Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Calculando o Fluxo pelo Cálculo Funcional

Natália Maciel Rocha

Belo Horizonte - MG

NATÁLIA MACIEL ROCHA

CALCULANDO O FLUXO PELO CÁLCULO FUNCIONAL

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hamilton Prado Bueno

Belo Horizonte - MG

NATÁLIA MACIEL ROCHA

CALCULANDO O FLUXO PELO CÁLCULO FUNCIONAL

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática.

Aprovada em 24 de fevereiro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Hamilton Prado Bueno - Orientador
UFMG

Prof. Dr. Helder Candido Rodrigues
UFMG

Prof. Dr. Grey Ercole
UFMG

Belo Horizonte - MG

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, por tudo que me tem concedido.

Aos meus pais Maria de Lourdes e Elison por todo amor, cuidado e por serem meus maiores exemplos de vida. Palavras são insuficientes para expressar toda minha gratidão.

Aos meus irmãos Maxwell e Camila pelo companheirismo, amizade e por tornarem minha vida mais alegre.

Ao meu noivo Luan, por todo amor, apoio e compreensão.

Ao meu orientador Hamilton Prado Bueno, que muito me ajudou para a conclusão deste trabalho. E aos professores da banca examinadora Helder Candido Rodrigues e Grey Ercole.

Agradeço também, aos meus amigos da graduação Dani, Luana, Jéssica, Sávio, Túlio, Pain, Vinícius e Vlad pelo companheirismo. E em especial, agradeço às minhas amigas Hellen e Manu que me apoiaram e ajudaram durante todo o período da Especialização.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar uma maneira de calcular e^{At} (fluxo) através do cálculo funcional.

Considerando $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (ou $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) uma função euclidiana com relação a um polinômio $p \in \mathbb{K}[z]$ iremos entender o polinômio interpolador r (em $f = qp + r$). O polinômio interpolador será crucial para entendermos a "função de matrizes".

Verificaremos que existe um homomorfismo ϕ entre as álgebras $\mathbb{K}[z]$ (conjunto de todos os polinômios p com coeficientes em $\mathbb{K}$) e $\mathbb{K}[T]$ (conjunto de todas as aplicações lineares obtidas em $\mathbb{K}$ ao se avaliar o polinômio $p(z)$ em $T \in L(X, X)$).

Será apresentada então, a aplicação linear $f(T)$ (função de matrizes) e veremos que $f(T) = r(T)$, onde $r(T)$ é o mesmo polinômio interpolador citado acima (Como r é um polinômio sabemos calcular $r(T)$).

Sendo assim, considerando $f(z) = e^{zt}$ e o homomorfismo entre as álgebras $\mathbb{K}[z]$ e $\mathbb{K}[T]$, conseguiremos (através do polinômio interpolador) calcular $f(A) = r(A) = e^{At}$, onde $A \in \mathbb{M}_{nxn}(\mathbb{K})$ ($[T]_\beta \in \mathbb{M}_{nxn}$ o que implica que a álgebra $L(X, X)$ pode ser identificada como $\mathbb{M}_{nxn}$).

O Polinômio Interpolador

Definição 0.1 *Seja $p(z)$ um polinômio da forma $(z - z_0)^k q(z)$, com $q(z_0) \neq 0$ e $k \in \{2, 3, \ldots\}$. Dizemos que a raiz z_0 de $p(z)$ tem* ***multiplicidade*** *k.*

Segue desta definição que $p'(z_0) = \ldots = p^{(k-1)}(z_0) = 0$, mas $p^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Definição 0.2 *Uma função $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (ou $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) é* ***euclidiana*** *com relação ao polinômio p se:*

(i) todas as raízes de p pertencem a U (respectivamente a I);

(ii) se z_0 for uma raiz de p com multiplicidade k, então f tem derivadas até a ordem k em z_0.

Definição 0.3 *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é* ***analítica*** *em U, se ela possuir derivada em todos os pontos do aberto U.*

Temos então que se f for analítica em um aberto U a condição *(ii)* verifica-se imediatamente.

Lema 0.4 *Sejam dados os valores*

$$\begin{array}{cccc} f(z_1) & f'(z_1) & \ldots & f^{(d_1-1)}(z_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(z_l) & f'(z_l) & \ldots & f^{(d_l-1)}(z_l) \end{array}$$

em que $z_1, \ldots, z_l$ são distintos. Seja $n = d_1 + d_2 + \ldots + d_l$. Então, existe um único polinômio r, de grau menor ou igual a $n - 1$, ou identicamente nulo, satisfazendo

$$r^{k_i}(z_i) = f^{k_i}(z_i)$$

para todo $i = 1, \ldots, l$ e $k_i = 0, \ldots, d_i - 1$, onde $f^{(0)} = f$.

Antes de passarmos à demonstração do caso geral, vejamos um teorema que será utilizado nesta demonstração.

Teorema 0.5 *Seja B uma matriz $n \times n$.*

(i) O sistema associado $BX = b$ tem solução única se, e somente se, B é invertível. Neste caso a solução é $X = B^{-1}b$.

(ii) O sistema homogêneo $BX = 0$ tem solução não trivial se, e somente se, B é singular (não invertível).

Demonstração:

(i) Se B é invertível, então existe B^{-1} tal que $B^{-1}B = BB^{-1} = I$. Portanto, multiplicando-se $BX = b$ por B^{-1} à esquerda em ambos os membros obtemos:

$$\begin{aligned} B^{-1}BX &= B^{-1}b \\ (B^{-1}B)X &= B^{-1}b \\ I_n X &= B^{-1}b \\ X &= B^{-1}b. \end{aligned}$$

(ii) Todo sistema homogêneo possui pelo menos a solução trivial. Portanto pelo item anterior esta será a única solução se, e somente se, B for invertível.

$\square$

Agora, vejamos em um exemplo a demonstração do lema antes de passarmos ao caso geral.

Exemplo 0.6 *Sejam dados os valores $f(z_1), f(z_2)$ e $f'(z_2)$, onde z_1 e z_2 são distintos. Queremos encontrar um polinômio r de grau menor ou igual à 2, tal que $r(z_1) = f(z_1), r(z_2) = f(z_2)$ e $r'(z_2) = f'(z_2)$.*
Seja $r(z) = az^2 + bz + c$, então temos que os coeficientes de r devem satisfazer ao seguinte sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} {z_1}^2 & z_1 & 1 \\ {z_2}^2 & z_2 & 1 \\ 2z_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(z_1) \\ f(z_2) \\ f'(z_2) \end{pmatrix}$$

Suponhamos que B não seja invertível, então o sistema homogêneo associado $BX = 0$ possui uma solução não trivial que denominaremos por $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.

Tomemos o polinômio não nulo

$$t(z) = a_0 z^2 + b_0 z + c_0.$$

Como $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ *é uma solução do sistema homogêneo associado, temos que* $a_0 z_1^2 + b_0 z_1 + c_0 = 0$, $a_0 z_2^2 + b_0 z_2 + c_0 = 0$ *e* $2a_0 z_2 + b_0 = 0$*, ou seja,* z_1 *e* z_2 *são raízes de* $t(z)$ *e* z_2 *possui multiplicidade 2 (pois* z_2 *é raiz da derivada de* t*). Sendo assim,* $t(z)$ *é um múltiplo de* $(z - z_1)(z - z_2)^2$*, portanto* $t(z)$ *tem grau maior ou igual à 3, o que é absurdo. Logo* B *é invertível e o sistema possui solução única para quaisquer valores* $f(z_1)$, $f(z_2)$ *e* $f'(z_2)$*.*

Enfim vamos à demonstração do lema (caso geral).

Demonstração:

Queremos encontrar um polinômio r de grau menor ou igual à $n-1$ tal que $r^{k_i}(z_i) = f^{k_i}(z_i)$, onde $i = 1, 2, \ldots, l$ e $k_i = 0, \ldots, d_{i-1}$.

Seja $r = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, temos que r satisfaz a um sistema linear que pode ser escrito matricialmente como:

$$Bz = b,$$

onde z é o vetor que tem como coordenadas os coeficientes procurados de r, b um vetor cujas n coordenadas são os valores conhecidos de f e B a matriz $n \times n$ do sistema linear assim formado.

Suponhamos que B não possua inversa, então o sistema homogêneo associado, $Bz = 0$ possui solução não trivial

$$z_0 = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Consideremos o polinômio não nulo

$$t(z) = c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$$

que é um polinômio de grau menor ou igual à $n-1$. Como z_0 satisfaz o sistema homogêneo associado, temos que $z_1, \ldots, z_l$ são raízes de $t(z)$, de multiplicidade $d_1, \ldots, d_l$ respectivamente, portanto $t(z)$ deve ser um múltiplo de $(z-z_1)^{d_1} \ldots (z-z_l)^{d_l}$ o que é absurdo, pois $d_1 + \ldots + d_l = n$, ou seja o grau de $t(z)$ seria maior ou igual a n o que contradiz nossa hipótese.

Sendo assim B possui inversa e o sistema $Bz = b$ possui solução única, para qualquer que seja o vetor b. □

O polinômio r é chamado de **polinômio interpolador**.

Proposição 0.7 *Seja f euclidiana com relação ao polinômio p. Então existem uma função q, contínua em cada uma das raízes do polinômio p, e um polinômio r tais que $f = qp + r$, onde $gr(r) < gr(p)$ ou r é o polinômio identicamente nulo.*

Demonstração: Seja r um polinômio arbitrário. Consideremos a função q definida (nos pontos do domínio de f que não são raízes de p) por

$$q = \frac{f-r}{p}.$$

Queremos mostrar que podemos escolher r com grau menor do que o de p, de modo que q possua extensão contínua em cada uma das raízes de p. Podemos observar que o comportamento de q se assemelha ao comportamento de f em cada ponto z que não é raiz de p.

Seja z_0 uma raiz de multiplicidade k de p, ou seja, $p(z) = (z-z_0)^k s(z)$, onde $s(z_0) \neq 0$. Queremos achar r de modo que possamos estender q da seguinte forma:

$$\bar{q} = \begin{cases} q(z), & \text{se } z \neq z_0 \\ \lim\limits_{z \to z_0} q(z), & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

ou seja,de maneira que q possua extensão contínua em z_0.

Precisamos então, que exista o limite:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} q(z) &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-r(z)}{(z-z_0)^k s(z)}\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{1}{s(z)}\cdot \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-r(z)}{(z-z_0)^k}\\ &= \frac{1}{s(z_0)}\cdot \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-r(z)}{(z-z_0)^k}\end{aligned}$$

Como $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k = 0$, para que exista $\lim_{z\to z_0} q(z)$ é necessário que $\lim_{z\to z_0} f(z)-r(z) = 0$, para que possamos aplicar a regra de L'Hospital, ou seja precisamos que $\lim_{z\to z_0} f(z) - r(z) = f(z_0) - r(z_0) = 0 \Leftrightarrow f(z_0) = r(z_0)$.

Aplicando a regra de L'Hospital, temos:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-r(z)}{(z-z_0)^k} = \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)-r'(z)}{k(z-z_0)^{k-1}}$$

Mas, novamente, $\lim_{z\to z_0} k(z-z_0)^{k-1} = 0$, portanto precisamos que $\lim_{z\to z_0} f'(z) - r'(z) = 0$, para que exista $\lim_{z\to z_0} q(z)$. Ou seja, $f'(z_0) = r'(z_0)$.

Então para que exista $\lim_{z\to z_0} q(z)$, precisamos que

$$f^{(2)}(z_0) = r^{(2)}(z_0), \ldots, f^{(k-1)}(z_0) = r^{(k-1)}(z_0)$$

e que $f^k(z_0)$ exista, pois $\lim_{z\to z_0} q(z) = \frac{f^k(z_0)-r^k(z_0)}{k!}$ e como r é um polinômio, $r^k(z_0)$ existe $\forall k$.

Portanto só resta mostrar que existe um polinômio r com grau menor do que o de p, ou nulo, que satisfaz

$$f(z_0) = r(z_0), f'(z_0) = r'(z_0), \ldots, f^{(k-1)}(z_0) = r^{(k-1)}(z_0).$$

Mas este resultado segue do lema anterior.

$\square$

Um Homomorfismo de Álgebras

Definição 0.8 *Um* ***espaço vetorial*** X *sobre o corpo* $\mathbb{K}$ *é um conjunto cujos elementos (chamados vetores) poder ser somados e multiplicados por escalares, isto é, os elementos do corpo* $\mathbb{K}$. *Se* x, y, $z \in X$ *e* λ,$\mu \in \mathbb{K}$, *as seguintes propriedades devem ser satisfeitas pela adição e multitiplicação por escalar:*

(i) $x + y \in X$ *(fechamento);*

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(associatividade);*

(iii) $x + y = y + x$ *(comutatividade);*

(iv) *existe* $0 \in X$ *tal que* $x + 0 = x$ *(elemento neutro);*

(v) *existe* $(-x) \in X$ *tal que* $x + (-x) = 0$ *(inverso aditivo);*

(vi) $\lambda x \in X$ *(fechamento);*

(vii) $\mu(\lambda x) = (\mu\lambda)x$ *(associatividade);*

(viii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ *(distributividade);*

(ix) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ *(distributividade);*

(x) $1x = x$ *(regra da unidade).*

Definição 0.9 *Sejam* X *e* Y *espaços vetoriais sobre o corpo* $\mathbb{K}$. *Uma aplicação*

$$T : X \longrightarrow Y$$

satisfazendo

$$T(x + \lambda y) = Tx + \lambda Ty$$

para quaisquer $x, y \in X$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$ *é chamada* ***transformação linear*** *ou* ***aplicação linear***. *Se* $X = Y$, *também chamamos* T *de* ***operador linear*** *ou simplesmente* ***operador***.

Temos que o conjunto dos polinômios em $\mathbb{K}[z]$ e o conjunto dos operadores lineares $T : X \longrightarrow X$ definidos em um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ são espaços vetoriais e além disso eles têm uma importante propriedade em comum: existe uma multiplicação em ambos os conjuntos.

Definição 0.10 *Uma **álgebra** A sobre o corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ que possui, adicionalmente, uma multiplicação satisfazendo as seguintes propriedades, para todos $u, v, w \in A$ e $k \in \mathbb{K}$:*

(i) $(uv)w = u(vw)$ *(associatividade);*

(ii) $u(v + w) = uv + uw$ *(distributividade);*

(iii) $k(uv) = (ku)v = u(kv)$.

*Se existir um elemento $e \in A$ tal que $eu = ue = u$ para todo $u \in A$, a álgebra A possui uma **unidade**. Se $uv = vu$ para todos $u, v \in A$, temos uma álgebra **comutativa**.*

Temos que o espaço vetorial $\mathbb{K}[z]$ de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$ é uma álgebra comutativa com unidade.

O espaço vetorial $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma álgebra não comutativa com unidade.

O espaço vetorial $L(X, X)$ (conjunto de todas os operadores lineares $T : X \longrightarrow X$) é uma álgebra. Se $dimX = n$ e $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base para X, então se $T \in L(X.X)$ temos que $[T]_\beta \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Sendo assim, a álgebra $L(X, X)$ pode ser identificada como $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, ao escolhermos uma base em X.

Fixado T em $L(X, X)$, seja $\mathbb{K}[T]$ o conjunto de todas as aplicações lineares obtidas ao se avaliar o polinômio $p \in \mathbb{K}[z]$ em $T \in L(X, X)$, ou seja, $T \longmapsto p(T) \in L(X, X)$. Temos, claramente, que $\mathbb{K}[T]$ é uma subálgebra comutativa de $L(X, X)$.

Consideremos agora, as álgebras $\mathbb{K}[z]$ e $\mathbb{K}[T]$, definidas acima. E consideremos, também, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{K}[z] &\longrightarrow \mathbb{K}[T] \\ p &\longmapsto p(T). \end{aligned}$$

Queremos verificar que ϕ é uma aplicação linear que satisfaz, adicionalmente,

$$\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$$

Primeiramente, vamos verificar que ϕ é uma aplicação linear.

Sejam $p, q \in \mathbb{K}[z]$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos que

$$\phi(\lambda p + q) = \lambda\phi(p) + \phi(q) \iff (\lambda p + q)(T) = \lambda p(T) + q(T)$$

Seja $[T]_\beta = B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ e $q(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j$, suponhamos que $n \geq m$ (sem perda de generalidade).

Temos que

$$\lambda p(z) = \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i z^i$$

e

$$(\lambda p(z) + q(z)) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i + b_i) z^i \text{ tal que } b_i = 0\ \forall i > m.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
(\lambda p + q)(B) &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i + b_i) B^i, \text{ onde } b_i = 0\ \forall i > m \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i B^i + b_i B^i) \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{n} \lambda a_i B^i + \sum_{i=0}^{m} b_i B^i \\
&= \lambda \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i B^i + \sum_{i=0}^{m} b_i B^i \\
&= \lambda p(B) + q(B)
\end{aligned}$$

Portanto ϕ é uma aplicação linear.

Agora, vamos verificar que esta aplicação linear satisfaz:

$$\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$$

Temos que

$$\phi(pq) = \phi(p)\phi(q) \iff (pq)(T) = p(T)q(T)$$

Como $(pq)(z) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j z^{i+j}$, então temos

$$\begin{gathered}
(pq)(B) = \textstyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j B^{i+j} \\
\textstyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j B^i B^j \\
(\textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i B^i)(\sum_{j=0}^{m} b_j B^j) \\
p(B)q(B)
\end{gathered}$$

Portanto a aplicação, satisfaz $\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$. Sendo assim temos que ϕ é um **homomorfismo de álgebras**.

Funções de Matrizes

Definição 0.11 *Um **polinômio mínimo** $m \in \mathbb{K}[z]$ de uma aplicação $T : X \longrightarrow X$ é um polinômio mônico de menor grau tal que $m(T) = 0$.*

Lembrando que um polinômio é **mônico** se o coeficiente de seu termo de maior grau for igual à 1.

Definição 0.12 *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, com dimensão finita n e $T : X \longrightarrow X$ um operador. O polinômio $p(t) := det(tI - T)$ é o **polinômio característico** de T. Onde det significa determinante e I é a matriz identidade.*

Seja $T : X \longrightarrow X$ um operador definido no espaço vetorial de dimensão finita X e m o polinômio mínimo de T.

Suponhamos que f seja euclidiana em relação ao polinômio m. Então

$$f(z) = q(z)m(z) + r(z),$$

com $gr(r) < gr(m)$. Uma vez que $m(T) = 0$, é natural definir

$$f(T) = r(T).$$

Definição 0.13 *Seja $m(z) = (z - \lambda_1)^{d_1} \cdots (z - \lambda_l)^{d_l}$ o polinômio mínimo do operador T. Se estiverem definidos os valores*

$$\begin{array}{cccc} f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) & \dots & f^{(d_1-1)}(\lambda_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(\lambda_l) & f'(\lambda_l) & \dots & f^{(d_l-1)}(\lambda_l), \end{array}$$

*dizemos que f é **euclidiana com respeito a** T e definimos*

$$f(T) = r(T),$$

sendo r o polinômio interpolador dado pelo lema 0.4.

A definição acima tem uma consequência importante: O operador $f(T)$ sempre comuta com T. De fato, $T \in \mathbb{K}[T]$, pois $T = p(T)$, onde p é a identidade em $\mathbb{K}[z]$. Sendo assim,

$$f(T)T = r(T)T = r(T)p(T)$$

como r e p pertencem à $\mathbb{K}[z]$(conjunto dos polinômios, sendo r o polinômio interpolador), temos que r e p comutam (pois $\mathbb{K}[z]$ é álgebra comutativa), portanto

$$r(T)p(T) = (rp)(T) = (pr)(T) = p(T)r(T) = Tf(T)$$

Ou seja, $f(T)T = Tf(T)$.

Observação 0.14 *Comparando a definição anterior com a definição de uma função euclidiana f com respeito à m, podemos verificar que as exigências sobre f são menos restritivas.*

Isso porque na divisão euclidiana $f(z) = q(z)m(z)+r(z)$ precisamos impor condições em f que possibilitem definir uma função q que dê um sentido àquela divisão. Se essas exigências forem satisfeitas podemos concluir que r é o polinômio interpolador que está definido sob condições menos exigentes.

Por outro lado, ao considerarmos $f(T)$, supondo possível a substituição de z por T na igualdade $f(z) = q(z)m(z) + f(z)$, obtemos $f(T) = q(T)m(T) + r(T)$, como $m(T) = 0$ teremos $f(T) = r(T)$, independente da definição de $q(T)$. Assim, apenas o valor do polinômio r em T é importante.

No entanto, a definição 0.13 é pouco aplicável, pois muitas vezes é mais fácil obter o polinômio característico p de T do que o polinômio mínimo m. Portanto, seria interessante se pudéssemos utilizar p ao invés de m na definição do operador $f(T)$.

Suponhamos que s pertença à $\mathbb{K}[z]$ e que $s[T] = 0$. Então, s é um múltiplo de m (polinômio mínimo de T). E pelo Teorema de Cayley-Hamilton temos que se $p \in \mathbb{K}[z]$ for o polinômio característico de um operador T, então $p(T) = 0$ (resultado que não será demonstrado neste trabalho). Portanto o polinômio característico $p \in \mathbb{K}[z]$ é múltiplo de m.

Sendo assim, vamos verificar se podemos utilizar um múltiplo de m ao invés de utilizarmos m na definição 0.13.

Ao mostrarmos esse resultado manteremos a notação $f = qm + r$ (sendo r o polinômio interpolador definido antes) para simbolizar que $f(T)$ foi definido como $r(T)$.

Consideremos $s \in \mathbb{K}[z]$ tal que $s[T] = 0$ e seja r_1 o polinômio interpolador gerado por s. Então teríamos $f = q_1 s + r_1$ (ou seja, $f(T)$ seria definido como $r_1(T)$.

Portanto temos,

$$f = q_1 s + r_1$$
$$qm + r = q_1 s + r_1$$
$$qm + r = q_1(km) + r_1, \text{ pois } s \text{ é múltiplo de } m$$
$$(q - q_1 k)m + r = r_1$$

Tomando $(q - q_1 k)$ como q_2, temos:

$$r_1(z) = q_2(z)m(z) + r(z) \ (*)$$

Se λ for uma raiz de multiplicidade d de $m(z)$, notamos que

$$r_1^{(i)}(\lambda) = f^{(i)}(\lambda) = r^{(i)}(\lambda), \text{ para } i = 0, \ldots, d-1.$$

Como todos os termos da equação $(*)$ são polinômios, a substituição de z por T faz sentido, de acordo com o capítulo anterior. Sendo assim,

$$r_1(T) = r(T),$$

o que possibilita a utilização de qualquer múltiplo $s(z)$ do polinômio mínimo $m(z)$ do operador T ao invés de $m(z)$ na definição 0.14.

Observação 0.15 *Na argumentação anterior, não verificamos que $r_1 = r$, mas apenas que $r_1(T) = r(T)$.*

Exemplo 0.16 *Consideremos a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de A é

$$p(z) = z^2 - z - 2$$

Sendo assim, temos que $z = -1$ e $z = 2$ são raízes de $p(z)$.
Se quisermos calcular A^{500}, definimos a função $f(z) = z^{500}$ e consideramos o polinômio

$r(z) = az + b$ satisfazendo $r(-1) = f(-1)$ e $r(2) = f(2)$. Sendo assim, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ 2a + b = 2^{500} \end{cases}$$

Resolvildo o sistema, encontramos $a = \dfrac{2^{500} - 1}{3}$ e $b = \dfrac{2^{500} + 2}{3}$.

Logo,

$$A^{500} = f(A) = r(A) = \frac{2^{500} - 1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2^{500} + 2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{501} + 1 & 2^{501} - 2 \\ 2^{500} - 1 & 2^{500} + 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 0.17 *Consideremos a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

O polinômio caracterísco de A é

$$p(z) = z^2 - 6z + 9$$

Sendo assim, temos que $z = 3$ é raíz de multiplicidade 2 de $p(z)$.
Se quisermos calcular $ln(A)$, definimos a função $f(z) = ln(z)$ e consideremos o polinômio $r(z) = az + b$ satisfazendo $r(3) = f(3)$ e $r'(3) = f'(3)$, sendo assim temos que $r'(3) = a = f'(3) = \dfrac{1}{3}$, o que implica que $a = \dfrac{1}{3}$ e $b = ln(3) - 1$.

Logo,

$$ln(A) = f(A) = r(A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + [ln(3) - 1] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ln(3) & \frac{1}{3} \\ 0 & ln(3) \end{pmatrix}.$$

Exemplo 0.18 *Consideremos a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de A é

$$p(z) = det(A - zI) = -z^3 + 6z^2 - 9z + 4$$

Sendo assim, temos que $z = 1$ e $z = 4$ são raízes de $p(z)$, onde $z = 1$ é raiz de multiplicidade 2.

O polinômio mínimo de A é $m(z) = (z-1)(z-4)$.

Se quisermos calcular A^{1000}, definimos a função $f(z) = z^{1000}$ e consideramos o polinômio $r(z) = az + b$ satisfazendo $r(4) = f(4) = 4^{1000}$ e $r(1) = f(1) = 1^{1000} = 1$.

Então temos $r(1) = a + b = 1$ e $r(4) = 4a + b = 4^{1000}$, portanto resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ \\ 4a + b = 4^{1000} \end{cases}$$

encontramos $a = \dfrac{4^{1000}-1}{3}$ e $b = \dfrac{4-4^{1000}}{3}$, logo $r(z) = \dfrac{4^{1000}-1}{3}z + \dfrac{4-4^{1000}}{3}$.

Como m é o polinômio mínimo de A temos que $m(A) = 0$, uma vez que $f(z) = z^{1000}$ é um polinômio, poderíamos ter feiro a divisão euclidiana $f(z) = q(z)m(z) + r(z)$ (obtendo assim r), donde se segue que $f(A) = A^{1000} = r(A)$ em virtude do homomorfismo de álgebras. Logo,

$$f(A) = A^{1000} = r(A) = \frac{4^{1000}-1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{4-4^{1000}}{3}I$$

$$f(A) = A^{1000} = r(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{4^{1000}+2}{3} & \dfrac{4^{1000}-1}{3} & \dfrac{4^{1000}-1}{3} \\ \dfrac{4^{1000}-1}{3} & \dfrac{4^{1000}+2}{3} & \dfrac{4^{1000}-1}{3} \\ \dfrac{4^{1000}-1}{3} & \dfrac{4^{1000}-1}{3} & \dfrac{4^{1000}+2}{3} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 0.19 *Consideremos a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Queremos calcular o $cos(A)$.

Temos que o polinômio característico de A é $p(z) = z^3$. E o polinômio mínimo de A é $m(z) = z^2$.

Como queremos calcular $cos(A)$, definimos a função $f(z) = cos(z)$.

Utilizando p, obtemos o polinômio interpolador $r_p(z) = az^2 + bz + c$. Temos que $r(z)$ deve satisfazer:

$$r_p(0) = f(0) = cos(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$r_p'(0) = f'(0) = -sen(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$r_p''(0) = f''(0) = -cos(0) = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Sendo assim temos que $r(z) = -\frac{1}{2}z^2 + 1.$

Utilizando m, obtemos o polinômio interpolador $r_m(z) = az + b$. *E temos que* $r(z)$ *deve satisfazer:*

$$r_m(0) = f(0) = cos(0) = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$r_m'(0) = f'(0) = -sen(0) = 0 \Rightarrow a = 0$$

Sendo assim temos que $r_m(z) = 1.$

Portanto $r_p \neq r_m$, *mas*

$$r_p(A) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r_m(A),$$

como vimos anteriormente.

Estendendo o Homomorfismo de Álgebras

Sejam $T : X \longrightarrow X$ uma aplicação linear definida no espaço vetorial X de dimensão n e m seu polinômio mínimo. Suponhamos que f e g sejam euclidianas com relação à T. Queremos mostrar, aqui, que em $(fg)(z)$ é válida a substituição de z por T, ou seja $(fg)(T) = f(T)g(T)$.

Suponhamos $m(z) = (z - \lambda_1)^{d_1} \cdots (z - \lambda_l)^{d_l}$ o polinômio mínimo de T. Sabemos (da seção Um Homomorfismo de Álgebras) que existe um homomorfismo ϕ entre $\mathbb{K}[z]$, a álgebra de polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}[T]$, a álgebra de operadores lineares obtida ao se alvaliar cada polinômio $p \in \mathbb{K}[z]$ em T.

Consideremos I o conjunto de todas as funções euclidianas com respeito à T, ou seja, I= $\{f|f$ é euclidiana com respeito à $T\}$. Temos que I é uma álgebra sobre $\mathbb{K}$ e que a álgebra $\mathbb{K}[z] \subset I$ o que implica que $\mathbb{K}[z]$ é subálgebra de I.

Vamos, agora, definir Φ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Phi : I &\longrightarrow \mathbb{K}[T] \\ f &\longmapsto f(T). \end{aligned}$$

Sendo $f(T) = r_f(T)$, onde r_f é o polinômio interpolador de f e $g(T) = r_g(T)$, onde r_g é o polinômio interpolador de g.

Temos que $f(z) = q_1(z)m(z) + r_f(z)$ e $g(z) = q_2m(z) + r_g(z)$ denotam as divisões euclidianas de f e g por m. E temos que

$$\Phi(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(T) = (\lambda r_f + r_g)(T) = \lambda r_f(T) + r_g(T) = \lambda f(T) + g(T).$$

Portanto Φ é uma **aplicação linear**.

Queremos verificar, agora, que $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$.

$$\Phi(fg) = (fg)(T) = (r_f r_g)(T) = r_f(T)r_g(T) = f(T)g(T) = \Phi(f)\Phi(T).$$

Como queríamos demonstrar.

Isso mostra que Φ é um homomorfismo de álgebras, que estende o homomorfismo ϕ.

O Fluxo - Uma aplicação do cálculo funcional

A ideia inicial do conceito da exponencial de uma matriz, é a de estender a expressão da solução $x(t) = e^{at}x_0$ da equação **escalar** $x' = ax$ à uma expressão da solução $x(t) = e^{At}x_0$ da equação **vetorial** $x' = Ax$.

Para resolver a equação diferencial $x' = Ax$ com a condição inicial $x(0) = x_0$ devemos entender e^{At}, pois a solução desta equação é dada explicitamente por $x(t) = e^{At}x_0$. Como veremos a seguir.

Seja a uma constante, (o que equivale a dizer que A uma matriz $n \times n$ onde $n = 1$), então o sistema se reduz a uma única equação de primeira ordem

$$x' = ax$$

e sua solução é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax \\ \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} &= a \\ \int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt &= \int adt, \end{aligned}$$

onde c é uma constante.

$$ln(x) = at + c$$

$$e^{ln(x)} = e^{at+c}$$

$$x = e^{at}e^c$$

denominando e^c por k.

$$x = e^{at}k$$

como $x(0) = x_0$, temos:

$$x(0) = e^{a0}k = x_0$$

$$e^0 k = x_0$$

$$k = x_0$$

ou seja, a solução é dada por $x(t) = e^{at}x_0$.

No caso de $n \geq 2$ temos que a solução x é um vetor, então vamos supor que uma solução vai envolver uma função exponencial e^{rt} e vamos multiplicar e^{rt} por um vetor constante ξ (para que a solução seja um vetor). Assim, procuramos soluções, para $x' = Ax$, da forma:

$$x = \xi e^{rt},$$

onde o expoente r e o vetor ξ devem ser determinados.

Substituindo x na equação $x' = Ax$ temos:

$$r\xi e^{rt} = A\xi e^{rt}$$

Cancelando o valor escalar não nulo, obtemos

$$A\xi = r\xi$$

$$A\xi - r\xi = 0$$

$$(A - rI)\xi = 0$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$.

Portanto para resolvermos o sistema de equações diferenciais $x' = Ax$ precisamos resolver o sistema de equações algébricas $(A - rI)\xi = 0$. Este último sistema é o que determina os autovalores e autovetores da matriz dos coeficientes A. Então, o vetor x dado pela equação $x = \xi e^{rt}$ é uma solução da equação $x' = Ax$, desde que r seja um autovalor e ξ um autovetor associado da matriz de coeficientes A.

Vejamos um exemplo onde A é uma matriz 2×2, para adiante entendermos o caso geral $n \times n$.

Exemplo 0.20 *Consideremos o sistema*

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x$$

Para encontrar explicitamente as soluções vamos supor que $x = \xi e^{rt}$ *e substituir na equação acima. Somos levados então, ao sistema de equações algébricas*

$$\begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esta equação tem uma solução não trivial se, e somente se,o determinante da matriz de coeficientes é zero. Logo os valores permitidos para r *são encontrados pela equação:*

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4 = r^2 - 2r - 3 = 0$$

As raízes desta equação são $r_1 = 3$ *e* $r_2 = -1$*; esses são os autovalores da matriz de coeficientes. Se* $r = 3$*, o sistema* $\begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *se reduz à uma única equação*

$$-2\xi_1 + \xi_2 = 0$$

Logo $\xi_2 = 2\xi_1$ *e o autovetor correspondente a* $r_1 = 3$ *pode ser escolhido como*

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Analogamente, correspondendo a $r_2 = -1$ *encontramos que* $\xi_2 = -2\xi_1$*, de modo que o autovetor é*

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

As soluções correspondentes da equação diferencial são

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Portanto as soluções $x^{(1)}$ *e* $x^{(2)}$ *formam um* ***conjunto fundamental de soluções****, e a solução geral do sistema é*

$$x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)}$$
$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t},$$

onde c_1 *e* c_2 *são constantes arbitrárias.*

Suponhamos agora que $A = P(t)$ é uma matriz $n \times n$ e que $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,...,$x^{(n)}$ formam um **conjunto fundamental de soluções** para a equação

$$x' = P(t)x$$

em algum intervalo $\alpha < t < \beta$. Então a matriz

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

cujas colunas são os vetores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,...,$x^{(n)}$ é uma **matriz fundamental** para o sistema $x' = P(t)x$. Note que uma matriz fundamental é invertível, pois suas colunas são vetores linearmente independentes.

A solução de um problema de valor inicial pode ser escrita de maneira bem compacta em termos de uma matriz fundamental. A solução geral da equação $x' = P(t)x$ é

$$x = c_1 x^{(1)}(t) + \cdots + c_n x^{(n)}(t)$$

ou, em termos de $\Psi(t)$

$$x = \Psi(t)c,$$

onde c é um vetor constante com componentes $c_1, \ldots, c_n$. Para um problema de valor inicial consistindo na equação diferencial $x' = P(t)x$ e na condição inicial

$$x(t_0) = x^0,$$

onde t_0 é um ponto em $\alpha < t < \beta$ e x^0 é um vetor inicial dado, basta escolher o vetor c que satisfaça a condição inicial. Portanto c tem que satisfazer

$$\Psi(t_0)c = x^0.$$

Logo, como $\Psi(t_0)$ é invertível,

$$c = \Psi^{-1}(t_0)x^0$$

e

$$x = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)x^0$$

é a solução do problema de valor inicial dado.

Algumas vezes é conveniente usar a **matriz fundamental especial**, denotada por $\Phi(t)$, cujas colunas são os vetores $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ que além de satisfazerem a equação diferencial $x' = P(t)x$ esses vetores satisfazem as condições iniciais

$$x^{(j)}(t_0) = e^{(j)}$$

onde $e^{(j)}$ e o vetor unitário, com um na j-ésima posição e zeros em todas as outras componentes. Assim, $\Phi(t)$ tem a propriedade

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I,$$

onde I é a matriz identidade.

Vamos sempre reservar o símbolo Φ para denotar a matriz fundamental que satisfaz a condição inicial $\Phi(t_0)$ dada acima e usar Ψ para denotar uma matriz fundamental arbitrária.

A definição usual do **fluxo** é dada por e^{At}. Essa depende da noção de convergência uniforme e da noção de norma de uma matriz quadrada.

Já vimos que a solução do problema de valor inicial escalar

$$x' = ax, x(0) = x_0,$$

onde a é constante, é

$$x = x_0 e^{at}.$$

Consideremos, agora, o problema de valor inicial correspondente para um sistema $n \times n$, a saber,

$$x' = Ax, x(0) = x^0,$$

onde A é uma matriz constante. Aplicando o que vimos acima, podemos escrever sua solução como

$$x = \Phi(t)x^0,$$

onde $\Phi(0) = I$. A comparação entre os problemas $x' = ax, x(0) = x_0$(onde a é uma constante) e $x' = Ax, x(0) = x_0$(onde A é uma matriz constante) e suas soluções sugere que a matriz $\Phi(t)$ pode ter um caráter exponencial. Vamos explorar essa possibilidade.

A função exponencial escalar e^{at} pode ser representada pela série de potências

$$e^{at} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!},$$

que converge para todo t. Vamos agora, substituir o escalar a pela matriz $n \times n$ constante A e considerar a série correspondente

$$I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!} + \cdots .$$

Cada termo desta série é uma matriz $n \times n$. Esta série converge (não mostraremos, pois não é o objetivo deste trabalho, exige conceitos que não são vistos de maneira detalhada na graduação) e define uma nova matriz como sua soma, que denotamos por e^{At}, ou seja,

$$e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!},$$

análoga à expansão da função escalar e^{at}.

Ao diferenciarmos a série e^{At} termo a termo, obtemos

$$\frac{d}{dt}[e^{At}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!} = A[I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}] = Ae^{At}$$

Assim, e^{At} satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}[e^{At}] = Ae^{At}.$$

Além disso, quando $t = 0$ temos que e^{At} satisfaz a condição inicial

$$e^{At}|_{t=0} = I$$

Vimos, anteriormente, que a matriz fundamental Φ satisfaz o mesmo problema de valor inicial que e^{At}

$$\Phi' = A\Phi, \Phi(0) = I.$$

Logo, pela unicidade das soluções, temos que

$$x = e^{At} x^0$$

é solução do problema de valor inicial $x' = Ax, x(0) = x^0$, ou seja, $\Phi(t) = e^{At}$.

Sendo assim, é de extrema importância entendermos e^{At} que denominamos **fluxo**.

No entanto, essa definição do fluxo torna difícil o seu cálculo explícito: usualmente é necessário obter a forma canônica de Jordan $J = P^{-1}AP$ da matriz A, então e^{Jt} e, finalmente, $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$.(Não entraremos em detalhes neste método, pois este não é o objetivo deste trabalho.)

Mas o cálculo funcional torna possível obter e^{At} facilmente.

Vamos mostrar uma forma alternativa de introduzir o fluxo, sem apelar para sua definição por meio de séries de potências. Seja A uma matriz quadrada. Consideremos a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (dependente do parâmetro real t) definida por $f(z) = e^{zt}$. Ela define a função de matriz e^{At}.

Vejamos em alguns exemplos como isso ocorre:

Exemplo 0.21 *Neste primeiro exemplo, vamos mostrar o método de resolução pelo sistema de equações algébricas (que foi mostrado acima) e depois, por função de matrizes, para que possamos comparar os métodos.*

Tomemos o exemplo 0.21 *onde temos o sistema*

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x$$

Temos que o polinômio característico da matriz dos coeficientes é
$r^2 - 2r - 3$ *e que as raízes deste polinômio (autovalores) são* $\lambda_1 = 3$ *e* $\lambda_2 = -1$*. Sendo assim, encontramos como solução geral deste sistema*

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Tomando $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *temos que*

$$x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolvendo, obtemos $c_1 = \dfrac{1}{2}$ *e* $c_2 = \dfrac{1}{2}$.

E assim, temos que

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Tomando $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, *temos que*

$$x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

resolvendo, obtemos $c_1 = \dfrac{-1}{4}$ *e* $c_2 = \dfrac{1}{4}$.

E assim, temos que

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t}$$

E finalmente, encontramos a matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \dfrac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ e^{3t}-e^{-t} & \dfrac{e^{3t}-e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$$

Agora, vejamos a resolução do sistema por função de matrizes: Como queremos encontrar e^{At}, *vamos definir a função* $f(z) = e^{zt}$. *Devemos encontrar um polinômio* r *de grau menor ou igual à 2 tal que* $r(3) = f(3)$ *e* $r(-1) = f(-1)$, *ou seja, devemos resolver o sistema:*

$$\begin{cases} -a + b = e^{-t} \\ 3a + b = e^{3t} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $a = \dfrac{e^{3t}-e^{-t}}{4}$ *e* $b = \dfrac{e^{3t}+3e^{-t}}{4}$. *Substituindo os valores de* a *e* b *em* r *obtemos:*

$$e^{At} = f(A) = r(A) = aA + bI = \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{3t}+3e^{-t}}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \dfrac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ e^{3t}-e^{-t} & \dfrac{e^{3t}-e^{-t}}{2} \end{pmatrix}$$

.

Concluímos que $\Phi(t) = e^{At}$ *e observamos que o cálculo por funções de matrizes é mais direto que o cálculo por equações algébricas.*

Exemplo 0.22 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de A é

$$p(z) = det(A - zI) = z^2 + 2z - 8$$

Sendo assim temos que $z = 2$ e $z = -4$ são raízes de $p(z)$. O que implica que o polinômio mínimo (que, neste caso, é o mesmo que o polinômio característico) é

$$m(z) = (z-2)(z+4)$$

.

Queremos calcular e^{At}, então definimos a função $f(z) = e^{zt}$. Basta encontrarmos um polinômio r de grau menor ou igual à 1, ou seja $r(z) = az + b$, tal que $r(2) = f(2)$ e $r(-4) = f(-4)$. Portanto devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = e^{2t} \\ -4a + b = e^{-4t} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, encontramos $a = \dfrac{e^{2t} - e^{-4t}}{6}$ e $b = \dfrac{2e^{2t} + e^{-4t}}{3}$.

Substituindo os valores de a e b em r obtemos:

$$e^{At} = f(A) = r(A) = aA + bI = \frac{e^{2t} - e^{-4t}}{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} + \frac{2e^{2t} + e^{-4t}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t} \end{pmatrix}$$

Exemplo 0.23 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de A é

$$p(z) = det(A - zI) = z^2 - 6z + 9$$

Sendo assim temos que $z = 3$ é raiz de multiplicidade 2 de $p(z)$.

Queremos calcular e^{At}, *então definimos a função* $f(z) = e^{zt}$. *Basta encontrarmos um polinômio* r *de grau menor ou igual à* 1, *ou seja* $r(z) = az + b$, *tal que* $r(3) = f(3)$ *e* $r'(3) = f'(3)$. *Portanto devemos resolver o sistema:*

$$\begin{cases} 3a + b = e^{3t} \\ \\ a = te^{3t} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, encontramos $a = te^{3t}$ *e* $b = e^{3t} - 3te^{3t}$.

Substituindo os valores de a *e* b *em* r *obtemos:*

$$e^{At} = f(A) = r(A) = aA + bI = te^{3t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} + e^{3t} - 3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-3t & t \\ -9t & 1+3t \end{pmatrix}$$

Exemplo 0.24 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de A *é*

$$p(z) = det(A - zI) = (2 - z)(2 - z)(4 - z)$$

Temos que $z = 4$ *e* $z = 2$ *são raízes de* $p(z)$, *sendo que* $z = 2$ *é raiz de multiplicidade* 2.

Queremos calcular e^{At}, *então definimos a função* $f(z) = e^{zt}$. *Basta encontrarmos um polinômio* r *de grau menor ou igual à* 2, *ou seja* $r(z) = az^2 + bz + c$, *de modo que sejam satisfeitas as relações* $r(2) = f(2)$, $r(4) = f(4)$ *e* $r'(2) = f'(2)$.*Portanto devemos resolver o sistema:*

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = e^{2t} \\ \\ 16a + 4b + c = e^{4t} \\ \\ 4a + b = te^{2t} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima encontramos

$$a = \frac{e^{4t} - 2te^{2t} - e^{2t}}{4},\ b = -e^{4t} + 3te^{2t} + e^{2t} \text{ e } c = e^{4t} - 4te^{2t}.$$

Sendo assim,

$$e^{At} = f(A) = r(A) = \frac{e^{4t} - 2te^{2t} - e^{2t}}{4}A^2 + (-e^{4t} + 3te^{2t} + e^{2t})A + e^{4t} - 4te^{2t}I.$$

Exemplo 0.25 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de A é

$$p(z) = det(A - zI) = (2 - z)(2 - z)(a - z)$$

Temos que $z = 2$, $z = 3$ e $z = 4$ são raízes de $p(z)$.

Queremos calcular e^{At}, então definimos a função $f(z) = e^{zt}$. Basta encontrarmos um polinômio r de grau menor ou igual à 2, ou seja $r(z) = az^2 + bz + c$, de modo que sejam satisfeitas as relações $r(2) = f(2)$, $r(3) = f(3)$ e $r(4) = f(4)$.Portanto devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = e^{2t} \\ 9a + 3b + c = e^{3t} \\ 16a + 4b + c = e^{4t} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima encontramos

$$a = \frac{e^{4t} - 2e^{3t} + e^{2t}}{2},\ b = \frac{-5e^{4t} + 12e^{3t} - 7e^{2t}}{2} \text{ e } c = 3e^{4t} - 8e^{3t} + 6e^{2t}.$$

Sendo assim,

$$e^{At} = f(A) = r(A) = \frac{e^{4t} - 2e^{3t} + e^{2t}}{2}A^2 + \frac{-5e^{4t} + 12e^{3t} - 7e^{2t}}{2}A + 3e^{4t} - 8e^{3t} + 6e^{2t}I.$$

Exemplo 0.26 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de A é

$$p(z) = det(A - zI) = -z^3 + z^2 - z + 1$$

Sendo assim temos que $z = 1$, $z = i$ e $z = -i$ são raízes de $p(z)$. O que implica que o polinômio mínimo (que neste caso é o mesmo que o polinômio característico) é

$$m(z) = (z - 1)(z - i)(z + i)$$

Queremos calcular e^{At}, então definimos a funcão $f(z) = e^{zt}$. Basta encontramos um polinômio r de grau menor ou igual à 2, ou seja $r = az^2 + bz + c$, tal que $r(1) = f(1)$, $r(i) = f(i)$ e $r(-i) = f(-i)$. Portanto devemos devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = e^t \\ \\ -a + bi + c = e^{it} = cos(t) + isen(t) \\ \\ -a - bi + c = e^{-it} = cos(t) - isen(t) \end{cases}$$

Substituindo essas relações no polinômio $r(z) = az^2 + bz + c$,achamos

$$a = \frac{e^t}{2} - \frac{\cos t + \sin t}{2}, \; b = \sin t \; e \; c = \frac{e^t}{2} + \frac{\cos t - \sin t}{2}.$$

Assim

$$e^{At} = \left[\frac{e^t}{2} - \frac{\cos t + \sin t}{2}\right] A^2 + (\sin t)A + \left[\frac{e^t}{2} + \frac{\cos t - \sin t}{2}\right] I$$

que é, para cada t uma matriz real.

Exemplo 0.27 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 21 & -32 & -7 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de A é

$$p(z) = det(A - zI) = z^2(z - 1)$$

Temos que $z = 1$ e $z = 0$ são raízes de $p(z)$, sendo que $z = o$ é raiz de multiplicidade 2.

Queremos calcular e^{At}, então definimos a função $f(z) = e^{zt}$. Basta encontrarmos um polinômio r de grau menor ou igual à 2, ou seja, $r(z) = az^2+bz+c$, de modo que sejam satisfeitas as relações $r(1) = f(1) = e^t$, $r(0) = f(0) = e^{0t} = 1$ e $r'(0) = f'(0) = te^{0t} = t$. Substituindo essas relações no polinômio $r(z) = az^2 + bz + c$, achamos $a = e^t - t - 1$, $b = t$ e $c = 1$.

Assim

$$r(A) = f(A) = e^{At} = (e^t - t - 1)A^2 + A + I$$

Para obtermos algumas propriedades do fluxo, definimos:

Definição 0.28 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado (ou seja, I não se reduz a um ponto). Uma aplicação contínua $x : I \to \mathbb{K}^n$ é chamada **caminho**.*

O caminho x é **diferenciável**, se existir o **vetor velocidade**

$$x'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \in \mathbb{K}^n.$$

(Se t for um ponto de fronteira, o limite é o respectivo limite lateral. Também chamamos o vertor velocidade de **derivada** de $x(t)$).

Sendo assim, se $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{K}^n$, então

$$x'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t)).$$

Identificando $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ com $\mathbb{K}^{mn}$, a mesma noção faz sentido para caminhos que tomam valores no espaço $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Para fazermos essa identificação entre os espaços $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\mathbb{K}^{mn}$, basta considerarmos uma função $\varphi : \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{mn}$ dada por

$$\varphi \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{11}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}).$$

Temos que φ é linear, pois sejam $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e λ uma constante, temos que

$$\varphi(A + \lambda B) = \varphi(A) + \lambda\varphi(B).$$

Temos, também que $ker(\varphi) = 0$ (ou seja, o núcleo da função φ é somente o 0), pois

$$ker(\varphi) = \{A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}); \varphi(A) = 0 \in \mathbb{K}^{mn}\} = \{0 \in \mathbb{M}_{m\times n}\}.$$

Portanto φ é uma bijeção.

Assim, se $A(t)$ denotar um caminho em $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, sua derivada é obtida ao se derivar cada uma das entradas de $A(t)$. De maneira analóga podemos considerar $\psi : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{K}^n$ (ou $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$) e definir a derivada $\psi'(z)$.

A função de matriz e^{At} pode ser considerada oriunda da função $g(z,t) = e^{zt}$. Se fizermos $t = 0$ nesta função, obtemos $g(z, 0) = e^0 = 1$ de onde segue que $e^{At}|_{t=0} = I$ e fazendo

$$\frac{d}{dt}g(z,t) = e^{zt}z = g(z,t)z$$

obtemos, pelo homomorfismo de álgebras, que

$$\frac{d}{dt}e^{At} = e^{At}A.$$

Temos, portanto, as seguintes propriedades do fluxo e^{At}:

(i) $e^{At}|_{t=0} = I$

(ii) $\dfrac{d}{dt}e^{At} = e^{At}A.$

Observação 0.29 *Embora a função $f(z) = e^z$ satisfaça a equação*

$$e^{z+w} = e^z e^w,$$

não podemos deduzir que $e^{A+B} = e^A e^B$, uma vez que a substituição simultânea das variáveis z por A e w por B não é permitida pelo cálculo funcional. Contudo, se A e B comutarem, o simples conhecimento de que e^A é um polinômio em A nos permite concluir que $e^A B = Be^A$, que é uma parte importante da demonstração de que $e^{A+B} = e^A e^B$ se, e somente se, $AB = BA$.

Bibliografia

H. P. Bueno: Álgebra Linear Um Segundo Curso, 1.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2006.

W. E. Boyce e R. C. DiPrima: Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 9.ed. - Rio de Janeiro: LTC, 2010.

C. I. Doering e A. O. Lopes: Equações Diferenciais Ordinárias, 5.ed. - Rio de Janeiro:IMPA, 2014.

R. J. Santos: Um Curso De Geometria Analítica E Álgebra Linear - Belo Horizonte, Imprensa Universitária da UFMG, 2012.

R. J. Santos: Introdução à Álgebra Linear - Belo Horizonte, Imprensa Universitária da UFMG, 2013.

S. Lang: Álgebra Linear, 1.ed. - Editora Ciência Moderna, 2003.