

TRABAJOS ACADÉMICOS en Finanzas de Mercado y Finanzas Corporativas

OPERACIONALIZACIÓN DE MODELOS FINANCIEROS.

Segunda Parte: TEORÍA DE PORTAFOLIOS

Guillermo Buenaventura Vera, Ph.D

DOCUMENTO 2014 – 012

SALÓN BURSÁTIL

**Departamento
Contable Financiero**



TRABAJOS ACADEMICOS EN FINANZAS DE MERCADO Y FINANZAS CORPORATIVAS

ISSN: 2323-0223

2014-012 Cali, Junio de 2014

Frecuencia: mensual

Comité Editorial

Julián Benavides Franco, PhD
Director Departamento Contable y Financiero
Universidad Icesi
jbenavid@icesi.edu.co
5552334 ext 8215

Guillermo Buenaventura Vera, PhD
Profesor Tiempo Completo
Universidad Icesi
buenver@icesi.edu.co
5552334 ext 8213

Coordinación Editorial

Maria Consuelo Cardona
Secretaria Departamento
Estudios Contables y Financieros
Universidad Icesi
mcardona@icesi.edu.co
5552334 ext 8211

Laura Viviana Agudelo Ramírez
Monitora de Investigación
Grupo Inversión, Financiación y Control
Universidad Icesi
5552334 ext 8211

Universidad Icesi, Facultad Ciencias Administrativas y Económicas,
Departamento de Estudios Contables y Financieros
Teléfono: 5552334
Calle 18 No. 122-135
http://www.icesi.edu.co/departamentos/finanzas_contabilidad/

La responsabilidad de los conceptos y modelos presentados en esta publicación corresponde al autor o a los autores del trabajo. Si desea contactar al autor de una publicación, su correo electrónico se encuentra en la primera página de la misma. La correspondencia electrónica y solicitudes pueden ser dirigidas al e-mail de la coordinación editorial.

OPERACIONALIZACIÓN DE MODELOS FINANCIEROS:

Segunda Parte: TEORÍA DE PORTAFOLIOS

Guillermo Buenaventura Vera, PhD

buenver@icesi.edu.co

Profesor Tiempo Completo

Departamento de Estudios Contables y Financieros

Universidad Icesi (Cali, Colombia)

Resumen

El documento hace un recorrido introductorio, tanto conceptual como modelar de la Teoría de Portafolios, incluyendo la Frontera eficiente y la línea del mercado de capitales (SML). Se plantea el abordaje del análisis de portafolios de dos títulos y también el de más de dos títulos, así como el correspondiente procedimiento para la solución de los mismos con la herramienta Solver de Excel.

Palabras Clave

Teoría de Portafolios, Frontera eficiente, Títulos, Matriz de varianzas y covarianzas, Rentabilidad, Riesgo, Carteras de Markowitz, Optimización, Razón de Sharpe, Solver de Excel.

Contenido

- 1. PRESENTACIÓN**
- 2. CONCEPTOS GENERALES**
 - 2.1 La rentabilidad media de un Portafolio**
 - 2.2 El riesgo de un Portafolio**
 - 2.3 La frontera de Portafolios**
 - 2.4 La frontera eficiente de Portafolios**
 - 2.5 Portafolios de dos títulos**
 - 2.6 La línea de mercado de capitales (SML)**
- 3. CONSTRUCCIÓN DE LA FRONTERA EFICIENTE**
 - 3.1 Portafolios de dos títulos**
 - 3.2 Portafolios de más de dos títulos**
- 4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

TEORÍA DE PORTAFOLIOS

Y APLICACIONES EN HOJA ELECTRÓNICA

1. PRESENTACIÓN

A continuación se discute brevemente y se interpreta la Teoría de Portafolios¹.

Adicionalmente se establece la metodología de solución para un portafolio de dos títulos y para uno de n ($n > 2$) títulos, a partir de los parámetros Rentabilidad esperada y Riesgo o volatilidad (desviación típica o varianza) de cada título participante del portafolio y de las covarianzas entre parejas de títulos participantes en el portafolio, utilizando el subprograma SOLVER del paquete Excel².

2. CONCEPTOS GENERALES

Un Portafolio es un conjunto de Títulos que se tienen por un inversionista. Cada título cuenta con una participación dentro del mismo, según la relación del monto invertido en él a la inversión total.

La teoría de los portafolios establece que su utilidad es la de diversificar el riesgo de la inversión con la consecuente disminución de la volatilidad de la inversión frente a una muy menor disminución de la rentabilidad esperada de la misma.

2.1 LA RENTABILIDAD MEDIA DE UN PORTAFOLIO

$$R_p = \text{PROM}(R_i) = \sum_i x_i R_i$$

R_p = Rentabilidad Media del Portafolio

R_i = Rentabilidad Media del título i perteneciente al Portafolio

x_i = Participación (fracción de la inversión) del título i en el Portafolio

¹ Teoría de Portafolios, formulada por Harry Markowitz (1954 y 1959) en su artículo semilla "Portfolio Selection" y en su obra *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*.

² Excel es marca registrada de Microsoft Inc.

2.2 EL RIESGO DE UN PORTAFOLIO

En finanzas el riesgo se mide como la variabilidad de los posibles resultados. La modelación más acogida sobre esta variabilidad es la Desviación Típica.

$$\sigma_p = \text{DESVT}(R_i) = \left[\sum_i \sum_j (x_i x_j \sigma_{ij}) \right]^{1/2}$$

$$\sum_i x_i = 1$$

- σ_p = Desviación Típica de la rentabilidad del Portafolio
 x_i = Participación (fracción de la inversión) del título i en el portafolio
 σ_{ij} = Covarianza entre las rentabilidades de los títulos i y j del portafolio
 Si $i = j$, entonces $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$

La modelación de la Desviación Típica del Portafolio obedece a un resultado estadístico, definiendo la Varianza de un conjunto de variables como la suma de sus varianzas y de sus covarianzas. El total de fracciones de Títulos en el Portafolio debe sumar uno (1) o 100%, que es lo mismo.

2.3 LA FRONTERA DE PORTAFOLIOS

Para un conjunto de n títulos existirán infinitas combinaciones posibles, de acuerdo con las variaciones de las participaciones de cada título en el mismo. Estas formarán un conjunto lleno y convexo, cuya frontera se esquematiza (conceptualmente) en la figura 1.

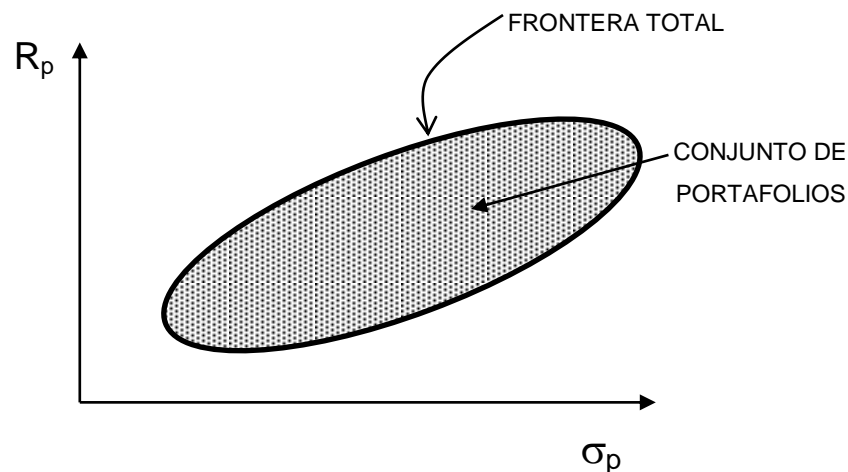


Fig. 1 - Portafolios: Frontera Total

2.4 LA FRONTERA EFICIENTE DE PORTAFOLIOS

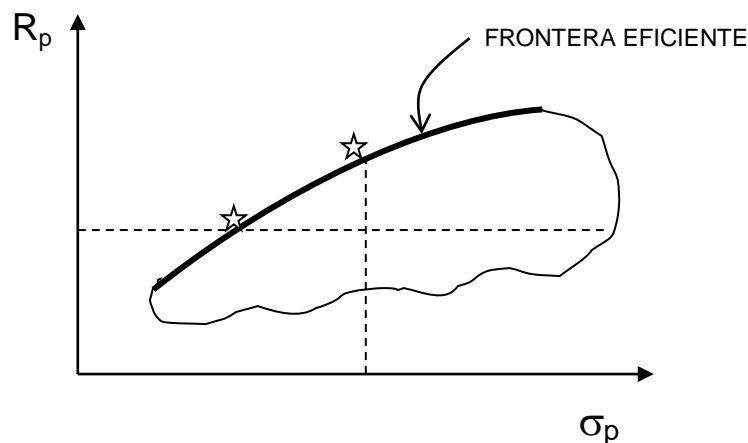
Un inversionista mantiene un Portafolio porque quiere disminuir el riesgo de su inversión. Intuitivamente se puede observar que a medida que se diversifica (se agregan títulos) a la inversión, su riesgo disminuye, pues si unos decaen otros prosperan, y el conjunto presenta entonces una menor variabilidad del resultado conjunto de rentabilidad.

Para un conjunto de Títulos habrá muchas combinaciones que diluyan el riesgo pero no maximicen la renta del Portafolio, y viceversa, como se puede observar en la figura 1. La optimización del Portafolio requiere encontrar aquellas combinaciones de participaciones (x_i) de títulos que a una rentabilidad requerida **minimicen su riesgo (σ_p)** y que a un riesgo permitido **maximicen su rentabilidad (R_p)**, como se establece en el recuadro.

σ_p mínimo a un dado R_p
y
 R_p máximo a un dado σ_p

Esta condición se destaca en la figura 2, lo que gráficamente se interpretaría como que la **FRONTERA EFICIENTE** es el conjunto de portafolios que:

- 1) Pertenecen a la frontera total (línea envolvente de la región convexa).
- 2) Se ubican en la zona de pendiente positiva de la frontera total³.



☆ Portafolio eficiente: mínimo σ_p a un R_p dado, y máximo R_p a un σ_p dado.

³ Esta condición es necesaria para los portafolios compuestos de dos activos, pues allí, como veremos más adelante, no se da la condición de región cerrada, y podrían obtenerse puntos en la línea de pendiente negativa (que no es eficiente) que no incumplan los requisitos mostrados en el recuadro.

Fig. 2 - Portafolios: Frontera Eficiente.

2.5 PORTAFOLIOS DE DOS TÍTULOS ($n = 2$)

Las expresiones para Rentabilidad y Riesgo del portafolio, cuando solo se compone de dos títulos ($n = 2$), mostradas en las secciones A3.2.1 y A3.2.2, resultan en las siguientes expresiones:

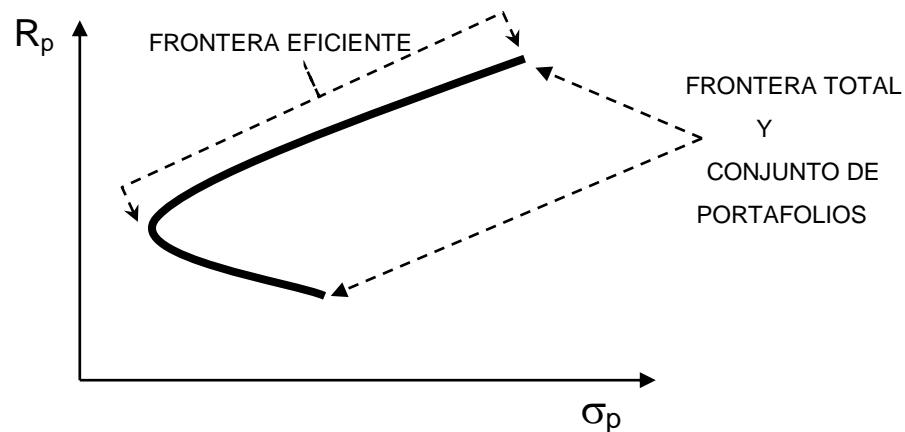
$$R_p = \text{PROM}(R_i) = \sum_i x_i R_i = X_1 R_1 + X_2 R_2$$

$$\sigma_p = \text{DESVT}(R_i) = [\sum_i \sum_j (x_i x_j \sigma_{ij})]^{1/2} = (X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12})^{1/2}$$

$$\sum_i x_i = X_1 + X_2 = 1$$

- R_p = Rentabilidad Media del Portafolio
- R_i = Rentabilidad Media del título i perteneciente al Portafolio
- x_i = Participación (fracción de la inversión) del título i en el Portafolio
- σ_p = Desviación Típica de la rentabilidad del Portafolio
- σ_{ij} = Covarianza entre las rentabilidades de los títulos i y j del portafolio
Si $i = j$, entonces $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$

Es posible, matemáticamente, demostrar que para dos títulos ($n=2$), la forma de la gráfica del conjunto de portafolios y la de la frontera total coincide en una línea quebrada, como se muestra en la figura 3. La frontera eficiente corresponde ahora al ramal superior de la línea.

Fig. 3 - Portafolios: Frontera Total para $n = 2$

2.6 LÍNEA DEL MERCADO DE CAPITALES (SML)

Ya es claro que cualquier combinación de títulos sobre la frontera eficiente cumple que ofrecerá al inversionista la mayor rentabilidad a un dado riesgo y el menor riesgo a una pretendida rentabilidad. Pero si cualquier portafolio de esta Frontera Eficiente (σ_p , R_p) se combina con un título libre de riesgo ($R_f = R_f$ y $\sigma_f = 0$), será posible demostrar matemáticamente que la combinación (σ_L , R_L) de estos dos puntos (Portafolio Eficiente y Título libre de Riesgo) ofrecerán una relación entre R_L y σ_L de tipo rectilíneo, con origen en el punto (0, R_f):

$$R_L = X_p R_p + X_f R_f = X R_p + (1 - X) R_f$$

$$\sigma_L = (X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12})^{1/2} = \{X^2 \sigma_p^2 + (1-X) 0 + 2 X (1-X) 0\}^{1/2}$$

$$\sigma_L = \{X^2 \sigma_p^2\}^{1/2}$$

$$\sigma_L = X \sigma_p$$

$$X = \sigma_L / \sigma_p$$

$$R_L = X R_p + (1 - X) R_f$$

$$R_L = R_p \sigma_L / \sigma_p + (1 - \sigma_L / \sigma_p) R_f$$

$$R_L = \{(R_p - R_f) / \sigma_p\} \sigma_L + R_f$$

$$\text{Sean } A = (R_p - R_f) / \sigma_p$$

$$B = R_f$$

La relación toma la forma : $R_L = A \sigma_L + B$

La relación de R_L con σ_L es precisamente una recta, con intercepto en $B = R_f$.

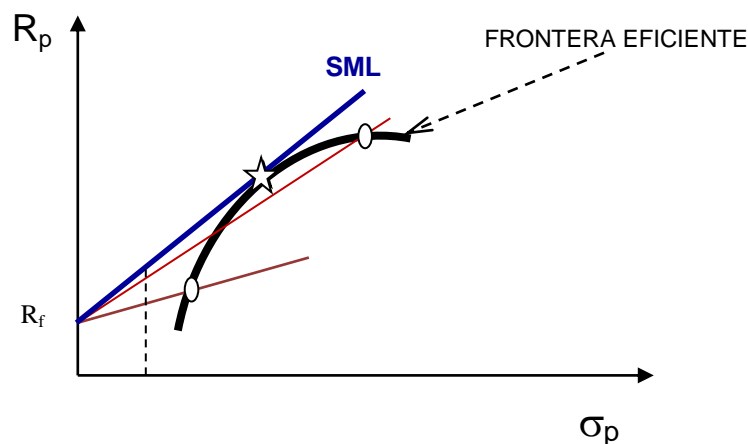
En los desarrollos anteriores, los símbolos representan las siguientes variables:

- R_p = Rentabilidad Media del Portafolio sobre la frontera eficiente (FE)
- R_f = Rentabilidad del Título Libre de Riesgo
- R_L = Rentabilidad del Nuevo Portafolio (que incluye el título libre de riesgo)
- X = Participación del Portafolio de la FE en el Nuevo Portafolio
- σ_p = Desviación Típica de la rentabilidad del Portafolio sobre la FE
- σ_L = Desviación Típica de la rentabilidad del Nuevo Portafolio
- σ_{pf} = 0; la covarianza entre las rentabilidades de los títulos P y f es cero.

Ahora, la ecuación $R_L = A \sigma_L + B$ representa una familia de rectas, partiendo todas del mismo punto ($\sigma_L = 0$, $R_L = R_f$), como se aprecia en la figura 4, y que se relacionan de tal manera que la recta de pendiente mayor es la que ofrece a un riesgo dado la mayor rentabilidad posible, y también, cualquier punto sobre esta recta ofrecerá, a un riesgo dado, mayor rentabilidad que la del Frontera Eficiente. A esta recta de máxima pendiente se le denomina Línea del Mercado de Valores, SML (por las siglas de su denominación en inglés, Security Market Line), y su construcción se obtiene maximizando la pendiente:

$$\text{SML: } \max A = (R_p - R_f) / \sigma_p$$

La expresión $A = (R_p - R_f) / \sigma_p$ se conoce también como la “Razón de Sharpe”⁴, debido a su inclusión en las consideraciones del modelo CAPM (*Capital Assets Pricing Model*) para valoración de activos financieros, desarrollado por William Sharpe.



- ☆ Portafolio óptimo: permite obtener SML
- Portafolio eficiente no óptimo: sus combinaciones con R_f son superadas por SML

Fig. 4 - Portafolios: Línea SML

Se observa, entonces, cómo la línea SML es aquella que corresponde a la recta que nace en el punto $(0, R_f)$ y es tangente a la línea de la frontera eficiente, o, de otro modo, la recta que une a la frontera eficiente con el punto $(0, R_f)$ y presenta la mayor pendiente.

⁴ El planteamiento de esta relación se puede encontrar en Sharp, W. (1966 y 1975), en sus artículos "Mutual Fund Performance" y "Adjusting for Risk in Portfolio Performance Measurement";

3. CONSTRUCCIÓN DE LA FRONTERA EFICIENTE

A continuación se explica con ejemplos la forma de construir la Frontera Eficiente y también la SML en portafolios, basado en el desarrollo de G. Buenaventura (2014)⁵.

3.1 PORTAFOLIOS DE DOS TÍTULOS (n = 2)

Dado que para dos títulos (n=2), la forma de la gráfica del conjunto de portafolios y la de la frontera total coincide en una línea quebrada, lo que se hace es trazar dicha línea (que se toma como la frontera total) y luego escoger en ella la Frontera Eficiente, correspondiente al lugar geométrico de los puntos que tengan pendiente positiva.

PROCEDIMIENTO

- 1) Obtener las cifras de Rentabilidades promedio (R_1, R_2), Volatilidades o desviaciones típicas de las rentabilidades (σ_1, σ_2) y Covarianza de las rentabilidades (σ_{12}) para los dos títulos.
- 2) Entre las composiciones (X_1, X_2) extremas para el portafolio ((0, 100%) y (100%,0)), realizar variaciones (puede ser de 1 en 1% o de 5 en 5%) y aplicar las formulaciones para calcular la rentabilidad (R_p) y el riesgo (σ_p) del portafolio en cada caso:

$$R_p = X_1R_1 + X_2R_2$$

$$\sigma_p = (X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + 2X_1X_2\sigma_{12})^{1/2}$$

- 3) Trazar la gráfica R_p (eje vertical) vs. σ_p (eje horizontal) para el portafolio.
- 4) Señalar la frontera eficiente: el tramo de línea con pendiente positiva.

EJEMPLO

Construir la Frontera Eficiente de los portafolios conformados solo con los títulos de las empresas A y B:

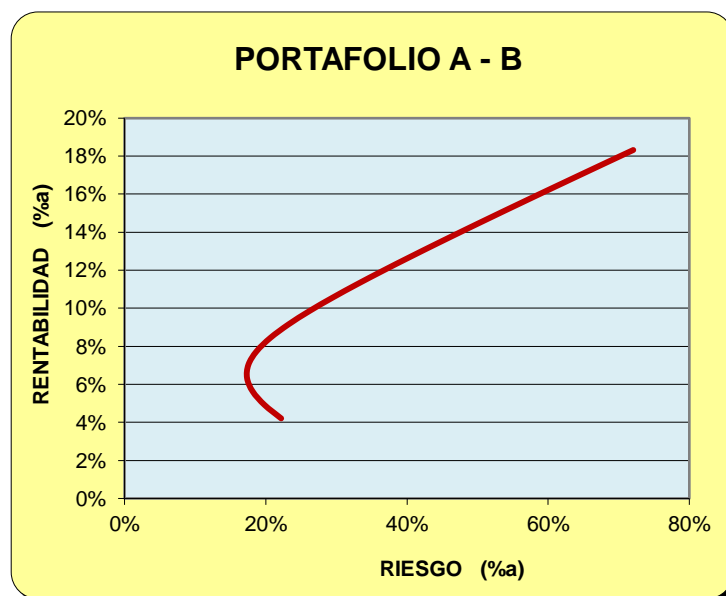
TÍTULO	EMPRESA A	EMPRESA B
RENTABILIDAD PROMEDIO (%a)	4,21%	18,32%
DESVIACIÓN TÍPICA (%a)	22,17%	72,07%
COVARIANZA DE TÍTULOS (%a ²)	-0,0672	

⁵ Buenaventura, Guillermo (2014). *Teoría de Inversión en Evaluación de Proyectos y Presupuestación de Capital*.

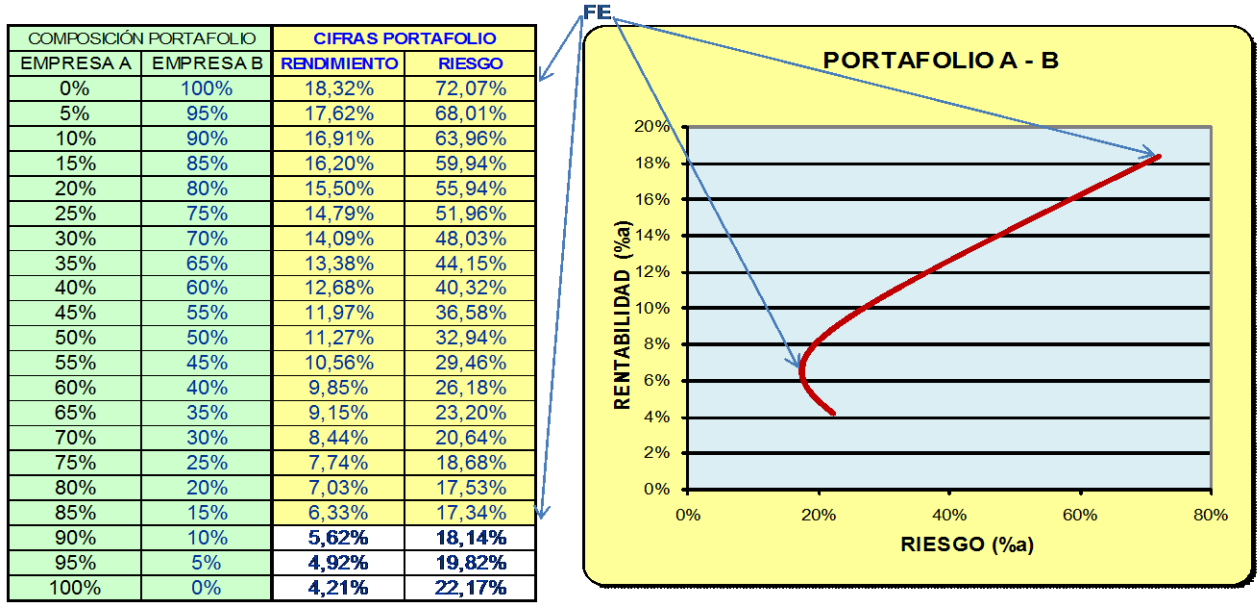
2) Cálculo de las relaciones Rentabilidad-Riesgo de los Portafolios:

COMPOSICIÓN PORTAFOLIO		CIFRAS PORTAFOLIO	
EMPRESA A	EMPRESA B	RENDIMIENTO	RIESGO
0%	100%	18,32%	72,07%
5%	95%	17,62%	68,01%
10%	90%	16,91%	63,96%
15%	85%	16,20%	59,94%
20%	80%	15,50%	55,94%
25%	75%	14,79%	51,96%
30%	70%	14,09%	48,03%
35%	65%	13,38%	44,15%
40%	60%	12,68%	40,32%
45%	55%	11,97%	36,58%
50%	50%	11,27%	32,94%
55%	45%	10,56%	29,46%
60%	40%	9,85%	26,18%
65%	35%	9,15%	23,20%
70%	30%	8,44%	20,64%
75%	25%	7,74%	18,68%
80%	20%	7,03%	17,53%
85%	15%	6,33%	17,34%
90%	10%	5,62%	18,14%
95%	5%	4,92%	19,82%
100%	0%	4,21%	22,17%

3) Gráfico de la Frontera total:



4) Establecimiento de la Frontera Eficiente:



LOS LÍMITES (σ_p , R_p) DE LA FRONTERA EFICIENTE SON
 (17,34%; 6,33%) (72,07%; 18,32%)

LOS LÍMITES (X_1 , X_2) DE LA FRONTERA EFICIENTE SON
 (85%; 15%) (0%; 100%)

EN EXCEL

Las formulaciones del ejemplo en Excel® se muestran en la imagen 1.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		TÍTULO		EMPRESA A		EMPRESA B	
4		RENTABILIDAD PROMEDIO	(%a)	0,0421020103865098		0,183211660970532	
5		DESVIACIÓN TÍPICA	(%a)	0,221746566503696		0,72070014341154	
6		COVARIANZA DE TÍTULOS	(%a ²)	-0,0672320878761494			
7							
8							
9							
10		COMPOSICIÓN PORTAFOLIO		CIFRAS PORTAFOLIO			
11		EMPRESA A	EMPRESA B	RENDIMIENTO	RIESGO		
12		0	=1-C11	=+C11*\$E\$3+D11*\$F\$3	=+(C11^2*\$E\$4^2+D11^2*\$F\$4^2+2*C11*D11*\$E\$5)^0.5		
13		0.05	=1-C12	=+C12*\$E\$3+D12*\$F\$3	=+(C12^2*\$E\$4^2+D12^2*\$F\$4^2+2*C12*D12*\$E\$5)^0.5		
14		0.1	=1-C13	=+C13*\$E\$3+D13*\$F\$3	=+(C13^2*\$E\$4^2+D13^2*\$F\$4^2+2*C13*D13*\$E\$5)^0.5		
15		0.15	=1-C14	=+C14*\$E\$3+D14*\$F\$3	=+(C14^2*\$E\$4^2+D14^2*\$F\$4^2+2*C14*D14*\$E\$5)^0.5		
16		0.2	=1-C15	=+C15*\$E\$3+D15*\$F\$3	=+(C15^2*\$E\$4^2+D15^2*\$F\$4^2+2*C15*D15*\$E\$5)^0.5		
17		0.25	=1-C16	=+C16*\$E\$3+D16*\$F\$3	=+(C16^2*\$E\$4^2+D16^2*\$F\$4^2+2*C16*D16*\$E\$5)^0.5		
18		0.3	=1-C17	=+C17*\$E\$3+D17*\$F\$3	=+(C17^2*\$E\$4^2+D17^2*\$F\$4^2+2*C17*D17*\$E\$5)^0.5		
19		0.35	=1-C18	=+C18*\$E\$3+D18*\$F\$3	=+(C18^2*\$E\$4^2+D18^2*\$F\$4^2+2*C18*D18*\$E\$5)^0.5		
20		0.4	=1-C19	=+C19*\$E\$3+D19*\$F\$3	=+(C19^2*\$E\$4^2+D19^2*\$F\$4^2+2*C19*D19*\$E\$5)^0.5		
21		0.45	=1-C20	=+C20*\$E\$3+D20*\$F\$3	=+(C20^2*\$E\$4^2+D20^2*\$F\$4^2+2*C20*D20*\$E\$5)^0.5		
22		0.5	=1-C21	=+C21*\$E\$3+D21*\$F\$3	=+(C21^2*\$E\$4^2+D21^2*\$F\$4^2+2*C21*D21*\$E\$5)^0.5		

Imagen 1 - Construcción de Frontera Eficiente en Excel (2 títulos)

Excel® es marca comercial de la Hoja Electrónica del paquete Microsoft Office de Microsoft Corp.

3.2 PORTAFOLIOS DE MÁS DE DOS TÍTULOS ($n > 2$)

CONSIDERACIONES MATEMÁTICAS

Dado que para más de dos títulos ($n > 2$), la forma de la gráfica $R_p - \sigma_p$ del conjunto de portafolios es una región convexa, el método de solución busca obtener de una vez la Frontera Eficiente; esto se hace recorriendo el rango de Riesgos posibles del portafolio en divisiones muy pequeñas y maximizando la rentabilidad en cada caso.

La expansión de las ecuaciones para estimar la Rentabilidad y el Riesgo del portafolio se hace más compleja a medida que el número de títulos (n) crece; por ejemplo, para el caso de tres títulos ($n = 3$) se muestran los desarrollos enseguida:

$$R_p = \sum_i x_i R_i = X_1 R_1 + X_2 R_2 + X_3 R_3$$

$$\sigma_p = [\sum_i \sum_j (x_i x_j \sigma_{ij})]^{1/2} = (X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + X_3^2 \sigma_3^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12} + 2X_1 X_3 \sigma_{13} + 2X_2 X_3 \sigma_{23})^{1/2}$$

Y, para casos de n mayores, el número de combinaciones de covarianzas en el cálculo de σ_p crece exponencialmente (en potencias de 2, realmente, puesto que se ha de involucrar en la ecuación el número combinatorio de parejas).

Las expresiones algebraicas son susceptibles de simplificar, en cuanto a su notación se refiere, empleando los arreglos matriciales, con la ventaja de que estos ya están operacionalizados en los paquetes de computado, específicamente en Excel.

Por lo anterior, es más práctico resolver los portafolios utilizando la notación matricial, en la cual las rentabilidades de los títulos se entregan como un vector de Rentabilidades estimadas, $[R]$, las participaciones de los títulos como un vector de Fracciones, $[X]$, y las volatilidades como una matriz cuadrada ($n \times n$) de Varianzas-covarianzas, $[\sigma]$, en la cual la diagonal principal ($\sigma_{ii} = \sigma_i^2$) representa las varianzas y los demás valores (σ_{ij}) las covarianzas entre parejas de títulos.

Con estas variables se ha de plantear las ecuaciones para determinar las relaciones Rentabilidad – riesgo de los portafolios.

En este orden de ideas, y definiendo:

El vector de Rentabilidades promedio de los n títulos:

$$[\mathbf{R}] = (R_1, R_2, \dots, R_n)$$

La matriz de Varianzas-covarianzas de los n títulos:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

El vector de Fracciones para cada uno de los n títulos:

$$[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Se calculan los valores de Rentabilidad media esperada del portafolio (R_p) y de Riesgo esperado del portafolio (σ_p) utilizando las formas matriciales:

$$R_p = \sum_i X_i R_i = [X_1, X_2, \dots, X_n] \cdot [R_1, R_2, \dots, R_n] = [\mathbf{X}] \cdot [\mathbf{R}]$$

$$\sigma_p^2 = [\sum_i \sum_j (X_i X_j \sigma_{ij})] = [X_1, X_2, \dots, X_n] \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = [\mathbf{X}^T] [\boldsymbol{\sigma}] [\mathbf{X}]$$

$$\sigma_p = (\sigma_p^2)^{1/2}$$

Donde $[\mathbf{X}^T]$ representa el vector traspuesto de $[\mathbf{X}]$.

PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LA FRONTERA EFICIENTE

- 1) Obtener los datos de inicio:

El vector de Rentabilidades promedio de los n títulos:

$$[\mathbf{R}] = (R_1, R_2, \dots, R_n)$$

La matriz de Varianzas-covarianzas de los n títulos:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Definir el vector de Fracciones para cada uno de los n títulos:

$$[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

- 2) Construir la formulación matricial de los parámetros del portafolio:

$$\mathbf{R}_p = [\mathbf{X}] \cdot [\mathbf{R}]$$

$$\sigma_p^2 = [\mathbf{X}^T] [\boldsymbol{\sigma}] [\mathbf{X}]$$

$$\sigma_p = (\sigma_p^2)^{1/2}$$

- 3) Obtener los límites de la frontera en cuanto al Riesgo (σ_p) se refiere. Esto significa encontrar los valores de **máx** σ_p y de **mín** σ_p . Para ello se ha de utilizar un método de optimización, como lo hace Solver de Excel.
- 4) El rango de riesgos de los portafolios (**máx** σ_p - **mín** σ_p) se divide en muchos intervalos para barrerlos, encontrando en cada uno el correspondiente valor de rentabilidad de la Frontera Eficiente (**máx** \mathbf{R}_p). Para esto también se ha de utilizar un método de optimización, como lo hace Solver de Excel. Con estos puntos se dibuja la Frontera Eficiente de los n títulos.

PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LA LÍNEA SML

- 1) Obtener los datos de inicio:

$$[\mathbf{R}] = (R_1, R_2, \dots, R_n)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_3 \end{bmatrix}$$

- 2) Obtener el dato de rentabilidad para el título libre de riesgo (R_f).
- 3) Emplear la formulación de los parámetros del portafolio:

$$\mathbf{R}_p = [\mathbf{X}] \cdot [\mathbf{R}]$$

$$\sigma_p^2 = [\mathbf{X}^T] [\boldsymbol{\sigma}] [\mathbf{X}]$$

$$\sigma_p = (\sigma_p^2)^{1/2}$$

- 4) Obtener la solución del sistema, de tal manera que se maximice el valor de la pendiente o Razón de Sharp: **max RS** ó **A**, con

$$RS = A = (R_p - R_f) / \sigma_p$$

El vector $[\mathbf{X}]$ resultante corresponde al punto óptimo de l frontera eficiente (aquel que unido con el punto de $R_f = 0$ genera la línea SML).

EJEMPLO Y SOLUCIÓN CON SOLVER DE EXCEL

Se va a construir la Frontera Eficiente de los portafolios compuestos por los títulos 1, 2, 3, cuyos datos se muestran en la imagen 2, la cual tiene la información arreglada adecuadamente para trabajarla en forma matricial en Excel.

1) DATOS

En la imagen mencionada, R_i corresponde a la rentabilidad del título i ; σ_i es el riesgo de cada título; R_f es la rentabilidad de un título libre de riesgo en el mercado (en el caso colombiano los TES), y σ_{ij} es la covarianza entre el título i y el título j .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	PORTAFOLIO 1-2-3		DATOS						
3									
4			TÍTULO	1	2	3		Rf	
5									
6			Ri	11%	15%	18%		5,00%	
7			σ_i	20,00%	30,00%	35,00%		0,00%	
8									
9			σ_{ij}	1	2	3			
10			1		-0,0020	0,0700			
11			2			0,2400			
12			3						
13									
14									
15									
16									

Imagen 2 - Construcción de Frontera Eficiente en Excel: Información inicial

2) MATRIZ DE VARIANZAS Y COVARIANZAS

A continuación se construye la matriz de Varianzas-covarianzas (S), a partir de los datos iniciales σ_{ij} , como se muestra en la imagen 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	PORTAFOLIO 1-2-3		FORMULACIÓN							
3										
4				TÍTULO	1	2	3			
5										
6				Ri	11%	15%	18%			
7				σ_i	20,00%	30,00%	35,00%			
8										
9				S						
10				σ_{ij}	1	2	3			
11				1	0,0400	-0,0020	0,0700			
12				2	-0,0020	0,0900	0,2400			
13				3	0,0700	0,2400	0,1225			
14										
23										
24										

Imagen 3 - Construcción de Frontera Eficiente en Excel: Matriz de Varianzas-covarianzas

Nótese, en la imagen 3, que los valores por encima de la diagonal de la matriz σ_{ij} corresponden a las covarianzas de los respectivos títulos, obtenidas de la información inicial; ahora bien, la diagonal de la matriz σ_{ij} corresponde a las covarianzas de cada título consigo mismo, o sea son las varianzas de los títulos (estos datos se calculan elevando al cuadrado el riesgo (σ_i) de cada título; por ejemplo, en la imagen 3, la celda [G12] (con valor 0,04) se obtiene elevando el contenido de la celda [D7] (con valor 20%) al cuadrado); por último, debido a que el orden de las variables no altera el resultado de la covarianza (es decir $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), la matriz S de la imagen 2 es una matriz simétrica. Es por esto que los elementos por encima de la diagonal son iguales a los que están por debajo de la misma (así, por ejemplo, ya que la covarianza entre el título 1 y el título 2 (σ_{12}) es igual a la covarianza entre el título 2 y el título 1 (σ_{21}), el valor en la celda [G13], -0,002, es igual al valor en la celda [H12], -0,002).

3) VECTOR DE FRACCIONES O COMPOSICIÓN DEL PORTAFOLIO

El armado matricial de las cifras se completa con los vectores de Fracciones (X^T y X), como que el Riesgo del portafolio viene dado por la desviación estándar (σ_p) del mismo, la que es igual a la raíz cuadrada de la multiplicación de matrices, $X^T S X$. Este arreglo se aprecia en la imagen 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	PORTAFOLIO 1-2-3		FORMULACIÓN									
3												
4				TÍTULO			1	2	3			
5				Xi			100,00%	100,00%	100,00%			
6												
7				Ri	11%	15%	18%					
8				σ_i	20,00%	30,00%	35,00%					
9												
10		X ^T			S							
11		X1	X2	X3	σ_{ij}	1	2	3		X		
12		100,00%	100,00%	100,00%	1	0,0400	-0,0020	0,0700		100,00%		
13					2	-0,0020	0,0900	0,2400		100,00%		
14					3	0,0700	0,2400	0,1225		100,00%		
15												

Imagen 4 - Construcción de Frontera Eficiente en Excel: Arreglo completo y solución inicial

4) SOLUCIÓN INICIAL

Como se muestra en la imagen 4, donde las X_i representan las fracciones de los correspondientes títulos en el portafolio, en las celdas [G5], [H5] e [I5]. La solución inicial es un valor semilla y es arbitraria; se han escogido valores de 1 (100%) en todos los casos para facilitar la corroboración de las operaciones en la construcción del modelo.

El vector X^T , horizontal, contiene las asignaciones de inicio; el vector X es el mismo vector, pero traspuesto, es decir vertical; entonces el vector X^T es un vector fila que contiene las

participaciones de cada título en el portafolio, por ahora con valores uno (1) ó 100% como valores de partida. Consecuentemente, el vector X es un vector columna compuesto por solo unos (100%). En las celdas [B12:D12] se colocan los valores de X_i , así se obtiene el vector X^T ; para formular el vector X se necesita trasponer el vector X^T , yendo a la celda K10 y “pegando” los valores de las celdas [B12:D12] de la siguiente manera: /click derecho - pegado especial – transponer/.

5) MODELO COMPLETO

En la imagen 5 se consigna el modelo con la valoración completa de la solución inicial, el cual servirá para realizar las iteraciones necesarias subsiguientes.

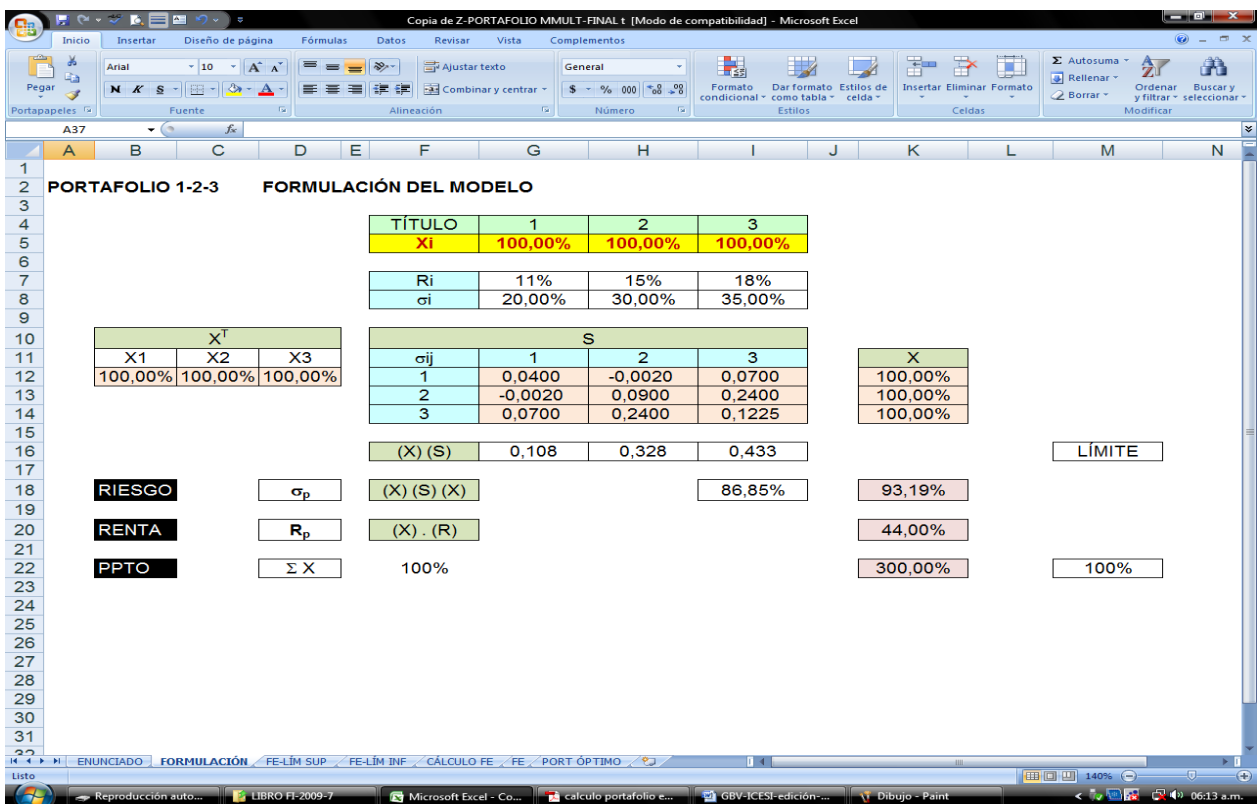


Imagen 5 - Construcción de Frontera Eficiente en Excel: Modelo completo

La manera de formular el modelo se relata a continuación. En realidad hay que realizar la formulación del cálculo del riesgo (σ_p) y de la rentabilidad (R_p) del portafolio.

El cálculo del riesgo se hace sacando la raíz cuadrada del producto matricial $X^T S X$, o, en otra notación, $X^T \sigma_{ij} X$.

La operación $X^T S X$ equivale a una multiplicación de matrices de dimensiones (1x3) y (3x3), lo que resulta en una arreglo de dimensión (1x3); en Excel se procede así: en la celda [G16] se

inserta la función para multiplicar las matrices *MMULT*, de esta manera: $=MMULT(B12:D12;G12:I14)$.

Cuando se utiliza la función *MMULT* de Excel, se tiene que señalar el “rango de salida”, en este caso, una matriz de tres celdas a partir de la celda G16, porque el resultado un vector fila de 3x1; en este caso se eligió le rango [G16:I16]. Para ello se deben realizar los siguientes pasos: señalar el rango [G16:I16], presionar *F2*, y luego presionar, al tiempo, las teclas *Ctrl-Shift-Enter*.

Ahora, la operación $(X^T S)^T$ equivale a una multiplicación de matrices de dimensiones (1x3) y (3x1), lo que resulta en una arreglo de dimensión (1x1); en Excel se procede así: en la celda [I18] se inserta Función *MMULT*, de esta manera: $=MMULT(G16:I16;K12:K14)$. Como el arreglo resultante es de dimensión (1x1), no hay necesidad de definir un rango de celdas para él; el resultado queda en la celda [I18].

El contenido de I18 corresponde a σ_p^2 , por lo que la variable σ_p se programa en la celda [K18], como la raíz cuadrada del valor de la celda [I18].

En lo que respecta a la rentabilidad del portafolio (R_p), su formulación se consigue multiplicando cada fracción (X_i) por la rentabilidad del título respectivo (R_i), para luego obtener la suma de dichos productos; matricialmente, ello se representa con el “Producto Punto” de los vectores $[X]$ y $[R]$, denotando la operación como $R_p = [X] \cdot [R]$. En Excel se emplea la función *SUMAPRODUCTO* para operar el “Producto Punto”. En el ejemplo se toma la celda [K22] para el cálculo, así: $=SUMAPRODUCTO(F5:I5;F7:I7)$. En el caso inicial este valor es 300%, debido a que la solución inicial estableció valores de 100% para la fracción de cada uno de los tres títulos. En el proceso de solución se establecerá que este valor de la celda [K22] sea 100%.

Las fórmulas descritas en el Modelo completo se pueden apreciar en la imagen 6.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3											
4						TÍTULO	1	2	3		
5						X_i	1	1	1		
6											
7						R_i	0,11	0,15	0,18		
8						σ_i	0,2	0,3	0,35		
9											
10											
11						X^T					
12						X1	X2	X3			
13						$=+G5$	$=+H5$	$=+I5$			
14											
15											
16											
17											
18						RIESGO	σ_p				
19											
20						RENDA	R_p				
21											
22						PPTO	ΣX	1			
23											
24											
25											

TÍTULO	1	2	3
X_i	1	1	1
R_i	0,11	0,15	0,18
σ_i	0,2	0,3	0,35

X^T			
X1	X2	X3	
$=+G5$	$=+H5$	$=+I5$	

S			
σ_{ij}	1	2	3
1	$=+G8^2$	-0,002	0,07
2	$=+H12$	$=+H8^2$	0,24
3	$=+I12$	$=+I13$	$=+I8^2$

$(X) \cdot (S)$	$=MMULT(B12:D12;G12:I14)$	$=MMULT(B12:D12;G12:I14)$	$=MMULT(B12:D12;G12:I14)$
-----------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------

$(X) \cdot (S) \cdot (X)$	$=MMULT(G16:I16;K12:K14)$	$=+I18^0,5$
---------------------------	---------------------------	-------------

$(X) \cdot (R)$	$=SUMAPRODUCTO(G5:I5;G7:I7)$
-----------------	------------------------------

ΣX	$=+SUMA(G5:I5)$
------------	-----------------

Imagen 6 - Construcción de Frontera Eficiente en Excel: Fórmulas

6) LÍMITES DE LA FRONTERA EFICIENTE

Obtener los límites de la frontera, en cuanto al Riesgo (σ_p) se refiere, significa encontrar los valores de máx σ_p y de mín σ_p . Para ello se utiliza la herramienta *Solver* de Excel.

Es recomendable copiar la hoja anterior, la hoja del modelo, para trabajar separadamente tres actividades:

- a) Obtención del valor máximo de σ_p
- b) Obtención del valor mínimo de σ_p
- c) Obtención de la Frontera Eficiente

Para poder emplear el *Solver* se hace *click* en la pestaña *Datos* en la parte superior de la ventana de Excel y se busca la opción de *Solver* en la esquina superior derecha de la pantalla; si no aparece la opción *Solver* debe activarla, como se indica en el Aparte 1 de este documento.

Hecho *click* en la opción *Solver* aparece la ventana *Parámetros del Solver*, que se muestra en la imagen 7. En la casilla *Celda Objetivo* se señala la celda que se desea resolver (optimizar), en este caso la casilla [K18] que corresponde al riesgo del portafolio.

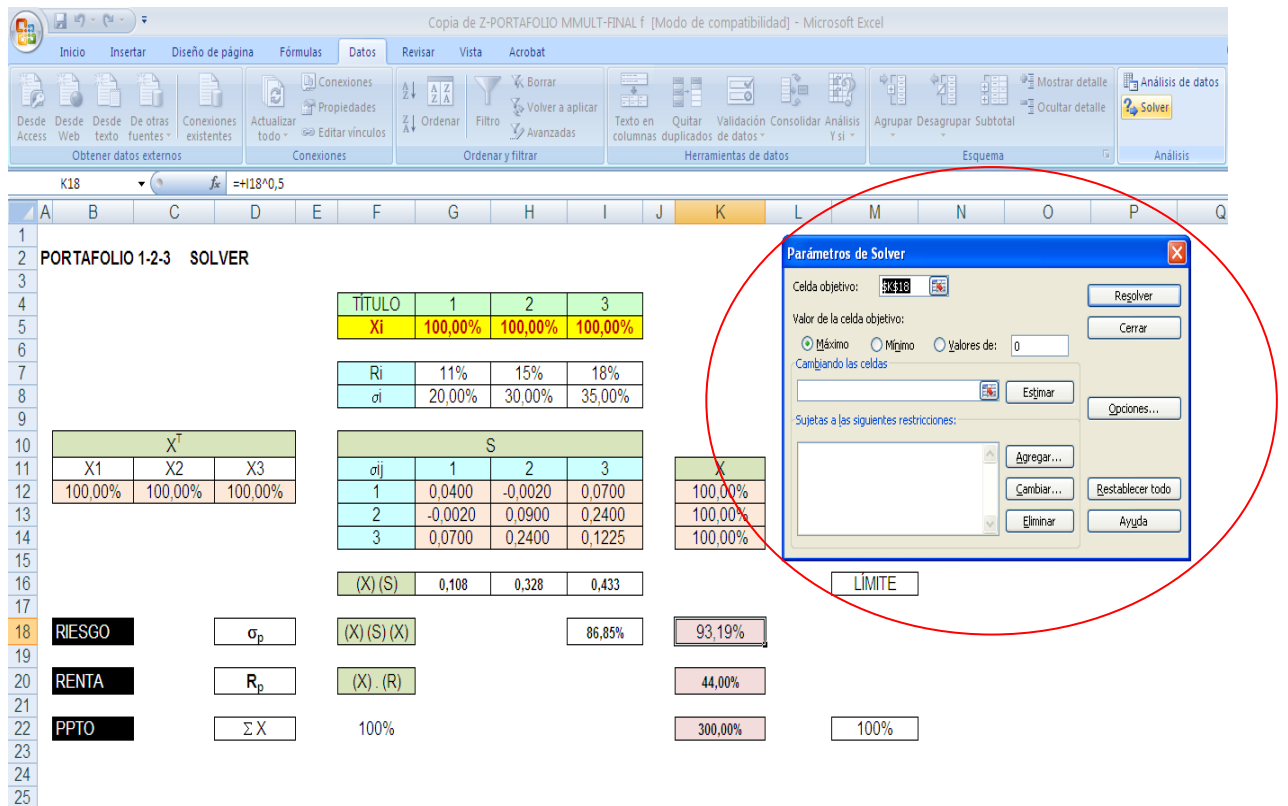


Imagen 7 - Construcción de Frontera Eficiente en Excel: Solver inicial

Valor máximo de σ_p

Como se va a hallar el valor máximo del riesgo de la frontera Eficiente, se debe marcar la alternativa *máximo* en el espacio *Valor de la celda objetivo* de la ventana *Parámetros del Solver*; en la casilla correspondiente a *Cambiando Celdas* se coloca el rango de las celdas que corresponden a las variables de salida, en este caso participaciones de los títulos en el portafolio (X_i), que se encuentran en el rango [G5:H5].

En el modelo existen dos tipos de restricciones obligatorias:

- La suma de las fracciones de los títulos en el portafolio (X_i) debe ser 100%.
- Cada fracción en particular no puede ser mayor que 1 ni menor que cero.

Las restricciones del modelo se entregan en la el espacio bajo el letrero *Sujetas a las siguientes Restricciones*; para ello se siguen los siguientes dos pasos:

- Presionar la opción *Agregar*; aparece, entonces, la ventana *Agregar restricción*. Ver imagen 8.

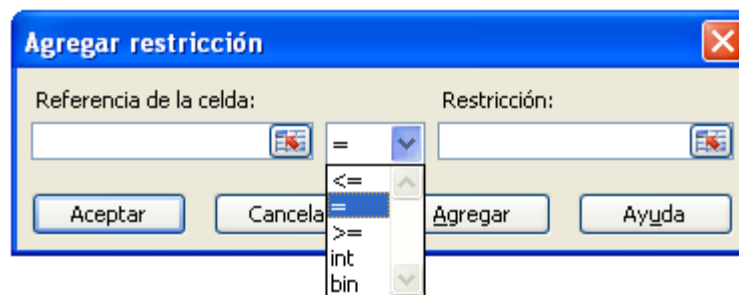


Imagen 8 - Solver: Ventana de restricciones

- Estando en esta última ventana, en la casilla en blanco debajo del subtítulo *Referencia de la celda*, seleccione la celda donde se encuentra la ecuación de la primera restricción que se debe cumplir (en este caso la suma de las fracciones, en [K22]); en la casilla intermedia, de signos, escoger = (o sea, “que sea exactamente”), y en la siguiente casilla, *Restricción*, se entrega la celda donde está el límite (100%); la celda es la [M22]. Ver imagen 9.
 - Como aún no se terminan las restricciones se hace *click* en la alternativa *Agregar*. Reaparece la ventana *Agregar restricción* para ser llenada.
 - La restricción sobre que las fracciones (X_i) no pueden superar el valor 100% se comunica en esta ventana, de la siguiente manera: bajo el subtítulo *Referencia de la celda* se selecciona y entrega el rango de celdas que corresponden a la solución que se busca, en este caso, las participaciones de los títulos (X_i) en el portafolio, celdas [G5:H5]; en la casilla intermedia se selecciona \leq , y en la siguiente casilla se escribe el valor límite de cada uno, o sea 1.
 - Como no hay más restricciones para agregar en esta ventana, se hace *click* en la alternativa *Aceptar*. Con ello se regresa automáticamente a la ventana *Parámetros del Solver*.

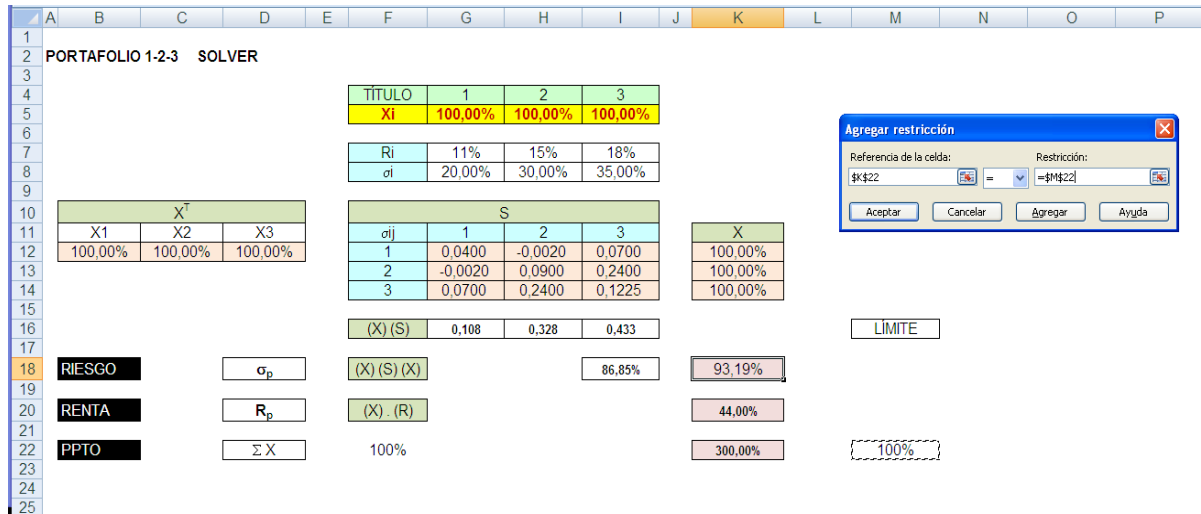


Imagen 9 - Solver: Primera restricción

- f. La restricción sobre que las fracciones (X_i) no pueden ser negativas (menores que cero) comunica en esta ventana *Parámetros del Solver*, haciendo *click* en la alternativa *Opciones...* y cuando abra su ventana, *Opciones del Solver*, escogiendo () la alternativa *Adoptar no negativos* (ver imagen 10). Luego se hace *click* en *Aceptar*, para regresar a la ventana *Parámetros del Solver*.

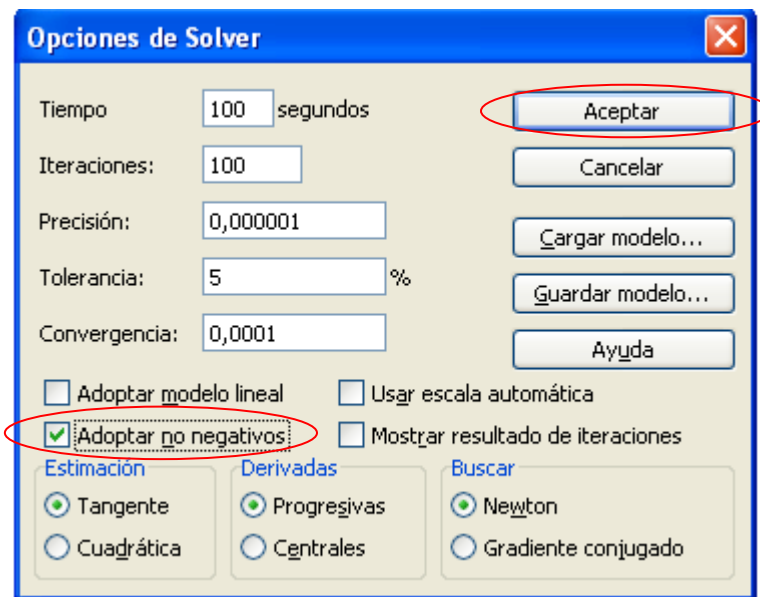


Imagen 10 - Solver: restricción de Solución no negativa

g. Estando en la ventana *Parámetros del Solver*, se hace *click* en *Resolver* (imagen 11) para obtener la solución.

The screenshot shows an Excel spreadsheet for a portfolio optimization problem. The spreadsheet includes data for three assets (TÍTULO 1, 2, 3) with expected returns (Ri) and standard deviations (σi). It also shows a covariance matrix (S) and a risk matrix (X). The Solver Parameters dialog box is open, with the objective cell set to \$K\$18 (Riesgo) and constraints for total weight (Σ X = 100%) and risk (σp ≤ 41.73%).

TÍTULO	1	2	3
Xi	100,00%	100,00%	100,00%
Ri	11%	15%	18%
σi	20,00%	30,00%	35,00%

S			
σij	1	2	3
1	0,0400	-0,0020	0,0700
2	-0,0020	0,0900	0,2400
3	0,0700	0,2400	0,1225

X			
	X1	X2	X3
100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Parámetros de Solver

Celda objetivo: \$K\$18

Valor de la celda objetivo: Máximo Mínimo Valores de: 0

Cambiando las celdas: \$G\$5:\$I\$5

Sujetas a las siguientes restricciones:

- \$G\$5:\$I\$5 <= 1
- \$K\$22 = \$M\$22

Botones: Resolver, Cerrar, Opciones..., Estimar, Agregar..., Cambiar..., Restablecer todo, Eliminar, Ayuda.

Imagen 11 - Solver: Parámetros para Solución

h. El cuadro de solución se muestra en la imagen 12; en este caso el máximo riesgo del portafolio (σ_p) es 41,73%.

The screenshot shows the same Excel spreadsheet as in image 11, but with the Solver Results dialog box open. The Solver has found a solution that maximizes the risk of the portfolio. The resulting portfolio weights are 0% for asset 1, 43.93% for asset 2, and 56.07% for asset 3. The resulting portfolio risk (σp) is 41.73%.

TÍTULO	1	2	3
Xi	0,00%	43,93%	56,07%
Ri	11%	15%	18%
σi	20,00%	30,00%	35,00%

S			
σij	1	2	3
1	0,0400	-0,0020	0,0700
2	-0,0020	0,0900	0,2400
3	0,0700	0,2400	0,1225

X			
	X1	X2	X3
0,00%	43,93%	56,07%	

Resultados de Solver

Solver ha hallado una solución. Se han satisfecho todas las restricciones y condiciones.

Utilizar solución de Solver Restaurar valgres originales

Informes: Respuestas, Sensibilidad, Límites

Botones: Aceptar, Cancelar, Guardar escenario..., Ayuda.

Imagen 12 - Solver: Solución - máximo σ_p

Valor mínimo de σ_p

Lo eficiente es hacer una copia de la hoja final anterior, donde se obtuvo el valor máximo de σ_p , para trabajar sobre esta copia.

Como ahora se va a hallar el valor mínimo del riesgo de la frontera Eficiente, se debe marcar la alternativa *máximo* en el espacio *Valor de la celda objetivo* de la ventana *Parámetros del Solver*; en realidad es cambiar la alternativa *máximo* del proceso anterior por *mínimo*, ahora (ver imagen13). Y todo lo demás se deja igual y se resuelve.

The screenshot shows the 'Parámetros de Solver' dialog box with the 'Mínimo' radio button selected. The spreadsheet data is as follows:

TÍTULO	1	2	3
X_i	100,00%	100,00%	100,00%
R_i	11%	15%	18%
σ_i	20,00%	30,00%	35,00%

σ_{ij}	1	2	3
1	0,0400	-0,0020	0,0700
2	-0,0020	0,0900	0,2400
3	0,0700	0,2400	0,1225

X	1	2	3
(X) (S)	0,108	0,328	0,433

X^T	X1	X2	X3
	100,00%	100,00%	100,00%

RIESGO	σ_p	(X) (S) (X)	86,85%	93,19%
RENTA	R_p	(X) (R)		44,00%
PPTO	ΣX	100%		300,00%

Imagen 13 - Solver: Parámetros para Solución

El cuadro de solución se muestra en la imagen 14; en este caso el mínimo riesgo del portafolio (σ_p) es 16,38%.

The screenshot shows the 'Resultados de Solver' dialog box with 'Utilizar solución de Solver' selected. The spreadsheet data is as follows:

TÍTULO	1	2	3
X_i	68,66%	31,34%	0,00%
R_i	11%	15%	18%
σ_i	20,00%	30,00%	35,00%

σ_{ij}	1	2	3
1	0,0400	-0,0020	0,0700
2	-0,0020	0,0900	0,2400
3	0,0700	0,2400	0,1225

X	1	2	3
(X) (S)	0,027	0,027	0,123

X^T	X1	X2	X3
	68,66%	31,34%	0,00%

RIESGO	σ_p	(X) (S) (X)	2,68%	16,38%
RENTA	R_p	(X) (R)		12,25%
PPTO	ΣX	100%		100,00%

Imagen 14 - Solver: Solución - mínimo σ_p

Construcción de la Frontera Eficiente

La construcción se hace dando valores de σ_p en el rango de existencia del mismo, (16,38%, 41,73%) para el caso que se ejemplifica, y en cada uno de estos valores hallar el máximo R_p .

Se sugieren los siguientes pasos:

- Crear una hoja para ejecutar la tabla de la Frontera Eficiente. Esta tabla contiene la composición de cada portafolio (X_1 , X_2 , X_3) y los correspondientes parámetros del portafolio: σ_p y R_p (Riesgo y Rentabilidad del portafolio), como se muestra en la imagen 15. Para el caso se decidió tomar 10 puntos para dibujar la gráfica correspondiente.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1									
2	PORTAFOLIO 1-2-3 FRONTERA EFICIENTE								
3									
4		PORTAFOLIO: Frontera Superior							
5		COMPOSICIÓN				FRONTERA EFICIENTE			
6		X1	X2	X3		σ_p	R_p		
7		68,66%	31,34%	0,00%		16,38%	12,25%		
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16		0,00%	43,93%	56,07%		41,73%	16,68%		
17									

Imagen 15 - Frontera Eficiente: Valores iniciales

- A esta hoja se llevan los parámetros correspondientes a los valores extremos de σ_p , como se aprecia en la imagen 15. La manera de llevar estos datos es *copiar* los respectivos rangos de las hojas de trabajo: [G5:H5] para la composición del portafolio (X_1 , X_2 , X_3), [K18] para el Riesgo del portafolio (σ_p) y [K20] para la rentabilidad del portafolio (R_p). La forma de hacerlo es:

- Ubicar el rango de celdas en la hoja de origen
- Click en *Copiar*
- Ubicar el rango de celdas en hoja de destino
- Clicks en *Pegar/Pegado Especial/Valores/Aceptar*

- c. Como los 10 puntos de evaluación escogidos representan nueve intervalos sobre el rango de la variable σ_p , se debe calcular el tamaño de este:

$$\text{Intervalo} = \Delta\sigma = (41,63\% - 16,38\%) / 9 = 2,82\%$$

Este valor se incrementa al valor anterior de σ_p , en cada una de las nueve iteraciones, partiendo del σ_p mínimo (16,38%), obteniendo la tabla que se muestra en la imagen 16.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	PORTAFOLIO 1-2-3 FRONTERA EFICIENTE							
3								
4	PORTAFOLIO: Frontera Superior							
5	COMPOSICIÓN			FRONTERA EFICIENTE				
6	X1	X2	X3	σ_p		Rp		
7	68,66%	31,34%	0,00%	16,38%	12,25%			
8				19,20%				
9				22,01%				
10				24,83%				
11				27,65%				
12				30,46%				
13				33,28%				
14				36,09%				
15				38,91%				
16	0,00%	43,93%	56,07%	41,73%	16,68%			

Imagen 16 - Frontera Eficiente: Valores del rango de σ_p

- d. Con esta partición se modela la condición de optimización en cada iteración, basándose en el modelo de obtención de los extremos (σ_p) de la Frontera Eficiente, pero ahora maximizando la Rentabilidad del portafolio (Rp) cada vez, y forzando al riesgo (σ_p) para que esté en el correspondiente valor que se ha establecido en la tabla. Esto se consigue indicando en la ventana *Parámetros del Solver* lo siguiente:

Celda Objetivo: [K20]
Valor de la celda objetivo: Máximo

Se agrega, además, la restricción del valor escogido para σ_p , yendo a la sub-ventana *Sujeta a las siguientes restricciones*, y haciendo *click* en *Agregar*. Estando en esta ventana, en la casilla en blanco debajo del subtítulo *Referencia de la celda*, se selecciona y entrega la celda donde se encuentra la ecuación del Riesgo del portafolio (en este caso K18); en la casilla intermedia, escoger =, y en la siguiente casilla entregar la celda donde está el límite de la restricción (en este caso, la correspondiente cifra σ_p de la imagen 16). Para ilustrar el procedimiento se muestra, en la imagen 17, el ingreso de cifras para la iteración correspondiente al valor 33,28% de σ_p .

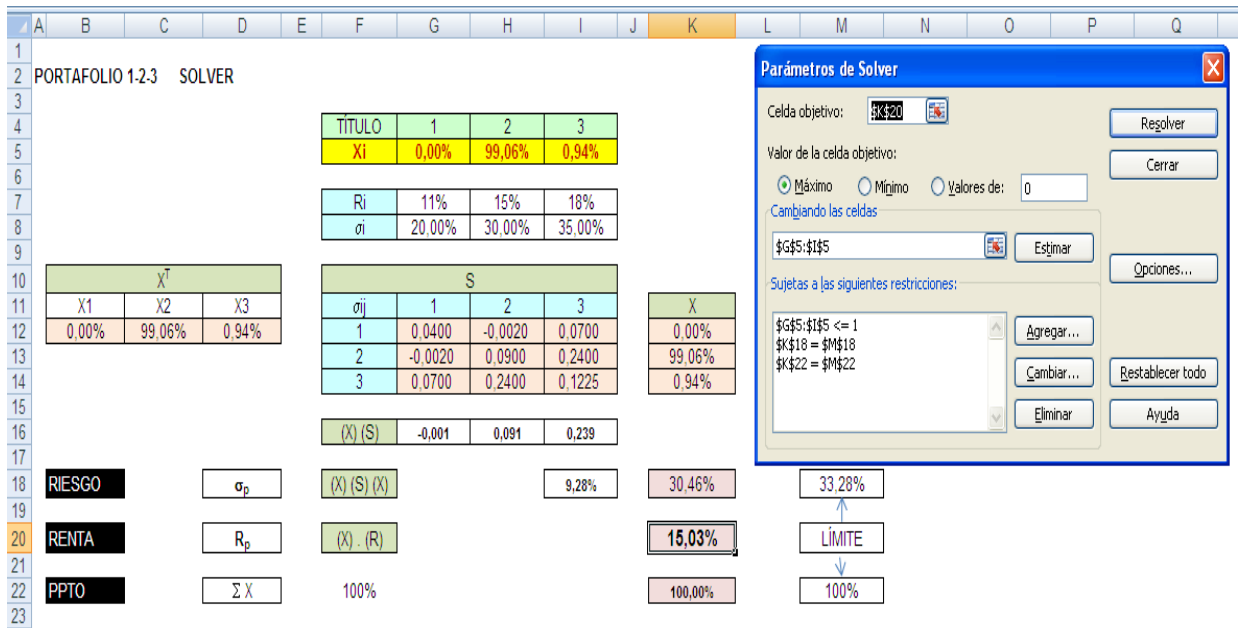


Imagen 17 - Frontera Eficiente: Generación de Cifras en el rango de σ_p

En la imagen 18 se muestra el resultado del proceso para la iteración correspondiente al valor 33,28% de σ_p .

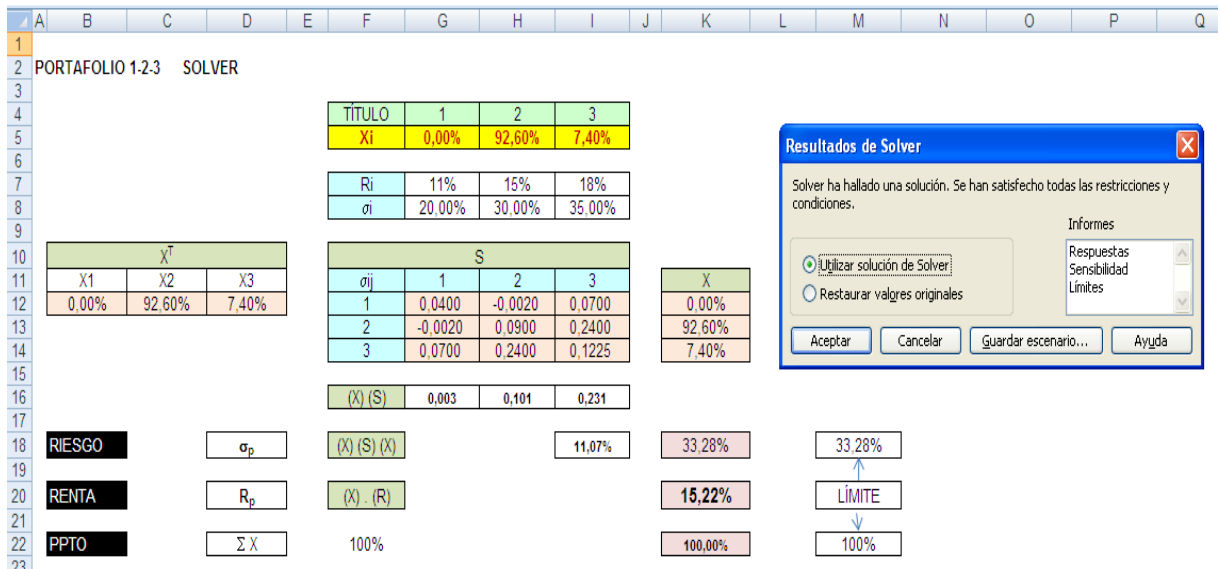


Imagen 18 - Frontera Eficiente: Generación de R_p para un dado de σ_p

- e. La solución de la iteración se copia en la tabla del portafolio, la que se mostró con sus valores iniciales en la imagen 16, para conformar la tabla que se muestra en la imagen 19.
- f. Los resultados de cada iteración se llevan a la tabla del portafolio, la que se mostró con sus valores iniciales en la imagen 16. Primero se verifica que el valor propuesto de σ_p sea el obtenido (celda [K18]); luego se completa la fila de la tabla: *copiar* los respectivos rangos de la hoja de trabajo: [G5:H5] para la composición del portafolio (X_1, X_2, X_3), y [K20] para la rentabilidad del portafolio (R_p). La forma de hacerlo es:
- f1) Ubicar el rango de celdas en la hoja de origen
 - f2) *Click* en *Copiar*
 - f3) Ubicar el rango de celdas en hoja de destino
 - f4) *Clicks* en *Pegar/Pegado Especial/Valores/Aceptar*
- g. Cumplidos los 10 cálculos, se obtiene la tabla que se muestra en la imagen 19.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1									
2	PORTAFOLIO 1-2-3 FRONTERA EFICIENTE								
3									
4		PORTAFOLIO: Frontera Superior							
5		COMPOSICIÓN				FRONTERA EFICIENTE			
6		X1	X2	X3		σ_p	R_p		
7		68,66%	31,34%	0,00%		16,38%	12,25%		
8		41,31%	58,69%	0,00%		19,20%	13,35%		
9		28,48%	71,52%	0,00%		22,01%	13,86%		
10		17,68%	82,32%	0,00%		24,83%	14,29%		
11		7,82%	92,18%	0,00%		27,65%	14,69%		
12		0,00%	99,06%	0,94%		30,46%	15,03%		
13		0,00%	92,60%	7,40%		33,28%	15,22%		
14		0,00%	84,40%	15,60%		36,09%	15,47%		
15		34,91%	0,00%	65,09%		38,91%	15,56%		
16		33,05%	0,00%	66,95%		41,73%	15,69%		

Imagen 19 - Frontera Eficiente: Portafolios calculados

- h. La gráfica de la Frontera Eficiente se consigue así:
- Click en la pestaña *Insertar*
 - Seleccionar la opción *Gráfico*
 - Seleccionar el tipo *XY (dispersión)*
 - Click en *Aceptar*
- Seguir indicaciones de la ventana que aparece para entregar los datos:
- En el eje X entregar el rango de valores de σ_p : [F7:F16]
 - En el eje Y entregar el rango de valores de R_p : [G7:G16]

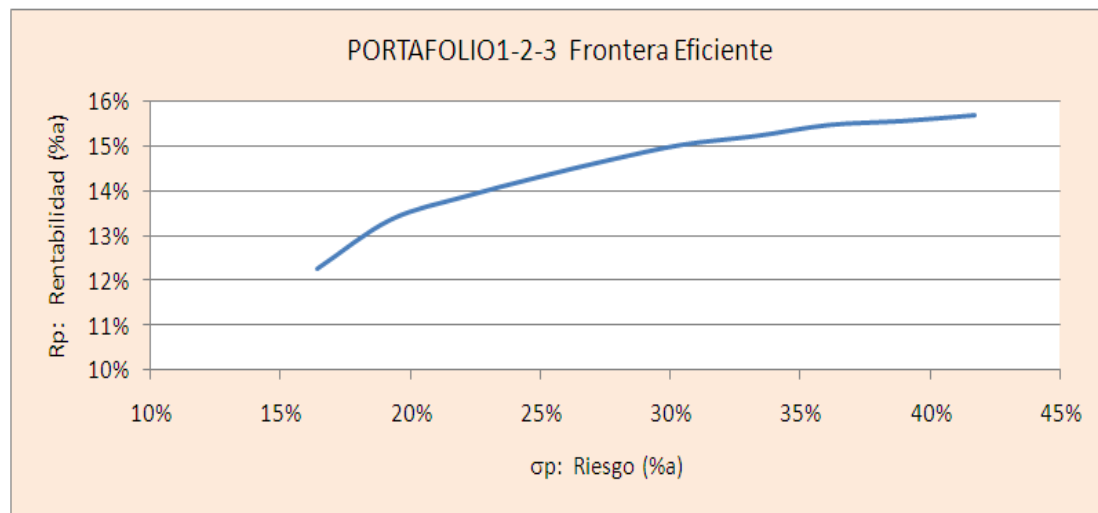


Imagen 20 - Frontera Eficiente: Gráfica

7) PORTAFOLIO PARA LÍNEA SML (Portafolio Óptimo)

Se ha de recordar que la interpretación de esta recta SML corresponde a la línea de los mejores portafolios de un mercado, mejores aún que los de la Frontera Eficiente, conseguidos mediante la introducción de un título libre de riesgo al conjunto de títulos. Así, la línea SML es aquella que corresponde a la recta que nace en el punto $(0, R_f)$ y es tangente a la línea de la frontera eficiente, o, de otro modo, la recta que une la frontera eficiente con el punto $(0, R_f)$ y presenta la mayor pendiente.

Esto representa encontrar el punto sobre la Frontera Eficiente que logra maximizar la razón de Sharpe. Para maximizar la razón de Sharpe, se propone el siguiente procedimiento:

- Copiar la hoja del modelo completo, para operar en hoja aparte.
- Luego consignar los valores de Rentabilidad y Riesgo del título libre de Riesgo (en el ejemplo, las celdas [K7] y [K8]. Recordar que estos valores son 5% y cero, según los datos que se dieron en la imagen 2. (Notar que es obvio que el título libre de riesgo presente un riesgo igual a cero).
- Formular la razón de Sharpe $((R_p - R_f) / \sigma_p)$, la cual, para el ejemplo, se especifica en la celda [K24], como lo muestra la imagen 21.
- En los *Parámetros de Solver* se indicará que se maximiza la celda correspondiente a esta razón, [K24] y que las restricciones son dos:
 - que cada fracción (rango [G5:I5]) es menor o igual a 1,
 - y que su suma, [K22, debe ser igual a 1;
 - (ver recuadro en la imagen 21).

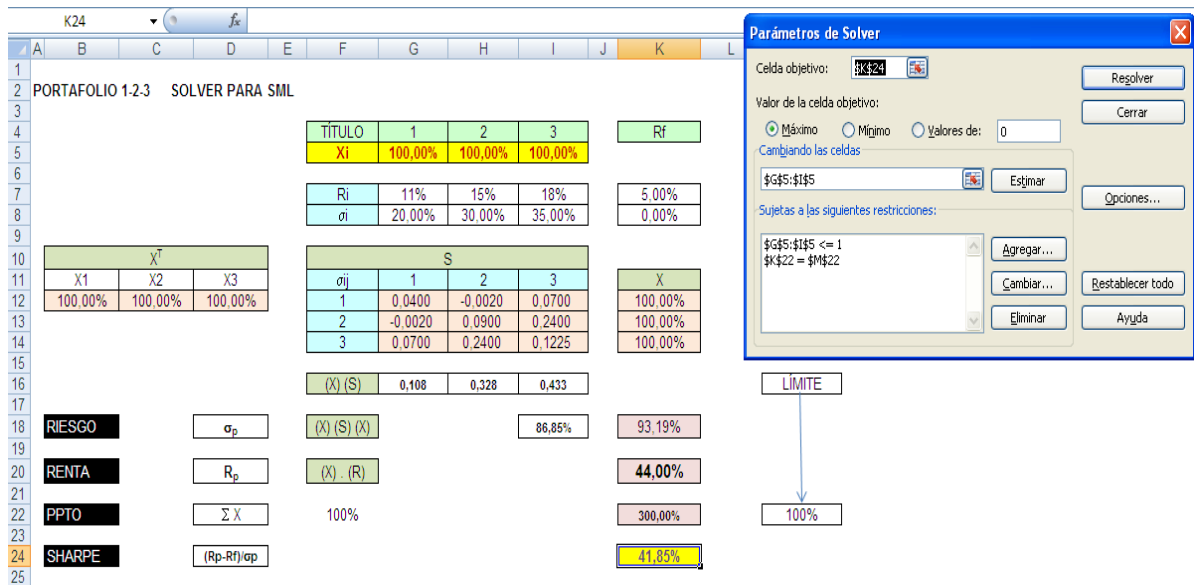


Imagen 21 - Portafolio para SML: Datos

- e. La solución se muestra en la imagen 22. Corresponde a una pendiente de 45,61%, con una composición del portafolio de (57,51%, 42,39%, 0,00%) que propician un Riesgo (σ_p) de 16,67% y una rentabilidad (R_p) de 12,70%.

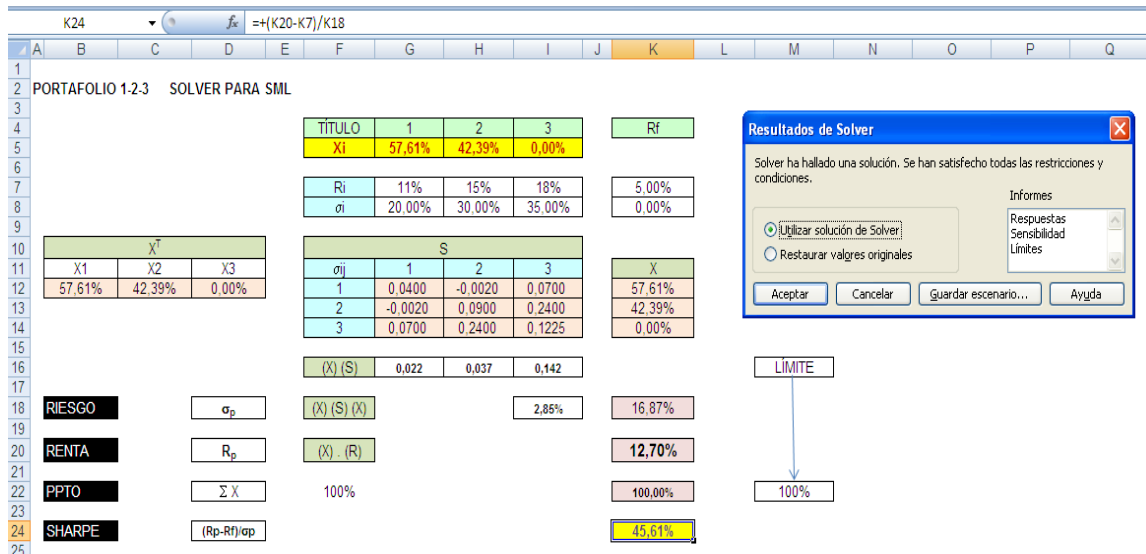


Imagen 22 - Portafolio para SML: Solución

f. La gráfica de la línea SML se muestra en la imagen 23.

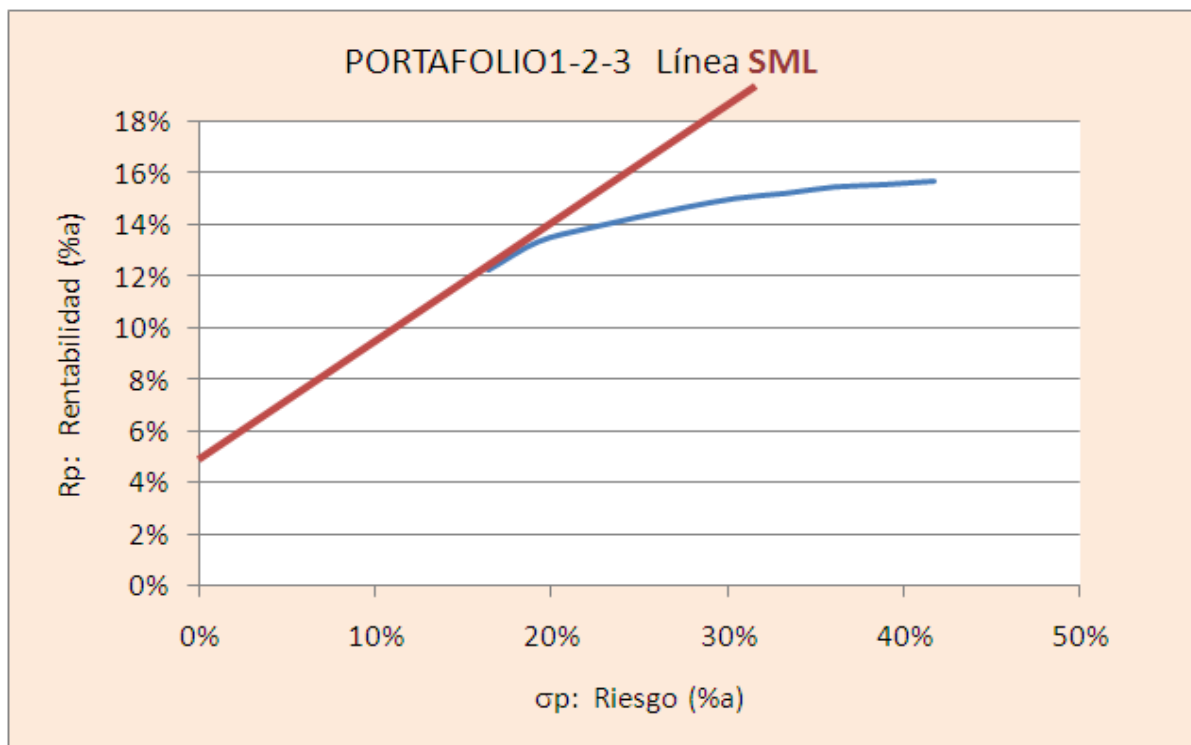


Imagen 23 - Línea SML:

BIBLIOGRAFÍA

1. Buenaventura, Guillermo (2014). *Teoría de Inversión en Evaluación de Proyectos y Presupuestación de Capital*. Cali: Universidad Icesi; pp 241-267, 363-381.
2. Markowitz, Harry M. (March 1952). "Portfolio Selection"; *The Journal of Finance* **7** (1), pp. 77–91.
3. Markowitz, Harry M. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley & Sons.
4. Sharpe, William F. (1966) "Mutual Fund Performance"; *Journal of Business*, January 1966, pp. 119-138.
5. Sharpe, William F. (1975) "Adjusting for Risk in Portfolio Performance Measurement"; *Journal of Portfolio Management*, Winter 1975, pp. 29-34.

SALÓN BURSÁTIL

**Departamento
Contable Financiero**

