



Compactificaciones del espacio de moduli de superficies abelianas no simples

Tesis entregada a la
Universidad de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos para optar al grado de
Magíster en Ciencias con Mención en Matemáticas
Facultad de Ciencias

por

Nelson R. Alvarado Hinostroza

Agosto 2021

Director de Tesis: **Dr. Robert Auffarth**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
INFORME DE APROBACIÓN
TESIS MAGÍSTER

Se informa a la Escuela de Postgrado de la Facultad de Ciencias que la Tesis de Magíster presentada por el candidato

Nelson R. Alvarado Hinostroza

Ha sido aprobada por la Comisión de Evaluación de la Tesis como requisito para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en Matemáticas, en el examen de Defensa de Tesis rendido el día 23 de Agosto de 2021.

Director de Tesis

Dr. Robert Auffarth

Comisión de Evaluación de la Tesis

Dr. Giancarlo Lucchini Arteché

Dra. Anita Rojas Rodríguez

Biografía



Nací en Osorno un martes 13 de enero de 1998 y recibí mi educación escolar en el colegio San Mateo de dicha ciudad. Durante mis años de colegio tuve la oportunidad (y el privilegio) de participar (con rendimientos dispares) en distintas olimpiadas de matemáticas, las cuales me permitieron aprender mucho pero, por sobre todo, conocer de la existencia de personas que se dedicaban profesionalmente a estudiar matemáticas. Este hecho me motivó a decidir estudiar Licenciatura en Matemáticas, para lo cual me trasladé a la ciudad de Santiago en 2016, convirtiéndome en estudiante de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile. Egresé de la Licenciatura el año 2019 y al año siguiente me matriculé en el programa de Magíster.

Agradecimientos

A mi familia, por el apoyo y la preocupación constante. A los distintos amigos y amigas que he conocido, por las múltiples conversaciones, risas y abrazos compartidos.

A los profesores Leopoldo Wagner y Gleny Acevedo, quienes me introdujeron a las matemáticas en el colegio. A los profesores Gonzalo Robledo, Alicia Labra e Yves Martin por su apoyo en distintas postulaciones pero, por sobre todo, por la gran dedicación, paciencia y rigurosidad que mostraron siempre en las clases de los distintos cursos en los que tuve la oportunidad de aprender de ellos. Al profesor Manuel Pinto, de quien aprendí mucho de Análisis y del quehacer docente; por las confianza, el apoyo y los consejos. Al profesor Luis Arenas por los cursos de Topología, los cuales disfruté mucho. A los profesores Giancarlo Lucchini y Anita Rojas por darse el tiempo de leer esta tesis y permitir que esta versión sea mucho mejor que la inicial. A la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile, por becar-me.

Al Dr. Robert Auffarth, por ser el director de esta tesis desarrollada completamente en circunstancias pandémicas; por todo el tiempo dedicado y el conocimiento compartido; por la paciencia para responder mis múltiples preguntas (muchas veces mal planteadas) y por darme el apoyo para emprender nuevos desafíos académicos. Sinceramente, muchas gracias.

Finalmente, pero no menos importante, quisiera agradecer a tres personas que nunca leerán esta tesis pero que de alguna forma estuvieron muy presentes en su desarrollo. A Maximiliano, “el peluca”, por los minutos ganados en el suelo, por todas las pelotas enviadas al córner o afuera del estadio y por ese balón salvado en la línea en Antofagasta. A Javier, conocido como “Parragol”, por esa jugada maradoniana improbable contra el Audax y ese cabezazo agónico contra Coquimbo. A Pablo, por la rebeldía para encarar y, por supuesto, por ese gol inolvidable en Talca. Gracias, gracias, infinitas gracias, por permitir que esta tesis se terminara con Colo - Colo jugando en la primera división del fútbol chileno.

Resumen

Sean $m \geq 1$ y $\mathcal{E}_m \subseteq \mathcal{A}_2$ el locus compuesto por las clases de superficies abelianas no simples que contienen una curva elíptica de exponente m . Debido a trabajos de Humbert de inicios del siglo pasado sabemos que \mathcal{E}_m es una variedad cuasi-proyectiva que no es proyectiva, de modo que es natural buscar una buena compactificación de esta variedad.

En la primera parte de esta tesis encontramos tal compactificación determinando la clausura \mathcal{E}_m^* de \mathcal{E}_m en la compactificación toroidal de \mathcal{A}_2 asociada a la descomposición de Legendre, probando que tal clausura está conjuntistamente dada por

$$\mathcal{E}_m^* = \mathcal{E}_m \sqcup K^0(1)[m] \sqcup \mathbb{P}^1,$$

donde $K^0(1)[m]$ es una cierta subvariedad de la superficie de Kummer relativa $K^0(1)$ (la cual es un cierto \mathbb{P}^1 -fibrado sobre $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$).

En la segunda parte de esta tesis respondemos afirmativamente a la pregunta de si acaso los puntos de frontera de \mathcal{E}_m^* pueden interpretarse como superficies abelianas degeneradas que contienen una curva elíptica degenerada, describiendo explícitamente los objetos degenerados que aparecen mediante nuestra construcción.

Índice general

Convenciones y notaciones	V
Introducción	1
I Compactificaciones toroidales	5
1. Variedades abelianas no simples	6
2. Construcción de \mathcal{A}_2^*	12
3. La clausura de \mathcal{E}_m en \mathcal{A}_2^*	24
II Degeneraciones de superficies abelianas no simples	30
4. La construcción de Mumford	31
5. Degeneraciones de subvariedades	43
Comentarios finales y preguntas a futuro	60
Índice de notaciones	62
Bibliografía	62

Convenciones y notaciones

A lo largo de este trabajo se usan numerosas notaciones y convenciones que se asumen familiares para el lector. A continuación se explicitan algunas de ellas.

$\mathbb{M}_{m \times n}(A)$ denota al conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en el anillo A ; $\text{GL}(2, A)$ denota al subconjunto de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(A)$ compuesto por las matrices invertibles, $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ representa al subgrupo de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ compuesto por las matrices de determinante 1 y $\Gamma_1(k)$ denota al grupo principal de congruencia de nivel k . $\text{Sim}(g, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{M}_{g \times g}(\mathbb{R})$ denota al conjunto de matrices simétricas y $\text{Sp}(2g, \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{M}_{2g \times 2g}(\mathbb{Q})$ al de las matrices simplécticas.

Decimos que un subgrupo H de $\text{Sp}(4, \mathbb{Q})$ es aritmético si $[H : H \cap \text{Sp}(4, \mathbb{Z})] < \infty$ y $[\text{Sp}(4, \mathbb{Z}) : H \cap \text{Sp}(4, \mathbb{Z})] < \infty$. Decimos que un grupo G actúa en forma propiamente discontinua en un espacio topológico X si para todo compacto $K \subseteq X$ se tiene que el conjunto

$$\{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$$

es finito.

Dado un número complejo z denotamos a su parte real e imaginaria por $\Re(z)$ y $\Im(z)$, respectivamente. Extendemos esta noción a las correspondientes a una matriz compleja, esto es, si $A = (a_{ij})$ es una matriz compleja entonces $\Re(A) = (\Re(a_{ij}))_{ij}$ y $\Im(A) = (\Im(a_{ij}))_{ij}$. Denotamos por $A > 0$ al hecho de que una matriz A sea positiva definida y por $A \geq 0$ si es semi-positiva definida.

Dado $\tau \in \mathbb{H}_2$ denotamos por A_τ a la superficie abeliana $\mathbb{C}^2 / (I_2 \mathbb{Z}^2 \oplus \tau \mathbb{Z}^2)$, donde I_2 es la matriz identidad de 2×2 , o, por extensión, a toda su clase de isomorfía. Dado $\tau \in \mathbb{H}$ denotamos por E_τ a la curva elíptica $\mathbb{C} / (\mathbb{Z} \oplus \tau \mathbb{Z})$ o, por extensión, a toda su clase de isomorfía.

Denotaremos por $\langle S \rangle$ al ideal generado por un conjunto S contenido en un cierto anillo y por (S) al subgrupo generado por un conjunto S contenido en un cierto grupo

Introducción

A *grosso modo*, un espacio de móduli es un espacio (con cierta estructura) que parametriza una cierta familia de objetos geométricos. Ahora bien, suele suceder que los objetos geométricos parametrizados pueden “llevarse al límite”, obteniendo objetos *degenerados*, lo cual se traduce en que el espacio de moduli de estos objetos suele no ser compacto y, en ese contexto, es natural buscar una buena compactificación de tal espacio. El objetivo central de esta tesis es estudiar el espacio de moduli de un tipo particular de objetos: las superficies abelianas no simples; encontrar una buena compactificación de este espacio e interpretar los puntos límites como superficies abelianas degeneradas que contienen una curva elíptica degenerada.

0.1. \mathcal{A}_g y sus compactificaciones

Dado un entero $g \geq 1$ tenemos una acción propiamente discontinua del grupo simpléctico

$$\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) := \left\{ M \in \mathrm{GL}(2g, \mathbb{Q}) : M^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \right\} \cap \mathbb{M}_{2g \times 2g}(\mathbb{Z})$$

en el semiespacio de Siegel

$$\mathbb{H}_g := \{ \tau \in \mathbb{M}_{g \times g}(\mathbb{C}) : \tau = \tau^t, \Im(\tau) > 0 \}$$

dada por

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \tau \rightarrow (A + \tau C)^{-1} \cdot (B + \tau D).$$

Es bien sabido (ver por ejemplo [BL04, Cap. 8]) que el cociente $\mathcal{A}_g = \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_g$ es un espacio analítico complejo que entrega naturalmente una correspondencia entre elementos $[\tau] \in \mathcal{A}_g$ y clases de isomorfía de variedades abelianas principalmente polarizadas de dimensión g . Bajo esta correspondencia $[\tau]$ se identifica con la variedad abeliana

$$A_\tau = \mathbb{C}^g / \Lambda_\tau,$$

donde Λ_τ es el reticulado generado por las columnas de la matriz $(I \ \tau)$. De este modo, \mathcal{A}_g constituye un espacio de moduli ¹ (grueso) de variedades abelianas principalmente polarizadas de dimensión g .

¹Propiamente hablando, \mathcal{A}_g es un *moduli stack* (ver [Ols08]). Sin embargo, en este trabajo seguiremos un enfoque analítico, omitiendo los aspectos functoriales de la teoría de moduli.

Se tiene que \mathcal{A}_g es de hecho un espacio analítico normal y sólo presenta singularidades de cociente finito, de modo que, en virtud de [Sat56] y [BB66], tiene una estructura natural de variedad algebraica cuasi-proyectiva. Sin embargo, esta variedad no es proyectiva, de modo que resulta natural querer compactificarla. Una primera solución a este problema fue planteada por Satake, quien construyó una compactificación proyectiva con buenas propiedades de minimalidad ([Nam80, pág. 15]) pero que tiene la desventaja de ser altamente singular a lo largo de su frontera. En [AMRT75] Ash, Mumford, Rapoport y Tai usando inmersiones toroidales, desarrollan un método -aplicable en un contexto más general- que permite construir compactificaciones de \mathcal{A}_g con mejores propiedades de suavidad. Lamentablemente, la construcción de estas compactificaciones *toroidales* pasa por la elección de ciertos *abanicos* de conos en el espacio vectorial $\text{Sim}(g, \mathbb{R})$, de modo que no obtenemos una compactificación canónica de \mathcal{A}_g y, de hecho, no todas las posibles elecciones de abanicos resultan en compactificaciones con buenas interpretaciones modulares ([Ols08]). Sin embargo, algunas de las elecciones de abanicos sí resultan en interpretaciones modulares geoméricamente interesantes como por ejemplo la *descomposición perfecta*, la *descomposición del cono central* o la *descomposición de Voronoi* (ver [MV12]). Ahora bien, nuestro trabajo se enmarca en el caso de superficies y en tal situación todos los abanicos recién mencionados (y por tanto sus respectivas compactificaciones) coinciden, de modo que el método de Mumford et al. nos entrega una variedad proyectiva que llamaremos *la compactificación toroidal de \mathcal{A}_2* y que denotaremos por \mathcal{A}_2^* .

0.2. El locus de las superficies abelianas no simples

Recordemos que una variedad abeliana A se dice **simple** si no contiene subvariedades abelianas no triviales. En particular, una superficie abeliana es simple si no contiene curvas elípticas.

Si bien una superficie abeliana muy general es simple ([Deb99, Ej I.2]), las subvariedades son bastante ubicuas en Geometría y aparecen naturalmente, por ejemplo, al estudiar acciones de grupo en variedades abelianas polarizadas ([LR04]) o al estudiar el morfismo $J_{C'} \rightarrow J_C$ inducido por un morfismo finito $C \rightarrow C'$ entre curvas proyectivas suaves. De esta forma, el espacio de las superficies abelianas no simples es, aunque pequeño, un subconjunto distinguido de \mathcal{A}_2 .

Sea m un entero positivo y \mathcal{E}_m el subconjunto de \mathcal{A}_2 compuesto por las superficies abelianas que contienen una curva elíptica de exponente² m . De acuerdo a trabajos de Humbert ([Kan94, Cor. 1.8]) se tiene que \mathcal{E}_m es un subconjunto cerrado de \mathcal{A}_2 , de modo que tiene naturalmente una estructura de variedad algebraica cuasiproyectiva pero no proyectiva, de modo que, al igual que con \mathcal{A}_2 , es natural querer una compactificación de este espacio. En ese contexto, en la primera parte de este trabajo nos abocaremos a encontrar una tal compactificación la cual no será más que la clausura de \mathcal{E}_m en \mathcal{A}_2^* , que denotaremos por \mathcal{E}_m^* . De esta forma, el primer resultado de esta tesis es el siguiente:

Teorema 0.1 (Teorema 3.9). *A nivel conjuntista se tiene que*

$$\mathcal{E}_m^* = \mathcal{E}_m \sqcup K^0(1)[m] \sqcup \mathbb{P}^1,$$

²Recordar que el exponente de una subvariedad abeliana X de una variedad abeliana polarizada (A, \mathcal{L}) es el exponente del grupo finito $\ker \phi_{\mathcal{L}|_X}$, donde $\phi_{\mathcal{L}}$ es el morfismo $X \rightarrow X^\vee$ dado por $x \mapsto t_x^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$

donde $K^0(1)[m]$ es una cierta subvariedad de dimensión 1 de una superficie modular de Kummer $K^0(1)$.

0.3. Degeneraciones de variedades abelianas

Si tenemos una compactificación de un cierto espacio de moduli, una pregunta natural que surge es si acaso los *puntos límite agregados* corresponden de alguna forma a una *degeneración* de los objetos parametrizados por el espacio de moduli original o, en otras palabras, si la compactificación tiene una interpretación natural como un *espacio de moduli de objetos degenerados*. En ese contexto es natural preguntarse

¿cuáles son los “límites” que se obtienen (o que se pueden obtener)?

Este tipo de preguntas está directamente relacionado con la *teoría de degeneraciones* (ver [FM83, I]) cuya situación general es la siguiente ([Per77]): tenemos un manifold o espacio analítico complejo X , un abierto U de \mathbb{C}^n y un morfismo propio, plano y suave $X \rightarrow U$ y nos preguntamos si acaso esta familia puede extenderse a una familia propia y plana $X^* \rightarrow \bar{U}$ y, de ser así ¿cuáles son las nuevas fibras (en general singulares) que pueden aparecer?

Definición 0.2. Decimos que un espacio analítico A_0 es una **variedad abeliana degenerada** si existe un espacio suave B , un abierto denso U de B y una familia analítica propia y plana $\mathcal{A} \rightarrow B$ tal que las fibras \mathcal{A}_t sean variedades abelianas para todo $t \in U$ y $\mathcal{A}_{t_0} \cong A_0$ para algún $t_0 \in B$.

En [Mum72], Mumford da una construcción que permite degenerar superficies abelianas, la cual está naturalmente relacionada con la construcción de \mathcal{A}_2^* y permite interpretar los puntos de frontera de \mathcal{A}_2^* como superficies degeneradas. En particular, esto permite interpretar los puntos de \mathcal{E}_m^* como superficies degeneradas. Ahora bien, es natural e interesante estudiar degeneraciones de **subvariedades abelianas** (por ejemplo en [ABH02] se estudian degeneraciones de variedades de Prym). En ese contexto, en nuestro caso se vuelve interesante estudiar cómo degeneran las familias de las curvas elípticas “canónicamente” contenidas en las superficies no simples que degeneran hacia la frontera. Más precisamente, podemos plantearnos las siguientes preguntas:

Dada una superficie degenerada A_0 que corresponde a un punto de \mathcal{E}_m^* ¿Hay alguna curva elíptica degenerada que esté “canónicamente” contenida en A_0 ? y, si es así ¿Podemos construir tal curva elíptica degenerada usando la construcción de Mumford?

Pues bien, en la segunda parte de esta tesis responderemos afirmativamente a estas preguntas y describiremos explícitamente cuáles son las posibles degeneraciones de curvas elípticas que pueden aparecer. Probando lo siguiente:

Teorema 0.3 (Teorema 5.23). *Sea \mathcal{A}_2^* la compactificación toroidal de \mathcal{A}_2 asociada a la descomposición de Legendre, $m \geq 2$, $\mathcal{E}_m \subseteq \mathcal{A}_2$ el conjunto de las superficies abelianas no simples que contienen una subvariedad de exponente m y \mathcal{E}_m^* la clausura de \mathcal{E}_m en \mathcal{A}_2^* .*

Se tiene que todo punto de $\partial\mathcal{E}_m^*$ se puede interpretar como una superficie abeliana degenerada que contiene canónicamente una curva elíptica degenerada y, más aún, los pares (superficie degenerada normalizada, curva degenerada) son:

- (Un \mathbb{P}^1 -fibrado sobre una curva elíptica, m -ágono de \mathbb{P}^1 's)
- ($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con dos rectas identificadas, $(m-1)$ -ágono de \mathbb{P}^1 's) si $m \geq 3$
- ($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con dos rectas identificadas, curva nodal) si $m = 2$
- (La unión de dos copias de \mathbb{P}^2 con una de $\text{Bl}_{p_1, p_2, p_3}\mathbb{P}^2$, $(2m-1)$ -ágono de \mathbb{P}^1 's)

0.4. Métodos y Estructura de la tesis

Este trabajo se descompone en dos grandes partes: la Parte I versa sobre compactificaciones toroidales de \mathcal{A}_2^* , teniendo un enfoque principalmente analítico y cuyo resultado principal consiste en la descripción de \mathcal{E}_m^* dada al final del Capítulo 3; mientras que la parte II consiste en dar una construcción (basada en la de Mumford) que permite estudiar degeneraciones de las curvas elípticas que están contenidas en las variedades abelianas no simples que componen ciertas familias que degeneran hacia la frontera de \mathcal{E}_m^* .

La Parte I consta de tres capítulos:

- en el Capítulo 1 se describen los principales resultados relativos a variedades abelianas no simples que serán utilizados en la tesis y se hacen cálculos explícitos que serán de utilidad, no sólo para determinar \mathcal{E}_m^* sino que también para el estudio de degeneraciones de superficies abelianas. Más precisamente, en este Capítulo obtenemos dos resultados que serán de utilidad:
 - a) encontramos un subconjunto de \mathbb{H}_2 cuya imagen en \mathcal{A}_2 es \mathcal{E}_m , lo cual facilita la determinación de \mathcal{E}_m^* hecha en el Capítulo 3.
 - b) describimos cómo, dada una superficie no simple, podemos encontrar “canónicamente” las curvas elípticas contenidas en ella y hacemos cálculos explícitos que serán de utilidad en la Parte II.
- en el Capítulo 2 se describe la construcción de \mathcal{A}_2^* dando la idea general de la construcción junto con los detalles suficientes como para dar justificación y contexto a la determinación de \mathcal{E}_m^* que se hace en el capítulo siguiente
- en el Capítulo 3 usamos los resultados expuestos en el Capítulo 1 para probar el Teorema 0.1.

Por otro lado, la Parte II consta de dos capítulos:

- en el Capítulo 4 se describe la Construcción de Mumford y su relación con \mathcal{A}_2^* . Esta sección es bastante técnica e introduce todas las herramientas de la construcción que se utilizan en el Capítulo 4: un esquema \tilde{P} y un grupo $\mathbb{Y} \cong \mathbb{Z}^2$ actuando en \tilde{P}
- el Capítulo 5 es el principal (y más extenso) de la tesis, donde se usan métodos algebraicos y topológicos para construir subesquemas \tilde{Q}_i de \tilde{P} que permiten degenerar curvas elípticas. Junto con lo anterior, se desarrollan los cálculos que permiten determinar las degeneraciones que se obtienen y, por tanto, probar el Teorema 0.3.

Parte I

Compactificaciones toroidales

Capítulo 1

Variedades abelianas no simples

El objetivo de este capítulo es dar las definiciones y resultados relativos a variedades abelianas no simples que serán utilizados en los capítulos siguientes.

Sea (A, \mathcal{L}) una variedad abeliana principalmente polarizada de dimensión n definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k y $E \leq A$ una curva elíptica. En virtud del Teorema de Reducibilidad de Poincaré existe una subvariedad abeliana $Z_E \leq A$ (que se puede definir canónicamente a partir de E y \mathcal{L}) tal que la suma $E \times Z_E \rightarrow A$ es una isogenia. Así, como Z_E es una subvariedad de codimensión 1, obtenemos una asignación

$$E \mapsto [Z_E] \in \text{NS}(A) = \text{Pic}(A)/\text{Pic}^0(A).$$

En [Auf15] se prueba que

Teorema 1.1. *La asignación $E \mapsto [Z_E]$ define una biyección entre*

1. *Curvas elípticas $E \leq A$ de exponente m*
2. *Elementos primitivos $\alpha \in \text{NS}(A)$ tales que*

$$(\alpha^r \cdot \mathcal{L}^{n-r}) = \begin{cases} (n-1)!m & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r \geq 2 \end{cases}$$

Ahora, cuando $k = \mathbb{C}$ podemos ser más explícitos. En este caso tenemos que $A \cong \mathbb{C}^n/\Lambda$ para algún reticulado Λ de rango $2n$. Además, en este contexto la primera clase de Chern

$$c_1 : H^1(A, \mathcal{O}^*) = \text{Pic}(A) \longrightarrow H^2(A, \mathbb{Z}) \cong \bigwedge^2 \mathbb{Z}^4$$

nos da un isomorfismo

$$\text{NS}(A) \cong H^2(A, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(A, \mathbb{C}), \quad (1.1)$$

el cual usaremos como identificación.

Ahora nos centraremos en el caso de superficies, es decir, cuando $n = 2$. En tal caso, bajo la identificación (1.1) tenemos que

$$\text{NS}(A) = \{\omega \in H^2(A, \mathbb{Z}) : \omega \wedge dz_1 \wedge dz_2 = 0\}. \quad (1.2)$$

Bajo estas identificaciones, el Teorema 1.1 puede expresarse de una manera más concreta: sea (A, \mathcal{L}) una superficie abeliana principalmente polarizada, $\mathcal{T} \in \mathbb{H}_2$ una matriz representante, z_1, z_2 las coordenadas canónicas de \mathbb{C}^2 y x_1, x_2, x_3, x_4 las coordenadas reales de \mathbb{C}^2 tales que

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (I \quad \mathcal{T}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

donde I es la matriz identidad de 2×2 . Bajo esta elección de coordenadas y la identificación (1.2) tenemos que la clase de \mathcal{L} es

$$\Theta = dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4.$$

De este modo, el Teorema 1.1 se traduce en

Teorema 1.2 (Teorema 3.1 en [Auf16]). *Sea (A, \mathcal{L}) una superficie abeliana compleja principalmente polarizada. Tenemos una biyección entre*

1. *Curvas elípticas $E \leq A$ de exponente m*
2. *Formas diferenciales primitivas $\eta \in H^2(A, \mathbb{Z})$ tales que*
 - a) $\eta \wedge dz_1 \wedge dz_2 = 0$
 - b) $\eta \wedge \Theta = -m dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$
 - c) $\eta \wedge \eta = 0$

Identificando $H^2(A, \mathbb{Z})$ con $\wedge^2 \mathbb{Z}^4$ (usando las coordenadas x_i) vemos que las condiciones b) y c) del teorema anterior no dependen de A , de modo que obtenemos un buen marco para estudiar espacios de moduli de superficies abelianas no simples.

Sea entonces $\eta \in \wedge^2 \mathbb{Z}^4$ una forma diferencial que satisface las condiciones b) y c) del teorema anterior. Definimos

$$\mathbb{H}_2(\eta) := \{\mathcal{T} \in \mathbb{H}_2 : \eta \wedge dz_1 \wedge dz_2 = 0\}$$

y

$$\mathcal{A}_2(\eta) := p(\mathbb{H}_2(\eta)),$$

donde $p : \mathbb{H}_2 \mapsto \mathcal{A}_2$ es la proyección canónica.

Del Teorema 1.2 tenemos que

$$\mathcal{E}_m = \bigcup_{\eta \text{ sat. b) y c)}} \mathcal{A}_2(\eta).$$

Sin embargo, más es cierto:

Teorema 1.3 (Lema 3.8 en [Auf16]). *Para toda forma diferencial $\eta \in H^2(A, \mathbb{Z})$ que satisfaga las condiciones b) y c) del teorema 1.2 y tal que $\mathbb{H}_2(\eta) \neq \emptyset$ se tiene que*

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{A}_2(\eta).$$

Ahora bien, en el caso de superficies, podemos encontrar concretamente una forma diferencial que cumpla la conclusión del teorema anterior. Eso se debe al siguiente resultado, probado por Humbert a inicios del siglo pasado:

Teorema 1.4 (Corolario 5.5 en [Kan94]). *Una superficie abeliana compleja principalmente polarizada (A, \mathcal{L}) contiene una curva elíptica de exponente m si y sólo si existe un vector primitivo $v = (a, b, c, d, e) \in \mathbb{Z}^5$ tal que*

$$b^2 - 4(ac + de) = m^2 \tag{1.4}$$

y

$$a\tau_1 + b\tau_2 + c\tau_3 + d(\tau_2^2 - \tau_1\tau_3) + e = 0, \tag{1.5}$$

donde $\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix}$ es una matriz período de (A, \mathcal{L}) .

Ahora bien, podemos reescribir el resultado anterior en términos de una forma diferencial. En efecto: sea $v = (a, b, c, d, e) \in \mathbb{Z}^5$ un vector primitivo y sea

$$\begin{aligned} \eta_v := & ddx_1 \wedge dx_2 - \frac{b-m}{2} dx_1 \wedge dx_3 + adx_1 \wedge dx_4 \\ & - cdx_2 \wedge dx_3 + \frac{b+m}{2} dx_2 \wedge dx_4 - edx_3 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

Tenemos

Corolario 1.5. *Para todo vector primitivo $v = (a, b, c, d, e) \in \mathbb{Z}^5$ con $b^2 - 4(ac + de) = m^2$ tal que $\mathbb{H}_2(\eta_v) \neq \emptyset$ se tiene que*

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{A}_2(\eta_v).$$

Comentario 1.6. *Este corolario corrige el ejemplo 3.10 en [Auf16], donde la forma diferencial η_v se utiliza erróneamente pues en tal referencia las coordenadas reales y complejas se relacionan de manera diferente.*

Demostración. En virtud del Teorema 1.3 basta verificar que

$$\eta_v \wedge \eta_v = 0,$$

y que

$$\eta_v \wedge \Theta = -m dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

Ahora, un cálculo directo muestra que

$$\eta_v \wedge \eta_v = \frac{1}{2} [b^2 - m^2 - 4(ac + de)] dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

y que

$$\begin{aligned}\eta_v \wedge \Theta &= \left(\frac{b-m}{2} - \frac{b+m}{2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\ &= -m dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4,\end{aligned}$$

de modo que el resultado sigue. □

Lema 1.7. *Sea $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_2$. Se tiene que $\mathcal{T} \in \mathbb{H}_2(\eta_v)$ si y sólo si se cumple la ecuación (1.5).*

Demostración. Por definición sabemos que $\mathcal{T} \in \mathbb{H}_2(\eta_v)$ si y sólo si

$$\eta_v \wedge dz_1 \wedge dz_2 = 0.$$

Ahora bien, de acuerdo a (1.3) tenemos que

$$\begin{aligned}dz_1 &= dx_1 + \tau_1 dx_3 + \tau_2 dx_4 \\ dz_2 &= dx_2 + \tau_2 dx_3 + \tau_3 dx_4,\end{aligned}$$

de modo que un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned}dz_1 \wedge dz_2 &= dx_1 \wedge dx_2 + \tau_2 dx_1 \wedge dx_3 + \tau_3 dx_1 \wedge dx_4 \\ &\quad - \tau_1 dx_2 \wedge dx_3 - \tau_2 dx_2 \wedge dx_4 + (\tau_1 \tau_3 - \tau_2^2) dx_3 \wedge dx_4.\end{aligned}$$

Así vemos que

$$\eta_v \wedge dz_1 \wedge dz_2 = -[a\tau_1 + b\tau_2 + c\tau_3 + d(\tau_2^2 - \tau_1\tau_3) + e] dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

y el resultado sigue. □

Una de las ventajas del uso de formas diferenciales es que obtenemos directamente el siguiente resultado:

Corolario 1.8. *Toda superficie abeliana compleja principalmente polarizada que contenga una curva elíptica de exponente m es isomorfa a una cuya matriz período es de la forma*

$$\begin{pmatrix} \tau_1 & -\frac{\tau_3}{m} \\ -\frac{\tau_3}{m} & \tau_3 \end{pmatrix},$$

para ciertos $\tau_1, \tau_3 \in \mathbb{H}$ con $\mathfrak{J}(\tau_1) > m^{-2}\mathfrak{J}(\tau_3)$.

Demostración. Basta notar que, en virtud del lema anterior, se tiene que

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} \tau_1 & -\frac{\tau_3}{m} \\ -\frac{\tau_3}{m} & \tau_3 \end{array} \right) : \tau_1, \tau_3 \in \mathbb{H}, \mathfrak{J}(\tau_1) > \frac{1}{m^2} \mathfrak{J}(\tau_3) \right\} = \mathbb{H}_2(\eta_v),$$

para $v = (0, m, 1, 0, 0)$. □

Comentario 1.9. Recordar el bien conocido *Criterio de Sylvester*, que establece que una matriz real $A = (a_{ij})$ de 2×2 es positiva definida si y sólo a_{11} y $\det(A)$ son positivos. De este criterio viene la necesidad de que $\mathfrak{J}(\tau_1) > m^{-2} \mathfrak{J}(\tau_3)$ en el corolario anterior.

Con lo dicho hasta aquí no hemos establecido cómo encontrar curvas elípticas dentro de una superficie dada. En lo que resta de capítulo abordaremos este tema.

Sea (A, \mathcal{L}) una superficie abeliana compleja principalmente polarizada con $A = \mathbb{C}^2/\Lambda$, donde Λ es un reticulado en \mathbb{C}^2 . Sabemos que toda curva elíptica $E \leq A$ es de la forma

$$E = \frac{W}{\Lambda \cap W},$$

para algún \mathbb{C} -subespacio vectorial W de \mathbb{C}^2 con $\dim_{\mathbb{C}}(W) = 1$. El siguiente resultado, probado en [Auf16] nos da un método para encontrar explícitamente tal subespacio.

Proposición 1.10. Sea $\eta = \sum_{i < j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j \in \wedge^2 \mathbb{Z}^4$ una forma diferencial como en el Teorema 1.3 y $\tau \in \mathbb{H}_2(\eta)$. Sea W_η el subespacio vectorial real de \mathbb{C}^2 que en la base dada por las columnas de la matriz $(I \ \tau)$ se representa por la imagen de la matriz JM_η , donde $J = \begin{pmatrix} O & -I \\ I & O \end{pmatrix}$ y $M_\eta = (a_{ij})_{ij}$ (con $a_{ji} = -a_{ij}$). Se tiene que tal subespacio determina una curva elíptica contenida en A_τ .

Demostración. Ver [Auf16, Prop. 3.2]. En esa referencia este mismo resultado se plantea en forma ligeramente distinta, apareciendo la matriz $J^t = -J$ en vez de J . Esto se debe a que en dicho artículo las coordenadas reales y complejas se relacionan mediante la matriz $(\mathcal{T} \ I)$ en vez de $(I \ \mathcal{T})$ como en nuestro caso. En otras palabras, hay una diferencia en el orden de los elementos de la base simpléctica utilizada. Por esta misma razón, en tal referencia la clase de \mathcal{L} es $-\Theta$ en lugar de Θ . □

Ejemplo 1.11. Consideremos la matriz

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \tau_1 & -\frac{\tau_3}{m} \\ -\frac{\tau_3}{m} & \tau_3 \end{pmatrix}.$$

Como señalamos anteriormente, tenemos que $\mathcal{T} \in \mathbb{H}_2(\eta_v)$ para $v = (0, m, 1, 0, 0)$. Tenemos que

$$\eta_v = -dx_2 \wedge dx_3 + m dx_2 \wedge dx_4,$$

de modo que

$$JM_{\eta_v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & m \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & m \end{pmatrix}.$$

Así un cálculo directo muestra que

$$W = \left\langle (-1, m), \left(-\frac{\tau_3}{m}, \tau_3\right) \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

y que

$$E = \frac{\left\langle (-1, m), \left(-\frac{\tau_3}{m}, \tau_3\right) \right\rangle_{\mathbb{R}}}{\left\langle (-1, m), \left(-\frac{\tau_3}{m}, \tau_3\right) \right\rangle_{\mathbb{Z}}} \cong E_{\tau_3/m}.$$

Ahora, del teorema de Reducibilidad de Poincaré sabemos que si A_{τ} es una superficie no simple entonces es isógena a un producto de dos curvas elípticas. La teoría desarrollada en [Auf16] nos permite ver que si $E \leq A$ y C es la curva complementaria de E entonces

$$N_C = mI - N_E.$$

De esta forma, siguiendo con el ejemplo anterior, tenemos que

$$mI - JM_{\eta} = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto un cálculo directo muestra la curva complementaria es

$$C = \frac{\left\langle (1, 0), \left(m\tau_1 - \frac{\tau_3}{m}, 0\right) \right\rangle_{\mathbb{R}}}{\left\langle (1, 0), \left(m\tau_1 - \frac{\tau_3}{m}, 0\right) \right\rangle_{\mathbb{Z}}} \cong \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z} \oplus \left(m\tau_1 - \frac{\tau_3}{m}\right)\mathbb{Z}} = E_{m\tau_1 - \frac{\tau_3}{m}}.$$

Capítulo 2

Construcción de \mathcal{A}_2^*

Siendo \mathcal{A}_g el cociente de \mathbb{H}_g por la acción de un subgrupo aritmético de $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Q})$, se tiene que \mathcal{A}_g es lo que en [AMRT75] se conoce como un dominio localmente simétrico de tercer tipo, de modo que es compactificable usando los métodos expuestos en tal referencia. Ahora bien, la construcción de tal compactificación pasa por la elección de un cierto *abanico admisible* de conos en el espacio vectorial $\mathrm{Sim}(g, \mathbb{R})$, lo cual hace que, en general, tal compactificación no esté únicamente determinada. Algunas de las elecciones usuales para tales abanicos son la primera descomposición de Voronoi (o descomposición perfecta), la segunda descomposición de Voronoi (utilizada en [Nam80]) y la descomposición del cono central; resultando en compactificaciones $\mathcal{A}_g^{\mathrm{Perf}}$, $\mathcal{A}_g^{\mathrm{Vor}}$ y $\mathcal{A}_g^{\mathrm{Centr}}$, cada una de las cuales tiene su propio interés (ver [HT18, Sec.4] o [MV12]). Sin embargo, en nuestro caso, en que $g = 2$, todas tales descomposiciones (y, por tanto, las respectivas compactificaciones) coinciden y, en ese contexto, hablaremos de *la* compactificación toroidal de \mathcal{A}_2 y la denotaremos por \mathcal{A}_2^* .

En este capítulo bosquejaremos la construcción de \mathcal{A}_2^* de manera de dar contexto a los cálculos efectuados en el capítulo siguiente, donde se determina la clausura \mathcal{E}_m^* de \mathcal{E}_m en \mathcal{A}_2^* . Las principales referencias a lo largo de este capítulo son [AMRT75] y [HKW93, Part I, Chap 3].

2.1. Idea de construcción

Buscamos construir una compactificación de $\Gamma \backslash \mathbb{H}_2$ para un subgrupo aritmético Γ de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$ (en el caso particular de \mathcal{A}_2 se tiene que $\Gamma = \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}) = \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q}) \cap \mathrm{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$). En esta sección se da un bosquejo de esta construcción, reservando los detalles y cálculos más específicos para las dos secciones siguientes.

Sea

$$\mathbb{D} := \{Z \in \mathrm{Sim}(2, \mathbb{C}) : 1 - Z \cdot \bar{Z} > 0\}.$$

Se tiene que la transformación de Cayley

$$\phi : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{D} : \tau \mapsto (\tau - i1)(\tau + i1)^{-1}$$

es un biholomorfismo y la acción de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$ en \mathbb{H}_2 se traduce vía ϕ en una acción de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$ en \mathbb{D} . Más aún, esta acción se extiende naturalmente a una acción en la clausura euclidiana

$$\overline{\mathbb{D}} = \{Z \in \mathrm{Sim}(2, \mathbb{C}) : 1 - Z \cdot \overline{Z} \geq 0\}.$$

Definimos una relación de equivalencia en $\overline{\mathbb{D}}$ estableciendo que $Z \sim W$ si existe una cantidad finita de funciones holomorfas $\varphi_i : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$, $i = 1, \dots, r$ tales que $Z \in \varphi_1(\mathbb{D})$, $W \in \varphi_r(\mathbb{D})$ y $\varphi_i(\mathbb{D}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{D}) \neq \emptyset$. Cada clase de equivalencia se denomina una *componente de frontera* de \mathbb{D} (o, abusando del lenguaje, de \mathbb{H}_2). Una observación interesante es el hecho de que si $g \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ y F es una componente de frontera entonces se tiene que $g(F)$ es también una componente de frontera, de modo que $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ no sólo actúa en $\overline{\mathbb{D}}$ sino que también permuta las componentes de frontera.

Ejemplo 2.1. \mathbb{D} es una componente de frontera ([HKW93, Part I, Chapter 3, Prop. 3.6ii) y Prop. 3.7])

Para construir la compactificación toroidal lo que se hace es “agregar puntos límites en la dirección de ciertas componentes de frontera” para, posteriormente, pegar cada una de estas piezas mediante ciertas identificaciones. Siguiendo [HKW93, Cap. 3], estos puntos límites serán llamados -de manera algo impropia- una compactificación parcial en la dirección de F . Ahora bien, de la misma forma que en el caso de la compactificación de Satake de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ sólo se agregan los puntos límites $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, en la construcción de compactificaciones toroidales no entran en juego todas las componentes de frontera, sino que solamente algunas. Las componentes de frontera para las cuales nos interesará construir compactificaciones parciales son aquellas que tienen un cualidad distinguida de *racionalidad* que procedemos a precisar a continuación.

A cada componente de frontera F podemos asociar el \mathbb{R} -espacio vectorial

$$U(F) := \ker \left(\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2 : v \mapsto v \cdot \begin{pmatrix} i(1+Z) \\ 1-Z \end{pmatrix} \right),$$

donde Z es cualquier elemento de F .

Comentario 2.2. Para cada F se tiene que $U(F)$ es un subespacio J -isotrópico de \mathbb{R}^4 , donde $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Esto es, para $u, v \in U(F)$ cualesquiera se tiene que $uJv^t = 0$. De hecho, se tiene una correspondencia entre subespacios J -isotrópicos de \mathbb{R}^4 y componentes de frontera. Más aún, esta correspondencia es $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$ -equivariante, donde la acción de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$ en el conjunto de subespacios J -isotrópicos de \mathbb{R}^4 es la inducida por la acción por multiplicación de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$ en \mathbb{R}^4 .

Definición 2.3. Decimos que F es una componente racional de frontera (c.r.f) si $U(F)$ es generado por vectores de coordenadas racionales. Decimos además que F es de corango g' si $\dim(U(F)) = g'$.

Ejemplo 2.4. \mathbb{D} es una c.r.f de corrancho 0

Comentario 2.5. Se tiene que $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$ actúa en el conjunto de componentes racionales de frontera

La idea de la construcción de la compactificación parcial en la dirección de una componente racional de frontera es la siguiente:

1. Consideramos un cierto subgrupo aritmético $P(F) \leq \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$ y una “buena vecindad” $V(F)$ de F en \mathbb{D} de manera que $P(F)$ actúe en $V(F) \cap \mathbb{D}$
2. Agregamos ciertos puntos límites a $V(F) \cap \mathbb{D}$, obteniendo un conjunto $\tilde{V}(F)$ en el que $P(F)$ actúe extendiendo la acción sobre $V(F) \cap \mathbb{D}$.
3. Consideramos la compactificación parcial en la dirección de F como el cociente $P(F) \backslash \tilde{V}(F)$

Por supuesto, la verdadera construcción requiere precisar este proceso, tiene mayores complejidades e involucra ciertas herramientas técnicas.

Definición 2.6. Definimos $\mathcal{P}(F)$ como el estabilizador de F en $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$, $\mathcal{P}'(F)$ como el centro del radical unipotente de $\mathcal{P}(F)$ y $\mathcal{P}''(F) = \mathcal{P}(F)/\mathcal{P}'(F)$. De manera similar definimos las versiones discretas de estos grupos: $P(F), P'(F)$ y $P''(F)$, donde $P(F) = \mathcal{P}(F) \cap \Gamma, P'(F) = \mathcal{P}'(F) \cap \Gamma$ y $P''(F) = P(F)/P'(F)$.

Ejemplo 2.7. Para $F = \mathbb{D} \cong \mathbb{H}_2$ tenemos que $\mathcal{P}(\mathbb{D}) = \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ y se puede probar ([HKW93, Part I, Chapter 3, Prop. 3.88]) que $R_u(\mathcal{P}(\mathbb{D})) = \mathcal{P}'(\mathbb{D}) = \{1\}$, donde $R_u(\mathcal{P}(\mathbb{D}))$ denota al radical unipotente de $\mathcal{P}(\mathbb{D})$. Así $P(\mathbb{D}) = \Gamma, P'(\mathbb{D}) = \{1\}, \mathcal{P}''(\mathbb{D}) = \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ y $P''(\mathbb{D}) = \Gamma$

Con toda esta terminología estamos en condiciones de describir el proceso de compactificación parcial en la dirección de una componente racional de frontera F de corrancho g' .

1. Se construye un fibrado tórico trivial

$$\mathcal{X}(F) \longrightarrow \frac{R_u(\mathcal{P}(F))}{\mathcal{P}'(F)} \times F := S(F),$$

con fibras

$$T = \frac{P'(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}}{P'(F)} \cong (\mathbb{C}^\times)^r,$$

donde el cociente es por la acción de $P'(F)$, r es el rango de $P'(F)$ y usamos la convención $(\mathbb{C}^\times)^0 = \{pt\}$. Se puede probar que naturalmente se puede ver al cociente parcial

$$X(F) := P'(F) \backslash \mathbb{D}$$

como un abierto (analítico) de $\mathcal{X}(F)$.

Ejemplo 2.8. Del Ejemplo 2.7 tenemos que el fibrado $\mathcal{X}(\mathbb{D}) \rightarrow S(\mathbb{D})$ no es más que la identidad $\mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_2$

2. Escogemos un abanico $\Sigma(F)$ en $\mathcal{P}'(F) \cong P'(F) \otimes \mathbb{R} \cong \text{Sim}(g', \mathbb{R})$ y construimos la variedad tórica $T_{\Sigma(F)}$ asociada a tal abanico. Con tal variedad tórica se construye el fibrado trivial $\mathcal{X}_{\Sigma(F)}(F) \rightarrow S(F)$ con fibras $T_{\Sigma(F)}$. Evidentemente este fibrado contiene al fibrado $\mathcal{X}(F)$ del punto anterior.

Observación. Podemos calcular el grupo $\mathcal{P}(F)$ en forma explícita como el estabilizador de $U(F)$ bajo la acción de $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ en el conjunto de subespacios J -isotrópicos de \mathbb{R}^4 (ver comentario 2.2). Tales cálculos y la existencia de buenos métodos para calcular el radical unipotente de un grupo de Lie permiten probar el isomorfismo $\mathcal{P}'(F) \cong \text{Sim}(g', \mathbb{R})$ (donde $g' = \dim(U(F))$ es el corrangó de F) señalado en el ítem precedente.

3. En virtud de los puntos anteriores podemos ver a $X(F)$ como un subconjunto de $\mathcal{X}_{\Sigma(F)}(F)$. Definimos $X_{\Sigma}(F)$ como el interior de la clausura de $X(F)$ en $\mathcal{X}_{\Sigma(F)}(F)$.
4. Si $\Sigma(F)$ se escoge apropiadamente (en el sentido de [HKW93, Part I, Chapter 3, Def. 3.61]) entonces $P''(F)$ actúa en forma propiamente discontinua en $\mathcal{X}_{\Sigma(F)}(F)$ y esta acción se restringe a $X_{\Sigma(F)}(F)$. La compactificación parcial de $\Gamma \setminus \mathbb{D}$ en la dirección de F (es decir, uno de los estratos que serán parte de la compactificación toroidal) se define como el espacio

$$Y_{\Sigma}(F) := P''(F) \setminus X_{\Sigma(F)}(F).$$

Ejemplo 2.9. Del Ejemplo 2.7 tenemos que, en el caso en que $F = \mathbb{D}$ el único abanico posible es $\Sigma = \{0\}$ por lo que $\mathcal{X}_{\Sigma}(\mathbb{D}) = \mathcal{X}(\mathbb{D}) = \mathbb{H}_2$ y la compactificación parcial no es más que

$$Y_{\{0\}}(\mathbb{D}) = P''(\mathbb{D}) \setminus \mathbb{H}_2 = \Gamma \setminus \mathbb{H}_2.$$

La idea es que la compactificación toroidal de $\Gamma \setminus \mathbb{D}$ (o de $\Gamma \setminus \mathbb{H}_2$) se obtendrá como un cociente de la unión disjunta de los espacios $X_{\Sigma(F)}(F)$. Sin embargo, aún teniendo compactificaciones parciales en la dirección de cada c.r.f no necesariamente podremos obtener una compactificación global pues para ello requerimos que ciertas condiciones de compatibilidad se cumplan.

A grandes rasgos necesitamos dos cosas: una es que $X_{\Sigma(F)}(F)$ sea isomorfo (con un isomorfismo suficientemente bueno) a $X_{\Sigma(g(F))}(g(F))$ para todo $g \in \Gamma$, de modo que estos isomorfismos permitan identificar a $X_{\Sigma(F)}(F)$ con $X_{\Sigma(g(F))}(g(F))$ en el cociente; mientras que la otra es que si F, F' son c.r.f “que están cerca” en $\overline{\mathbb{D}}$ entonces $X_{\Sigma(F)}(F)$ y $X_{\Sigma(F')}(F')$ también “estén cerca” en la compactificación que se pretende construir. Para poder obtener estas condiciones de compatibilidad (que precisaremos en breve) basta imponer ciertas condiciones de *admisibilidad* a la colección $\tilde{\Sigma} = \{\Sigma(F) : F \text{ c.r.f}\}$, de modo que los abanicos $\Sigma(F)$ no se eligen independientemente unos de otros. Estas condiciones de admisibilidad permiten garantizar la existencia de “buenos morfismos de pegado” y, por tanto, definir las relaciones que determinen al cociente que será nuestra compactificación.

Para precisar los discutido en el párrafo anterior introducimos una definición:

Definición 2.10. Decimos que una c.r.f F es adyacente a F' si $F \neq F'$ y $F \subseteq \overline{F'}$.

Comentario 2.11. Se tiene que si F es adyacente a F' entonces $P'(F') \leq P'(F)$, por lo que tenemos un morfismo

$$\pi_0(F, F') : X(F') \longrightarrow X(F).$$

Las condiciones de *admisibilidad* en la colección $\tilde{\Sigma}$ (detalladas en [HKW93, Part I, Chap. 3, Def. 3.66]) permiten dos cosas:

1. Que si $F' = g(F)$ para $g \in \Gamma$ entonces haya un isomorfismo $\tilde{g} : X_{\Sigma(F)}(F) \rightarrow X_{\Sigma(F')}(F')$ que extienda al isomorfismo $g : X(F) \rightarrow X(F')$ (donde $X(-) = P'(-) \setminus \mathbb{H}_2$, como antes).
2. Que si F es adyacente a F' entonces exista un morfismo de pegado

$$\pi(F, F') : X_{\Sigma(F)}(F) \rightarrow X_{\Sigma(F')}(F') \quad (2.1)$$

que extienda al morfismo $\pi_0(F, F')$ del Comentario 2.11

Los dos puntos anteriores permiten definir las identificaciones necesarias para construir la compactificación toroidal. La compactificación toroidal de $\Gamma \setminus \mathbb{D}$ (o de $\Gamma \setminus \mathbb{H}_2$) respecto a la colección de abanicos *admisibles* $\tilde{\Sigma}$ se obtiene como el cociente

$$(\Gamma \setminus \mathbb{D})_{\tilde{\Sigma}}^* := \left(\coprod_{F \text{ c.r.f}} X_{\Sigma(F)}(F) \right) / \simeq,$$

donde \simeq es la relación de equivalencia generada por los siguientes dos tipos de identificaciones:

1. $x \in X_{\Sigma(F)}(F)$ se identifica con $x' \in X_{\Sigma(F')}(F')$ si $F = g(F')$, con $g \in \Gamma$ y $x = \tilde{g}(x')$
o
2. $x \in X_{\Sigma(F)}(F)$ se identifica con $x' \in X_{\Sigma(F')}(F')$ si F es adyacente a F' y $\pi(F', F)(x') = x$.

Observación. Notar que

- I El espacio $(\Gamma \setminus \mathbb{D})_{\tilde{\Sigma}}^*$ así obtenido puede verse también como un cociente de $\coprod Y_{\Sigma(F)}(F)$. En efecto: si $g \in P(F)$ entonces $F = g(F)$, de modo que \tilde{g} induce identificaciones en $X_{\Sigma(F)}$, las cuales coinciden con la que definen a $Y_{\Sigma(F)}$.
- II \mathbb{D} es una componente de frontera con $Y_{\Sigma}(\mathbb{D}) = \Gamma \setminus \mathbb{D}$, de modo que la composición

$$\Gamma \setminus \mathbb{D} \hookrightarrow \coprod Y_{\Sigma}(F) \twoheadrightarrow (\Gamma \setminus \mathbb{D})_{\tilde{\Sigma}}^*$$

resulta en una inmersión abierta con imagen densa.

El siguiente teorema resume las principales características de $(\Gamma \backslash \mathbb{H}_2)_\Sigma^*$.

Teorema 2.12 (Compactificación toroidal). *Sea Γ un subgrupo aritmético de $Sp(4, \mathbb{Q})$ actuando en \mathbb{H}_2 . Si $\tilde{\Sigma} = \{\Sigma(F) : F \text{ c.r.f.}\}$ es una familia admisible de abanicos entonces existe un espacio compacto $(\Gamma \backslash \mathbb{H}_2)_\Sigma^*$ que contiene a $\Gamma \backslash \mathbb{H}_2$ como un abierto denso con frontera puramente 1-codimensional. Más aún, las proyecciones naturales*

$$p_F : P(F) \backslash \mathbb{H}_2 \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{H}_2$$

se extienden a aplicaciones

$$p_F^* : Y_{\Sigma(F)}(F) \rightarrow (\Gamma \backslash \mathbb{H}_2)_\Sigma^*,$$

cada p_F^* es un isomorfismo local y $(\Gamma \backslash \mathbb{H}_2)_\Sigma^*$ es la unión de las imágenes de p_F^* , para F c.r.f.

Para simplificar y clarificar el enunciado de ciertos resultados de las secciones y capítulos siguientes introducimos un par de notaciones:

Definición 2.13. Sea F una c.r.f. Definimos

$$\partial_F \mathcal{A}_2^* := p_F^* (Y_{\Sigma(F)}(F)) - \bigcup_H p_H^* (Y_{\Sigma(H)}(H)),$$

donde H recorre las c.r.f. tales que F es adyacente a H . Dado un subconjunto \mathcal{B} de \mathcal{A}_2^* y una c.r.f. F definimos

$$\partial_F \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \partial_F \mathcal{A}_2^*.$$

Este proceso, que abstractamente es complicado, es en términos concretos bastante calculatorio y usualmente cada cociente parcial está dado, al menos localmente, por una aplicación exponencial. Más aún, en nuestro caso, en el que $\Gamma = Sp(4, \mathbb{Z})$, todas las c.r.f. son $\Gamma = Sp(4, \mathbb{Z})$ -trasladadas de tres c.r.f. distinguidas: una de corranjo 0 (a saber, \mathbb{D} , la cual ya hemos estudiado en los ejemplos de esta sección), una de corranjo 1 y otra de corranjo 2. Concretamente, módulo la acción de $Sp(4, \mathbb{Z})$, podemos considerar las siguientes representantes:

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Sim}(2, \mathbb{C}) : |z| < 1 \right\} \cong \mathbb{H} \quad \text{y} \quad F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.2)$$

donde $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{C}$ es el semiplano de Poincaré (el cual es biholomorfo al disco unitario abierto) y la componente F_i es de corranjo i . En ese contexto tendremos que, a nivel conjuntista,

$$\mathcal{A}_2^* = \mathcal{A}_2 \sqcup \partial_{F_1} \mathcal{A}_2^* \sqcup \partial_{F_2} \mathcal{A}_2^*,$$

donde $\partial_{F_i} \mathcal{A}_2^* \subseteq Y_{\Sigma(F_i)}(F_i)$ será una cierta subvariedad que se agregará a la frontera de \mathcal{A}_2 como “aporte” de la c.r.f. de corranjo i . En las siguientes dos secciones describiremos explícitamente a tales subvariedades, con los detalles necesarios como para entender los cálculos del capítulo siguiente.

Observación. Notar que si F, H son c.r.f. con $F = g(H)$ para algún $g \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$ entonces $p_F^*(Y_{\Sigma(F)}(F)) = p_H^*(Y_{\Sigma(H)}(H))$. En particular tenemos que

$$\partial_{F_1} \mathcal{A}_2^* = p_{F_1}^*(Y_{\Sigma(F_1)}(F_1)) - \mathcal{A}_2 = p_{F_1}^*(P''(F_1) \setminus \partial X_{\Sigma(F_1)}(F_1))$$

(donde $\partial X_{\Sigma(F_1)}(F_1) = X_{\Sigma(F_1)}(F_1) - X(F_1)$ es la frontera topológica usual en $X_{\Sigma(F)}(F)$)
y

$$\partial_{F_2} \mathcal{A}_2^* = p_{F_2}^*(Y_{\Sigma(F_2)}(F_2)) - (\mathcal{A}_2 \cup \partial_{F_1} \mathcal{A}_2^*).$$

2.2. Corrago 1: la superficie $K^0(1)$

Como señalamos anteriormente, módulo la acción de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$, sólo hay una c.r.f. de corrago 1, la cual es la componente F_1 mostrada en (2.2). En este caso se puede probar que

$$P(F_1) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \varepsilon & m & s & n \\ 0 & a & * & b \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & c & * & d \end{array} \right) \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}); m, s, n \in \mathbb{Z}; \varepsilon \in \{\pm 1\} \right\} \quad (2.3)$$

y

$$P'(F_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (2.4)$$

De este modo, un cálculo directo permite ver que la acción de $P'(F_1)$ en \mathbb{H}_2 está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 + s & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, el cociente parcial $X(F_1) = P'(F_1) \setminus \mathbb{H}_2$ puede identificarse naturalmente con la imagen de la función $e_{F_1} : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ dada por

$$\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \rightarrow (e^{2\pi i \tau_1}, \tau_2, \tau_3). \quad (2.5)$$

Se puede probar ([HKW93, Part I, Chapter 3, Prop. 3.88]) que $S(F_1) \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{H} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{H}$, de modo que $\mathcal{X}(F_1) = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ y tenemos explícitamente la contención de $X(F_1)$ en $\mathcal{X}(F_1)$ que habíamos adelantado. Ahora bien, tenemos que $\mathcal{P}'(F_1) \cong \mathbb{R}$ y el abanico que consideramos es $\Sigma(F_1) = \{\{0\}, \mathbb{R}_{\geq 0}\}$, en cuyo caso $\mathcal{X}_{\Sigma(F_1)}(F_1)$ no es más que $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}$.

Así es fácil ver que

$$X_{\Sigma(F_1)}(F_1) = (P'(F_1) \setminus \mathbb{H}_2) \sqcup (\{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}). \quad (2.6)$$

Ahora bien, tenemos que \mathbb{D} y F son adyacentes (ver Definición 2.10) por lo cual tenemos un morfismo de pegado $\pi(F_1, \mathbb{D}) : \mathbb{H}_2 \rightarrow X_{\Sigma(F_1)}(F_1)$ (ver (2.1)) el cual por [HKW93, Part I, Chap. 3, Prop. 3.144] no es más que la composición

$$X_{\Sigma(\mathbb{D})}(\mathbb{D}) = \mathbb{H}_2 \rightarrow P'(F_1) \setminus \mathbb{H}_2 = X(F_1) \hookrightarrow X_{\Sigma(F_1)}(F_1)$$

y, por tanto, una vez hechos los pegados, los únicos “puntos nuevos” que habremos agregado a \mathcal{A}_2 son los que vengan del término $\{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ en (2.6), esto es

$$\partial_{F_1} \mathcal{A}_2 = P''(F_1) \setminus (\{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}). \quad (2.7)$$

De esta forma, lo que nos interesa es ver qué es $P''(F_1)$ y cómo actúa en el término $\{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ de (2.6).

Usando (2.3) y (2.4) se puede probar que

$$P''(F_1) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & m & n \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} : m, n \in \mathbb{Z}; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), \varepsilon \in \{\pm 1\} \right\}$$

y que la acción en $\{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ está dada por

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & m & n \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \cdot (0, z, \tau) = \left(0, \frac{\varepsilon z + m\tau + n}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right). \quad (2.8)$$

Definición 2.14. El cociente de $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ por la acción definida en (2.8) es una superficie modular de Kummer y se denota por $K^0(1)$.

Comentario 2.15. *Notar que tenemos un fibrado $K^0(1) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H} = \mathcal{A}_1$ dado por*

$$[(z, \tau)] \rightarrow [\tau],$$

cuya fibra sobre $[\tau]$ es el cociente de la curva E_τ por la involución $z \mapsto -z$.

2.3. Corrago 2: Un \mathbb{P}^1 periférico

Consideramos ahora la componente $F_2 = \{1\}$, la cual es la única componente de corrago 2, módulo la acción de $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z})$.

En esta situación se puede probar que

$$P(F_2) = \left\{ \begin{pmatrix} (Q^{-1})^t & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}) : Q \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}), S = S^t \right\} \quad (2.9)$$

y que

$$P'(F_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}) : S = S^t \right\}, \quad (2.10)$$

donde describimos las matrices en bloques de 2×2 . Así podemos ver que

$$P''(F_2) \cong \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}),$$

donde el isomorfismo está dado por la matriz Q de (2.9).

De esta forma, por (2.10) vemos que la acción de $P'(F_2)$ en \mathbb{H}_2 está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tau_1 + s_1 & \tau_2 + s_2 \\ \tau_2 + s_2 & \tau_3 + s_3 \end{pmatrix},$$

donde $S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{pmatrix}$ y el cociente parcial $X(F_2)$ puede identificarse naturalmente con la imagen de \mathbb{H}_2 vía la función

$$e_{F_2} : \mathbb{H}_2 \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^3 : \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \mapsto (e^{2\pi i \tau_1}, e^{2\pi i \tau_2}, e^{2\pi i \tau_3}). \quad (2.11)$$

Ahora bien, en este caso se puede ver que $R_u(\mathcal{P}(F_2)) = \mathcal{P}'(F_2)$ por lo que $S(F) = \{pt\}$ (recordar que $F_2 = \{1\}$) y tenemos que $\mathcal{X}(F_2) = T = (\mathbb{C}^\times)^3$.

Para definir el abanico $\Sigma(F_2)$ (con el que construiremos la compactificación parcial en la dirección de F_2) consideremos la acción de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ en $\mathrm{Sim}(2, \mathbb{R})$ dada por

$$g : S \mapsto (g^t)^{-1} \cdot S \cdot g^{-1}. \quad (2.12)$$

y el cono $\sigma_0 \subseteq \mathrm{Sim}(2, \mathbb{R})$ dado por

$$\sigma_0 = \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.16. *La **decomposición de Legendre** Σ_L es el conjunto de conos de $\mathrm{Sim}(2, \mathbb{R})$ compuesto por todos los $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ -trasladados de σ_0 , junto con todas sus respectivas caras.*

Ejemplo 2.17. *Consideremos el elemento $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Dado $k \in \mathbb{Z}$ obtenemos el cono $\sigma_k := g^k(\sigma_0) \in \Sigma_L$ dado por*

$$\sigma_k = \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} (k+1)^2 & k+1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} k^2 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

El cono σ_{-1} será muy importante en la Parte II de este trabajo .

Con el abanico $\Sigma(F_2) = \Sigma_L$ construimos la variedad tórica T_{Σ_L} y, como $\mathcal{X}(F_2) = T = (\mathbb{C}^\times)^3$, tenemos que $\mathcal{X}_{\Sigma(F_2)}(F_2) = T_{\Sigma_L}$.

La variedad tórica T_{Σ_L} está dada por la unión de las variedades tóricas afines $T_{g(\sigma_0)}$ con $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ y cada $T_{g(\sigma_0)}$ es isomorfa a \mathbb{C}^3 pues σ_0 es generado por una base del reticulado $\mathrm{Sim}(2, \mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{Sim}(2, \mathbb{R})$ (y g induce isomorfismos $T_{\sigma_0} \rightarrow T_{g(\sigma_0)}$).

Ahora, podemos estudiar T_{Σ_L} usando coordenadas locales en cada $T_{g(\sigma_0)}$ y podemos definir dichas coordenadas usando la base dual asociada a los g -trasladados de los generadores de σ_0 (en orden), de manera que en tales coordenadas (en orden) la aplicación $g : T_{\sigma_0} \rightarrow T_{g(\sigma_0)}$ no es más que la identidad. Por otro lado, para cada g tenemos que $\{0\}$ es una cara del cono $g(\sigma_0)$, por lo que tenemos inmersiones

$$\iota_{g(\sigma_0)} : (\mathbb{C}^\times)^3 = T = T_{\{0\}} \hookrightarrow T_{g(\sigma_0)} \cong \mathbb{C}^3,$$

las cuales pueden calcularse explícitamente en términos de las correspondientes coordenadas locales.

Ejemplo 2.18.

$$\iota_0 : T = (\mathbb{C}^\times)^3 \mapsto T_{\sigma_0} \cong \mathbb{C}^3 : (t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1 t_2, t_2, t_2^{-1} t_3).$$

En general, las inmersiones $\iota_{g(\sigma)} : T \mapsto T_{g(\sigma)} \cong \mathbb{C}^3$ admiten expresiones concretas similares a la del ejemplo precedente y satisfacen el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H}_2 & \xrightarrow{e_{F_2}} & T & \xrightarrow{\iota_0} & T_{\sigma_0} \\ \downarrow \gamma(g) & & \downarrow g & & \downarrow g \\ \mathbb{H}_2 & \xrightarrow{e_{F_2}} & T & \xrightarrow{\iota_{g(\sigma_0)}} & T_{g(\sigma_0)} \end{array} \quad (2.13)$$

donde

$$\gamma(g) = \begin{pmatrix} (g^{-1})^t & O \\ O & g \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$$

y $g : T \rightarrow T$ es la acción de $P''(F_2) \cong \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$.

Ejemplo 2.19. *Se puede probar ([HKW93, Lemma 3.134]) que $\iota_{\sigma_k} : T \mapsto T_{\sigma_k}$ está dado por*

$$(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1 t_2^{-(2k+1)} t_3^{k^2+k}, t_2 t_3^{-k}, t_2^{-1} t_3^{k+1}).$$

En particular,

$$\iota_{\sigma_{-1}} : (t_1, t_2, t_3) \mapsto (T_1, T_2, T_3),$$

donde $T_1 = t_1 t_2, T_2 = t_2 t_3$ y $T_3 = t_2^{-1}$.

Ahora, al igual que en el caso de corrago 1, nos interesa determinar los puntos de $X_{\Sigma(F_2)}(F_2)$ que se agregan a \mathcal{A}_2 para obtener la compactificación \mathcal{A}_2^* y, posteriormente, estudiar la acción de $P''(F_2)$ en tales puntos.

Tenemos la siguiente descripción local de $X_{\Sigma(F_2)}(F_2)$:

Lema 2.20 (Lemma 3.137 en [HKW93]).

$$X_{\Sigma(F_2)}(F_2) \cap T_{g(\sigma_0)} = X(F_2) \sqcup \bigcup_{i=1}^3 \{(s_1, s_2, s_3) \in T_{g(\sigma_0)} : s_i = 0, |s_{i+1} s_{i+2}| < 1\},$$

donde s_1, s_2, s_3 son las coordenadas locales en $T_{g(\sigma_0)}$ y usamos la convención $s_j = s_{j+3}$.

Ahora, del diagrama (2.13) y el lema anterior tenemos que todos los puntos de $X_{\Sigma(F_2)}(F_2) - X(F_2)$ son equivalentes a uno contenido en $X_{\Sigma(F_2)}(F_2) \cap T_{\sigma_0}$.

Ejemplo 2.21. *Tenemos que el elemento*

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}),$$

satisface que

$$g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad g \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que g actúa en T_{σ_0} vía $(s_1, s_2, s_3) \mapsto (s_3, s_1, s_2)$.

Por otro lado, el elemento

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$$

satisface que

$$h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad h \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que h actúa en T_{σ_0} vía $(s_1, s_2, s_3) \mapsto (s_2, s_1, s_3)$. De esta forma, todo punto en $X_{\Sigma(F_2)}(F_2) - X(F_2)$ es equivalente a uno contenido en el conjunto $\{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \subseteq T_{\sigma_0}$.

Ahora bien, F_2 es adyacente a F_1 , por lo que tenemos un morfismo de pegado

$$\pi(F_2, F_1) : X_{\Sigma(F_1)}(F_1) \longrightarrow X_{\Sigma(F_2)}(F_2),$$

el cual envía epiyectivamente a la frontera de $X_{\Sigma(F_1)}(F_1)$ (que está contenida en $\{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}$) al conjunto

$$X_{\Sigma(F_2)}(F_2) \cap (\{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times) \subseteq T_{\sigma_0},$$

por lo que todos los puntos de $\{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \subseteq X_{\Sigma(F_2)}(F_2) \cap T_{\sigma_0}$ con sólo una coordenada nula ya fueron agregados al considerar *la* componente de corrancho 1. De esta forma, todos los puntos de $X_{\Sigma(F_2)}(F_2) - X(F_2)$ que no han sido agregados son equivalentes a uno contenido en el eje $\{0\} \times \mathbb{C} \times \{0\} \subseteq T_{\sigma_0}$ (o en cualquiera de los tres ejes) y se puede ver que dentro de este eje no hay identificaciones producto de la acción de $P''(F_2) \cong \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. De este modo, la subvariedad que queremos agregar es $\{0\} \times \mathbb{C} \times \{0\}$, módulo las identificaciones que puedan surgir al ver a este eje dentro de la variedad tórica T_{Σ_L} .

Así, para describir $\partial_{F_2} \mathcal{A}_2^*$ basta entender cómo se ve el eje $\{0\} \times \mathbb{C} \times \{0\} \subseteq T_{\sigma_0}$ dentro de T_{Σ_L} . Para ello notar que cada uno de estos ejes se corresponde con una cara 2-dimensional del cono σ_0 . Particularmente el eje $\{0\} \times \mathbb{C} \times \{0\}$ se corresponde con la cara 2-dimensional

$$\xi = \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

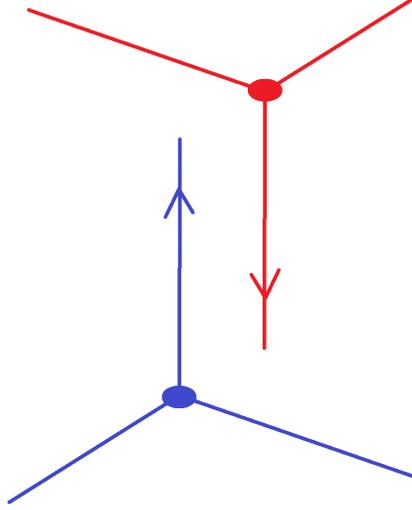


Figura 2.1: Identificación de los ejes

Ahora bien, notar que esta es también una cara 2-dimensional del cono σ_{-1} del Ejemplo 2.17, por lo que este eje está contenido en $T_{\sigma_0} \cap T_{\sigma_{-1}}$. En ese contexto, usando coordenadas locales, nuevamente podemos calcular la inmersión de este eje $\{0\} \times \mathbb{C} \times \{0\} \subseteq T_{\sigma_0}$ en $T_{\sigma_{-1}}$ y ahí ver que en la definición de la variedad tórica T_{Σ_L} tales ejes se pegan de la forma que ilustra la Figura 2.1, donde los ejes azules están en T_{σ_0} , los rojos en $T_{\sigma_{-1}}$, los puntos gruesos corresponden a los respectivos orígenes (los cuales se identifican) y las identificaciones son en las direcciones de las flechas o, más precisamente, un punto $(0, s, 0) \in T_{\sigma_0}$ se identifica con $(0, s^{-1}, 0) \in T_{\sigma_{-1}}$. De este modo obtenemos un \mathbb{P}^1 que en el resto de este trabajo denominaremos el \mathbb{P}^1 periférico.

Más concretamente, cada eje $\{s_i = s_j = 0\}$ se envía epiyectivamente a \mathbb{P}^1 vía la composición

$$\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \rightarrow \frac{\mathbb{P}^1}{[x_0 : x_1] \simeq [x_1 : x_0]} \cong \mathbb{P}^1$$

De este modo, el Teorema 2.12 se traduce más concretamente en el siguiente resultado:

Teorema 2.22. *Conjuntamente se tiene que*

$$\mathcal{A}_2^* = \mathcal{A}_2 \sqcup K^0(1) \sqcup \mathbb{P}^1,$$

donde la superficie $K^0(1)$ se obtiene como el cociente de $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ por la acción dada por la ecuación (2.8) y el \mathbb{P}^1 es un cociente del eje $\{0\} \times \mathbb{C} \times \{0\} \subseteq T_{\sigma_0}$.

Capítulo 3

La clausura de \mathcal{E}_m en \mathcal{A}_2^*

Sea \mathcal{E}_m el subespacio de \mathcal{A}_2 compuesto por las superficies abelianas que contienen una curva elíptica de exponente m . En este capítulo determinamos su clausura \mathcal{E}_m^* en \mathcal{A}_2^* probando que tal conjunto está dado por

$$\mathcal{E}_m^* = \mathcal{E}_m \sqcup K^0(1)[m] \sqcup \mathbb{P}^1,$$

donde $K^0(1)[m]$ es una cierta subvariedad de la superficie $K^0(1)$ (ver Definición 2.14), que precisaremos oportunamente. Para esto, de manera similar al capítulo anterior, trabajaremos por separado el caso de corrancho 1 y el de corrancho 2.

Sea

$$\mathbb{E}_m := p^{-1}(\mathcal{E}_m) = \bigcup_v \mathbb{H}_2(\eta_v), \quad (3.1)$$

donde $p : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathcal{A}_2$ es la proyección canónica, v recorre los vectores primitivos $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{Z}^5$ con $b^2 - 4(ac + de) = m^2$ y la segunda igualdad se desprende del Teorema 1.4.

Para determinar la clausura \mathcal{E}_m^* de \mathcal{E}_m en \mathcal{A}_2^* , recordemos que el Teorema 2.12 nos dice que

$$\mathcal{A}_2^* = \bigcup_{F \text{ c.r.f}} p_F^*(Y_{\Sigma(F)}(F)),$$

donde $Y_{\Sigma(F)}(F) = P''(F) \setminus X_{\Sigma(F)}(F)$ contiene densamente a $P(F) \setminus \mathbb{H}_2$ y cada p_F^* es un isomorfismo local. De este modo, para determinar \mathcal{E}_m^* debemos determinar la clausura de la imagen de \mathbb{E}_m (la cual está contenida en $P(F) \setminus \mathbb{H}_2$) en cada $Y_{\Sigma(F)}(F)$.

Sea entonces $x \in \overline{q_F e_F(\mathbb{E}_m)}$, donde

$$e_F : \mathbb{H}_2 \rightarrow X(F) \subseteq X_{\Sigma(F)}(F)$$

es el cociente parcial, $q_F : X_{\Sigma(F)}(F) \rightarrow Y_{\Sigma(F)}(F)$ es la proyección canónica y la clausura se toma en $Y_{\Sigma(F)}(F)$. Sea $z \in q_F^{-1}(\{x\}) \subseteq X_{\Sigma(F)}(F)$. Afirmamos que $z \in \overline{e_F(\mathbb{H}_2(\eta_v))}$ para algún $v \in \mathbb{Z}^5$.

Del hecho de que $P''(F)$ actúa en forma propiamente discontinua en $X_{\Sigma(F)}(F)$, existe un abierto U de $X_{\Sigma(F)}(F)$ tal que:

- i) $z \in U$
- ii) $h(U) \cap U \neq \emptyset$ si y sólo si $h \in \text{Stab}_{P''(F)}(z)$, el cual es un subgrupo finito de $P''(F)$.

Por otro lado, tenemos que $Y_{\Sigma(F)}(F)$ es un espacio analítico por lo que por [Dem12, Theorem II.4.7] se tiene que $q_F(U) \cap q_F e_F(\mathbb{E}_m)$ posee una cantidad finita de componentes irreducibles y, por lo tanto x está en la clausura de alguna de estas componentes. Ahora, por (1.4) cada una de dichas componentes es necesariamente una componente irreducible de $q_F(U) \cap q_F e_F(\mathbb{H}_2(\eta_v))$ para algún $v \in \mathbb{Z}^5$ y por ende tenemos que $x \in \overline{q_F e_F(\mathbb{H}_2(\eta_v))}$ para algún $v \in \mathbb{Z}^5$.

Ahora bien, la condición II) implica que tenemos una inmersión abierta

$$\text{Stab}(z) \setminus U \hookrightarrow Y_{\Sigma(F)}(F),$$

de modo que, como $x \in \overline{q_F e_F(\mathbb{H}_2(\eta_v))}$, se tiene que $[z] \in \text{Stab}(z) \setminus U$ está en la clausura de la imagen de $e_F(\mathbb{H}_2(\eta_v))$ en $\text{Stab}(z) \setminus U$. Así tenemos que

$$z \in \overline{\bigcup_{h \in \text{Stab}(z)} h(e_F(\mathbb{H}_2(\eta_v)))} = \bigcup_{h \in \text{Stab}(z)} \overline{h(e_F(\mathbb{H}_2(\eta_v)))},$$

donde la última igualdad se justifica por la finitud de $\text{Stab}(z)$. Ahora bien,

$$h(e_F(\mathbb{H}_2(\eta_v))) = e_F(\mathbb{H}_2(\eta_u)) \quad \text{para algún } u \in \mathbb{Z}^5,$$

por lo que concluimos que

$$z \in \overline{e_F(\mathbb{H}_2(\eta_u))} \quad \text{para algún } u \in \mathbb{Z}^5.$$

Así, en resumen, para determinar \mathcal{E}_m^* basta determinar la clausura de la imagen de \mathbb{E}_m en $X_{\Sigma(F)}(F)$ para cada c.r.f F y para ello basta determinar individualmente $e_F(\mathbb{H}_2(\eta_v))$ para cada F c.r.f y $v \in \mathbb{Z}^5$ fijos. Por otro lado, del hecho de que toda c.r.f es $\text{Sp}(4, \mathbb{Z})$ -equivalente a $F_0 \cong \mathbb{H}_2$, $F_1 \cong \mathbb{H}$ ó $F_2 = \{1\}$, basta determinar $\overline{e_F(\mathbb{H}_2(\eta_v))}$ para $F = F_i$, $i = 0, 1, 2$ y $v = (a, b, c, d, e) \in \mathbb{Z}^5$ primitivo con $b^2 - 4(ac + de) = m^2$ fijo. A esto nos dedicaremos en las siguientes secciones. Más aún, del hecho de que \mathcal{E}_m es cerrado en \mathcal{A}_2 , nos bastará con calcular $\mathcal{E}_m^* \cap \partial_{F_i} \mathcal{A}_2^*$ para $i = 1, 2$.

3.1. Corrago 1

Procedemos a calcular la clausura correspondiente a la componente de corrago 1.

Lema 3.1. *Sea $v = (a, b, c, d, e) \in \mathbb{Z}^5$ con $b^2 - 4(ac + de) = m^2$. Tenemos que*

$$\overline{e_{F_1}(\mathbb{H}_2(\eta_v))} \cap \partial X_{\Sigma(F_1)}(F_1) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a \neq 0 \text{ o } d \neq 0 \\ \{(0, \mp \frac{e\tau + e}{m}, \tau) : \tau \in \mathbb{H}\} & \text{si } v = (0, \pm m, c, 0, e) \end{cases}$$

Demostración. En primer lugar recordar que del Lema 1.7 se tiene que

$$\mathbb{H}_2(\eta_v) = \left\{ \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} : a\tau_1 + b\tau_2 + c\tau_3 + d(\tau_2^2 - \tau_1\tau_3) + e = 0 \right\}, \quad (3.2)$$

el cual es cerrado en \mathbb{H}_2 , de modo que, por (2.7), para probar el lema es suficiente estudiar qué puntos de la forma $(0, z, \tau)$ son límites de sucesiones en $e_{F_1}(\mathbb{H}_2(\eta_v))$.

Para que $(0, z, \tau)$ esté en $\overline{e_{F_1}(\mathbb{H}_2(\eta_v))}$ debe existir una sucesión $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con

$$T_n = \begin{pmatrix} \omega_n & z_n \\ z_n & \tau_n \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_2(\eta_v),$$

tal que $\tau_n \rightarrow \tau \in \mathbb{H}$, $z_n \rightarrow z \in \mathbb{C}$ y $\mathfrak{J}(\omega_n) \rightarrow \infty$ (todo esto, cuando $n \rightarrow \infty$).

Como para cada n tenemos que $T_n \in \mathbb{H}_2(\eta_v)$, de (3.2) vemos que

$$a\omega_n + bz_n + c\tau_n + d(z_n^2 - \omega_n\tau_n) + e = 0. \quad (3.3)$$

Sea $\tilde{\omega}_n := (a - d\tau_n)\omega_n$. De acuerdo a (3.3) se tiene que

$$\tilde{\omega}_n + (bz_n + c\tau_n + dz_n^2 + e) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y, por tanto, como $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergen, vemos que necesariamente $\tilde{\omega}_n$ debe converger. Afirmamos que esto no es posible si $d \neq 0$. En efecto: tenemos que

$$\Re(\tilde{\omega}_n) = (a - d\Re(\tau_n))\Re(\omega_n) + d\mathfrak{J}(\tau_n)\mathfrak{J}(\omega_n)$$

y

$$\mathfrak{J}(\tilde{\omega}_n) = (a - d\Re(\tau_n))\mathfrak{J}(\omega_n) - d\mathfrak{J}(\tau_n)\Re(\omega_n).$$

De lo cual tenemos que

$$|\tilde{\omega}_n|^2 = \left[(a - d\Re(\tau_n))^2 + d^2\mathfrak{J}(\tau_n)^2 \right] |\omega_n|^2 \geq d^2\mathfrak{J}(\tau_n)^2 |\omega_n|^2$$

y como $\mathfrak{J}(\tau_n) \rightarrow \mathfrak{J}(\tau) > 0$ se tiene que $|\tilde{\omega}_n|^2 \rightarrow \infty$ si $d \neq 0$. De esta forma tenemos que necesariamente $d = 0$. Ahora, si $d = 0$ entonces debe tenerse que $a = 0$. En efecto: si $d = 0$ entonces la ecuación (3.3) resulta en

$$a\omega_n + bz_n + c\tau_n + e = 0,$$

lo cual no es posible si $\mathfrak{J}(\omega_n) \rightarrow \infty$ y $(z_n, \tau_n) \rightarrow (z, \tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}$. Por lo tanto, tenemos que para que una sucesión $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ llegue a la frontera de corrancho 1 necesariamente debe tenerse que el vector v sea de la forma $(0, b, c, 0, e)$ y, por tanto, $v = (0, \pm m, c, 0, e)$ con $\text{m.c.d}(m, c, e) = 1$. En tal caso, de (3.3) se desprende que

$$\pm mz + c\tau + e = 0$$

y, por tanto,

$$z = \mp \frac{c\tau + e}{m}.$$

Por otro lado, si $\tau \in \mathbb{H}$ y $z = \frac{c\tau + e}{m}$ con $\text{m.c.d}(c, e, m) = 1$ entonces es fácil ver que $(0, z, \tau)$ es un punto límite de \mathcal{E}_m en $X_\Sigma(F_1)$.

□

Con este lema y las consideraciones hechas anteriormente, podremos describir fácilmente al conjunto $\partial_{F_1} \mathcal{E}_m^* = \mathcal{E}_m^* \cap \partial_{F_1} \mathcal{A}_2^*$.

Definición 3.2. Sea $K^0(1)[m]$ la subvariedad de $K^0(1)$ cuyas fibras sobre la curva elíptica $E \in \mathcal{A}_1 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ son los puntos de orden m en E , módulo la involución $z \mapsto -z$.

Proposición 3.3. *Se tiene que $\partial_{F_1} \mathcal{E}_m^* = K^0(1)[m]$*

Demostración. El fibrado $K^0(1) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ está dado por la función $[(z, \tau)] \rightarrow [\tau]$. Ahora bien, recordemos que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} = \mathcal{A}_1$ es el espacio de moduli de curvas elípticas complejas, donde $[\tau]$ se corresponde con la clase de isomorfía de la curva elíptica $E_\tau = \mathbb{C} / \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$ y un cambio en el representante de τ se traduce en un isomorfismo de curvas elípticas dado por:

$$\frac{\mathbb{C}}{\langle 1, \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \rangle_{\mathbb{Z}}} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}}{\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}} : z + \left\langle 1, \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \rightarrow (c\tau+d)z + \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Desde esta perspectiva, un punto $[(z, \tau)]$ en la fibra de τ se corresponde con el elemento $z + \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}} \in E_\tau = \mathbb{C} / \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$ con la salvedad de que el elemento

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in P''(F_1)$$

permite identificar los elementos $(0, z, \tau)$ y $(0, -z, \tau)$. De esta forma, la clase en $P''(F_1) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ de un elemento $\left(0, \frac{c\tau+e}{m}, \tau\right)$ en la frontera se corresponde con el elemento

$$\frac{c\tau+e}{m} + \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}} \in \frac{E_\tau[m]}{z \rightarrow -z}.$$

Más aún, la condición de que $\mathrm{m.c.d}(c, e, m) = 1$ implica que los elementos de m -torsión que estamos considerando en verdad tienen orden m . ■

Comentario 3.4. *De la demostración de la Proposición anterior tenemos que la frontera de \mathcal{E}_m^* en la componente de corrago 1 se compone de las curvas*

$$X_{(c,e)} := e_{F_1} \left(\left\{ \left(0, -\frac{c\tau+e}{m}, \tau \right) : \tau \in \mathbb{H} \right\} \right),$$

donde $\mathrm{m.c.d}(c, e, m) = 1$ y, de hecho, para $m \neq 2$ hay tantas de tales curvas como elementos de orden m en $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$. En el Capítulo 5 veremos que cada uno de los puntos de estas curvas pueden ser interpretados como superficies abelianas degeneradas que contienen una curva elíptica degenerada.

Ejemplo 3.5. Si fijamos $\tau \in \mathbb{H}$ entonces, de acuerdo al Corolario 1.8 y al Ejemplo 1.11, el locus $\mathcal{E}_m(\tau)$ compuesto por las superficies que contienen a la curva $E_{\tau/m}$ como una subvariedad de exponente m es la imagen en \mathcal{A}_2 del conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mu & -\frac{\tau}{m} \\ -\frac{\tau}{m} & \tau \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{H}, \mathfrak{J}(\mu) > \frac{1}{m^2} \mathfrak{J}(\tau) \right\}.$$

Cuando $\mathfrak{J}(\mu) \rightarrow \infty$ el límite es el punto $(0, -\frac{\tau}{m}, \tau) \in X_{(1,0)}$. De este modo, tenemos que

Corolario 3.6. El locus de \mathcal{A}_2 compuesto por las superficies que contienen a una curva elíptica fija con exponente m tiene un punto límite en la frontera de \mathcal{A}_2^* y dicho punto está en $X_{(1,0)}$.

3.2. Corrago 2

En este caso tenemos la aplicación holomorfa

$$\psi : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{T}_{\sigma_0} \cong \mathbb{C}^3 : \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(e^{2\pi i(\tau_1 - \tau_2)}, e^{2\pi i\tau_2}, e^{2\pi i(\tau_3 - \tau_2)} \right),$$

que es igual a la composición $\iota_{\sigma_0} \circ e_{F_2}$ (donde ι_{σ_0} y e_{F_2} fueron definidas en el capítulo anterior).

A lo largo de esta sección supondremos que $m \geq 2$ pues el caso $m = 1$ se estudia en [HKW93, Part I, Chap. 4], donde se prueba (Teorema 5.49) que \mathcal{E}_1^* (que en tal referencia se denota por H_1^*) intersecta a la componente de corrago 2 en exactamente un punto.

Lema 3.7. Sea $m \geq 2$. Se tiene que los tres ejes de $\mathcal{T}_{\sigma_0} \cong \mathbb{C}^3$ están contenidos en la clausura de $\psi(\mathbb{E}_m)$.

Demostración. Sean s_1, s_2, s_3 las coordenadas en \mathcal{T}_{σ_0} . Probaremos primero que el eje $s_1 = s_3 = 0$ está contenido en $\psi(\bigcup \mathbb{H}_2(\eta_v))$. Sea $z \in \mathbb{C}$. Para $\tau \in \mathbb{H}$ consideremos la matriz

$$T_{z,\tau} = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \frac{1}{m-1}(\tau - (m-2)z) \end{pmatrix}.$$

De la caracterización de la semi-positividad dada por el criterio de Sylvester tenemos que si $\mathfrak{J}(\tau) \gg 0$ entonces $T_{z,\tau} \in \mathbb{H}_2$. Más aún, para todo τ se tiene que $T_{\tau} \in \mathbb{H}_2(\eta_v)$, donde $v = (1, -(m-2), -(m-1), 0, 0) \in \mathbb{Z}^5$. De esta forma, tomando $\mathfrak{J}(\tau) \rightarrow \infty$ vemos que el punto $(0, e^{2\pi iz}, 0)$ está en la frontera de $\psi(\mathbb{E}_m)$. De esta forma, como $z \in \mathbb{C}$ es arbitrario tenemos que $\{0\} \times \mathbb{C} \times \{0\}$ está contenido en dicha frontera. Ahora, tomando una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $\mathfrak{J}(z_n) \rightarrow \infty$ vemos que $\{0\} \times \mathbb{C} \times \{0\} \subseteq \overline{\psi(\mathbb{E}_m)}$.

Ahora bien, del Ejemplo 2.21 tenemos que el elemento

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$$

actúa en T_{σ_0} permutando coordenadas y por tanto, en virtud del diagrama (2.13) (que nos dice que g actúa en \mathbb{E}_m vía $\gamma(g)$) concluimos que los tres ejes yacen en la frontera de $\psi(\mathbb{E}_m)$.

□

De esta forma, dado que el \mathbb{P}^1 “periférico” en la frontera de \mathcal{A}_2^* es un cociente de los ejes de $T_{\sigma_0} \subseteq T_{\Sigma_L}$ (ver Teorema 2.22), vemos que

Proposición 3.8. *Se tiene que*

$$\partial_{F_2} \mathcal{E}_m^* \cong \mathbb{P}^1$$

■

Así, acoplado las proposiciones 3.3 y 3.8 obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.9. *Sea \mathcal{E}_m la subvariedad de \mathcal{A}_2 compuesta por las clases de las superficies abelianas que contienen una curva elíptica de exponente m y \mathcal{E}_m^* la clausura de \mathcal{E}_m en \mathcal{A}_2^* .*

A nivel conjuntista se tiene que

$$\mathcal{E}_m^* = \mathcal{E}_m^* \sqcup K^0(1)[m] \sqcup \mathbb{P}^1,$$

donde $K^0(1)[m]$ es la variedad definida en 3.2.

■

Parte II

Degeneraciones de superficies abelianas no simples

Capítulo 4

La construcción de Mumford

En el contexto algebraico, las *degeneraciones de k -variedades abelianas* se entienden mediante morfismos de k -esquemas $G \rightarrow S$, donde S es un esquema irreducible y G es un k -esquema en grupos cuya fibra genérica sobre S es una variedad abeliana ([FC90, Foreword]). Debido al Teorema de reducción estable ([Mon72, Théoreme 6.1]), un tipo distinguido e importante de tales morfismos es aquel en que G es una familia semi-abeliana sobre S ¹. A partir de un tal S -esquema G y un haz invertible \mathcal{L} en G con cierta condición de positividad se puede obtener un *dato de degeneración*, compuesto, entre otras cosas, por una S -extensión \tilde{G} de un S -esquema abeliano A por un S -toro T . En [Mum72] Mumford da un método (que en adelante llamaremos “la construcción de Mumford”) que permite ir en la dirección inversa, esto es, permite construir, a partir de cierto *dato de degeneración*, un S -esquema semi-abeliano G y un haz invertible \mathcal{L} sobre G tales que el par (G, \mathcal{L}) satisfaga ciertas propiedades. Más precisamente, partiendo con un anillo con buenas propiedades (satisfechas por ejemplo por un anillo de valuación discreta completo) y un ideal radical I de A , Mumford considera los esquemas $S = \text{Spec } A$, $S_0 = \text{Spec}(A/I)$ y nos da un método para construir un S -esquema en grupos semi-abeliano G cuya fibra genérica sea abeliana y $G \times_S S_0$ sea un toro escindido de rango r (es decir, isomorfo como S_0 esquema a un producto de r copias de \mathbb{G}_m).

Ahora, esta construcción se relaciona con la compactificación toroidal discutida en capítulos anteriores a través del “ejemplo final” en [Mum72], donde considerando el anillo $A = \mathbb{C}[[T_1, T_2, T_3]]$ de series formales de potencias e I como el ideal maximal de tal anillo, Mumford plantea una técnica para estudiar degeneraciones de Superficies Abelianas (en el sentido de la Definición 0.2). En ese contexto, no necesitaremos la construcción de Mumford en su totalidad (por ejemplo, no necesitaremos el haz \mathcal{L}) pero sí dos objetos que son parte fundamental de ésta: un cierto esquema \tilde{P} y un cierto grupo \mathbb{Y} actuando en \tilde{P} . De esta forma, en este capítulo nos dedicaremos a entender estos objetos, dando sus definiciones explícitas y vinculándolas a la construcción de \mathcal{A}_2^* mostrada en la Parte I de esta tesis.

¹esto es, cuando G es un *esquema en grupos* conmutativo, suave y separado sobre S en el que cada fibra G_s es la extensión de una variedad abeliana A_s por un toro T_s

4.1. El esquema \tilde{P}

Para construir el esquema \tilde{P} los pasos a seguir son:

1. Partimos con un toro escindido \tilde{G} de rango r (en nuestro caso $r = 2$) sobre S y consideramos su conjunto de puntos K -racionales $\tilde{G}(K)$, donde K es el cuerpo de fracciones de A .
2. Escogemos en forma apropiada un subgrupo \mathbb{Y} de $\tilde{G}(K) \cong (K^\times)^r$ de manera que $\mathbb{Y} \cong \mathbb{Z}^r$. Este grupo recibe el nombre *grupo de períodos*.
3. Construimos una especie de compactificación parcial $\tilde{P} \supset \tilde{G}$ sobre S de manera que la acción de \mathbb{Y} en \tilde{G} se extienda a \tilde{P} e \mathbb{Y} actúe de forma propiamente discontinua en $\tilde{P} \times_S S_0$.
4. En un contexto general, se toma la completación I -ádica $\tilde{\mathcal{P}}$ de \tilde{P} , se construye el cociente $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{P}}/\mathbb{Y}$, se usa la teoría de esquemas formales (ver [Har77, Cap.II.9]) y, particularmente el Teorema de existencia formal de Grothendieck ([Gro61, Théoreme 5.14]) para algebreizar \mathcal{P} y así obtener un S -esquema proyectivo P . Sin embargo, en nuestro contexto, en el que estamos trabajando sobre \mathbb{C} , podemos simplemente considerar P como el conjunto de órbitas de la acción de \mathbb{Y} en \tilde{P} ([HKW93, Part II, Chap. 3]).

Comentario 4.1. *El esquema semi-abeliano G buscado por la construcción se obtiene tomando un abierto apropiado de P pero, como mencionamos anteriormente, en este trabajo no requeriremos de tal esquema.*

En lo que sigue, procederemos a dar un bosquejo de la construcción del esquema \tilde{P} en el caso particular que nos interesa, siguiendo [HKW93], que a su vez sigue [Mum72]. En nuestro caso, a diferencia de Mumford y siguiendo el enfoque de [HKW93], nuestro trabajo se enmarca en un contexto global, considerando el anillo $A = \mathbb{C}[T_1, T_2, T_3]$ (en vez del anillo de series de potencias) y el ideal $I = (T_1, T_2, T_3)$, tomando las precauciones que aquello implica. De esta forma,

$$S = \text{Spec } A \cong \mathbb{C}^3 \quad \text{y} \quad \tilde{G} = (\mathbb{C}^\times)^2 \times S.$$

Por razones que quedarán claras más adelante hacemos la siguiente identificación:

$$\tilde{G} = \text{Spec} \left(\frac{A[U, U^{-1}, V, V^{-1}, W, W^{-1}]}{\langle UVW - 1 \rangle} \right).$$

Tenemos además la siguiente identificación:

$$\tilde{G}(K) = \{(A, B, C) \in (K^\times)^3 : ABC = 1\}.$$

Consideramos el subgrupo \mathbb{Y} de $\tilde{G}(K)$ generado por r, s, t , donde

$$r = (T_2 T_3, T_3^{-1}, T_2^{-1}), s = (T_3^{-1}, T_1 T_3, T_1^{-1}) \quad \text{y} \quad t = (T_2^{-1}, T_1^{-1}, T_1 T_2). \quad (4.1)$$

Evidentemente se tiene que $rst = (1, 1, 1)$ y por tanto \mathbb{Y} tiene rango 2, es decir

$$\mathbb{Y} \cong \frac{\mathbb{Z}^3}{\mathbb{Z}(1, 1, 1)}, \quad (4.2)$$

donde r, s y t se identifican con $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, respectivamente.

Por otro lado, consideremos el grupo \mathbb{X} de caracteres de \tilde{G} . Podemos pensar \mathbb{X} como el grupo abeliano multiplicativo generado por U, V y W sujeto a la relación $UVW = 1$. Viendo a \mathbb{X} como un grupo aditivo tenemos también que

$$\mathbb{X} \cong \frac{\mathbb{Z}^3}{\mathbb{Z}(1, 1, 1)}. \quad (4.3)$$

y además, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}^3$ denotaremos por $X^\alpha : \tilde{G} \rightarrow K$ al morfismo correspondiente según (4.3).

A lo largo de este capítulo (y el siguiente) haremos uso recurrente de las identificaciones (4.2) y (4.3). En particular, con el fin de homogeneizar notaciones, en lo que sigue para $x \in \mathbb{X}$ escribiremos $x = X^x$.

\tilde{P} será el esquema $\text{Proj } R_{\Phi, \Sigma}$ de cierto anillo graduado $R_{\Phi, \Sigma}$. Para definir tal anillo necesitamos un isomorfismo de grupos $\Phi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ con ciertas propiedades y un conjunto finito distinguido $\Sigma \subseteq \mathbb{X}$.

Definición 4.2. Una *polarización* para el grupo de períodos \mathbb{Y} es un isomorfismo de grupos $\Phi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ tal que

- $X^{\Phi(y)}(z) = X^{\Phi(z)}(y) \quad \forall z, y \in \mathbb{Y}$
- $X^{\Phi(y)}(y) \in I \quad \forall y \in \mathbb{Y}$

Tenemos que el morfismo $\Phi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ dado por

$$\Phi(r) = U, \quad \Phi(s) = V \quad \text{y} \quad \Phi(t) = W$$

es una polarización en el sentido de la definición anterior. La razón de este hecho es que un cálculo directo (que posteriormente será de utilidad) muestra que, si usamos la identificación (4.2) entonces para $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{Z}^3$ se tiene que

$$X^{\Phi(y)}(z) = T_1^{(z_3 - z_2)(y_3 - y_2)} T_2^{(z_1 - z_3)(y_1 - y_3)} T_3^{(z_1 - z_2)(y_1 - y_2)} \in K^\times. \quad (4.4)$$

Utilizando las distintas identificaciones que hemos introducido para \mathbb{X} (y los abusos de notación respectivos), consideraremos el conjunto

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{1, U, U^{-1}, V, V^{-1}, W, W^{-1}\} \\ &= \{X^0, X^U, X^{-U}, X^V, X^{-V}, X^W, X^{-W}\} \\ &= \{(0, 0, 0), (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)\}. \end{aligned}$$

Definamos entonces $R_{\Phi, \Sigma}$. Sea Θ una indeterminada y consideremos el anillo graduado

$$\mathbf{R} := \bigoplus_{k=0}^{\infty} K[\mathbb{X}]\Theta^k = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \left(K[X^\alpha]_{\alpha \in \mathbb{X}} / \left(\begin{array}{l} X^\alpha X^\beta = X^{\alpha+\beta} \\ X^0 = 1 \end{array} \right) \right) \Theta^k,$$

donde la graduación viene dada por Θ y $|\Theta| = 1$.

Definimos $R_{\Phi, \Sigma}$ como la A -álgebra graduada

$$R_{\Phi, \Sigma} = A[X^{\Phi(y)+\alpha}(y)X^{2\Phi(y)+\alpha}\Theta]_{\alpha \in \Sigma, y \in \mathbb{Y}} \subseteq \mathbf{R}.$$

Con esto definimos

$$\tilde{P} = \text{Proj } R_{\Phi, \Sigma}.$$

Éste es un esquema suave y localmente de tipo finito sobre A ([Mum72, Prop. 2.4]) cubierto por los abiertos afines

$$\mathcal{U}_{\alpha, y} := \text{Spec} \left(A \left[\frac{X^{\Phi(z)+\beta}(z)}{X^{\Phi(y)+\alpha}(y)} X^{2\Phi(z-y)+\beta-\alpha} \right]_{\beta \in \Sigma, z \in \mathbb{Y}} \right).$$

Como ya dijimos, \tilde{P} será el ingrediente esencial de nuestro trabajo.

Tenemos una acción de \mathbb{Y} en \mathbf{R} vía los operadores $S_y^* : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dados por

$$S_y^* : \begin{cases} c \mapsto c & \text{para } c \in K \\ X^\alpha \mapsto X^\alpha(y) \cdot X^\alpha & \text{para } \alpha \in \mathbb{X} \\ \Theta \mapsto X^{\Phi(y)}(y) \cdot X^{2\Phi(y)} \cdot \Theta \end{cases}$$

Ejemplo 4.3. Tenemos que $U = X^{\phi(r)} = X^{(1,0,0)}$, de donde vemos, usando (4.4) y la definición de S que

$$S_r^*(U) = T_2 T_3 U \quad y \quad S_s^*(U) = T_3^{-1} U.$$

De manera análoga, para $V = X^{\Phi(s)}$ tenemos que

$$S_r^*(V) = T_3^{-1} V \quad y \quad S_s^*(V) = T_1 T_3 V.$$

Observación. Notar que

$$S_y^*(S_z^*(X^\alpha \Theta)) = S_{y+z}^*(X^\alpha \Theta)$$

y por tanto para todo $\alpha \in \Sigma$ y para todo $y_0 \in \mathbb{Y}$ tenemos que $\text{Spec}(S_y^*) : \mathcal{U}_{\alpha, y_0+y} \rightarrow \mathcal{U}_{\alpha, y_0}$ es un isomorfismo. Denotaremos por S_y a las inversas de estos isomorfismos cuando el dominio esté claro. Esto es

$$S_y = \text{Spec}(S_{-y}^*) : \mathcal{U}_{\alpha, y_0} \rightarrow \mathcal{U}_{\alpha, y_0+y}.$$

4.2. \widetilde{P} y \mathcal{A}_2

Veamos entonces cómo esta teoría se relaciona con la construcción de \mathcal{A}_2^* que hemos discutido anteriormente. Para establecer la conexión notemos que una superficie abeliana $A_\tau = \mathbb{C}^2 / (\mathbb{Z}^2 \oplus \tau\mathbb{Z}^2)$ puede describirse de manera alternativa como un cociente de $(\mathbb{C}^\times)^2$ por una acción de \mathbb{Z}^2 , que se define de la siguiente forma:

- Consideramos la aplicación $\varepsilon : \mathbb{C}^2 \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^2 : (z_1, z_2) \mapsto (w_1, w_2) = (e^{2\pi iz_1}, e^{2\pi iz_2})$. Notar que esta aplicación puede pensarse como el cociente de \mathbb{C}^2 por \mathbb{Z}^2 , de modo que lo que resta para obtener la superficie abeliana es cocientar por el sumando $\tau\mathbb{Z}^2$.
- Para $\tau \in \mathbb{H}_2$ consideramos la acción de \mathbb{Z}^2 en $(\mathbb{C}^\times)^2$ dada por

$$(m, n) : (w_1, w_2) \mapsto (t_1^m t_2^n w_1, t_2^m t_3^n w_2), \quad (4.5)$$

donde $t_k = e^{2\pi i\tau_k}$.

Ahora bien, notemos que si $g \in P'(F_2)$ y $\tau \in \mathbb{H}_2$ entonces el reticulado correspondiente a τ coincide con el correspondiente a $g(\tau)$ pues en tal caso τ y $g(\tau)$ difieren por una matriz entera (ver (2.11)), de modo que tenemos una “familia universal”

$$\begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \downarrow \\ X(F_2) = P'(F_2) \setminus \mathbb{H}_2 \subseteq (\mathbb{C}^\times)^3 \end{array} \quad (4.6)$$

donde la fibra sobre un punto $[\tau] \in P'(F_2) \setminus \mathbb{H}_2$ es la superficie A_τ . Más precisamente, esta familia se obtiene de la siguiente forma:

- consideramos la acción de \mathbb{Z}^2 en $(\mathbb{C}^\times)^2 \times \mathbb{H}_2$ dada por

$$(m, n) : ((w_1, w_2), \tau) \longrightarrow ((t_1^m t_2^n w_1, t_2^m t_3^n w_2), \tau),$$

donde $t_k = e^{2\pi i\tau_k}$ como en (4.5)

- tenemos una aplicación

$$\mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{H}_2,$$

donde \mathcal{B} es el cociente de $(\mathbb{C}^\times)^2 \times \mathbb{H}_2$ por la acción de \mathbb{Z}^2 . Esta familia satisface que la fibra sobre $\tau \in \mathbb{H}_2$ es la superficie A_τ .

- como para $g \in P'(F_2)$ los reticulados τ y $g\tau$ difieren por una matriz entera, tenemos que $A_\tau \cong A_{g(\tau)}$. Por lo tanto $P'(F_2)$ actúa en el cociente $\mathbb{Z}^2 \setminus ((\mathbb{C}^\times)^2 \times \mathbb{H}_2)$ y podemos obtener una aplicación

$$\mathcal{A} \longrightarrow P'(F_2) \setminus \mathbb{H}_2,$$

donde \mathcal{A} es el cociente de $\mathbb{Z}^2 \setminus ((\mathbb{C}^\times)^2 \times \mathbb{H}_2)$ por la acción de $P'(F_2)$. Esta es la familia que queremos.

Dicho de otra forma, tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathbb{C}^\times)^2 \times \mathbb{H}_2 & \xrightarrow{/\mathbb{Z}^2} & \mathcal{B} & \xrightarrow{/P'(F_2)} & \mathcal{A} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{H}_2 & \xlongequal{\quad\quad\quad} & \mathbb{H}_2 & \longrightarrow & X(F_2)
 \end{array} \tag{4.7}$$

Por otro lado, tenemos que la fibra \tilde{P}_T del esquema \tilde{P} sobre $T \in (\mathbb{C}^\times)^3 \subseteq \mathbb{C}^3 = S$ es

$$\text{Spec} \left(\frac{\mathbb{C}[U, U^{-1}, V, V^{-1}, W, W^{-1}]}{\langle UVW - 1 \rangle} \right) \cong (\mathbb{C}^\times)^2.$$

Afirmamos que tenemos una identificación

$$\mathcal{A}_\tau \cong \tilde{P}_T / \mathbb{Y}, \tag{4.8}$$

donde $T = (\iota_{-1} \circ e_{F_2})(\tau)$ (ver Ejemplo 2.19).

En efecto: sea T_{-1} el toro $T_{\sigma_{-1}}$ (ver Ejemplo 2.17) y consideremos coordenadas T_i en T_{-1} como en el Ejemplo 2.19. En ese contexto tenemos que la acción de $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ en $(\mathbb{C}^\times)^2$ puede reescribirse como

$$(m, n) : (w_1, w_2) \mapsto (T_1^m T_3^{m-n} w_1, T_2^n T_3^{n-m} w_2).$$

En particular,

$$(1, 0) : (w_1, w_2) \mapsto (T_1 T_3 w_1, T_3^{-1} w_2)$$

y

$$(0, 1) : (w_1, w_2) \mapsto (T_3^{-1} w_1, T_2 T_3 w_2).$$

Por lo tanto, estableciendo $w_1 = V$ y $w_2 = U$ vemos del Ejemplo 4.3 que, sobre un punto $T \in (\mathbb{C}^\times)^3$, $(1, 0)$ actúa como s^{-1} y $(0, 1)$ actúa como r^{-1} (los cuales son generadores de \mathbb{Y}).

Ahora bien, nuestro objetivo es estudiar degeneraciones de superficies abelianas. Para ello lo que queremos es hacer es extender la familia (4.6) a una familia propia y plana (en el sentido analítico) definida sobre un abierto que contenga densamente a $X(F_2)$. Más precisamente, lo que pretendemos es extender (4.6) a una familia propia y plana $\bar{\mathcal{A}}$ definida sobre

$$U_{-1} := X_{\Sigma_L}(F_2) \cap T_{\sigma_{-1}}.$$

De (4.8), para lograr extender la familia basta considerar la familia

$$\bar{\mathcal{A}} = \tilde{P}_{-1} / \mathbb{Y}, \tag{4.9}$$

donde \tilde{P}_{-1} denota a la restricción de \tilde{P} al abierto (analítico) U_{-1} y, de acuerdo a [HKW93, Prop. 3.10] esta familia es propia y plana sobre U_{-1} .

Comentario 4.4. *Tenemos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{H}_2 & \xrightarrow{e_{F_2}} & (\mathbb{C}^\times)^3 & \xrightarrow{\iota_{-1}} & T_{\sigma_{-1}} \\
 \downarrow e_{F_1} & & & \nearrow \pi(F_2, F_1) & \\
 \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C} \times \mathbb{H} & & & & \\
 \downarrow & & & & \\
 \tilde{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H} & & & &
 \end{array}$$

donde $\pi(F_2, F_1)$ es la función de pegado (ver (2.1)) y $\{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ se envía al eje $T_1 = 0$. Así, al estudiar la familia sobre U_{-1} no sólo estudiamos fibras sobre puntos de corranjo 2, si no que también sobre puntos de corranjo 1.

Comentario 4.5. *La acción definida en (2.12) es transitiva en los conos 3-dimensionales de la descomposición de Legendre, de modo que todo punto en $X_{\Sigma(F_2)}(F_2)$ es equivalente a uno en T_{-1} . Usamos el toro T_{-1} simplemente porque en su uso aparece natural y directamente el ejemplo final en [Mum72]. En [HKW93, Part II, Chap.4] se hace un análisis global, viendo que las fibras \tilde{P}_T son independientes del abierto U_σ que se utilice y que todas las posibles fibras son isomorfas a las descritas sobre la variedad tórica afín $T_{-1} \cong \mathbb{C}^3$.*

Ahora, con miras al objetivo del capítulo siguiente, el cual consiste en degenerar sub-variedades abelianas, necesitaremos hacer cálculos explícitos y por tanto requeriremos describir en detalle cómo es la fibra \tilde{P}_T del esquema \tilde{P} sobre un punto $T \in U_{-1}$. A esto nos abocaremos en la siguiente sección.

4.3. Descripción de \tilde{P}_T

En el Capítulo 2 vimos que todas las variedades tóricas afines T_σ contenidas en la variedad tórica $T_{\Sigma(F_2)}$ son isomorfas a \mathbb{C}^3 y en ese contexto vimos que todo punto de T_σ es equivalente (bajo la acción del grupo $P''(F_2) \cong \text{GL}(2, \mathbb{Z})$) a los seis puntos que se obtienen permutando sus coordenadas. En este capítulo estamos considerando el cono $\sigma = \sigma_{-1}$, en el cual (ver Ejemplo 2.19) usamos coordenadas T_1, T_2, T_3 y se puede probar [HKW93, Part II, Prop. 3.20 y 3.21] que las fibras \tilde{P}_T no dependen del representante que se escoja. De esta forma, nos podemos remitir a estudiar las fibras sobre tres tipos de puntos: los puntos con $T_1 T_2 T_3 \neq 0$, los puntos con $T_1 = 0$ y $T_2 T_3 \neq 0$, los puntos con $T_1 = T_2 = 0$ y $T_3 \neq 0$ y el punto $T_1 = T_2 = T_3 = 0$.

En vista de la sección precedente, para el caso en que $T_1 T_2 T_3 \neq 0$ se tiene que las fibras son superficies abelianas, por lo que resta describir las fibras sobre los otros tres tipos de puntos. En las siguientes proposiciones describimos tales fibras, dando un bosquejo de demostración (replicando el desarrollo de la Proposición 2.15 de [HKW93, Part II, p.210]) con el fin de introducir los anillos y técnicas de cálculo utilizadas en el capítulo siguiente.

Proposición 4.6. Si $T = (0, T_2, T_3) \in \mathbb{C}^3$ con $T_2 T_3 \neq 0$ entonces \tilde{P}_T es el producto de \mathbb{C}^\times con una cadena de \mathbb{P}^1 's. Esto es, \tilde{P}_T tiene una cantidad numerable de componentes irreducibles C_k , $k \in \mathbb{Z}$, cada una de las cuales es isomorfa a $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{P}^1$ y $C_k \cap C_l = \emptyset$ salvo que $|k - l| = 1$, en cuyo caso $C_k \cap C_l \cong \mathbb{C}^\times$. Más aún r actúa en cada $C_k \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{P}^1$ vía $r : (u, [x_0 : x_1]) \mapsto (T_2 T_3 u, [x_0 : T_3^{-1} x_1])$, mientras que s envía a C_k en C_{k+1} .

Demostración. Por construcción de \tilde{P} se tiene que

$$\tilde{P} = \bigcup_{y \in \mathbb{Y}} S_y(\mathcal{U}_0),$$

donde

$$\mathcal{U}_0 = \bigcup_{\alpha \in \Sigma} \mathcal{U}_{\alpha,0}.$$

De esta forma, dado que $S_y : \mathcal{U}_{\alpha,0} \mapsto \mathcal{U}_{\alpha,y}$ es un isomorfismo para todo y , para describir \tilde{P}_T basta describir las fibras de los abiertos $\mathcal{U}_{\alpha,0}$ y entender las posibles intersecciones $S_{y_1}((\mathcal{U}_0)_T) \cap S_{y_2}((\mathcal{U}_0)_T)$.

Denotaremos por $B_{\alpha,y}$ y $(B_{\alpha,y})_T$ a los anillos de coordenadas de $\mathcal{U}_{\alpha,y}$ y $(\mathcal{U}_{\alpha,y})_T$, respectivamente. De este modo tenemos que $\mathcal{U}_{\alpha,y} = \text{Spec } B_{\alpha,y}$ y $(\mathcal{U}_{\alpha,y})_T = \text{Spec } ((B_{\alpha,y})_T)$. De acuerdo al lema 2.11 de [HKW93, Part II] tenemos que

$$\begin{aligned} B_{0,0} &= A[U, U^{-1}, V, V^{-1}], \\ B_{U,0} &= A[V, T_3 V^{-1}, W, T_2 W^{-1}] \\ B_{U^{-1},0} &= A[V^{-1}, T_3 V, W^{-1}, T_2 W] \\ B_{V,0} &= A[W, T_1 W^{-1}, U, T_3 U^{-1}] \\ B_{V^{-1},0} &= A[W^{-1}, T_1 W, U^{-1}, T_3 U] \\ B_{W,0} &= A[U, T_2 U^{-1}, V, T_1 V^{-1}] \\ B_{W^{-1},0} &= A[U^{-1}, T_2 U, V^{-1}, T_1 V]. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ahora, sobre un punto $T = (0, T_2, T_3)$ con $T_2 T_3 \neq 0$ se tiene que T_2 y T_3 pasan a ser unidades y los $B_{\alpha,0}$ -múltiplos de T_1 se anulan. Así vemos que

$$(B_{U,0})_T = (B_{U^{-1},0})_T = (B_{0,0})_T \cong \mathbb{C}[U, U^{-1}, V, V^{-1}],$$

$$(B_{W^{-1},0})_T = (B_{V,0})_T \cong \mathbb{C}[U, U^{-1}, V^{-1}, T_1 V]/(T_1)$$

y

$$(B_{W,0})_T = (B_{V^{-1},0})_T \cong \mathbb{C}[U, U^{-1}, V, T_1 V^{-1}]/(T_1),$$

de modo que

$$(\mathcal{U}_0)_T = (\mathcal{U}_{0,0})_T \cup (\mathcal{U}_{V,0})_T \cup (\mathcal{U}_{V^{-1},0})_T.$$

Vemos también que, de hecho, se tiene que

$$(\mathcal{U}_{V,0})_T \cap (\mathcal{U}_{V^{-1},0})_T = (\mathcal{U}_{0,0})_T \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times, \tag{4.11}$$

de modo que

$$(\mathcal{U}_0)_T = (\mathcal{U}_{V,0})_T \cup (\mathcal{U}_{V^{-1},0})_T.$$

Ahora, como $(\mathcal{U}_{0,0})_T$ es irreducible, su clausura en $(\mathcal{U}_0)_T$ es también irreducible. Usando (4.11) podemos ver que dicha clausura se cubre por los abiertos

$$E_{V,0} := \text{Spec} \left(\frac{\mathbb{C}[U, U^{-1}, V^{-1}, T_1 V]}{(T_1 V)} \right) \cong \text{Spec} \mathbb{C}[U, U^{-1}, V^{-1}] \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$$

y

$$E_{V^{-1},0} := \text{Spec} \left(\frac{\mathbb{C}[U, U^{-1}, V, T_1 V^{-1}]}{(T_1 V^{-1})} \right) \cong \text{Spec} \mathbb{C}[U, U^{-1}, V] \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C},$$

por lo que esta clausura es claramente isomorfa a $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{P}^1$. En coordenadas explícitas, podemos identificar:

$$E_{V^{-1},0} = \{(u, [x_0 : x_1]) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{P}^1 : x_0 \neq 0\} \text{ y } V = x_1/x_0,$$

$$E_{V,0} = \{(u, [x_0 : x_1]) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{P}^1 : x_1 \neq 0\} \text{ y } V^{-1} = x_0/x_1.$$

Conjuntistamente tenemos que, para obtener esta clausura, a $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ se le agregaron dos copias disjuntas de $\mathbb{C}^\times : \mathbb{C}^\times \times \{[1 : 0]\}$ y $\mathbb{C}^\times \times \{[0 : 1]\}$. Podemos ver también estos \mathbb{C}^\times en forma algebraica:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^\times \times \{[1 : 0]\} &= \text{Spec} \left(\frac{\mathbb{C}[U, U^{-1}, V, T_1 V^{-1}]}{(T_1 V^{-1}, V)} \right) \subseteq E_{V^{-1},0} \\ \text{y } \mathbb{C}^\times \times \{[0 : 1]\} &= \text{Spec} \left(\frac{\mathbb{C}[U, U^{-1}, V^{-1}, T_1 V]}{(T_1 V, V^{-1})} \right) \subseteq E_{V,0}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Como $\overline{(\mathcal{U}_{0,0})_T} \neq (\mathcal{U}_0)_T$ tenemos entonces que $\overline{(\mathcal{U}_{0,0})_T} \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{P}^1$ es una componente irreducible de \tilde{P}_T . Ahora bien, del Ejemplo 4.3, tenemos que r actúa dentro de esta componente irreducible de la forma que indica el enunciado.

Por otro lado, también del Ejemplo 4.3 podemos ver que $(\mathcal{U}_{0,ks})_T \cap (\mathcal{U}_{0,0})_T = \emptyset$, de modo que tenemos que cada componente irreducible C_k está dada por la clausura de $(\mathcal{U}_{0,ks})_T$ en \tilde{P}_T . Más concretamente, tenemos que C_k se cubre por los abiertos afines $E_{V,k}$ y $E_{V^{-1},k}$ dados por:

$$E_{V,k} = \text{Spec} \left(\frac{\mathbb{C}[U, U^{-1}, T_1^{-k} V^{-1}, T_1^{k+1} V]}{(T_1^{k+1} V)} \right) \subseteq (\mathcal{U}_{V,ks})_T$$

y

$$E_{V^{-1},k} = \text{Spec} \left(\frac{\mathbb{C}[U, U^{-1}, T_1^k V, T_1^{-(k-1)} V^{-1}]}{(T_1^{-(k-1)} V^{-1})} \right) \subseteq (\mathcal{U}_{V^{-1},ks})_T.$$

Más aún, de las descripciones de estos anillos (y notando su estructura como $\mathbb{C}[U, U^{-1}]$ -álgebras) es directo que las intersecciones entre componentes son como en el enunciado. \square

De la misma forma, podemos ver las fibras de \tilde{P} sobre otros puntos de \mathbb{C}^3 .

Proposición 4.7. Si $T = (0, 0, T_3) \in \mathbb{C}^3$ entonces \tilde{P}_T es una “red” de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ’s. Esto es, \tilde{P}_T tiene una cantidad numerable de componentes irreducibles $C_{a,b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ y las intersecciones son como siguen:

$$C_{a,b} \cap C_{a',b'} \cong \begin{cases} \mathbb{P}^1 & \text{si } a = a' \text{ y } |b - b'| = 1 \text{ o si } |a - a'| = 1 \text{ y } b = b' \\ \{\text{pt}\} & \text{si } |a - a'| = |b - b'| = 1 \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Más aún, $r^k s^l$ envía $C_{a,b}$ en $C_{a+k,s+l}$.

Demostración. Al igual que antes, el problema se reduce a describir la clausura de $(\mathcal{U}_{0,0})_T$, la cual se cubre por los abiertos

$$\begin{aligned} F_{W,0} &= \text{Spec } \mathbb{C}[U, V] \\ F_{W^{-1},0} &= \text{Spec } \mathbb{C}[U^{-1}, V^{-1}] \\ F_{W,r} &= \text{Spec } \mathbb{C}[U^{-1}, V] \\ F_{W,s} &= \text{Spec } \mathbb{C}[U, V^{-1}], \end{aligned}$$

de modo que claramente tal clausura es isomorfa a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

El resto de las componentes irreducibles se obtienen como \mathbb{Y} -trasladados de esta componente, de modo que es fácil describir las intersecciones usando los anillos correspondientes y la definición explícita de los operadores S_y^* .

□

Una representación gráfica de \tilde{P}_T para $T = (0, 0, T_3)$ con $T_3 \neq 0$ se muestra en la siguiente figura, donde cada rectángulo representa a una componente irreducible $C_{a,b}$, cada arista representa a un \mathbb{P}^1 y el interior de cada rectángulo es $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$.

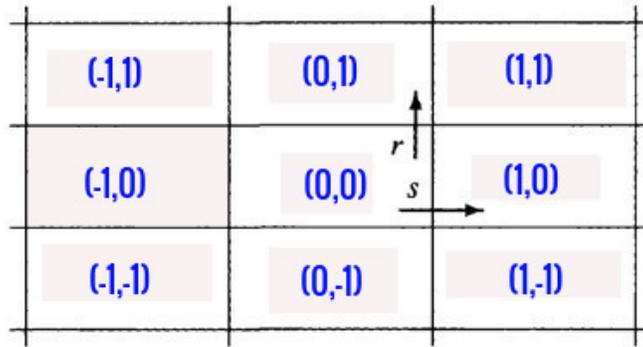


Figura 4.1: Representación de \tilde{P}_T para $T = (0, 0, T_3)$ con $T_3 \neq 0$

En lo que sigue denotamos por $\tilde{\mathbb{P}}^2$ al Blow-up de \mathbb{P}^2 en tres puntos.

Proposición 4.8. *La fibra sobre $0 \in \mathbb{C}^3$ tiene una cantidad numerable de componentes irreducibles, cada una de las cuales es isomorfa a \mathbb{P}^2 o a $\tilde{\mathbb{P}}^2$.*

Demostración. En este caso, la fibra \tilde{P}_0 puede representarse por la figura 4.2, donde cada triángulo representa una copia de \mathbb{P}^2 , siendo cada arista la copia de \mathbb{P}^1 dada por la recta $\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_i = 0\}$, mientras que cada hexágono representa al blow-up de \mathbb{P}^2 en los puntos $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$ y $[0 : 0 : 1]$, donde cada arista es una copia de \mathbb{P}^1 (las rectas señaladas anteriormente y los tres divisores excepcionales).

En esta situación, todo punto es \mathbb{Y} -equivalente a uno de los encerrados por el paralelogramo en rojo.

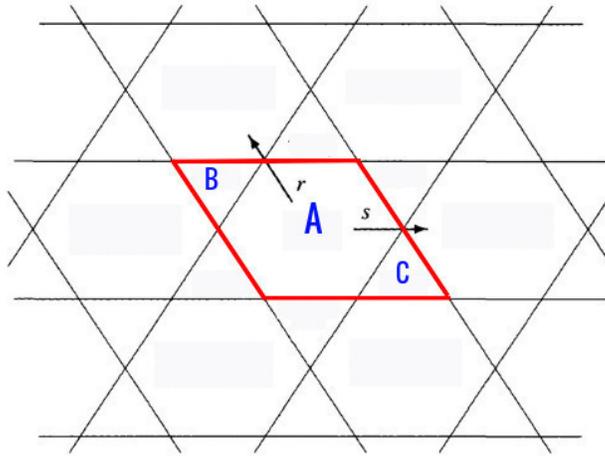


Figura 4.2: Representación de \tilde{P}_0

La clausura de la variedad tórica indicada por A es cubierta por

$$\begin{aligned} G_{U,0} &= \text{Spec } \mathbb{C}[V, W] \\ G_{U^{-1},0} &= \text{Spec } \mathbb{C}[V^{-1}, W^{-1}] \\ G_{V,0} &= \text{Spec } \mathbb{C}[U, W] \\ G_{V^{-1},0} &= \text{Spec } \mathbb{C}[U^{-1}, W^{-1}] \\ G_{W,0} &= \text{Spec } \mathbb{C}[U, V] \\ G_{W^{-1},0} &= \text{Spec } \mathbb{C}[U^{-1}, V^{-1}], \end{aligned}$$

por lo tanto tal componente es isomorfa a $\tilde{\mathbb{P}}^2$.

Por otro lado, la clausura de la variedad tórica indicada por B es cubierta por

$$\begin{aligned}H_{U,0} &= \text{Spec } \mathbb{C}[T_3V^{-1}, W] \\H_{V^{-1},0} &= \text{Spec } \mathbb{C}[W^{-1}, T_3U] \\H_{W^{-1},s} &= \text{Spec } \mathbb{C}[T_3^{-1}U^{-1}, T_3^{-1}V],\end{aligned}$$

de modo que es isomorfa a \mathbb{P}^2 .

Ahora bien, la variedad tórica indicada por C es isomorfa a la anterior y, por tanto, es también isomorfa a \mathbb{P}^2 .

□

Capítulo 5

Degeneraciones de subvariedades

En la Sección 2 del capítulo anterior discutimos cómo la construcción de Mumford permite estudiar degeneraciones de Superficies Abelianas. Más aún, en [HKW93, Part II, Prop. 3.20 y Prop. 3.22] se describen cuáles son las degeneraciones obtenidas mediante esta construcción. En particular se tiene lo siguiente:

Proposición 5.1. *Las fibras sobre los puntos de frontera de \mathcal{E}_m^* obtenidos en el Capítulo 3 son:*

- Sobre un punto $(0, \frac{a\tau+b}{m}, \tau)$ en la frontera de corrancho 1 la fibra es la superficie

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{O}_{E_\tau} \oplus \mathcal{O}_{E_{\frac{a\tau+b}{m}}}([\tau] - [0])\right),$$

donde las secciones disjuntas se pegan mediante un twist dado por τ .

- Si T es un punto de frontera de corrancho 2 con $T \neq 0$ entonces la fibra es isomorfa a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con ciertas rectas identificadas
- Si $T = 0$ la fibra es la unión de una copia de $\tilde{\mathbb{P}}^2$ con dos copias de \mathbb{P}^2 , donde $\tilde{\mathbb{P}}^2$ representa al blow-up de \mathbb{P}^2 en tres puntos, como en la Proposición 4.8.

Sin embargo, nuestro interés va un poco más allá y a lo largo de este capítulo nos dedicaremos a ver que, dentro de los límites descritos anteriormente, hay una curva elíptica degenerada.

En el Capítulo 3 vimos que la frontera de \mathcal{E}_m^* se compone de las imágenes de curvas $X_{c,e}$ para c, e enteros con $\text{m.c.d}(c, e, m) = 1$ (ver Comentario 3.4) y un \mathbb{P}^1 “periférico” que denotaremos por X_∞ . Más aún, a partir de la demostración de la Proposición 3.3 y la del Lema 3.7 podemos construir, para cada i ($i = (c, e)$ o $i = \infty$), una familia

$\mathcal{F}_i \rightarrow O_i$ sobre ciertos conjuntos cerrados $O_i \subseteq X(F_2)$, como en (4.7) en que las fibras son superficies abelianas no simples y son tales que la imagen de X_i en $X_{\Sigma(F_2)}(F_2)$ está en la clausura de O_i . Como sobre cada punto $T \in O_i \subseteq X(F_2)$ tenemos, fijando un vector $v_i \in \mathbb{Z}^5$ (es decir, una forma diferencial η_{v_i}), una curva elíptica asociada. Más aún, usando la Proposición 1.10 podemos obtener explícitamente tal curva. Ahora, tal como en el Ejemplo 1.11, podemos determinar también la respectiva curva complementaria K_τ . De este modo, obtenemos familias $\mathcal{K}_i \rightarrow O_i$ que caben en un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_i & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F}_i \\ & \searrow & \swarrow \\ & O_i & \end{array} \quad (5.1)$$

En este trabajo estudiamos degeneraciones de las familias $\mathcal{K}_i \rightarrow O_i$.

Más concretamente, los conjuntos O_i señalados en el párrafo anterior son los siguientes:

$$O_{(c,e)} := \psi_{-1} \left(\left\{ \left(\begin{array}{cc} \mu & -\frac{c\tau+e}{m} \\ -\frac{c\tau+e}{m} & \tau \end{array} \right) \in \mathbb{H}_2 : \mu, \tau \in \mathbb{H} \right\} \right)$$

y

$$O_\infty := \psi_{-1} \left(\left\{ \left(\begin{array}{cc} \tau & z \\ z & \frac{1}{m-1} (\tau - (m-2)z) \end{array} \right) \in \mathbb{H}_2 : \tau \in \mathbb{H}, z \in \mathbb{C} \right\} \right),$$

donde $\psi_{-1} := \iota_{-1} \circ e_{F_2}$ (ver (4.4)).

Comentario 5.2. *Recordemos que nuestro objetivo es interpretar los puntos de frontera de \mathcal{E}_m^* como superficies abelianas degeneradas que contienen una curva elíptica degenerada. En ese contexto, sería natural considerar las familias compuestas por las curvas “canónicamente” asociadas (fijada la forma diferencial η_i), sin embargo, hacer cálculos explícitos en \tilde{P} utilizando tales curvas es más complicado y es por ello que, en pos del objetivo, utilizamos las familias dadas por las curvas complementarias.*

Tal como en el Capítulo 4, queremos extender estas familias a familias planas y propias definidas sobre conjuntos más grandes. En nuestro caso, los conjuntos a los que extenderemos estas familias son

$$W_i := O_i \cup (U_{-1} \cap X_i),$$

donde $U_{-1} = X_{\Sigma(F_2)}(F_2) \cap T_{\sigma_{-1}}$ como en el Capítulo 4 y abusivamente escribimos $X_i \subseteq X_{\Sigma(F_2)}(F_2)$ para referirnos a la imagen de X_i en $X_{\Sigma(F_2)}(F_2)$ vía la aplicación ψ_{-1} .

Ejemplo 5.3. *Las fibras de la familia $\mathcal{F}_{(1,0)}$ están dadas por las superficies abelianas representadas por matrices*

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & -\tau_3/m \\ -\tau_3/m & \tau_3 \end{pmatrix}$$

con $\Im(\tau_1) > m^{-2}\Im(\tau_3)$ y, del desarrollo del Ejemplo 1.11, vemos que la fibra de la familia $\mathcal{K}_{(1,0)}$ sobre τ es la curva $E_{m\tau_1 - \tau_3/m}$.

Ahora, tal como discutimos en el Capítulo 4, para extender las familias definidas en (5.1) usaremos una técnica similar a la de Mumford y lo que haremos será construir un subesquema conveniente \tilde{Q}_i de \tilde{P} y un subgrupo \mathbb{Y}^i de \mathbb{Y} tal que \mathbb{Y}^i actúe en \tilde{Q}_i y tal que la familia definida por

$$\bar{\mathcal{K}}_i = \tilde{Q}_i / \mathbb{Y}^i,$$

extienda a (5.1).

A continuación precisamos la idea anterior:

Para cada $\tau \in \mathbb{E}_m = p^{-1}(\mathcal{E}_m) \subseteq \mathbb{H}_2$ tenemos una curva elíptica $K_\tau \leq A_\tau$, la cual está dada por un \mathbb{C} -subespacio vectorial V_τ de \mathbb{C}^2 con $\dim_{\mathbb{C}}(V_\tau) = 1$ y, de hecho, se tiene que $V_\tau = V_\mu$ si $\psi_{-1}(\tau), \psi_{-1}(\mu) \in O_i$. Así, para cada i tenemos un espacio vectorial V_i (que no depende de τ) tal que si $\psi_{-1}(\tau) \in O_i$ entonces

$$K_\tau = \frac{V_i}{V_i \cap \Lambda_\tau}.$$

Ahora bien, V_i está determinado por una cierta ecuación lineal \mathcal{L}_i y esta se traduce vía la aplicación exponencial ε en una cierta relación en

$$(\mathbb{C}^\times)^2 \cong \tilde{G} = \text{Spec} \left(\frac{\mathbb{C}[U, U^{-1}, V, V^{-1}, W, W^{-1}]}{\langle UVW - 1 \rangle} \right).$$

De este modo, la curva elíptica K_τ puede verse como un cociente de

$$\text{Spec} \left(\frac{\mathbb{C}[U, U^{-1}, V, V^{-1}, W, W^{-1}]}{\langle UVW - 1, \varepsilon(\mathcal{L}_i) \rangle} \right),$$

(donde $\varepsilon(\mathcal{L}_i)$ denota la traducción de \mathcal{L}_i en términos de U, V y W) por la acción de un cierto subgrupo de \mathbb{Z}^2 el cual, en vista de (4.8), podemos naturalmente identificar como un subgrupo de \mathbb{Y} . Así, la curva elíptica K_τ es el cociente de la fibra en $T = \psi_{-1}(\tau) \in \mathbb{C}^3 = \text{Spec}(A)$ de un A -esquema

$$\text{Spec} \left(\frac{A[U, U^{-1}, V, V^{-1}, W, W^{-1}]}{\langle UVW - 1, \varepsilon(\mathcal{L}_i) \rangle} \right),$$

(donde $A = \mathbb{C}[T_1, T_2, T_3]$) por un cierto subgrupo de \mathbb{Y} que precisaremos en breve. Ahora bien, extenderemos las familias (5.1) a la clausura de $O_i \in (\mathbb{C}^\times)^3$ en \mathbb{C}^3 , la cual está definida por alguna relación polinomial R_i entre las coordenadas T_i (extendiendo a la que cumplen los elementos de O_i), de modo que consideraremos esquemas

$$\tilde{H}_i = \text{Spec} \left(\frac{A[U, U^{-1}, V, V^{-1}, W, W^{-1}]}{\langle UVW - 1, \varepsilon(\mathcal{L}_i), R_i \rangle} \right),$$

determinaremos sus respectivas fibras sobre puntos $T \in W_i$ y estudiaremos la acción de un cierto grupo $\mathbb{Y}^i \leq \mathbb{Y}$ en tales fibras.

Ejemplo 5.4. *Concretizando la idea anterior, consideremos nuevamente la familia $\mathcal{F}_{(1,0)}$. En este caso, del Ejemplo 1.11 tenemos que*

$$V_{(1,0)} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_2 = 0\},$$

de modo que $\varepsilon(\mathcal{L}_{(1,0)}) = U - 1$. Ahora, en este caso los puntos a considerar satisfacen la relación $t_2^m t_3 = 1$, la cual, bajo la aplicación ι_{-1} se traduce en que $T_2 = T_3^{m-1}$ (ver Ejemplo 2.19). De este modo,

$$\tilde{H}_{(1,0)} = \text{Spec} \left(\frac{A[U, U^{-1}, V, V^{-1}, W, W^{-1}]}{\langle UVW - 1, U - 1, T_2 - T_3^{m-1} \rangle} \right).$$

Ahora, para poder explicitar cuáles son las propiedades que esperamos del esquema \tilde{Q}_i para poder degenerar curvas elípticas necesitamos explicitar el subgrupo \mathbb{Y}^i que actúa en \tilde{H}_i . Para ello notemos que la curva elíptica K_τ es el cociente del espacio vectorial V_i por la acción del grupo $V_i \cap \Lambda_\tau \leq \Lambda_\tau \cong \mathbb{Z}^4$ dada por traslación y, alternativamente, este subgrupo puede describirse como el subgrupo de Λ_τ dado por

$$\{g \in \Lambda_\tau : g \cdot (z_1, z_2) \in V_i \quad \forall (z_1, z_2) \in V_i\}.$$

Así, en vista de lo discutido en la Sección 4.2, el subgrupo de \mathbb{Y} a considerar es

$$\mathbb{Y}^i := \{y \in \mathbb{Y} : S_y(\varepsilon(\mathcal{L}_i)) \in \langle \varepsilon(\mathcal{L}_i) \rangle\}. \quad (5.2)$$

Ejemplo 5.5. Para $i = (1, 0)$ tenemos que $\varepsilon(\mathcal{L}_i) = U - 1$. Así

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}^{(1,0)} &= \{r^a s^b \in \mathbb{Y} : S_{r^a s^b}(U - 1) \in \langle U - 1 \rangle\} \\ &= \{r^a s^b \in \mathbb{Y} : T_2^{-a} T_3^{b-a} U - 1 \in \langle U - 1 \rangle\} \\ &= \{r^a s^b \in \mathbb{Y} : T_3^{-(m-1)a+b-a} U - 1 \in \langle U - 1 \rangle\} \\ &= \{r^a s^b \in \mathbb{Y} : T_3^{b-ma} U - 1 \in \langle U - 1 \rangle\} \\ &= \{r^a s^{ma} \in \mathbb{Y} : a \in \mathbb{Z}\} \\ &= (rs^m) \end{aligned}$$

En este contexto, lo que buscamos es un A -subesquema \tilde{Q}_i de \tilde{P} tal que:

- \tilde{H}_i sea denso en \tilde{Q}_i
- La acción de \mathbb{Y}^i en \tilde{H}_i se extienda a \tilde{Q}_i y
- La familia $\tilde{Q}_i|_{W_i} \rightarrow W_i$ sea propia y plana (en el contexto analítico) y extienda a la Familia (5.1).

Veremos que, de hecho, basta considerar \tilde{Q}_i como la clausura esquemática de \tilde{H}_i en \tilde{P} y más aún, al final de este capítulo describiremos en forma explícita los pares (superficie degenerada, curva degenerada) que se obtengan mediante esta construcción.

Comentario 5.6. Como \tilde{P} es el Proj de un anillo graduado se tiene que \tilde{P} es separado, de modo que la inmersión abierta $\tilde{G} = \mathcal{U}_{0,0} \hookrightarrow \tilde{P}$ es quasicompacta. Así, como \tilde{H} es cerrado en \tilde{G} tenemos que la inmersión $\tilde{H} \hookrightarrow \tilde{P}$ es también cuasi-compacta, de modo que el espacio topológico subyacente a la clausura esquemática (el subesquema cerrado más pequeño por el cual tal inclusión se factoriza) coincide con la clausura topológica usual.

5.1. Los subesquemas de \tilde{P} a estudiar

Como dijimos anteriormente, para cada i ($i = (c, e)$ o $i = \infty$) consideraremos un cierto subesquema \tilde{H}_i de \tilde{P} y determinaremos su clausura \tilde{Q}_i en \tilde{P} la cual nos permitirá estudiar degeneraciones de la familia \mathcal{K}_i .

Tenemos que las superficies que son las fibras de la familia $\mathcal{F}_{(c,e)}$ están representadas por matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \mu & -\frac{c\tau+e}{m} \\ -\frac{c\tau+e}{m} & \tau \end{pmatrix},$$

de modo que en este caso se tiene que $t_2^m t_3^c = 1$ o, equivalentemente, que $T_2^c = T_3^{m-c}$. Por otro lado, un cálculo similar al desarrollado en la Proposición 1.11 muestra que en estos casos se tiene que $\varepsilon(\mathcal{L}_{(c,e)}) = U - 1$, de modo que

$$\tilde{H}_{(c,e)} = \text{Spec} \left(\frac{A[U, U^{-1}, V, V^{-1}, W, W^{-1}]}{\langle UVW - 1, U - 1, T_2^c - T_3^{m-c} \rangle} \right).$$

Ahora, para el caso de $i = \infty$ recordemos que en la demostración de la Proposición ?? usamos la familia cuyos representantes son las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \frac{1}{m-1}(\tau - (m-2)z) \end{pmatrix}$$

de modo que en este caso se tiene que $t_3^{m-1} t_2^{m-2} = t_1$ o, equivalentemente, que $T_1 = T_2^{m-1}$. Notamos que tales matrices son elementos de $\mathbb{H}_2(\eta_v)$ para $v = (1, -(m-2), -(m-1), 0, 0)$ y un cálculo similar al del Ejemplo 1.11 muestra que en este caso el subespacio es $\mathbb{C}(-1, 1)$. Así tenemos que

$$\tilde{H}_\infty = \text{Spec} \left(\frac{A[U, U^{-1}, V, V^{-1}, W, W^{-1}]}{\langle UVW - 1, W - 1, T_1 - T_2^{m-1} \rangle} \right).$$

5.2. Revisión acerca de homogeneización

Para cada i queremos determinar la clausura \tilde{Q}_i de \tilde{H}_i y para ello lo que haremos será estudiar cómo se ven estos subesquemas en cada abierto afín $\mathcal{U}_{\alpha,y}$. Con miras a ese objetivo necesitaremos dar una pequeña revisión acerca de cómo construir subesquemas cerrados de un esquema $\text{Proj } R$ para un anillo graduado R generado por sus elementos de grado 1. Esto requiere revisar el proceso de homogeneización de un ideal, de manera análoga a lo que se hace en el contexto clásico para determinar la clausura proyectiva de una variedad afín.

Sea entonces $R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$ un anillo graduado generado como R_0 -álgebra por R_1 , $X = \text{Proj } R$ y consideremos un ideal homogéneo \mathcal{I} de R . A partir de \mathcal{I} podemos construir un haz cuasi-coherente de ideales y, por tanto, un subesquema cerrado de X ([Har77,

Prop. II.5.9]) En efecto: sea $\{Z_j\}_J \subseteq R_1$ un conjunto que genere a R como R_0 -álgebra. Tenemos que X se cubre por los abiertos afines

$$U_j = \text{Spec} (R[Z_j^{-1}]_0),$$

donde $R[Z_j^{-1}]_0$ es el anillo compuesto por los elementos de grado 0 de la localización de R en Z_j . Se define el haz $\tilde{\mathcal{I}}$ como el único haz cuasi-coherente de ideales que satisface que para todo j se tiene que

$$\tilde{\mathcal{I}}(U_j) = \mathcal{I} \cdot R[Z_j^{-1}] \cap R[Z_j^{-1}]_0.$$

Equivalentemente, es el único haz cuasi-coherente de ideales en el que para todo j se tiene que

$$\tilde{\mathcal{I}}(U_j) = h_j(\mathcal{I}) \cdot R[Z_j^{-1}]_0,$$

donde $h_j : R \mapsto R[Z_j^{-1}]_0$ es el morfismo de R_0 -álgebras definido en los generadores por $Z_k \mapsto Z_k Z_j^{-1}$ el cual, en el caso clásico, conocemos como “deshomogeneización”. Se puede probar que, de hecho, el subesquema así obtenido es

$$\text{Proj} (R/\mathcal{I})$$

y se tiene que

$$\text{Proj}(R/\mathcal{I}) \cap U_j = \text{Spec} \left(\frac{R[Z_j^{-1}]_0}{h_j(\mathcal{I}) \cdot R[Z_j^{-1}]_0} \right).$$

Comentario 5.7. Cuando R es *finitamente* generado por R_1 como R_0 -álgebra se tiene que todo subesquema cerrado de $\text{Proj} R$ se obtiene a partir de esta construcción (ver [EH00, Ej. III-14]). Lamentablemente, este no es nuestro caso. Sin embargo, ésto no representará mayor inconveniente.

En nuestro caso, tenemos que

$$R = R_{\Phi, \Sigma} := A[Z_{\alpha, y}]_{\alpha \in \Sigma, y \in \mathbb{Y}},$$

donde

$$Z_{\alpha, y} = X^{\Phi(y)+\alpha}(y) \cdot X^{2\Phi(y)+\alpha} \cdot \Theta.$$

Para cada i contamos con un ideal I_i de $\mathcal{O}_{\tilde{P}}(\mathcal{U}_{0,0}) = B_{0,0}$, el cual define al subesquema \tilde{H}_i y queremos encontrar la clausura en \tilde{P} de cada uno de estos subesquemas. Para ello construiremos un subesquema cerrado de \tilde{P} de la forma $\text{Proj}(R_{\Phi, \Sigma}/\mathcal{I})$ para un cierto ideal homogéneo \mathcal{I} en el cual \tilde{H}_i esté contenido densamente.

Consideramos el ideal homogéneo

$$\mathcal{I} := \bigoplus_{d \geq 0} (h_{0,0}^{-1}(I) \cap (R_{\Phi, \Sigma})_d), \quad (5.3)$$

donde $h_{0,0}$ es la deshomogeneización hacia el abierto $\mathcal{U}_{0,0}$. En otras palabras, consideramos la homogeneización del ideal dado por la preimagen vía $h_{0,0}$ de nuestro ideal I_i . De este

modo, usando $\tilde{\mathcal{I}}$ obtenemos un subesquema cerrado $\text{Proj}(R_{\Phi,\Sigma}/\mathcal{I})$ de \tilde{P} el cual contiene a

$$\tilde{H}_i = \text{Spec}(B_{0,0}/I_i),$$

de modo que

$$\text{cls}_{\tilde{P}}(\text{Spec}(B_{0,0}/I)) \subseteq \text{Proj}(R_{\Phi,\Sigma}/\mathcal{I}). \quad (5.4)$$

En las siguientes secciones explotaremos esta última contención para, en conjunto a ciertas consideraciones topológicas, probar que realmente $\tilde{Q}_i = \text{Proj}(R_{\Phi,\Sigma}/\mathcal{I})$, de modo que describir el esquema \tilde{Q}_i en cada uno de los abiertos afines se vuelve un problema meramente algebraico.

5.3. Estrategias de cálculo

Queremos determinar los esquemas \tilde{Q}_i . Cada uno de estos esquemas es la clausura de cierto subesquema $\text{Spec}(B_{0,0}/I_i) \hookrightarrow \tilde{G}$. Ahora, de la contención (5.4) tenemos un subesquema cerrado de \tilde{P} en el que $\text{Spec}(B_{0,0}/I_i)$ está contenido. La “simplicidad” de los ideales I_i nos permitirán, usando consideraciones topológicas, probar que, de hecho,

$$\tilde{Q}_i = \text{Proj}(R_{\Phi,\Sigma}/\mathcal{I}_i),$$

donde \mathcal{I}_i es la homogenización del ideal $h_{0,0}^{-1}(I_i)$.

Ahora bien, para describir este subesquema cerrado basta describirlo en cada uno de los abiertos afines $\mathcal{U}_{\alpha,y}$ y, más aún, sabemos que en tales abiertos se tiene que

$$\text{Proj}(R_{\Phi,\Sigma}/\mathcal{I}_i) \cap \mathcal{U}_{\alpha,y} = \text{Spec} \left(\frac{B_{\alpha,y}}{\tilde{\mathcal{I}}_i(\mathcal{U}_{\alpha,y})} \right),$$

donde $\tilde{\mathcal{I}}$ es el haz de ideales definido en la sección anterior. De este modo, para describir \tilde{Q}_i basta determinar los ideales $\tilde{\mathcal{I}}_i(\mathcal{U}_{\alpha,y})$. Por otro lado, para todo $f \in \mathcal{I}_i$ se tiene, por definición, que

$$\text{Spec} \left(\frac{B_{\alpha,y}}{\tilde{\mathcal{I}}_i(\mathcal{U}_{\alpha,y})} \right) \subseteq \text{Spec} \left(\frac{B_{\alpha,y}}{\langle h_{\alpha,y}(f) \rangle} \right). \quad (5.5)$$

En particular, si encontramos $f \in \mathcal{I}_i$ tal que $B_{\alpha,y}/\langle h_{\alpha,y}(f) \rangle = 0$ entonces la contención anterior nos permitiría concluir que

$$\tilde{Q}_i \cap (\mathcal{U}_{\alpha,y})_T = \emptyset.$$

Así, nuestra principal estrategia se basará en encontrar elementos $f \in \mathcal{I}_i$ con estas propiedades, probando entonces la vacuidad de $\tilde{Q}_i \cap (\mathcal{U}_{\alpha,y})_T$ para gran parte de los pares (α, y) . Los casos restantes serán fácilmente reducidos a una cantidad finita de ellos y para tales pares determinar los ideales $\tilde{\mathcal{I}}(\mathcal{U}_{\alpha,y})$ será sencillo.

5.4. Cálculos

5.4.1. $i = (c, e)$

Veamos primero el caso de $i = (1, 0)$. De lo hecho en la Sección 5.1 tenemos que

$$\tilde{H}_{(1,0)} = \text{Spec} \left(\frac{A[U, U^{-1}, V, V^{-1}, W, W^{-1}]}{\langle UVW - 1, U - 1, T_2 - T_3^{m-1} \rangle} \right)$$

y queremos determinar su clausura $\tilde{Q}_{(1,0)}$.

Tenemos el ideal

$$I_{(1,0)} = \langle UVW - 1, U - 1, T_2 - T_3^{m-1} \rangle \subseteq A[U, U^{-1}, V, V^{-1}, W, W^{-1}] = B_{0,0}.$$

Probaremos que $\tilde{Q}_{(1,0)} = \text{Proj}(R_{\Phi, \Sigma}/\mathcal{I}_{(1,0)})$, donde $\mathcal{I}_{(1,0)}$ es la homogeneización del ideal $h_{0,0}^{-1}(I_{(1,0)})$ (ver (5.3)). Para ello probaremos primero un par de lemas:

Lema 5.8. *Se tiene que*

$$\tilde{H}_{(1,0)} = \tilde{Q}_{(1,0)} \cap \mathcal{U}_{0,0} = \text{Proj}(R_{\Phi, \Sigma}/\mathcal{I}_{(1,0)}) \cap \mathcal{U}_{0,0}.$$

Demostración. De (5.4) obtenemos directamente la segunda contención \subseteq . Ahora bien, usando el elemento $f = Z_{U,0} - Z_{0,0} = (U - 1)\Theta \in \mathcal{I}_{(1,0)}$ vemos que

$$\text{Proj} \left(\frac{R_{\Phi, \Sigma}}{\mathcal{I}} \right) \cap \mathcal{U}_{0,0} \subseteq \text{Spec} \left(\frac{A[U, U^{-1}, V, V^{-1}]}{\langle U - 1 \rangle} \right).$$

Así, como $h_{0,0}(T_2 - T_3^{m-1}) = T_2 - T_3^{m-1}$ vemos que

$$\text{Proj} \left(\frac{R_{\Phi, \Sigma}}{\mathcal{I}} \right) \cap \mathcal{U}_{0,0} \subseteq \text{Spec} \left(\frac{A[U, U^{-1}, V, V^{-1}]}{\langle U - 1, T_2 - T_3^{m-1} \rangle} \right) = \tilde{H}_i.$$

Por otro lado, por definición se tiene que

$$\tilde{H}_i \subseteq \tilde{Q}_i \cap \mathcal{U}_{0,0},$$

por lo cual concluimos las igualdades deseadas. □

Lema 5.9. $\mathcal{I}_{(1,0)}$ es un ideal radical en $R_{\Phi, \Sigma}$. En particular se tiene que $\text{Proj}(R_{\Phi, \Sigma}/\mathcal{I})$ es irreducible.

Demostración. Sea $f \in R_{\Phi, \Sigma}$ tal que $f^n \in \mathcal{I}_{(1,0)}$. En tal caso se tiene que $h_{0,0}(f^n) = (U - 1)p$ para cierto $p \in B_{0,0} = A[U, U^{-1}, V, V^{-1}]$ o, equivalentemente,

$$(h_{0,0}(f))^n = (U - 1)p. \tag{5.6}$$

Ahora bien, $U - 1$ es primo en $B_{0,0}$ pues

$$\frac{B_{0,0}}{\langle U - 1 \rangle} = \frac{A[U, U^{-1}, V, V^{-1}]}{\langle U - 1 \rangle} \cong A[V, V^{-1}]$$

y $A[V, V^{-1}]$ es un dominio. De este modo, de la ecuación anterior concluimos que $U - 1$ divide a $h_{0,0}(f)$, por lo que $f \in \mathcal{I}_{(1,0)}$.

El hecho de que $\text{Proj}(R_{\Phi, \Sigma}/\mathcal{I})$ sea irreducible se desprende del hecho de que una base de la topología de $\text{Proj}(S)$ para un anillo graduado S está dada por los abiertos principales $D_+(s)$, los cuales satisfacen que $D_+(s) \cap D_+(t) = D_+(st)$ y $D_+(s) = \emptyset$ si y sólo si $s^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

□

Así obtenemos

Corolario 5.10. *Se tiene que*

$$\tilde{Q}_{(1,0)} = \text{Proj}(R_{\Phi, \Sigma}/\mathcal{I}_{(1,0)}).$$

Demostración. Por el Lema 5.8 sabemos que $\tilde{H}_{(1,0)}$ es abierto en $\text{Proj}(R_{\Phi, \Sigma}/\mathcal{I}_{(1,0)})$, por lo que del Lema 5.9 vemos que $\tilde{H}_{(1,0)}$ es denso en $\text{Proj}(R_{\Phi, \Sigma}/\mathcal{I}_{(1,0)})$. Como este último conjunto es cerrado en \tilde{P} , el resultado sigue.

□

Con el resultado anterior podremos describir $\tilde{Q}_{(1,0)} \cap \mathcal{U}_{\alpha, y}$ de manera sencilla. Más aún, como en este caso sólo queremos estudiar las fibras sobre ciertos puntos de la forma $(0, T_2, T_3)$, en vista de la Sección 4.3 basta realizar tal descripción para los abiertos indexados por $(\alpha, y) = (\pm V, ks)$.

Lema 5.11. *Sea $k > 0$. Tenemos que*

$$\tilde{I}(\mathcal{U}_{V, ks}) = (U - 1)B_{V, ks}.$$

Demostración. Sea $f = T_3^k Z_{-W, ks} - Z_{V, ks} = (T_1 T_3)^{k(k+1)} V^{2k+1} (U - 1) \Theta \in \mathcal{I}$. Tenemos que $h_{V, ks}(f) = U - 1$ por lo que

$$(U - 1)B_{V, ks} \subseteq \tilde{I}(\mathcal{U}_{V, ks}).$$

Probemos entonces la otra contención. Sea $f \in \mathcal{I}$ un elemento homogéneo de grado d . Debemos probar que existe $g \in B_{V, ks} = R_{\Phi, \Sigma}[Z_{V, ks}^{-1}]_0$ tal que $h_{V, ks}(f) = (U - 1)g$. Como $f \in \mathcal{I}$ se tiene que $h_{0,0}(f) = (U - 1)p$ para algún $p \in B_{0,0} = A[U, U^{-1}, V, V^{-1}]$ y por tanto $f = (U - 1)p\Theta^d$. Así tenemos que

$$h_{V, ks}(f) = \frac{(U - 1)p\Theta^d}{Z_{V, ks}^d}. \quad (5.7)$$

Afirmamos que $p\Theta^d/Z_{V,ks}^d \in B_{V,ks}$. Para ello basta probar que $p\Theta^d \in R_{\Phi,\Sigma}$. Ahora bien, esto es directo de la siguiente observación: dado $q \in A[U, U^{-1}, V, V^{-1}]$ se tiene que $q\Theta^e \in R_{\Phi,\Sigma}$ si y sólo si cada uno de sus monomios $\lambda T_1^A T_2^B T_3^C U^{\nu_1} V^{\nu_2} \Theta^e$, ($\lambda \in \mathbb{C}, A, B, C \in \mathbb{N}, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}$) está en $R_{\Phi,\Sigma}$. En efecto: si $q\Theta^d \in R_{\Phi,\Sigma}$ entonces necesariamente cada uno de tales monomios es de la forma

$$\lambda T_1^A T_2^B T_3^C Z_{\alpha_1, y_1} \cdots Z_{\alpha_d, y_d} \in R_{\Phi,\Sigma}.$$

En nuestro caso, para $q = (U-1)p$ se tiene que $q\Theta^d \in R_{\Phi,\Sigma}$ por lo que todos los monomios de $q\Theta^d$ pertenecen a $R_{\Phi,\Sigma}$. Ahora, como todo monomio de $p\Theta^d$ es también un monomio de $q\Theta^d$, se concluye. De esta forma, en (5.7) podemos escribir

$$h_{V,ks}(f) = (U-1) \cdot \frac{p\Theta^d}{Z_{V,ks}^d}$$

y tomar $g = p\Theta^d/Z_{V,ks}^d$.

□

Similarmente:

Lema 5.12. *Sea $k > 0$. Se tiene que*

$$\tilde{\mathcal{I}}(\mathcal{U}_{-V, -ks}) = (U^{-1} - 1)B_{-V, ks}.$$

Demostración. Análoga a la del lema anterior con

$$f = T_3^k Z_{W, -ks} - Z_{-V, -ks}.$$

□

De esta forma, sobre $T = (0, T_2, T_3)$ tenemos que en cada abierto $(\mathcal{U}_{\pm V, ks})_T$ nuestro locus está dado por la ecuación $U = 1$, de modo que en cada componente irreducible $C_k \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{P}^1$ nuestro locus es $\{1\} \times \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^1$.

Con esta información, podemos describir las identificaciones que surgen bajo elementos de \mathbb{Y} en \tilde{Q}_T .

Recordemos (Ejemplo 5.5) que

$$\mathbb{Y}^{(1,0)} = (rs^m) = \{r^a s^{ma} : a \in \mathbb{Z}\} \leq \mathbb{Y}.$$

Proposición 5.13. *Sea $T = (0, T_2, T_3) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^\times)^2$ con $T_2 = T_3^{m-1}$. Se tiene que $\mathbb{Y}^{(1,0)} \leq \mathbb{Y}$ actúa en $(\tilde{Q}_{(1,0)})_T$ y el cociente $(\tilde{Q}_{(1,0)})_T / (rs^m)$ es un m -ágono de \mathbb{P}^1 's si $m \geq 2$ y una curva nodal si $m = 1$.*

Demostración. En primer lugar, notemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$ el elemento $r^a s^{ma} \in \mathbb{Y}$ define un isomorfismo entre C_k y C_{k+ma} que envía a $\tilde{R} \cap C_k$ en $\tilde{R} \cap C_{k+ma}$, de modo que todo punto en \tilde{R} es (rs^m) -equivalente a uno contenido en la unión de C_0, C_1, \dots, C_{m-1} . Ahora bien, dentro de esta unión no pueden haber más identificaciones que las dadas por rs^m y la única de tales identificaciones se da entre el elemento $(1, [1 : 0]) \in C_0$ y el elemento $(1, [0 : 1]) \in C_{m-1}$. ■

De manera completamente análoga, obtenemos lo siguiente:

Proposición 5.14. *Sea $T = (0, T_2, T_3) \in W_{(c,e)}$. Se tiene que $\mathbb{Y}^{(c,e)}$ actúa en $(\tilde{Q}_{(c,e)})_T$ y el cociente $(\tilde{Q}_{(c,e)})_T / \mathbb{Y}^{(c,e)}$ es un m -ágono de \mathbb{P}^1 's si $m \geq 2$ y una curva nodal si $m = 1$.* ■

5.4.2. $i = \infty$

En este caso, un razonamiento análogo al de las demostraciones de los Lemas 5.8 y 5.9 muestra que

$$\tilde{Q}_\infty = \text{Proj}(R_{\Phi, \Sigma} / \mathcal{I}_\infty), \quad (5.8)$$

donde \mathcal{I}_∞ es la homogeneización de la preimagen en $R_{\Phi, \Sigma}$ del ideal

$$I_\infty = \langle UVW - 1, W - 1, T_1 - T_2^{m-1} \rangle \subseteq B_{0,0}.$$

De este modo, nuevamente nuestro problema se reduce a un problema algebraico.

Queremos determinar la fibra de \tilde{Q}_∞ sobre ciertos puntos $T = (0, 0, T_3) \in \mathbb{C}^3$. Trabajaremos por separado los casos $T_3 \neq 0$ y $T_3 = 0$.

En el primer caso, recordemos que, según lo discutido en la Sección 4.3 tenemos que la fibra \tilde{P}_T es una unión numerable de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$'s, cada uno de los cuales está dado por la clausura en \tilde{P}_T de $(\mathcal{U}_{0, r^a, s^b})_T$. Más concretamente, si $C_{a,b}$ denota a cada una de tales componentes irreducibles, entonces $C_{a,b}$ se cubre por los siguientes abiertos afines:

$$\begin{aligned} C_{a,b} \cap \mathcal{U}_{W, r^a s^b} &\cong \text{Spec}(\mathbb{C}[T_2^a U, T_1^{-b} V]) \\ C_{a,b} \cap \mathcal{U}_{W^{-1}, r^a s^b} &\cong \text{Spec}(\mathbb{C}[T_2^{-a} U, T_1^b V^{-1}]) \\ C_{a,b} \cap \mathcal{U}_{W, r^{a+1} s^b} &\cong \text{Spec}(\mathbb{C}[T_2^{-(a+1)} U^{-1}, T_1^{-b} V]) \\ C_{a,b} \cap \mathcal{U}_{W, r^a s^{b+1}} &\cong \text{Spec}(\mathbb{C}[T_2^a U, T_1^{b+1} V^{-1}]) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ahora bien, notemos que, de la definición del grupo \mathbb{Y}^∞ (ver (5.2)) se obtiene directamente que $\mathbb{Y}^\infty = (r^{-(m-1)} s)$ y que actúa en $R_{\Phi, \Sigma} / \mathcal{I}_\infty$, de modo que de (5.8) vemos que \mathbb{Y}^∞ actúa en \tilde{Q}_∞ . Ahora bien, como tenemos isomorfismos

$$r^{-k(m-1)} s^k : C_{a,b} \rightarrow C_{a-k(m-1), b+k}$$

que por (5.8) envían a $\tilde{Q}_\infty \cap C_{a,b}$ en $\tilde{Q}_\infty \cap C_{a-k(m-1),b+k}$, para determinar completamente $(\tilde{Q}_\infty)_T$ basta determinar $\tilde{Q}_\infty \cap C_{a,b}$ para algún conjunto de representantes de $\mathbb{Z}^2/(-(m-1),1)\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

Lema 5.15. *El conjunto*

$$A := \{(n-m+1, 1) : n > m-1\} \cup \{(-n+m-1, -1) : n > m-1\} \\ \cup \{(n, 0) : -(m-1) \leq n \leq m-1\}$$

es un conjunto de representantes de $\mathbb{Z}^2/(-(m-1),1)\mathbb{Z}$.

Demostración. Toda clase lateral de $\mathbb{Z}^2/(-(m-1),1)\mathbb{Z}$ es de la forma

$$\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b(m-1) = n\} \text{ para algún } n \in \mathbb{Z},$$

de modo que escoger un representante de cada clase no es más que escoger una solución (a, b) a la ecuación $a + b(m-1) = n$ para un $n \in \mathbb{Z}$ fijo. Claramente el conjunto del enunciado satisface dichas propiedades y hay exactamente uno para cada n .

□

Notar que el conjunto de representantes A señalado en el lema anterior satisface que

$$\#\{(a, b) \in A : ab \leq 0\} < \infty.$$

Esta cualidad, en virtud del lema que se presenta a continuación (y el corolario que le sigue), permite reducir los cálculos de $\tilde{Q}_\infty \cap C_{a,b}$ a una cantidad finita de pares (a, b) .

Lema 5.16. *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a, b \geq 1$ y $ab > 1$. Se tiene que*

$$\tilde{Q}_\infty \cap (\mathcal{U}_{W, r^a s^b})_T = \emptyset$$

y

$$\tilde{Q}_\infty \cap (\mathcal{U}_{W^{-1}, r^{-a} s^{-b}})_T = \emptyset.$$

Demostración. Tenemos que

$$Z_{W, r^a s^b} = T_1^{b(b-1)} T_2^{a(a-1)} T_3^{(a-b)^2} U^{2a-1} V^{2b-1} \Theta.$$

Consideremos el elemento $f = T_1^{b-1} T_2^{a-1} Z_{0, r^{a-1} s^{b-1}} - Z_{W, r^a s^b} \in R_{\Phi, \Sigma}$. Tenemos que

$$f = T_1^{b(b-1)} T_2^{a(a-1)} T_3^{(a-b)^2} U^{2a-1} V^{2b-1} (W-1) \Theta,$$

de modo que $f \in \mathcal{I}_\infty$. Por otro lado, $h_{W, r^a s^b}$ no es más que dividir por $Z_{W, r^a s^b}$, de modo que

$$h_{W, r^a s^b}(f) = W - 1. \quad (5.10)$$

Ahora bien, recordemos que en $(B_{W,r^a s^b})_T$ todos los $B_{W,r^a s^b}$ -múltiplos de T_1 y T_2 se anulan. De este modo, como

$$W = T_1^{b-1} T_2^{a-1} \cdot (Z_{0,r^{a-1} s^{b-1}} \cdot Z_{W,r^a s^b}^{-1}),$$

y $Z_{0,r^{a-1} s^{b-1}} \cdot Z_{W,r^a s^b}^{-1} \in (B_{W,r^a s^b})_T$, concluimos que $W = 0$.

Así, de (5.10) obtenemos que el anillo $B_{W,r^a s^b} / \langle h_{W,r^a s^b}(f) \rangle$ es trivial y, por tanto,

$$\tilde{Q}_\infty \cap (\mathcal{U}_{W,r^a s^b})_T = \emptyset,$$

como se quería. □

Con el lema anterior podemos obtener el siguiente resultado:

Corolario 5.17. *Se tiene que*

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_\infty \cap C_{a,b} &= \tilde{Q}_\infty \cap C_{-a,-b} = \emptyset \quad \forall a, b \geq 2, \\ \tilde{Q}_\infty \cap C_{2,1} &\subseteq C_{2,0} \cap C_{1,0} \cap C_{1,1} \cap C_{2,1} = \{pt\}, \\ \tilde{Q}_\infty \cap C_{-2,-1} &\subseteq C_{-2,0} \cap C_{-1,0} \cap C_{-1,-1} = \{pt\}, \\ \tilde{Q}_\infty \cap C_{1,1} &\subseteq C_{1,1} \cap (C_{1,0} \cup C_{0,1}) \end{aligned}$$

y

$$\tilde{Q}_\infty \cap C_{-1,1} \subseteq C_{-1,1} \cap (C_{-1,0} \cup C_{0,-1}).$$

Demostración. Esto es consecuencia de que por (5.9) tenemos que

$$C_{a,b} \subseteq (\mathcal{U}_{W,r^a s^b})_T \cup (\mathcal{U}_{W,r^{a+1} s^b})_T \cup (\mathcal{U}_{W,r^a s^{b+1}})_T \cup (\mathcal{U}_{W,r^{a-1} s^b})_T$$

y que

$$C_{a,b} - [(\mathcal{U}_{W,r^a s^b})_T \cup (\mathcal{U}_{W,r^{a+1} s^b})_T \cup (\mathcal{U}_{W,r^a s^{b+1}})_T] = \{pt\}.$$

□

Así, como habíamos adelantado, en virtud del Lema 5.15 y el corolario anterior, es fácil ver que sólo nos queda determinar $\tilde{Q}_\infty \cap C_{a,0}$ para $-(m-1) \leq a \leq m-1$.

Lema 5.18. *Sea $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ con $a + b(m-1) \neq 0$. Se tiene que*

$$\tilde{Q}_\infty \cap (\mathcal{U}_{0,r^a s^b})_T = \emptyset.$$

Demostración. Basta probar el resultado para los pares $(n, 0)$ con $-(m-1) \leq n \leq m-1$ y $n \neq 0$. Ahora bien, el par $(n, 0)$ es equivalente a $(n+m-1, -1)$, de modo que probaremos el resultado para los pares $(a, -1)$ con $0 \leq a \leq 2(m-1)$ y $a \neq m-1$.

Recordemos que

$$(B_{0,r^a s^{-1}})_T \cong \mathbb{C}[T_2^a U, T_2^{-a} U^{-1}, T_1 V^{-1}, T_1^{-1} V],$$

por lo que en tal anillo $T_1 V^{-1}$ y $T_2^a U$ son unidades.

Supongamos primero que $0 \leq a \leq m-2$. En tal caso, el elemento

$$\begin{aligned} f &= T_2^{m-a-1} Z_{U,r^a s^{-1}} - Z_{-V,r^a s^{-1}} \\ &= T_2^{a^2+2(m-1)} T_3^{(a+1)(a+2)} U^{2a} V^{-2} (U - V^{-1}) \Theta \\ &= -T_2^{a^2+2(m-1)} T_3^{(a+1)(a+2)} U^{2a+1} V^{-2} (W-1) \Theta \in \mathcal{I}_\infty \end{aligned}$$

satisface que

$$\begin{aligned} h_{0,r^a s^{-1}}(f) &= T_3^{a+1} T_2^{m-1} (U - V^{-1}) \\ &= T_3^{a+1} (T_2^{m-a-1} \cdot T_2^a U - T_2^{m-1} V^{-1}) \\ &= T_3^{a+1} (T_2^{m-a-1} \cdot T_2^a U - T_1 V^{-1}). \end{aligned}$$

Así en el anillo $(B_{0,r^a s^{-1}})_T / \langle h_{0,r^a s^{-1}}(f) \rangle$ se tiene que $T_1 V^{-1}$ es simultáneamente cero y una unidad, de modo que dicho anillo es trivial. Así el resultado se sigue para los pares $(a, -1)$ con $0 \leq a \leq m-2$.

Similarmente, para $m \leq a \leq 2(m-1)$, el elemento

$$g = Z_{U,r^a s^{-1}} - T_2^{a+1-m} Z_{-V,r^a s^{-1}},$$

satisface que

$$h_{0,r^a s^{-1}}(g) = T_3^{a+1} (T_2^a U - T_2^{a+1-m} \cdot T_1 V^{-1}),$$

por lo que, al igual que antes, el anillo $(B_{0,r^a s^{-1}})_T / \langle h_{0,r^a s^{-1}}(g) \rangle$ es trivial y el resultado sigue. □

Recordemos que queremos determinar $\tilde{Q}_\infty \cap C_{a,0}$ para $-(m-1) \leq a \leq m-1$. Ahora bien, del Lema 5.18, tenemos para $a \neq 0$ se satisface que

$$\tilde{Q}_\infty \cap C_{a,0} \subseteq C_{a,0} \cap (C_{a,1} \cup C_{a,-1} \cup C_{a-1,0} \cup C_{a+1,0}),$$

de modo que, usando el Lema 5.16 y la acción de $\mathbb{Y}^\infty = (r^{-(m-1)}s)$, es fácil ver que basta determinar $\tilde{Q}_\infty \cap C_{a,0}$ para $0 \leq a \leq m-2$.

Lema 5.19. *Sea $a \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq a \leq m-2$. Se tiene que $\tilde{Q}_\infty \cap C_{0,a}$ es el subconjunto de $C_{0,a} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dado por $T_2^a U = 0$.*

Demostración. Análoga a la del Lema anterior con

$$f = T_2^{2(m-1)-a} Z_{-W, r^a s^{-1}} - Z_{0, r^a s^{-1}}$$

□

De este modo obtenemos directamente lo siguiente:

Proposición 5.20. *Sea $T = (0, 0, T_3) \in \mathbb{C}^3$ con $T_3 \neq 0$. Se tiene que $(\tilde{Q}_\infty)_T$ es una cadena de \mathbb{P}^1 's, \mathbb{Y}^∞ actúa en $(\tilde{Q}_\infty)_T$ y el cociente $(\tilde{Q}_\infty)_T / \mathbb{Y}^\infty$ es un $(m-1)$ -ágono de \mathbb{P}^1 's si $m \geq 3$ y una curva nodal si $m = 2$.*

Demostración. Del Lema 5.18 tenemos que todo punto en \tilde{Q}_∞ es \mathbb{Y}^∞ -equivalente a uno contenido en $\bigcup_{0 \leq a \leq m-2} C_{0,a}$. Ahora bien, el elemento $r^{-(m-1)} s \in \mathbb{Y}^\infty$ identifica los extremos del $\mathbb{P}^1 \subseteq C_{0,0}$ y del $\mathbb{P}^1 \subseteq C_{0,m-2}$, como se representa en la Figura 5.1 para $m = 3$, donde las rectas rojas representan a $(\tilde{Q}_\infty)_T$ y las cruces azules señalan puntos identificados bajo el generador $r^{-(m-1)} s$. ■

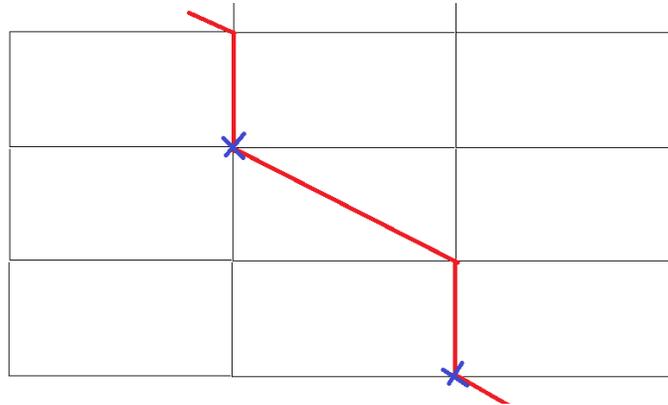


Figura 5.1: Representación de \tilde{Q}_∞ sobre $T = (0, 0, T_3)$ para $m = 3$

Ahora, para el caso en que $T = (0, 0, 0)$, un análisis similar muestra que \mathbb{Y}^∞ actúa como en la Figura 5.2, donde las rectas rojas representan a la subvariedad $(\tilde{Q}_\infty)_T$ y las cruces azules representan puntos identificados bajo \mathbb{Y}^∞ .

De este modo se obtiene:

Proposición 5.21. *Sea $T = 0 \in \mathbb{C}^3$ y $m \geq 2$. Se tiene que $(\tilde{Q}_\infty)_0$ es una cadena de \mathbb{P}^1 's, \mathbb{Y}^∞ actúa en $(\tilde{Q}_\infty)_0$ y el cociente $(\tilde{Q}_\infty)_0/\mathbb{Y}^\infty$ es un $(2m - 1)$ -ágono de \mathbb{P}^1 's.*

■

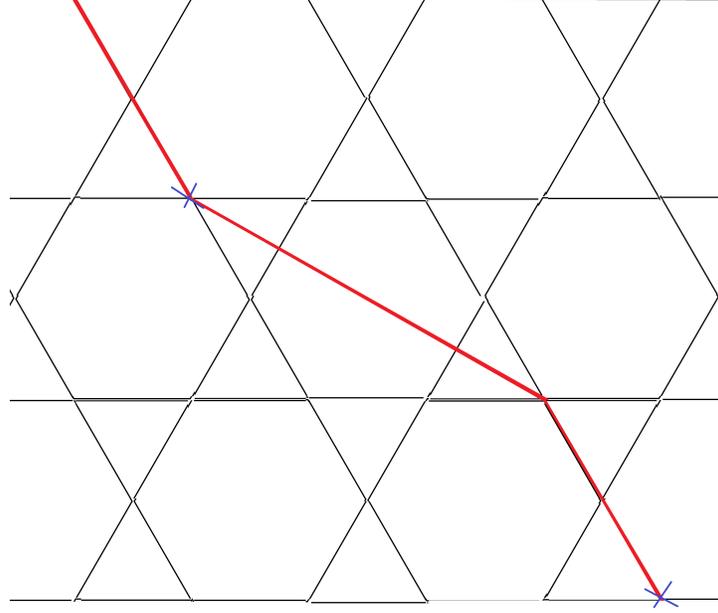


Figura 5.2: Representación de \tilde{Q}_∞ sobre $T = (0, 0, 0)$ para $m = 3$

5.5. Teorema principal

Hasta ahora tenemos, para cada i ($i = (c, e)$ o $i = \infty$), un subesquema \tilde{Q}_i de \tilde{P} en el cual el grupo \mathbb{Y}^i actúa extendiendo la acción en \tilde{H}_i y con el cual logramos construir una familia que extiende a la familia (5.1).

Sea $Q_i \rightarrow W_i$ la familia dada fibra a fibra por

$$(Q_i)_T = (\tilde{Q}_i)_T / \mathbb{Y}^i.$$

Proposición 5.22. *Las familias $Q_i \rightarrow W_i$ son (analíticamente) propias y planas.*

Demostración. Como las fibras de cada familia son compactas y conexas, de [Fis76, Lemma 1, p.56] se concluye que cada una de estas familias es propia. Ahora, como todas las

fibras tienen igual dimensión (a saber, 1) y los espacios son suaves, la planitud se concluye por [Fis76, Corolario p.158].

■

De esta forma, resumimos nuestros resultados en el siguiente Teorema:

Teorema 5.23. *Sea \mathcal{A}_2^* la compactificación toroidal de \mathcal{A}_2 asociada a la descomposición de Legendre, $m \geq 2$, $\mathcal{E}_m \subseteq \mathcal{A}_2$ el conjunto de las superficies abelianas no simples que contienen una subvariedad de exponente m y \mathcal{E}_m^* la clausura de \mathcal{E}_m en \mathcal{A}_2^* .*

Se tiene que todo punto de $\partial\mathcal{E}_m^$ se puede interpretar como una superficie abeliana degenerada que contiene canónicamente una curva elíptica degenerada y, más aún, los pares (superficie degenerada normalizada, curva degenerada) son:*

- (Un fibrado proyectivo sobre una curva elíptica, m -ágono de \mathbb{P}^1 's)
- ($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con dos rectas identificadas, $(m - 1)$ -ágono de \mathbb{P}^1 's) si $m \geq 3$
- ($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con dos rectas identificadas, curva nodal) si $m = 2$
- (La unión de dos copias de \mathbb{P}^2 con una de $\text{Bl}_{p_1, p_2, p_3}\mathbb{P}^2$, $(2m - 1)$ -ágono de \mathbb{P}^1 's)

■

Comentarios finales y preguntas abiertas

Los resultados de los Capítulos 3 y 5 permiten plantear un par de preguntas que pueden resultar interesantes para eventuales trabajos futuros. A continuación detallamos algunas de tales preguntas:

- En [Auf16] se estudian variedades abelianas no simples en dimensión arbitraria, de modo que podemos describir el espacio de móduli $\mathcal{E}_{g,n,m}$ de variedades abelianas no simples de dimensión g que contienen una subvariedad de dimensión n con exponente m . En ese contexto, es natural querer compactificar este espacio. Esto es, fijar un abanico admisible Σ y determinar la clausura $\mathcal{E}_{g,n,m}^\Sigma$ de $\mathcal{E}_{g,n,m}$ en la compactificación toroidal \mathcal{A}_g^Σ .
- Se podrían estudiar degeneraciones de superficies abelianas no simples para el caso en que la polarización no es principal.

Sea $\mathcal{A}_2(d_1, d_2)$ el espacio de moduli de superficies abelianas con polarización de tipo (d_1, d_2) y $\mathcal{E}_m(d_1, d_2)$ el subconjunto compuesto por las clases de superficies no simples que contienen una curva elíptica de exponente m .

Aquí el primer problema es que, hasta el conocimiento de quien escribe, no contamos con un resultado de irreducibilidad para $\mathcal{E}_m(d_1, d_2)$ (cosa que es fundamental para describir en forma sencilla a la subvariedad \mathcal{E}_m que trabajamos en esta tesis). Por otro lado, si bien $\mathcal{A}_2(d_1, d_2)$ es también compactificable utilizando métodos toroidales (lo único que cambia es el grupo aritmético que actúa en \mathbb{H}_2), la descripción explícita de la compactificación es más compleja. En [HKW93] se estudia el caso en que la polarización es de tipo $(1, p)$ para p primo, mostrando que la frontera tiene $p + 1$ componentes irreducibles. El caso $(1, d)$ es aún más complejo pues, en general, para determinar los grupos P, P', P'' se deben trabajar ciertas condiciones de congruencia, por lo que para trabajar la compactificación toroidal de manera explícita se podría, eventualmente, fijar algún tipo de factorización sencilla (e.g: $d = p^2$ para algún primo p).

- Sea $X_0(m)$ la curva modular afín que parametriza curvas elípticas con estructura de nivel m . Esto es, $X_0(m)$ parametriza a los pares (E, f) , donde E es una curva elíptica y $f : E[m] \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$ es un isomorfismo.

De acuerdo a [Auf16, Teorema 3.5] se tiene que \mathcal{E}_m es la imagen de $X_0(m) \times X_0(m)$ vía la aplicación ϕ dada por

$$((E_1, f_1), (E_2, f_2)) \longrightarrow \frac{E_1 \times E_2}{\text{Graf}(f_2^{-1}\epsilon f_1)},$$

donde $\epsilon : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2 \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$ es la involución $(x, y) \mapsto (y, x)$ y $\text{Graf}(f_2^{-1}\epsilon f_1)$ es el gráfico de la función $f_2^{-1}\epsilon f_1 : E_1[m] \rightarrow E_2[m]$.

Ahora, más concretamente tenemos que

$$X_0(m) = \Gamma_1(m) \backslash \mathbb{H},$$

donde $\Gamma_1(m)$ es el grupo principal de congruencia de nivel m . De este modo $X_0(m)$ es naturalmente compactificable mediante la compactificación de Satake, obteniendo la curva modular $X(m)$, la cual es la unión de $X_0(m)$ con una cantidad finita de *cúspides*. En ese contexto, es natural preguntarse si acaso la aplicación ϕ puede extenderse a una aplicación

$$\tilde{\phi} : X(m) \times X(m) \rightarrow \mathcal{E}_m^*,$$

donde \mathcal{E}_m^* es la compactificación de \mathcal{E}_m encontrada en el Capítulo 3. Esto es, si acaso podemos construir un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} X_0(m) \times X_0(m) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{E}_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(m) \times X(m) & \xrightarrow[\tilde{\phi}]{?} & \mathcal{E}_m^* \end{array}$$

donde las flechas verticales son las respectivas inclusiones.

- De acuerdo al Teorema de Reducibilidad de Poincaré sabemos que toda superficie abeliana no simple A_τ es isógena al producto de dos curvas elípticas E_τ, K_τ las cuales podemos determinar explícitamente usando los resultados del Capítulo 1 de este trabajo. En la Parte II de esta tesis estudiamos degeneraciones de la familia $\{K_\tau\}_\tau$. Métodos similares a los desarrollados en el Capítulo 5 debiesen permitir estudiar también degeneraciones de las curvas elípticas E_τ . De este modo, una pregunta natural sería si acaso estas curvas elípticas degeneradas “descomponen” de alguna forma a la superficie degenerada en la que están “canónicamente” contenidas.

Índice de notaciones

\mathcal{A}_g	espacio de moduli de s.a.p.p 1
\mathcal{A}_2^*	compactificación toroidal de \mathcal{A}_2 2
\mathcal{E}_m	conjunto de las s.a.n.s con curva de exponente m 2
\mathcal{E}_m^*	clausura de \mathcal{E}_m en \mathcal{A}_2^* 2
$\mathbb{H}_2(\eta)$	subconjunto de \mathbb{H}_2 asociado a η 7
$\mathcal{A}_2(\eta)$	la imagen de $\mathbb{H}_2(\eta)$ en \mathcal{A}_2 7
η_v	forma diferencial asociada a $v \in \mathbb{Z}^5$ 8
$P(F), P'(F)$ y $P''(F)$	ciertos grupos asociados a F 14
$X(F)$	cociente de \mathbb{D}_2 por la acción de $P'(F)$ 14
$X_\Sigma(F)$	interior de la clausura de $X(F)$ 15
$Y_\Sigma(F)$	cociente de $X_\Sigma(F)$ por $P''(F)$ 15
e_{F_1}	cociente parcial corranjo 1 18
$K^0(1)$	una superficie modular de Kummer 19
e_{F_2}	cociente parcial corranjo 2 20
$\iota_g(\sigma)$	inmersión local asociada a una cara $g(\sigma) \in \Sigma$ 21
\mathbb{E}_m	preimagen de \mathcal{E}_m en \mathbb{H}_2 24
$K^0(1)[m]$	cierto subconjunto distinguido de $K^0(1)$ 27
\tilde{G}	toro escindido a compactificar 32
\mathbb{Y}	grupo de períodos 32
r, s, t	generadores de \mathbb{Y} 32
\mathbb{X}	grupo de caracteres 33
$R_{\Phi, \Sigma}$	un anillo importante 34
\tilde{P}	$\text{Proj}(R_{\Phi, \Sigma})$ 34
$\mathcal{U}_{\alpha, y}$	abiertos afines que cubren \tilde{P} 34
S_y^*	acción de \mathbb{Y} en $R_{\Phi, \Sigma}$ 34
ε	aplicación exponencial 35
$B_{\alpha, y}$	anillo de coordenadas de $\mathcal{U}_{\alpha, y}$ 38
$(B_{\alpha, y})_T$	anillo de coordenadas de $(\mathcal{U}_{\alpha, y})_T$ 38
\tilde{H}_i	subesquema de \tilde{G} a degenerar 45
\mathbb{Y}^i	subgrupo de \mathbb{Y} que actúa en \tilde{H}_i 46
\tilde{Q}_i	clausura de \tilde{H}_i 46
$Z_{\alpha, y}$	generadores de $R_{\Phi, \Sigma}$ 48

Bibliografía

- [ABH02] V. Alexeev, Ch. Birkenhake, and K. Hulek. Degenerations of Prym varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 553:73–116, 2002.
- [AMRT75] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, and Y. Tai. *Smooth compactification of locally symmetric varieties*. Math. Sci. Press, Brookline, Mass., 1975. Lie Groups: History, Frontiers and Applications, Vol. IV.
- [Auf15] Robert Auffarth, II. Elliptic curves on Abelian varieties. *Illinois J. Math.*, 59(2):319–336, 2015.
- [Auf16] Robert Auffarth. On a numerical characterization of non-simple principally polarized abelian varieties. *Math. Z.*, 282(3-4):731–746, 2016.
- [BB66] W. L. Baily, Jr. and A. Borel. Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. *Ann. of Math. (2)*, 84:442–528, 1966.
- [BL04] Christina Birkenhake and Herbert Lange. *Complex abelian varieties*, volume 302 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.
- [Deb99] Olivier Debarre. *Tores et variétés abéliennes complexes*, volume 6 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris; EDP Sciences, Les Ulis, 1999.
- [Dem12] Jean Pierre Demailly. *Complex Analytic and Differential Geometry*. e-book, Institut Fourier, 2012.
- [EH00] David Eisenbud and Joe Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [FC90] Gerd Faltings and Ching-Li Chai. *Degeneration of abelian varieties*, volume 22 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. With an appendix by David Mumford.
- [Fis76] Gerd Fischer. *Complex analytic geometry*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 538. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

- [FM83] Robert Friedman and David R. Morrison. The birational geometry of degenerations: an overview. In *The birational geometry of degenerations (Cambridge, Mass., 1981)*, volume 29 of *Progr. Math.*, pages 1–32. Birkhäuser, Boston, Mass., 1983.
- [Gro61] Alexander Grothendieck. éléments de géométrie algébrique : Iii. étude cohomologique des faisceaux cohérents, première partie. *Publications Mathématiques de IHÉS*, 11, 1961.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [HKW93] Klaus Hulek, Constantin Kahn, and Steven H. Weintraub. *Moduli spaces of abelian surfaces: compactification, degenerations, and theta functions*, volume 12 of *De Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.
- [HT18] Klaus Hulek and Orsola Tommasi. The topology of \mathcal{A}_g and its compactifications. In *Geometry of moduli*, volume 14 of *Abel Symp.*, pages 135–193. Springer, Cham, 2018. With an appendix by Olivier Taïbi.
- [Kan94] Ernst Kani. Elliptic curves on abelian surfaces. *Manuscripta Math.*, 84(2):199–223, 1994.
- [LR04] H. Lange and S. Recillas. Abelian varieties with group action. *J. Reine Angew. Math.*, 575:135–155, 2004.
- [Mon72] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I), Dirigé par A. Grothendieck. Avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim.
- [Mum72] David Mumford. An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings. *Compositio Math.*, 24:239–272, 1972.
- [MV12] Margarida Melo and Filippo Viviani. Comparing perfect and 2nd Voronoi decompositions: the matroidal locus. *Math. Ann.*, 354(4):1521–1554, 2012.
- [Nam80] Yukihiro Namikawa. *Toroidal compactification of Siegel spaces*, volume 812 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.
- [Ols08] Martin C. Olsson. *Compactifying moduli spaces for abelian varieties*, volume 1958 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [Per77] Ulf Persson. On degenerations of algebraic surfaces. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 11(189):xv+144, 1977.
- [Sat56] Ichiro Satake. On the compactification of the Siegel space. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 20:259–281, 1956.