debe ser modificada. Artzner et al. (1999) derivaron un conjunto de condiciones que debe cumplir cualquier medida de riesgo. Si una medida de riesgo cumple con tales condiciones, es llamada coherente.

Según lo presentado por Romero (2004), medir riesgo es equivalente a establecer una correspondencia (covarianza) ρ entre el espacio X de variables aleatorias, como por ejemplo los retornos de un cierto conjunto de inversiones, y un número real no negativo, es decir, $\rho : X \rightarrow R$. Medidas de riesgo permiten ordenar y comparar inversiones de acuerdo a su respectivo valor de riesgo.

A estas correspondencias es necesario imponerles restricciones con el propósito de obtener definiciones con significado. Cualquier medida de riesgo que carezca de tales propiedades puede conducir a inconsistencias.

Por lo tanto, cualquier medida de riesgo aceptable $\rho : X \rightarrow R$ debe satisfacer con las siguientes propiedades:

a) Homogeneidad positiva: $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$

El cambiar el tamaño de un portfolio por un factor λ , manteniendo las cantidades relativas de sus activos, debería ser igual que multiplicar la medida de riesgo por λ .

b) Subaditividad: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

Indica que la medida de riesgo de la fusión de dos portfolios no debería ser mayor que la suma de sus medidas de riesgo por separado, principio fundamental de la diversificación de riesgo. Esta propiedad es esencial en la teoría de portfolio de

Markowitz, en que el fenómeno de la diversificación implica que ningún nuevo instrumento incrementa el riesgo.

c) Monotonicidad: $X \leq Y \rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

Si un portfolio X tiene retornos menores que otro portfolio Y en todos los estados posibles, su medida de riesgo debería ser mayor.

d) Invarianza transicional: $\rho(X + \alpha r_0) \leq \rho(X) - \alpha$, (X : variables aleatorias, α : número real, r_0 : tasas libres de riesgo)

El combinar un retorno seguro αr_0 con un retorno aleatorio X , su medida de riesgo debería disminuir en α .

3. Teoría de Valor Extremo (EVT)

Los métodos de estimación mencionados en la sección anterior, presentan un buen desempeño cuando tenemos un alto número de observaciones y los datos se comportan de manera normal, sin embargo, proporcionan un ajuste deficiente a los valores extremos de una serie, o a las colas de la distribución. Esto es otra crítica y desventaja de los modelos paramétricos y no paramétricos mencionados por Artzner et al (1999), porque la gestión del riesgo requiere la estimación de eventos extremos que normalmente no son directamente observables a partir de los datos.

EVT se centra en el modelamiento paramétrico del comportamiento de la cola de una distribución, utilizando sólo valores extremos en lugar de todo el conjunto de datos. Esta característica permite alguna extrapolación más allá del rango de los datos.

La aplicación e interés a los modelos financieros y económicos para capturar eventos extremos se ha desarrollado fuertemente en las últimas décadas. El primer uso de la Distribución de Valores Extremos Generalizada fue propuesto por Longin (1996) sobre los rendimientos diarios del índice S&P, quien demuestra que los datos se distribuyen siguiendo el comportamiento de una distribución Fréchet. Posteriormente, Danielsson & Vries (1997) comparan las propiedades de la simulación histórica y las técnicas de RiskMetrics para calcular el VaR sobre los rendimientos de las acciones en EE.UU. con un método que implica el modelado del estimador de la cola de la distribución. Para las predicciones de los peores resultados, el método de RiskMetrics (Varianza-Covarianza) subestima las pérdidas, mientras que la simulación histórica las sobrestima. Sin embargo, las estimaciones obtenidas al aplicar el estimador de cola de la distribución son más precisas en la predicción del VaR. Esto implica, que los requisitos de capital, pueden ser más bajos estimando el VaR con el estimador de la cola.

Hols & Vries (1991) utilizan estos modelos para medir y evaluar el riesgo sobre los retornos en los tipos de cambio. McNeil (1999) y McNeil & Frey (2000), ajustan los retornos a la Distribución Generalizada de Pareto (GPD) de los índices DAX y S&P para estimar las medidas de riesgo.

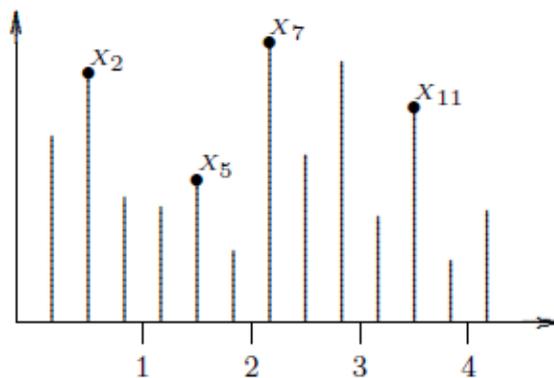
Huang & Chikobvu (2015) utilizan EVT para estimar el VaR y ES sobre los retornos del

precio del oro. En particular, utilizan la prueba de cobertura incondicional de Kupiec y la prueba de cobertura condicional de Christoffersen para el backtesting del VaR, mientras que la prueba de Bootstrap se utiliza para el backtesting de ES. Los resultados indican que GPD es superior a los modelos gaussianos tradicionales y t- Student para las estimaciones de VaR y ES.

Yamai & Yoshiba (2002), comparan el VaR y el ES bajo estrés de mercado. Asumen que la distribución de valores extremos representa los rendimientos de los activos bajo estrés de mercado, y examinan si el estrés afecta las propiedades del VaR y el ES. Encuentran que el VaR y el ES en algunos casos pueden subestimar el riesgo en presencia de fuerte volatilidad en el mercado.

Aplicar esta teoría para los activos de los mercados emergentes es sumamente relevante, debido a la alta integración que han alcanzado los mercados, y al consecuente contagio que provoca la ocurrencia de eventos inesperados. Se ha medido el VaR bajo EVT en los estudios de Balzarotti & Delfiner (2001) para Argentina, Fernández (2003) para Chile y Cardozo (2004) para Colombia.

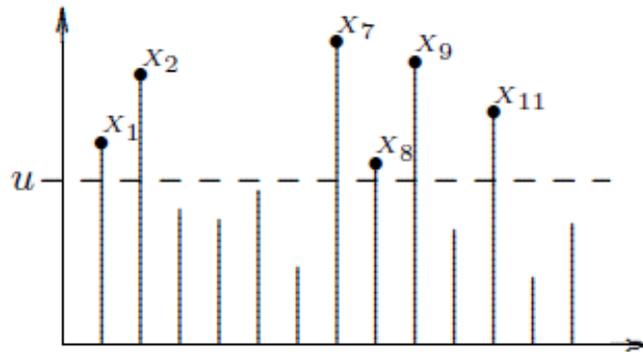
Siguiendo lo propuesto por Gilli & Këllezli (2006), existen dos maneras de modelar valores extremos. La primera, considera tomar la mayor observación en períodos sucesivos no traslapados (semanas, meses, etc.). A este enfoque se le conoce como “Modelo Máximo de Bloques” (Block Máxima Method). Estas observaciones seleccionadas constituyen los eventos extremos de la serie. Gráficamente:



Fuente: Gilli and Këllezli (2006)

Figura 2. Método Máximo de Bloques. Observaciones X_2, X_5, X_7 y X_{11} representan los valores máximos para uno de los cuatro períodos de tres observaciones cada uno.

La segunda manera, más moderna y eficiente de identificar valores extremos, son los modelos que se enfocan en los valores que exceden un umbral dado, conocidos como “Excesos Sobre un Umbral” (Peak Over Threreshold). Estos son modelos para grandes muestras que exceden un umbral alto y son altamente eficientes en usar los datos extremos de la serie. Gráficamente:



Fuente: Gilli and K llezi (2006)

Figura 3. Excesos sobre el Umbral. Donde las observaciones X_1, X_2, X_7, X_8, X_9 y X_{11} exceden el umbral u y por lo tanto son eventos extremos.

3.1 Distribución de Máximos

Movimientos extremos en los retornos de un activo son denotados por X . Llamaremos $f(x)$ a la función de densidad de probabilidad y $F(x)$ es la función de distribución acumulada de X , cuyos valores van de l a u ³. Sea $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ una secuencia de cambios (diarios) en el precio del activo (retornos) de los días $1, 2, \dots, n$. Valores extremos se definen como los máximos y mínimos de los n retornos aleatorios $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ independientes e idénticamente distribuidos. Sea $X_{max,n}$ el cambio diario más alto y $X_{min,n}$ el más bajo sobre n días de cotización del activo:

$$X_{max,n} = \max(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

$$X_{min,n} = \min(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = -\max(-X_1, -X_2, -X_3, \dots, -X_n)$$

Como se muestra en Gumbel (1958), si las variables $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ son estadísticamente independientes y provienen de la misma distribución, entonces la distribución de máximos y mínimos puede ser representada como una función de $F(x)$ y el largo del periodo seleccionado n : la distribución exacta de $X_{max,n}$ es $H_{max,n}(x) = [F(x)]^n$ y la de $X_{min,n}$ es $H_{min,n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$. En la práctica, la distribución $F(x)$ no es precisamente conocida, y por lo tanto, la distribución exacta de los extremos $H_{max,n}(x)$ y $H_{min,n}(x)$ tampoco. Por esta razón, se estudia el comportamiento asintótico de los máximos $X_{max,n}$ y mínimos $X_{min,n}$.

Para encontrar una distribución límite para los máximos, la variable máxima, $X_{max,n}$ es transformada de tal manera que la distribución límite de la nueva variable es una variable no degenerada. Siguiendo el teorema de Fisher & Tippett (1928), la variable X_n (en adelante generalizando para máximos y mínimos) es reducida con un parámetro de ubicación, μ_n y un parámetro de escala σ_n de manera que

$$x = \frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} H(x)$$

³Una variable aleatoria que se distribuye normal toma valores de $l = -\infty$ a $u = +\infty$

Suponiendo que los coeficientes $\mu_n, \sigma_n > 0$, Gnedenko (1943) obtiene tres tipos de distribuciones no degeneradas para la distribución estandarizada $H(x)$:

$$\text{Fréchet: } \Phi_{\xi}(x) = \begin{cases} e^{-x^{-1/\xi}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Weibull: } \Psi_{\xi}(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{1/\xi}} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

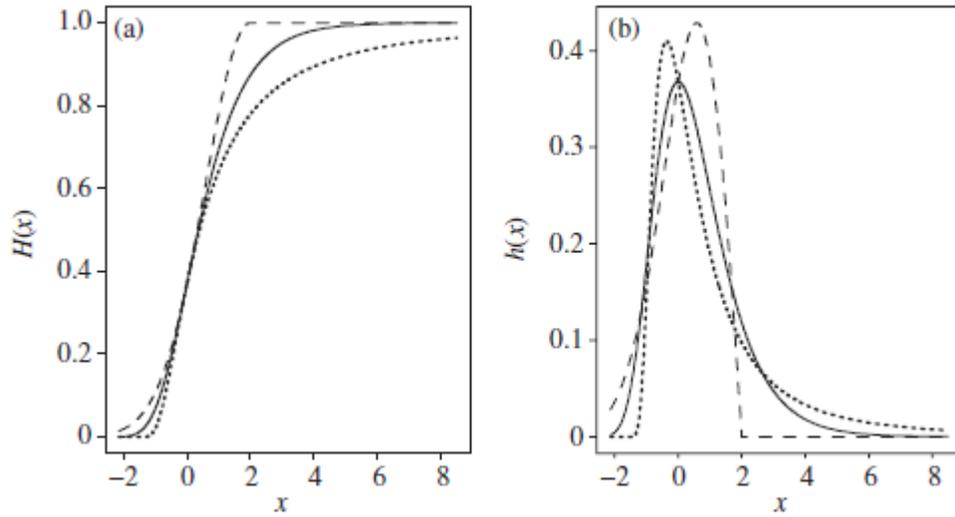
$$\text{Gumbel: } \Lambda_{\xi}(x) = e^{-e^{-x}} - \infty < x < +\infty \quad (3)$$

Jenkinson (1955) propuso la Distribución Generalizada de Valores Extremos (GEV) que resume las tres distribuciones en función de un parámetro:

$$H_{\xi}(x; \mu, \sigma) = \begin{cases} e^{-[1+\xi(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{-\frac{1}{\xi}}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}} & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Donde ξ es el parámetro de forma, también llamado “Índice de cola” el cual refleja el peso de la cola de la distribución de variables X_i ($i = 1, \dots, n$). Si $\xi > 0$ la distribución corresponde a la Distribución Fréchet; si $\xi < 0$ corresponde a la Distribución de Weibull y si $\xi = 0$ será una Distribución Gumbel⁴.

⁴La distribución Fréchet ($\xi > 0$) se caracteriza por tener colas pesadas, ya que su cola decrece lentamente. La distribución Weibull ($\xi < 0$) no tiene cola, después de un cierto punto no hay extremos. La distribución Gumbel ($\xi = 0$) posee colas livianas o delgadas, ya que su cola decrece rápidamente. Para la distribución de Weibull y Gumbel, todos los momentos de la distribución están bien definidos. Para la Distribución de Fréchet, el parámetro $1/\xi$ corresponde al momento de máximo orden: los momentos de orden k mayores que $1/\xi$ son infinitos, y los momentos de orden k menores que $1/\xi$ son finitos (Gumbel 1958). Mientras mayor es ξ (o menor es $1/\xi$), más pesada es la cola de la distribución.



Fuente: Mcneill, Frey & Embrechts (2015)

Figura 4. Gráfico Izquierdo muestra la Distribución Generalizada de Valores Extremos: La línea sólida corresponde a Gumbel ($\xi = 0$), línea punteada corresponde a Fréchet ($\xi = 0,5$) y la línea segmentada corresponde a Weibull ($\xi = -0,5$). El gráfico de la derecha corresponde a la función de densidad de probabilidad de cada una, y en todos los casos $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

3.1.1 Nivel de Retorno

Si $H(x)$ es la distribución de máximos observados en períodos sucesivos de igual longitud no traslapados, el “nivel de retorno” $R_n^k = H_{\xi, \sigma, \mu}^{-1}(1 - \frac{1}{k})$ es el nivel esperado de ser excedido en uno de los k periodos de longitud n . Gilli & Këllezi (2006), consideran el nivel de retorno como una medida de la máxima pérdida de una cartera, siendo más conservadora que el VaR.

Sabiendo que $(1 - \frac{1}{k})$ es el cuantil de interés para estimar R_n^k , entonces tenemos lo siguiente:

$$\widehat{R}^k = \begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\xi} \left(1 - \left(-\log \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right)^{-\xi} \right) & \xi \neq 0 \\ \hat{\mu} - \hat{\sigma} \log \left(-\log \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right) & \xi = 0 \end{cases} \quad (5)$$

3.2 Distribución de Excesos

El método máximo de bloques tiene como principal deficiencia, la ineficiencia en el uso de los datos, es decir, se desperdician observaciones que pueden ser consideradas extremas ya que solo se toma un solo punto dentro de un bloque. Por esta razón, en la práctica se ha sustituido en gran medida por métodos basados en excedencias sobre un umbral, en donde se usan todos los datos que son extremos en el sentido de que sobrepasan un determinado nivel alto pre-determinado. En la figura 5, vemos que si consideramos una función de distribución F de una variable aleatoria x , estamos interesados en estimar la función de distribución F_u de los valores x tales que exceden un cierto umbral u .

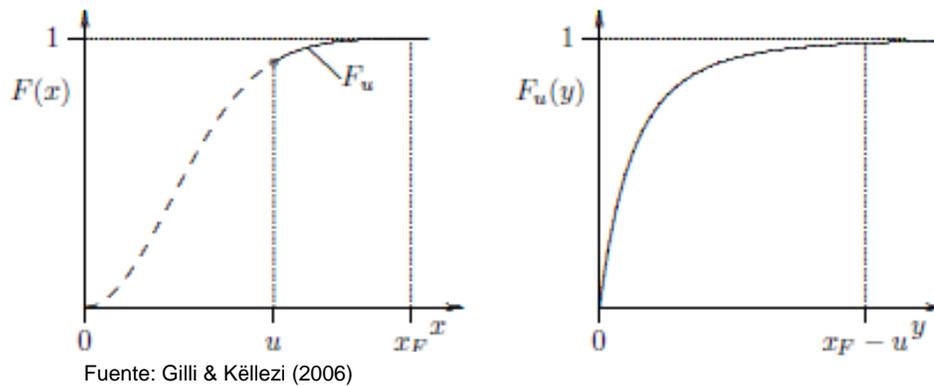


Figura 5. Gráfico izquierdo muestra la funci3n de distribuci3n F y el derecho la funci3n de distribuci3n condicional F_u .

La funci3n de distribuci3n F_u es llamada Funci3n de Distribuci3n Condicional, y es definida como:

$$F_u(y) = P(x - u \leq y \mid x > u), \quad 0 \leq y \leq x_f - u \quad (6)$$

Donde x es una variable aleatoria, u es un umbral dado, $y = x - u$ son los excesos y $x_f \leq \infty$ es el extremo derecho de F . Se verifica que F_u puede ser escrito en términos de F , de la siguiente forma:

$$F_u(y) = \frac{F(u+y)-F(u)}{1-F(u)} = \frac{F(x)-F(u)}{1-F(u)} \quad (7)$$

La variable aleatoria x toma principalmente valores entre 0 y u , y por lo tanto, la estimación de F en este intervalo generalmente no genera problemas. Sin embargo, la estimación de F_u a veces resulta difícil por la cantidad de datos presentes en esa área. Considerando lo anterior, es que Pickands (1975) y Balkema & De Haan (1974) propusieron que para un u grande, $F_u(y)$ puede ser aproximado por:

$$F_u(y) \approx G_{\xi,\sigma}(y), \quad u \rightarrow \infty,$$

donde

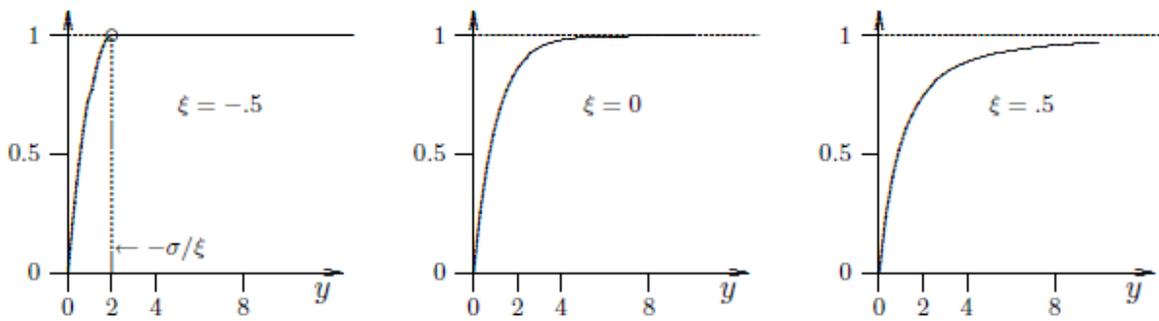
$$G_{\xi,\sigma}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}y\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\sigma}} & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Para $y \in [0, (x_f - u)]$ si $\xi \geq 0$ e $y \in [0, -\frac{\sigma}{\xi}]$ si $\xi < 0$. $G_{\xi,\sigma}$ es definida como la Distribución Generalizada de Pareto (GPD). Si x es definido como $x = u + y$, la distribución GPD también puede ser expresada como una función de x , de la siguiente manera:

$$G_{\xi,\sigma}(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x-u}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \quad (9)$$

Al igual que la distribución GEV, la distribución GPD tiene tres parámetros: el parámetro de ubicación μ , el parámetro de escala σ y el parámetro "índice de cola" ξ , el cual nos da información acerca de la forma (grado de pesadez o ancho) de la cola.

La figura 6 muestra la forma de la distribución GPD ($G_{\xi,\sigma}$) cuando el índice de cola ξ toma valores negativos, cero, y positivos.



Fuente: Gilli and K ellezi (2006)

Figura 6. Forma de la distribuci3n Generalizada de Pareto para $\sigma = 1$. De izquierda a derecha, tenemos ξ con valores negativos, cero y positivos.

3.2.1 VaR bajo Distribuci3n Generalizada de Pareto

Las medidas de riesgo VaR_p y ES_p pueden ser expresadas como funci3n de los parámetros de la Distribuci3n Generalizada de Pareto. Despejando $F(X)$ de la ecuaci3n (7) tenemos:

$$F(x) = (1 - F(u))F_u(y) + F(u)$$

Y reemplazando F_u por la funci3n GPD y $F(u)$ por $(n - N_u)/n$, donde n es el número total de observaciones y N_u es el número de observaciones sobre el umbral u , se obtiene:

$$\hat{F}(x) = \frac{N_u}{n} \left(1 - \left(1 + \frac{\hat{\xi}}{\hat{\sigma}}(x - u) \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}} \right) + \left(1 - \frac{N_u}{n} \right)$$

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \frac{\hat{\xi}}{\hat{\sigma}}(x - u) \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}} \quad (10)$$

Invirtiendo la ecuaci3n (10) y para una probabilidad dada p :

$$\widehat{VaR}_p = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u} p \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (11)$$

3.2.2 Expected Shortfall (ES)

El VaR Condicional o ES, fue propuesto por Artzner et al. (1999) como una mejor medida de riesgo y se define como “la esperanza condicional de la pérdida dado que ésta es mayor al VaR”. En contraste con el VaR, ES mide el riesgo de un instrumento considerando tanto el tamaño como la probabilidad de pérdidas por encima de un umbral determinado (Basilea, 2012). ES da el tamaño de pérdida esperada, dado que se excede el VaR, para un nivel de probabilidad p :

$$ES_p = E(X | X > VaR_p)$$

Lo que es equivalente a,

$$ES_p = VaR_p + E(X - VaR_p | X > VaR_p) \quad (12)$$

El segundo término de la ecuación (12) representa la Función de Distribución de Excesos Medios $F_{VaR_p}(x)$ (tomando VaR_p como umbral). Si el umbral VaR_p es lo suficientemente grande, entonces $F_{VaR_p}(x)$ es una Distribución GPD:

$$F_{VaR_p}(x) = G_{\xi, \sigma + \xi(VaR_p - u)}(x)$$

Entonces, la función de distribución de excesos medios $F_{VaR_p}(x)$ puede ser calculada como:

$$\frac{\beta + \xi(\text{VaR}_p - u)}{1 - \xi} \quad (13)$$

Donde $\xi < 1$ y sustituyendo tenemos.

$$\widehat{ES}_p = \frac{\text{VaR}_p}{1 - \xi} + \frac{\sigma - \xi u}{1 - \xi} \quad (14)$$

4. Datos

Los datos usados corresponden al Índice de Precios Selectivo de Acciones (IPSA), el cual mide las variaciones de 40 sociedades con mayor presencia bursátil en la Bolsa de Santiago⁵. Específicamente, los datos corresponden a retornos diarios (cotizables) del índice, desde el 01 de Enero de 2006 hasta el 31 de Diciembre de 2016, totalizando una muestra de 2751 datos.

Los datos del índice fueron transformados en retornos logarítmicos diarios de la siguiente forma,

$$r_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$$

Además, para términos de presentación, los datos fueron re-escalados de la siguiente forma: $r_t = 100r_t$. A continuación se presenta un resumen de la estadística descriptiva para la serie de retornos.

Mínimo ⁶ (%)	Máximo ⁷ (%)	Desv. Estr. (%)	Media (%)	Coef. Asim.	Curtosis	JB (p-value)	N
-7,17	15,02	1,04	0,027	0,55	20,35	47.409 (0.00)	2751

De la tabla anterior se concluye que la media diaria de los retornos es positiva, indicando que el índice de precios convergió al alza durante el periodo seleccionado.

Además, el alto valor de curtosis, nos señala que estamos en presencia de una forma de la distribución de frecuencias leptocúrtica, es decir, en la serie existe una alta

⁵www.bolsadesantiago.com

⁶ 08 Agosto 2011: Caída generalizada en el mercado de valores, ya que la agencia de calificación Standard & Poors rebajó la máxima clasificación a la deuda de EE.UU., de AAA a AA+. (Fuente: Bloomberg)

⁷ 14 Octubre 2008: Mayor alza desde enero de 1989, debido a los fuertes aumentos en el precio de las acciones de Banco de Chile (16%), Cencosud (18%) y SQM (22%). (Fuente: Bloomberg)

concentración de datos lejos de la media. Este hecho, junto con el test Jarque Bera⁸, comprueban que estamos en presencia de una muestra con colas más pesadas que una distribución normal.

A continuación se muestra la serie del IPSA, sus retornos y el histograma.

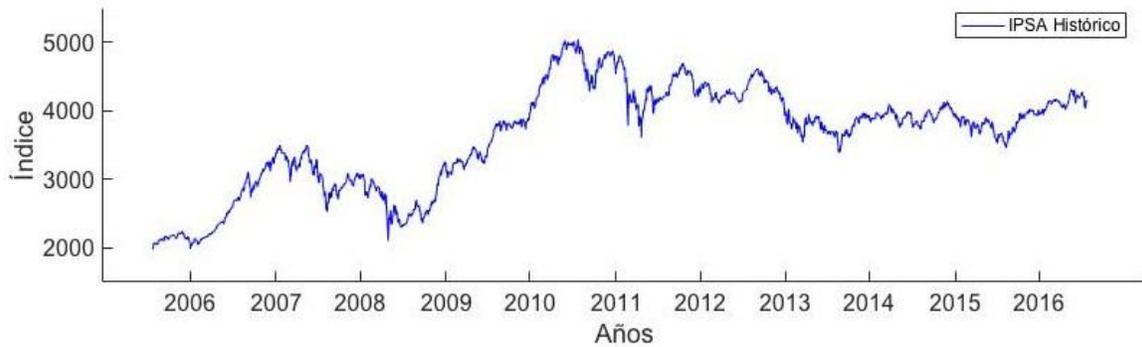


Figura 7: IPSA Histórico

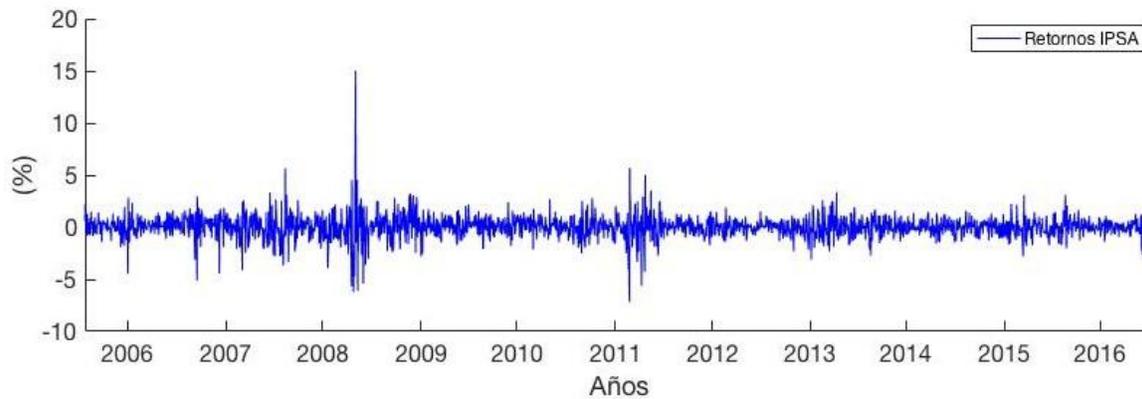


Figura 8: Retornos IPSA

⁸H₀: la serie de retornos se distribuye normal en todos los niveles de significancia. Valores del p-value inferiores a $\alpha = 0,01$ indican que se rechaza la hipótesis nula señalada.

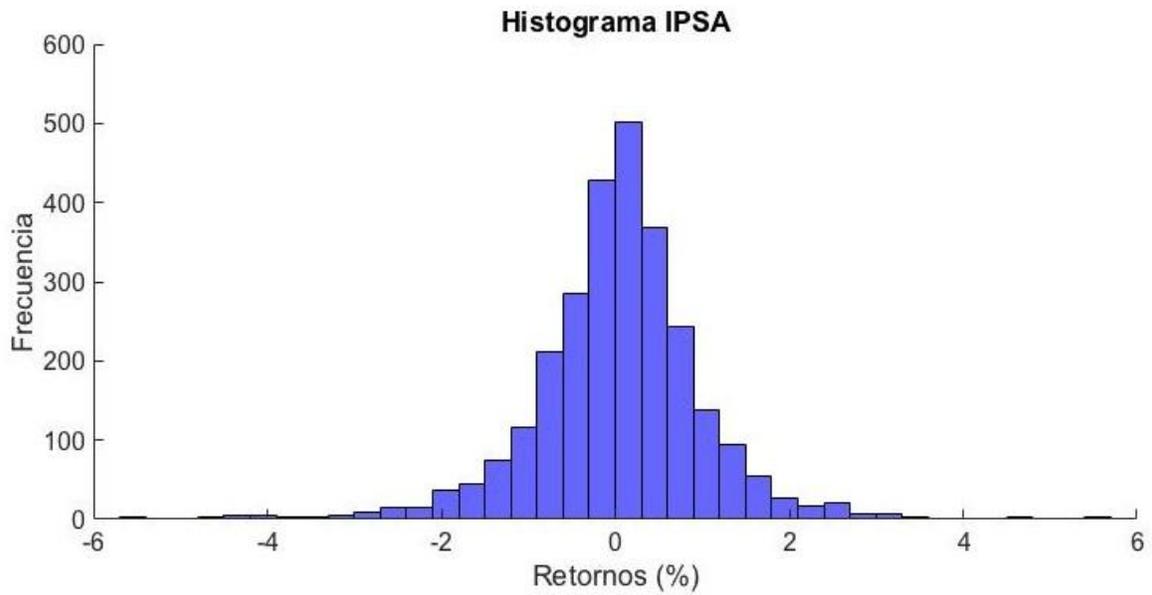


Figura 9. Histograma de retornos del IPSA

Otra manera de demostrar que no existe normalidad en los retornos, es mediante la gráfica cuantil–cuantil (gráfica Q-Q), mostrada en la figura 10. Esta gráfica, se usa para determinar visualmente que tan bien se ajustan los datos empíricos al comportamiento de una distribución teórica, comparando los valores ordenados de una serie con los cuantiles de la distribución. En este caso usamos la normal.

Si las dos distribuciones son consistentes, los puntos sobre la gráfica asumen un patrón lineal que pasa a través del origen con una recta de pendiente unitaria. Como vemos, los valores extremos se alejan de la línea recta, lo cual es señal de la existencia de colas pesadas o valores extremos.

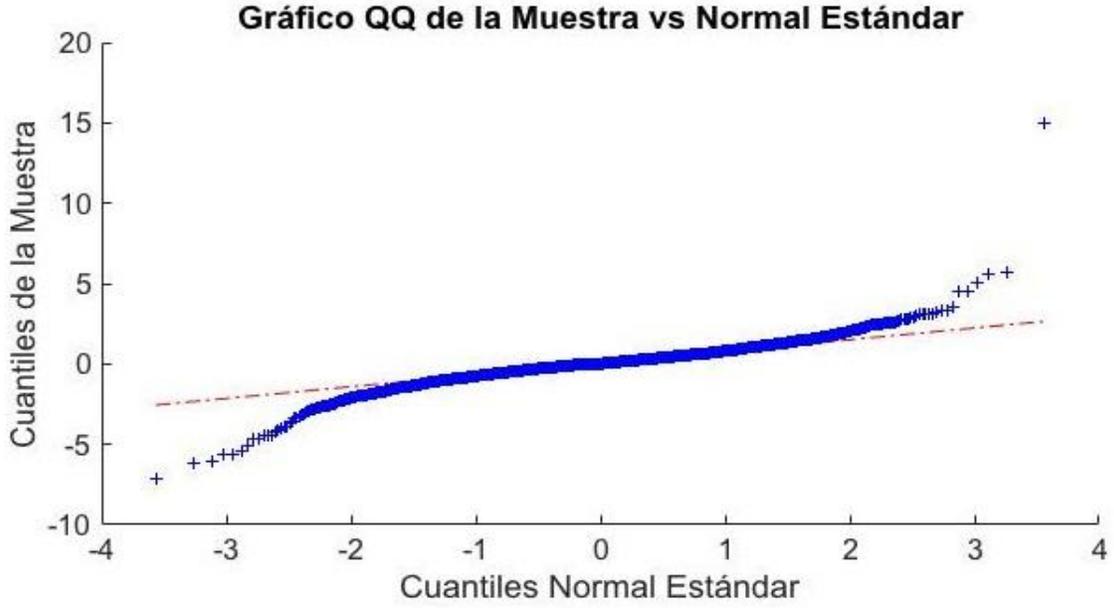


Figura 10. Gráfico Q-Q Normal para retornos del IPSA

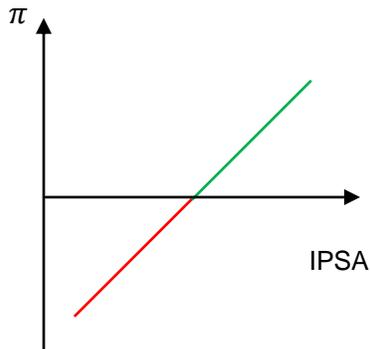
5. Resultados

En primer lugar, se procederá al cálculo del VaR (diario) mediante el método Varianza-Covarianza, el cual asume normalidad en la serie de retornos. Luego se usará la metodología de Teoría de Valor Extremo, considerando en primera instancia el Método Máximo de Bloque, obteniendo el “Nivel de Retorno” (R^k). Finalmente, se modelan los retornos que sobrepasan un determinado umbral, para obtener el VaR y la Pérdida Esperada (Expected Shortfall)⁹. En ambos casos, se utiliza la estimación de Máxima Verosimilitud para la obtención de los parámetros de la distribución. También se calculan estimaciones de intervalos basados en la estimación de los parámetros de las distribuciones para medir la calidad de ajuste del modelo. Con estos resultados, se realizará una comparación de las metodologías y se concluirá que las medidas de VaR son subestimadas considerando normalidad en la serie de retornos.

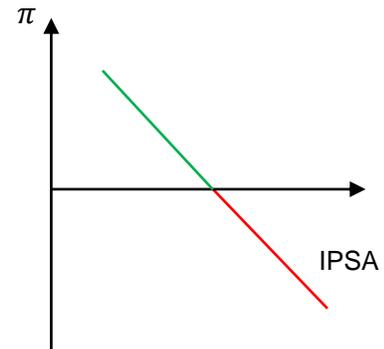
5.1 VaR bajo Distribución Normal

Para el cálculo del VaR, se considera tanto la cola izquierda como la derecha de la distribución de retornos. Esto, debido a que, según la posición que se tenga sobre un activo o índice (larga o corta), el escenario de riesgo cambia. Si se tiene una posición larga, representada por la cola izquierda, implica que nos beneficiaremos por un aumento en su valor, por lo tanto, retornos negativos nos generan el riesgo. Contrario sucede con la posición corta, representada por la cola derecha, donde aumento en el valor del índice nos generan pérdidas, por lo tanto, retornos positivos nos generan riesgo. A continuación se muestra un esquema de beneficios o pérdidas (gráfica P&L) según la posición que tengamos sobre el índice.

⁹Para ambas metodologías se hizo uso del software Matlab.



1. Posición Larga



2. Posición Corta

Caso 1: Posición Larga en el Índice

Para la cola izquierda, se cambiaron los signos de los retornos, de modo que los valores positivos corresponden a pérdidas.

Como se asumen retornos normales, el cálculo del VaR es mucho más simple, puesto que se debe calcular el retorno medio de la serie, su desviación estándar, y la constante α (menor valor tal que a la izquierda de ese valor, la probabilidad sea un cierto nivel, en este caso 1%). Igualmente, como se quiere saber el VaR con un 99% de nivel de confianza, ese valor se puede obtener de la tabla normal estándar ($\alpha = 2,326$). El cálculo del VaR mencionado se realizó mediante el software Microsoft Excel, el cual nos arroja los siguientes resultados:

$$\text{VaR} = \mu - \alpha \equiv \alpha \sigma$$

De lo anterior, se obtuvo lo siguiente:

Posición	Media (%)	Desv. Estdr. (%)	VaR (%)	Valor Índice	Valor Índice con VaR
Larga	-2,72	1,04	2,42	4151	4051

Considerando la posición larga en el índice, se tiene que el VaR es de 2,42%, es decir, que hay un 1% de probabilidad que se pierda más del 2,42% en el período siguiente (lo que es lo mismo que con un 99% de confianza, se perderá a lo más un 2,42% en el período siguiente). Esto hace que el valor del índice caiga de 4.152 a 4.051.

Caso 2: Posición Corta en el Índice

En términos conceptuales, estar corto en un activo significa que se esperan bajas en el mercado, ante lo cual, vendo un activo que no he comprado antes con la expectativa de que el precio será menor en el futuro, por lo tanto, lo podré comprar a un nivel más bajo. De esta forma, se ganará una utilidad si el activo baja $P_{venta} - P_{compra} > 0$ (caso contrario ocurre si el activo sube). De ahí, la relevancia de las medidas de riesgo, puesto que los inversionistas deben considerar las máximas pérdidas a las que se enfrentan según sus expectativas y el riesgo tomado, es decir, hacer uso eficiente de la información presente en el mercado.

Siguiendo la misma metodología anterior se tiene lo siguiente:

Posición	Media (%)	Desv. Estdr. (%)	VaR (%)	Valor Índice	Valor Índice con VaR
Corta	2,72	1,04	2,42	4151	4252

Considerando la posición corta en el índice, tenemos que el VaR es de 2,42%, es decir, que hay un 1% de probabilidad que se pierda más del 2,42% en el período siguiente (lo que es lo mismo que con un 99% de confianza, se perderá a lo más un 2,42% en el período siguiente). Esto hace que el valor del índice suba de 4.151 a 4.252.

Como vemos la medida de VaR es la misma en ambos casos, puesto que asumimos normalidad en la serie de retornos, por lo tanto, según la posición sobre el índice, la interpretación cambia, como se describió anteriormente. La cola izquierda representa las pérdidas para las posiciones largas y la cola derecha para las posiciones cortas.

A continuación se mostrarán las medidas de VaR siguiendo la Teoría de Valor Extremo, calculando el riesgo tanto de la cola izquierda como de la derecha, y se verá que no son iguales, puesto que los retornos se ajustan a la Distribución General de Valores Extremos y a la Distribución General de Pareto, es decir, no hay simetría como sucede con la normal.

5.2 Método Máximo de Bloques y Nivel de Retorno (R_n^k)

Siguiendo la metodología propuesta por Gilli & Kellezi (2006), la estimación se realiza mediante los siguientes pasos:

- Dividir la muestra en n bloques de igual longitud.
- Identificar el valor máximo de cada bloque.
- Ajustar la Distribución de Valores Extremos Generalizada (GEV) al conjunto de máximos.
- Calcular R_n^k y estimar sus intervalos de confianza.

La serie de datos del IPSA se ha dividido en 11 submuestras (o bloques) no traslapadas, conteniendo cada una los retornos diarios de cada año. Como el año calendario varía en el tiempo, no todos los bloques tienen la misma longitud. El retorno máximo en cada uno de los bloques, constituye la serie de datos de la muestra de máximos M que se utiliza para estimar la Distribución de Valores Extremos Generalizada (GEV). La Figura 11 representa los máximos anuales para las colas izquierda y derecha (tanto retornos positivos como negativos) del IPSA.

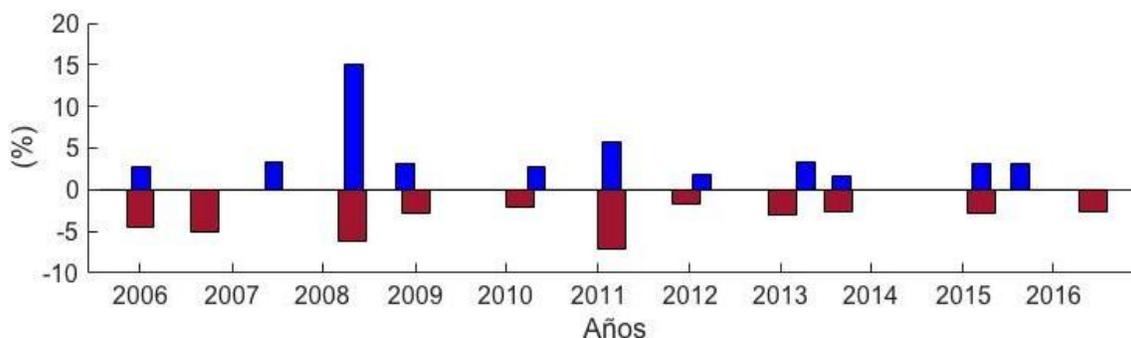


Figura 11. Mínimos y máximos anuales de los rendimientos diarios del IPSA

La función de probabilidad logarítmica que se estima mediante el método de máxima verosimilitud, con el fin de encontrar los parámetros para ajustar la serie de máximos a la Distribución de Valores Extremos Generalizada, es la siguiente:

$$L(\xi, \mu, \sigma; x) = \sum_i \log(h(x_i)), \quad x_i \in M$$

donde,

$$h(\xi, \mu, \sigma; x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\xi-1}} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\xi}}\right)$$

es la función de densidad de probabilidad si $\xi \neq 0$ y $\xi \frac{x-\mu}{\sigma} > 0$. Si $\xi = 0$ la función h es:

$$h(\xi, \mu, \sigma; x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

La figura 12 y 13 muestran gráficamente la distribución de valores extremos generalizada ajustada a los datos de la serie de máximos (función de distribución de la muestra).

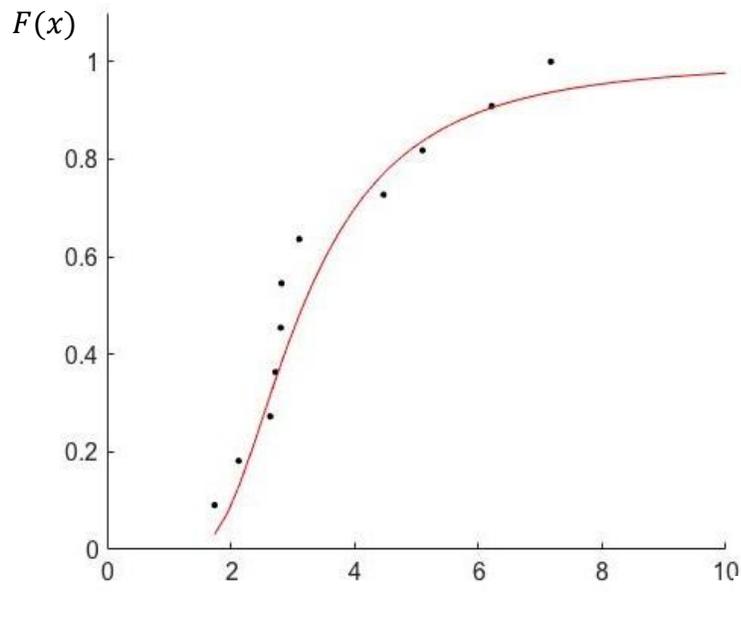


Figura 12. Los puntos representan la distribución de mínimos (cola izquierda) de la serie junto a la correspondiente distribución de Valores Extremos Generalizada ajustada.

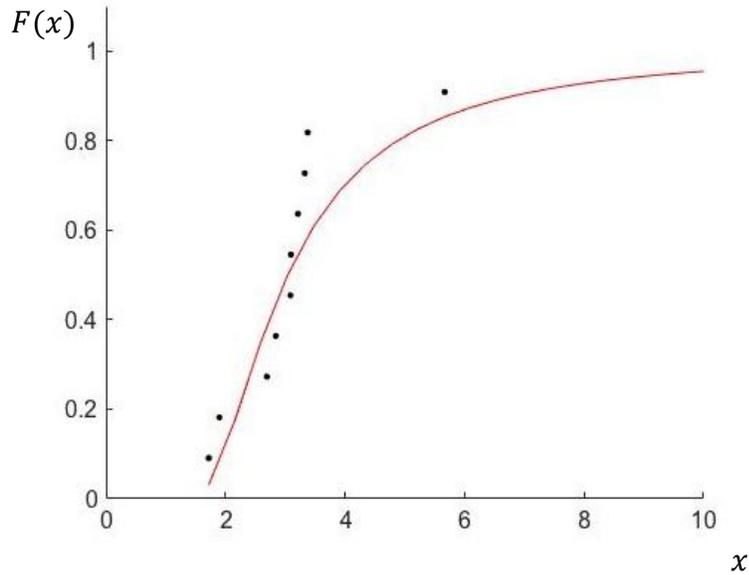


Figura 13. Los puntos representan la distribución de máximos (cola derecha) de la serie junto a la correspondiente distribución de Valores Extremos Generalizada ajustada.

Una vez estimada esta distribución, para poder estimar los intervalos y el valor R_n^k , que es de interés como medida de riesgo, se debe reparametrizar la Distribución de Valores Extremos Generalizada como una función del nivel de retorno R_n^k . Para esto, debemos despejar μ de la ecuación 5 y sustituir en $H_{\xi,\sigma,\mu}$ definido en la ecuación 4. La nueva función de Distribución de Valores Extremos Generalizada queda:

$$H_{\xi,\sigma,R^k}(x) = \begin{cases} \exp \left(\left(-\frac{\xi}{\sigma} (x - R^k) + \left(-\log \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right)^{-\xi} \frac{-1}{\xi} \right) \right) & \xi \neq 0 \\ \left(1 - \frac{1}{k} \right) \exp \left(-\frac{x - R^k}{\sigma} \right) & \xi = 0 \end{cases}$$

Ahora podemos estimar el parámetro R_n^k en conjunto con los parámetros $\hat{\xi}$ y $\hat{\sigma}$ de la distribución, siendo el más relevante ξ , puesto que caracteriza la cola de la distribución de nuestra serie, y, según su valor, sabremos a qué tipo de las 3 distribuciones se asemeja nuestra submuestra.

En la tabla a continuación se muestran los resultados:

BMM Cola Izquierda			
	Límite Inferior	Valor Estimado	Límite Superior
ξ	-0,10	0,32	0,75
σ	0,72	1,01	1,74
R^5 (%)	3,72	4,72	9,60
R^{10} (%)	4,21	6,09	20,16

BMM Cola Derecha			
	Límite Inferior	Valor Estimado	Límite Superior
ξ	0,12	0,51	0,89
σ	0,75	1,00	1,66
R^5 (%)	3,88	4,88	5,88
R^{10} (%)	4,25	6,82	7,82

De la tabla anterior se concluye que para la cola izquierda, es decir, quien posee una posición larga en el IPSA, el nivel de retorno R^5 es de 4,72, lo que implica que, la máxima pérdida observada durante un período de 1 año será mayor a 4,72%, una vez en 5 años. Este valor se encontrará entre los intervalos estimados 3,72% y 9,6% con una notoria asimetría, debido a la menor cantidad de datos presentes en los cuantiles más extremos, lo cual hace que haya mayor incertidumbre para estimar las pérdidas máximas. Para la cola derecha, es decir, quien posee una posición corta en el IPSA, tenemos que el nivel de retorno R^5 es de 4,88, lo que implica que, la máxima pérdida observada durante un período de 1 año será mayor a 4,88%, una vez en 5 años. El mismo análisis se realiza para R^{10} el cual nos da una pérdida de 6,09% y 6,82% para la cola izquierda y derecha respectivamente. En la figura 14 se muestra el intervalo al 95% de confianza de la estimación por máxima verosimilitud de R^{10} .

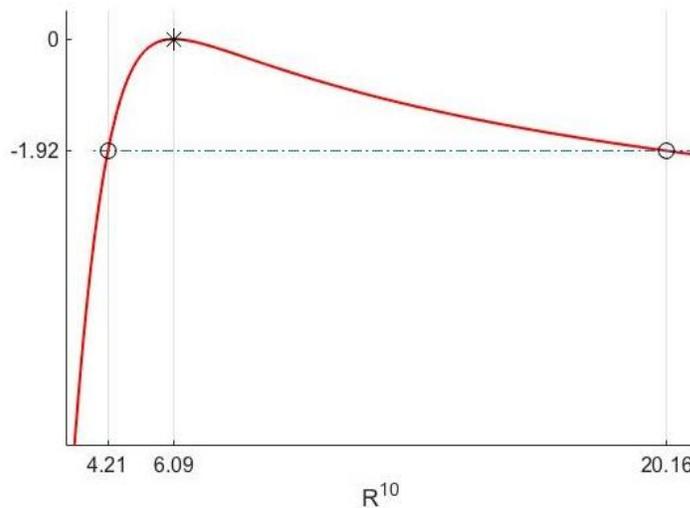


Figura 14. Intervalo al 95% de confianza de la estimación por máxima verosimilitud de R^{10} de la cola izquierda.

El valor de ξ mayor a 0, nos indica que la distribución de la submuestra de máximos del IPSA, se asemeja a la Fréchet.

5.3 Excesos Sobre el Umbral (Peak Over Threshold)

Al igual que la metodología anterior, siguiendo lo realizado por Gilli & Kellezi (2006), las estimaciones de los resultados se obtienen mediante los siguientes pasos:

- Seleccionar el umbral u en la serie completa de datos.
- Ajustar la función de Distribución Generalizada de Pareto (GPD) a los datos que quedan sobre el umbral estimado.
- Calcular el VaR y el ES junto a sus intervalos.

Teóricamente, no existe una metodología o algoritmo claro para la selección del umbral. Este es un tema cuestionable en relación a la metodología de Valores Extremos, ya que implica un trade-off entre el sesgo y la varianza de las estimaciones del parámetro que define la cola ξ . Si u se determina demasiado bajo, muchos datos ordinarios se toman como extremos, dando así estimaciones sesgadas. Por el contrario, un umbral excesivamente alto, nos deja con escasas observaciones extremas, lo cual impide realizar estimaciones eficientes de los parámetros de la cola (lo que conlleva un mal ajuste de la distribución). En ambos casos, las estimaciones resultantes son defectuosas y pueden conducir a

conclusiones erróneas al evaluar el riesgo. Es por ello, que junto a lo anterior, se calculan intervalos de confianza (al 95%) tanto para los parámetros de la distribución como las medidas de riesgo, mediante un remuestreo de la serie de retornos (Bootstrapping) con el fin de darle mejor calidad de ajuste al modelo.

A continuación, se muestran los Excesos Medios de la Muestra, metodología gráfica que es muy útil para definir los valores extremos como aquellas observaciones que superan un cierto umbral alto u . El objetivo de este método, es modelar la distribución de las superaciones sobre u , es decir, las variables aleatorias $Y_i = X_i - u$, para aquellos retornos de la serie X_i que exceden u (es decir, $X_i > u$).

$$(u, e_n(u)), \quad x_n^1 < u < x_n^n$$

donde $e_n(u)$ es la función de Excesos Medios de la Muestra definido como:

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=k}^n (x_i^n - u)}{n - k + 1}, \quad k = \min\{i | x_i^n > u\}$$

$n - k + 1$ es el número de observaciones que exceden el umbral u .

Como se mencionó anteriormente, no existe una metodología única para la elección del umbral, sin embargo, la función de Excesos Medios de la Muestra, al ser una estimación de los excesos medios, debe ser lineal. Esta propiedad suele usarse como criterio para la selección de u . Las Figura 15 y 16, muestran el exceso medio de la muestra correspondiente a los datos del IPSA. Estos valores se sitúan al principio de la muestra de excesos medios, que son aproximadamente lineales y corresponden al 5% de las serie de retornos, dejando respectivamente 137 observaciones en las colas, como observaciones extremas.

A continuación, vemos que el umbral u de la cola izquierda es 1,537 y para la cola derecha 1,5053.

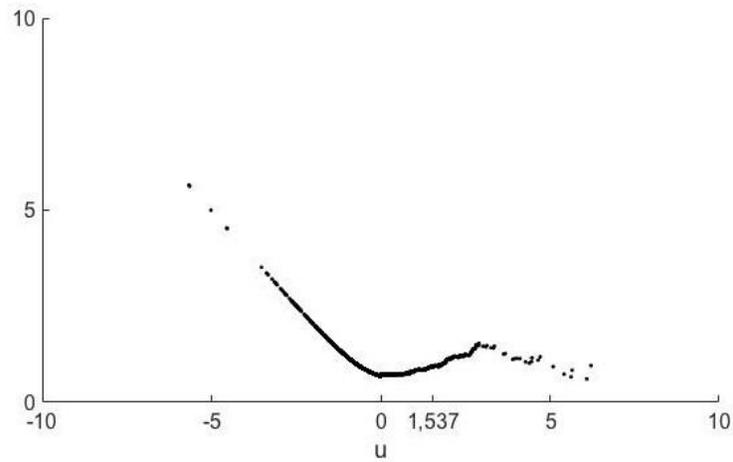


Figura 15. Excesos Medio de la Muestra para la cola izquierda del IPSA.

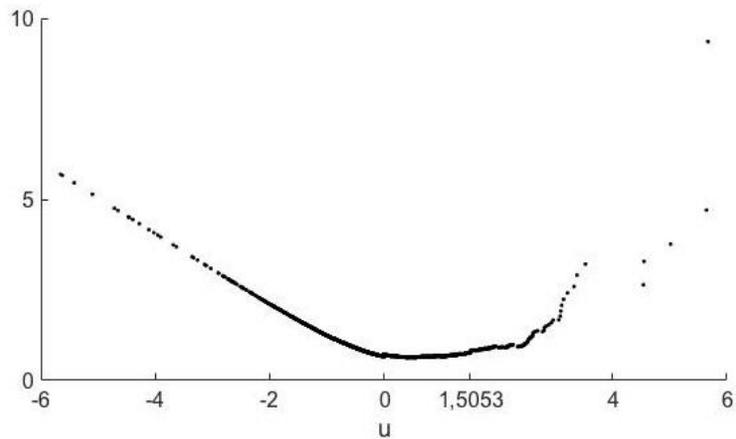


Figura 16. Excesos Medio de la Muestra para la cola derecha del IPSA.

Dado el resultado anterior, sabemos que las observaciones sobre el umbral estimado deben seguir una Distribución Generalizada de Pareto. La función de probabilidad logarítmica que se estima mediante el método de máxima verosimilitud con el fin de encontrar los parámetros para ajustar la serie de máximos a la Distribución Generalizada de Pareto es la siguiente:

Para una muestra $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ la función de verosimilitud logarítmica $L(\xi, \sigma | y)$ que modela la Distribución Generalizada de Pareto, es el logaritmo de la función de densidad

de las n observaciones:

$$L(\xi, \sigma|y) = \begin{cases} -n \log \sigma - \left(\frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \frac{1}{\xi} y_i\right) & \text{if } \xi \neq 0 \\ -n \log \sigma - \left(\frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n y_i & \text{if } \xi = 0 \end{cases}$$

Con lo anterior, se estiman los valores de $\hat{\xi}$ y $\hat{\sigma}$ que maximizan la función de verosimilitud logarítmica para la muestra definida como las observaciones que exceden el umbral u . De lo anterior obtenemos que $\hat{\xi} = 0.2212$ y $\hat{\sigma} = 0.7286$ para la cola izquierda y $\hat{\xi} = 0.2560$ y $\hat{\sigma} = 0.5658$ para la cola derecha.

Las figuras 17 y 18 muestran gráficamente la distribución Generalizada de Pareto ajustada a la serie de retornos sobre el umbral.

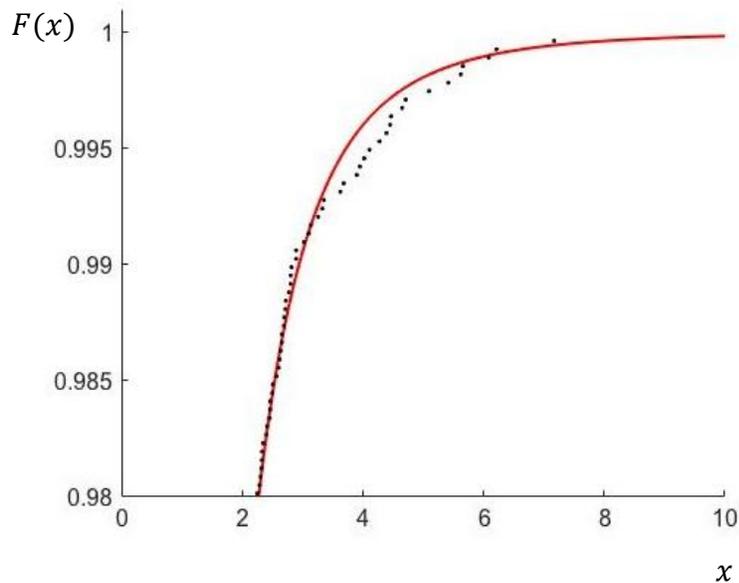


Figura 17. Los puntos representan la Distribución Generalizada de Pareto ajustada a los retornos sobre el umbral 1,5374 de la cola izquierda.

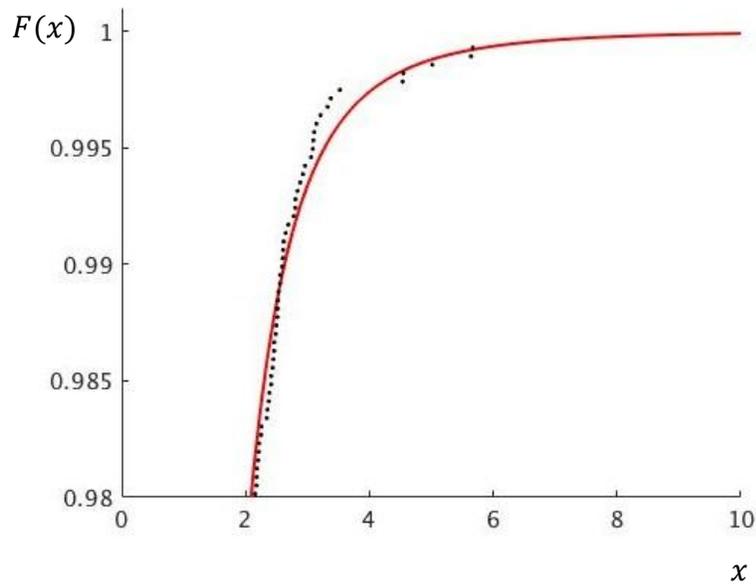


Figura 18. Los puntos representan la Distribución Generalizada de Pareto ajustada a los retornos sobre el umbral 1,5053 de la cola derecha.

Se ve que la cola derecha es más pesada que la izquierda. Esto también se puede ver a partir del valor estimado del parámetro ξ , cuyo valor es mayor para la cola derecha.

Una vez estimados los parámetros de la distribución se procede al cálculo del VaR y ES, dado por las siguientes igualdades:

$$\widehat{VaR}_p = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u} p \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right)$$

$$\widehat{ES}_p = \frac{\widehat{VaR}_p}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\sigma} - \hat{\xi}u}{1 - \hat{\xi}}$$

Para una probabilidad $p = 1\%$, se tiene que $\widehat{VaR}_{1\%} = 2,942\%$ y $\widehat{ES}_p = 4,276\%$ para la cola izquierda y $\widehat{VaR}_{1\%} = 2,629\%$ y $\widehat{ES}_p = 3,776\%$ para la cola derecha. Vemos que la cola izquierda tiene un ES considerablemente más alto que la derecha, lo que nos hace concluir que las potenciales pérdidas, son mayores para quienes están largos en el índice.

Luego de haber calculado los valores estimados para VaR y ES, se obtienen los intervalos de confianza de éstos. Consideramos intervalos de confianza individuales y conjuntos, basados en la metodología “*bootstrap accelerated bias-corrected percentile*”¹⁰. Los intervalos de confianza para el VaR, son obtenidos usando una versión reparametrizada en función de ξ y VaR_p de la función de Distribución Generalizada de Pareto:

$$G_{\xi, VaR_p}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\left(\frac{n}{N_u} p\right)^{-\xi} - 1}{VaR_p - u} \right)^{-\frac{1}{\xi}} & \xi \neq 0 \\ 1 - \frac{n}{N_u} p \exp\left(\frac{y}{VaR_p - u}\right) & \xi = 0 \end{cases}$$

La función de probabilidad de densidad correspondiente es:

$$g_{\xi, VaR_p}(y) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{n}{N_u} p\right)^{-\xi} - 1}{\xi(VaR_p - u)} \left(1 + \frac{\left(\frac{n}{N_u} p\right)^{-\xi} - 1}{VaR_p - u} y \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} & \xi \neq 0 \\ -\frac{\frac{n}{N_u} p \exp\left(\frac{y}{VaR_p - u}\right)}{VaR_p - u} & \xi = 0 \end{cases}$$

De igual manera para ES y $\xi \neq 0$

¹⁰Para entender esta metodología, revisar Shao & Tu (1995) página 135-140.

$$G_{\xi, ES_p} = 1 - \left(1 + \frac{\xi + \left(\frac{n}{N_u} p\right)^{-\xi} - 1}{(ES_p - u)(1 - \xi)} \right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

$$g_{\xi, ES_p} = \frac{\xi + \left(\frac{n}{N_u} p\right)^{-\xi} - 1}{\xi(1 - \xi)(ES_p - u)} \left(1 + \frac{\xi + \left(\frac{n}{N_u} p\right)^{-\xi} - 1}{(ES_p - u)(1 - \xi)} \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1}$$

Las siguientes figuras, muestran los intervalos de confianza siguiendo la metodología anteriormente descrita. Estas estimaciones están hechas sobre el VaR y ES para la cola izquierda usando las versiones reparametrizadas de la Distribución Generalizada de Pareto:

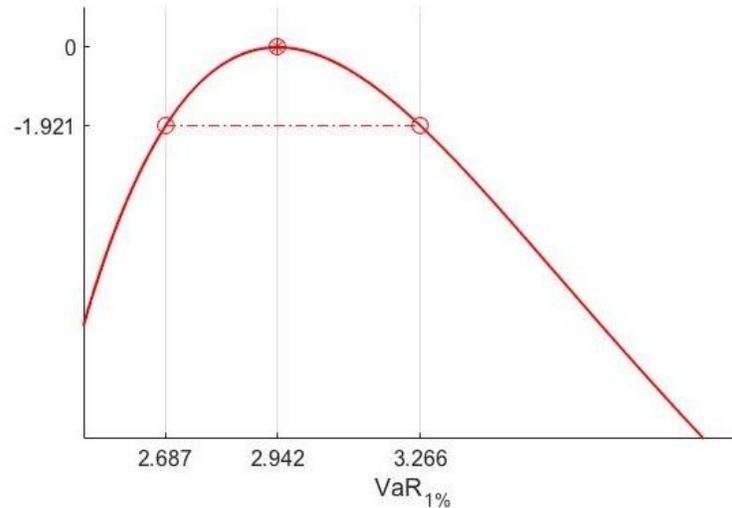


Figura 19. Función de verosimilitud logarítmica e intervalo de confianza para $VaR_{1\%}$.

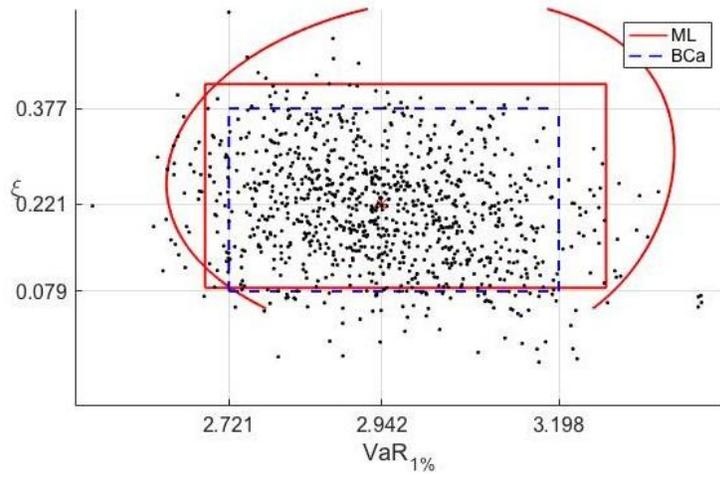


Figura 20. Intervalos de confianza individuales y conjuntos al 95% para ξ y $VaR_{1\%}$. Los puntos representan 1000 puntos de 1000 remuestros (Bootstrap) sobre la serie de retornos.

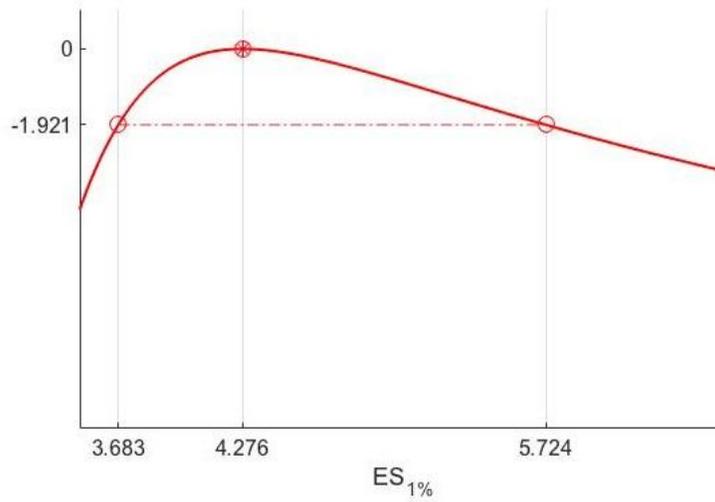


Figura 21. Función de verosimilitud logarítmica e intervalo de confianza para $ES_{1\%}$.

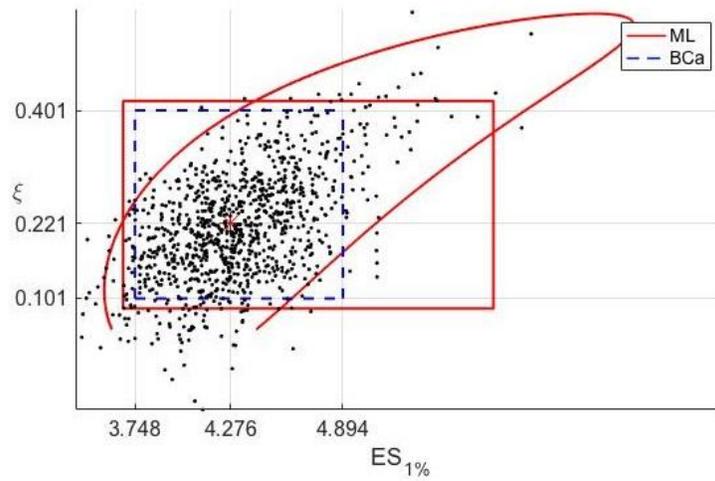


Figura 22. Intervalos de confianza individuales y conjuntos al 95% para ξ y $ES_{1\%}$. Los puntos representan 1000 puntos de 1000 remuestreos (Bootstrapping) sobre la serie de retornos.

Las figuras 23, 24, 25 y 26 corresponden a la cola derecha.

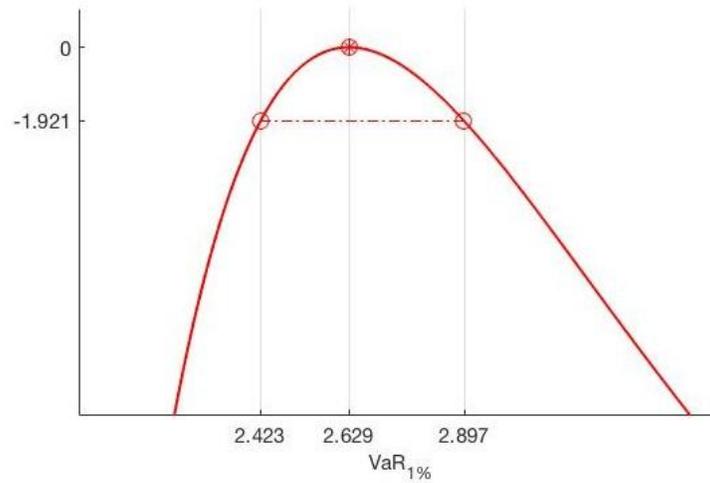


Figura 23. Función de verosimilitud logarítmica e intervalo de confianza para $VaR_{1\%}$.

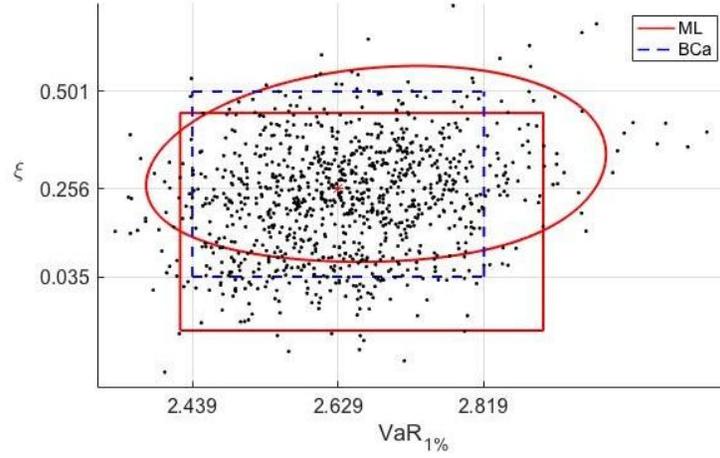


Figura 24. Intervalos de confianza individuales y conjuntos al 95% para ξ y $ES_{1\%}$. Los puntos representan 1000 puntos de 1000 remuestreos (Bootstrapping) sobre la serie de retornos.

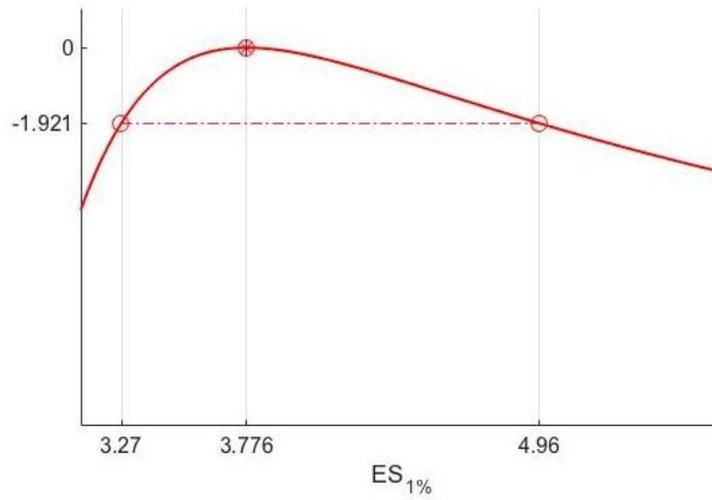


Figura 25. Función de verosimilitud logarítmica e intervalo de confianza para $ES_{1\%}$.

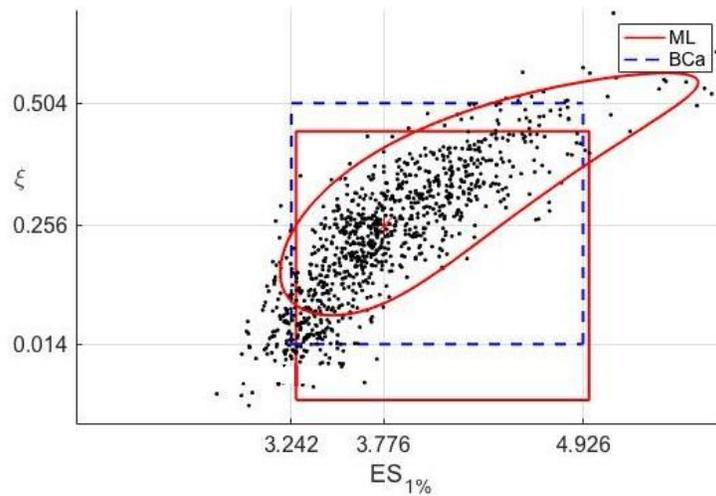


Figura 26. Intervalos de confianza individuales y conjuntos al 95% para ξ y $ES_{1\%}$. Los puntos representan 1000 puntos de 1000 remuestreos (Bootstrapping) sobre la serie de retornos.

En las figuras 20 y 22, para la cola izquierda y las figuras 24 y 26, para la derecha, se muestran los intervalos de confianza estimados mediante 1000 remuestreos (Bootstrapping) de la serie de retornos, destacando en la línea punteada azul los valores de los intervalos para los pares $(\hat{\xi}, \widehat{VaR})$ y $(\hat{\xi}, \widehat{ES})$. Observamos que alrededor del 95% de los puntos se encuentran dentro de la zona de confianza conjunta, demarcada por línea azul punteada (lo que no ocurre en los intervalos de confianza individuales).

A continuación se muestra un resumen de la estimación de los parámetros y las medidas de riesgo estimadas por ambos métodos:

POT Cola Izquierda					
	Bca	ML	Valor Estimado	ML	Bca
ξ	0,08	0,08	0,22	0,42	0,38
σ	0,58	0,60	0,73	0,89	0,91
VaR	2,72	2,69	2,94	3,27	3,20
ES	3,75	3,68	4,28	5,72	4,89

POT Cola Derecha					
	Bca	ML	Valor Estimado	ML	Bca
ξ	0,03	-0,10	0,26	0,45	0,54
σ	0,42	0,46	0,57	0,70	0,70
VaR	2,46	2,42	2,63	2,90	2,84
ES	3,20	3,27	3,78	4,96	4,89

Los resultados muestran que, con una probabilidad de 1%, las pérdidas máximas (mañana, o $t + 1$, siendo t el último día de la serie), para una posición larga, o de la cola izquierda del IPSA serán mayores de 2,94% (VaR) y que la correspondiente Pérdida Esperada (ES), es decir, el promedio de las pérdidas, dado que se excede el VaR, será de 4,28%. Lo mismo ocurre para quienes poseen una posición corta en el índice, tanto el VaR como ES, serán menores, con un 2,63% y 3,78% respectivamente.

6. Conclusiones

En este trabajo se han expuesto tres medidas de riesgo considerando la Teoría de Valor Extremo como base metodológica. Se ha trabajado con el “Nivel de Retorno” (R_n^k) derivado de la metodología de máximo de bloques, el Valor en Riesgo (VaR) y la Pérdida Esperada (ES) derivados de la metodología excesos sobre el umbral, las cuales fueron aplicadas sobre la serie de retornos logarítmicos diarios del IPSA, índice que mide la evolución del mercado de valores de Chile.

De los resultados obtenidos, se ha logrado comprobar nuestra principal hipótesis, que el VaR es subestimado cuando estamos en presencia de una serie de retornos con colas pesadas, habiendo asumido ex ante, normalidad en la distribución. Lo anterior ocurre, tanto para quienes poseen una posición larga y/o corta en el índice. Es por ello que ajustamos la serie a la Distribución Generalizada de Valores Extremos y a la Distribución Generalizada de Pareto, para la estimación del nivel de retorno y el VaR y ES, respectivamente.

Comparando la estimación del VaR, bajo normalidad en la serie de retornos, se tiene que este es de un 2,42% (para ambas posiciones), y considerando la existencia de colas pesadas, es decir, ajustándola a la Distribución Generalizada de Valores Extremos para el cálculo del nivel de retorno, tenemos que R^5 es de 4,72, lo que implica que, la máxima pérdida observada durante un período de 1 año será mayor a 4,72% una vez en 5 años (4,88% quien está corto). Como vemos, esta metodología más que duplica el valor en riesgo, ya que asume no normalidad, es decir, toma en cuenta los eventos pasados que han estado concentrados en la cola de la distribución. Pese a ello, esta metodología no es muy usada en la práctica, ya que se pierde mucha información al tomar solo un punto de un bloque, existiendo un alto sesgo e inconsistencia en la estimación.

Las estimaciones bajo la metodología excesos sobre el umbral, suele representar con mayor exactitud las medidas de riesgo, ya que podemos ajustar el comportamiento de los retornos extremos según el parámetro de forma de la cola a la mejor distribución que muestre el comportamiento de los datos. Según lo anterior, en ambas estimaciones (VaR y ES), la distribución que mejor se ajusta a los retornos que superaron el umbral es la Fréchet.

Con esto tenemos que el VaR será de 2,94% y el ES de 4,28% para quienes están largos en el índice (2,63% y 3,78%, respectivamente para quienes está cortos).

Se comprobó, que esta metodología explota mejor la información en la muestra de datos. Al estar interesados en el comportamiento a largo plazo en lugarde pronósticos a corto plazo, se hizo uso además de los intervalos de confianza. Finalmente, en línea con lo encontrado por los autores Gilli & Kellezi (2006) se considera relevante la estimación de estos intervalos, ya que proporcionan información adicional sobre la calidad de ajuste del modelo.

7. Bibliografía

1. Acerbi, C., & Scandolo, G. (2008). Liquidity risk theory and coherent measures of risk. *Quantitative Finance*, 8(7), 681-692.
2. Ahn, D. H., Boudoukh, J., Richardson, M., & Whitelaw, R. F. (1999). Optimal risk management using options. *The Journal of Finance*, 54(1), 359-375.
3. Alexander, G. J., & Baptista, A. M. (2002). Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26(7), 1159-1193.
4. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9 (3), 203-228.
5. Balkema, A. A., & De Haan, L. (1974). Residual life time at great age. *The Annals of probability*, 792-804.
6. Basak, S., & Shapiro, A. (2001). Value-at-risk-based risk management: optimal policies and asset prices. *The review of financial studies*, 14 (2), 371-405.
7. Boudoukh, J., Richardson, M., & Whitelaw, R. (1998). The best of both worlds. *Risk*, 11 (5), 64-67.
8. Cardozo, P. (2004). Valor en riesgo de los activos financieros colombianos aplicando la teoría de valor extremo. *Artículo realizado como parte de la tesis de la Maestría de Economía, Universidad de los Andes, Bogotá.*
9. Danielsson, J., & de VRIES, C. G. (1997). *Extreme returns, tail estimation, and value-at-risk*. Institute of Economic Studies, University of Iceland.
10. Delfiner, M., Balzarotti, V., & del Canto, A. (2001). Backtesting: Performance of capital requirements for market risk in the BCRA.

11. Efron, B., & Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap: Monographs on Statistics and Applied Probability, Vol. 57. New York and London: Chapman and Hall/CRC.*
12. Fallon, W. (1996). *Calculating value-at-risk* (pp. 96-49). Wharton School, University of Pennsylvania.
13. Fernández, V. P. (2003). *Extreme value theory: value at risk and returns dependence around the world* (No. 161). Centro de Economía Aplicada, Universidad de Chile.
14. Fisher, R. A., & Tippett, L. H. C. (1928, April). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 24, No. 2, pp. 180-190). Cambridge University Press.
15. Gilli, M. & Këllezli, (2006). An application of extreme value theory for measuring financial risk. *Computational Economics*, 27(2-3), 207-228.
16. Gnedenko, B. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire. *Annals of mathematics*, 423-453.
17. Gumbel, E. J. (1958). *Statistics of Extremes* Columbia University Press New York 375 Google Scholar.
18. Hols, M. C., & De Vries, C. G. (1991). The limiting distribution of extremal exchange rate returns. *Journal of Applied Econometrics*, 6(3), 287-302.
19. Huang, C. K., Huang, C. S., & Chikobvu, D. (2015). Extreme risk, value-at-risk and expected shortfall in the gold market. *The International Business & Economics Research Journal (Online)*, 14(1), 107.
20. Jenkinson, A. F. (1955). The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 81(348), 158-171.

21. Johnson, C. (2001). Value at risk: Teoría y aplicaciones. *Estudios de economía*, 28(2).
22. Jorion, P. (1996). Risk2: Measuring the risk in value at risk. *Financial analysts journal*, 52(6), 47-56.
23. Jorion, P. (2000). Value at risk.
24. Linsmeier, T. J., & Pearson, N. D. (1996). Risk measurement: An introduction to value at risk.
25. Longin, F. M. (1996). The asymptotic distribution of extreme stock market returns. *Journal of business*, 383-408.
26. McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*. Princeton university press.
27. Palmquist, J., Uryasev, S., & Krokmal, P. (1999). *Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints*. Department of Industrial & Systems Engineering, University of Florida.
28. Penza, P., & Bansal, V. K. (2001). *Measuring market risk with value at risk* (Vol. 17). John Wiley & Sons.
29. Pickands III, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *the Annals of Statistics*, 119-131.
30. Romero-Meza, R. (2005). Medidas de riesgo financiero. *Revista Economía & Administración*, 149, 57-72.
31. Tu, D., & Shao, J. (1995). The Jackknife and bootstrap. *Springer Series in Statistics*, New York, 85(486-492), 8.

32. Yamai, Y., & Yoshida, T. (2002). On the validity of value-at-risk: comparative analyses with expected shortfall. *Monetary and economic studies*, 20(1), 57-85.
33. Yamai, Y., & Yoshida, T. (2002). Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk (3): their validity under market stress. *Monetary and Economic Studies*, 20(3), 181-237.

Índice

1.	Introducción	2
2.	Value at Risk.....	4
2.1	Metodologías tradicionales para estimar el VaR	6
2.1.1	Método Varianza-Covarianza	6
2.1.2	Simulación Histórica	7
2.1.3	Simulación de Montecarlo.....	8
2.2	Críticas al VaR.....	9
3.	Teoría de Valor Extremo (EVT).....	11
3.1	Distribución de Máximos.....	14
3.1.1	Nivel de Retorno.....	16
3.2	Distribución de Excesos.....	17
3.2.1	VaR bajo Distribución Generalizada de Pareto.....	19
3.2.2	Expected Shortfall (ES)	20
4.	Datos	22
5.	Resultados.....	26
5.1	VaR bajo Distribución Normal.....	26
5.2	Método Máximo de Bloques y Nivel de Retorno (<i>Rnk</i>).....	29
5.3	Excesos Sobre el Umbral (Peak Over Threshold).....	33
6.	Conclusiones	45
7.	Bibliografía	47

1. Introducción

Los últimos años, han estado marcados por diversos eventos que han generado una enorme inestabilidad y volatilidad en el actual mercado financiero mundial. Desde elecciones presidenciales en importantes países del mundo, referéndums en Europa, tensiones bélicas en Asia, entre otros; han mantenido entre los agentes incertidumbre y nerviosismo que se ve reflejado a nivel transversal en los distintos mercados financieros. La relevancia de estos eventos, es que, debido a la alta integración de los mercados, a medida que transcurren, y más importante aún, que sorprenden, repercuten fuertemente en las decisiones de inversión y alocaación de recursos por parte de los agentes económicos, lo cual, muchas veces, genera toma de riesgos ineficientes.

Lo anterior, ha motivado el desarrollo e implementación de metodologías de medición de riesgos, que rompen con el supuesto clásico del VaR (Value at Risk), el cual es, normalidad en la serie de retornos de los activos, considerando escenarios más realistas, es decir, toman en cuenta que la distribución de los retornos posee colas pesadas (o exceso de curtosis) las cuales son más claras en mostrar la densidad probabilística en los extremos, que aunque poseen una menor probabilidad de ocurrencia, generan impactos considerablemente más negativos en comparación a situaciones normales.

Es así, como la Teoría del Valor Extremo (EVT), nos proporciona los fundamentos estadísticos que permiten estimar la ocurrencia de eventos extremos¹, con el fin de cuantificar las pérdidas reales de los portfolios en los diferentes mercados financieros.

En términos generales, EVT, posee dos metodologías para modelar el comportamiento de los retornos presentes en los extremos de la distribución (con mayor desviación a la media) llamados en la literatura, Método Máximo de Bloque (Block Maxima Method) y Excesos sobre el Umbral (Peak Over Threshold). Mediante este último método se introduce el concepto Pérdida Esperada (Expected Shortfall), el cual es la aplicación más relevante de EVT y ampliamente usado actualmente, ya que mide la máxima pérdida

¹Evento extremo se entiende por suceso anormal o inesperado que posee una baja probabilidad de ocurrencia pero de alta significancia (positiva o negativa).

esperada una vez superado el VaR.

En este trabajo, siguiendo la metodología empleada en Gilli & Këllezi (2006) se estimará el VaR (diario) del Índice de Precio Selectivo de las Acciones (IPSA) correspondiente al mercado de valores chileno, para una serie de retornos de 10 años (desde enero de 2006 hasta diciembre de 2016). Una vez testeada la hipótesis de que los retornos de dicho índice no se distribuyen normal, se medirá el VaR siguiendo ambas metodologías de EVT, llegando a las mismas conclusiones que los autores señalados; que, asumiendo condiciones normales de los retornos, el VaR subestima la pérdida diaria que cuando consideramos la existencia de eventos extremos.

La sección II presenta una revisión metodológica del VaR, los principales métodos de estimación y críticas. La sección III muestra los fundamentos de la teoría del valor extremo y las metodologías utilizadas para modelar las distribuciones que mejor reflejan las medidas de riesgo de la cola. En la sección IV, se presentan los datos y una breve estadística descriptiva. La Sección V, presenta una aplicación práctica en la que se analizan las medidas de riesgo sobre el IPSA. En particular, se calculan las distribuciones que mejor se ajustan a los retornos, los índices de cola, y los intervalos de confianza de las medidas de riesgo. La Sección VI, concluye.

2. Value at Risk

Value at Risk (Valor en Riesgo), es una de las medidas más populares de medición de riesgo de mercado que resume información sobre la distribución de las pérdidas potenciales de un portfolio. Esta metodología fue desarrollada por el banco J.P.Morgan en 1994, con el fin de mejorar el control de los riesgos financieros. El gran impacto y uso que tuvo esta herramienta en la industria financiera, llevó a que el Comité para la Supervisión Bancaria de Basilea anunciara en 1995 que los requerimientos de capital debían estar basados en las medidas de VaR.

El VaR busca cuantificar, con determinado nivel de significancia, el monto o porcentaje de pérdida que un activo o portfolio enfrentará en un período de tiempo determinado (Jorion 2000, Penza & Bansal 2001). Esta medida resume en un número, la exposición global a los riesgos de mercado y la probabilidad de movimientos adversos en las variables financieras (Jorion 1996).

Las empresas financieras usualmente usan el VaR para el control de riesgo interno considerando un horizonte de un día y un nivel de confianza del 95%, lo que significa que solamente el 5% de las veces, o 1 de 20 veces (es decir, una vez al mes con datos diarios), el retorno del portfolio caerá más de lo que señala el VaR, en comparación con el retorno esperado.

A partir del amplio uso de esta metodología, diversos estudios han surgido con el fin de profundizar y pulir la medición del riesgo financiero. Ahn et al. (1999), proporcionan una solución analítica al problema de una institución que gestiona de forma óptima su exposición al riesgo de mercado al minimizar su valor en riesgo (VaR) utilizando opciones.

Alexander & Baptista (2002), relacionan el valor en riesgo (VaR) con el análisis media-varianza y examinan las implicancias económicas de utilizar un modelo media-VaR para la selección de una cartera. Descubren que cuando se comparan dos carteras eficientes por media-varianza, la cartera de mayor varianza puede tener menor VaR. Por lo tanto, los reguladores deben ser conscientes de que el VaR no es una mejora incondicional sobre la varianza como una medida del riesgo.

Basak & Shapiro (2000), demuestran que las prácticas de gestión de riesgos bajo el enfoque VaR pueden producir un resultado no deseado. Ellos encuentran que quienes son miopes en la medición del VaR, a menudo optan por una mayor exposición a los activos de riesgo que quienes no los toman, en consecuencia, incurren en mayores pérdidas cuando se producen episodios de estrés. Además, sugieren un modelo alternativo de gestión de riesgos, basado en la expectativa de pérdida, para remediar las deficiencias del VaR. Realizan un análisis de equilibrio general, que revela que la presencia de administradores de riesgo que usan VaR, amplifica la volatilidad de los valores bursátiles ante caídas en los mercados y atenúa la volatilidad en momentos de alzas en los mercados.

Boudoukh, Richardson & Whitelaw (1998), proponen un enfoque híbrido de medición del riesgo, que combina los dos enfoques más populares para la estimación del VaR: RiskMetrics y Simulación Histórica. Estiman el VaR de una cartera aplicando ponderaciones exponenciales decrecientes a los rendimientos pasados y luego encontrando el percentil apropiado de esta distribución empírica ponderada en el tiempo. Las pruebas empíricas muestran una mejora significativa en la precisión de los pronósticos del VaR utilizando el enfoque híbrido en relación con los métodos individuales.

Para el caso chileno, tenemos los trabajos previos de Johnson (2001) quien realiza una descripción del Value at Risk, incorporando volatilidad condicional y volatilidad condicional asimétrica. Para ello utiliza el Índice General de Precios (IGPA) de la bolsa de valores de Chile, con una ventana de datos con frecuencia mensuales y corregidos por el Índice de Precios al Consumidor (IPC). Luego propone metodologías para el cálculo del VaR analizando los niveles de riesgo para instrumentos financieros como bonos, acciones, swaps y forwards. Finalmente, estima el VaR sobre las utilidades operacionales a una muestra de tres bancos chilenos, en donde se evidencia el incremento en el riesgo que se presentó desde fines del año 1997, a partir de la crisis asiática, y cómo este ha comenzado a disminuir a partir del año 1999.

Por otro lado, Romero (2004), realiza una interesante revisión histórica del desarrollo de la medición del riesgo en las finanzas modernas, identificando tres períodos importantes:

- Media-Varianza (1952-1956) iniciado por Markowitz, quien establece como

medidas de riesgo sobre el retorno de inversiones individuales, el cuadrado de la desviación con respecto a la media de la distribución de los retornos (la varianza) y para una combinación de activos o portfolio, elegir ponderaciones para cada activo que minimice la varianza de este.

- Modelos en tiempo continuo (1969-1973) iniciado por Robert Merton, Fisher Black y Myron Scholes, quienes permiten abordar problemas asociados a la valoración de opciones y otros derivados.
- Medidas de riesgo 1997 – actualidad, que fue iniciado por Artzner et al (1999), donde se modelan situaciones más reales como el sesgo en el retorno de activos o skewnes, leptocurtosis y/o colas pesadas a partir de la crítica al supuesto de normalidad de los retornos de las series financieras.

2.1 Metodologías tradicionales para estimar el VaR

Los tres métodos más comunes de cálculo de VaR son: Método Varianza-Covarianza, Simulación Histórica y Simulación de Monte Carlo. Todos los métodos utilizan parámetros derivados de datos de precios históricos y valorizan el portfolio en el período siguiente ($t + 1$).

2.1.1 Método Varianza-Covarianza

Este método, es una estimación paramétrica del VaR en la que el principal supuesto es que los retornos siguen una distribución normal. De acuerdo a Fallon (1996), este método fue propuesto por Garbade (1986). Para definir formalmente el VaR de un portfolio, en primer lugar debemos elegir dos factores cuantitativos: el largo del horizonte a medir (t) y el nivel de confianza ($1 - \alpha$). Ambos son números arbitrarios. Por ejemplo, el Comité de Basilea ha propuesto usar un 99% de intervalo de confianza (sobre un horizonte de 10 días de transacción. El VaR resultante es entonces multiplicado por un factor de seguridad de 3^2 para llegar al capital mínimo requerido para fines regulatorios). Así, como se señaló

²El factor de seguridad fue introducido, ya que la hipótesis de normalidad de la distribución de ganancias y pérdidas (P&L) es ampliamente considerada irreal.

anteriormente, para el caso de un portfolio compuesto por un instrumento y siguiendo la metodología en McNeil, Frey, y Embrechts (2015) se llega a lo siguiente:

$$\text{VaR} = \mu - \alpha \equiv \alpha\sigma\sqrt{t}$$

Donde μ es el retorno medio, α es el menor valor tal que a la izquierda la probabilidad sea un cierto nivel (ejemplo: 1%) y t es el horizonte de tiempo para el cual se calculará el factor de riesgo VaR.

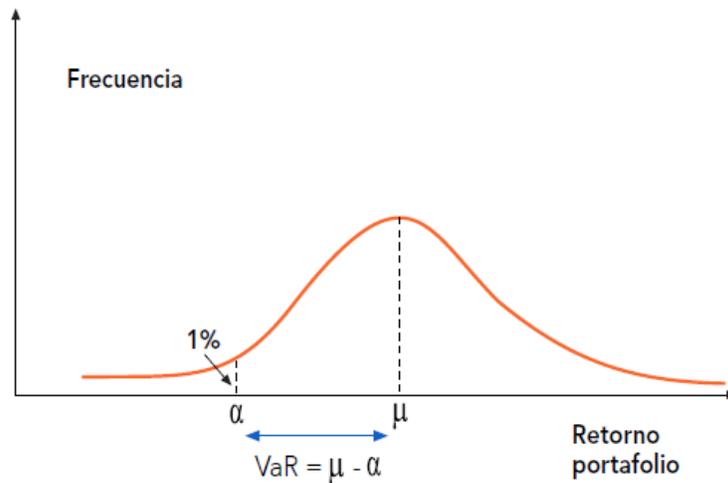


Figura 1. Representación gráfica del VaR

2.1.2 Simulación Histórica

Esta metodología de estimación del VaR, asume que todas las posibles variaciones futuras han sido experimentadas en el pasado, por lo que la distribución histórica es idéntica a la distribución de los retornos en el horizonte de tiempo deseado. La estimación del VaR mediante SH, permite que la información hable por sí misma y así se usa la distribución empírica de los retornos evitando asumir una distribución teórica.

La Simulación Histórica, nos permite estimar empíricamente el VaR directamente de los retornos del activo financiero, teniendo cada uno de estos retornos la misma importancia. Según McNeil, Frey, & Embrechts (2015), la estimación del VaR mediante SH, dado un cierto

nivel de confianza $(1 - \alpha)$ y horizonte de tiempo t , en términos de valor, es el α cuantil de una distribución de utilidades y pérdidas, lo que es equivalente a decir que el VaR expresado como porcentaje de un valor de portfollio, es el α cuantil de la distribución de retornos (el VaR monetario se obtiene sólo multiplicando el porcentaje por el valor actual del portfollio).

2.1.3 Simulación de Montecarlo

Mediante este método, se generan n hipotéticas utilidades ó pérdidas del portfollio. Según Linsmeier & Pearson (1996) y Johnson (2001), y considerando un portfollio de un sólo instrumento, esta metodología consiste en identificar los factores de riesgo y el proceso estocástico que mejor los represente, por ejemplo, los retornos simulados para una acción específica, podrían ser generados a partir de una distribución normal, para luego generar múltiples valores hipotéticos para los retornos del portfollio con un horizonte predefinido t . Una vez simuladas las diversas trayectorias de tamaño t , éstas son usadas para calcular el valor del portfollio para cada una de las simulaciones, y dependiendo de la metodología, se procede a estimar el VaR. En este último paso, Linsmeier & Pearson (1996) proponen determinar el VaR obteniendo el α cuantil de la serie generada (similar a SH), mientras que Johnson (2001) obtiene la desviación estándar y luego estima el VaR.

2.2 Críticas al VaR

Diversos autores han criticado este modelo, entre ellos se destacan, Uryasev et al. (1999), Yamai & Yoshiba (2002) y Acerbi & Scandolo (2008) entre otros; quienes concuerdan que el VaR no es una medida coherente de riesgo y que por consiguiente, debe ser modificada. Artzner et al. (1999) derivaron un conjunto de condiciones que debe cumplir cualquier medida de riesgo. Si una medida de riesgo cumple con tales condiciones, es llamada coherente.

Según lo presentado por Romero (2004), medir riesgo es equivalente a establecer una correspondencia (covarianza) ρ entre el espacio X de variables aleatorias, como por ejemplo los retornos de un cierto conjunto de inversiones, y un número real no negativo, es decir, $\rho : X \rightarrow R$. Medidas de riesgo permiten ordenar y comparar inversiones de acuerdo a su respectivo valor de riesgo.

A estas correspondencias es necesario imponerles restricciones con el propósito de obtener definiciones con significado. Cualquier medida de riesgo que carezca de tales propiedades puede conducir a inconsistencias.

Por lo tanto, cualquier medida de riesgo aceptable $\rho : X \rightarrow R$ debe satisfacer con las siguientes propiedades:

a) Homogeneidad positiva: $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

El cambiar el tamaño de un portfolio por un factor λ , manteniendo las cantidades relativas de sus activos, debería ser igual que multiplicar la medida de riesgo por λ .

b) Subaditividad: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

Indica que la medida de riesgo de la fusión de dos portfolios no debería ser mayor que la suma de sus medidas de riesgo por separado, principio fundamental de la diversificación de riesgo. Esta propiedad es esencial en la teoría de portfolio de

Markowitz, en que el fenómeno de la diversificación implica que ningún nuevo instrumento incrementa el riesgo.

c) Monotonicidad: $X \leq Y \rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

Si un portfolio X tiene retornos menores que otro portfolio Y en todos los estados posibles, su medida de riesgo debería ser mayor.

d) Invarianza transicional: $\rho(X + \alpha r_0) \leq \rho(X) - \alpha$, (X : variables aleatorias, α : número real, r_0 : tasas libres de riesgo)

El combinar un retorno seguro αr_0 con un retorno aleatorio X , su medida de riesgo debería disminuir en α .

3. Teoría de Valor Extremo (EVT)

Los métodos de estimación mencionados en la sección anterior, presentan un buen desempeño cuando tenemos un alto número de observaciones y los datos se comportan de manera normal, sin embargo, proporcionan un ajuste deficiente a los valores extremos de una serie, o a las colas de la distribución. Esto es otra crítica y desventaja de los modelos paramétricos y no paramétricos mencionados por Artzner et al (1999), porque la gestión del riesgo requiere la estimación de eventos extremos que normalmente no son directamente observables a partir de los datos.

EVT se centra en el modelamiento paramétrico del comportamiento de la cola de una distribución, utilizando sólo valores extremos en lugar de todo el conjunto de datos. Esta característica permite alguna extrapolación más allá del rango de los datos.

La aplicación e interés a los modelos financieros y económicos para capturar eventos extremos se ha desarrollado fuertemente en las últimas décadas. El primer uso de la Distribución de Valores Extremos Generalizada fue propuesto por Longin (1996) sobre los rendimientos diarios del índice S&P, quien demuestra que los datos se distribuyen siguiendo el comportamiento de una distribución Fréchet. Posteriormente, Danielsson & Vries (1997) comparan las propiedades de la simulación histórica y las técnicas de RiskMetrics para calcular el VaR sobre los rendimientos de las acciones en EE.UU. con un método que implica el modelado del estimador de la cola de la distribución. Para las predicciones de los peores resultados, el método de RiskMetrics (Varianza-Covarianza) subestima las pérdidas, mientras que la simulación histórica las sobrestima. Sin embargo, las estimaciones obtenidas al aplicar el estimador de cola de la distribución son más precisas en la predicción del VaR. Esto implica, que los requisitos de capital, pueden ser más bajos estimando el VaR con el estimador de la cola.

Hols & Vries (1991) utilizan estos modelos para medir y evaluar el riesgo sobre los retornos en los tipos de cambio. McNeil (1999) y McNeil & Frey (2000), ajustan los retornos a la Distribución Generalizada de Pareto (GPD) de los índices DAX y S&P para estimar las medidas de riesgo.

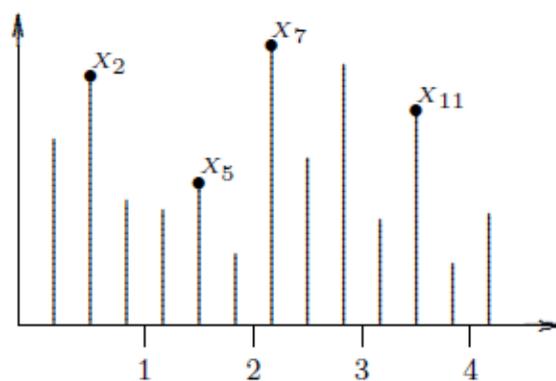
Huang & Chikobvu (2015) utilizan EVT para estimar el VaR y ES sobre los retornos del

precio del oro. En particular, utilizan la prueba de cobertura incondicional de Kupiec y la prueba de cobertura condicional de Christoffersen para el backtesting del VaR, mientras que la prueba de Bootstrap se utiliza para el backtesting de ES. Los resultados indican que GPD es superior a los modelos gaussianos tradicionales y t- Student para las estimaciones de VaR y ES.

Yamai & Yoshiba (2002), comparan el VaR y el ES bajo estrés de mercado. Asumen que la distribución de valores extremos representa los rendimientos de los activos bajo estrés de mercado, y examinan si el estrés afecta las propiedades del VaR y el ES. Encuentran que el VaR y el ES en algunos casos pueden subestimar el riesgo en presencia de fuerte volatilidad en el mercado.

Aplicar esta teoría para los activos de los mercados emergentes es sumamente relevante, debido a la alta integración que han alcanzado los mercados, y al consecuente contagio que provoca la ocurrencia de eventos inesperados. Se ha medido el VaR bajo EVT en los estudios de Balzarotti & Delfiner (2001) para Argentina, Fernández (2003) para Chile y Cardozo (2004) para Colombia.

Siguiendo lo propuesto por Gilli & Këllezli (2006), existen dos maneras de modelar valores extremos. La primera, considera tomar la mayor observación en períodos sucesivos no traslapados (semanas, meses, etc.). A este enfoque se le conoce como “Modelo Máximo de Bloques” (Block Máxima Method). Estas observaciones seleccionadas constituyen los eventos extremos de la serie. Gráficamente:



Fuente: Gilli and Këllezli (2006)

Figura 2. Método Máximo de Bloques. Observaciones X_2, X_5, X_7 y X_{11} representan los valores máximos para uno de los cuatro períodos de tres observaciones cada uno.

La segunda manera, más moderna y eficiente de identificar valores extremos, son los modelos que se enfocan en los valores que exceden un umbral dado, conocidos como “Excesos Sobre un Umbral” (Peak Over Threreshold). Estos son modelos para grandes muestras que exceden un umbral alto y son altamente eficientes en usar los datos extremos de la serie. Gráficamente:

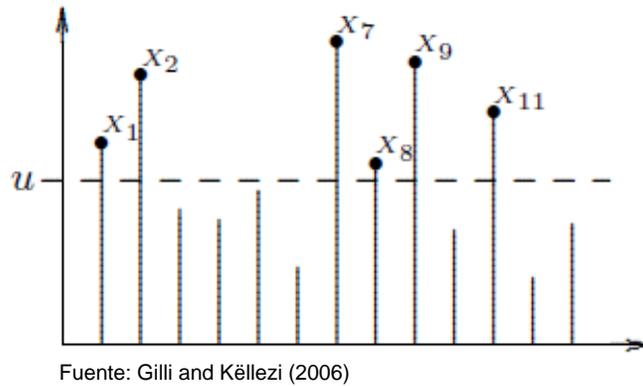


Figura 3. Excesos sobre el Umbral. Donde las observaciones X_1, X_2, X_7, X_8, X_9 y X_{11} exceden el umbral u y por lo tanto son eventos extremos.

3.1 Distribución de Máximos

Movimientos extremos en los retornos de un activo son denotados por X . Llamaremos $f(x)$ a la función de densidad de probabilidad y $F(x)$ es la función de distribución acumulada de X , cuyos valores van de l a u ³. Sea $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ una secuencia de cambios (diarios) en el precio del activo (retornos) de los días $1, 2, \dots, n$. Valores extremos se definen como los máximos y mínimos de los n retornos aleatorios $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ independientes e idénticamente distribuidos. Sea $X_{max,n}$ el cambio diario más alto y $X_{min,n}$ el más bajo sobre n días de cotización del activo:

$$X_{max,n} = \max(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

$$X_{min,n} = \min(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = -\max(-X_1, -X_2, -X_3, \dots, -X_n)$$

Como se muestra en Gumbel (1958), si las variables $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ son estadísticamente independientes y provienen de la misma distribución, entonces la distribución de máximos y mínimos puede ser representada como una función de $F(x)$ y el largo del periodo seleccionado n : la distribución exacta de $X_{max,n}$ es $H_{max,n}(x) = [F(x)]^n$ y la de $X_{min,n}$ es $H_{min,n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$. En la práctica, la distribución $F(x)$ no es precisamente conocida, y por lo tanto, la distribución exacta de los extremos $H_{max,n}(x)$ y $H_{min,n}(x)$ tampoco. Por esta razón, se estudia el comportamiento asintótico de los máximos $X_{max,n}$ y mínimos $X_{min,n}$.

Para encontrar una distribución límite para los máximos, la variable máxima, $X_{max,n}$ es transformada de tal manera que la distribución límite de la nueva variable es una variable no degenerada. Siguiendo el teorema de Fisher & Tippett (1928), la variable X_n (en adelante generalizando para máximos y mínimos) es reducida con un parámetro de ubicación, μ_n y un parámetro de escala σ_n de manera que

$$x = \frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} H(x)$$

³Una variable aleatoria que se distribuye normal toma valores de $l = -\infty$ a $u = +\infty$

Suponiendo que los coeficientes $\mu_n, \sigma_n > 0$, Gnedenko (1943) obtiene tres tipos de distribuciones no degeneradas para la distribución estandarizada $H(x)$:

$$\text{Fréchet: } \Phi_{\xi}(x) = \begin{cases} e^{-x^{-1/\xi}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Weibull: } \Psi_{\xi}(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{1/\xi}} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

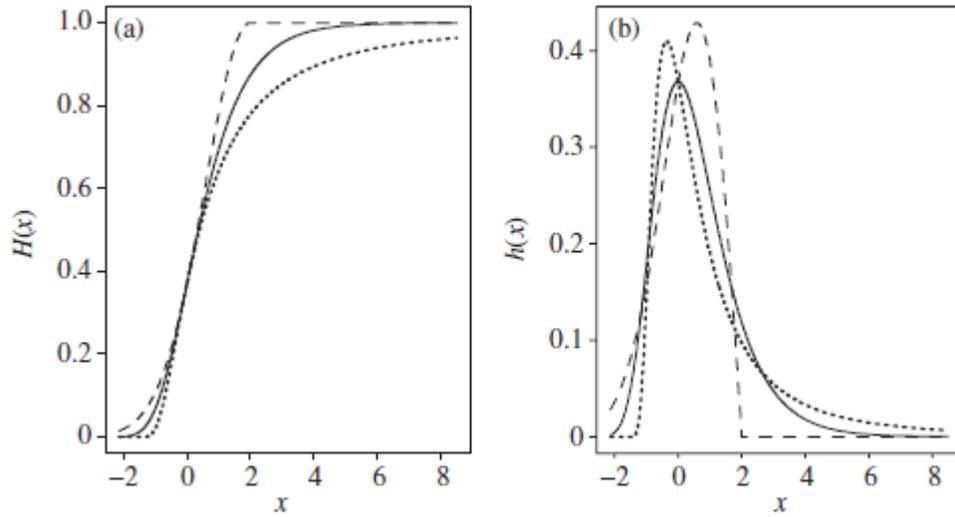
$$\text{Gumbel: } \Lambda_{\xi}(x) = e^{-e^{-x}} - \infty < x < +\infty \quad (3)$$

Jenkinson (1955) propuso la Distribución Generalizada de Valores Extremos (GEV) que resume las tres distribuciones en función de un parámetro:

$$H_{\xi}(x; \mu, \sigma) = \begin{cases} e^{-[1+\xi(\frac{x-\mu}{\sigma})]^{-\frac{1}{\xi}}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}} & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Donde ξ es el parámetro de forma, también llamado “Índice de cola” el cual refleja el peso de la cola de la distribución de variables X_i ($i = 1, \dots, n$). Si $\xi > 0$ la distribución corresponde a la Distribución Fréchet; si $\xi < 0$ corresponde a la Distribución de Weibull y si $\xi = 0$ será una Distribución Gumbel⁴.

⁴La distribución Fréchet ($\xi > 0$) se caracteriza por tener colas pesadas, ya que su cola decrece lentamente. La distribución Weibull ($\xi < 0$) no tiene cola, después de un cierto punto no hay extremos. La distribución Gumbel ($\xi = 0$) posee colas livianas o delgadas, ya que su cola decrece rápidamente. Para la distribución de Weibull y Gumbel, todos los momentos de la distribución están bien definidos. Para la Distribución de Fréchet, el parámetro $1/\xi$ corresponde al momento de máximo orden: los momentos de orden k mayores que $1/\xi$ son infinitos, y los momentos de orden k menores que $1/\xi$ son finitos (Gumbel 1958). Mientras mayor es ξ (o menor es $1/\xi$), más pesada es la cola de la distribución.



Fuente: Mcneill, Frey & Embrechts (2015)

Figura 4. Gráfico Izquierdo muestra la Distribución Generalizada de Valores Extremos: La línea sólida corresponde a Gumbel ($\xi = 0$), línea punteada corresponde a Fréchet ($\xi = 0,5$) y la línea segmentada corresponde a Weibull ($\xi = -0,5$). El gráfico de la derecha corresponde a la función de densidad de probabilidad de cada una, y en todos los casos $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

3.1.1 Nivel de Retorno

Si $H(x)$ es la distribución de máximos observados en períodos sucesivos de igual longitud no traslapados, el “nivel de retorno” $R_n^k = H_{\xi, \sigma, \mu}^{-1}(1 - \frac{1}{k})$ es el nivel esperado de ser excedido en uno de los k periodos de longitud n . Gilli & Këllezi (2006), consideran el nivel de retorno como una medida de la máxima pérdida de una cartera, siendo más conservadora que el VaR.

Sabiendo que $(1 - \frac{1}{k})$ es el cuantil de interés para estimar R_n^k , entonces tenemos lo siguiente:

$$\widehat{R}^k = \begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\xi} \left(1 - \left(-\log \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right)^{-\xi} \right) & \xi \neq 0 \\ \hat{\mu} - \hat{\sigma} \log \left(-\log \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right) & \xi = 0 \end{cases} \quad (5)$$

3.2 Distribución de Excesos

El método máximo de bloques tiene como principal deficiencia, la ineficiencia en el uso de los datos, es decir, se desperdician observaciones que pueden ser consideradas extremas ya que solo se toma un solo punto dentro de un bloque. Por esta razón, en la práctica se ha sustituido en gran medida por métodos basados en excedencias sobre un umbral, en donde se usan todos los datos que son extremos en el sentido de que sobrepasan un determinado nivel alto pre-determinado. En la figura 5, vemos que si consideramos una función de distribución F de una variable aleatoria x , estamos interesados en estimar la función de distribución F_u de los valores x tales que exceden un cierto umbral u .

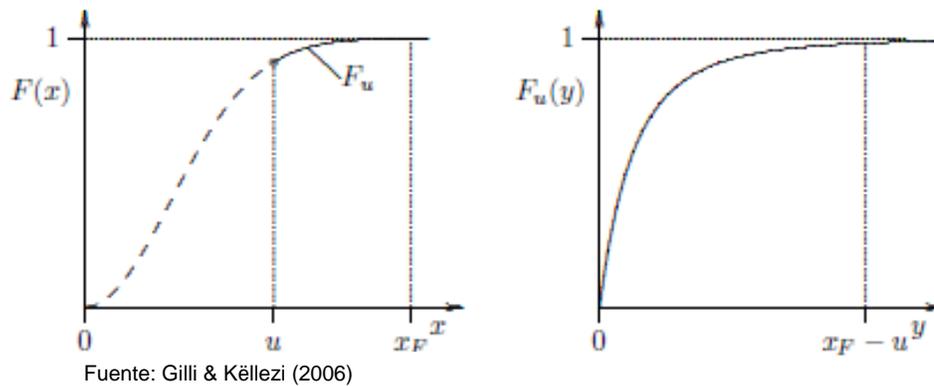


Figura 5. Gráfico izquierdo muestra la funci3n de distribuci3n F y el derecho la funci3n de distribuci3n condicional F_u .

La funci3n de distribuci3n F_u es llamada Funci3n de Distribuci3n Condicional, y es definida como:

$$F_u(y) = P(x - u \leq y \mid x > u), \quad 0 \leq y \leq x_f - u \quad (6)$$

Donde x es una variable aleatoria, u es un umbral dado, $y = x - u$ son los excesos y $x_f \leq \infty$ es el extremo derecho de F . Se verifica que F_u puede ser escrito en términos de F , de la siguiente forma:

$$F_u(y) = \frac{F(u+y)-F(u)}{1-F(u)} = \frac{F(x)-F(u)}{1-F(u)} \quad (7)$$

La variable aleatoria x toma principalmente valores entre 0 y u , y por lo tanto, la estimación de F en este intervalo generalmente no genera problemas. Sin embargo, la estimación de F_u a veces resulta difícil por la cantidad de datos presentes en esa área. Considerando lo anterior, es que Pickands (1975) y Balkema & De Haan (1974) propusieron que para un u grande, $F_u(y)$ puede ser aproximado por:

$$F_u(y) \approx G_{\xi,\sigma}(y), \quad u \rightarrow \infty,$$

donde

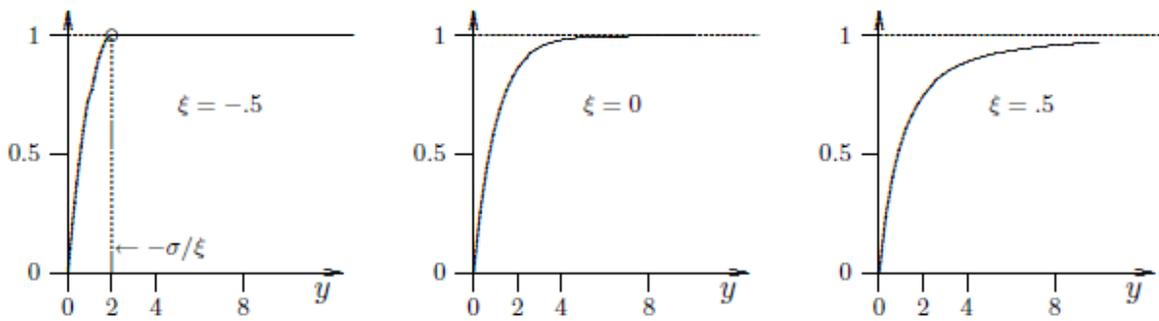
$$G_{\xi,\sigma}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}y\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\sigma}} & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Para $y \in [0, (x_f - u)]$ si $\xi \geq 0$ e $y \in [0, -\frac{\sigma}{\xi}]$ si $\xi < 0$. $G_{\xi,\sigma}$ es definida como la Distribución Generalizada de Pareto (GPD). Si x es definido como $x = u + y$, la distribución GPD también puede ser expresada como una función de x , de la siguiente manera:

$$G_{\xi,\sigma}(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x-u}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \quad (9)$$

Al igual que la distribución GEV, la distribución GPD tiene tres parámetros: el parámetro de ubicación μ , el parámetro de escala σ y el parámetro "índice de cola" ξ , el cual nos da información acerca de la forma (grado de pesadez o ancho) de la cola.

La figura 6 muestra la forma de la distribución GPD ($G_{\xi,\sigma}$) cuando el índice de cola ξ toma valores negativos, cero, y positivos.



Fuente: Gilli and K ellezi (2006)

Figura 6. Forma de la distribuci3n Generalizada de Pareto para $\sigma = 1$. De izquierda a derecha, tenemos ξ con valores negativos, cero y positivos.

3.2.1 VaR bajo Distribuci3n Generalizada de Pareto

Las medidas de riesgo VaR_p y ES_p pueden ser expresadas como funci3n de los parámetros de la Distribuci3n Generalizada de Pareto. Despejando $F(X)$ de la ecuaci3n (7) tenemos:

$$F(x) = (1 - F(u))F_u(y) + F(u)$$

Y reemplazando F_u por la funci3n GPD y $F(u)$ por $(n - N_u)/n$, donde n es el número total de observaciones y N_u es el número de observaciones sobre el umbral u , se obtiene:

$$\hat{F}(x) = \frac{N_u}{n} \left(1 - \left(1 + \frac{\hat{\xi}}{\hat{\sigma}}(x - u) \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}} \right) + \left(1 - \frac{N_u}{n} \right)$$

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \frac{\hat{\xi}}{\hat{\sigma}}(x - u) \right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}} \quad (10)$$

Invirtiendo la ecuaci3n (10) y para una probabilidad dada p :

$$\widehat{VaR}_p = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u} p \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (11)$$

3.2.2 Expected Shortfall (ES)

El VaR Condicional o ES, fue propuesto por Artzner et al. (1999) como una mejor medida de riesgo y se define como “la esperanza condicional de la pérdida dado que ésta es mayor al VaR”. En contraste con el VaR, ES mide el riesgo de un instrumento considerando tanto el tamaño como la probabilidad de pérdidas por encima de un umbral determinado (Basilea, 2012). ES da el tamaño de pérdida esperada, dado que se excede el VaR, para un nivel de probabilidad p :

$$ES_p = E(X | X > VaR_p)$$

Lo que es equivalente a,

$$ES_p = VaR_p + E(X - VaR_p | X > VaR_p) \quad (12)$$

El segundo término de la ecuación (12) representa la Función de Distribución de Excesos Medios $F_{VaR_p}(x)$ (tomando VaR_p como umbral). Si el umbral VaR_p es lo suficientemente grande, entonces $F_{VaR_p}(x)$ es una Distribución GPD:

$$F_{VaR_p}(x) = G_{\xi, \sigma + \xi(VaR_p - u)}(x)$$

Entonces, la función de distribución de excesos medios $F_{VaR_p}(x)$ puede ser calculada como:

$$\frac{\beta + \xi(\text{VaR}_p - u)}{1 - \xi} \quad (13)$$

Donde $\xi < 1$ y sustituyendo tenemos.

$$\widehat{ES}_p = \frac{\text{VaR}_p}{1 - \xi} + \frac{\sigma - \xi u}{1 - \xi} \quad (14)$$

4. Datos

Los datos usados corresponden al Índice de Precios Selectivo de Acciones (IPSA), el cual mide las variaciones de 40 sociedades con mayor presencia bursátil en la Bolsa de Santiago⁵. Específicamente, los datos corresponden a retornos diarios (cotizables) del índice, desde el 01 de Enero de 2006 hasta el 31 de Diciembre de 2016, totalizando una muestra de 2751 datos.

Los datos del índice fueron transformados en retornos logarítmicos diarios de la siguiente forma,

$$r_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$$

Además, para términos de presentación, los datos fueron re-escalados de la siguiente forma: $r_t = 100r_t$. A continuación se presenta un resumen de la estadística descriptiva para la serie de retornos.

Mínimo ⁶ (%)	Máximo ⁷ (%)	Desv. Estr. (%)	Media (%)	Coef. Asim.	Curtosis	JB (p-value)	N
-7,17	15,02	1,04	0,027	0,55	20,35	47.409 (0.00)	2751

De la tabla anterior se concluye que la media diaria de los retornos es positiva, indicando que el índice de precios convergió al alza durante el periodo seleccionado.

Además, el alto valor de curtosis, nos señala que estamos en presencia de una forma de la distribución de frecuencias leptocúrtica, es decir, en la serie existe una alta

⁵www.bolsadesantiago.com

⁶ 08 Agosto 2011: Caída generalizada en el mercado de valores, ya que la agencia de calificación Standard & Poors rebajó la máxima clasificación a la deuda de EE.UU., de AAA a AA+. (Fuente: Bloomberg)

⁷ 14 Octubre 2008: Mayor alza desde enero de 1989, debido a los fuertes aumentos en el precio de las acciones de Banco de Chile (16%), Cencosud (18%) y SQM (22%). (Fuente: Bloomberg)

concentración de datos lejos de la media. Este hecho, junto con el test Jarque Bera⁸, comprueban que estamos en presencia de una muestra con colas más pesadas que una distribución normal.

A continuación se muestra la serie del IPSA, sus retornos y el histograma.

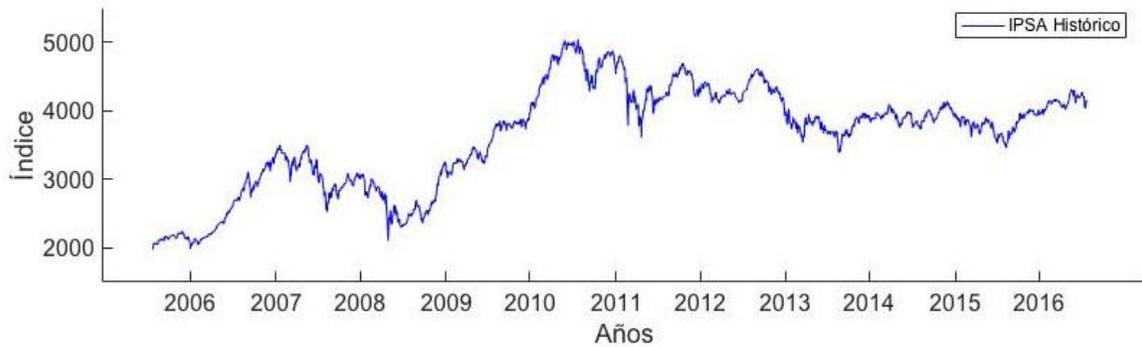


Figura 7: IPSA Histórico

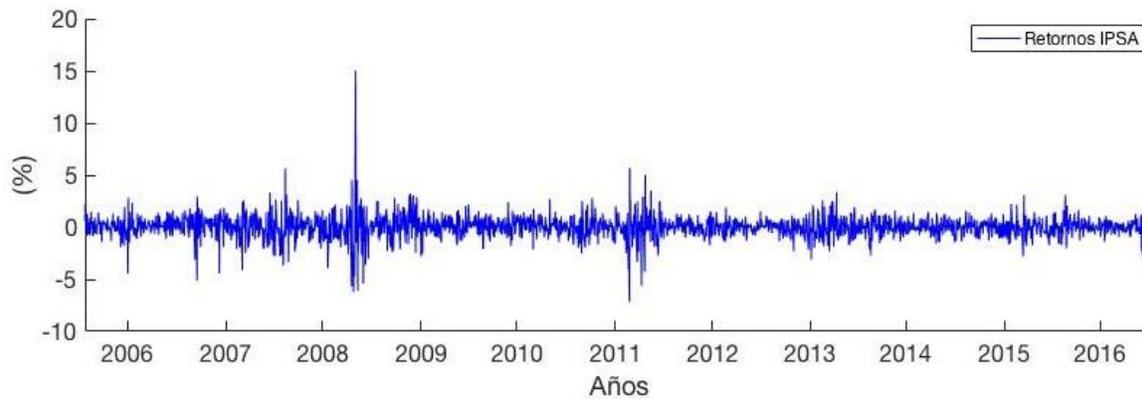


Figura 8: Retornos IPSA

⁸Ho: la serie de retornos se distribuye normal en todos los niveles de significancia. Valores del p-value inferiores a $\alpha = 0,01$ indican que se rechaza la hipótesis nula señalada.

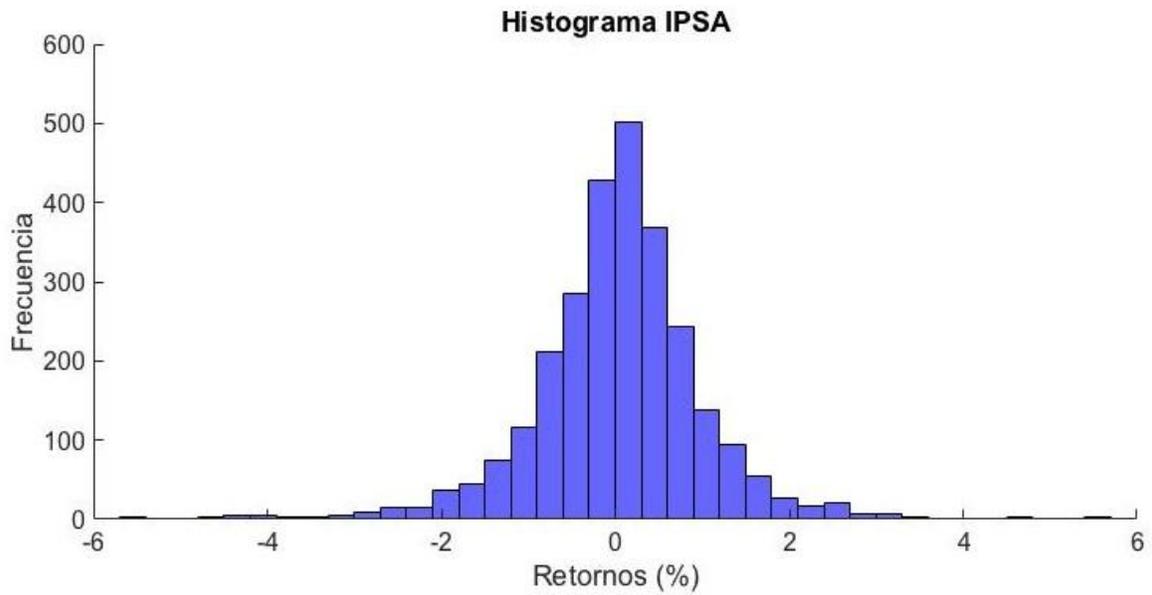


Figura 9. Histograma de retornos del IPSA

Otra manera de demostrar que no existe normalidad en los retornos, es mediante la gráfica cuantil–cuantil (gráfica Q-Q), mostrada en la figura 10. Esta gráfica, se usa para determinar visualmente que tan bien se ajustan los datos empíricos al comportamiento de una distribución teórica, comparando los valores ordenados de una serie con los cuantiles de la distribución. En este caso usamos la normal.

Si las dos distribuciones son consistentes, los puntos sobre la gráfica asumen un patrón lineal que pasa a través del origen con una recta de pendiente unitaria. Como vemos, los valores extremos se alejan de la línea recta, lo cual es señal de la existencia de colas pesadas o valores extremos.

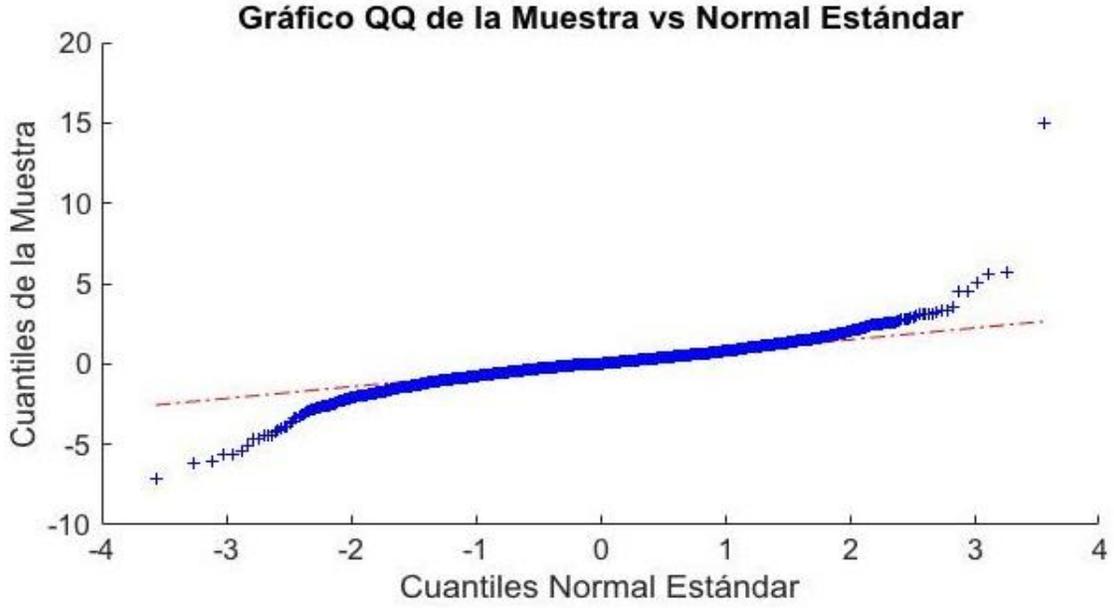


Figura 10. Gráfico Q-Q Normal para retornos del IPSA

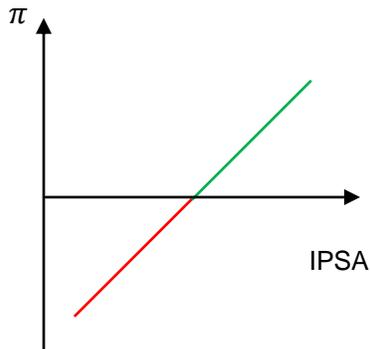
5. Resultados

En primer lugar, se procederá al cálculo del VaR (diario) mediante el método Varianza-Covarianza, el cual asume normalidad en la serie de retornos. Luego se usará la metodología de Teoría de Valor Extremo, considerando en primera instancia el Método Máximo de Bloque, obteniendo el “Nivel de Retorno” (R^k). Finalmente, se modelan los retornos que sobrepasan un determinado umbral, para obtener el VaR y la Pérdida Esperada (Expected Shortfall)⁹. En ambos casos, se utiliza la estimación de Máxima Verosimilitud para la obtención de los parámetros de la distribución. También se calculan estimaciones de intervalos basados en la estimación de los parámetros de las distribuciones para medir la calidad de ajuste del modelo. Con estos resultados, se realizará una comparación de las metodologías y se concluirá que las medidas de VaR son subestimadas considerando normalidad en la serie de retornos.

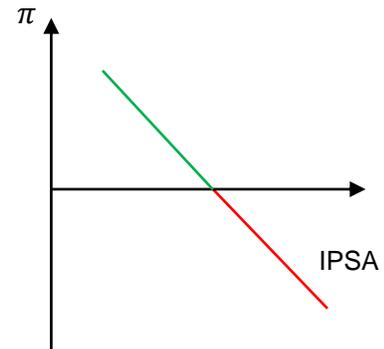
5.1 VaR bajo Distribución Normal

Para el cálculo del VaR, se considera tanto la cola izquierda como la derecha de la distribución de retornos. Esto, debido a que, según la posición que se tenga sobre un activo o índice (larga o corta), el escenario de riesgo cambia. Si se tiene una posición larga, representada por la cola izquierda, implica que nos beneficiaremos por un aumento en su valor, por lo tanto, retornos negativos nos generan el riesgo. Contrario sucede con la posición corta, representada por la cola derecha, donde aumento en el valor del índice nos generan pérdidas, por lo tanto, retornos positivos nos generan riesgo. A continuación se muestra un esquema de beneficios o pérdidas (gráfica P&L) según la posición que tengamos sobre el índice.

⁹Para ambas metodologías se hizo uso del software Matlab.



1. Posición Larga



2. Posición Corta

Caso 1: Posición Larga en el Índice

Para la cola izquierda, se cambiaron los signos de los retornos, de modo que los valores positivos corresponden a pérdidas.

Como se asumen retornos normales, el cálculo del VaR es mucho más simple, puesto que se debe calcular el retorno medio de la serie, su desviación estándar, y la constante α (menor valor tal que a la izquierda de ese valor, la probabilidad sea un cierto nivel, en este caso 1%). Igualmente, como se quiere saber el VaR con un 99% de nivel de confianza, ese valor se puede obtener de la tabla normal estándar ($\alpha = 2,326$). El cálculo del VaR mencionado se realizó mediante el software Microsoft Excel, el cual nos arroja los siguientes resultados:

$$VaR = \mu - \alpha \equiv \alpha \sigma$$

De lo anterior, se obtuvo lo siguiente:

Posición	Media (%)	Desv. Estdr. (%)	VaR (%)	Valor Índice	Valor Índice con VaR
Larga	-2,72	1,04	2,42	4151	4051

Considerando la posición larga en el índice, se tiene que el VaR es de 2,42%, es decir, que hay un 1% de probabilidad que se pierda más del 2,42% en el período siguiente (lo que es lo mismo que con un 99% de confianza, se perderá a lo más un 2,42% en el período siguiente). Esto hace que el valor del índice caiga de 4.152 a 4.051.

Caso 2: Posición Corta en el Índice

En términos conceptuales, estar corto en un activo significa que se esperan bajas en el mercado, ante lo cual, vendo un activo que no he comprado antes con la expectativa de que el precio será menor en el futuro, por lo tanto, lo podré comprar a un nivel más bajo. De esta forma, se ganará una utilidad si el activo baja $P_{venta} - P_{compra} > 0$ (caso contrario ocurre si el activo sube). De ahí, la relevancia de las medidas de riesgo, puesto que los inversionistas deben considerar las máximas pérdidas a las que se enfrentan según sus expectativas y el riesgo tomado, es decir, hacer uso eficiente de la información presente en el mercado.

Siguiendo la misma metodología anterior se tiene lo siguiente:

Posición	Media (%)	Desv. Estdr. (%)	VaR (%)	Valor Índice	Valor Índice con VaR
Corta	2,72	1,04	2,42	4151	4252

Considerando la posición corta en el índice, tenemos que el VaR es de 2,42%, es decir, que hay un 1% de probabilidad que se pierda más del 2,42% en el período siguiente (lo que es lo mismo que con un 99% de confianza, se perderá a lo más un 2,42% en el período siguiente). Esto hace que el valor del índice suba de 4.151 a 4.252.

Como vemos la medida de VaR es la misma en ambos casos, puesto que asumimos normalidad en la serie de retornos, por lo tanto, según la posición sobre el índice, la interpretación cambia, como se describió anteriormente. La cola izquierda representa las pérdidas para las posiciones largas y la cola derecha para las posiciones cortas.

A continuación se mostrarán las medidas de VaR siguiendo la Teoría de Valor Extremo, calculando el riesgo tanto de la cola izquierda como de la derecha, y se verá que no son iguales, puesto que los retornos se ajustan a la Distribución General de Valores Extremos y a la Distribución General de Pareto, es decir, no hay simetría como sucede con la normal.

5.2 Método Máximo de Bloques y Nivel de Retorno (R_n^k)

Siguiendo la metodología propuesta por Gilli & Kellezi (2006), la estimación se realiza mediante los siguientes pasos:

- Dividir la muestra en n bloques de igual longitud.
- Identificar el valor máximo de cada bloque.
- Ajustar la Distribución de Valores Extremos Generalizada (GEV) al conjunto de máximos.
- Calcular R_n^k y estimar sus intervalos de confianza.

La serie de datos del IPSA se ha dividido en 11 submuestras (o bloques) no traslapadas, conteniendo cada una los retornos diarios de cada año. Como el año calendario varía en el tiempo, no todos los bloques tienen la misma longitud. El retorno máximo en cada uno de los bloques, constituye la serie de datos de la muestra de máximos M que se utiliza para estimar la Distribución de Valores Extremos Generalizada (GEV). La Figura 11 representa los máximos anuales para las colas izquierda y derecha (tanto retornos positivos como negativos) del IPSA.

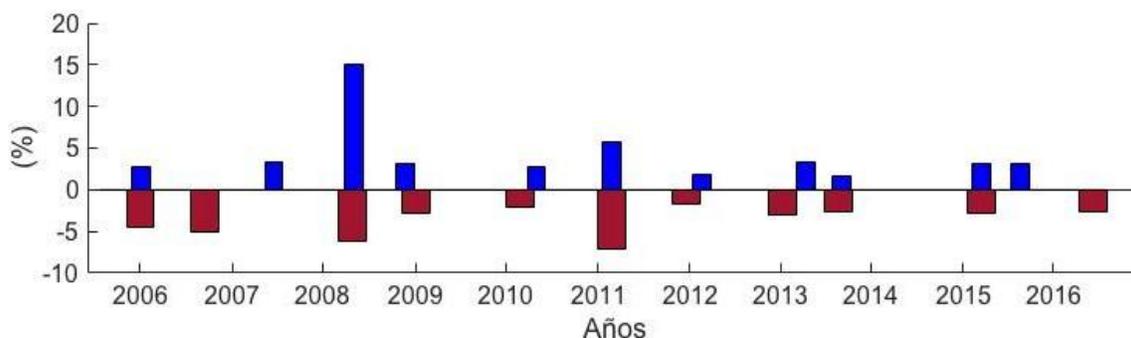


Figura 11. Mínimos y máximos anuales de los rendimientos diarios del IPSA

La función de probabilidad logarítmica que se estima mediante el método de máxima verosimilitud, con el fin de encontrar los parámetros para ajustar la serie de máximos a la Distribución de Valores Extremos Generalizada, es la siguiente:

$$L(\xi, \mu, \sigma; x) = \sum_i \log(h(x_i)), \quad x_i \in M$$

donde,

$$h(\xi, \mu, \sigma; x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\xi-1}} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{-1}{\xi}}\right)$$

es la función de densidad de probabilidad si $\xi \neq 0$ y $\xi \frac{x-\mu}{\sigma} > 0$. Si $\xi = 0$ la función h es:

$$h(\xi, \mu, \sigma; x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

La figura 12 y 13 muestran gráficamente la distribución de valores extremos generalizada ajustada a los datos de la serie de máximos (función de distribución de la muestra).

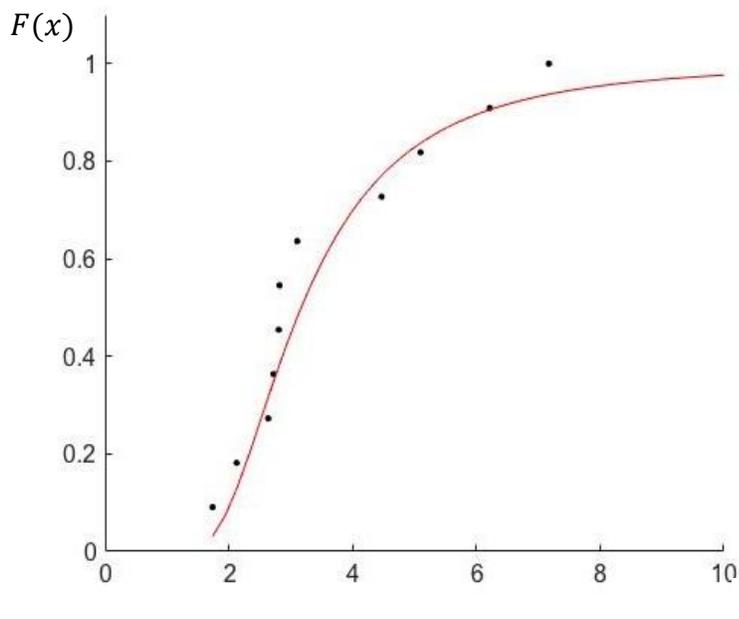


Figura 12. Los puntos representan la distribución de mínimos (cola izquierda) de la serie junto a la correspondiente distribución de Valores Extremos Generalizada ajustada.

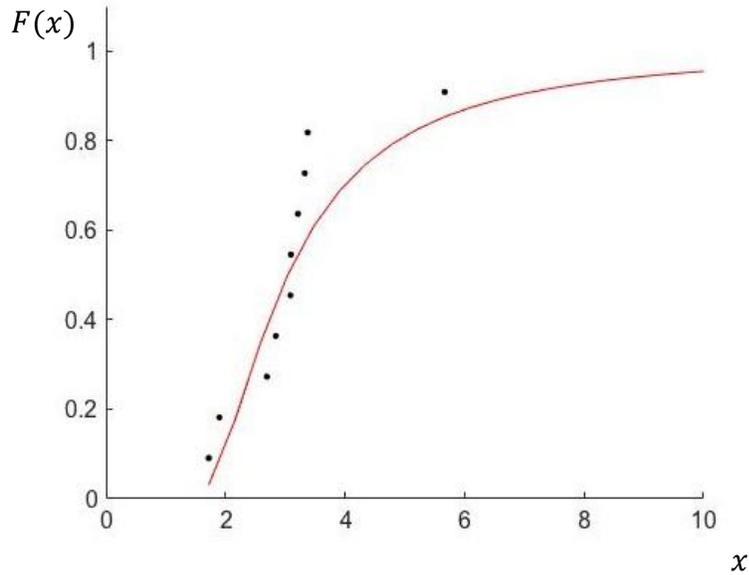


Figura 13. Los puntos representan la distribución de máximos (cola derecha) de la serie junto a la correspondiente distribución de Valores Extremos Generalizada ajustada.

Una vez estimada esta distribución, para poder estimar los intervalos y el valor R_n^k , que es de interés como medida de riesgo, se debe reparametrizar la Distribución de Valores Extremos Generalizada como una función del nivel de retorno R_n^k . Para esto, debemos despejar μ de la ecuación 5 y sustituir en $H_{\xi,\sigma,\mu}$ definido en la ecuación 4. La nueva función de Distribución de Valores Extremos Generalizada queda:

$$H_{\xi,\sigma,R^k}(x) = \begin{cases} \exp \left(\left(-\frac{\xi}{\sigma} (x - R^k) + \left(-\log \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right)^{-\xi} \frac{-1}{\xi} \right) \right) & \xi \neq 0 \\ \left(1 - \frac{1}{k} \right) \exp \left(-\frac{x - R^k}{\sigma} \right) & \xi = 0 \end{cases}$$

Ahora podemos estimar el parámetro R_n^k en conjunto con los parámetros $\hat{\xi}$ y $\hat{\sigma}$ de la distribución, siendo el más relevante ξ , puesto que caracteriza la cola de la distribución de nuestra serie, y, según su valor, sabremos a qué tipo de las 3 distribuciones se asemeja nuestra submuestra.

En la tabla a continuación se muestran los resultados:

BMM Cola Izquierda			
	Límite Inferior	Valor Estimado	Límite Superior
ξ	-0,10	0,32	0,75
σ	0,72	1,01	1,74
R^5 (%)	3,72	4,72	9,60
R^{10} (%)	4,21	6,09	20,16

BMM Cola Derecha			
	Límite Inferior	Valor Estimado	Límite Superior
ξ	0,12	0,51	0,89
σ	0,75	1,00	1,66
R^5 (%)	3,88	4,88	5,88
R^{10} (%)	4,25	6,82	7,82

De la tabla anterior se concluye que para la cola izquierda, es decir, quien posee una posición larga en el IPSA, el nivel de retorno R^5 es de 4,72, lo que implica que, la máxima pérdida observada durante un período de 1 año será mayor a 4,72%, una vez en 5 años. Este valor se encontrará entre los intervalos estimados 3,72% y 9,6% con una notoria asimetría, debido a la menor cantidad de datos presentes en los cuantiles más extremos, lo cual hace que haya mayor incertidumbre para estimar las pérdidas máximas. Para la cola derecha, es decir, quien posee una posición corta en el IPSA, tenemos que el nivel de retorno R^5 es de 4,88, lo que implica que, la máxima pérdida observada durante un período de 1 año será mayor a 4,88%, una vez en 5 años. El mismo análisis se realiza para R^{10} el cual nos da una pérdida de 6,09% y 6,82% para la cola izquierda y derecha respectivamente. En la figura 14 se muestra el intervalo al 95% de confianza de la estimación por máxima verosimilitud de R^{10} .

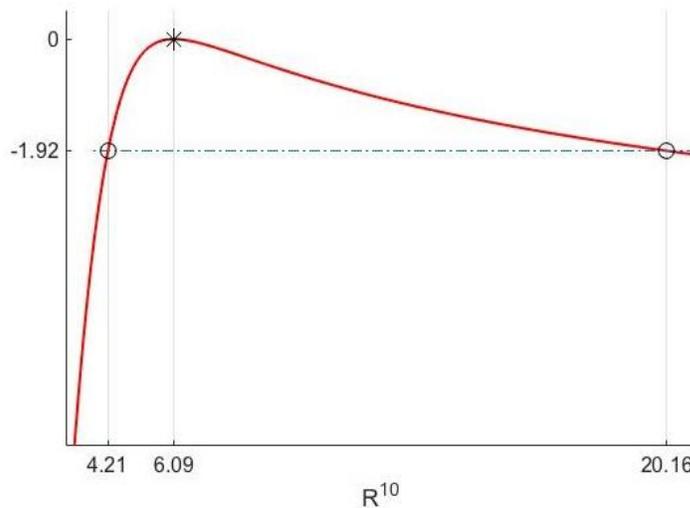


Figura 14. Intervalo al 95% de confianza de la estimación por máxima verosimilitud de R^{10} de la cola izquierda.

El valor de ξ mayor a 0, nos indica que la distribución de la submuestra de máximos del IPSA, se asemeja a la Fréchet.

5.3 Excesos Sobre el Umbral (Peak Over Threshold)

Al igual que la metodología anterior, siguiendo lo realizado por Gilli & Kellezi (2006), las estimaciones de los resultados se obtienen mediante los siguientes pasos:

- Seleccionar el umbral u en la serie completa de datos.
- Ajustar la función de Distribución Generalizada de Pareto (GPD) a los datos que quedan sobre el umbral estimado.
- Calcular el VaR y el ES junto a sus intervalos.

Teóricamente, no existe una metodología o algoritmo claro para la selección del umbral. Este es un tema cuestionable en relación a la metodología de Valores Extremos, ya que implica un trade-off entre el sesgo y la varianza de las estimaciones del parámetro que define la cola ξ . Si u se determina demasiado bajo, muchos datos ordinarios se toman como extremos, dando así estimaciones sesgadas. Por el contrario, un umbral excesivamente alto, nos deja con escasas observaciones extremas, lo cual impide realizar estimaciones eficientes de los parámetros de la cola (lo que conlleva un mal ajuste de la distribución). En ambos casos, las estimaciones resultantes son defectuosas y pueden conducir a

conclusiones erróneas al evaluar el riesgo. Es por ello, que junto a lo anterior, se calculan intervalos de confianza (al 95%) tanto para los parámetros de la distribución como las medidas de riesgo, mediante un remuestreo de la serie de retornos (Bootstrapping) con el fin de darle mejor calidad de ajuste al modelo.

A continuación, se muestran los Excesos Medios de la Muestra, metodología gráfica que es muy útil para definir los valores extremos como aquellas observaciones que superan un cierto umbral alto u . El objetivo de este método, es modelar la distribución de las superaciones sobre u , es decir, las variables aleatorias $Y_i = X_i - u$, para aquellos retornos de la serie X_i que exceden u (es decir, $X_i > u$).

$$(u, e_n(u)), \quad x_n^1 < u < x_n^n$$

donde $e_n(u)$ es la función de Excesos Medios de la Muestra definido como:

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=k}^n (x_i^n - u)}{n - k + 1}, \quad k = \min\{i | x_i^n > u\}$$

$n - k + 1$ es el número de observaciones que exceden el umbral u .

Como se mencionó anteriormente, no existe una metodología única para la elección del umbral, sin embargo, la función de Excesos Medios de la Muestra, al ser una estimación de los excesos medios, debe ser lineal. Esta propiedad suele usarse como criterio para la selección de u . Las Figura 15 y 16, muestran el exceso medio de la muestra correspondiente a los datos del IPSA. Estos valores se sitúan al principio de la muestra de excesos medios, que son aproximadamente lineales y corresponden al 5% de las serie de retornos, dejando respectivamente 137 observaciones en las colas, como observaciones extremas.

A continuación, vemos que el umbral u de la cola izquierda es 1,537 y para la cola derecha 1,5053.

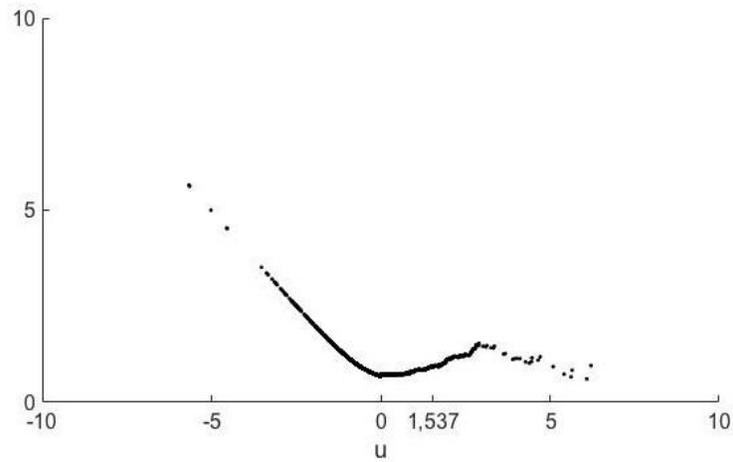


Figura 15. Excesos Medio de la Muestra para la cola izquierda del IPSA.

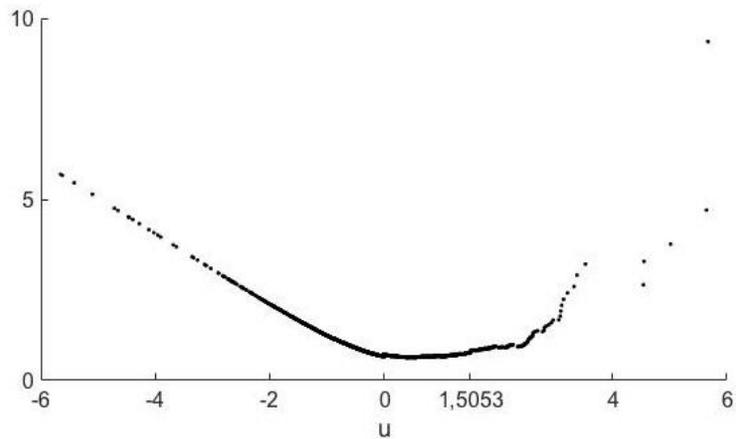


Figura 16. Excesos Medio de la Muestra para la cola derecha del IPSA.

Dado el resultado anterior, sabemos que las observaciones sobre el umbral estimado deben seguir una Distribución Generalizada de Pareto. La función de probabilidad logarítmica que se estima mediante el método de máxima verosimilitud con el fin de encontrar los parámetros para ajustar la serie de máximos a la Distribución Generalizada de Pareto es la siguiente:

Para una muestra $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ la función de verosimilitud logarítmica $L(\xi, \sigma | y)$ que modela la Distribución Generalizada de Pareto, es el logaritmo de la función de densidad

de las n observaciones:

$$L(\xi, \sigma|y) = \begin{cases} -n \log \sigma - \left(\frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \frac{1}{\xi} y_i\right) & \text{if } \xi \neq 0 \\ -n \log \sigma - \left(\frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n y_i & \text{if } \xi = 0 \end{cases}$$

Con lo anterior, se estiman los valores de $\hat{\xi}$ y $\hat{\sigma}$ que maximizan la función de verosimilitud logarítmica para la muestra definida como las observaciones que exceden el umbral u . De lo anterior obtenemos que $\hat{\xi} = 0.2212$ y $\hat{\sigma} = 0.7286$ para la cola izquierda y $\hat{\xi} = 0.2560$ y $\hat{\sigma} = 0.5658$ para la cola derecha.

Las figuras 17 y 18 muestran gráficamente la distribución Generalizada de Pareto ajustada a la serie de retornos sobre el umbral.

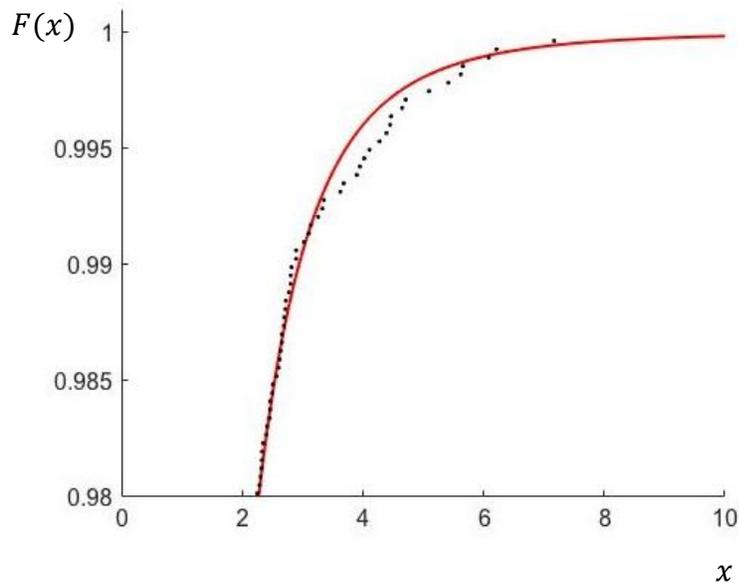


Figura 17. Los puntos representan la Distribución Generalizada de Pareto ajustada a los retornos sobre el umbral 1,5374 de la cola izquierda.

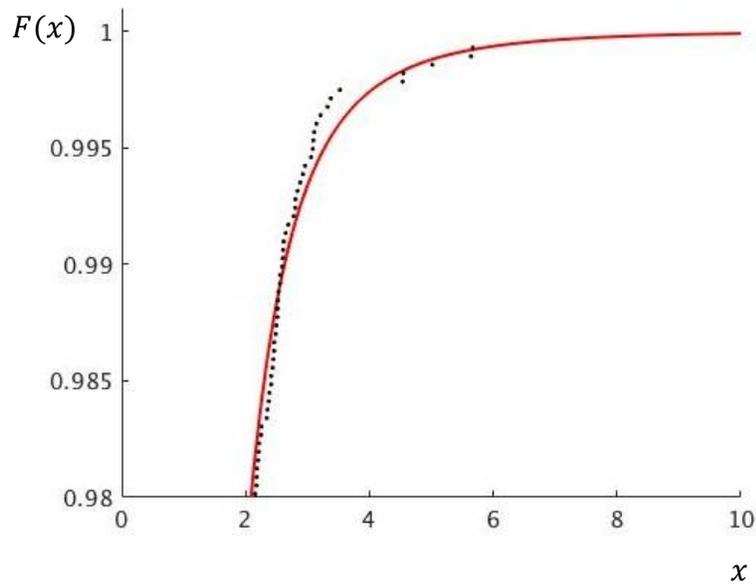


Figura 18. Los puntos representan la Distribución Generalizada de Pareto ajustada a los retornos sobre el umbral 1,5053 de la cola derecha.

Se ve que la cola derecha es más pesada que la izquierda. Esto también se puede ver a partir del valor estimado del parámetro ξ , cuyo valor es mayor para la cola derecha.

Una vez estimados los parámetros de la distribución se procede al cálculo del VaR y ES, dado por las siguientes igualdades:

$$\widehat{VaR}_p = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u} p \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right)$$

$$\widehat{ES}_p = \frac{\widehat{VaR}_p}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\sigma} - \hat{\xi}u}{1 - \hat{\xi}}$$

Para una probabilidad $p = 1\%$, se tiene que $\widehat{VaR}_{1\%} = 2,942\%$ y $\widehat{ES}_p = 4,276\%$ para la cola izquierda y $\widehat{VaR}_{1\%} = 2,629\%$ y $\widehat{ES}_p = 3,776\%$ para la cola derecha. Vemos que la cola izquierda tiene un ES considerablemente más alto que la derecha, lo que nos hace concluir que las potenciales pérdidas, son mayores para quienes están largos en el índice.

Luego de haber calculado los valores estimados para VaR y ES, se obtienen los intervalos de confianza de éstos. Consideramos intervalos de confianza individuales y conjuntos, basados en la metodología “*bootstrap accelerated bias-corrected percentile*”¹⁰. Los intervalos de confianza para el VaR, son obtenidos usando una versión reparametrizada en función de ξ y VaR_p de la función de Distribución Generalizada de Pareto:

$$G_{\xi, VaR_p}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\left(\frac{n}{N_u} p\right)^{-\xi} - 1}{VaR_p - u} \right)^{-\frac{1}{\xi}} & \xi \neq 0 \\ 1 - \frac{n}{N_u} p \exp\left(\frac{y}{VaR_p - u}\right) & \xi = 0 \end{cases}$$

La función de probabilidad de densidad correspondiente es:

$$g_{\xi, VaR_p}(y) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{n}{N_u} p\right)^{-\xi} - 1}{\xi(VaR_p - u)} \left(1 + \frac{\left(\frac{n}{N_u} p\right)^{-\xi} - 1}{VaR_p - u} y \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1} & \xi \neq 0 \\ -\frac{\frac{n}{N_u} p \exp\left(\frac{y}{VaR_p - u}\right)}{VaR_p - u} & \xi = 0 \end{cases}$$

De igual manera para ES y $\xi \neq 0$

¹⁰Para entender esta metodología, revisar Shao & Tu (1995) página 135-140.

$$G_{\xi, ES_p} = 1 - \left(1 + \frac{\xi + \left(\frac{n}{N_u} p\right)^{-\xi} - 1}{(ES_p - u)(1 - \xi)} \right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

$$g_{\xi, ES_p} = \frac{\xi + \left(\frac{n}{N_u} p\right)^{-\xi} - 1}{\xi(1 - \xi)(ES_p - u)} \left(1 + \frac{\xi + \left(\frac{n}{N_u} p\right)^{-\xi} - 1}{(ES_p - u)(1 - \xi)} \right)^{-\frac{1}{\xi} - 1}$$

Las siguientes figuras, muestran los intervalos de confianza siguiendo la metodología anteriormente descrita. Estas estimaciones están hechas sobre el VaR y ES para la cola izquierda usando las versiones reparametrizadas de la Distribución Generalizada de Pareto:

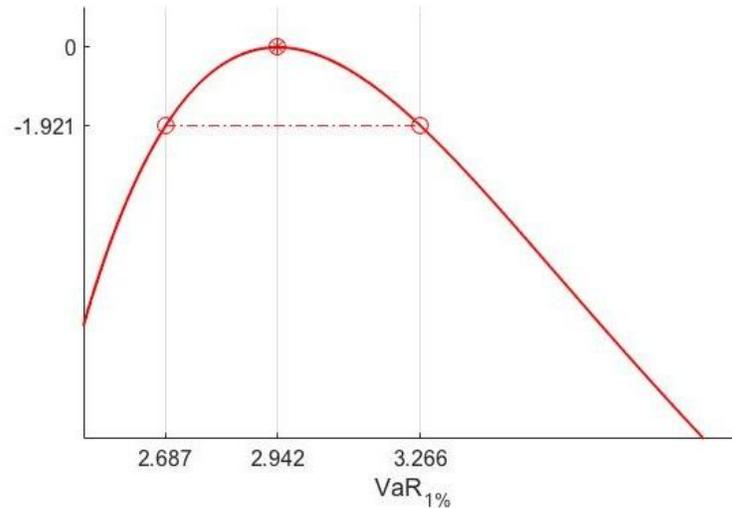


Figura 19. Función de verosimilitud logarítmica e intervalo de confianza para $VaR_{1\%}$.

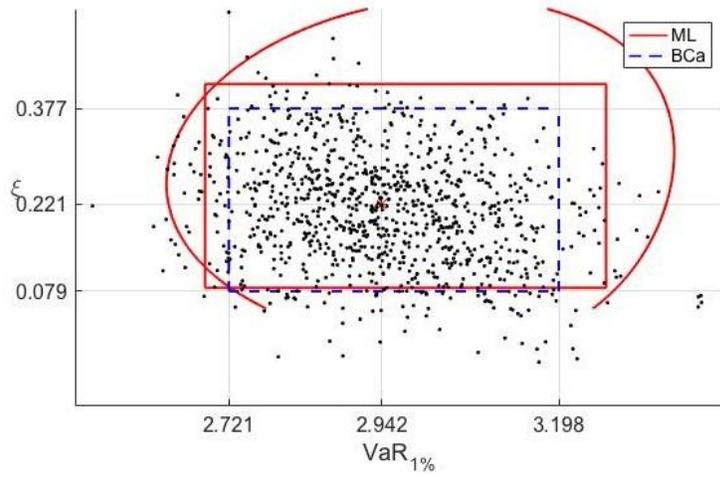


Figura 20. Intervalos de confianza individuales y conjuntos al 95% para ξ y $VaR_{1\%}$. Los puntos representan 1000 puntos de 1000 remuestros (Bootstrap) sobre la serie de retornos.

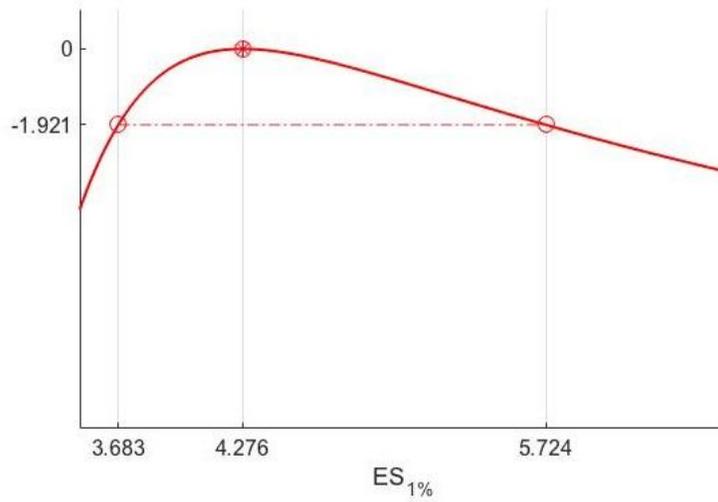


Figura 21. Función de verosimilitud logarítmica e intervalo de confianza para $ES_{1\%}$.

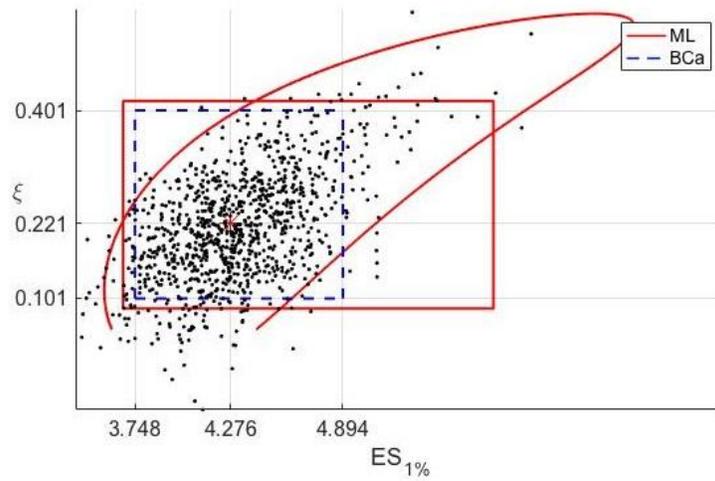


Figura 22. Intervalos de confianza individuales y conjuntos al 95% para ξ y $ES_{1\%}$. Los puntos representan 1000 puntos de 1000 remuestreos (Bootstrapping) sobre la serie de retornos.

Las figuras 23, 24, 25 y 26 corresponden a la cola derecha.

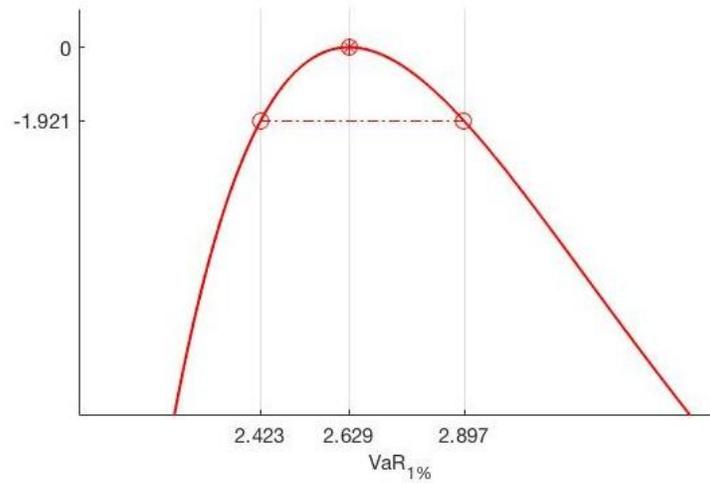


Figura 23. Función de verosimilitud logarítmica e intervalo de confianza para $VaR_{1\%}$.

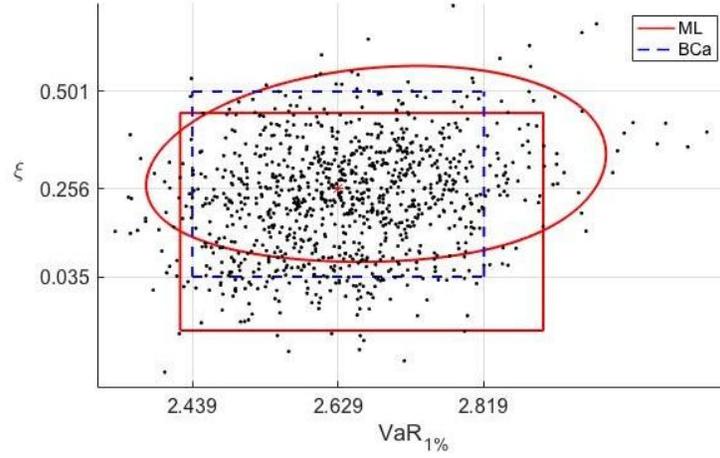


Figura 24. Intervalos de confianza individuales y conjuntos al 95% para ξ y $ES_{1\%}$. Los puntos representan 1000 puntos de 1000 remuestreos (Bootstrapping) sobre la serie de retornos.

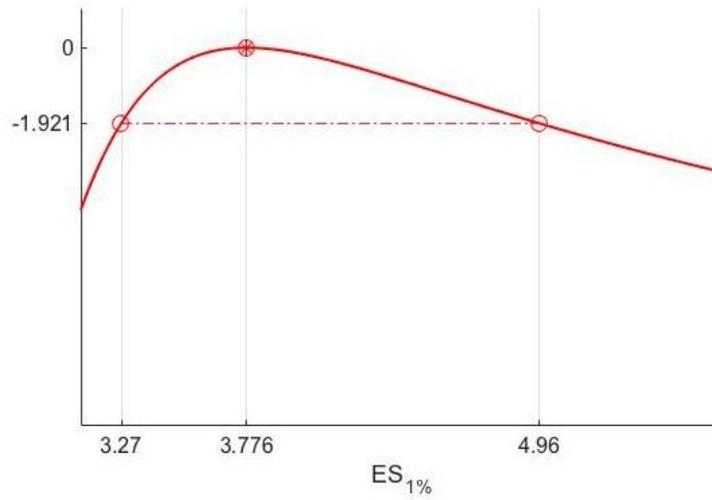


Figura 25. Función de verosimilitud logarítmica e intervalo de confianza para $ES_{1\%}$.

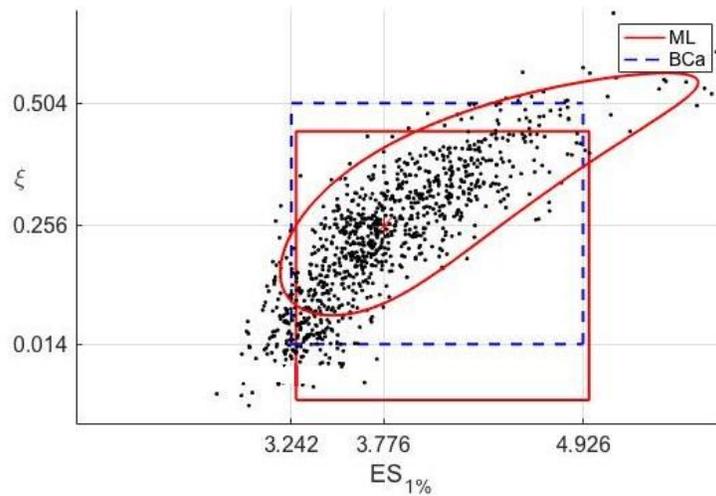


Figura 26. Intervalos de confianza individuales y conjuntos al 95% para ξ y $ES_{1\%}$. Los puntos representan 1000 puntos de 1000 remuestreos (Bootstrapping) sobre la serie de retornos.

En las figuras 20 y 22, para la cola izquierda y las figuras 24 y 26, para la derecha, se muestran los intervalos de confianza estimados mediante 1000 remuestreos (Bootstrapping) de la serie de retornos, destacando en la línea punteada azul los valores de los intervalos para los pares $(\hat{\xi}, \widehat{VaR})$ y $(\hat{\xi}, \widehat{ES})$. Observamos que alrededor del 95% de los puntos se encuentran dentro de la zona de confianza conjunta, demarcada por línea azul punteada (lo que no ocurre en los intervalos de confianza individuales).

A continuación se muestra un resumen de la estimación de los parámetros y las medidas de riesgo estimadas por ambos métodos:

POT Cola Izquierda					
	Bca	ML	Valor Estimado	ML	Bca
ξ	0,08	0,08	0,22	0,42	0,38
σ	0,58	0,60	0,73	0,89	0,91
VaR	2,72	2,69	2,94	3,27	3,20
ES	3,75	3,68	4,28	5,72	4,89

POT Cola Derecha					
	Bca	ML	Valor Estimado	ML	Bca
ξ	0,03	-0,10	0,26	0,45	0,54
σ	0,42	0,46	0,57	0,70	0,70
VaR	2,46	2,42	2,63	2,90	2,84
ES	3,20	3,27	3,78	4,96	4,89

Los resultados muestran que, con una probabilidad de 1%, las pérdidas máximas (mañana, o $t + 1$, siendo t el último día de la serie), para una posición larga, o de la cola izquierda del IPSA serán mayores de 2,94% (VaR) y que la correspondiente Pérdida Esperada (ES), es decir, el promedio de las pérdidas, dado que se excede el VaR, será de 4,28%. Lo mismo ocurre para quienes poseen una posición corta en el índice, tanto el VaR como ES, serán menores, con un 2,63% y 3,78% respectivamente.

6. Conclusiones

En este trabajo se han expuesto tres medidas de riesgo considerando la Teoría de Valor Extremo como base metodológica. Se ha trabajado con el “Nivel de Retorno” (R_n^k) derivado de la metodología de máximo de bloques, el Valor en Riesgo (VaR) y la Pérdida Esperada (ES) derivados de la metodología excesos sobre el umbral, las cuales fueron aplicadas sobre la serie de retornos logarítmicos diarios del IPSA, índice que mide la evolución del mercado de valores de Chile.

De los resultados obtenidos, se ha logrado comprobar nuestra principal hipótesis, que el VaR es subestimado cuando estamos en presencia de una serie de retornos con colas pesadas, habiendo asumido ex ante, normalidad en la distribución. Lo anterior ocurre, tanto para quienes poseen una posición larga y/o corta en el índice. Es por ello que ajustamos la serie a la Distribución Generalizada de Valores Extremos y a la Distribución Generalizada de Pareto, para la estimación del nivel de retorno y el VaR y ES, respectivamente.

Comparando la estimación del VaR, bajo normalidad en la serie de retornos, se tiene que este es de un 2,42% (para ambas posiciones), y considerando la existencia de colas pesadas, es decir, ajustándola a la Distribución Generalizada de Valores Extremos para el cálculo del nivel de retorno, tenemos que R^5 es de 4,72, lo que implica que, la máxima pérdida observada durante un período de 1 año será mayor a 4,72% una vez en 5 años (4,88% quien está corto). Como vemos, esta metodología más que duplica el valor en riesgo, ya que asume no normalidad, es decir, toma en cuenta los eventos pasados que han estado concentrados en la cola de la distribución. Pese a ello, esta metodología no es muy usada en la práctica, ya que se pierde mucha información al tomar solo un punto de un bloque, existiendo un alto sesgo e inconsistencia en la estimación.

Las estimaciones bajo la metodología excesos sobre el umbral, suele representar con mayor exactitud las medidas de riesgo, ya que podemos ajustar el comportamiento de los retornos extremos según el parámetro de forma de la cola a la mejor distribución que muestre el comportamiento de los datos. Según lo anterior, en ambas estimaciones (VaR y ES), la distribución que mejor se ajusta a los retornos que superaron el umbral es la Fréchet.

Con esto tenemos que el VaR será de 2,94% y el ES de 4,28% para quienes están largos en el índice (2,63% y 3,78%, respectivamente para quienes está cortos).

Se comprobó, que esta metodología explota mejor la información en la muestra de datos. Al estar interesados en el comportamiento a largo plazo en lugarde pronósticos a corto plazo, se hizo uso además de los intervalos de confianza. Finalmente, en línea con lo encontrado por los autores Gilli & Kellezi (2006) se considera relevante la estimación de estos intervalos, ya que proporcionan información adicional sobre la calidad de ajuste del modelo.

7. Bibliografía

1. Acerbi, C., & Scandolo, G. (2008). Liquidity risk theory and coherent measures of risk. *Quantitative Finance*, 8(7), 681-692.
2. Ahn, D. H., Boudoukh, J., Richardson, M., & Whitelaw, R. F. (1999). Optimal risk management using options. *The Journal of Finance*, 54(1), 359-375.
3. Alexander, G. J., & Baptista, A. M. (2002). Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26(7), 1159-1193.
4. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9 (3), 203-228.
5. Balkema, A. A., & De Haan, L. (1974). Residual life time at great age. *The Annals of probability*, 792-804.
6. Basak, S., & Shapiro, A. (2001). Value-at-risk-based risk management: optimal policies and asset prices. *The review of financial studies*, 14 (2), 371-405.
7. Boudoukh, J., Richardson, M., & Whitelaw, R. (1998). The best of both worlds. *Risk*, 11 (5), 64-67.
8. Cardozo, P. (2004). Valor en riesgo de los activos financieros colombianos aplicando la teoría de valor extremo. *Artículo realizado como parte de la tesis de la Maestría de Economía, Universidad de los Andes, Bogotá.*
9. Danielsson, J., & de VRIES, C. G. (1997). *Extreme returns, tail estimation, and value-at-risk*. Institute of Economic Studies, University of Iceland.
10. Delfiner, M., Balzarotti, V., & del Canto, A. (2001). Backtesting: Performance of capital requirements for market risk in the BCRA.

11. Efron, B., & Tibshirani, R. J. (1993). An Introduction to the Bootstrap: Monographs on Statistics and Applied Probability, Vol. 57. *New York and London: Chapman and Hall/CRC.*
12. Fallon, W. (1996). *Calculating value-at-risk* (pp. 96-49). Wharton School, University of Pennsylvania.
13. Fernández, V. P. (2003). *Extreme value theory: value at risk and returns dependence around the world* (No. 161). Centro de Economía Aplicada, Universidad de Chile.
14. Fisher, R. A., & Tippett, L. H. C. (1928, April). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 24, No. 2, pp. 180-190). Cambridge University Press.
15. Gilli, M. & Këllezli, (2006). An application of extreme value theory for measuring financial risk. *Computational Economics*, 27(2-3), 207-228.
16. Gnedenko, B. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire. *Annals of mathematics*, 423-453.
17. Gumbel, E. J. (1958). *Statistics of Extremes* Columbia University Press New York 375
Google Scholar.
18. Hols, M. C., & De Vries, C. G. (1991). The limiting distribution of extremal exchange rate returns. *Journal of Applied Econometrics*, 6(3), 287-302.
19. Huang, C. K., Huang, C. S., & Chikobvu, D. (2015). Extreme risk, value-at-risk and expected shortfall in the gold market. *The International Business & Economics Research Journal (Online)*, 14(1), 107.
20. Jenkinson, A. F. (1955). The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 81(348), 158-171.

21. Johnson, C. (2001). Value at risk: Teoría y aplicaciones. *Estudios de economía*, 28(2).
22. Jorion, P. (1996). Risk2: Measuring the risk in value at risk. *Financial analysts journal*, 52(6), 47-56.
23. Jorion, P. (2000). Value at risk.
24. Linsmeier, T. J., & Pearson, N. D. (1996). Risk measurement: An introduction to value at risk.
25. Longin, F. M. (1996). The asymptotic distribution of extreme stock market returns. *Journal of business*, 383-408.
26. McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*. Princeton university press.
27. Palmquist, J., Uryasev, S., & Krokmal, P. (1999). *Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints*. Department of Industrial & Systems Engineering, University of Florida.
28. Penza, P., & Bansal, V. K. (2001). *Measuring market risk with value at risk* (Vol. 17). John Wiley & Sons.
29. Pickands III, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *the Annals of Statistics*, 119-131.
30. Romero-Meza, R. (2005). Medidas de riesgo financiero. *Revista Economía & Administración*, 149, 57-72.
31. Tu, D., & Shao, J. (1995). The Jackknife and bootstrap. *Springer Series in Statistics*, New York, 85(486-492), 8.

32. Yamai, Y., & Yoshida, T. (2002). On the validity of value-at-risk: comparative analyses with expected shortfall. *Monetary and economic studies*, 20(1), 57-85.
33. Yamai, Y., & Yoshida, T. (2002). Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk (3): their validity under market stress. *Monetary and Economic Studies*, 20(3), 181-237.