Aufgabe 1 *(Algebren und Semantik)* (8 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, sei $p(t_1, \dots, t_n)$ ein Σ-Grundatom, und sei N eine Menge von Σ-Grundklauseln. Wir definieren

$$\begin{aligned} N^+ &= \{\, C \in N \mid p(t_1, \dots, t_n) \text{ kommt in } C \text{ positiv vor} \,\} \\ N^- &= \{\, C \in N \mid p(t_1, \dots, t_n) \text{ kommt in } C \text{ negativ vor} \,\} \\ N^0 &= \{\, C \in N \mid p(t_1, \dots, t_n) \text{ kommt nicht in } C \text{ vor} \,\} \end{aligned}$$

Beweisen Sie: Falls $N^- = \emptyset$, dann ist N genau dann erfüllbar, wenn N^0 erfüllbar ist.

Aufgabe 2 *(Resolution, Modellkonstruktion)* (3 + 3 = 6 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur mit $\Omega = \{a/0,\ f/1\}$ und $\Pi = \{p/1\}$. Nehmen wir an, daß die Atomordnung $\succ$ so definiert ist, daß $p(f^n(a)) \succ p(f^m(a))$ genau dann gilt, wenn $n > m \geq 0$. Sei N die folgende Klauselmenge:

$$p(f(f(a)))$$
$$\neg p(x) \vee p(f(x))$$

Teil (a)

Skizzieren Sie, wie die Menge $G_\Sigma(N)$ aller Grundinstanzen von Klauseln in N aussieht. Wie ist sie bezüglich der Klauselordung $\succ_{\mathrm{C}}$ geordnet?

Teil (b)

Konstruieren Sie das Kandidatenmodell $I^{\succ}_{G_\Sigma(N)}$ der Menge aller Grundinstanzen von Klauseln in N.

Aufgabe 3 *(Tableaukalkül)* (8 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Tableaukalküls, daß die folgende Formelmenge unerfüllbar ist:

$$\Big\{ \forall x\, p(x) \rightarrow p(f(x)), \quad \exists y\, p(y) \wedge \neg p(f(f(y))) \Big\}$$

Aufgabe 4 *(Fixpunkttheorie)* (7 Punkte)

Sei $f : 2^U \rightarrow 2^U$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie: Falls f zwei Fixpunkte I und J hat, so daß $I \cap J = \emptyset$ gilt, dann ist $\emptyset$ ein Fixpunkt von f.

Aufgabe 5 *(Prolog)* (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

Teil (a)

Definieren Sie ein Prolog-Prädikat `mapempty(`l`)`, das für l gilt, falls l eine Liste ist und jedes Element von l die leere Liste `[]` ist.

Teil (b)

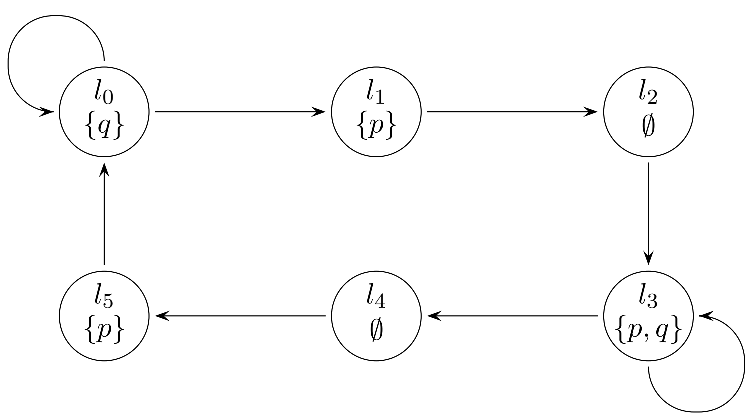
Definieren Sie Prolog-Prädikate `maphd(`l`,`l'`)` und `maptl(`l`,`l''`)`, die eine Liste von Listen $l = [l_1, \ldots, l_n]$ nehmen und Listen $l' = [l'_1, \ldots, l'_n]$ bzw. $l'' = [l''_1, \ldots, l''_n]$ berechnen, wobei l'_j der Listenkopf von l_j und l''_j der Listenrumpf von l_j ist. Falls beispielsweise l die Liste `[[1,2,3],[a,b,c]]` ist, dann berechnet `maphd` die Liste $l' =$ `[1,a]` und `maptl` die Liste $l'' =$ `[[2,3],[b,c]]`.

Teil (c)

Sei $l = [l_1, \ldots, l_n]$ eine Liste von Listen, so daß alle Listen l_i die gleiche Länge m besitzen. Die *Transposition* von l ist die Liste $l' = [l'_1, \ldots, l'_m]$, wobei l'_j die Liste aller j-ten Elemente von $l_1, \ldots, l_n$ ist. (Z.B. ist die Transposition von `[[1,2,3],[a,b,c]]` die Liste `[[1,a],[2,b],[3,c]]`.) Implementieren Sie ein Prolog-Prädikat `tr(`l`,`l'`)`, das die Transposition l' einer Liste l berechnet. Sie können die in Teil (a) und (b) definierten Prädikate benutzen.

Aufgabe 6 *(CTL)* (7 Punkte)

Sei $S = \{l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\}$, sei $\Pi = \{p, q\}$, und sei $M = (S, R, L)$ die folgende Zeitstruktur (wobei R durch $\rightarrow$ repräsentiert wird):



Berechnen Sie $[\![\mathsf{EG}\,(p \rightarrow q)]\!]$.