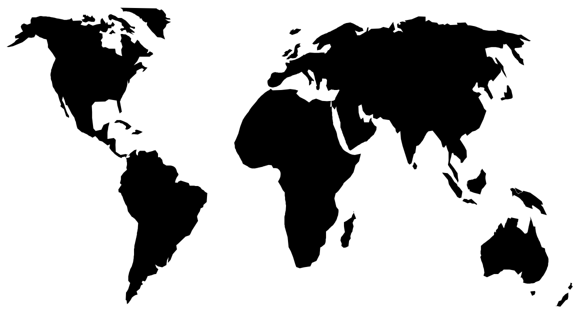
Ondes électromagnétiques dans le vide (MP)



Chapitre 1

Ondes électromagnétiques dans le vide

I – Les équations de propagations du champ EM dans le vide :

Soit une distribution (D) de charges localisées autour d'un point O, dont les densités sont fonction du temps (exemple : une antenne métallique).

Selon les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère, cette distribution (D) est la source de champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ variables dans le temps qui vont s'établir dans tout le voisinage de O.

Un point M de ce voisinage, bien que situé en dehors de (D), est lui-même source de champs en raison des termes en $\partial\vec{B}/\partial t$ et $\partial\vec{E}/\partial t$ « provenant de O » qui jouent un rôle de sources dans les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère.

Les points P du voisinage de M sont à leur tour dans leur propre voisinage des sources de champs variables dans le temps …

On conçoit ainsi que le champ EM se propage en faisant penser à des rides se transmettant de proche en proche à la surface de l'eau.

« Le couplage qui est introduit dans les équations de Maxwell par la présence des deux dérivées partielles par rapport au temps $\partial\vec{B}/\partial t$ et $\partial\vec{E}/\partial t$ est à l'origine du phénomène de propagation du champ EM. »

fréquence de l'onde en Hz	**longueur d'onde dans le vide**	**énergie du photon en eV**	**Domaine d'application**
50	6000 km	2.10^{-13}	Distribution EDF
50 à 10^{5}	6000 km à 3 km	2.10^{-13} à 4.10^{-10}	Fréquences industrielles Téléphonie
10^{5} à 4.10^{5}	3 km à 800 m	4.10^{-10} à 2.10^{-9}	Grandes ondes (LF)
10^{6} à 3.10^{6}	300 m à 100 m	4.10^{-9} à 10^{-8}	Ondes moyennes (MF)
10^{7} à 3.10^{7}	30 m à 10 m	4.10^{-8} à 10^{-7}	Ondes courtes (HF)
3.10^{7} à 10^{8}	10 m à 3 m	10^{-7} à 4.10^{-7}	Modulation de fréquence
10^{8} à 3.10^{10}	3 m à 1 cm	4.10^{-7} à 10^{-4}	Télévision et Radar
3.10^{10} à 8.10^{11}	1 cm à 0,4 mm	10^{-4} à 3.10^{-3}	Micro-ondes
8.10^{11} à 4.10^{14}	400 µm à 0,8 µm	3.10^{-3} à 1,6	Infrarouge
4.10^{14} à 8.10^{14}	0,8 µm à 0,4 µm	1,6 à 3,1	Lumière visible
8.10^{14} à 3.10^{16}	0,4 µm à 10 nm	3,1 à 120	Ultraviolet
3.10^{16} à 3.10^{18}	10 nm à 0,1 nm	120 à 10^{4}	Rayons X mous
3.10^{18} à 3.10^{20}	0,1 nm à 1 pm	10^{4} à 10^{6}	Rayons X durs
10^{21}	0,3 pm	4.10^{6}	Rayons γ
10^{22}	0,03 pm	4.10^{7}	Rayons cosmiques

Obtention des équations de propagation du champ EM :

On calcule le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{B}\right)$$

Or :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\ \vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$$

Avec $div\ \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, il vient :

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Soit, finalement :

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\overrightarrow{grad}\ \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

De manière symétrique, on élimine E au profit de B en calculant le rotationnel de MA :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{B}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\ \vec{B}\right) - \Delta\vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{rot}\ \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{E}\right)$$

Soit :

$$\overrightarrow{grad}(0) - \Delta\vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{rot}\ \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

Finalement :

$$\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overrightarrow{rot}\ \vec{j}$$

Dans une région sans charges ni courants ($\rho = 0\ et\ \vec{j} = \vec{0}$) :

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad et \qquad \Delta\vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Ces équations sont les équations de propagation du champ EM.

Si l'on note s(t) l'une des six coordonnées des champ EM (E_x,…., B_x,…), alors :

$$\Delta s - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \qquad soit \qquad \Delta s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \qquad (\frac{1}{v^2} = \varepsilon_0 \mu_0)$$

C'est l'équation de d'Alembert (équation classique de propagation des ondes, encore appelée équation des cordes vibrantes) établie au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle pour modéliser les vibrations d'une corde tendue. Comme le montre le paragraphe suivant, les solutions de cette équation traduisent un phénomène de propagation de célérité v.

* Solutions de l'équation de d'Alembert :

On va donner les formes générales des solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

On montre que ces solutions sont de la forme :

$$s = f(q) + g(p) = f(t - \frac{x}{v}) + g(t + \frac{x}{v})$$

Interprétation physique : on considère une fonction de la forme :

$$s_+(x,t) = f(t - \frac{x}{v})$$

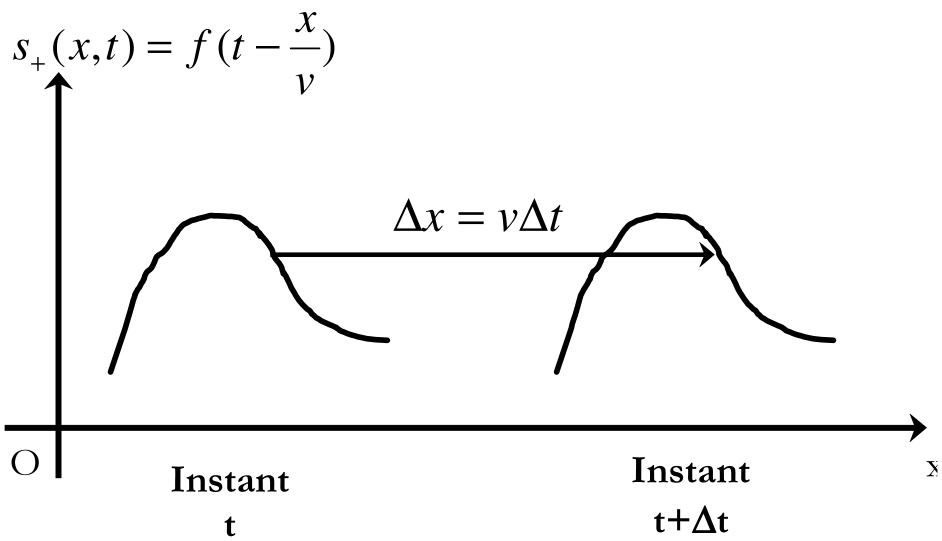
On constate que :

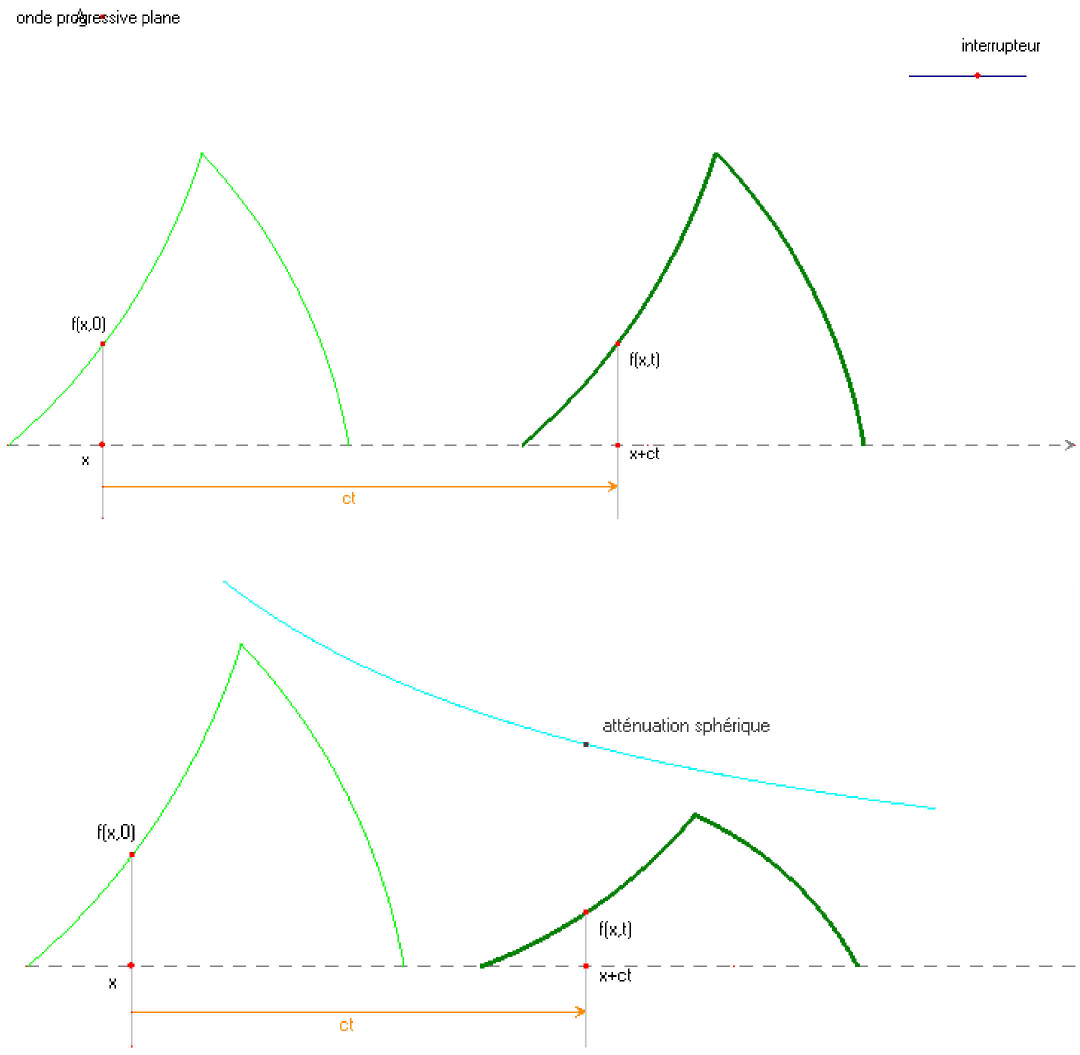
$$f\left(t-\frac{x}{v}\right)=f\left(t+\Delta t-\frac{x+\Delta x}{v}\right)$$

pour tout couple Δx et Δt vérifiant :

$$\Delta x = v\Delta t \; .$$

Ainsi, $s_+(x,t)$ représente un signal qui se propage sans déformation à la vitesse v le long de l'axe (Ox) dans le sens positif.




onde progressive plane
interrupteur
f(x,0)
f(x,t)
x
x+ct
ct
atténuation sphérique
f(x,0)
f(x,t)
x
x+ct
ct

La solution $s_{-}(x,t)=f(t+\dfrac{x}{v})$ représente un signal qui se propage sans déformation à la vitesse v le long de l'axe (Ox) dans le sens négatif.

On se propose maintenant de résoudre l'équation de d'Alembert tridimensionnelle :

$$\Delta s-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=0 \qquad avec\ s(\vec{r},t)=s(x,y,z,t)$$

On vérifie que des fonctions de la forme :

$$s_{x,\pm}(x,y,z,t)=f(t\mp\frac{x}{v}) \quad ; \quad s_{y,\pm}(x,y,z,t)=f(t\mp\frac{y}{v}) \quad ; \quad s_{z,\pm}(x,y,z,t)=f(t\mp\frac{z}{v})$$

sont solution de l'équation tridimensionnelle (ces solutions sont appelées ondes planes de directions de propagations respectives $\vec{u}_x, \vec{u}_y\ et\ \vec{u}_z$, dans le sens positif ou négatif).

Des ondes sphériques sont également solution de l'équation de d'Alembert tridimensionnelle : on cherche, par exemple, des solutions à symétrie sphérique s(r,t). En utilisant la forme du laplacien en coordonnées sphériques, il vient :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rs)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=0$$

Soit encore :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rs)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rs)=0$$

On constate alors que la fonction rs(r,t) est solution de l'équation unidimensionnelle de d'Alembert. Par conséquent :

$$rs(r,t)=f(t-\frac{r}{v})+g(t+\frac{r}{v})$$

Soit :

$$s(r,t)=\frac{1}{r}f(t-\frac{r}{v})+\frac{1}{r}\,g(t+\frac{r}{v})$$

Les deux termes de cette somme représentent des ondes sphériques respectivement divergente et convergente.

On constate que le signal ne se propage pas sans déformation en raison de l'affaiblissement exprimé par le facteur 1 / r.

On choisit, dans la suite :

Pour une onde plane s(z,t), l'équation de d'Alembert devient :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\,\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=0 \qquad ou \qquad \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=0$$

Cette fonction s(z,t) peut s'écrire sous la forme :

$$s(z,t)=f\left(t-\frac{z}{c}\right)+g\left(t+\frac{z}{c}\right)$$

Compléments (Ondes stationnaires) :

On cherche des solutions de l'équation de d'Alembert de la forme (méthode de séparation des variables) :

$$s(x,t) = f(x)\, g(t)$$

En substituant dans l'équation de d'Alembert :

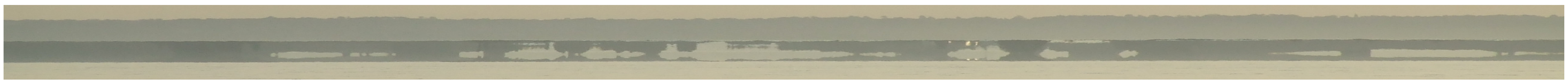
$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

Il vient :

$$f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2} f(x)\ddot{g}(t) = 0$$

D'où :

$$\frac{1}{f(x)} f''(x) = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = cste = K$$



On obtient ainsi deux équations différentielles :

$$\frac{1}{f(x)} f''(x) = K \qquad et \qquad \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = K$$

Ou encore :

$$f''(x) - Kf(x) = 0 \qquad et \qquad \ddot{g}(t) - c^2 K g(t) = 0$$

Si K > 0, la solution de la deuxième équation différentielle est de la forme :

$$g(t) = Ae^{c\sqrt{K}\,t} + Be^{-c\sqrt{K}\,t}$$

Cette solution est à rejeter : en effet, elle correspond soit à une solution divergente soit à une solution transitoire.

Dans la suite, on suppose K < 0 ; alors, en posant $-c^2 K = \omega^2$:

$$g(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$$

La 1ère équation donne alors :

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0 \qquad \textit{soit} \qquad f(x) = B\cos\left(\frac{\omega}{c}x - \psi\right)$$

La solution globale de l'équation de d'Alembert est alors :

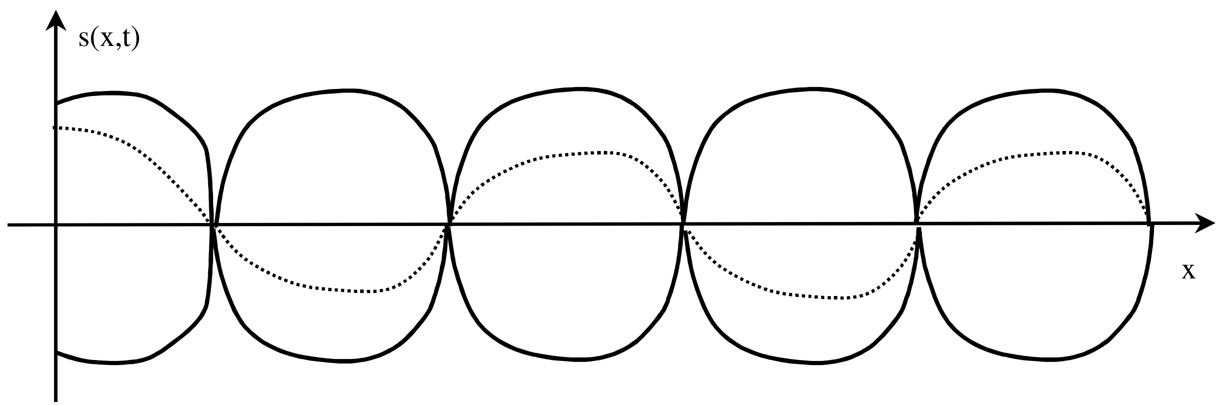
$$s(x,t) = C\cos\left(\frac{\omega}{c}x - \psi\right)\cos(\omega t - \varphi)$$

On pose dans la suite $k = \dfrac{\omega}{c}$, alors :

$$s(x,t) = C\cos(kx - \psi)\cos(\omega t - \varphi)$$

Ce type de solutions, appelé onde plane stationnaire est très différent d'une onde plane progressive : les dépendances spatiale et temporelle interviennent séparément ; la dépendance spatiale intervient dans l'amplitude de l'oscillation temporelle et non plus dans la phase, de telle sorte que tous les points de la corde vibrent en phase ou en opposition de phase.

L'allure de la corde à différents instants est représentée sur la figure suivante. Certains points de la corde sont fixes et sont appelés nœuds de vibrations ; d'autres ont une amplitude de vibration maximale et sont appelés ventres de vibrations.



Les courbes en gras correspondent aux instants où la vibration est extrémale ; la courbe en pointillés correspond à un instant quelconque.

Position des nœuds :

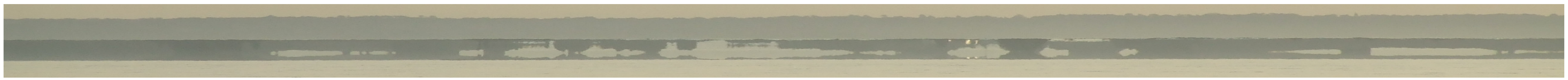
Elle s'obtient en écrivant que :

$$\cos(kx-\psi)=0 \qquad \textit{soit} \qquad kx_n-\psi=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

Soit, avec $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$:

$$x_n=\frac{2n+1}{4}\lambda+\frac{\psi}{k}$$

La distance entre deux nœuds successifs est égale à : $\dfrac{\lambda}{2}$.



Position des ventres :

Elle s'obtient en écrivant que :

$$\cos(kx - \psi) = \pm 1 \qquad soit \qquad kx_v - \psi = n\pi$$

Soit :

$$x_v = \frac{n}{2}\lambda + \frac{\psi}{k}$$

La distance entre deux ventres successifs est égale à : $\dfrac{\lambda}{2}$.

La distance entre un nœud et un ventre successif est égale à : $\dfrac{\lambda}{4}$.

II – Ondes planes EM dans le vide :

1 – Ondes planes électromagnétiques :

Une onde plane EM de direction de propagation $\vec{u}_z$ est une structure du champ EM dans laquelle les coordonnées des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont des fonctions de la forme :

$$s(z,t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

Toute coordonnée du champ a, à un instant donné, même valeur en tout point d'un plan z = cste. Un tel plan, orthogonal à la direction de propagation $\vec{u}_z$, est appelé plan d'onde.

Une source (par exemple, une station radiophonique) émet a priori des ondes sphériques ; cependant, à grande distance de celle-ci, l'onde reçue pourra être localement assimilée à une onde plane progressive

2 – Caractère transverse d'une onde plane dans le vide :

1ère démonstration :

On s'intéresse à une onde plane de la forme :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(z, t) \qquad et \qquad \vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}(z, t)$$

Les équations de Maxwell donnent :

- Equation de Maxwell – Gauss :

$$div\ \vec{E} = 0 \qquad soit \qquad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

- Equation de Maxwell – flux :

$$div\ \vec{B} = 0 \qquad soit \qquad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

- Equation de Maxwell - Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad soit \qquad \begin{aligned} -\frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \qquad (3) \\ +\frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad (4) \\ 0 &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad (5) \end{aligned}$$

- Equation de Maxwell - Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad soit \qquad \begin{aligned} -\frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad (6) \\ +\frac{\partial B_x}{\partial z} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (7) \\ 0 &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} \qquad (8) \end{aligned}$$

Les équations (1) et (8) donnent :

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

par conséquent :

$$E_z = 0$$

(les champs statiques n'interviennent pas ici lors du phénomène de propagation).

De même, les équations (2) et (5) montrent que :

$$B_z = 0$$

Ainsi, les coordonnées du champ EM parallèles à la direction de propagation $\vec{u}_z$ sont nulles : le champ EM est transversal.

Relation entre les normes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

En notant $E_x(z,t) = E_x\left(t - \dfrac{z}{c}\right)$ et $B_x(z,t) = B_x\left(t - \dfrac{z}{c}\right)$, on constate que :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad et \qquad \frac{\partial B_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

Il en est de même pour les coordonnées selon (Oy).

Ainsi,

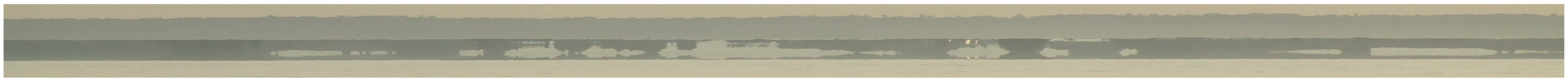
$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \qquad (3)$$

$$+\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad (4)$$

donnent

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -c\frac{\partial B_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = c\frac{\partial B_y}{\partial z}$$



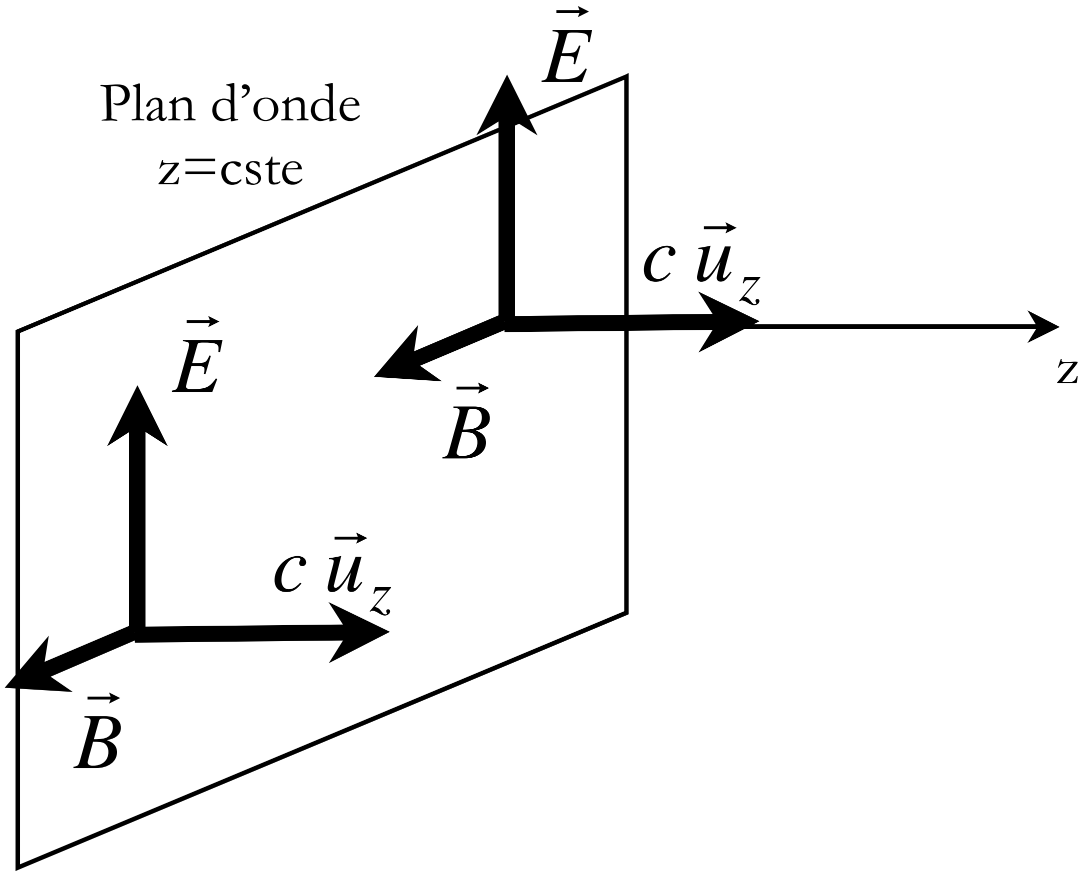
En intégrant sans tenir compte de coordonnées d'intégration constantes :

$$E_y = -cB_x \qquad et \qquad E_x = cB_y$$

Par conséquent :

$$\vec{E} = \vec{B} \wedge c\,\vec{u}_z \qquad ou \qquad \vec{B} = \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}$$

Finalement, les champ EM d'une onde plane progressive sont orthogonaux à la direction de propagation et orthogonaux entre eux ; le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{c} = c\,\vec{u}_z)$ est direct et E = Bc.



Le champ EM est uniforme dans un plan d’onde.

La force exercée par l'onde EM sur une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ est :

$$\vec{f} = q\,\vec{E} + q\,\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{f}_e + \vec{f}_m$$

Par conséquent, le rapport de la force électrique sur la force magnétique vaut :

$$\frac{f_e}{f_m} = \frac{E}{vB} = \frac{c}{v}$$

Par conséquent, pour une particule non relativiste (v << c), la force magnétique est négligeable vis-à-vis de la force électrique.

2ème démonstration :

En notant

$$E_x(z,t) = E_x\left(t - \frac{z}{c}\right) \qquad \text{et} \qquad B_x(z,t) = B_x\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

On constate, de manière symbolique, que :

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

Ainsi, l'opérateur gradient (ou le vecteur nabla) peut s'écrire :

$$\overrightarrow{grad} = \vec{\nabla} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{u}_z$$

Les équations de Maxwell deviennent alors, compte tenu de ce formalisme :

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{u}_z.\vec{E}=0$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{u}_z.\vec{B}=0$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{u}_z\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{u}_z\wedge\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

soit (avec $\vec{u}_z=\overrightarrow{cste}$)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}_z.\vec{E})=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}_z.\vec{B})=0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}_z\wedge\vec{E})=\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}_z\wedge\vec{B})=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

En annulant les constantes d'intégration, les deux premières équations donnent :

$$\vec{u}_z.\vec{E}=0 \qquad et \qquad \vec{u}_z.\vec{B}=0$$

On retrouve la caractère transversal du champ EM.

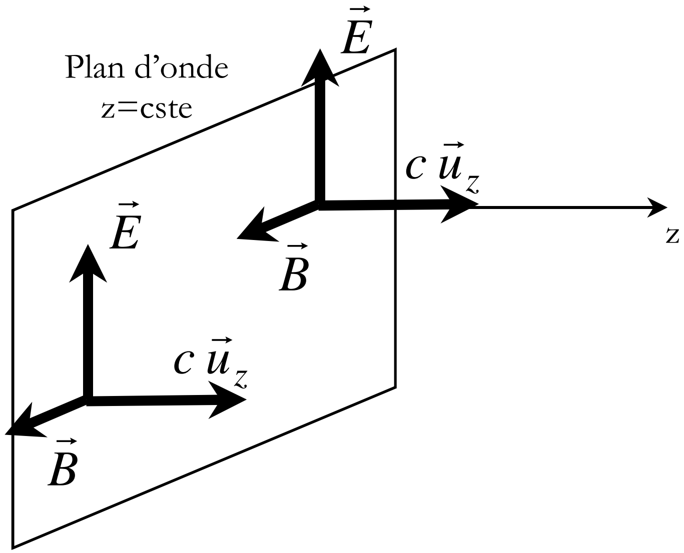
Les deux dernières équations donnent, après intégration :

$$\frac{1}{c}(\vec{u}_z \wedge \vec{E}) = \vec{B} \qquad et \qquad \vec{u}_z \wedge \vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{E}$$

Soit :

$$\vec{E} = \vec{B} \wedge c\,\vec{u}_z \qquad ou \qquad \vec{B} = \frac{\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}$$

On retrouve les mêmes relations que lors de la 1ère démonstration.



III – Ondes planes progressives monochromatiques (ou harmoniques) :

1 – Solutions sinusoïdales de l'équation de propagation de d'Alembert :

L'équation de propagation est linéaire ; par conséquent, l'analyse de Fourier permet d'affirmer que toute solution de cette équation est la somme de fonctions sinusoïdales du temps.

On se limite ici à des solutions harmoniques de l'équation de d'Alembert, c'est-à-dire des solutions de la forme :

$$s(x,t) = A\cos\left(\omega(t-\frac{z}{c})\right)$$

Ces solutions correspondent à des ondes planes progressives harmoniques (OPPH).

Ces fonctions, de période temporelle $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ possèdent une période spatiale :

$$\lambda = cT = 2\pi\frac{c}{\omega}$$

appelée longueur d'onde.

On définit le vecteur d'onde $\vec{k}$ tel que :

$$\vec{k} = k\,\vec{u}_z \qquad avec \qquad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

L'OPPH est alors de la forme :

$$s(x,t) = A\cos\left(\omega t - kz)\right)$$

En notation réelle, le champ électrique pourra s'écrire :

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega(t - \frac{z}{c})) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz)$$

Avec :

$$\vec{k} = k\vec{u}_z = \frac{\omega}{c}\vec{u}_z$$ (vecteur d'onde)

En notation complexe, on notera le champ EM sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = \underline{\vec{E}}_0 \ e^{i(\omega t - kz)} \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{B}}(z,t) = \underline{\vec{B}}_0 \ e^{i(\omega t - kz)}$$

Si la direction de l'onde est quelconque, dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$\underline{\vec{E}}(x,y,z,t) = \underline{\vec{E}}_0 \ e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{B}}(x,y,z,t) = \underline{\vec{B}}_0 \ e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$

où :

$$\vec{k} = k\,\vec{u}$$

($\vec{u}$ vecteur unitaire donnant le sens de propagation) est le vecteur d'onde et :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

(O, origine du repère et M le point d'observation).

L'expression du Laplacien devient :

$$\Delta\underline{\vec{E}} = \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial y^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\ \vec{E} = -k^2\ \vec{E}$$

Par ailleurs :

$$\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\ \vec{E}$$

L'équation d'onde de d'Alembert donne alors (relation de dispersion dans le vide) :

$$(-k^2\,\underline{\vec{E}}) - \frac{1}{c^2}(-\omega^2\,\underline{\vec{E}}) = 0 \qquad \textit{soit} \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

D'où :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

2 – Structure des ondes planes progressives monochromatiques :

Compte tenu du choix de la notation complexe, les opérateurs vectoriels se simplifient. En effet, en remarquant que :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = (i\omega)\, \underline{\vec{E}} \qquad ; \qquad \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = -ik_x\, \underline{\vec{E}}$$

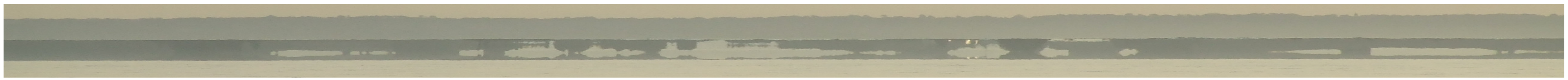
En effet :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k}.\vec{u})) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z))$$

Il vient :

$$div\, \underline{\vec{E}} = \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = -ik_x \underline{E}_x - ik_y \underline{E}_y - ik_z \underline{E}_z = -i\, \vec{k}.\underline{\vec{E}}$$

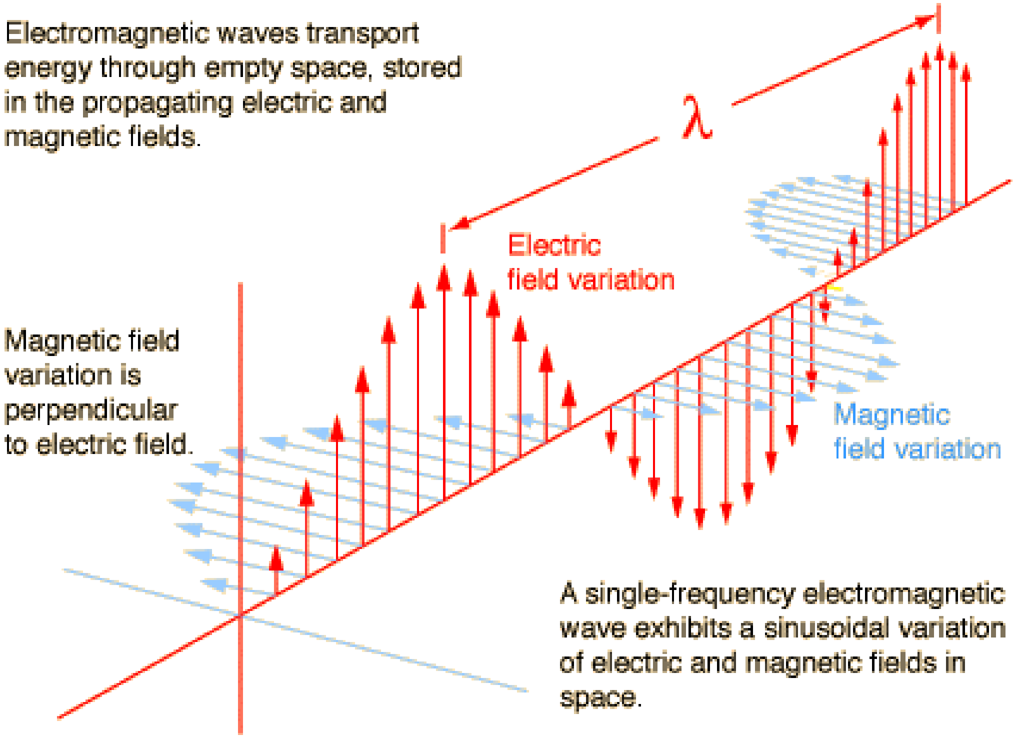
De même :



$$\overrightarrow{rot}\;\underline{\vec{E}} = -i\,\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} \qquad et \qquad \Delta\underline{\vec{E}} = -k^2\,\underline{\vec{E}}$$

Les quatre équations de Maxwell deviennent ensuite :

$$div\;\underline{\vec{E}} = -i\,\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0 \quad ; \quad div\;\underline{\vec{B}} = -i\,\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{rot}\;\underline{\vec{E}} = -i\,\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -(i\omega\underline{\vec{B}}) \quad ; \quad \overrightarrow{rot}\;\underline{\vec{B}} = -i\,\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \frac{1}{c^2}(i\omega\underline{\vec{E}})$$



Par conséquent, on retrouve le caractère transverse des ondes EM planes :

$$\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0 \qquad et \qquad \vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$$

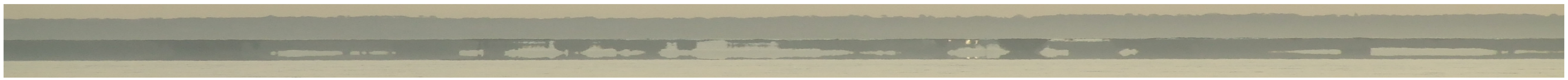
On retrouve également :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\vec{E}} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}$$

Remarque :

Cette relation n'est vérifiée évidemment que par des ondes planes monochromatiques harmoniques.

Notamment, lorsque l'amplitude de l'onde dépendra des coordonnées d'espace x ou y, la relation entre le champ E et le champ B sera différente.



3 – Propagation de l'énergie :

Les résultats qui suivent sont valables pour une onde plane progressive, non forcément sinusoïdale (ou harmonique).

La densité d'énergie u_{em} pour une onde plane progressive vaut :

$$u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

Compte tenu de E = Bc, il vient (et avec $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$) :

$$u_{em} = \varepsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2$$

On remarque qu'il y a équipartition des contributions électrique et magnétique à cette densité d'énergie.

Le vecteur de Poynting vaut :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Soit, avec $\vec{B} = \dfrac{\vec{u}_z}{c} \wedge \vec{E}$:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{c\mu_0} \vec{E} \wedge (\vec{u}_z \wedge \vec{E}) = \frac{1}{c\mu_0} \vec{E}^2 \; \vec{u}_z \qquad (car\ \vec{E}.\vec{u}_z = 0)$$

Finalement :

$$\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c \; \vec{E}^2 \; \vec{u}_z = c u_{em} \; \vec{u}_z$$

Le vecteur de Poynting est bien colinéaire à la direction de propagation.

Si l'on revient à la définition du vecteur densité de courant :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

correspondant à un mouvement d'ensemble de charges de densité ρ à la vitesse $\vec{v}$, on constate que la relation $\vec{\Pi} = c u_{em} \vec{u}_z$ exprime simplement que l'onde EM plane progressive dans le vide transporte l'énergie dans sa propre direction de propagation et avec une vitesse égale à sa célérité c ($\vec{v}_{em} = \vec{\Pi} / u_{EM} = c\vec{u}_z$).

Remarque :

On peut retrouver ce résultat en considérant le cylindre de section droite (S) de génératrices de longueur $v_{em}dt$ parallèles à la direction de propagation. L'énergie qui va traverser cette surface pendant dt est alors $u_{em}v_{em}Sdt$. Elle est par ailleurs égale au flux du vecteur de Poynting (multiplié par dt), soit :

$$u_{em} v_{em} S dt = \Pi S dt \qquad soit \qquad v_{em} = \frac{\Pi}{u_{em}} = c$$

Vecteur de Poynting moyen et puissance moyenne reçue par un détecteur :

Les ondes EM ont généralement des fréquences élevées. Les détecteurs ne sont souvent sensibles qu'aux valeurs moyennes temporelles de la puissance qu'ils reçoivent.

Ainsi, la puissance moyenne reçue par un détecteur dont la surface S est perpendiculaire à la direction de propagation est :

$$P_m = \left\langle \vec{\Pi} \right\rangle . S \, \vec{u}_z = \left\langle \Pi \right\rangle . S$$

où $\left\langle \Pi \right\rangle$ désigne la valeur algébrique du vecteur de Poynting moyen, égale à :

$$\left\langle \Pi \right\rangle = \varepsilon_0 c \left\langle E^2 \right\rangle$$

Pour un champ électrique de la forme :

$$E = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} - \varphi_0) \, , \quad \left\langle E^2 \right\rangle = \frac{E_0^2}{2}$$

Et :

$$\langle \Pi \rangle = \varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{2}$$

Utilisation de la notation complexe pour la puissance :

Rappel : si $\underline{f}$ et $\underline{g}$ sont deux fonctions sinusoïdales en notation complexe, alors la partie réelle moyenne du produit fg est :

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\underline{f} . \underline{g}^*)$$

où $\underline{g}^*$ est le conjugué de $\underline{g}$.

On peut notamment appliquer cette formule pour calculer la puissance moyenne en électricité :

$$P = \langle ui \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{u}.\underline{i}^*) = \frac{1}{2}U_m I_m \cos\varphi = U_e I_e \cos\varphi$$

La valeur moyenne de la densité d'énergie EM est alors :

$$\langle e_{em} \rangle = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*) + \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{\vec{B}}.\underline{\vec{B}}^*) \right)$$

Soit :

$$\langle e_{em} \rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 \right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting se calcule de la même manière :

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\mu_0}\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*\right) = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}} \wedge \left(\frac{\vec{u}}{c} \wedge \underline{\vec{E}}^*\right)\right)$$

Soit :

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2c\mu_0}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^*\vec{u} - \underline{\vec{E}}.\vec{u}\,\underline{\vec{E}}^*\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 \vec{u}$$

Ordres de grandeur :

- Amplitudes des champs EM d'un faisceau laser :

Un laser hélium-néon émet un faisceau cylindrique de section droite 1 mm^2 et de puissance 1 mW. Il produit une onde polarisée rectilignement. Déterminer l'amplitude des champs EM.

L'onde est quasi-plane sinusoïdale car la largeur du faisceau est bien supérieure à la longueur d'onde. Les champs EM valent :

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 cP}{S}} = 8{,}7.10^2\, V.m^{-1} \qquad ; \qquad B_0 = \frac{E_0}{c} = 2{,}9.10^{-6}\, T$$

- Emission d'une station radio :

Une source d'onde EM monochromatique (E) située dans une plaine émet un rayonnement isotrope polarisé rectilignement de puissance 1 MW. Calculer l'amplitude du champ électrique à la distance r puis à 1 000 km.

On trouve :

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 c P}{\pi}}\frac{1}{r} = 1{,}1.10^4\,\frac{1}{r}\,V.m^{-1} \qquad (1{,}1.10^{-2}\,V.m^{-1}\ \grave{a}\ 1\,000\ km)$$

IV – Polarisation des ondes EM :

1 – Représentation vectorielle réelle d'une onde plane progressive monochromatique :

On considère une onde EM plane progressive monochromatique de pulsation ω se propageant dans le vide. On choisit l'axe (Oz) comme l'axe de propagation, soit $\vec{k} = \dfrac{\omega}{c}\vec{u}_z$.

En notation complexe, le champ électrique de l'onde est :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \; e^{i(\omega t - kz)}$$

On note :

$$\underline{\vec{E}}_0 = E_{0x} e^{-i\varphi_x} \vec{u}_x + E_{0y} e^{-i\varphi_y} \vec{u}_y$$

où E_{0x} et E_{0y} sont (moyennant un bon choix des phases φ_x et φ_y) des constantes positives.

De plus, par un choix judicieux de l'origine des temps, on choisira $\varphi_x = 0$ et on notera $\varphi = \varphi_y$ le déphasage de E_y par rapport à E_x.

Alors, en notation réelle :

$$E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz)$$
$$E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz - \varphi)$$

Le champ magnétique s'en déduit (à partir de $\vec{B} = \dfrac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c}$) :

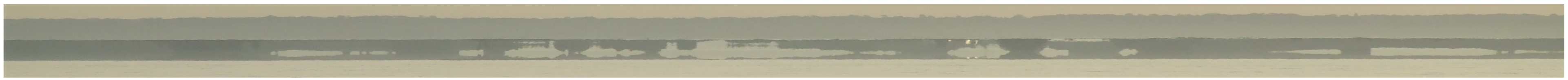
$$B_x = -\frac{E_{0y}}{c}\cos(\omega t - kz)$$
$$B_y = \frac{E_{0x}}{c}\cos(\omega t - kz - \varphi)$$

2 – Polarisation d'une onde plane progressive monochromatique

Pour définir la polarisation d'une onde plane EM progressive harmonique, on se place toujours dans un plan de cote z_0 donnée, que l'on prendra nulle par exemple.

Par conséquent, les coordonnées du champ électrique deviennent :

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t)$$
$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi)$$



- Polarisation rectiligne :

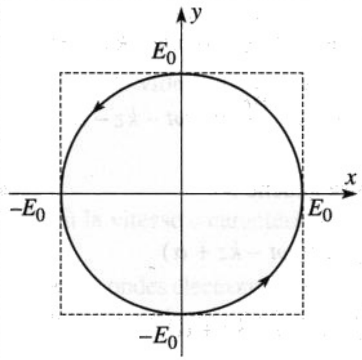
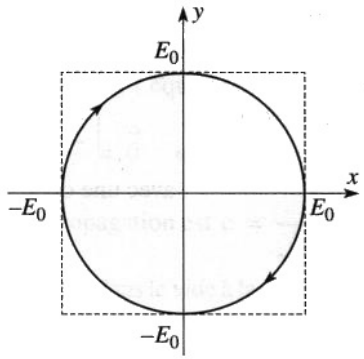
La polarisation rectiligne correspond au cas où le champ électrique garde une direction constante au cours du temps, que l'on peut choisir parallèle à l'axe (Ox) :

$$\vec{E} = E_0 \cos \omega t \ \vec{u}_x$$

Pour un observateur placé dans le plan de cote fixée, le champ oscille en fonction du temps le long de l'axe (Ox).

- Polarisation circulaire :

Si $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ ou $\varphi = +\dfrac{\pi}{2}$, les coordonnées E_x et E_y du champ électrique sont en quadrature : les axes de l'ellipse coïncident avec les axes (Ox) et (Oy).

polarisations circulaires	
circulaire gauche $\varphi = \frac{\pi}{2}$	circulaire droite $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
	
notation réelle $\begin{vmatrix} E_x = E_0\cos(\omega t) \\ E_y = E_0\sin(\omega t) \end{vmatrix}$	notation réelle $\begin{vmatrix} E_x = E_0\cos(\omega t) \\ E_y = -E_0\sin(\omega t) \end{vmatrix}$
notation complexe $\begin{vmatrix} \underline{E}_x = E_0\,e^{j\omega t} \\ \underline{E}_y = -j\underline{E}_x = -jE_0\,e^{j\omega t} \end{vmatrix}$	notation complexe $\begin{vmatrix} \underline{E}_x = E_0\,e^{j\omega t} \\ \underline{E}_y = j\underline{E}_x = jE_0\,e^{j\omega t} \end{vmatrix}$

Si $\varphi = +\dfrac{\pi}{2}$:

$$E_x = E_{0x}\cos(\omega t) \qquad et \qquad E_y = E_{0y}\sin(\omega t)$$

D'où :

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 1$$

C'est bien l'équation d'une ellipse d'axes (Ox) et (Oy), de longueurs E_{0x} et E_{0y}.

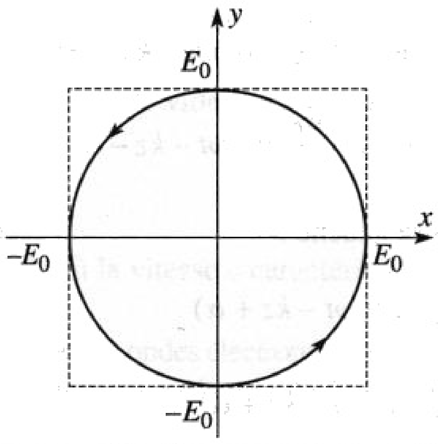
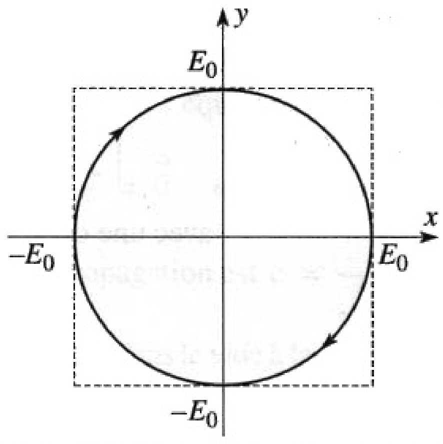
Si de plus les amplitudes E_{0x} et E_{0y} sont identiques égales à E_0, l'ellipse correspond à un cercle :

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

La polarisation de l'onde EM est dite circulaire.

Si $\varphi = +\dfrac{\pi}{2}$, l'onde est circulaire gauche et si $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$, l'onde est circulaire droite.

polarisations circulaires

circulaire gauche $\varphi = \frac{\pi}{2}$	circulaire droite $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
	
notation réelle $\begin{cases} E_x = E_0\cos(\omega t) \\ E_y = E_0\sin(\omega t) \end{cases}$	notation réelle $\begin{cases} E_x = E_0\cos(\omega t) \\ E_y = -E_0\sin(\omega t) \end{cases}$
notation complexe $\begin{cases} \underline{E}_x = E_0\,e^{j\omega t} \\ \underline{E}_y = -j\underline{E}_x = -jE_0\,e^{j\omega t} \end{cases}$	notation complexe $\begin{cases} \underline{E}_x = E_0\,e^{j\omega t} \\ \underline{E}_y = j\underline{E}_x = jE_0\,e^{j\omega t} \end{cases}$

Application : décomposition d'une onde à polarisation rectiligne comme la superposition de deux ondes circulaires :

Le champ électrique d'une onde se propageant dans la direction (Oz) est donné par :

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{l} E_x = E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - kz) \\ E_z = 0 \end{array} \right. .$$

1) *Quelle est la polarisation de cette onde ? Faire un schéma.*

2) *Décomposer cette onde en deux ondes à polarisations circulaires de sens opposés.*

- Polarisation elliptique :

On rappelle que :

$$E_x = E_{0x}\cos(\omega t)$$
$$E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \varphi)$$

La coordonnée selon (Oy) peut encore s'écrire :

$$E_y = E_{0y}(\cos\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi)$$

Afin d'éliminer le temps, on écrit que :

$$\cos(\omega t) = \frac{E_x}{E_{0x}}$$

$$\sin\omega t = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}}\cos\varphi\right)$$

Par conséquent, en utilisant $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$:

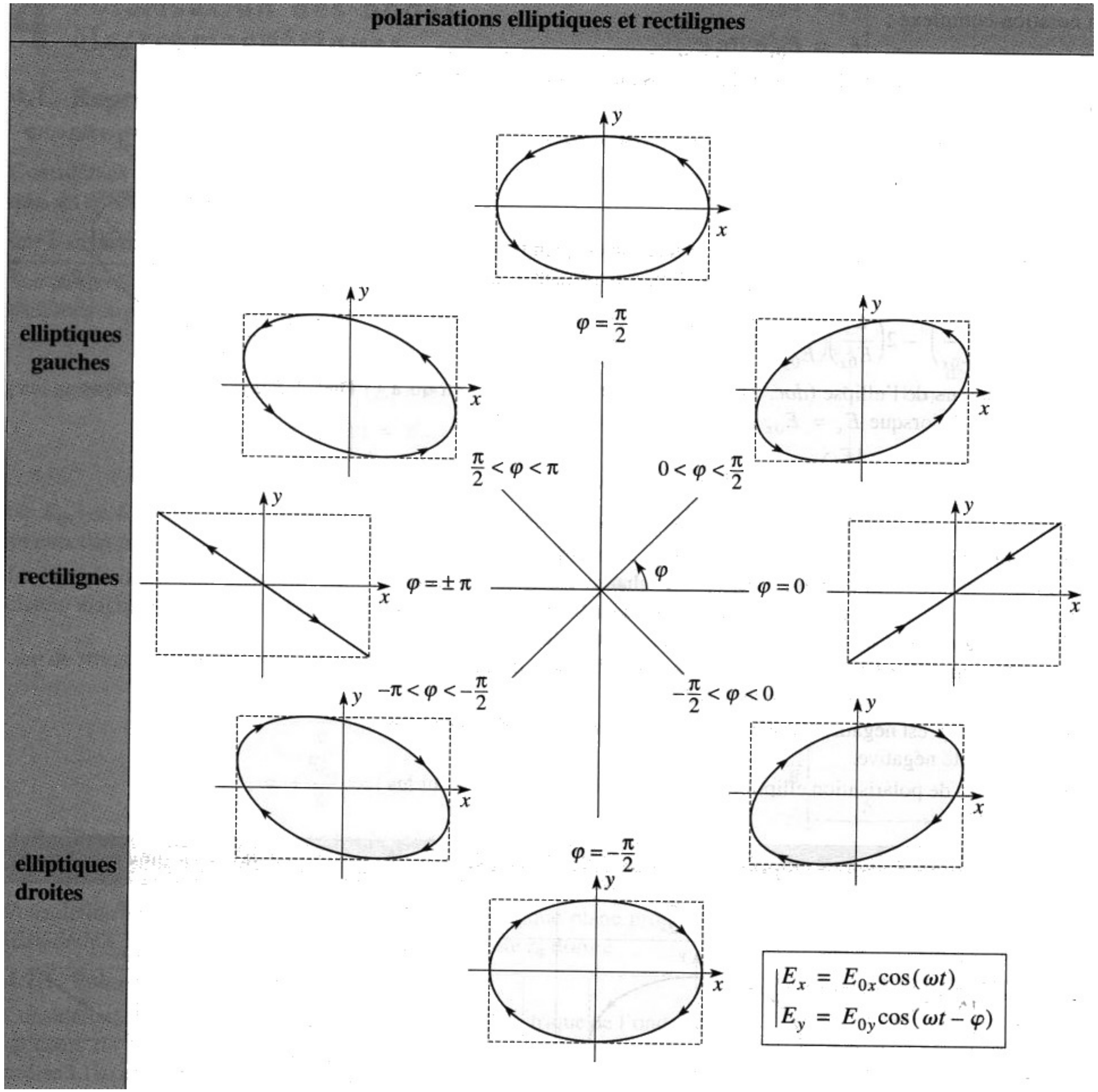
$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \varphi}\left(\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\cos\varphi + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 \cos^2 \varphi\right) = 1$$

Soit :

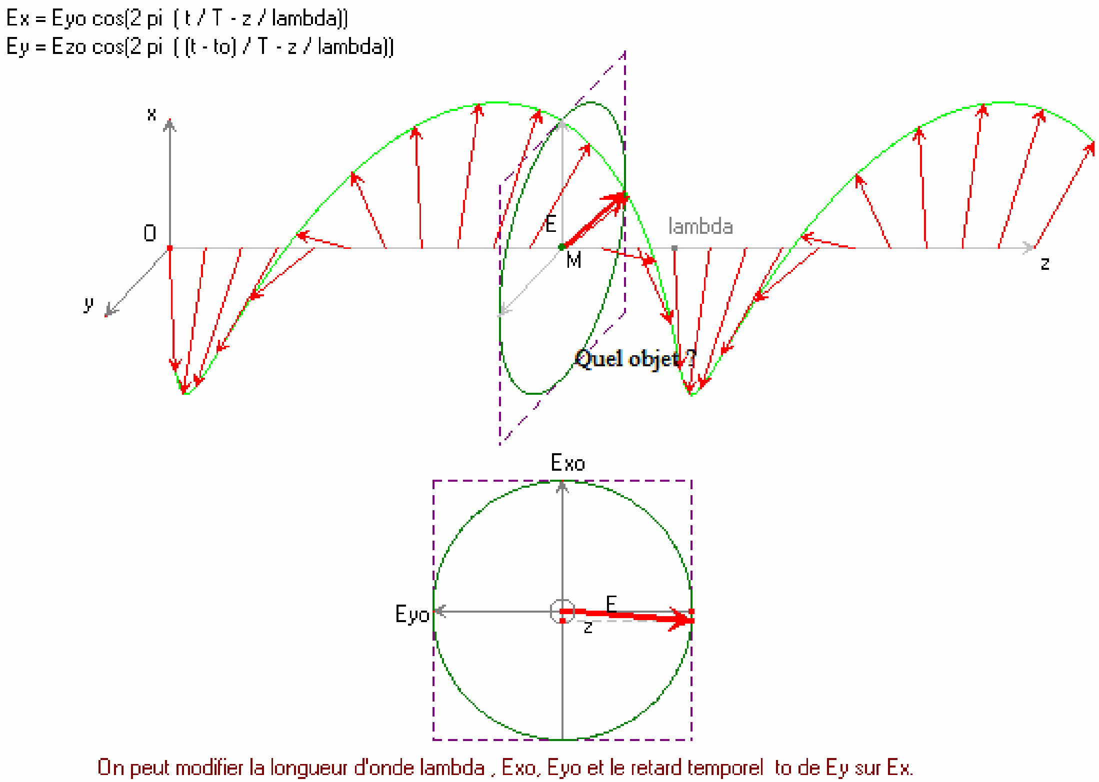
$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\varphi + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = \sin^2 \varphi$$

Le sens de parcours de l'ellipse peut être déterminé en écrivant qu'à t = 0, au point A (voir figure), lorsque $E_x = E_{0x}$ est maximal, on a :

$$\left(\frac{dE_y}{dt}\right)_{t=0} = \omega E_{0y} \sin\varphi$$


polarisations elliptiques et rectilignes
elliptiques gauches
rectilignes
elliptiques droites
$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$
$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$
$\varphi = \pm\pi$
$\varphi = 0$
$-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$
$\varphi = -\frac{\pi}{2}$
$E_x = E_{0x}\cos(\omega t)$
$E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \varphi)$

Le sens de rotation est donc donné par le signe de $\sin\varphi$: si $\sin\varphi > 0$, le parcours se fait dans le sens trigonométrique, si $\sin\varphi < 0$, il se fait dans le sens des aiguilles d'une montre.



[Animation cabri géomètre (Y.Cortial)]

Cas de la lumière naturelle :

Pour la plupart des sources lumineuses classiques, la lumière émise correspond à une superposition d'OPPM de durées très courtes (de l'ordre de 10^{-10} s, mais n'oublions pas que la période des ces ondes est de l'ordre de 10^{-15} s) et de polarisation bien fixée pour chaque onde mais changeant de façon aléatoire entre deux ondes planes progressives monochromatiques.

Les détecteurs optiques sont sensibles à la valeur moyenne dans le temps du carré du champ électrique (c'est l'intensité lumineuse) sur des durées de l'ordre de 10^{-12} s (œil) à 10^{-6} s (bonne cellule photoélectrique). Ils ne peuvent donc pas suivre la polarisation d'une des OPPM dont la succession forme la lumière visible : on dit que la lumière naturelle n'est pas polarisée.