
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática.



Tesis Doctoral

**GPCs en espacio de estados para el
control de sistemas no lineales**

Autor: José Vicente Salcedo Romero de Ávila

Dirigida por: Miguel Andrés Martínez Iranzo

Valencia, 23 de Marzo de 2005

Índice de contenidos

Resumen	1
----------------	----------

Resum	3
--------------	----------

Abstract	5
-----------------	----------

1. Introducción	7
------------------------	----------

1.1. El Controlador Predictivo Basado en Modelos (CPBM). Perspectiva Histórica	7
1.1.1. La metodología del control predictivo	7
1.1.1.1. Predictor	11
1.1.1.2. Función de coste	13
1.1.1.3. Optimizador	16
1.1.2. Evolución del CPBM	16
1.2. Motivación, objetivos y estructura de la tesis	21
1.2.1. Motivación	21
1.2.2. Objetivos	27

1.2.3. Estructura	28
2. Revisión del diseño del GPC MIMO E/S	31
2.1. Introducción	31
2.2. Definición del controlador	32
2.3. Presencia de restricciones	37
2.3.1. Planteamiento del problema de minimización	37
2.3.2. Clasificación de las restricciones	38
2.4. Conclusiones del capítulo	40
3. Diseño del controlador GPC MIMO en espacio de estados	43
3.1. Introducción	44
3.2. Modelo CARIMA en espacio de estados propuesto	45
3.2.1. Definición del modelo	45
3.2.2. Equivalencia entre modelos CARIMA	46
3.3. Predicción de las salidas	53
3.3.1. Obtención del modelo de predicción	53
3.3.2. Comparativa de los modelos de predicción	55
3.4. Índice de coste cuadrático para el GPC MIMO en espacio de estados . . .	56
3.5. Ley de control del GPC MIMO sin restricciones	58
3.6. Estimación de los estados	61
3.6.1. Definición del observador	61
3.6.2. Diseño del observador por asignación de polos	61
3.6.3. Equivalencia entre el observador y los polinomios de filtrado . . .	65
3.7. Representación en espacio de estados del bucle cerrado	69
3.8. Presencia de restricciones	71

3.8.1. Planteamiento del problema de minimización	71
3.8.2. Restricciones duras	71
3.8.3. Restricciones blandas	76
3.9. Comparación entre el GPC MIMO E/S y el GPC MIMO en espacio de estados	77
3.9.1. Comparativa de la memoria que requieren	77
3.9.2. Estimación comparativa del tiempo de cálculo de la acción de control	81
3.10. Aplicación: reactor agitado	90
3.10.1. Caso 1	91
3.10.2. Caso 2	93
3.11. Aplicación: péndulo invertido	95
3.12. Conclusiones del capítulo	100
4. Propiedades del controlador GPC en espacio de estados	103
4.1. Introducción	104
4.2. Análisis del modelo CARIMA	105
4.2.1. Observabilidad del modelo CARIMA	105
4.2.2. Controlabilidad del modelo CARIMA	105
4.2.3. El Modelo CARIMA es una realización mínima	106
4.3. Estudio de la existencia y unicidad de la ley de control	106
4.3.1. Caso sin restricciones	107
4.3.1.1. Casos en los que $N^T \bar{Q}N + \bar{R}$ es definida positiva	107
4.3.1.2. Caso de existencia de infinitas soluciones	108
4.3.2. Caso con restricciones	109
4.3.2.1. Caso de infinitas soluciones	110
4.4. Efecto de robustez del observador	115
4.5. Análisis del bucle cerrado para el caso sin restricciones	121

4.6. Conclusiones del capítulo	125
5. Análisis y diseño de GPC estable	127
5.1. Introducción	127
5.2. Análisis de estabilidad nominal sin restricciones	128
5.2.1. Valor óptimo del índice de coste	128
5.2.2. Análisis de estabilidad	131
5.2.2.1. Casos en los que J_k^* no es función de Lyapunov	134
5.3. Diseño estable del GPC sin restricciones	139
5.3.1. Garantía de estabilidad	140
5.3.2. Método iterativo de elección de N_u y N_2 para diseño estable	143
5.4. Análisis de estabilidad con restricciones	146
5.4.1. Introducción	146
5.4.2. Resolubilidad	146
5.4.2.1. Aplicación de la Teoría de Conjuntos Invariantes al GPC	148
5.4.2.2. Caso de estimación de los estados mediante observador	159
5.5. Diseño estable de GPC con restricciones	168
5.5.1. Garantía de estabilidad	168
5.5.2. Método iterativo de elección de N_2 y N_u para diseño estable	169
5.6. Conclusiones del capítulo	172
6. Diseño robusto del GPC	173
6.1. Introducción	174
6.2. Diseño robusto: caso nominal	175
6.3. Diseño robusto: caso general	184
6.3.1. Conceptos básicos del control robusto \mathcal{H}_∞	186

6.3.1.1.	Incertidumbre estructurada, μ análisis.	191
6.3.2.	Diseño basado en LMIs	193
6.3.2.1.	Ideas previas	193
6.3.2.2.	Conceptos y definiciones	194
6.3.2.3.	Condiciones de estabilidad robusta	196
6.3.2.4.	Condiciones de satisfacción de especificaciones basadas en normas	205
6.3.2.5.	Condiciones de asignación de los polos en bucle cerrado .	217
6.3.2.6.	Inclusión de restricciones	223
6.3.2.7.	Condiciones para el caso de sistemas con parámetros va- riables con el tiempo	232
6.4.	Conclusiones del capítulo	234
7.	Control de sistemas no lineales	237
7.1.	Introducción	238
7.2.	Sistemas LPV	238
7.2.1.	Inclusión de un sistema no lineal dentro un sistema LPV	239
7.2.1.1.	Caso particular: sistemas no lineales identificados en dife- rentes puntos de funcionamiento	241
7.3.	Diseño del controlador-observador GPC para sistemas LPV	246
7.3.1.	Aplicación a una unión flexible	248
7.4.	Controladores LPV robustos	252
7.4.1.	Controlador-observador GPC-LPV	253
7.5.	Diseño del controlador-observador GPC-LPV	256
7.5.1.	Caso de sistemas LPV obtenidos por identificación	262
7.6.	Aplicación: vaporizador de gases	264
7.7.	Aplicación: motor diesel sobrealimentado	271

7.7.1. Introducción	271
7.7.2. Modelo del motor	272
7.7.3. Diseño del controlador GPC-LPV	273
7.8. Conclusiones del capítulo	280
8. Conclusiones de la Tesis y trabajos futuros	285
8.1. Conclusiones	285
8.2. Trabajos futuros	288
A. Demostraciones	291
A.1. Demostraciones correspondientes al capítulo 3	291
A.2. Demostraciones correspondientes al capítulo 4	297
A.3. Demostraciones correspondientes al capítulo 5	317
B. Análisis del rango de la matriz N	335
C. Cálculo de puntos de equilibrio	339
C.1. Introducción	339
C.2. Ecuaciones para el controlador GPC asociadas a las nuevas variables . . .	342
D. Teoría de conjuntos invariantes	345
D.1. Introducción	345
D.2. Conjuntos admisibles con respecto a la entrada y a la salida	346
D.3. Conjuntos robustos de un paso y conjuntos robustos alcanzados	346

D.4. Conjuntos positivamente invariantes robustos	347
D.5. Conjuntos invariantes robustos bajo control	348
D.6. Conjuntos robustamente controlables	349
D.7. Conjuntos robustamente estabilizables	350
D.8. Conjuntos robustamente admisibles y el cálculo del mayor conjunto invariante robusto bajo control	352
E. Análisis en frecuencia de matrices de transferencia discretas	355
E.1. Valores singulares	355
E.2. Respuesta en frecuencia de sistemas discretos	356
E.3. Normas inducidas	357
E.3.1. Algunas normas inducidas importantes de sistemas	357
E.3.2. Demostraciones	358
F. Resultados sobre LMIs	361
F.1. Demostraciones generales	361
F.2. Condiciones de estabilidad robusta	364
F.2.1. Incertidumbre afín en el bucle cerrado	364
F.2.2. Incertidumbre afín en el bucle cerrado con función de Lyapunov paramétrica afín	366
F.2.3. Incertidumbre afín en el bucle cerrado y función de Lyapunov con dependencia cuadrática	367
F.2.4. Incertidumbre LFR en el bucle cerrado	368
F.3. Condiciones de satisfacción de normas	372
F.3.1. Norma ∞	372
F.3.1.1. Cálculo de la norma ∞	372

G. Resultados sobre modelos LPV identificados **375**

G.1. Existencia y cálculo del estado del proceso en equilibrio 375

G.2. Existencia del estado del controlador en equilibrio 379

Bibliografía **383**

Resumen

En esta tesis doctoral se aborda el control de sistemas no lineales mediante el empleo de controladores predictivos generalizados (GPCs) en espacio de estados. En primer lugar se realiza una revisión de la metodología de diseño del GPC en la versión entrada/salida (E/S). Partiendo de esta revisión se propone un modelo CARIMA en espacio de estados para el GPC que permite diseñar al mismo utilizando una menor cantidad de memoria y un menor tiempo de cómputo, así como de reducir la complejidad asociada a la formulación E/S. Para la estimación de los estados del modelo CARIMA se propone el uso de un observador de rango completo que se diseña por asignación de polos, estableciéndose un importante resultado: los polos de este observador coinciden con las raíces de los polinomios de filtrado utilizados en la formulación E/S. Posteriormente se analizan las propiedades de observabilidad y controlabilidad del modelo CARIMA propuesto en espacio de estados, llegándose a la conclusión de que se trata de una realización mínima bajo condiciones no demasiado restrictivas, lo cual supone que la predicción se basa en un modelo con el mínimo orden posible.

Tras esto, se presenta una metodología de análisis y diseño estable para el GPC mediante el uso del índice de coste como función de Lyapunov, y para el caso con restricciones de la teoría de conjuntos invariantes aplicada al GPC.

Seguidamente, se presenta una metodología de diseño robusto para el GPC mediante el empleo de las desigualdades lineales matriciales (LMIs) y de algoritmos genéticos. En concreto, se analiza el caso de sistemas con incertidumbre invariante y variante con el tiempo de tipo lineal fraccional, una de las más complejas y generales utilizadas en la literatura analizada.

Finalmente se presenta el controlador GPC-LPV una extensión del GPC en espacio de estados. Se trata de un controlador variante con el tiempo que presenta dependencia lineal fraccional con respecto de las señales de salida medibles. Su diseño es aplicable a sistemas no lineales cuyos modelos dinámicos pueden ser incluidos dentro de un modelo lineal variante con el tiempo mediante técnicas de inclusión diferencial. La base matemática de este diseño se sustenta en desigualdades matriciales bilineales (BMIs), una generalización de las LMIs.

Resum

En esta tesi doctoral s'aborda el control de sistemes no lineals per mitjà de l'ús de controladors predictius generalitzats (GPCs) en espai d'estats. En primer lloc es realitza una revisió de la metodologia de disseny del GPC en la versió entrada/eixida (E/E). Partint d'esta revisió es proposa un model CARIMA en espai d'estats per al GPC que permet dissenyar al mateix utilitzant una menor quantitat de memòria i un menor temps de còmput, així com de reduir la complexitat associada la formulació E/E. Per a l'estimació dels estats del model CARIMA es proposa l'ús d'un observador de rang complet que es dissenya per assignació de pols, establint-se un important resultat: els pols d'este observador coincidixen amb les arrels dels polinomis de filtrat utilitzats en la formulació E/S. Posteriorment s'analitzen les propietats d'observabilitat i controlabilitat del model CARIMA proposat en espai d'estats, arribant-se a la conclusió que es tracta d'una realització mínima baix condicions no massa restrictives, la qual cosa suposa que la predicció es basa en un model amb el mínim orde possible.

Després d'açò, es presenta una metodologia d'anàlisi i disseny estable per al GPC per mitjà de l'ús de l'índex de cost com a funció de Lyapunov, i per al cas amb restriccions de la teoria de conjunts invariants aplicada al GPC.

A continuació, es presenta una metodologia de disseny robust per al GPC per mitjà de l'ús de les desigualtats lineals matricials (LMIs) i d'algoritmes genètics. En concret, s'analitza el cas de sistemes amb incertesa invariant i variant amb el temps de tipus lineal fraccional, una de les més complexes i generals utilitzades en la literatura analitzada.

Finalment es presenta el controlador GPC-LPV una extensió del GPC en espai d'estats. Es tracta d'un controlador variant amb el temps que presenta dependència lineal fraccional amb respecte dels senyals d'eixida mesurables. El seu disseny és aplicable a sistemes no lineals els models dinàmics dels quals poden ser inclosos dins d'un model lineal variant amb el temps per mitjà de tècniques d'inclusió diferencial. La base matemàtica d'este disseny es sustenta en desigualtats matricials bilineals (BMIs), una generalització de les LMIs.

Abstract

This doctoral thesis deals with the control of nonlinear systems using generalized predictive controllers (GPCs) in state space. First a revision of designing methodology of the GPC in input/output (I/O) version is done. Departing from this revision a CARIMA model in space of state for the GPC is proposed. This GPC in state space requires a lower amount of storing information, a lower computation time and has a easier formulation than I/O version. For the estimation of the CARIMA model states it is proposed a full rank observer designed by pole placement, becoming established an important result: the observer poles are equal to the roots of filter polynomials used in the I/O formulation. After, the controllability and observability of CARIMA model are examined, taking place to the conclusion that under smooth conditions this model is a minimal realization, which supposes that prediction is based in a model with the minimal possible order.

After this, it is proposed a methodology of analysis and stable design of GPC in state space using the cost index as Lyapunov function, and when there are constraints the invariant set theory is applied to GPC.

Straightaway, a designing robust methodology is presented for the GPC based on linear inequalities matriciales (LMIs) and genetic algorithms. In short, the case of systems with fixed and time varying uncertainty with linear fractional dependence is analyzed, one of the most complex and general dependence used in the literature examined.

Finally, the GPC-LPV controller is presented as a extension of the GPC in state space. This controller is time varying (possibly nonlinear) having a linear fraction dependence with respect to signal measurements (usually output signals). His design is applicable to nonlinear systems whose dynamic models can be included inside of a linear time varying system using linear differential inclusion techniques. Its design is based on bilinear matrix inequalities (BMIs), a generalization of LMIs.

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. El Controlador Predictivo Basado en Modelos (CPBM). Perspectiva Histórica	7
1.1.1. La metodología del control predictivo	7
1.1.1.1. Predictor	11
1.1.1.2. Función de coste	13
1.1.1.3. Optimizador	16
1.1.2. Evolución del CPBM	16
1.2. Motivación, objetivos y estructura de la tesis	21
1.2.1. Motivación	21
1.2.2. Objetivos	27
1.2.3. Estructura	28

1.1. El Controlador Predictivo Basado en Modelos (CPBM). Perspectiva Histórica

1.1.1. La metodología del control predictivo

El control predictivo basado en modelos (CPBM) o *Model Predictive Control (MPC)*, más que un controlador concreto es una metodología para el cálculo de las acciones de control. Se trata además de una técnica comprensible, que en cierto modo, trata de

1.1 El Controlador Predictivo Basado en Modelos (CPBM). Perspectiva Histórica

reproducir el comportamiento de un operador experto en el control de un determinado proceso. Los pasos que seguiría un operador experto para conseguir controlar un proceso serían:

1. El operador conoce bien el proceso y por tanto, sería capaz de predecir, con mayor o menor exactitud, cuál será la evolución dinámica de las variables de un proceso si le aplica unas acciones de control determinadas.
2. El mismo operador puede además, decidir si esa evolución es adecuada en comparación a los objetivos que se ha marcado. Es capaz, por tanto, de valorar las distintas combinaciones de las acciones de control en función del grado de cumplimiento de unas especificaciones.
3. Con todo esto, podría decidir cuál es la mejor combinación de acciones de control dentro de un conjunto de posibilidades. El resultado final es que este operador es capaz de obtener cuál debe ser la acción de control que hay que aplicar basándose en los conocimientos que tiene del proceso y en la información pasada y actual de su estado.
4. Para conseguir una mayor calidad en el control, este mismo operador repetiría todos los cálculos cada vez que disponga de información actualizada, bien sean nuevas medidas del estado del proceso, bien conocimientos actualizados acerca del comportamiento del proceso (información nueva del modelo).

Este ejemplo nos da a entender que los primeros controles realizados manualmente por operadores que conocían bien el proceso se podían haber englobado en el área del control predictivo basado en modelos. En definitiva se trata de una metodología muy intuitiva para abordar el control de un proceso y esto ha influido en su difusión a nivel industrial. Para concretar, se entiende que pertenecen a la familia de los controladores CPBM aquellos que comparten las siguientes características:

- Se hace uso explícito de un modelo del proceso en el cálculo de predicciones de la evolución dinámica del proceso.
- La ley de control (conjunto de acciones de control en un horizonte de tiempo) se obtiene de la minimización de una cierta función de coste en la que intervienen las predicciones. La función de coste es la encargada de fijar el comportamiento que se pretende conseguir (especificaciones).
- Se aplica el concepto de horizonte móvil (*receding horizon*): en cada periodo de muestreo se resuelve un problema de optimización diferente, puesto que se incorpora nueva información de la evolución dinámica del proceso.

De las ideas anteriores, se puede deducir la diversidad de estrategias que pueden surgir en base a estas características. Como consecuencia, aparecerán diferentes controladores:

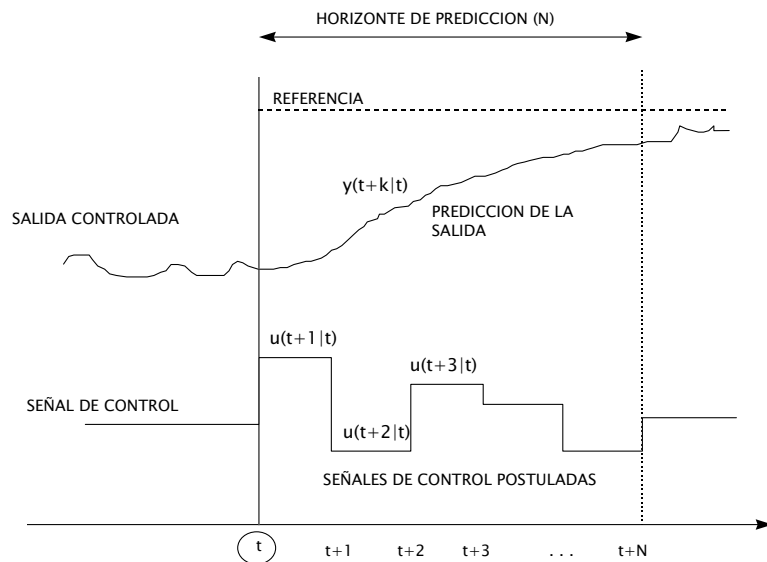
- Según el tipo de modelo del proceso utilizado.
- Según el tipo de función de coste utilizada.
- Según el método de optimización aplicado.

Para clarificar un poco más el concepto del CPBM, se va a describir la metodología común que comparten todos los controladores que hacen uso de las ideas descritas anteriormente (figura 1.1):

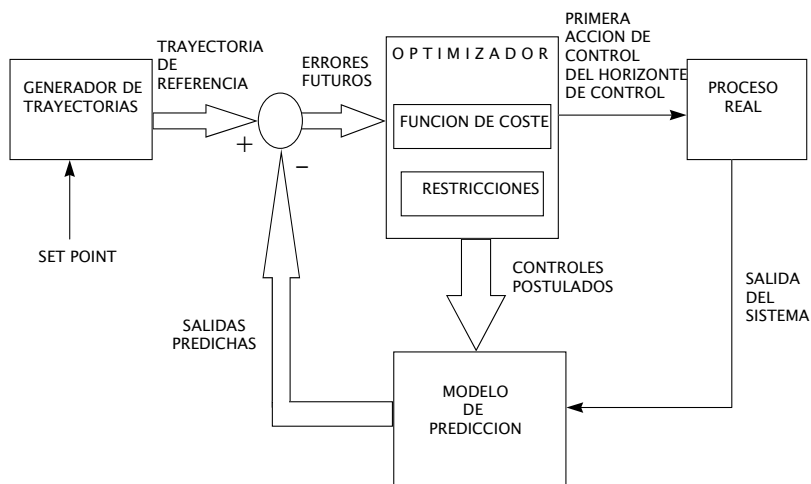
1. Haciendo uso del modelo del proceso, para cada instante t , se predicen las N futuras salidas del proceso $\mathbf{y}(t + k|t)$ ¹ siendo $k = 1, 2, \dots, N$. El número de predicciones N , recibe el nombre de *horizonte de predicción*. Las salidas se predicen utilizando las salidas y entradas pasadas (información disponible hasta el instante t) y las hipotéticas entradas de control futuras, postuladas en ese mismo instante t .
2. Las futuras acciones de control se calculan de manera que minimicen una determinada función de coste, entre cuyos objetivos se encuentra el mantener lo más cerca posible la salida del proceso $\mathbf{y}(t + k|t)$, de una trayectoria de referencia $\boldsymbol{\omega}(t + k)$ que describe cómo se desea guiar dicha salida desde su valor actual $\mathbf{y}(t)$ hasta sus puntos de consigna futuros. La función de coste adopta así generalmente la forma de una función cuadrática de los errores entre la salida predicha y la trayectoria de referencia. También en la mayoría de los casos se suele incluir algún término referente al esfuerzo de control. Además, si la función de coste que se define es cuadrática, el modelo utilizado es lineal y no existen restricciones para ninguna señal implicada, entonces es posible encontrar una solución analítica para el problema de la optimización. En caso contrario, es necesario utilizar, en general, un método numérico de optimización.
3. Una vez calculada la secuencia de futuras acciones de control que en ese instante hacen óptima la función de coste, se hace uso del concepto denominado *receding horizon*. Solamente se aplica como entrada al proceso $\mathbf{u}(t)$ la primera de ellas, depreciando el resto, puesto que en el siguiente instante $t + 1$, la salida $\mathbf{y}(t + 1)$ ya es conocida, y utilizando esa nueva información se repiten los pasos 1 y 2, obteniendo de esta forma la señal de control $\mathbf{u}(t + 1)$ a aplicar en ese instante (la cual no es igual a la que se había postulado en el instante anterior $\mathbf{u}(t + 1|t)$).

¹Es usual encontrar en el ámbito del CPBM, la sintaxis $\mathbf{y}(t + k|t)$ para indicar la predicción de la salida para el instante $t + k$ postulada en el instante t

1.1 El Controlador Predictivo Basado en Modelos (CPBM). Perspectiva Histórica



(a) La predicción de la salida del proceso es la base del control predictivo.



(b) Concepto de horizonte móvil.

FIGURA 1.1: Metodología general del CPBM

El análisis de esta metodología de control muestra que, sea cual sea la implementación que se realice, cualquier control predictivo basado en modelos se puede entender como un problema de optimización en cada periodo de muestreo que consta de tres elementos fundamentales:

- Un **predictor** basado en el modelo del proceso, encargado de calcular las predicciones de la evolución dinámica del mismo a partir de las medidas de las variables del proceso hasta el instante actual 't' y unas acciones de control futuras a lo largo del horizonte de predicción.
- Una **función de coste** que asigna un valor a cada predicción y por tanto, a cada ley de control postulada. Este valor trata de mostrar el grado de cumplimiento de las especificaciones estáticas y dinámicas compatibles con las posibles restricciones de funcionamiento.
- Un **optimizador** que debe encontrar el vector de acciones de control que ofrece el mejor valor de la función de coste. Generalmente en este proceso de búsqueda el optimizador realiza postulados de la ley de control e iterativamente trata de acercarse a la ley de control óptima.

Combinando distintas variaciones de estos tres elementos fundamentales se pueden obtener un gran número de controladores que formarían parte de la familia de los controladores predictivos. Para poder plantear cualquier tipo de mejora se debe analizar cada uno de estos tres elementos fundamentales.

1.1.1.1. Predictor

Este elemento del control predictivo es el que se encarga de calcular las predicciones de las variables que se quieren controlar y debe utilizar para ello un modelo. En general este modelo consta de dos componentes (figura 1.2):

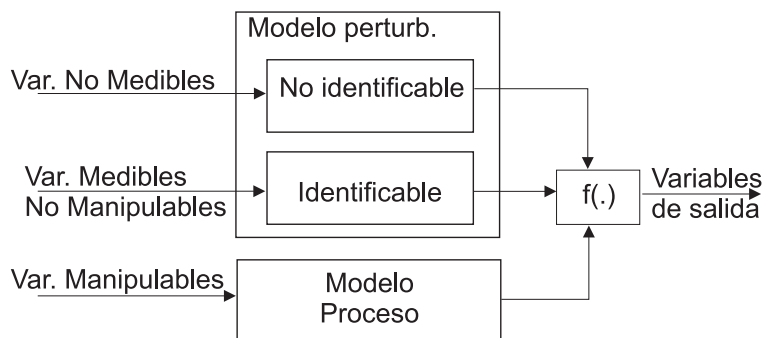


FIGURA 1.2: Estructura general de un modelo.

- **Modelo del proceso** que relaciona todas las variables de entrada que se pueden manipular con las variables de salida que se quieren controlar.
- **Modelo de perturbaciones** que se puede dividir en dos partes. Una que incluye la relación entre variables de entrada medibles, pero no manipulables, con las salidas (modelo de perturbaciones identificable) y otra parte que trata de describir la parte de la salida medida que no es explicada por el resto de modelos (modelo de perturbaciones no identificable).

Estos modelos se combinan a través de una función $f(\cdot)$ para producir un modelo de las variables de salida. Para modelar cada uno de estos componentes existen varias posibilidades:

- Respuesta ante un impulso.
- Respuesta ante un escalón.
- Función de transferencia.
- Representación en espacio de estados.
- Modelos de Volterra.
- Modelos mediante redes neuronales.
- Modelos fuzzy.

Las diferencias entre los distintos tipos de modelos son conocidas y son objeto de campos de estudio en los que se describe cómo se obtienen, qué tipo de procesos pueden modelar, cuáles son sus limitaciones y cómo se utilizan para realizar predicciones de la evolución dinámica de las variables de un proceso.

En [Phillips y Parr 1995] se puede encontrar una descripción del modelado mediante respuesta impulsional, función de transferencia y representación en espacio de estados y su utilización en control predictivo está ampliamente descrita en [Camacho y Bordóns 1999].

Un ejemplo de utilización de modelos de Volterra en control predictivo se puede encontrar en [Maner *et al.* 1996]. Las redes neuronales son, en algunos casos, una alternativa para el modelado de sistemas no lineales [Chen *et al.* 1990], ejemplos de utilización en control predictivo se encuentran en [Nahas *et al.* 1992], [Zamarreño 1996] y [Liu *et al.* 1998]. En cuanto a los modelos con técnicas fuzzy, es posible encontrar ejemplos en [Espinosa y Vandewalle 1999b] y [Espinosa y Vandewalle 1999a].

Evidentemente, la calidad de la predicción debería ser el factor que marque el tipo de técnica de modelado que se debe utilizar, al menos a nivel teórico. Es natural pensar que, a mayor calidad en las predicciones, más posibilidad se tiene de conseguir un

control adecuado. En las aplicaciones prácticas aparecen otros factores como los económicos que pueden determinar, más allá de las cuestiones teóricas, el tipo de modelo seleccionado.

Cualquiera de las técnicas de modelado mencionadas, puede ser utilizada para predecir el efecto que producen las variables manipuladas sobre las variables controladas. Esto es así, puesto que cualquiera de las acciones de control que se postule en el algoritmo de localización del óptimo, puede aplicarse posteriormente al proceso. Por tanto la calidad de la predicción sólo depende de la calidad del modelo. No parece tan evidente utilizar estos modelos para predecir el efecto de las variables no manipulables (medibles o no).

Cuando se tienen variables de entrada no manipulables no se puede saber con certeza qué valores van a tomar en el futuro y por tanto en el horizonte de predicción (intervalo de tiempo en el que se quiere realizar la predicción). El modelo puede ser muy exacto, pero el desconocimiento del valor futuro de estas variables podría producir predicciones de muy baja calidad. En estos casos se debe, al menos, conocer alguna de sus propiedades estadísticas que nos permita realizar una estimación. Si estas variables son medibles se pueden utilizar las medidas para realizar una estimación de mayor calidad (por ejemplo, evaluar la tendencia y extrapolar). La calidad de la predicción, en estos casos, depende tanto de la calidad del modelo como de la calidad de las estimaciones de las variables no manipulables.

Para tratar de compensar la dinámica no modelada se añaden al modelo elementos artificiales en su estructura para tratar de incrementar la calidad del control. Por ejemplo en el caso del GPC se utilizan modelos CARIMA con polinomios de filtrado $T(z^{-1})$ para mejorar la robustez.

1.1.1.2. Función de coste

Un índice de funcionamiento responde, en general a una expresión del tipo:

$$I = \int_0^{\infty} f(\mathbf{r}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (1.1-1)$$

El objetivo de esta función es plasmar en una formulación matemática una medida cuantitativa del funcionamiento de un sistema. En la teoría de control aparecen distintos indicadores que tratan de describir la evolución dinámica de un proceso, y se pueden englobar en dos grandes grupos:

- a) Parámetros descriptivos de la evolución temporal de la variable controlada: error en régimen permanente, valor final, tiempo de establecimiento, sobreoscilación, frecuencia de las oscilaciones, tiempo de subida, etc.

b) Medidas de la desviación de la variable controlada respecto de la referencia (cuadro 1.1). Generalmente se han utilizado integrales de una función del error, siendo los más extendidos en su uso [Marlin 1995]: IAE (integral del valor absoluto del error), ICE (integral del error al cuadrado), ITAE (integral del producto del tiempo por el valor absoluto del error), ITEC (integral del producto del tiempo por el error al cuadrado), etc.

Índice	Expresión
IAE	$\int_0^{\infty} r(t) - y(t) dt$
ISE	$\int_0^{\infty} (r(t) - y(t))^2 dt$
ITAE	$\int_0^{\infty} t r(t) - y(t) dt$
ITEC	$\int_0^{\infty} t(r(t) - y(t))^2 dt$

TABLA 1.1: Principales índices de funcionamiento.

Entre estas dos opciones, parece claro que es más apropiado para evaluar cómo funciona un sistema, utilizar parámetros del primer grupo, ya que las medidas de tipo integral no reflejan directamente cómo funciona el sistema. Sólo con el valor del índice un operador es incapaz de saber con cierto grado de exactitud como está funcionando el sistema. A esto se une que es más usual especificar el funcionamiento de un proceso exigiendo que el tiempo de establecimiento y la sobreoscilación han de ser menores que unos valores determinados. Sin embargo, con los indicadores de tipo integral se puede incorporar en la evaluación del funcionamiento otro tipo de elementos como, por ejemplo, el valor de la acción de control o ponderaciones de las distintas variables y, adicionalmente, se pueden usar para la evaluación de costes económicos.

En general, no existe una formulación universal que sea válida para todos los problemas de control ya que cada tipo de indicadores tiene sus ventajas e inconvenientes. El índice de funcionamiento más adecuado para un problema concreto depende de los objetivos que se impongan y de las herramientas disponibles.

Una alternativa que trata de combinar los dos tipos de indicadores es la de establecer unas trayectorias de referencia en un índice de tipo integral. En lugar de utilizar una referencia de tipo escalón $r(t)$, ésta se filtra mediante una función de transferencia ($P(s)$) que fije la dinámica deseada de bucle cerrado: tiempo de establecimiento, sobreoscilación y régimen permanente, y se utiliza esta nueva respuesta $\omega(t)$ como referencia en un índice de funcionamiento de tipo integral.

$$\omega(s) = P(s)r(s) \rightarrow \omega(t) \quad (1.1-2)$$

$$I = \int_0^{\infty} f(\omega(t), y(t), u(t), t) dt \quad (1.1-3)$$

La traducción al entorno del control predictivo es directa, ya que operando con señales discretas el índice de coste debe, de alguna forma, imponer el funcionamiento deseado para el proceso introduciendo además nuevas características y parámetros para posibilitar su aplicación al control en línea ya que se debe conseguir que el volumen de los cálculos a realizar sea razonable. Se puede generalizar, por tanto, como función de coste la expresión siguiente:

$$J(\mathbf{u}) = \sum_{k=N_1}^{N_2} f(\omega(t+k), \mathbf{y}(t+k|t), \mathbf{u}(t+k), \alpha(k), \lambda(k), N_u, t) \quad (1.1-4)$$

donde cada uno de los parámetros tiene un significado:

Horizonte de predicción (N_1, \dots, N_2): intervalo de tiempo en el que se realiza la predicción, debe ser finito para que sea posible su aplicación al control en línea. Un horizonte de predicción infinito o demasiado grande hace que los cálculos de las predicciones no se puedan realizar en línea, salvo que exista una formulación analítica.

Horizonte de control (N_u): intervalo del horizonte de predicción en el que se permiten variaciones de la variable manipulada. Este parámetro se utiliza para simplificar el problema de optimización, si se reduce el número de variaciones se reduce el número de variables en el problema. Cuando se limita el horizonte de control cabe la posibilidad de realizar distintas estructuraciones de las acciones de control a lo largo del horizonte de predicción.

Factores de ponderación para los errores de predicción ($\alpha(k)$) y para las acciones de control ($\lambda(k)$). Estos factores se utilizan para conseguir distintos efectos en el comportamiento de bucle cerrado. Por ejemplo, mayor influencia del esfuerzo de control respecto a los errores de predicción o menor influencia en el índice de las predicciones más alejadas, o mayor ponderación de unas determinadas variables en detrimento de otras, etc.

Restricciones: puede aparecer además, un conjunto de restricciones adicionales sobre variables de entrada, salida e internas. Estas restricciones pueden ser debidas tanto a limitaciones físicas del proceso como a especificaciones de funcionamiento.

En la mayoría de los casos, la función f es cuadrática debido principalmente a que la minimización de dicho índice sujeto a restricciones lineales es matemáticamente tratable (problema de programación cuadrática QP). Existen otras aproximaciones manejando índices de coste modulares [Genceli y Nikolaou 1993] o con norma infinita [Rao y Rawlings 1998] que no resultan tan sencillos de manejar y que, en presencia de restricciones lineales, terminan resolviendo problemas de programación lineal.

1.1.1.3. Optimizador

Finalmente el control predictivo basado en modelos no es más (ni menos) que un problema de optimización. El objetivo de este elemento está claro, debe conseguir la combinación de acciones de control que optimice la función de coste. La solución ideal es la que resultaría de la optimización analítica fuera de línea, esto implica disponer de una expresión matemática que calcula el óptimo en función de las medidas hasta el instante t . Esto se puede conseguir cuando el modelo es lineal y la función de coste cuadrática sin restricciones. En estos casos, el problema de optimización se resuelve fuera de línea y el análisis del sistema resultante se puede realizar utilizando las herramientas clásicas de la teoría de control. Fuera de este contexto, es decir, con problemas no lineales (bien sea por los modelos utilizados, bien por la aparición de restricciones, etc.), el control predictivo se convierte en un problema de optimización en cada periodo de muestreo con el consiguiente incremento de complejidad (resultando en un controlador no lineal y en un bucle cerrado también no lineal). El método de optimización cobra más protagonismo cuando se pretende aplicar el control predictivo en línea. Por muy bueno que sea el modelo o muy acertada la función de coste, el cuello de botella es la técnica de optimización. Una selección o ajuste inadecuado de esta técnica puede provocar en algunos casos, una pérdida notable de las prestaciones del control puesto que no se localiza correctamente el óptimo.

1.1.2. Evolución del CPBM

Como ha ocurrido en otros casos, la idea del CPBM ya se vislumbró en los años 60 antes de que se convirtiera en una de las estrategias de control avanzado más utilizada en el control de procesos. Los conceptos teóricos iniciales que pueden asociarse al control predictivo se basan en los trabajos realizados en control óptimo (cuadro 1.2). Utilizando un modelo discreto lineal en espacio de estados se calcula la ley de control minimizando una función cuadrática de los estados y las acciones de control (regulador LQR). Al fijar un índice infinito se podía obtener un controlador consistente en una realimentación del estado [Mosca 1995], [Lemos y Mosca 1985]. Debido a las capacidades limitadas de los ordenadores y al rápido muestreo de los procesos para los que el LQR fue desarrollado (por ejemplo en la industria aeroespacial), el esfuerzo se desvió hacia la obtención de controladores que evitasen realizar la optimización en línea.

Como consecuencia, esta técnica tuvo relativamente poco impacto en la industria de procesos debido a que no contemplaban las no linealidades de los procesos, sus restricciones de funcionamiento, incertidumbres en el modelo y sólo se disponía de un índice cuadrático para medir las prestaciones. Únicamente podía aplicarse en áreas donde se

podían conseguir modelos muy exactos y su obtención estaba justificada económicamente (por ejemplo, la industria aeroespacial).

Algoritmo	Modelo	Índice	Horiz. predicción	Restricciones
LQG (1960)	L, SS	min ISE, I,O	∞	-
IDCOM (1976)	L, FIR	min ISE, O	N	I,O
DMC (1979)	L, FIR	min ISE, I,O,M	N	I,O
QDMC (1983)	L, FIR	min ISE, I,O,M	N	I,O
GPC (1987)	L, FT	min ISE, O,M	N	-
IDCOM-M (1988)	L, FIR	min ISE O min ISE I	N	I,O
SMOC (1988)	L, SS	min ISE, I,O,M	N	I,O
Rawlings and Muske (1993)	L, SS	min ISE, I,O	∞	I,O

Legenda: (L) Lineal, (SS) Espacio de estados, (FIR) Respuesta impulsional, (FT) Función de transferencia (ISE) Integral Square Error, (I) entrada, (O) Salida, (M) Cambios en la entrada.

TABLA 1.2: Breve historia del CPBM.

Al contrario que otras veces, el CPBM fue desarrollado primero en la industria, bajo varios acrónimos y recetas propias, tratando de resolver los inconvenientes planteados por el LQR antes mencionados, y mucho antes de disponer de un minucioso entendimiento de las propiedades teóricas de lo que hoy se entiende como control predictivo. El interés de los investigadores por el CPBM creció a mitad de los años 80, a raíz de unas jornadas organizadas por la empresa petroquímica *Shell* [Prett y Morari 1987]. La industria contribuyó decisivamente en el desarrollo de un control *óptimo* aplicable, apareciendo los primeros controles predictivos basados en modelos. Se trataba de algoritmos de control en los que se podía utilizar modelos más sencillos, las restricciones de funcionamiento se podían tener en cuenta en la formulación y la optimización se realizaba cada periodo de muestreo puesto que se utilizaban horizontes de predicción finitos. Las primeras implementaciones a nivel industrial (IDCOM y DMC), se desarrollaron en paralelo. De estos algoritmos cabría destacar:

- **IDCOM** o *Identification Command* [Richalet *et al.* 1978]. Es el nombre del software desarrollado a partir del algoritmo conocido como *Model Algorithmic Control* (MAC) [Rouhani y Mehra 1982], también referenciado como *Model Predictive Heuristic Control* (MPHC). Sus características más importantes son:
 - Modelo lineal por respuesta impulsional.
 - Función de coste con un índice cuadrático y horizonte de predicción finito.

- No hace uso del concepto de horizonte de control.
- Especificaciones mediante trayectoria de referencia generadas mediante un sistema de primer orden.
- Se incluye un modelo de perturbaciones:

$$n(t+k|t) = \alpha n(t+k-1|t) + (1-\alpha)[y(t) - y(t|t-1)], \quad 0 \leq \alpha < 1$$

- Restricciones en la entrada y la salida incluidas en la formulación.
 - Optimización mediante un algoritmo iterativo.
- **DMC** o *Dynamic Matrix Control* [Cutler y Ramaker 1980]. Sus principales características son:

- Modelo lineal por respuesta a un escalón.
- Función de coste con un índice cuadrático de los errores futuros y puede incluir términos referentes a las acciones de control.
- Horizonte de predicción finito.
- Utiliza un horizonte de control.
- Especificaciones se fija tratando de seguir un referencia de tipo escalón.
- Se incluye un modelo de perturbaciones:

$$n(t+k|t) = y(t) - y(t|t-1)$$

- La acción de control óptima se obtiene como la solución de un problema de mínimos cuadrados.

A partir de estas dos metodologías se han ido desarrollando con el tiempo, distintas alternativas, tanto a nivel industrial como a nivel teórico, entre las que caben destacar:

- **QDMC** [Garcia y Morshedi 1986]. Basado en el DMC incluye explícitamente las restricciones en las entradas y salidas del proceso. Utiliza programación cuadrática (QP) para la minimización del índice.
- **IDCOM-M** [Grosdidier *et al.* 1988]. También referenciado como HIECON (*Hierarchical constraint control*). Esta basado en el IDCOM, presentando cambios en la función objetivo y en la priorización de las restricciones. Utiliza dos funciones objetivo, primero se optimiza la que evalúa los errores de predicción y, si quedan grados de libertad, se optimiza respecto a las acciones de control. Para simplificar el cálculo sólo se permite un cambio en la variable manipulada.
- **GPC** o *Generalized Predictive Control* [Clarke *et al.* 1987a] [Clarke *et al.* 1987b]:

- Utiliza modelos basados en funciones de transferencia incluyendo modelo de perturbaciones (modelo CARIMA).
- El índice es cuadrático e incluye un término de errores de predicción y otro de acciones de control.
- Utiliza los conceptos de horizonte de predicción y control.
- La optimización es analítica, por tanto se puede calcular un regulador lineal fuera de línea. Permite implementar un control adaptativo.

Este algoritmo resume muchas de las características de los controladores predictivos para procesos lineales [Clarke y Mohtadi 1989], [Albertos y Ortega 1989], [Ordys y Clarke 1993]. También se ha utilizado con restricciones [Chow y Clarke 1994b], [Kuznetsov y Clarke 1994], [Tsang y Clarke 1988], [Camacho 1993] y se ha planteado el control predictivo adaptativo [Clarke 1991]. Algunas de sus aplicaciones industriales se pueden encontrar en [Clarke 1988], [Chow y Clarke 1994a], [Linkens y Mahfouf 1994] y [Rossiter *et al.* 1991].

El entendimiento de las propiedades del CPBM a raíz de investigaciones cruciales realizadas en el ámbito académico [Rawlings y Muske 1993] han permitido que hoy en día exista un marco conceptual y práctico común tanto a investigadores como a ingenieros de control. Son muchas las publicaciones que reflejan el estado del arte a nivel tecnológico y teórico del control predictivo en su tiempo de publicación [Prett y Morari 1989], [Keyser 1991], [Muske y Rawlings 1993], [Richalet 1993], [Clarke 1994], [Froisy 1994], [Qin y Badgwell 1997], [Nikolaou 1998], [Morari y Lee 1999], [Rawlings 2000] y [Wang 2002]. La visión que ofrecen respecto al futuro del CPBM en la industria y en la investigación pasa por combinar esta estrategia de control con otras áreas de la ingeniería de control o incluso con otras áreas de conocimiento:

- Control no lineal [Prett y Morari 1989].
- Control inteligente (fuzzy, neural) [Nikolaou 1998].
- Nuevos esquemas de identificación, tanto de procesos como de límites para la incertidumbre [Bemporad y Morari 1999].
- Mejoras en los métodos de estimación del estado. Alternativas al filtro de Kalman [Qin y Badgwell 1997].
- Monitorización de procesos y diagnóstico de fallos para comprobar el funcionamiento óptimo del controlador predictivo (Control estadístico de procesos o SPC) [Froisy 1994].
- Mejora de las interfaces de usuario y diálogo con el operador [Froisy 1994].

- Integración de niveles en la jerarquía de control [Morari y Lee 1999].

Actualmente existen líneas de investigación en control predictivo bien definidas donde cabría destacar entre otras:

- **Control predictivo estable:** Desde el uso de horizontes infinitos de predicción [Muske y Rawlings 1993], [Zheng y Morari 1995], la utilización de horizontes casi-infinitos [Chen y Allgöwer 1998] y la generalización a horizontes finitos [Primbs y Nevistić 2000], la formulación del control predictivo en espacio de estados se impone a la de entrada-salida.
- **Control predictivo no lineal:** En este área se utilizan tanto modelos en espacio de estados como modelos en entrada-salida [Mayne 1997], [Rawlings *et al.* 1994]. Sin embargo, la mayoría de modelos utilizados siguen expresando dinámicas lineales sujetas a una no linealidad de tipo estático [Genceli y Nikolaou 1995].
- **Control predictivo robusto:** En [Bemporad y Morari 1999], se resumen distintas aproximaciones aparecidas en la literatura del control predictivo con características diferentes a la hora de representar la incertidumbre y la forma de calcular el controlador robusto. Por ejemplo en [Kouvaritakis *et al.* 1997] la incertidumbre se representa como una elipse centrada en el vector de parámetros estimados para una función de transferencia. En [Badgwell 1997], la incertidumbre en el modelo se parametriza por una lista de posibles plantas y se añaden al problema original restricciones para asegurar la estabilidad robusta. Otra aproximación es la denominada *min-max MPC*, donde [Lee y Yu 1997], presentan una formulación basada en la minimización del peor caso de un índice cuadrático para sistemas con parámetros variables en el tiempo pero acotados. Del mismo modo, [Megías *et al.* 2001, 2002] presenta un *min-max GPC[∞]* donde la incertidumbre se representa de forma politópica. Por otro lado, hay trabajos que diseñan controladores predictivos robustos mediante LMIs (desigualdades lineales matriciales), siendo uno de los pioneros [Kothare *et al.* 1996], cuya línea ha sido desarrollada y ampliada en trabajos posteriores, por ejemplo [Granado *et al.* 2003; Rodrigues y Odloak 2003].
- **Control predictivo adaptativo:** Siendo el GPC el algoritmo orientado al control predictivo adaptativo por excelencia [Kinnaert 1989], y a pesar del amplio mercado que tendría un algoritmo CPBM autoajutable, pocas son las aplicaciones reales que incluyen adaptación en línea. El control adaptativo indirecto tiende a ser sustituido por un nuevo paradigma que contempla la integración de la identificación y el control predictivo. En esta aproximación, y debido a los problemas que presenta la identificación en bucle cerrado, se insiste en mantener una excitación persistente en las señales para poder identificar [Genceli y Nikolaou 1996].

- Utilización de técnicas de optimización alternativas para hacer frente a problemas que se plantean con modelos no lineales, restricciones de funcionamiento y nuevos índices (problemas no convexos y/o discontinuidades a resolver en tiempo real). Por ejemplo, [Pérez 1995] utiliza la programación dinámica como técnica de optimización, y en [Senent y Blasco 1996], [Onnen *et al.* 1997] o [Martínez *et al.* 1998] se aplican los algoritmos genéticos o simulated annealing como técnicas de optimización.

1.2. Motivación, objetivos y estructura de la tesis

1.2.1. Motivación

Como se ha comentado en la sección anterior, el controlador predictivo generalizado (GPC) fue introducido por Clarke, hacia 1987, como una metodología para el diseño de controladores predictivos basados en modelos que presenta importantes ventajas:

- Permite controlar procesos complejos: inestables, de fase no mínima y sistemas con retardo, a diferencia de otras metodologías. Por ejemplo, el DMC y el IDCOM al emplear la respuesta ante escalón y ante impulso, respectivamente, sólo eran aplicables a procesos estables y a lo sumo con integradores.
- El GPC ha sido validado en un amplio espectro de aplicaciones reales [Bitmead *et al.* 1990] asociadas al control de procesos.
- Se emplea una representación del proceso mediante FdT. Esta representación incluye un modelo para las perturbaciones más complejo que el empleado, por ejemplo, en DMC el cual supone perturbaciones constantes, o el empleado en IDCOM el cual está constituido por un modelo de primer orden con un coeficiente ajustable.
- El GPC fue concebido, además, para poder ser empleado en un esquema de control adaptativo [Clarke *et al.* 1987a, b].

Todas estas ventajas han dado lugar a que la versión de controlador predictivo que parece tener mayor aceptación en el ámbito académico es la del GPC [Bitmead *et al.* 1990].

Al principio el GPC sólo se presentó para sistemas SISO. No obstante, en la mayoría de las aplicaciones reales los modelos que se presentan son multivariables, haciéndose necesario, por tanto, presentar una metodología de diseño del controlador GPC para el caso MIMO. En [Mohtadi *et al.* 1987; Kinnaert 1989; Chai *et al.* 1994; Camacho y Bordóns 1999] se presenta la metodología del GPC MIMO como una traslación directa de la

metodología desarrollada para el caso SISO [Clarke *et al.* 1987a], la principal diferencia entre ellos se localiza en la descomposición del modelo para realizar la predicción de las salidas, así en [Mohtadi *et al.* 1987; Kinnaert 1989; Chai *et al.* 1994] se emplea una descomposición de las matrices polinomiales del modelo, mientras que en [Camacho y Bordóns 1999] además de emplearse la descomposición anterior se propone la descomposición de los polinomios que conforman cada salida por separado, reduciéndose así el tamaño de las matrices de predicción para el caso de sistemas con retardo.

Como elemento común a la evolución histórica del CPBM en formulación E/S, cabe destacar que la extensión al caso MIMO es sencilla desde el punto de vista conceptual, aunque bastante engorrosa en cuanto a las manipulaciones matriciales y de señales que hay que realizar. Con el objetivo de reducir esta excesiva complejidad en el diseño de un controlador predictivo multivariable mediante matrices de transferencia, varios autores han planteado el uso de modelos en espacio de estados para el proceso.

En relación con el interés de utilizar modelos en espacio de estados, en [Ordys y Clarke 1993] se propone un modelo SISO en espacio de estados deducido a partir del modelo CARIMA E/S de Clarke [Clarke *et al.* 1987a]. Los estados en este modelo están constituidos por los valores pasados de la salida, del ruido y de la entrada, siendo la variable de entrada en este modelo el incremento de la acción de control. Se trata pues de un modelo CARIMA aplicable al caso SISO, proponiéndose una generalización del mismo al caso MIMO en [Camacho y Bordóns 1999].

Es interesante destacar ciertas referencias, pero ahora orientadas al caso de procesos MIMO, que tratan el diseño de controladores predictivos en espacio de estados. En [Xi 1989] se propone un modelo MIMO en espacio de estados obtenido mediante la realización del modelo de la planta en matrices de transferencia utilizando la forma canónica de observabilidad, tomando como entrada el incremento de la acción de control. La principal limitación de este modelo es la no consideración de incertidumbres y/o ruidos de medida. En [Kinnaert 1989] se plantea un modelo MIMO en espacio de estados CARIMA² cuya parte determinística es una realización de la matriz de transferencia de la planta, aunque no especifica bien como se modela la parte estocástica, ocurriendo algo parecido en [Chisci *et al.* 1996], aunque en este caso la entrada es directamente la acción de control.

Hay otras referencias que proponen modelos MIMO estocásticos en espacio de estados [Ricker 1990; Lee *et al.* 1994; Bitmead *et al.* 1990], en la primera se propone un modelo estocástico general con varios tipos de perturbaciones (ruidos de medida, perturbaciones aditivas a la acción de control e incertidumbres en el modelo), aunque no queda tampoco clara la forma de seleccionar las matrices asociadas a la parte estocástica. Algo parecido ocurre en la segunda referencia, aunque en este caso los resultados

²Siendo también su entrada el incremento de la acción de control

son sólo válidos para plantas estables o a lo sumo con integradores. Esto se debe a que emplea la respuesta ante escalón como información para crear el modelo en espacio de estados. La principal diferencia de este artículo, [Lee *et al.* 1994], con respecto a otros es que sus resultados son aplicables a diferentes metodologías de control predictivo: DMC y GPC. La tercera referencia [Bitmead *et al.* 1990] tampoco detalla la forma de seleccionar la parte estocástica, aunque tiene el interés de reformular el GPC como un controlador LQG.

Más recientemente se han publicado tutoriales sobre control predictivo [Wang 2002; Rawlings 2000] en los que se presenta para el controlador predictivo un modelo en espacio de estados. En [Wang 2002] se propone un modelo de velocidad³ que presenta perturbaciones sobre el estado y la salida, y que incorpora en el modelo integradores como consecuencia de su formulación en función de los incrementos de las acciones de control. Este hecho permite que se puedan cancelar perturbaciones, errores de modelado, etc. Sin embargo, esta idea no se explota a la hora de predecir las salidas, ya que no se realiza estimación alguna de las perturbaciones y, por tanto, no se pueden incluir en la predicción. En [Rawlings 2000] se presenta un modelo en espacio de estados que incluye perturbaciones sobre la entrada, el estado y la salida. En su formulación la capacidad de rechazo a perturbaciones y/o errores de modelado se basa en el cálculo de los valores óptimos de la salida, de la entrada y del estado a alcanzar en régimen permanente⁴, con la información disponible sobre las restricciones y la estimación de las perturbaciones.

Los controladores diseñados en espacio de estados requieren el empleo de observadores para la estimación del estado cuando este no es medible (caso general). Según la situación, los autores han planteado diferentes soluciones al problema de la estimación del estado. En algunos artículos no se requiere su uso, así en [Albertos y Ortega 1989] se emplea una reconstrucción del estado basada en el uso de la pseudoinversa de la matriz de observabilidad. En [Camacho y Bordóns 1999] los estados propuestos son, por un lado los incrementos de las acciones de control pasados (conocidas), por otro, los valores pasados de las salidas (medidos) y, por último, los valores pasados de las entradas del ruido (estimados), de ahí que no se requiera el uso de un observador. En [Kinnaert 1989] la propia ecuación para la predicción es la utilizada para estimar el estado, y finalmente, en [Kwon *et al.* 1992] no se indica la necesidad de un observador ni la hipótesis de que el estado sea medible. Sin embargo, la mayoría [Scattolini y Schiavoni 1995; Ordys y Clarke 1993; Chisci *et al.* 1996; Ricker 1990; Lee *et al.* 1994; Rawlings 2000] emplea un filtro de Kalman de régimen permanente, argumentando la facilidad de su diseño y la garantía de que los polos del observador se localizan dentro del círculo unidad, como razones para justificar su uso. Sin embargo, hay un par de casos que presentan alternativas diferentes. Así en [Xi 1989] se emplea un observador de rango completo diseñado mediante

³La entrada al sistema es el incremento de la acción de control

⁴Target Calculation

asignación de polos, con la única limitación de que sus polos han de poseer módulo inferior a la unidad. En [Ling y Lim 1996] se minimiza un índice de coste en cada paso de simulación⁵ para la estimación de los estados.

Como resultado del párrafo anterior, parece que la solución más adecuada sea emplear el filtro de Kalman como observador. Sin embargo, en [Rawlings 2000] se afirma que la estimación del estado aplicada a control predictivo es un tema abierto, debido a la dificultad de selección de las matrices de varianzas-covarianzas asociadas a las perturbaciones y ruidos de medida estocásticos que tiene en cuenta el filtro de Kalman en su diseño, en base a las especificaciones que típicamente aparecen en control⁶. Por tanto, plantear alternativas para la estimación de los estados de cara a su empleo en control predictivo es un tema interesante y que aún no ha sido resuelto por completo. Además, en [Wilson *et al.* 1998] se destaca la dificultad relativa al ajuste de estas matrices de varianzas-covarianzas para las aplicaciones prácticas en las que se emplea el filtro de Kalman. Todo ello indica que parece necesario el uso de observadores alternativos al filtro de Kalman, que puedan ser diseñados en base a criterios de control sencillos. Podría plantearse el uso de observadores, por ejemplo, diseñados por asignación de polos, tal y como hace [Xi 1989].

En [Qin y Badgwell 1997; Morari y Lee 1997; Rawlings 2000] se destaca la importancia del desarrollo de metodologías de diseño robusto aplicado a control predictivo. Así, en [Qin y Badgwell 1997] se afirma que es necesario desarrollar nuevos esquemas que garanticen robustez teniendo presentes las discrepancias entre modelo y proceso estimadas a partir de las mediciones. Además, sostiene que el diseño robusto es un área en la que la investigación académica puede ayudar. En [Morari y Lee 1997] se realiza una revisión sobre las diferentes metodologías de diseño robusto que se han presentado hasta entonces, de entre los que cabe destacar las aportaciones de [Kothare *et al.* 1996] y [Lee y Yu 1997]. La primera cita obtiene una cota superior para el índice de coste, y a partir de esta cota desarrolla un control por realimentación lineal del estado cuya ganancia es variante con el tiempo, la cual es obtenida mediante la resolución de LMIs. La segunda referencia pondera en el índice de coste el error en valor medio en lugar del error de peor caso, siendo necesario añadir una restricción de contracción sobre el estado para que se garantice la estabilidad sobre un determinado conjunto de modelos. [Rawlings 2000] destaca que la mayor parte de los algoritmos que garantizan robustez se caracterizan por exigir una gran carga computacional en línea lo cual limita enormemente su aplicación práctica.

La parte estocástica del GPC y sus propiedades de robustez han sido ampliamente estudiadas [Mohtadi 1988; Robinson y Clarke 1991; Yoon y Clarke 1993, 1994, 1995; Megías *et al.* 1997b, a; Ansay y Wertz 1997; Megías *et al.* 1999] para el caso de la formulación

⁵Idea similar al filtro de Kalman

⁶Tiempo de establecimiento, sobreoscilación, etc.

E/S y para procesos SISO. La mayor parte de los trabajos se centra en proponer metodologías de selección de los polinomios de filtrado⁷ [Mohtadi 1988; Robinson y Clarke 1991; Yoon y Clarke 1993; Megias *et al.* 1997b, a; Megías *et al.* 1999]. En [Yoon y Clarke 1993; Ansay y Wertz 1997] se emplea la denominada *parametrización Q*, que se basa en la metodología H_∞ para la parametrización de todos los controladores estabilizantes y escoger el óptimo mediante la solución de un problema de minimización de una norma infinito. La diferencia entre ambas metodologías es que la selección del polinomio de filtrado, en muchos casos, es de tipo heurístico mientras en la parametrización Q la selección es óptima. En [Megias *et al.* 1997a; Megías *et al.* 1999] se trata de solventar la selección heurística de $T(z^{-1})$ mediante la optimización de determinados índices de coste que tratan de maximizar el margen de robustez del controlador. En general, se ha detectado que se obtienen mayores márgenes de robustez con el empleo de los polinomios de filtrado que con la parametrización Q .

También es importante señalar la correlación que se establece entre el diseño del observador en [Bitmead *et al.* 1990; Lee *et al.* 1994; Ebert 2001] (filtro de Kalman) y el polinomio de filtrado $T(z^{-1})$ [Clarke *et al.* 1987a] asociado al modelo CARIMA E/S del GPC. En [Lee *et al.* 1994] se demuestra que para un caso particular de entrada perturbadora⁸ hay una expresión que liga la ganancia del filtro de Kalman con los coeficientes del polinomio de filtrado. En [Ebert 2001] se demuestra que si se emplea un filtro de Kalman óptimo para el rechazo de perturbaciones estocásticas de varianza conocida, entonces el polinomio de filtrado queda fijado y posee por raíces los polos del observador diseñado. En [Bitmead *et al.* 1990] se demuestra la equivalencia entre los polos del filtro de Kalman y las raíces del polinomio $T(z^{-1})$ cuando se formula el GPC como un controlador LQG.

De forma general, en control predictivo también se ha analizado la robustez del MPC así como el diseño de controladores con garantía de estabilidad robusta para sistemas lineales [Sokaert *et al.* 1997; Sokaert y Mayne 1998; Santos y Biegler 1999].

Otro de los temas actualmente abiertos en control predictivo es el control de procesos no lineales [Qin y Badgwell 1997; Morari y Lee 1997; Magni *et al.* 2001; Rawlings 2000; Kouvaritakis y Cannon 2001]. Existen diferentes alternativas para el diseño del controlador, entre las que se pueden destacar:

- Diseño de controladores predictivos para modelos linealizados en determinados puntos de funcionamiento [de Oliveira 1996].
- Diseño del controlador mediante un modelo no lineal conocido. Estos modelos suelen derivarse de la aplicación de primeros principios (masa, energía, etc.). La principal dificultad de estos métodos es la selección del algoritmo de optimización a emplear, ya que debe ser capaz de obtener el mínimo global del índice de coste en

⁷También conocidos como polinomios observadores

⁸Ruido blanco integrado y desacoplado, filtrado a través de una dinámica de primer orden

un problema de optimización que resulta ser no convexo. Por ejemplo, la aplicación de algoritmos genéticos permite resolver de forma eficiente este problema [Onnen *et al.* 1997; Martínez *et al.* 1998; Blasco 2000].

A partir de este modelo no lineal se pueden plantear diferentes estrategias que garanticen un diseño estable para el controlador:

- Empleo de horizontes casi infinitos [Chen y Allgöwer 1998; Senent 1998].
- Empleo de una región terminal [Michalska y Mayne 1993], a la cual debe converger la predicción, y en su interior es aplicado un controlador local. Esta estrategia se conoce con el nombre de controlador predictivo dual.
- Empleo de región terminal y coste terminal [Mayne *et al.* 2000; Limón 2002]. Estas referencias analizan la formulación general del MPC justificando la necesidad de introducir la región terminal y el coste terminal para garantizar la estabilidad.

También se ha analizado la factibilidad de la ley de control cuando hay presentes restricciones sobre estados y acciones de control. Por ejemplo, en [Kerrigan 2000; Limón 2002; Cannon *et al.* 2003; Limón *et al.* 2005] se ha empleado la teoría de conjuntos invariantes para garantizar la existencia de una región de estados iniciales para la cual siempre es resoluble el problema de optimización, mediante la utilización de conjuntos invariantes y de regiones terminales invariantes. La principal dificultad de esta metodología es el cálculo fuera de línea de estos conjuntos.

Hay una gran cantidad de trabajos en el complejo campo del control predictivo no lineal robusto [Mayne 2001; Kerrigan y Mayne 2002; Limón *et al.* 2002c, a, b, 2003, 2004] que emplean diferentes metodologías para garantizar la estabilidad robusta, y que utilizan el concepto crucial de predicción en bucle cerrado [Scokaert y Mayne 1998]. Estas publicaciones tienen como punto de partida [Scokaert *et al.* 1997], trabajo que utiliza incertidumbres aditivas que decaen con el tiempo y la continuidad Lipschitz de la ley de control para garantizar que el índice de coste es una función de Lyapunov que decrece con el tiempo para un cierto grado de incertidumbre. Las metodologías de diseño robusto propuestas se basan en el empleo de los siguientes elementos:

- Uso de regiones de evolución incierta [Limón *et al.* 2002c].
- Conjuntos invariantes robustos [Limón *et al.* 2002a].
- Uso de la estabilidad entrada a estado [Limón *et al.* 2002b].
- Empleo de conjuntos contractivos [Limón *et al.* 2003].
- Uso de la estrategia que minimiza el peor caso o min-max [Limón *et al.* 2004; Kerrigan y Maciejowski 2004; Megías *et al.* 2001, 2002] que se basan en [Scokaert y Mayne 1998].

A raíz del análisis precedente, cabe destacar los siguientes temas de interés detectados en la literatura de control predictivo:

- Incorporación en los modelos en espacio de estados de una parte estocástica que permita representar satisfactoriamente el modelo del ruido.
- Plantear observadores alternativos al filtro de Kalman para su uso en control predictivo, que se caractericen por ser fácilmente diseñables en base a criterios de control.
- Establecer una metodología de selección no heurística para los polinomios de filtrado del GPC que garantice determinadas especificaciones de comportamiento robusto.
- Proponer metodologías para el diseño de controladores predictivos robustos y, en particular, GPCs robustos cuyo esfuerzo computacional en línea sea bajo.
- Presentar alternativas para el diseño de controladores predictivos orientados al control de procesos no lineales.

1.2.2. Objetivos

Tomando como base las cuestiones analizadas en la sección de motivación se proponen los siguientes objetivos para la presente tesis:

1. Proponer una formulación alternativa para el GPC en espacio de estados que, en primer lugar, permita reducir la complejidad inherente a la formulación E/S. En segundo lugar, esta formulación en espacio de estados se caracteriza por su novedosa parte estocástica, que está íntimamente relacionada con los polinomios de filtrado de la formulación E/S.
2. Proponer un observador diseñado por asignación de polos para estimar los estados del modelo, como alternativa al filtro de Kalman. Este observador se caracteriza por su equivalencia con los polinomios de filtrado, en concreto, sus polos coinciden con las raíces de los polinomios de filtrado empleados en la formulación E/S.
3. En esta formulación alternativa se busca realizar un análisis de estabilidad sin y con restricciones, que conduzca a una metodología de diseño estable del GPC.
4. Presentar un método de diseño robusto fuera de línea para el GPC formulado en espacio de estados, cuando se presentan incertidumbre, dinámica no modelada y/o perturbaciones o ruidos de medida sobre el proceso. Dicho método estará íntimamente asociado con la asignación de los polos del observador propuesto. Esta

metodología permite realizar una selección de los polos a asignar al observador basada en criterios de robustez. Por otro lado, dada la conexión entre el observador y los polinomios de filtrado, este método de diseño robusto permite realizar una selección no heurística de dichos polinomios para la formulación E/S.

5. Finalmente, se buscará extender esta última metodología con el objeto de diseñar GPCs para sistemas no lineales. El enfoque empleado se basará en el empleo de modelos lineales variables con el tiempo para describir el comportamiento de los sistemas no lineales.

procesos no lineales para los cuales se dispone de modelos matemáticos.

1.2.3. Estructura

El presente documento se estructura de la siguiente forma:

- En el capítulo 2, como punto de partida de la tesis, se realiza una revisión de la metodología de diseño del GPC para procesos MIMO en formulación E/S. Básicamente, su finalidad es la de mostrar la nomenclatura a emplear a lo largo del documento, y presentar algunos resultados que se emplearán posteriormente.
- En el capítulo 3 se presenta la formulación propuesta para el GPC en espacio de estados: modelo CARIMA en espacio de estados, predicción de las salidas, ley de control sin restricciones, observador propuesto, equivalencia entre polinomios de filtrado y observador, y planteamiento de restricciones en la ley de control. Además, se demuestra que este controlador, para procesos MIMO, posee un tiempo de cómputo de la acción de control, en general, inferior al del caso E/S.
- En el capítulo 4 se analizan algunas de las propiedades del controlador formulado en el capítulo anterior: observabilidad y controlabilidad del modelo CARIMA, existencia y unicidad de la ley de control y análisis del bucle cerrado para el caso sin restricciones, etc.
- En el capítulo 5 se aborda la importante cuestión de la estabilidad del controlador sin y con restricciones y, en éste último caso, la garantía de resolubilidad mediante el empleo de la teoría de conjuntos invariantes.
- En el capítulo 6 se trata el caso de existencia de incertidumbre, dinámica no modelada y/o perturbaciones o ruidos de medida en el proceso de control, incluso en presencia de restricciones. La idea principal del capítulo se basa en realizar una selección óptima de los parámetros del conjunto constituido por controlador y observador (horizontes, matrices de ponderación y polos del observador) para obtener en cada caso concreto la máxima robustez posible.

- En el capítulo 7 se aplican las ideas desarrolladas en los capítulos anteriores, fundamentalmente el 6, para el control de sistemas no lineales mediante el diseño de controladores GPC estables y robustos para sistemas lineales y variables con el tiempo cuya dinámica contiene a la del proceso no lineal. En particular, el diseño se aplica a un motor diesel turboalimentado.
- Finalmente, en el capítulo 8 se presentan las principales conclusiones de la tesis.

CAPÍTULO 2

Revisión del diseño del GPC MIMO entrada/salida

2.1. Introducción	31
2.2. Definición del controlador	32
2.3. Presencia de restricciones	37
2.3.1. Planteamiento del problema de minimización	37
2.3.2. Clasificación de las restricciones	38
2.4. Conclusiones del capítulo	40

2.1. Introducción

En este capítulo se recopilan resultados extraídos de la bibliografía analizada [Clarke *et al.* 1987a, b; Camacho y Bordóns 1999; Aguado y Martínez 2003] relacionados con el diseño del controlador GPC SISO y MIMO E/S. Estos resultados servirán como punto de partida para el modelo en espacio de estados que se propone, y además, permiten unificar la metodología de diseño del GPC.

2.2. Definición del controlador

Para la formulación del controlador predictivo multivariable E/S se asume un modelo del proceso descrito mediante el siguiente modelo CARIMA en matrices de transferencia:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} A_1(z^{-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2(z^{-1}) & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n(z^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} B_{11}(z^{-1}) & B_{12}(z^{-1}) & \dots & B_{1m}(z^{-1}) \\ B_{21}(z^{-1}) & B_{22}(z^{-1}) & \dots & B_{2m}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1}(z^{-1}) & \dots & \dots & B_{nm}(z^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{T_1(z^{-1})}{\Delta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{T_2(z^{-1})}{\Delta} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{T_n(z^{-1})}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (2.2-1)
 \end{aligned}$$

Dicho modelo posee n salidas y m entradas. Las variables ξ_j representan las posibles incertidumbres del modelo, errores de modelado, perturbaciones, etc., y se denominan entradas del ruido. Este modelo CARIMA posee dos partes diferenciadas:

- Una determinística asociada a la relación entre entradas y salidas dada por los polinomios $A_j(z^{-1})$ y $B_{ji}(z^{-1})$. Se supone que los $B_{ji}(z^{-1})$ no poseen término independiente.
- Una estocástica asociada a la relación entre las entradas del ruido ξ_j y las salidas dadas por los polinomios $A_j(z^{-1})$ y $T_j(z^{-1})$ ². Esta parte recibe el nombre de modelo del ruido.

El GPC MIMO E/S es aquel, que basándose en el modelo anterior, aplica las acciones de control resultantes de optimizar el índice de coste cuadrático:

$$J_k = E \left(\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=N_1^j}^{N_2^j} \alpha_{ji} (y_j(k+i) - \omega_j(k+i))^2 \right] + \sum_{l=1}^m \left[\sum_{i=1}^{N_u^l} \lambda_{li} \Delta u_l^2(k+i-1) \right] \right) \quad (2.2-2)$$

Donde:

- $\omega_j(k+i)$ es la referencia deseada para la salida j -ésima en el instante i dentro del horizonte de predicción.

¹ $\Delta = 1 - z^{-1}$

²Los polinomios $T_j(z^{-1})$ se denominan de filtrado

- N_1^j, N_2^j representan los límites del horizonte de predicción para la variable de salida j .
- N_u^l es el horizonte de control para la variable de entrada l .
- α_{ji} es el coeficiente de ponderación del error para la salida j en el instante i dentro del horizonte de predicción.
- λ_{li} es el coeficiente de ponderación del incremento de la acción de control para la entrada l en el instante i dentro del horizonte de control.
- $E(\cdot)$ representa la esperanza matemática.

La metodología de diseño del GPC MIMO E/S es la siguiente:

En cada instante de muestreo k se ha de optimizar el índice (2.2-2) para determinar las acciones de control a aplicar al proceso. Para la optimización de dicho índice es necesario realizar una predicción de las n salidas del proceso (2.2-1) dentro de sus correspondientes horizontes de predicción en función de:

- Los valores de las m variables de entrada dentro de sus horizontes de control (desconocidas). Éstas son justamente las variables independientes de las que depende el índice cuadrático siendo por tanto las variables que se obtienen al optimizar el mismo.
- Las variables ξ_j , supuestas éstas como ruidos blancos no correlados entre sí:

$$D^2(\xi_j) = \sigma_j > 0 \quad \forall j \quad ; \quad E(\xi_j) = 0 \quad \forall j \quad ; \quad E(\xi_i \xi_j) = 0 \quad i \neq j \quad (2.2-3)$$

$D^2(\cdot)$ es la varianza de la variable.

- Los valores pasados (conocidos) de las variables anteriores y de las salidas.

De todos los valores de las acciones de control obtenidos al optimizar el índice (2.2-2), al proceso sólo se le aplica la primera acción de control de cada horizonte de control $u_1(k), u_2(k), \dots, u_m(k)$. Esta técnica se conoce con el nombre de horizonte móvil (receding horizon).

Tras esto se repite todo el proceso para el siguiente periodo de muestreo $k + 1$.

Para la obtención de la predicción de las salidas a lo largo de sus horizontes de predicción se emplea el modelo CARIMA del proceso (2.2-1) y la hipótesis de que los valores de las entradas del ruido ξ_j son ruidos blancos no correlados entre sí (2.2-3). Como el índice de coste depende del valor medio de las señales que aparecen en él, sólo será necesario deducir su valor medio. La componente estocástica de las salidas es debida a presencia de las entradas del ruido, por tanto, si se calcula su valor medio éste

2.2 Definición del controlador

dependerá del valor medio de las entradas del ruido, y como éste último es nulo, por la hipótesis arriba comentada, se deduce que el valor medio de las salidas es independiente del valor de las entradas del ruido. Consecuentemente, para realizar la predicción de su valor medio se asumirá que los valores de las entradas del ruido, en instantes futuros, son nulos. Tras una serie de manipulaciones algebraicas [Aguado y Martínez 2003] se obtiene la siguiente expresión para la predicción:

$$\hat{y}(k) = G\Delta\hat{u}(k) + \Gamma\Delta\bar{u}^f(k) + F\bar{y}^f(k) \quad (2.2-4)$$

Siendo:

$$\hat{y}(k) = \left(\bar{y}_1^T(k) \quad \bar{y}_2^T(k) \quad \dots \quad \bar{y}_n^T(k) \right)^T \quad (2.2-5)$$

$$\bar{y}_j(k) = \left(y_j(k + N_1^j|k) \quad \dots \quad y_j(k + N_2^j|k) \right)^T \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2-6)$$

$y_j(k + i|k)$ es la predicción de la salida j -ésima en el instante $k + i$ con la información disponible en el instante k .

$$\Delta\hat{u}(k) = \begin{pmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_1(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u_1(k + N_u^1 - 1) \\ \vdots \\ \Delta u_m(k) \\ \Delta u_m(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u_m(k + N_u^m - 1) \end{pmatrix} \quad (2.2-7)$$

$$\Delta\bar{u}^f(k) = \left(\Delta\bar{u}^{f,1^T}(k) \quad \dots \quad \Delta\bar{u}^{f,n^T}(k) \right)^T \quad (2.2-8)$$

$$\Delta\bar{u}^{f,j}(k) = \begin{pmatrix} \Delta u_1^{f,j}(k-1) \\ \vdots \\ \Delta u_1^{f,j}(k - \gamma_{j1}) \\ \vdots \\ \Delta u_m^{f,j}(k-1) \\ \vdots \\ \Delta u_m^{f,j}(k - \gamma_{jm}) \end{pmatrix} ; \quad \Delta u_i^{f,j}(k) = \frac{\Delta u_i(k)}{T_j(z^{-1})} \quad j = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2-9)$$

$$\bar{y}^f(k) = \left(\bar{y}_1^{f^T}(k) \quad \dots \quad \bar{y}_n^{f^T}(k) \right)^T \quad (2.2-10)$$

$$\bar{y}_j^f(k) = \left(y_j^f(k) \quad \dots \quad y_j^f(k - f_j) \right)^T ; \quad y_j^f(k) = \frac{y_j(k)}{T_j(z^{-1})} \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2-11)$$

γ_{ji} y f_j son constantes relacionadas con las dimensiones de las matrices Γ y F respectivamente.

Las dimensiones de las matrices relacionadas con la ecuación para la predicción de las salidas son [Aguado y Martínez 2003]:

$$\bullet \mathbf{G} : \sum_{j=1}^n (N_2^j - N_1^j + 1) \times \sum_{i=1}^m N_u^i \quad (2.2-12)$$

$$\bullet \mathbf{\Gamma} : \sum_{j=1}^n (N_2^j - N_1^j + 1) \times \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) \quad (2.2-13)$$

$$\bullet \mathbf{F} : \sum_{j=1}^n (N_2^j - N_1^j + 1) \times \sum_{j=1}^n \max(|\text{grado}(A_j)| + 1, |\text{grado}(T_j)|) \quad (2.2-14)$$

$|\cdot|$ proporciona el módulo del número, y $\text{grado}(\cdot)$ proporciona el grado del polinomio.

Nota 2.2.1 El grado del polinomio $G(z^{-1}) = 3z^{-1} - 4z^{-5}$ es $\boxed{-5}$.

Nota 2.2.2 De las dimensiones de la matriz $\mathbf{\Gamma}$ (2.2-13) es fácil deducir que $\gamma_{ji} = \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1)$. Algo similar ocurre con las dimensiones de la matriz \mathbf{F} (2.2-14) y el valor de f_j que resulta ser igual a $\max(|\text{grado}(A_j)| + 1, |\text{grado}(T_j)|)$.

Para diseñar con mayor sencillez el controlador, se obtiene una expresión matricial compacta para el índice de coste propuesto (2.2-2):

$$J_k = (\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\boldsymbol{\omega}}(k))^T [\boldsymbol{\alpha}] (\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\boldsymbol{\omega}}(k)) + \Delta \hat{\mathbf{u}}(k)^T [\boldsymbol{\lambda}] \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) \quad (2.2-15)$$

Siendo:

$$[\boldsymbol{\alpha}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}; [\boldsymbol{\alpha}_j] = \begin{bmatrix} \alpha_{jN_1^j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{j(N_1^j+1)} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{jN_2^j} \end{bmatrix} \quad (2.2-16)$$

$$[\boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}; [\boldsymbol{\lambda}_i] = \begin{bmatrix} \lambda_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{i2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{iN_u^i} \end{bmatrix} \quad (2.2-17)$$

El vector $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ contiene las referencias de las salidas en sus correspondientes horizontes de predicción:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(k) = \begin{pmatrix} \hat{\omega}_1(k) \\ \hat{\omega}_2(k) \\ \vdots \\ \hat{\omega}_n(k) \end{pmatrix}; \hat{\omega}_j(k) = \begin{pmatrix} \omega_j(k + N_1^j) \\ \omega_j(k + N_1^j + 1) \\ \vdots \\ \omega_j(k + N_2^j) \end{pmatrix} \quad (2.2-18)$$

2.2 Definición del controlador

La ley de control se obtiene minimizando el índice de coste (2.2-15) con respecto a los incrementos de las acciones de control $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ y sujeto a la expresión de la predicción de las salidas (2.2-4):

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = - (\mathbf{G}^T [\alpha] \mathbf{G} + [\lambda])^{-1} \mathbf{G}^T [\alpha] \left(\Gamma \Delta \hat{\mathbf{u}}^f(k) + \mathbf{F} \hat{\mathbf{y}}^f(k) - \hat{\omega}(k) \right) \quad (2.2-19)$$

Esta expresión será válida si la matriz $\mathbf{G}^T [\alpha] \mathbf{G} + [\lambda]$ es definida positiva³, lo cual se puede garantizar si la matriz $[\alpha]$ es definida positiva, la matriz $[\lambda]$ es semidefinida positiva y la matriz \mathbf{G} posee rango completo de columnas.

En la aplicación de las acciones de control se sigue la estrategia del horizonte móvil (*receding horizon*), es decir, del vector de acciones de control $\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)$ óptimo sólo se aplican las acciones de control que corresponden al primer instante de cada uno de los horizontes de control, despreciándose el resto. En este sentido se define la matriz \mathbf{h} como aquella que posee las filas de la matriz $(\mathbf{G}^T [\alpha] \mathbf{G} + [\lambda])^{-1} \mathbf{G}^T [\alpha]$ que proporcionan las acciones de control asociadas al primer instante de cada uno de los horizontes de control:

$$\begin{pmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_2(k) \\ \vdots \\ \Delta u_m(k) \end{pmatrix} = \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = -\mathbf{h} \left(\Gamma \Delta \hat{\mathbf{u}}^f(k) + \mathbf{F} \hat{\mathbf{y}}^f(k) - \hat{\omega}(k) \right) \quad (2.2-20)$$

Las filas de la matriz $(\mathbf{G}^T [\alpha] \mathbf{G} + [\lambda])^{-1} \mathbf{G}^T [\alpha]$ que hay que seleccionar para obtener la matriz $\mathbf{\Pi}$ son: $1, 1 + N_u^1, 1 + N_u^1 + N_u^2, \dots, 1 + \sum_{i=1}^{m-1} N_u^i$.

La ley de control (2.2-20) admite la interpretación en Transformada \mathcal{Z} siguiente:

$$\hat{\mathbf{u}}(z) = \frac{1}{\Delta} (\mathbf{I} + \mathbf{R}(z^{-1}))^{-1} (-\mathbf{S}(z^{-1}) \hat{\mathbf{y}}(z) + \mathbf{H}(z) \hat{\omega}(z)) \quad (2.2-21)$$

Las matrices de transferencia de esta expresión en transformada \mathcal{Z} se calculan así:

$$\mathbf{R}(z^{-1}) = \mathbf{h} \Gamma \mathbf{K}(z^{-1}) \quad ; \quad \mathbf{S}(z^{-1}) = \mathbf{h} \mathbf{F} \mathbf{L}(z^{-1}) \quad ; \quad \mathbf{H}(z) = \mathbf{h} \mathbf{N}(z) \quad (2.2-22)$$

siendo:

$$\mathbf{K}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1(z^{-1}) \\ \vdots \\ \mathbf{K}_m(z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (2.2-23)$$

$\mathbf{K}_j(z^{-1})$ es una matriz diagonal por bloques, siendo el bloque situado en la posición i dentro de su diagonal:

$$\mathbf{K}_j(i, i)(z^{-1}) = \frac{1}{T_j(z^{-1})} \begin{pmatrix} z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-\gamma_{ji}} \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2-24)$$

³Mínimo del índice

$L(z^{-1})$ es una matriz diagonal por bloques, siendo el bloque situado en la posición j dentro de su diagonal:

$$L(j, j)(z^{-1}) = \frac{1}{T_j(z^{-1})} \begin{pmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-f_j} \end{pmatrix} \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2-25)$$

$N(z)$ es una matriz diagonal por bloques, siendo el bloque situado en la posición j dentro de su diagonal:

$$N(j, j)(z) = \begin{pmatrix} z^{N_1^j} \\ z^{N_1^j+1} \\ \vdots \\ z^{N_2^j} \end{pmatrix} \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2-26)$$

A partir de estas expresiones se deduce que la ley de control (2.2-20) es lineal y por tanto admite la siguiente representación en diagrama de bloques, siendo $G_p(z)$ la matriz de transferencia de la planta:

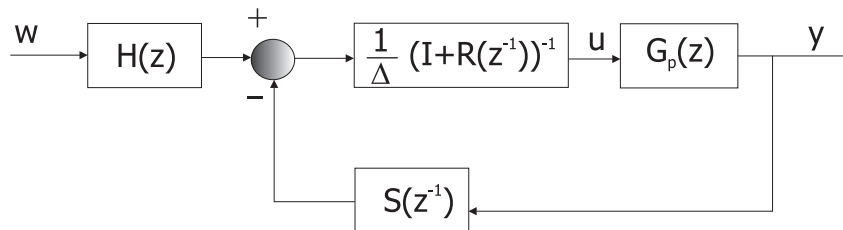


FIGURA 2.1: Diagrama de bloques del bucle cerrado del proceso más el controlador GPC MIMO

De forma sencilla se puede obtener la matriz de transferencia resultante en bucle cerrado con el controlador GPC:

$$G_{BC}(z) = \left[I + \frac{G_p(z)}{\Delta} (I + R(z^{-1}))^{-1} S(z^{-1}) \right]^{-1} \frac{G_p(z)}{\Delta} (I + R(z^{-1}))^{-1} H(z) \quad (2.2-27)$$

2.3. Presencia de restricciones

2.3.1. Planteamiento del problema de minimización

Una de las grandes ventajas que presentan los CPBM, y en particular el GPC, es la capacidad de manejar explícitamente las restricciones en el dominio del tiempo. Esta es una de las razones que explica por qué este tipo de controladores han tenido una gran

aceptación industrial. En la práctica, la mayor parte de los procesos están sujetos a restricciones: los accionadores poseen un rango acotado de funcionamiento, y presentan comportamientos no lineales asociados a zonas muertas, histéresis, backlash, etc. Además, otras variables del proceso pueden estar limitadas por diversos motivos: seguridad, mínimo coste, contaminación, calidad, etc. Es muy importante tener presente en el diseño todos estos aspectos si no se desea obtener una degradación de las prestaciones en lazo cerrado, ya que en general, no basta con recortar dentro de sus límites permitidos a las variables manipuladas que han violado sus rangos, pues esto puede ocasionar la inestabilidad [Chow y Clarke 1994b], ni tampoco es suficiente utilizar un mecanismo de anti-windup [Goodwin *et al.* 2001].

Cuando existen restricciones sobre las variables manipuladas y/o sobre las variables de salida el cálculo analítico de las acciones de control es muy complejo⁴ y se plantea la alternativa del uso de un método de optimización numérico para su solución, como por ejemplo [Bazaraa y Shetty 1979; Bertsekas 1996; Kluwer 2001]: programación cuadrática, algoritmo de Rosen, algoritmo de Lemke, etc. Además, debido a las restricciones el controlador GPC se convierte en un sistema no lineal.

2.3.2. Clasificación de las restricciones

Las restricciones pueden ser de dos tipos [Scokaert y Clarke 1994]:

1. Restricciones duras (*hard constraints*): son aquellas que se satisfacen a cualquier coste, sin permitir que sean violadas.

Las restricciones duras que aparecen comúnmente en control son:

- Limitación en los valores de la acción de control:

$$u_j^{min} \leq u_j(k) \leq u_j^{max} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.3-1)$$

- Limitación en el cambio de la acción de control:

$$\Delta u_j^{min} \leq u_j(k) - u_j(k-1) \leq \Delta u_j^{max} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.3-2)$$

- Limitación en los valores de la salida del proceso:

$$y_j^{min} \leq y_j(k) \leq y_j^{max} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.3-3)$$

Para el diseño del controlador hay que expresar estas restricciones de desigualdad exclusivamente en función del vector de incrementos de las acciones de control, puesto que ésta es la variable de la que depende el índice de coste del GPC. En

⁴Empleo de los multiplicadores de Lagrange con las condiciones de Kuhn-Tucker

general, la expresión que presentan las restricciones duras formuladas en función del vector de incrementos de las acciones de control es:

$$C\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) \leq \mathbf{b}(k) \quad (2.3-4)$$

siendo $\mathbf{b}(k)$ una función vectorial del instante de muestreo, con un número de filas coincidentes con el de C .

En estas condiciones, la obtención de las acciones de control requiere la optimización del índice de coste cuadrático dado por la ecuación (2.2-15) sujeto al modelo de predicción (2.2-4) y a las restricciones duras impuestas sobre las variables de entrada y/o de salida:

$$\text{Minimizar: } J_k(\Delta\hat{\mathbf{u}}(k)) = (\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k))^T [\alpha] (\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k)) + \Delta\hat{\mathbf{u}}(k)^T [\lambda] \Delta\hat{\mathbf{u}}(k)$$

sujeto al modelo de predicción (2.2-4):

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = G\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) + \Gamma\Delta\hat{\mathbf{u}}^f(k) + F\hat{\mathbf{y}}^f(k)$$

y a las restricciones duras impuestas:

$$C\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) \leq \mathbf{b}(k) \quad (2.3-5)$$

2. Restricciones blandas (*soft constraints*): son aquellas que pueden ser violadas, aunque tal circunstancia es penalizada añadiendo un término adicional en el índice de coste. Consecuentemente, al optimizar el índice, se obtiene una acción de control que es un compromiso entre el adecuado seguimiento de la referencia y el cumplimiento de las restricciones, aunque no de forma estricta.

En control predictivo [Rawlings 2000] es conocido que la razón para la introducción de restricciones blandas es para tratar de solucionar el problema de falta de resolubilidad (*infeasibility*), en aquellos problemas en los que hay presentes restricciones sobre las salidas y/o los estados. En el caso de restricciones sobre las entradas manipuladas éstas siempre dan origen a problemas de optimización resolubles. Por ello, las restricciones blandas se suelen emplear para las salidas [Rawlings y Muske 1993; Zheng y Morari 1995] mientras que las duras se aplican a las entradas manipuladas. Los aspectos relativos al manejo de la resolubilidad en control predictivo han sido ampliamente analizados en [Rawlings y Muske 1993; Zheng y Morari 1995; de Oliveira y Biegler 1994; Sokaert y Rawlings 1999].

Para el manejo de estas restricciones es necesario introducir las denominadas variables de holgura ϵ_j^{min} y ϵ_j^{max} $j = 1, \dots, n$, que miden el grado de incumplimiento de las restricciones. Con estas nuevas variables el problema de obtención de las acciones de control cuando hay restricciones blandas sobre las salidas puede formularse como sigue:

Minimizar:

$$J'_k(\Delta \hat{u}(k), \epsilon) = (\hat{y}(k) - \hat{\omega}(k))^T [\alpha] (\hat{y}(k) - \hat{\omega}(k)) + \Delta \hat{u}(k)^T [\lambda] \Delta \hat{u}(k) + \epsilon^T T \epsilon + \mathbf{k}_\epsilon^T \epsilon$$

sujeto al modelo de predicción (2.2-4):

$$\hat{y}(k) = \mathbf{G} \Delta \hat{u}(k) + \Gamma \Delta \hat{u}^f(k) + \mathbf{F} \bar{y}^f(k)$$

y a:

$$\begin{cases} y_j^{min} - \epsilon_j^{min} \leq y_j(k) \\ y_j(k) \leq y_j^{max} + \epsilon_j^{max} \\ \epsilon_j^{min} \geq 0 \\ \epsilon_j^{max} \geq 0 \end{cases} \quad j = 1, \dots, n \quad (2.3-6)$$

con:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon^{min} \\ \epsilon^{max} \end{bmatrix} ; \quad \epsilon^{min} = [\epsilon_1^{min} \quad \dots \quad \epsilon_n^{min}]^T ; \quad \epsilon^{max} = [\epsilon_1^{max} \quad \dots \quad \epsilon_n^{max}]^T \quad (2.3-7)$$

T es una matriz simétrica definida positiva y \mathbf{k}_ϵ es un vector columna.

2.4. Conclusiones del capítulo

1. En este capítulo se ha realizado una revisión de los puntos clave del diseño del controlador GPC MIMO E/S, atendiendo a las ideas desarrolladas en la literatura analizada. De esta revisión cabe destacar los siguientes aspectos:
 - La complejidad asociada a la formulación matricial del controlador.
 - La dependencia recursiva de las matrices asociadas al modelo de predicción con respecto al modelo CARIMA en matrices de transferencia.
2. Ante estos aspectos negativos, en el capítulo siguiente se trata de presentar una metodología alternativa para el diseño del controlador empleando un modelo CARIMA en espacio de estados. Básicamente, dicha propuesta persigue:
 - a) Reducir la complejidad del diseño del controlador mediante la simplificación del modelo de predicción. Esta reducción supone, además, disminuir la cantidad de variables a utilizar en el diseño.

- b) Que la dependencia entre las matrices del modelo de predicción y el modelo CARIMA en espacio de estados sea directa, en lugar de recursiva. Con ello se trata de facilitar el posterior análisis de las propiedades del controlador, así como su diseño.
- c) Reducir el tiempo de cómputo de la acción de control, lo cual se deriva directamente de la reducción en la complejidad del diseño.

CAPÍTULO 3

Diseño del controlador GPC MIMO en espacio de estados

3.1. Introducción	44
3.2. Modelo CARIMA en espacio de estados propuesto	45
3.2.1. Definición del modelo	45
3.2.2. Equivalencia entre modelos CARIMA	46
3.3. Predicción de las salidas	53
3.3.1. Obtención del modelo de predicción	53
3.3.2. Comparativa de los modelos de predicción	55
3.4. Índice de coste cuadrático para el GPC MIMO en espacio de estados	56
3.5. Ley de control del GPC MIMO sin restricciones	58
3.6. Estimación de los estados	61
3.6.1. Definición del observador	61
3.6.2. Diseño del observador por asignación de polos	61
3.6.3. Equivalencia entre el observador y los polinomios de filtrado	65
3.7. Representación en espacio de estados del bucle cerrado	69
3.8. Presencia de restricciones	71
3.8.1. Planteamiento del problema de minimización	71
3.8.2. Restricciones duras	71
3.8.3. Restricciones blandas	76
3.9. Comparación entre el GPC MIMO E/S y el GPC MIMO en espacio de estados	77

3.9.1. Comparativa de la memoria que requieren	77
3.9.2. Estimación comparativa del tiempo de cálculo de la acción de control	81
3.10.Aplicación: reactor agitado	90
3.10.1.Caso 1	91
3.10.2.Caso 2	93
3.11.Aplicación: péndulo invertido	95
3.12.Conclusiones del capítulo	100

3.1. Introducción

En este capítulo se presentan los elementos básicos relacionados con el diseño del controlador GPC MIMO empleando el modelo CARIMA que se propondrá en espacio de estados para el proceso.

En primer lugar, se presentará el modelo CARIMA empleado en espacio de estados así como su equivalencia con el modelo CARIMA E/S presentado en el capítulo anterior. Este modelo posee como principal ventaja con respecto de los ya formulados en la literatura la incorporación de una parte estocástica que representa satisfactoriamente al modelo del ruido. A partir de este modelo se desarrollará el modelo de predicción de las salidas.

Posteriormente, se dará a conocer el índice de coste a emplear, equivalente al usado en E/S, y mediante su optimización se obtendrá la ley de control del GPC MIMO sin restricciones.

Al tratarse de una metodología basada en espacio de estados va a ser necesario disponer de un observador para la estimación de los estados no medibles. En relación a ello se propondrá el diseño de un observador de rango completo mediante asignación de polos. Si se desea conseguir que los polos de este observador y las raíces de los polinomios de filtrado del modelo E/S coincidan, lo que aporta indudables ventajas al poderse asignar directamente los polos del observador, es necesario modificar el modelo CARIMA propuesto inicialmente. Esta propuesta es una alternativa al filtro de Kalman empleado en otros controladores predictivos. Por otro lado, esta modificación del modelo CARIMA no afecta a los desarrollos previos: predicción de las salidas y ley de control sin restricciones.

Se planteará, también, el caso de presencia de restricciones lineales tanto sobre las variables manipuladas como sobre las variables de salida, a la hora de obtener las acciones de control del GPC MIMO.

Tras estos desarrollos se realizará una comparativa entre el controlador diseñado con la formulación E/S y el diseñado en espacio de estados. Esta comparativa se centra en dos aspectos:

1. Estudio sobre la cantidad de información que requieren almacenar tanto la formulación E/S como la de espacio de estados.
2. Estimación teórica los tiempos requeridos para calcular las acciones de control en ambas formulaciones.

El objetivo es tratar de confirmar qué metodología presenta mejor comportamiento.

Finalmente, todos los aspectos teóricos presentados se desarrollarán sobre dos aplicaciones: tanque agitado y péndulo invertido.

3.2. Modelo CARIMA en espacio de estados propuesto

3.2.1. Definición del modelo

Para poder diseñar el GPC MIMO en espacio de estados siguiendo la metodología empleada en el caso E/S, se requiere disponer de un modelo CARIMA con las mismas características que el usado en la formulación E/S (2.2-1).

La parte determinística de este modelo CARIMA puede estar representada por el siguiente modelo en espacio de estados:

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k) \quad ; \quad \bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (3.2-1)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_n(k) \end{pmatrix} ; \quad \bar{\mathbf{x}}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_r(k) \end{pmatrix} ; \quad \bar{\mathbf{u}}(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{pmatrix} \quad (3.2-2)$$

Es un modelo formado por n salidas, m entradas y r estados.

Para obtener el modelo CARIMA completo se propone añadir a la parte determinística anterior las entradas del ruido $\xi_j(k)$ y sus estados asociados denominados estados del ruido $x_j^*(k)$. Estos estados se propone que sean la acumulación de dichas entradas:

$$\bar{\mathbf{x}}^*(k+1) = \bar{\mathbf{x}}^*(k) + \bar{\xi}(k) \quad (3.2-3)$$

$$\bar{\mathbf{x}}^*(k) = \begin{pmatrix} x_1^*(k) \\ \vdots \\ x_n^*(k) \end{pmatrix} ; \quad \bar{\xi}(k) = \begin{pmatrix} \xi_1(k) \\ \vdots \\ \xi_n(k) \end{pmatrix} \quad (3.2-4)$$

3.2 Modelo CARIMA en espacio de estados propuesto

Cuando estos estados adicionales son incorporados dentro del modelo determinístico dado por la ecuación (3.2-1), se obtiene el modelo CARIMA propuesto en espacio de estados:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{\Pi}\bar{\xi}(k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) &= \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k) + \bar{\xi}(k) \end{aligned} \quad (3.2-5)$$

Siendo:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{\mathbf{x}}^*(k) \end{pmatrix}; \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \Sigma_{r \times n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{n \times m} \end{bmatrix} \quad (3.2-6)$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \Omega_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (3.2-7)$$

Las matrices Σ y Ω fijan o determinan la parte estocástica del modelo CARIMA (conocida como modelo del ruido) y, en principio, se pueden elegir libremente. Si bien en el punto siguiente y en la sección correspondiente al observador es posible proponer metodologías para su selección basadas en criterios de diseño.

Nota 3.2.1 De la matriz $\bar{\mathbf{A}}$ se deduce que los estados del ruido $\bar{\mathbf{x}}^*$ tienen sus polos asociados en 1. Ésta es la principal propiedad de un modelo CARIMA, la cual le confiere características de robustez relativas a: cancelación de discrepancias entre modelo y proceso, capacidad de rechazo a perturbaciones en especial de deriva, y eliminación de errores estacionarios.

3.2.2. Equivalencia entre modelos CARIMA

Antes de continuar con el desarrollo del diseño del controlador en espacio de estados, se va a establecer la equivalencia entre ambos modelos CARIMA¹.

Con el objetivo de simplificar las operaciones, la realización de la parte determinística del modelo CARIMA en espacio de estados se elige como sigue:

LEMA 3.2.1 La parte determinística del modelo CARIMA en espacio de estados (3.2-5), matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} , posee la realización:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}_{r \times r} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_n \end{bmatrix}_{r \times m}$$

¹E/S y en espacio de estados

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_n \end{bmatrix}_{n \times r} \quad (3.2-8)$$

donde:

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{0,j} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{1,j} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{2,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{n_j-1,j} \end{bmatrix}_{n_j \times n_j} \quad B_j = \begin{bmatrix} b_{0,j,1} & b_{0,j,2} & \cdots & b_{0,j,m} \\ b_{1,j,1} & b_{1,j,2} & \cdots & b_{1,j,m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n_j-1,j,1} & b_{n_j-1,j,2} & \cdots & b_{n_j-1,j,m} \end{bmatrix}_{n_j \times m}$$

$$C_j = \left(0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \right)_{1 \times n_j} ; \quad r = \sum_{j=1}^n n_j \quad (3.2-9)$$

siendo $a_{k,j}$ los coeficientes de los polinomios $A_j(z)$ y $b_{k,j,i}$ los coeficientes de los polinomios $B_{ji}(z)$ $k = 0, \dots, n_j - 1$, $j = 1, \dots, n$ y $i = 1, \dots, m$:

$$A_j(z) = z^{n_j} + a_{n_j-1,j}z^{n_j-1} + \cdots + a_{1,j}z + a_{0,j}$$

$$B_{ji}(z) = b_{n_j-1,j,i}z^{n_j-1} + b_{n_j-2,j,i}z^{n_j-2} + \cdots + b_{1,j,i}z + b_{0,j,i}$$

Los polinomios $A_j(z)$ y $B_{ji}(z)$ son los polinomios de la parte determinística del modelo CARIMA E/S (2.2-1), expresados como potencias positivas de z .

Demostración: Un proceso SISO con la función de transferencia:

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_{s-1}z^{s-1} + b_{s-2}z^{s-2} + \cdots + b_1z + b_0}{z^s + a_{s-1}z^{s-1} + \cdots + a_1z + a_0} \quad (3.2-10)$$

posee la realización en espacio de estados siguiente²:

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{s-1} \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{s-1} \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \left(0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \right) \bar{x}(k) \quad (3.2-11)$$

esta realización es mínima³ si y sólo si $B(z)$ y $A(z)$ no poseen factores comunes.

²Conocida como forma canónica de observabilidad

³Una representación en espacio de estados es mínima si todos sus estados son observables y controlables, o sea, que la relación entre la entrada y la salida no se puede establecer con una realización que posea un menor número de estados

3.2 Modelo CARIMA en espacio de estados propuesto

Esta realización se puede generalizar al caso MISO⁴ de forma muy sencilla:

$$\begin{aligned}
 y(z) &= \frac{B_1(z)}{A(z)}u_1(z) + \frac{B_2(z)}{A(z)}u_2(z) + \cdots + \frac{B_m(z)}{A(z)}u_m(z) \\
 A(z) &= z^s + a_{s-1}z^{s-1} + \cdots + a_1z + a_0 \\
 B_i(z) &= b_{n-1,i}z^{s-1}b_{s-2,i}z^{s-2} + \cdots + b_{1,i}z + b_{0,i}
 \end{aligned} \tag{3.2-12}$$

el cual posee la siguiente realización:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{s-1} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} b_{0,1} & b_{0,2} & \cdots & b_{0,m} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{s-1,1} & b_{s-1,2} & \cdots & b_{s-1,m} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}(k) \\
 y(k) &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k)
 \end{aligned} \tag{3.2-13}$$

como se aprecia, esta realización es mínima si y sólo si las todas raíces de $A(z)$ son polos del proceso MISO.

Usando la ecuación (3.2-13) es posible obtener una realización parcial para cada subproceso MISO obtenido al extraer una única salida de la parte determinística del modelo CARIMA E/S (2.2-1). Tal realización parcial para la salida j -ésima es:

$$\begin{aligned}
 y_j(z) &= \sum_{i=1}^m \frac{B_{ji}(z)}{A_j(z)}u_i(z) \\
 A_j(z) &= z^{n_j} + a_{n_j-1,j}z^{n_j-1} + \cdots + a_{1,j}z + a_{0,j} \\
 B_{ji}(z) &= b_{n_j-1,j,i}z^{n_j-1}b_{n_j-2,j,i}z^{n_j-2} + \cdots + b_{1,j,i}z + b_{0,j,i} \\
 A_j &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{0,j} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{1,j} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{2,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{n_j-1,j} \end{bmatrix} \quad B_j = \begin{bmatrix} b_{0,j,1} & b_{0,j,2} & \cdots & b_{0,j,m} \\ b_{1,j,1} & b_{1,j,2} & \cdots & b_{1,j,m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n_j-1,j,1} & b_{n_j-1,j,2} & \cdots & b_{n_j-1,j,m} \end{bmatrix} \\
 C_j &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.2-14}$$

La realización completa de la parte determinística del modelo CARIMA⁵ se construye componiendo todas las realizaciones parciales de las salidas⁶:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}$$

⁴(Multiple Input Single Output) Múltiples entradas una sola salida

⁵Matrices A , B y C

⁶Matrices A_j , B_j y C_j

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_n \end{bmatrix} \quad (3.2-15)$$

■

Nota 3.2.2 En general esta realización no será mínima aunque todas las realizaciones parciales MISO sí lo sean. Sin embargo, se demostrará que esta realización particular facilita enormemente las manipulaciones algebraicas realizadas a lo largo de la tesis⁷.

Proposición 3.2.1 (Equivalencia entre modelos) Dado el modelo CARIMA E/S (2.2-1) y el modelo CARIMA en espacio de estados (3.2-5) con la realización de su parte determinística dada por el LEMA 3.2.1, ambos representan el mismo modelo si y sólo si:

$$T_j(z^{-1}) = z^{-(n_j+1)} \left(\Sigma'_{jj}(z) + \Omega_{jj}A_j(z) + (z-1)A_j(z) \right) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.2-16)$$

donde:

$$\Sigma = \text{diag}(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \dots, \Sigma_{nn}) \quad ; \quad \Sigma_{jj} = \begin{bmatrix} \Sigma_{jj}(1) \\ \Sigma_{jj}(2) \\ \vdots \\ \Sigma_{jj}(n_j) \end{bmatrix}_{n_j \times 1} \quad j = 1, \dots, n$$

$$\Sigma'_{jj}(z) = \Sigma_{jj}(n_j)z^{n_j-1} + \cdots + \Sigma_{jj}(2)z + \Sigma_{jj}(1) \quad (3.2-17)$$

$$\Omega = \text{diag}(\Omega_{11}, \dots, \Omega_{nn}) \quad (3.2-18)$$

Demostración: La matriz de transferencia asociada con el modelo CARIMA en espacio de estados (3.2-5) es:

$$\bar{y}(z) = G(z) \begin{Bmatrix} \bar{u}(z) \\ \bar{\xi}(z) \end{Bmatrix}$$

$$\bar{y}(z) = \left(\begin{bmatrix} C & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI_r - A) & -\Sigma \\ 0 & I_n(z-1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \bar{u}(z) \\ \bar{\xi}(z) \end{Bmatrix} \quad (3.2-19)$$

En primer lugar se obtiene la matriz inversa de:

$$\begin{bmatrix} (zI_r - A) & -\Sigma \\ 0 & I_n(z-1) \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.2-20)$$

⁷En particular la demostración de la proposición siguiente

3.2 Modelo CARIMA en espacio de estados propuesto

La matriz inversa verifica que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L & M \\ N & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI_r - A) & -\Sigma \\ \mathbf{0} & I_n(z-1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0}_{rxn} \\ \mathbf{0}_{nrx} & I_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L(zI_r - A) & -L\Sigma + M(z-1)I_n \\ N(zI_r - A) & -N\Sigma + P(z-1)I_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0}_{rxn} \\ \mathbf{0}_{nrx} & I_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2-21)$$

De la última ecuación se deducen las siguientes condiciones:

$$L(zI_r - A) = I_r \quad (3.2-22)$$

$$-L\Sigma + M(z-1)I_n = \mathbf{0}_{rxn} \quad (3.2-23)$$

$$N(zI_r - A) = \mathbf{0}_{nrx} \quad (3.2-24)$$

$$-N\Sigma + P(z-1)I_n = I_n \quad (3.2-25)$$

De la ecuación (3.2-22) se obtiene la matriz L :

$$L = (zI_r - A)^{-1} \quad (3.2-26)$$

A partir de la ecuación (3.2-24) se obtiene que $N = \mathbf{0}_{nrx}$ puesto que la matriz $(zI_r - A)$ es no singular y por tanto su espacio nulo posee dimensión cero.

Empleando este último resultado la matriz P puede despejarse de la ecuación (3.2-25):

$$P = \frac{1}{z-1} I_n \quad (3.2-27)$$

Finalmente a partir de (3.2-23) se deduce la matriz M :

$$M = \frac{1}{z-1} (zI_r - A)^{-1} \Sigma \quad (3.2-28)$$

Aplicando las ecuaciones (3.2-26), (3.2-27) (3.2-28) y dado que $N = \mathbf{0}_{nrx}$, $G(z)$ ⁸ posee la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} G(z) &= \begin{bmatrix} C & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI_r - A)^{-1} & \frac{1}{z-1} (zI_r - A)^{-1} \Sigma \\ \mathbf{0} & \frac{1}{z-1} I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C(zI_r - A)^{-1} & \frac{1}{z-1} C(zI_r - A)^{-1} \Sigma + \Omega \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C(zI_r - A)^{-1} B & \frac{1}{z-1} C(zI_r - A)^{-1} \Sigma + \Omega \frac{1}{z-1} I_n + I_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2-29)$$

El primer elemento de esta matriz de transferencia, $C(zI_r - A)^{-1} B$, coincide con el de la parte determinística de modelo CARIMA E/S (2.2-1) por construcción de las matrices A , B y C (LEMA 3.2.1). Su segundo elemento es el modelo del ruido⁹ correspondiente al modelo CARIMA en espacio de estados.

⁸Véase ecuación (3.2-19)

⁹Parte estocástica del modelo

Se ha supuesto que el modelo del ruido es diagonal, es decir, que cada entrada del ruido sólo afecta a una única salida, y por tanto sólo influirá en los estados determinísticos asociados a la misma. Esto implica que la matriz Σ va a ser diagonal por bloques, y que la matriz Ω va a ser diagonal.

A continuación se analiza cada término del modelo del ruido por separado:

- Término $\frac{1}{z-1}C(zI_r - A)^{-1}\Sigma$. Recordando la realización de la parte determinística (3.2-15) y que la matriz Σ es diagonal por bloques con la estructura indicada en el enunciado de la proposición, es fácil ver que este término es de la forma:

$$\frac{1}{z-1}C(zI_r - A)^{-1}\Sigma = \frac{1}{z-1} \begin{bmatrix} \frac{\Sigma'_{11}(z)}{A_1(z)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\Sigma'_{nn}(z)}{A_n(z)} \end{bmatrix} \quad (3.2-30)$$

- Término $\Omega \frac{1}{z-1}$. Este término es fácil de obtener ya que la matriz Ω es diagonal:

$$\Omega \frac{1}{z-1} = \begin{bmatrix} \frac{\Omega_{11}}{z-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\Omega_{22}}{z-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\Omega_{nn}}{z-1} \end{bmatrix} \quad (3.2-31)$$

Empleando las ecuaciones (3.2-29), (3.2-30) y (3.2-31) se obtiene una matriz de transferencia para el modelo del ruido que resulta ser diagonal, siendo un elemento genérico de la misma de la forma:

$$\frac{\Sigma'_{jj}(z)}{(z-1)A_j(z)} + \frac{\Omega_{jj}}{z-1} + 1 \quad (3.2-32)$$

Comparando la expresión previa con el modelo del ruido del modelo CARIMA E/S (2.2-1), ambos modelos son el mismo si y sólo si:

$$\frac{\Sigma'_{jj}(z)}{(z-1)A_j(z)} + \frac{\Omega_{jj}}{z-1} + 1 = \frac{T_j(z^{-1})}{\Delta A_j(z^{-1})}$$

Operando sobre esta expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma'_{jj}(z) + \Omega_{jj}A_j(z) + (z-1)A_j(z)}{(z-1)A_j(z)} &= \frac{T_j(z^{-1})z^{n_j+1}}{(z-1)A_j(z)} \\ \Sigma'_{jj}(z) + \Omega_{jj}A_j(z) + (z-1)A_j(z) &= T_j(z^{-1})z^{n_j+1} \\ T_j(z^{-1}) &= z^{-(n_j+1)} \left(\Sigma'_{jj}(z) + \Omega_{jj}A_j(z) + (z-1)A_j(z) \right) \end{aligned} \quad (3.2-33)$$

3.2 Modelo CARIMA en espacio de estados propuesto

Nota 3.2.3 Esta expresión es sólo válida cuando el orden, en valor absoluto, de los polinomios de filtrado es menor o igual que $n_j + 1$, puesto que este es el grado del segundo miembro de la ecuación (3.2-33). Si se dispone de polinomios de filtrado de mayor orden sería necesario añadir estados artificiales al modelo CARIMA, asignando sus polos en el origen de forma que no añadan dinámica adicional al sistema, incrementando así el grado de los polinomios del segundo miembro de (3.2-33).

Nota 3.2.4 La ecuación de la equivalencia tiene implícita la restricción de que los polinomios de filtrado han de ser mónicos, ya que el segundo miembro de (3.2-33) siempre lo es.

Nota 3.2.5 La expresión (3.2-33) permite, una vez que los polinomios de filtrado $T_j(z^{-1})$ han sido fijados, obtener las matrices del modelo del ruido en espacio de estados, y viceversa. En efecto:

1. El problema directo, es decir, obtener las matrices del modelo del ruido en espacio de estados dados los polinomios de filtrado posee solución única. Los polinomios de ambos miembros son mónicos de grado $n_j + 1$, por tanto habrá un total de $n_j + 1$ ecuaciones. Las incógnitas son los coeficientes del polinomio $\Sigma'_{jj}(z)$ de grado $n_j - 1$ y el valor de la constante Ω_{jj} , dando lugar a un total de $n_j + 1$ incógnitas. Su solución puede obtenerse mediante la resolución de una ecuación diofántica.
2. El problema inverso, es decir, obtener los polinomios de filtrado a partir de las matrices del modelo del ruido, también tiene solución única empleando la ecuación (3.2-33).

EJEMPLO 3.2.1 Supóngase que se tiene un proceso multivariable cuya j -ésima salida posee por denominador $A_j(z) = z^3 - 1.5z^2 + 0.75z - 0.125$. Se desean obtener los coeficientes de las matrices del modelo del ruido relativos a esta salida, con la condición de que los modelos CARIMA E/S y en espacio de estados sean equivalentes. Si se impone que el polinomio de filtrado para la salida j -ésima tenga sus raíces en 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4, o sea, $T_j(z^{-1}) = (1 - 0.1z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.3z^{-1})(1 - 0.4z^{-1})$, aplicando la ecuación (3.2-33) se puede obtener la solución del problema directo:

$$\begin{aligned}
 & (1 - 0.1z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.3z^{-1})(1 - 0.4z^{-1}) = \\
 & = z^{-4} (\Sigma_j(3, j)z^2 + \Sigma_j(2, j)z + \Sigma_j(1, j) + \Omega_{jj} \cdot (z^3 - 1.5z^2 + 0.75z - 0.125) + \\
 & \quad + (z - 1) \cdot (z^3 - 1.5z^2 + 0.75z - 0.125)) \quad (3.2-34)
 \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de las potencias negativas de z de ambos miembros¹⁰:

$$\text{Término } z^{-1}: -1 = \Omega_{jj} - 2.5 \quad (3.2-35)$$

$$\text{Término } z^{-2}: 0.35 = \Sigma_j(3, j) - \Omega_{jj} \cdot 1.5 + 2.25 \quad (3.2-36)$$

$$\text{Término } z^{-3}: -0.05 = \Sigma_j(2, j) + \Omega_{jj} \cdot 0.75 - 0.875 \quad (3.2-37)$$

$$\text{Término } z^{-4}: 0.0024 = \Sigma_j(1, j) - \Omega_{jj} \cdot 0.125 + 0.125 \quad (3.2-38)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones o la ecuación diofántica (3.2-34) se obtiene:

$$\Omega_{jj} = 1.5 \quad \Sigma_j(3, j) = 0.35 \quad \Sigma_j(2, j) = -0.3 \quad \Sigma_j(1, j) = 0.0649 \quad (3.2-39)$$

3.3. Predicción de las salidas

3.3.1. Obtención del modelo de predicción

Una vez que el modelo CARIMA en espacio de estados ha sido propuesto, el siguiente paso es obtener una expresión que prediga los valores de las salidas a lo largo del horizonte de predicción. Sin pérdida de generalidad se asumirá que todas las salidas poseen el mismo horizonte de predicción (N_1, N_2) y que todas las entradas tienen también el mismo horizonte de control (N_u)¹¹.

En primer lugar se parte del modelo CARIMA en espacio de estados (3.2-5):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{\Pi}\tilde{\xi}(k) \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) &= \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k) + \tilde{\xi}(k) \end{aligned} \quad (3.3-1)$$

De la ecuación de salida de este modelo se deduce que la mejor predicción de las salidas en instantes futuros viene dada por la predicción de su valor medio, ya que se asume que las entradas del ruido son ruidos blancos. Por tanto, la mejor predicción de las salidas en el instante $k+i$ ¹² con la información disponible en el instante k viene dada por:

$$\tilde{\mathbf{y}}(k+i|k) = E\{\tilde{\mathbf{y}}(k+i)\} = \tilde{\mathbf{C}}E\{\mathbf{x}(k+i)\} + \underbrace{E\{\tilde{\xi}(k+i)\}}_0 = \tilde{\mathbf{C}}E\{\mathbf{x}(k+i)\} \quad (3.3-2)$$

nótese que el valor medio del estado en $k+i$, $i=1, \dots, n$, es también la mejor predicción del estado en $k+i$ a partir de la información disponible en k :

$$E\{\mathbf{x}(k+i)\} = \mathbf{x}(k+i|k) \Rightarrow \tilde{\mathbf{y}}(k+i|k) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k+i|k) \quad (3.3-3)$$

¹⁰El término independiente de ambos miembros es uno

¹¹Más adelante se indicará cómo fijar diferentes horizontes para cada salida y para cada entrada

¹² k representa el instante actual

3.3 Predicción de las salidas

El paso siguiente es encontrar una expresión genérica para $\mathbf{x}(k+i|k)$ empleando exclusivamente información conocida hasta el instante k y el modelo (3.3-1):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1|k) &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k) + \bar{\mathbf{\Pi}}\bar{\xi}(k) \\ \mathbf{x}(k+2|k) &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k+1|k) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k+1) \\ \mathbf{x}(k+2|k) &= \bar{\mathbf{A}}^2\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k+1) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{\Pi}}\bar{\xi}(k) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned}\quad (3.3-4)$$

$$\mathbf{x}(k+i|k) = \bar{\mathbf{A}}^i\mathbf{x}(k) + \sum_{j=0}^{i-1} \bar{\mathbf{A}}^j\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k+i-j-1) + \bar{\mathbf{A}}^{i-1}\bar{\mathbf{\Pi}}\bar{\xi}(k) \quad (3.3-5)$$

De esta última expresión se obtiene la ecuación para la predicción de las salidas:

$$\bar{\mathbf{y}}(k+i|k) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^i\mathbf{x}(k) + \sum_{j=0}^{i-1} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^j\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k+i-j-1) + \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{i-1}\bar{\mathbf{\Pi}}\bar{\xi}(k) \quad (3.3-6)$$

Como se aprecia, para predecir las salidas es necesario estimar el valor de las entradas del ruido en el instante k , para ello se emplea la ecuación de la salida en el instante actual:

$$\bar{\xi}(k) = \bar{\mathbf{y}}(k) - \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k) \quad (3.3-7)$$

el vector de salidas $\bar{\mathbf{y}}(k)$ ha de ser medido y el vector de estados $\mathbf{x}(k)$ ha de ser observado ya que, en general, los estados del modelo CARIMA no son físicamente accesibles. Esta ecuación asigna a las entradas del ruido la discrepancia entre el vector de salidas reales y el predicho por el modelo¹³. Con esta estimación la ecuación para la predicción de las salidas resulta:

$$\bar{\mathbf{y}}(k+i|k) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{i-1}(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{\Pi}}\bar{\mathbf{C}})\mathbf{x}(k) + \sum_{j=0}^{i-1} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^j\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k+i-j-1) + \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{i-1}\bar{\mathbf{\Pi}}\bar{\mathbf{y}}(k) \quad (3.3-8)$$

Al igual que en el GPC MIMO E/S se necesita una ecuación de predicción para las salidas que abarque la totalidad del horizonte de predicción y que dependa de los incrementos de las acciones de control sobre el horizonte de control. En primer lugar se cambian las acciones de control por sus incrementos:

$$\bar{\mathbf{u}}(k+i-j-1) = \Delta\bar{\mathbf{u}}(k+i-j-1) + \bar{\mathbf{u}}(k+i-j-2) \quad j = 1, \dots, i-1$$

Con este cambio el término de las acciones de control queda así:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{i-1} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^j\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k+i-j-1) = \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} [\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}} + \dots + \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^j\bar{\mathbf{B}}] \Delta\bar{\mathbf{u}}(k+i-j-1) + [\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}} + \dots + \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{i-1}\bar{\mathbf{B}}] \bar{\mathbf{u}}(k-1)\end{aligned}$$

¹³Este hecho se conoce como la reconciliación entre el vector de salidas predicho y el real en el instante k

Con este cambio el modelo de predicción (3.3-8) queda así:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(k+i|k) = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{i-1}(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{\Pi}\tilde{\mathbf{C}})\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \left(\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}} + \dots + \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{i-1}\tilde{\mathbf{B}}\right)^T \\ \left(\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}} + \dots + \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{i-2}\tilde{\mathbf{B}}\right)^T \\ \vdots \\ \left(\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}}\right)^T \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \Delta\hat{\mathbf{u}}(k) \\ \Delta\hat{\mathbf{u}}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta\hat{\mathbf{u}}(k+i-1) \end{pmatrix} + \\ + \underbrace{\left[\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}} + \dots + \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{i-1}\tilde{\mathbf{B}}\right]}_{\mathbf{H}_i} \hat{\mathbf{u}}(k-1) + \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{i-1}\mathbf{\Pi}\hat{\mathbf{y}}(k) \end{aligned} \quad (3.3-9)$$

Eliminando de esta expresión los incrementos de las acciones de control que no pertenecen al horizonte de control y extendiendo la predicción del vector de salidas desde $i = N_1$ hasta $i = N_2$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}}(k+N_1|k) \\ \hat{\mathbf{y}}(k+N_1+1|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}(k+N_2|k) \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{y}}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{N_1-1} \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{N_1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{N_2-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} (\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{\Pi}\tilde{\mathbf{C}})\mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}^{N_1} \\ \mathbf{R}^{N_1+1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}^{N_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta\hat{\mathbf{u}}(k) \\ \Delta\hat{\mathbf{u}}(k+1) \\ \vdots \\ \Delta\hat{\mathbf{u}}(k+N_u-1) \end{pmatrix}}_{\Delta\hat{\mathbf{u}}(k)} + \\ + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{N_1} \\ \mathbf{H}^{N_1+1} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{N_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{O}} \hat{\mathbf{u}}(k-1) + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{N_1-1}\mathbf{\Pi} \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{N_1}\mathbf{\Pi} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{N_2-1}\mathbf{\Pi} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{y}}(k) \end{aligned}$$

siendo:

$$\mathbf{R}^i = \begin{bmatrix} \left(\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}} + \dots + \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{i-1}\tilde{\mathbf{B}}\right)^T \\ \left(\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}} + \dots + \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{i-2}\tilde{\mathbf{B}}\right)^T \\ \vdots \\ \left(\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}} + \dots + \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{i-N_u}\tilde{\mathbf{B}}\right)^T \end{bmatrix}^T \quad (3.3-10)$$

finalmente la ecuación para el modelo de predicción de las salidas resulta:

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{O}\hat{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\hat{\mathbf{y}}(k) \quad (3.3-11)$$

3.3.2. Comparativa de los modelos de predicción

La expresión (3.3-11) se puede comparar con la que se obtiene en la versión E/S (2.2-4):

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{G}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{\Gamma}\Delta\hat{\mathbf{u}}^f(k) + \mathbf{F}\hat{\mathbf{y}}^f(k) \quad (3.3-12)$$

3.4 Índice de coste cuadrático para el GPC MIMO en espacio de estados

siendo:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\mathbf{u}}^f(k) &= \left(\Delta \bar{\mathbf{u}}^{f,1^T}(k) \quad \dots \quad \Delta \bar{\mathbf{u}}^{f,n^T}(k) \right)^T \\ \Delta \bar{\mathbf{u}}^{f,j}(k) &= \left(\Delta u_1^{f,j}(k-1) \quad \dots \quad \Delta u_1^{f,j}(k-\gamma_{j1}) \quad \dots \quad \Delta u_m^{f,j}(k-1) \quad \dots \quad \Delta u_m^{f,j}(k-\gamma_{jm}) \right)^T \\ \Delta u_i^{f,j}(k) &= \frac{\Delta u_i(k)}{T_j(z^{-1})} \quad j = 1, \dots, n; \quad i = 1, \dots, m \\ \bar{\mathbf{y}}^f(k) &= \left(\bar{\mathbf{y}}_1^{f^T}(k) \quad \dots \quad \bar{\mathbf{y}}_n^{f^T}(k) \right)^T; \quad \bar{\mathbf{y}}_j^f(k) = \left(y_j^f(k) \quad \dots \quad y_j^f(k-f_j) \right)^T \\ y_j^f(k) &= \frac{y_j(k)}{T_j(z^{-1})} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

deduciéndose las siguientes conclusiones:

- El modelo para el caso E/S se formula mediante unas matrices que dependen recursivamente (no directamente) de los coeficientes de los polinomios que componen las matrices de transferencia del modelo CARIMA E/S [Camacho y Bordóns 1999; Sanchis 2002; Aguado y Martínez 2003]. Sin embargo, las matrices que forman parte del modelo de predicción en espacio de estados dependen directamente de las matrices del modelo CARIMA.
- La información que requiere el modelo de predicción en espacio de estados se refiere, por un lado, al instante actual k : vector de estado y medida del vector de salidas, por otro al instante $k-1$: vector de acciones de control, y finalmente al vector de incrementos de acciones de control en el horizonte de control. Sin embargo, el modelo de predicción en el caso E/S requiere conocer además los incrementos de las acciones de control y de las salidas en instantes anteriores al actual, pero filtradas, además, por los polinomios de filtrado $T_j(z^{-1})$.
- Se puede argumentar, pues, que hay una gran reducción de complejidad, conceptual y de expresiones en la formulación en espacio de estados con respecto a la de E/S.

3.4. Índice de coste cuadrático para el GPC MIMO en espacio de estados

Para obtener la ley de control del GPC, se propone un índice de coste cuadrático equivalente al utilizado por la formulación E/S (2.2-2) y similar al índice empleado en [Ordys y Clarke 1993]:

$$J_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)) = E \left\{ \sum_{i=N_1}^{N_2} (\bar{\mathbf{y}}(k+i) - \bar{\omega}(k+i))^T \mathbf{Q}_i (\bar{\mathbf{y}}(k+i) - \bar{\omega}(k+i)) + \right.$$

$$+ \left. \sum_{i=1}^{N_u} \Delta \hat{\mathbf{u}}^T(k+i-1) \mathbf{R}_i \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+i-1) \right\} \quad (3.4-1)$$

$$\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad ; \quad \mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (3.4-2)$$

$\hat{\omega}(k)$ es el vector de referencias en el instante k .

Para facilitar la obtención de la ley de control sería interesante expresar el índice de coste en forma matricial. En concordancia con esto se definen los siguientes términos:

$$\hat{\omega}(k) = \left(\hat{\omega}(k+N_1) \quad \cdots \quad \hat{\omega}(k+N_2) \right)^T \quad (3.4-3)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \text{diag} \left(\mathbf{Q}_{N_1} \quad \mathbf{Q}_{N_1+1} \quad \cdots \quad \mathbf{Q}_{N_2} \right) \quad (3.4-4)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \text{diag} \left(\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{R}_{N_u} \right) \quad (3.4-5)$$

Con estos nuevos términos y el uso del modelo de predicción (3.3-11), el índice de coste adopta la forma matricial:

$$J_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)) = (\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k))^T \bar{\mathbf{Q}} (\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k)) + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T(k) \bar{\mathbf{R}} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) \quad (3.4-6)$$

Esta expresión sólo es válida si se conocen las referencias futuras. Si éstas fuesen desconocidas se podría asumir que son iguales a la actual¹⁴:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(k+N_1) &= \bar{\omega}(k+N_1+1) = \cdots = \bar{\omega}(k+N_2) = \bar{\omega}(k) \\ \hat{\omega}(k) &= \begin{pmatrix} \bar{\omega}(k) \\ \bar{\omega}(k) \\ \vdots \\ \bar{\omega}(k) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n \\ \vdots \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \bar{\omega}(k) = \mathbf{U} \bar{\omega}(k) \end{aligned} \quad (3.4-7)$$

Nota 3.4.1 Si se desea que el tamaño del horizonte de predicción no sea el mismo para todas las salidas, entonces debe interpretarse a N_2 como el máximo de los N_2^j elegidos para las salidas, y a N_1 como el mínimo de los N_1^j de todas las salidas.

Con esta interpretación ocurre que todas las salidas se ven forzadas a tener el mismo horizonte de predicción, y en algunos casos mayor que el elegido para ellas. Para conseguir reducir de forma efectiva el tamaño y fijar el horizonte de predicción elegido, hay que eliminar de las matrices del modelo de predicción (3.3-11) y del vector de referencias $\hat{\omega}(k)$ las filas relativas a la predicción de las salidas en los instantes que estén fuera de su correspondiente horizonte.

Si para la salida j -ésima $N_1 < N_1^j$, entonces hay que eliminar los instantes $i = N_1, \dots, N_1^j - 1$ de la predicción. Como el vector de predicción de las salidas tiene la forma:

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \left(\hat{\mathbf{y}}^T(k+N_1|k) \quad \hat{\mathbf{y}}^T(k+N_1+1|k) \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{y}}^T(k+N_2|k) \right)^T \quad (3.4-8)$$

¹⁴Equivalente al problema de regulación

3.5 Ley de control del GPC MIMO sin restricciones

los instantes anteriores se corresponden con las filas $j, j + n, \dots, j + n \cdot (N_1^j - N_1 - 1)$ del vector $\hat{y}(k)$.

Si para la salida j -ésima $N_2^j < N_2$, entonces hay que eliminar los instantes $i = N_2^j + 1, \dots, N_2$ de la predicción. Recordando la forma del vector de predicción de las salidas, estos instantes se corresponden con las filas $j + n \cdot (N_2^j - N_1 + 1), j + n \cdot (N_2^j - N_1 + 2), \dots, j + n \cdot (N_2 - N_1)$ del vector $\hat{y}(k)$.

En concreto, las filas antes indicadas hay que eliminarlas de las matrices $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{O}, \mathbf{P}$ y del vector $\hat{\omega}(k)$ ¹⁵.

Además, a las matrices de ponderación \mathbf{Q}_i correspondientes a los instantes arriba reseñados, hay que eliminarles su fila j -ésima y su columna j -ésima, ya que al ser eliminadas dichas predicciones del vector \hat{y} ya no es necesario ponderarlas.

Nota 3.4.2 Si se desea emplear un tamaño del horizonte de control que no sea el mismo para todas las entradas, entonces se puede interpretar a N_u como el máximo de los N_u^j elegidos para las entradas. De nuevo ocurre que algunas de las entradas tendrán un horizonte de control mayor que el elegido. Para solventar este problema se eliminan del vector $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ las filas correspondientes a los incrementos de las acciones de control que estén situados fuera del horizonte de control de cada entrada.

Si para la entrada j -ésima $N_u^j < N_u$, entonces hay que eliminar sus incrementos correspondientes a los instantes $i = N_u^j, \dots, N_u - 1$. Como el vector de incrementos de las acciones de control es de la forma:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = \left(\Delta \hat{\mathbf{u}}^T(k) \quad \Delta \hat{\mathbf{u}}^T(k+1) \quad \dots \quad \Delta \hat{\mathbf{u}}^T(k+N_u-1) \right)^T \quad (3.4-9)$$

los instantes anteriores se corresponden con las filas $j + m \cdot N_u^j, j + m \cdot (N_u^j + 1), \dots, j + m \cdot (N_u - 1)$ del vector $\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)$.

estas filas se corresponden con determinadas columnas de la matriz \mathbf{N} ¹⁶, que también tendrán que ser eliminadas.

Además, a las matrices de ponderación \mathbf{R}_i correspondientes a los instantes antes referenciados y que están fuera su horizonte de control, hay que eliminarles su fila j -ésima y su columna j -ésima, ya que al haber sido eliminados éstos incrementos del vector $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ ya no es necesario ponderarlos.

3.5. Ley de control del GPC MIMO sin restricciones

La ley de control del GPC MIMO sin restricciones se obtiene optimizando el índice de coste (3.4-6) con respecto a $\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)$ sujeto al modelo de predicción dado por la expresión

¹⁵Si las referencias futuras son desconocidas estas filas hay que eliminarlas de la matriz \mathbf{U}

¹⁶La matriz correspondiente a $\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)$ en el modelo de predicción (3.3-11)

(3.3-11):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar : } J_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)) &= (\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k))^T \bar{\mathbf{Q}} (\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k)) + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T(k) \bar{\mathbf{R}} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) \\ \text{sujeto a : } \hat{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\Delta \hat{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{O}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}(k) \end{aligned} \quad (3.5-1)$$

Proposición 3.5.1 Si las matrices \mathbf{Q}_i son definidas positivas, las matrices \mathbf{R}_i son semidefinidas positivas y la matriz \mathbf{N} posee rango completo de columnas entonces el problema de optimización (3.5-1) posee un único mínimo dado por:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = -(\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}}^T (\mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{O}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k)) \quad (3.5-2)$$

Demostración: Partiendo de la ecuación (3.5-1), y definiendo a $\hat{\mathbf{e}}_c(k)$ como el error de la respuesta libre a partir de k^{17} :

$$\hat{\mathbf{e}}_c(k) \triangleq \hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k) - \mathbf{N}\Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{O}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k) \quad (3.5-3)$$

el índice de coste toma la forma:

$$\begin{aligned} J_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)) &= (\hat{\mathbf{e}}_c(k) + \mathbf{N}\Delta \hat{\mathbf{u}}(k))^T \bar{\mathbf{Q}} (\hat{\mathbf{e}}_c(k) + \mathbf{N}\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)) + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T(k) \bar{\mathbf{R}} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = \\ &= \hat{\mathbf{e}}_c^T(k) \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{e}}_c(k) + 2\hat{\mathbf{e}}_c^T(k) \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T(k) (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}) \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) \end{aligned} \quad (3.5-4)$$

El mínimo de $J_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k))$ se alcanza cuando su gradiente es igual al vector nulo:

$$\frac{dJ_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k))}{d\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)} = \mathbf{0} = 2\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{e}}_c(k) + 2(\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}) \Delta \hat{\mathbf{u}}(k)$$

Finalmente el vector de incrementos de las acciones de control óptimo sobre el horizonte de control es:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) &= -(\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{e}}_c(k) \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) &= -(\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} (\mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{O}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k)) \end{aligned} \quad (3.5-5)$$

El resto de la demostración puede consultarse en el Apéndice A (**Proposición A.1.1**). ■

Con la ley de control sin restricciones (3.5-2) se obtienen todos los incrementos de las acciones de control pertenecientes al horizonte de control. Pero como se utiliza la metodología del horizonte móvil (*receding horizon*) sólo se aplicarán los incrementos correspondientes al primer instante de dicho horizonte. En este sentido se define la matriz σ como las m primeras filas de la matriz $(\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}}^T$. Con esta asignación es posible obtener exclusivamente los incrementos correspondientes al primer instante del horizonte de control:

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}(k) = -\sigma (\mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{O}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k)) \quad (3.5-6)$$

¹⁷Equivalente al error bajo acciones de control constantes a partir de k

3.6 Ley de control del GPC MIMO sin restricciones

Proposición 3.5.2 La ley de control del GPC MIMO con horizonte móvil (3.5-6) posee la siguiente representación en espacio de estados:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(k+1) &= (\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \mathbf{x}_u(k) + (\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \begin{bmatrix} -\sigma \mathbf{M} & \sigma & -\sigma \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\omega}(k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{u}}(k) &= \mathbf{I} \mathbf{x}_u(k) + \begin{bmatrix} -\sigma \mathbf{M} & \sigma & -\sigma \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\omega}(k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5-7)$$

Demostración: Partiendo de la ecuación (3.5-6):

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}(k) = -\sigma (\mathbf{M} \mathbf{x}(k) + \mathbf{O} \bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P} \bar{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k))$$

se llega a la expresión de la acción de control:

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = -\sigma \mathbf{M} \mathbf{x}(k) + (\mathbf{I}_m - \sigma \mathbf{O}) \bar{\mathbf{u}}(k-1) - \sigma \mathbf{P} \bar{\mathbf{y}}(k) + \sigma \hat{\omega}(k) \quad (3.5-8)$$

Los estados de las acciones de control se eligen así:

$$\mathbf{x}_u(k) = \bar{\mathbf{u}}(k) + \sigma \mathbf{M} \mathbf{x}(k) - \sigma \hat{\omega}(k) + \sigma \mathbf{P} \bar{\mathbf{y}}(k) \quad (3.5-9)$$

Sustituyendo esta elección en la ecuación (3.5-8):

$$\mathbf{x}_u(k) = (\mathbf{I}_m - \sigma \mathbf{O}) \bar{\mathbf{u}}(k-1) \quad (3.5-10)$$

e incrementado un instante de muestreo esta ecuación y sustituyendo $\bar{\mathbf{u}}(k)$ mediante la ecuación (3.5-9) se llega a:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(k+1) &= (\mathbf{I}_m - \sigma \mathbf{O}) \mathbf{x}_u(k) - (\mathbf{I}_m - \sigma \mathbf{O}) \sigma \mathbf{M} \mathbf{x}(k) + \\ &+ (\mathbf{I}_m - \sigma \mathbf{O}) \sigma \hat{\omega}(k) - (\mathbf{I}_m - \sigma \mathbf{O}) \sigma \mathbf{P} \bar{\mathbf{y}}(k) \end{aligned} \quad (3.5-11)$$

De esta última ecuación se obtiene la ecuación de estado de la ley de control:

$$\mathbf{x}_u(k+1) = (\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \mathbf{x}_u(k) + (\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \begin{bmatrix} -\sigma \mathbf{M} & \sigma & -\sigma \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\omega}(k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) \end{pmatrix} \quad (3.5-12)$$

La ecuación de salida de la ley de control se obtiene de la ecuación (3.5-9):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(k) &= \mathbf{x}_u(k) - \sigma \mathbf{M} \mathbf{x}(k) + \sigma \hat{\omega}(k) - \sigma \mathbf{P} \bar{\mathbf{y}}(k) \\ \bar{\mathbf{u}}(k) &= \mathbf{I} \mathbf{x}_u(k) + \begin{bmatrix} -\sigma \mathbf{M} & \sigma & -\sigma \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\omega}(k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5-13)$$

■

3.6. Estimación de los estados

3.6.1. Definición del observador

En una técnica de control basada en espacio de estados es necesario desarrollar un sistema observador que sea capaz de estimar los valores de los estados del modelo que puedan no ser medidos directamente con sensores.

En las secciones 1.2.1 y 1.2.2 se analizaron las diferentes posibilidades a la hora de la elección de un determinado observador. De este análisis surgió la propuesta de emplear un observador alternativo al del filtro de Kalman, que presentase una mayor facilidad de sintonizado en aplicaciones orientadas al control predictivo.

Se plantea un observador de rango completo para el modelo CARIMA en espacio de estados (3.2-5) de la forma:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{F}(\bar{\mathbf{y}}(k) - \bar{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k)) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{F}\bar{\mathbf{C}})\hat{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{F}\bar{\mathbf{y}}(k)\end{aligned}\quad (3.6-1)$$

Como se aprecia, la discrepancia entre la predicción de la salida y su medida real produce una reasignación de los valores propios de la matriz $\bar{\mathbf{A}}$ mediante la adecuada selección de la matriz \mathbf{F} , estableciendo así una determinada dinámica para el observador.

3.6.2. Diseño del observador por asignación de polos

El diseño de un observador de rango completo consiste en elegir sus polos de forma que éste sea estable, y que su dinámica sea más rápida que la resultante en bucle cerrado (controlador + proceso), con el fin de asegurar que el observador converja más rápido que el bucle cerrado. Esta idea se basa en el principio de separación, por el cual los polos del observador se pueden elegir de forma independiente de los del bucle cerrado, siempre y cuando se cumplan las condiciones anteriores (estabilidad y rapidez).

Para este observador la dinámica viene impuesta por la matriz $\Gamma = \bar{\mathbf{A}} - \mathbf{F}\bar{\mathbf{C}}$, la cual posee la estructura siguiente:

$$\Gamma = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \Sigma \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \Omega \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{F}_1\mathbf{C} & \Sigma - \mathbf{F}_1\Omega \\ -\mathbf{F}_2\mathbf{C} & \mathbf{I} - \mathbf{F}_2\Omega \end{bmatrix}\quad (3.6-2)$$

como se observa, su dinámica depende tanto de las matrices \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 como de las matrices del ruido Σ y Ω . En esta situación se pueden plantear dos alternativas:

1. Emplear unas matrices del ruido (Σ y Ω) prefijadas de antemano (por ejemplo, procedentes de los polinomios de filtrado ($T(z^{-1})$) empleados en un controlador

GPC MIMO E/S) y seleccionar las matrices F_1 y F_2 para que la matriz Γ posea unos determinados valores propios. Esta alternativa tiene el problema de que hay que disponer de las matrices del ruido, y sólo se ha mostrado cómo obtenerlas a partir de los polinomios de filtrado.

2. Fijar simultáneamente tanto las matrices del ruido (Σ y Ω) como F_1 y F_2 para asignar unos determinados valores propios a la matriz Γ .

Con la segunda alternativa se presenta la ventaja de poder plantear una metodología de diseño de las matrices del ruido que no depende de los polinomios de filtrado. **Este hecho es importante ya que permite el diseño del controlador en espacio de estados sin hacer referencia a la formación E/S, y en particular a la necesidad de disponer de los polinomios de filtrado.** En el resto de la sección se utilizará esta segunda alternativa.

Para facilitar la asignación de los valores propios de la matriz Γ se formula la condición:

$$\Sigma - F_1 \Omega = 0 \quad (3.6-3)$$

Con esta condición se produce una separación en la asignación de los valores propios de Γ . Los correspondientes a los estados determinísticos son asignados por la matriz $A - F_1 C$, mientras que los correspondientes a los estados estocásticos o del ruido son asignados por la matriz $I - F_2 \Omega$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A - F_1 C & 0 \\ -C & I - F_2 \Omega \end{bmatrix} \quad (3.6-4)$$

Primero se analiza la asignación de los r valores propios de la matriz Γ_1 , asociados a los estados determinísticos:

$$\Gamma_1 = A - F_1 C \quad (3.6-5)$$

Para realizar este diseño se utiliza el hecho de que las matrices A y C , según el LEMA 3.2.1, tienen una estructura particular que posee propiedades similares a las de la forma canónica de observabilidad:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A_j &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{0,j} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{1,j} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{2,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{n_j-1,j} \end{bmatrix} & B_j &= \begin{bmatrix} b_{0,j,1} & b_{0,j,2} & \cdots & b_{0,j,m} \\ b_{1,j,1} & b_{1,j,2} & \cdots & b_{1,j,m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n_j-1,j,1} & b_{n_j-1,j,2} & \cdots & b_{n_j-1,j,m} \end{bmatrix} \\
 C_j &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.6-6}$$

En la **Proposición 3.2.1** se estableció que la matriz Σ era diagonal por bloques, ya que como cada entrada del ruido sólo afecta a una salida, entonces sólo afectará a sus correspondientes estados determinísticos. Consecuentemente, la matriz F_1 también ha de ser diagonal por bloques con la misma estructura:

$$F_1 = \text{diag}(F_{11}, F_{22}, \dots, F_{mm}) \quad ; \quad F_{jj} = \begin{bmatrix} F_{jj}(1) \\ F_{jj}(2) \\ \vdots \\ F_{jj}(n_j) \end{bmatrix}_{n_j \times 1} \quad j = 1, \dots, n \tag{3.6-7}$$

Usando estas últimas expresiones:

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} A_1 - F_{11}C_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 - F_{22}C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & A_n - F_{nn}C_n \end{bmatrix} \tag{3.6-8}$$

$$\Gamma_{jj} = A_j - F_{jj}C_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{0,j} - F_{jj}(1) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{1,j} - F_{jj}(2) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{2,j} - F_{jj}(3) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{n_j-1,j} - F_{jj}(n_j) \end{bmatrix} \tag{3.6-9}$$

Analizando las ecuaciones (3.6-8) y (3.6-9) se deduce que la matriz Γ_1 tiene por valores propios las raíces de los polinomios característicos de las matrices Γ_{jj} :

$$\begin{aligned}
 z^{n_j} + (a_{n_j-1,j} + F_{jj}(n_j)) z^{n_j-1} + \cdots + (a_{1,j} + F_{jj}(2)) z + (a_{0,j} + F_{jj}(1)) &= \\
 = A_j(z) + F'_{jj}(z) \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.6-10}$$

siendo:

$$F'_{jj}(z) = F_{jj}(n_j)z^{n_j-1} + \cdots + F_{jj}(2)z + F_{jj}(1) \tag{3.6-11}$$

Cada uno de estos polinomios asigna los n_j valores propios correspondientes a los estados asociados con la salida j -ésima. Conociendo los lugares deseados para dichos

3.6 Estimación de los estados

valores propios se podrán obtener estos polinomios y por tanto los coeficientes $F_{1j}(k, j)$; $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, n_j$. En particular, si se fija el siguiente polinomio:

$$z^{n_j} + \Gamma_{jj, n_j-1} z^{n_j-1} + \dots + \Gamma_{jj,1} z + \Gamma_{jj,0} \quad (3.6-12)$$

se tiene que¹⁸:

$$F_{jj}(k) = \Gamma_{jj, k-1} - a_{k-1, j} \quad k = 1, 2, \dots, n_j \quad (3.6-13)$$

En un segundo paso se analiza la asignación de los n valores propios de la matriz Γ_2 , repitiendo la metodología empleada para la matriz Γ_1 :

$$\Gamma_2 = I - F_2 \Omega \quad (3.6-14)$$

la matriz Ω posee la siguiente forma, mostrada en **Proposición 3.2.1**:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \Omega_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.6-15)$$

La matriz F_2 también es diagonal¹⁹ ya que cada entrada del ruido sólo afecta a una salida. Como el producto $F_2 \Omega$ va a ser una matriz diagonal la matriz F_2 puede ser incorporada en Ω ²⁰ pues la asignación de los valores propios no se ve afectada, y además se reduce el número de grados de libertad. Por ello, se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que $F_2 = I_n$.

Con esta condición los valores propios de la matriz Γ_2 se asignan en:

$$\gamma_j = 1 - \Omega_{jj} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.6-16)$$

Con la asignación de los polos del observador el diseño de las matrices del modelo del ruido²¹ se puede realizar de una forma sistemática y produce resultados coherentes en el modelo en espacio de estados, y todo ello sin emplear los polinomios de filtrado $T_j(z^{-1})$. Además, con esta asignación de polos las matrices del modelo del ruido que se obtienen son únicas.

¹⁸Es importante destacar, que esta última expresión no es más que la conocida fórmula de Ackermann para la asignación de polos en una realimentación lineal del estado.

¹⁹Por la misma razón que Ω lo es.

²⁰También se podría incorporar Ω en F_2 .

²¹ Ω y Σ

3.6.3. Equivalencia entre el observador y los polinomios de filtrado

De las ecuaciones (3.6-10) y (3.6-16) se deduce que el polinomio característico relativo a la salida j -ésima de la matriz Γ es:

$$(A_j(z) + F'_{jj}(z))(z - (1 - \Omega_{jj})) = \Omega_{jj} (A_j(z) + F'_{jj}(z)) + (z - 1)(A_j(z) + F'_{jj}(z)) \quad (3.6-17)$$

Los polinomios de filtrado $T_j(z^{-1})$ satisfacen la condición de equivalencia **Proposición 3.2.1**:

$$T_j(z^{-1}) = z^{-(n_j+1)} (\Sigma'_{jj}(z) + \Omega_{jj}A_j(z) + (z - 1)A_j(z)) \quad (3.6-18)$$

como en el diseño del observador se aplicó la condición de separación:

$$\Sigma = F_1 \Omega \quad (3.6-19)$$

el polinomio Σ'_{jj} es:

$$\Sigma'_{jj}(z) = F'_{jj}(z)\Omega_{jj} \quad (3.6-20)$$

por tanto, la condición de equivalencia es ahora:

$$T_j(z^{-1}) = z^{-(n_j+1)} (F'_{jj}(z)\Omega_{jj} + \Omega_{jj}A_j(z) + (z - 1)A_j(z)) \quad (3.6-21)$$

$$T_j(z) \triangleq T_j(z^{-1})z^{(n_j+1)} = \Omega_{jj} (F'_{jj}(z) + A_j(z)) + (z - 1)A_j(z) \quad (3.6-22)$$

si se compara esta expresión con (3.6-17) se deduce que para que las raíces del polinomio de filtrado sean los valores propios asociados a la salida j -ésima de la matriz Γ se tiene que cumplir que $F'_{jj}(z) = 0$, lo cual implica que $F_{1j} = \mathbf{0}$ y, por tanto, la matriz Γ_{jj} es igual a A_j . Esta última condición supone que no hay asignación de los valores propios de los estados determinísticos de la salida j -ésima, y por tanto no es posible diseñar el observador.

Sin embargo, (3.6-22) y (3.6-17) son muy parecidas y pueden hacerse equivalentes si se modifica el modelo CARIMA inicial. En este sentido, si se desea que los valores propios asociados a la salida j -ésima de la matriz Γ coincidan con las raíces de T_j es necesario modificar el modelo CARIMA propuesto al principio del capítulo (3.2-5) incorporando la matriz F_1 dentro de la matriz Π :

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{A}\mathbf{x}(k) + \bar{B}\bar{\mathbf{u}}(k) + \Pi\bar{\xi}(k)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \bar{C}\mathbf{x}(k) + \bar{\xi}(k)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & \Sigma_{r \times n} \\ \mathbf{0} & I_n \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} F_{1,r \times n} \\ I_n \end{bmatrix}; \bar{C} = [C \quad \Omega_{n \times n}] \quad (3.6-23)$$

Con este nuevo modelo CARIMA el diseño del observador no se ve alterado ya que la matriz Γ no se modifica al introducir esta matriz.

Para justificar que con esta modificación se consigue la equivalencia antes mencionada se presenta el siguiente resultado relativo a la equivalencia entre el modelo CARIMA E/S y el nuevo en espacio de estados:

Proposición 3.6.1 *Dado el modelo CARIMA E/S (2.2-1) y el nuevo modelo CARIMA en espacio de estados (3.6-23) con la realización de su parte determinística dada por el LEMA 3.2.1 y la condición (3.6-3), ambos representan el mismo modelo si y sólo si:*

$$T_j(z^{-1}) = z^{-(n_j+1)} (F'_{jj}(z) + A_j(z)) (z - (1 - \Omega_{jj})) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.6-24)$$

La demostración de esta proposición es muy similar a la presentada en la sección de equivalencia ente modelos CARIMA para la **Proposición 3.2.1**.

Si se compara ahora (3.6-24) con (3.6-17) se observa que las raíces del polinomio de filtrado T_j coinciden con los valores propios asociados a la salida j -ésima de la matriz Γ . A partir de este resultado se pueden formular los siguientes teoremas:

TEOREMA 3.6.1 *Si las matrices del modelo del ruido y la matriz F_1 se diseñan para asignar los polos del observador usando las ecuaciones (3.6-3), (3.6-10) y (3.6-16), y los polinomios de filtrado se eligen empleando la ecuación (3.6-24) a partir de las matrices del ruido y la matriz F_1 diseñadas, entonces las raíces de los polinomios de filtrado coinciden con los polos del observador.*

TEOREMA 3.6.2 *Si las matrices F_1 , y Ω , se calculan empleando unos polinomios de filtrado $T_j(z^{-1})$ prefijados con la ecuación (3.6-24), la matriz Σ se obtiene a partir la condición de separación $\Sigma = F_1 \Omega$ y el observador es diseñado usando tales matrices con la ecuación (3.6-4), entonces los polos del observador coinciden con las raíces de estos polinomios de filtrado.*

Estos resultados son muy importantes ya que:

- Es conocido que los polinomios de filtrado, y en particular sus raíces, proporcionan robustez al controlador. Con el uso del nuevo modelo CARIMA en espacio de estados dicha propiedad es heredada por los polos del observador, por tanto, la robustez del controlador diseñado en espacio de estados reside en la elección de la dinámica de este observador.

- Se podrían usar los polinomios de filtrado, diseñados en aquellas aplicaciones en las cuales ha sido implementado un GPC MIMO E/S, considerando sus raíces como los polos del observador que se podría emplear en la versión en espacio de estados de dicho controlador, para así conseguir las ventajas que se presentan en la formulación en espacio de estados: reducción de complejidad en el diseño y una mayor facilidad para el análisis de las propiedades relacionadas con estabilidad, robustez, restricciones, etc.
- Proporcionan una técnica para justificar si hay coherencia en la elección de los polinomios de filtrado en la versión E/S.

Nota 3.6.1 Cuando se analiza la ecuación de la equivalencia (3.6-24) se deduce que:

- Fijados los polinomios de filtrado $T_j(z^{-1})$ la obtención de las matrices del modelo del ruido, F_1 y Ω , se basa en resolver un sistema de $n_j + 1$ ²² ecuaciones con un total de $n_j + 1$ incógnitas, asociadas a los coeficientes del polinomio $F'_{j,j}$ de grado $n_j - 1$ y al coeficiente $\Omega_{j,j}$. Este problema, conocido como directo, posee, por tanto, solución única.
- El problema inverso, obtener los polinomios de filtrado a partir de las matrices del ruido, también posee solución única a partir de la ecuación de la equivalencia.

Nota 3.6.2 Los resultados de las **Proposiciones 3.2.1** y **3.6.1** indican que modelos distintos en espacio de estados poseen la misma representación externa. La existencia de más de un representación en espacio de estados para un mismo proceso es un aspecto bien conocido en la teoría de sistemas en espacio de estados.

Cuando se dispone de varias alternativas suele preferirse aquella que posea un número mínimo de parámetros a fijar. En este caso, ambas formulaciones requieren el mismo número de parámetros por salida, $n_j + 1$, de ahí que en principio no haya razón objetiva para elegir una u otra. Sin embargo, se ha mostrado que con el nuevo modelo se puede establecer la equivalencia entre las raíces de los polinomios de filtrado y los polos del observador.

Nota 3.6.3 El cambio del modelo CARIMA en espacio de estados no afecta a los desarrollos de las secciones precedentes: predicción de las salidas, índice de coste y la ley de control sin restricciones, ya que se utilizó la matriz Π sin hacer mención alguna a si la matriz F_1 estaba o no presente, ello quiere decir que los resultados obtenidos son válidos sin limitaciones para este nuevo modelo.

²²Ya se hizo incapié en la restricción de que el polinomio de filtrado T_j ha de ser mónico, y en concreto, que posee grado $n_j + 1$

3.6 Estimación de los estados

Para mantener la coherencia en la nomenclatura utilizada, como la matriz F_1 forma parte de la matriz Π se la pasa a denominar Π_1 :

$$\Pi = \begin{bmatrix} F_1 \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ I_n \end{bmatrix} \quad (3.6-25)$$

Con esta nueva denominación la matriz F del observador coincide con Π :

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ I_n \end{bmatrix} = \Pi \quad (3.6-26)$$

A partir de este resultado es posible establecer la dinámica del error de la estimación de los estados del nuevo modelo CARIMA en espacio de estados:

$$\mathbf{e}_o(k) \triangleq \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (3.6-27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_o(k+1) &= \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \\ &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k) + \Pi\bar{\xi}(k) - \bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k) - \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k) - F(\bar{\mathbf{y}}(k) - \bar{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k)) = \\ &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \Pi(\bar{\mathbf{y}}(k) - \bar{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k)) - (\bar{\mathbf{A}} - \Pi\bar{\mathbf{C}})\hat{\mathbf{x}}(k) - \Pi\bar{\mathbf{y}}(k) = \\ \mathbf{e}_o(k+1) &= (\bar{\mathbf{A}} - \Pi\bar{\mathbf{C}})\mathbf{e}_o(k) = \Gamma\mathbf{e}_o(k) \end{aligned} \quad (3.6-28)$$

De la expresión de la evolución del error, se deduce que éste tenderá a cero sea cuál sea el error de estimación inicial $\mathbf{e}_o(0)$, pues en el proceso de diseño del observador a la matriz Γ se le asignaban sus autovalores, para que, entre otras propiedades, fuera estable.

Nota 3.6.4 En principio, cuando no existan discrepancias entre modelo y proceso, y no se presenten perturbaciones y/o ruidos de medida, y por tanto no se considere el análisis sobre la robustez del controlador, la elección habitual para los polos del observador es tal que todos se asignen en el origen. Con ello se consigue garantizar su estabilidad, que su dinámica sea más rápida que la del bucle cerrado y que la estimación del estado converja al valor real en un número finito de periodos de muestreo. Sin embargo, esta situación nunca se da en las aplicaciones reales, de ahí que en próximos capítulos se tengan presentes estos aspectos para seleccionar la ubicación de los polos del observador para garantizar la robustez del controlador.

Otra propiedad del observador de rango completo es que su estimación del estado en el instante $k+1$ a partir de la información disponible en k , coincide con la predicción en $k+1$ del estado realizada por el modelo de predicción (3.3-11) a partir de la información disponible en k . En efecto, partiendo del nuevo modelo CARIMA (3.6-23), la predicción en el instante $k+1$ del estado es:

$$\mathbf{x}(k+1|k) = \bar{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) + \Pi\bar{\xi}(k)$$

las entradas del ruido $\xi(k)$ se estiman a partir de la medida de la salidas $y(k)$ y del estado observado $\hat{x}(k)$ usando la ecuación de salida del modelo CARIMA:

$$\xi(k) = y(k) - \tilde{C} \hat{x}(k)$$

con lo que:

$$x(k+1|k) = (\tilde{A} - \Pi\tilde{C}) \hat{x}(k) + \tilde{B} u(k) + \Pi y(k) \quad (3.6-29)$$

Esta predicción coincide con la estimación del estado en $k+1$ (3.6-1) si y sólo si:

$$F = \Pi$$

lo cual ya se ha comprobado que es cierto (3.6-26).

Esta propiedad es interesante, ya que con este observador no hay error entre la predicción y la estimación el estado a un paso vista, lo cual no se cumple, en general, con cualquier observador, sólo con este. Sin embargo, aunque coincidan (estimación y predicción) pueden ser erróneas con respecto a los verdaderos valores de las variables de estado del proceso real.

Si se compara la estimación y la predicción del estado para instantes posteriores al $k+1$ entonces ya no hay coincidencia, pues el observador utiliza las medidas de la salida hasta un instante anterior, mientras que el modelo de predicción sólo emplea la medida de la salida en el instante k .

3.7. Representación en espacio de estados del bucle cerrado

El objetivo de esta sección es obtener la representación en espacio de estados del bucle cerrado del proceso más el controlador GPC MIMO para el caso sin restricciones. Durante las manipulaciones algebraicas se emplearán la ley de control sin restricciones y con horizonte móvil (3.5-7) y el observador (3.6-1):

$$x_u(k+1) = (I - \sigma O) x_u(k) + (I - \sigma O) \begin{bmatrix} -\sigma M & \sigma & -\sigma P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ \hat{\omega}(k) \\ \hat{y}(k) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}(k) = I x_u(k) + \begin{bmatrix} -\sigma M & \sigma & -\sigma P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ \hat{\omega}(k) \\ \hat{y}(k) \end{pmatrix} \quad (3.7-1)$$

$$\hat{x}(k+1) = [\tilde{A} - \Pi\tilde{C}] \hat{x}(k) + \tilde{B} \tilde{u}(k) + \Pi \hat{y}(k) \quad (3.7-2)$$

3.7 Representación en espacio de estados del bucle cerrado

como los estados del modelo CARIMA son observados, entonces en la ecuación de la ley de control hay que sustituir $\mathbf{x}(k)$ por $\hat{\mathbf{x}}(k)$.

El proceso real viene dado por el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(k+1) &= A^* \bar{\mathbf{x}}(k) + B^*(\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{d}_u(k)) + \mathbf{d}_x(k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) &= C^* \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{d}_y(k)\end{aligned}\quad (3.7-3)$$

A^* , B^* y C^* son las matrices de la representación interna del proceso real, y se suponen diferentes a A , B y C . \mathbf{d}_x , \mathbf{d}_y y \mathbf{d}_u son, respectivamente, perturbaciones aditivas al estado, a la salida y a la entrada del proceso real.

Para obtener la representación en espacio de estados las ecuaciones de estado del observador y de la ley de control deben depender exclusivamente de sus estados y de las referencias. Para realizar tal transformación todas las señales internas al bucle de control deben ser sustituidas: acciones de control y salidas.

En primer lugar se modifica la ecuación del observador (3.7-2):

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = [\bar{A} - \Pi \bar{C}] \hat{\mathbf{x}}(k) + \bar{B} \bar{\mathbf{u}}(k) + \Pi \bar{\mathbf{y}}(k)$$

Las acciones de control se sustituyen empleando la ecuación (3.7-1):

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= [\bar{A} - \Pi \bar{C}] \hat{\mathbf{x}}(k) + \bar{B} [\mathbf{x}_u(k) - \sigma M \hat{\mathbf{x}}(k) + \sigma \hat{\omega}(k) - \sigma P \bar{\mathbf{y}}(k)] + \Pi \bar{\mathbf{y}}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= [\bar{A} - \Pi \bar{C} - \bar{B} \sigma M] \hat{\mathbf{x}}(k) + \bar{B} \mathbf{x}_u(k) + \bar{B} \sigma \hat{\omega}(k) + (\Pi - \bar{B} \sigma P) \bar{\mathbf{y}}(k)\end{aligned}$$

Finalmente las salidas se sustituyen utilizando el modelo del proceso real (3.7-3):

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= [\bar{A} - \Pi \bar{C} - \bar{B} \sigma M] \hat{\mathbf{x}}(k) + \bar{B} \mathbf{x}_u(k) + \\ &+ (\Pi - \bar{B} \sigma P) C^* \bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{B} \sigma \hat{\omega}(k) + (\Pi - \bar{B} \sigma P) \mathbf{d}_y(k)\end{aligned}\quad (3.7-4)$$

El mismo procedimiento se utiliza con la ley de control del GPC MIMO (3.7-1):

$$\mathbf{x}_u(k+1) = (I - \sigma O) \mathbf{x}_u(k) - (I - \sigma O) \sigma M \hat{\mathbf{x}}(k) - (I - \sigma O) \sigma P \bar{\mathbf{y}}(k) + (I - \sigma O) \sigma \hat{\omega}(k)$$

las salidas se sustituyen empleando la ecuación (3.7-3):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(k+1) &= (I - \sigma O) \mathbf{x}_u(k) - (I - \sigma O) \sigma M \hat{\mathbf{x}}(k) - \\ &- (I - \sigma O) \sigma P C^* \bar{\mathbf{x}}(k) + (I - \sigma O) \sigma \hat{\omega}(k) - (I - \sigma O) \sigma P \mathbf{d}_y(k)\end{aligned}\quad (3.7-5)$$

Aplicando nuevamente esta metodología a la ecuación de estado del proceso real (3.7-3), se obtiene que:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(k+1) &= [A^* - B^* \sigma P C^*] \bar{\mathbf{x}}(k) - B^* \sigma M \hat{\mathbf{x}}(k) + \\ &+ B^* \mathbf{x}_u(k) + B^* \sigma \hat{\omega}(k) - B^* \sigma P \mathbf{d}_y(k) + B^* \mathbf{d}_u(k) + \mathbf{d}_x(k)\end{aligned}\quad (3.7-6)$$

Combinando las ecuaciones (3.7-4), (3.7-5) y (3.7-6) se obtiene la representación en espacio de estados del bucle cerrado:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ \mathbf{x}_u(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* - \mathbf{B}^* \sigma \mathbf{P} \mathbf{C}^* & -\mathbf{B}^* \sigma \mathbf{M} & \mathbf{B}^* \\ (\boldsymbol{\Pi} - \bar{\mathbf{B}} \sigma \mathbf{P}) \mathbf{C}^* & \bar{\mathbf{A}} - \boldsymbol{\Pi} \bar{\mathbf{C}} - \bar{\mathbf{B}} \sigma \mathbf{M} & \bar{\mathbf{B}} \\ -(\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \sigma \mathbf{P} \mathbf{C}^* & -(\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \sigma \mathbf{M} & \mathbf{I} - \sigma \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{x}_u(k) \end{pmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \mathbf{B}^* \sigma & -\mathbf{B}^* \sigma \mathbf{P} & \mathbf{B}^* & \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{B}} \sigma & \boldsymbol{\Pi} - \bar{\mathbf{B}} \sigma \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \sigma & -(\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \sigma \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}}(k) \\ \mathbf{d}_y(k) \\ \mathbf{d}_u(k) \\ \mathbf{d}_x(k) \end{pmatrix} \\
 \bar{\mathbf{y}}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{x}_u(k) \end{pmatrix} + \mathbf{d}_y(k) \tag{3.7-7}
 \end{aligned}$$

Con esta representación es posible simular el comportamiento del bucle cerrado con el controlador GPC MIMO. Además, se pueden obtener los polos del bucle cerrado a partir de los valores propios de la matriz de estado correspondiente a esta representación.

3.8. Presencia de restricciones

3.8.1. Planteamiento del problema de minimización

En la sección 2.3 se presentó el problema de la presencia de restricciones sobre las variables manipuladas y/o sobre las salidas para el caso E/S, a la hora de obtener las acciones de control. En particular, se destacó la dificultad asociada a su resolución mediante métodos analíticos²³, y se planteó la alternativa del uso de un método de optimización numérico para su solución. En concreto, a lo largo de la tesis se empleará la programación cuadrática (QP) pues se trata de un algoritmo muy eficiente para la minimización de índices cuadráticos sujetos a restricciones lineales²⁴.

3.8.2. Restricciones duras

Como ya se comentó en la sección 2.3, las restricciones duras que usualmente se presentan en control son:

²³Empleo de los multiplicadores de Lagrange con las condiciones de Kuhn-Tucker

²⁴El índice de coste del GPC es cuadrático y, como se verá más adelante, las restricciones impuestas son lineales

3.8 Presencia de restricciones

- Limitación en las acciones de control:

$$u_j^{min} \leq u_j(k) \leq u_j^{max} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.8-1)$$

- Limitación en los incrementos de las acciones de control:

$$\Delta u_j^{min} \leq u_j(k) - u_j(k-1) \leq \Delta u_j^{max} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.8-2)$$

- Limitación en las salidas del proceso:

$$y_j^{min} \leq y_j(k) \leq y_j^{max} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.8-3)$$

Para el diseño del controlador hay que expresar estas restricciones de desigualdad exclusivamente en función del vector de incrementos de las acciones de control, puesto que ésta es la variable de la que depende el índice de coste del GPC. En general, la expresión que presentan las restricciones duras formuladas en función del vector de incrementos de las acciones de control es:

$$C \Delta \hat{u}(k) \leq b(k) \quad (3.8-4)$$

siendo $b(k)$ una función vectorial del instante de muestreo, con un número de filas coincidentes con el de C .

A continuación se detalla la adaptación de los tipos de restricciones antes presentados a la forma en que éstos han de estar para poder resolver la minimización del índice de coste:

- Limitación en las acciones de control:

$$u_j^{min} \leq u_j(k) \leq u_j^{max} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.8-5)$$

Para obtener una expresión que dependa exclusivamente de los incrementos de las acciones de control se deben realizar algunas manipulaciones. Restando $u_j(k-1)$ en todos los miembros de la ecuación (3.8-5):

$$\begin{aligned} u_j^{min} - u_j(k-1) &\leq u_j(k) - u_j(k-1) \leq u_j^{max} - u_j(k-1) \\ u_j^{min} - u_j(k-1) &\leq \Delta u_j(k) \leq u_j^{max} - u_j(k-1) \end{aligned}$$

Estas desigualdades son equivalentes a estas otras:

$$\Delta u_j(k) \leq u_j^{max} - u_j(k-1) \quad (3.8-6)$$

$$-\Delta u_j(k) \leq -u_j^{min} + u_j(k-1) \quad (3.8-7)$$

Para el instante $k+1$ se realizan las siguientes manipulaciones:

$$u_j^{min} \leq u_j(k+1) \leq u_j^{max}$$

$$\begin{aligned}
 u_j^{min} - u_j(k-1) &\leq u_j(k+1) - u_j(k-1) \leq u_j^{max} - u_j(k-1) \\
 u_j^{min} - u_j(k-1) &\leq u_j(k+1) - u_j(k) + u_j(k) - u_j(k-1) \leq u_j^{max} - u_j(k-1) \\
 u_j^{min} - u_j(k-1) &\leq \Delta u_j(k+1) + \Delta u_j(k) \leq u_j^{max} - u_j(k-1) \quad (3.8-8)
 \end{aligned}$$

Estas desigualdades son equivalentes a estas otras:

$$\Delta u_j(k+1) + \Delta u_j(k) \leq u_j^{max} - u_j(k-1) \quad (3.8-9)$$

$$-\Delta u_j(k+1) - \Delta u_j(k) \leq -u_j^{min} + u_j(k-1) \quad (3.8-10)$$

En general para el instante $k+i$ se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\Delta u_j(k+i) + \Delta u_j(k+i-1) + \dots + \Delta u_j(k) \leq u_j^{max} - u_j(k-1) \quad (3.8-11)$$

$$-\Delta u_j(k+i) - \Delta u_j(k+i-1) - \dots - \Delta u_j(k) \leq -u_j^{min} + u_j(k-1) \quad (3.8-12)$$

Finalmente las expresiones para C y $b(k)$ son:

$$C = \begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \\ I_m & I_m & \mathbf{0}_{m \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \\ I_m & I_m & I_m & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_m & I_m & I_m & \cdots & I_m \\ -I_m & \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \\ -I_m & -I_m & \mathbf{0}_{m \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \\ -I_m & -I_m & -I_m & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -I_m & -I_m & -I_m & \cdots & -I_m \end{bmatrix}_{2N_u \cdot m \times N_u \cdot m} \quad (3.8-13)$$

$$b(k) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} I_m \\ I_m \\ \vdots \\ I_m \end{pmatrix}_{N_u \cdot m \times m} \begin{Bmatrix} u_1^{max} - u_1(k-1) \\ u_2^{max} - u_2(k-1) \\ \vdots \\ u_m^{max} - u_m(k-1) \end{Bmatrix} \\ \begin{pmatrix} I_m \\ I_m \\ \vdots \\ I_m \end{pmatrix}_{N_u \cdot m \times m} \begin{Bmatrix} -u_1^{min} + u_1(k-1) \\ -u_2^{min} + u_2(k-1) \\ \vdots \\ -u_m^{min} + u_m(k-1) \end{Bmatrix} \end{bmatrix}_{2N_u \cdot m \times 1} \quad (3.8-14)$$

■ Limitación de los incrementos de las acciones de control:

$$\Delta u_j^{min} \leq u_j(k) - u_j(k-1) \leq \Delta u_j^{max} \quad \forall j = 1, 2, \dots, m \quad (3.8-15)$$

3.8 Presencia de restricciones

Estas restricciones dependen exclusivamente de los incrementos de las acciones de control, y por tanto no es necesario realizar manipulación algebraica alguna. En este tipo la función vectorial $\mathbf{b}(k)$ es una meras constante:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_u \cdot m} \\ -\mathbf{I}_{N_u \cdot m} \end{bmatrix} \quad (3.8-16)$$

$$\mathbf{b}(k) = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{I}_m \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m \end{pmatrix}_{N_u \cdot m \times m} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta u_1^{max} \\ \Delta u_2^{max} \\ \vdots \\ \Delta u_m^{max} \end{Bmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{I}_m \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m \end{pmatrix}_{N_u \cdot m \times m} \cdot \begin{Bmatrix} -\Delta u_1^{min} \\ -\Delta u_2^{min} \\ \vdots \\ -\Delta u_m^{min} \end{Bmatrix} \end{bmatrix}_{2N_u \cdot m \times 1} \quad (3.8-17)$$

- Limitación en las salidas del proceso:

$$y_j^{min} \leq y_j(k) \leq y_j^{max} \quad (3.8-18)$$

Para este tipo es necesario aplicar la ecuación para la predicción de las salidas (3.3-11), para poder expresar las restricciones en términos de los incrementos de las acciones de control:

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{O}\hat{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}(k) \quad (3.8-19)$$

Partiendo de la ecuación (3.8-18):

$$y_j^{min} \leq y_j(k) \leq y_j^{max} \quad (3.8-20)$$

Esta expresión se puede extender a todas las salidas con la siguiente ecuación matricial, donde las desigualdades se verifican componente a componente:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} y_1^{min} \\ \vdots \\ y_n^{min} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{Y}^{min}} \leq \bar{\mathbf{y}}(k) \leq \underbrace{\begin{Bmatrix} y_1^{max} \\ \vdots \\ y_n^{max} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{Y}^{max}} \quad (3.8-21)$$

Ahora se puede extender a todos los valores del horizonte de predicción:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \\ \vdots \\ \mathbf{I}_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Y}^{min} \leq \hat{\mathbf{y}}(k) \leq \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \\ \vdots \\ \mathbf{I}_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Y}^{max} \quad ; \quad \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{(N_2 - N_1 + 1) \cdot n \times n} \quad (3.8-22)$$

Utilizando la ecuación (3.8-19):

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}^{\min} \leq \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{O}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}(k) \leq \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}^{\max} \quad (3.8-23)$$

Estas desigualdades son equivalentes a las siguientes:

$$\mathbf{N}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) \leq \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}^{\max} - \mathbf{M}\mathbf{x}(k) - \mathbf{O}\bar{\mathbf{u}}(k-1) - \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}(k) \quad (3.8-24)$$

$$-\mathbf{N}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) \leq -\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}^{\min} + \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{O}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}(k) \quad (3.8-25)$$

Finalmente se obtiene que:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ -\mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (3.8-26)$$

$$\mathbf{b}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}^{\max} - \mathbf{M}\mathbf{x}(k) - \mathbf{O}\bar{\mathbf{u}}(k-1) - \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}(k) \\ -\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}^{\min} + \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{O}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}(k) \end{pmatrix} \quad (3.8-27)$$

Adicionalmente, podrían considerarse restricciones de igualdad sobre las variables manipuladas y/o sobre las salidas. En general, siguiendo el procedimiento descrito para los casos anteriores, las restricciones de igualdad tendrían la forma:

$$\mathbf{D}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{e}(k) \quad (3.8-28)$$

siendo $\mathbf{e}(k)$ una función vectorial del instante de muestreo, con un número de filas coincidentes con el de \mathbf{D} .

Una vez que las restricciones están en la forma antes descrita, para la obtención de las acciones de control del GPC MIMO formulado en espacio de estados, es necesario resolver el problema de minimización del índice de coste cuadrático dado por (3.4-6), sujeto al modelo de predicción (3.3-11) y a las restricciones duras impuestas sobre las entradas y/o salidas:

$$\text{Minimizar: } J_k(\Delta\hat{\mathbf{u}}(k)) = (\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k))^T \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k)) + \Delta\hat{\mathbf{u}}^T(k) \mathbf{R} \Delta\hat{\mathbf{u}}(k)$$

sujeto al modelo de predicción:

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{O}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\bar{\mathbf{y}}(k) \quad (3.8-29)$$

y a las restricciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) &\leq \mathbf{b}(k) \\ \mathbf{D}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) &= \mathbf{e}(k) \end{aligned} \quad (3.8-30)$$

Proposición 3.8.1 (Unicidad de la solución de la minimización con restricciones) Si las matrices \mathbf{Q}_i son definidas positivas, las matrices \mathbf{R}_i son semidefinidas positivas, la matriz \mathbf{N} posee rango completo de columnas y el conjunto definido por la restricciones es no vacío entonces el problema de minimización con restricciones tiene un único mínimo.

Demostración: Si el conjunto definido por las restricciones es no vacío entonces el problema de minimización posee solución. Para garantizar además que la solución es única, es decir, es un mínimo global, el índice de coste tiene que ser una función estrictamente convexa y el conjunto definido por las restricciones ha de ser convexo. Como las restricciones son lineales entonces se verifica que el conjunto que definen es convexo. El índice de coste es estrictamente convexo si y sólo si la matriz $N^T \bar{Q}N + R$ es definida positiva. Este hecho se deriva de la expresión de índice de coste dada por la ecuación:

$$\begin{aligned} J_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)) &= (\hat{\mathbf{e}}_c(k) + N\Delta \hat{\mathbf{u}}(k))^T \bar{Q} (\hat{\mathbf{e}}_c(k) + N\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)) + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T(k) \bar{R} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = \\ &= \hat{\mathbf{e}}_c^T(k) \bar{Q} \hat{\mathbf{e}}_c(k) + 2\hat{\mathbf{e}}_c^T(k) \bar{Q} N \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T(k) (N^T \bar{Q} N + \bar{R}) \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) \end{aligned} \quad (3.8-31)$$

El error de la respuesta libre o bajo acción de control constante viene dado por:

$$\hat{\mathbf{e}}_c(k) = \hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k) - N\Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{O}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\bar{\xi}(k) - \hat{\omega}(k) \quad (3.8-32)$$

en la **Proposición 3.5.1** se establece que si las matrices \mathbf{Q}_i son definidas positivas, las matrices \mathbf{R}_i son semidefinidas positivas y la matriz N posee rango completo de columnas entonces $N^T \bar{Q}N + R$ es definida positiva. ■

Nota 3.8.1 Es importante apreciar que las condiciones de existencia y unicidad de los problemas de minimización para la obtención de las acciones de control sin y con restricciones, si exceptuamos el requerimiento de que el conjunto de las restricciones sea no vacío²⁵, son las mismas: N ha de tener rango completo de columnas, Q ha de ser definida positiva y R ha de ser semidefinida positiva.

3.8.3. Restricciones blandas

Como ya se analizó en la sección 2.3, las restricciones blandas sólo se aplican sobre las limitaciones en los valores de las salidas, ya que son las únicas que pueden dar lugar a que el problema de minimización sea no resoluble. Introduciendo las variables de holgura para el GPC formulado en espacio de estados, ϵ , el problema de minimización cuando hay presentes restricciones blandas sobre las salidas puede formularse como sigue:

Minimizar:

$$J'_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k), \epsilon) = (\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k))^T \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k)) + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T(k) \mathbf{R} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) + \epsilon^T \mathbf{T} \epsilon + \mathbf{k}_\epsilon^T \epsilon$$

²⁵Lo cual es obvio

sujeto al modelo de predicción (3.8-29) y a:

$$\begin{cases} \hat{y}(k)^{26} \leq Z \cdot Y^{max} + \epsilon_1 \\ Z \cdot Y^{min} - \epsilon_2 \leq \hat{y}(k) \\ \epsilon_1 \geq 0 \\ \epsilon_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.8-33)$$

con:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix} \quad (3.8-34)$$

T es una matriz simétrica definida positiva y k_e es una matriz columna.

Nota 3.8.2 Desde el punto de vista de la formulación de las restricciones no hay diferencia entre los controladores diseñados en E/S y en espacio de estados.

Nota 3.8.3 Las restricciones blandas, por definición, nunca producen que el problema de minimización sea no resoluble. Por ello, las condiciones de existencia y unicidad para el problema de minimización cuando se consideran restricciones blandas son las mismas que para el caso de las restricciones duras pero con la condición adicional de que T sea definida positiva.

3.9. Comparación entre el GPC MIMO E/S y el GPC MIMO en espacio de estados

3.9.1. Comparativa de la memoria que requieren

Como consecuencia de la comparación entre los modelos de predicción de ambos diseños (sección 3.3.2), parece que el diseño E/S va a requerir una mayor cantidad de memoria para almacenar la información empleada para la predicción. Por ello, se va a realizar un análisis comparativo de la cantidad de información a almacenar en ambas formulaciones:

- En la formulación de espacio de estados se requieren las siguientes variables: vector de acciones de control \bar{u} con m elementos en el instante $k - 1$, vector de salidas \bar{y} con n elementos en el instante k , el vector de estado x con $\left(\sum_{j=1}^n n_j\right) + n$ elementos en el instante k y el vector de incrementos de las acciones de control $\Delta \hat{u}$ con $N_u \cdot m$ elementos.

²⁶Las correspondientes restricciones duras se muestran en (3.8-22).

3.9 Comparación entre el GPC MIMO E/S y el GPC MIMO en espacio de estados

Por tanto, en cada periodo de muestreo la cantidad de información que se requiere almacenar es:

$$\text{Memoria}_{EE} = m + 2n + N_u \cdot m + \sum_{j=1}^n n_j \quad (3.9-1)$$

- En la formulación E/S el análisis es bastante más complejo debido a que es necesario disponer de las salidas y de los incrementos de las acciones de control pasados y filtrados además por los T_j . Para simplificar el análisis se obtendrá una cota inferior para la cantidad de información necesaria. Dicha cota inferior se puede obtener suponiendo que todos los T_j son constantes²⁷, puesto que si no fueran constantes podría necesitarse más cantidad de información para poder realizar el filtrado de las señales antes indicadas en cada instante de muestreo.

Si los T_j son constantes, entonces en la ecuación de predicción E/S se pueden sustituir las señales filtradas por sus correspondientes sin filtrar, y en primera instancia se requeriría el almacenamiento de dichas señales cuyas dimensiones están relacionadas con las dimensiones de las matrices Γ (2.2-13) y F (2.2-14). El vector de salidas filtradas, \bar{y}^f , en cada instante se puede actualizar a partir de la salida medida en ese mismo instante, sin embargo, el vector de incrementos de las entradas filtradas, $\Delta \bar{u}^f$, se actualiza empleando la última y la penúltima acciones de control aplicadas, siendo por tanto necesario almacenar además la penúltima acción de control que posee dimensión m . Además, se requiere el vector de incrementos de las acciones de control $\Delta \bar{u}$ con $N_u \cdot m$ elementos. En estas condiciones la cantidad de información a almacenar es:

$$\begin{aligned} \text{Memoria}_{E/S} &\geq m + N_u \cdot m + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \max(|\text{grado}(A_j)| + 1, |\text{grado}(T_j)|) = \\ &= m + N_u \cdot m + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) + \sum_{j=1}^n (|\text{grado}(A_j)| + 1) = \\ &= m + N_u \cdot m + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) + n + \sum_{j=1}^n n_j^{28} \quad (3.9-2) \end{aligned}$$

Como se aprecia, en el caso E/S la cantidad de información que se requiere almacenar depende de más variables que en el caso de espacio de estados, en particular depende del grado de los polinomios B_{ji} .

²⁷O sea que $\text{grado}(T_j) = 0$

²⁸El grado de los polinomios A_j es igual a n_j , el número de estados asociados a la salida j -ésima en la realización de la parte determinística del modelo CARIMA en espacio de estados (3.2-9)

Para simplificar aún más la comparación, se propone obtener una menor cota inferior para la cantidad de información necesaria en el caso E/S. La ecuación (3.9-2) toma su valor mínimo cuando el grado de los polinomios B_{ji} es -1 o -2 . En tal caso se tiene que:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m 1 = n \cdot m \quad (3.9-3)$$

Entonces:

$$\text{Memoria}_{E/S} \geq m + N_u \cdot m + n \cdot m + n + \sum_{j=1}^n n_j \quad (3.9-4)$$

Comparando las ecuaciones (3.9-1) y (3.9-4) se deduce que:

$$\text{Memoria}_{E/S} - \text{Memoria}_{EE} \geq n \cdot m - n = n(m - 1) \geq 0 \quad \text{si } n \geq 1; m \geq 1 \quad (3.9-5)$$

Nota 3.9.1 En particular, ambas formulaciones requieren la misma cantidad de información si el número de entradas es igual a uno, el grado de los polinomios B_{ji} es -1 o -2 y el grado de los polinomios de filtrado T_j es 0.

La ecuación (3.9-5) muestra que si se tiene un sistema multivariable con más de una entrada entonces seguro que la formulación en espacio de estados requiere menos memoria. Además, la diferencia entre ambas formulaciones aumenta cuando el grado de los polinomios de filtrado es, en valor absoluto, mayor que 0, y/o cuando el grado de alguno de los polinomios B_{ji} es, en valor absoluto, mayor que 2.

EJEMPLO 3.9.1 Se van a presentar cuatro casos distintos que tratarán de mostrar las discrepancias entre la memoria requerida para la formulación en espacio de estados (3.9-1) y la cota inferior de memoria requerida para la formulación E/S (3.9-2). En todos los casos se tomará $N_u = 1$.

Caso 1. Supóngase que se tiene un conjunto de procesos cuyas dimensiones son: $n = 2$, $m = 2$, $\sum n_j = 20$, y que los polinomios B_{ji} correspondientes a cada uno ellos presentan un grado variable comprendido entre 1 y 10. En la figura 3.1 se ha representado la memoria requerida para ambas formulaciones en función del grado que presentan los polinomios B_{ji} . Como se aprecia, este factor no afecta a la formulación en espacio de estados, sin embargo, da lugar a una variación lineal para el caso E/S.

Caso 2. Supóngase ahora que se tiene un conjunto de procesos cuyas dimensiones son: $m = 2$, $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$, su número de salidas varía entre 1 y 10 y por cada salida que posee el proceso el término $\sum n_j$ se incrementa en 2. En la figura 3.2 se ha representado la memoria requerida para ambas formulaciones en función del número de salidas del proceso. Se observa que para ambas formulaciones se produce un incremento lineal, aunque con menor pendiente para el caso de la formulación en espacio de estados.

3.9 Comparación entre el GPC MIMO E/S y el GPC MIMO en espacio de estados

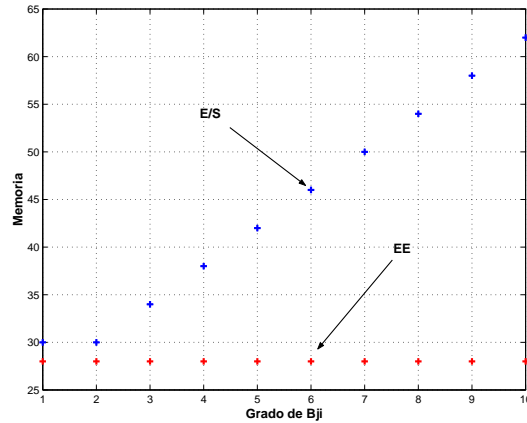


FIGURA 3.1: Memoria que requieren ambas formulaciones cuando $m = 2$, $n = 2$, $\sum n_j = 20$, y el grado de los B_{ji} varía entre 1 y 10

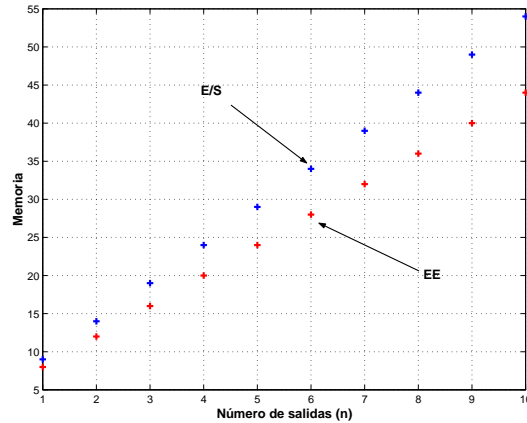


FIGURA 3.2: Memoria que requieren ambas formulaciones cuando $m = 2$, $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$ y n varía entre 1 y 10

Caso 3. En este caso se supone que los procesos poseen las dimensiones: $n = 2$, $\sum n_j = 4$, $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$, y su número de entradas varía entre 1 y 10. En la figura 3.3 se ha representado la memoria requerida para ambas formulaciones en función del número de entradas del proceso. Se aprecia un resultado muy similar al del caso anterior.

Caso 4. Se aplican de forma simultánea las dimensiones de los dos casos anteriores: $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$, m y n varían entre 1 y 10, aunque con la condición de que sean iguales, y por cada salida que posee el proceso el término $\sum n_j$ se incrementa en 2. En la figura 3.4 se ha representado la memoria requerida para ambas formulaciones en función del número de salidas del proceso. En esta figura se observa que el incremento de memoria para la formulación E/S es cuadrático mientras que para la formulación en espacio de estados es lineal.

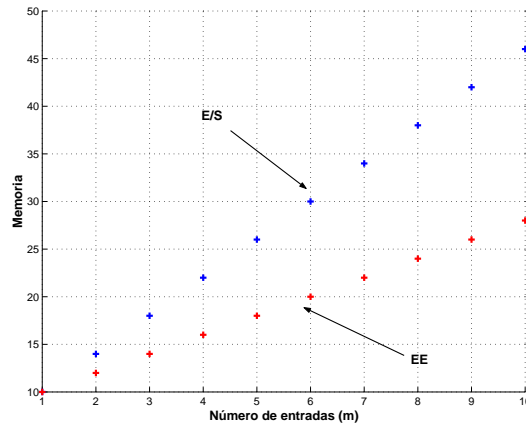


FIGURA 3.3: Memoria que requieren ambas formulaciones cuando $n = 2$, $\sum n_j = 4$, $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$, y m varía entre 1 y 10

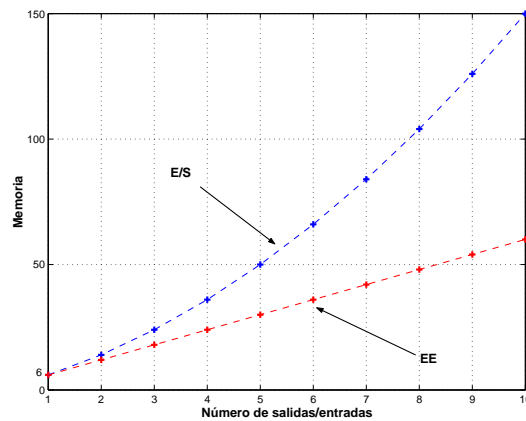


FIGURA 3.4: Memoria que requieren ambas formulaciones cuando $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$ y m y n varían entre 1 y 10, con la restricción de que sean iguales

3.9.2. Estimación comparativa del tiempo de cálculo de la acción de control

Resulta muy interesante comparar el tiempo que requiere cada formulación para obtener las acciones de control a aplicar al proceso real en cada instante de muestreo. Este tiempo será estimado en base a determinar el número de operaciones de multiplicación y de suma que han de ser realizadas hasta obtener las acciones de control.

Comparando el diseño del GPC en ambas formulaciones, se puede apreciar que las diferencias que existen entre ellas son:

- En la formulación E/S es necesario calcular el vector de salidas filtradas y el vector de incrementos de acciones de control filtradas.
- En la formulación de espacio de estados es necesario estimar el vector de estados empleando el observador de rango completo.

3.9 Comparación entre el GPC MIMO E/S y el GPC MIMO en espacio de estados

- Las ecuaciones de predicción de las salidas son diferentes.

Sin embargo, sus índices de coste cuadráticos son equivalentes, también sus restricciones son equivalentes y la metodología para la obtención de las acciones de control es además la misma. Consecuentemente, sólo se estimará el número de operaciones correspondiente a los elementos del diseño en que difieren.

En primer lugar se requiere un lema para poder calcular el número de operaciones de multiplicación (o producto) y de suma de números reales, que se requieren para realizar el producto de dos matrices:

LEMA 3.9.1 *Dadas dos matrices reales $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times s}$, para poder obtener su producto matricial $C = AB$, se requiere el siguiente número de operaciones:*

$$\text{Numero de productos} = m \cdot n \cdot s \quad (3.9-6)$$

$$\text{Número de sumas} = m \cdot (n - 1) \cdot s \quad (3.9-7)$$

La demostración de este lema es trivial.

Proposición 3.9.1 *El número de operaciones de multiplicación (o productos) y de suma requeridas para estimar los estados y para predecir las salidas en la formulación de espacio de estados es:*

$$\begin{aligned} \text{Número de productos} = & (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + N_u \cdot m + m + n \right] + \\ & + \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + m + n \right] \end{aligned} \quad (3.9-8)$$

$$\begin{aligned} \text{Número de sumas} = & (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + N_u \cdot m + m + n - 1 \right] + \\ & + \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + m + n - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.9-9)$$

La demostración de esta proposición se encuentra en el Apéndice A (Proposición A.1.2).

Proposición 3.9.2 *Si $N_1^j = N_1 \quad j = 1, \dots, n$, $N_2^j = N_2 \quad j = 1, \dots, n^{29}$ y $N_u^i = N_u \quad i = 1, \dots, m^{30}$, el número de productos y de sumas requeridas para obtener las señales filtradas y para predecir las salidas en la formulación E/S es:*

$$\text{Número de productos} = (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[N_u \cdot m + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) + \right.$$

²⁹Todos los horizontes de predicción son iguales

³⁰Todos los horizontes de control son iguales

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^n \max(|\text{grado}(A_j)| + 1, |\text{grado}(T_j)|) \Big] + \\
 & + \sum_{j=1}^n |\text{grado}(T_j)| \cdot (m + 1) \tag{3.9-10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Número de sumas} = & (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[N_u \cdot m + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^n \max(|\text{grado}(A_j)| + 1, |\text{grado}(T_j)|) - 1 \right] + \\
 & + \left(\sum_{j=1}^n |\text{grado}(T_j)| + n \right) \cdot (m + 1) - n \tag{3.9-11}
 \end{aligned}$$

La demostración de esta proposición se encuentra en el Apéndice A (Proposición A.1.3).

Para simplificar la comparación entre ambas formulaciones se va a obtener una cota inferior del número de operaciones para el caso E/S. Dicha cota inferior se obtiene suponiendo que los polinomios de filtrado poseen grado 0 y los polinomios B_{ji} poseen grado -1 o -2 . Con estas condiciones las ecuaciones de la **Proposición** 3.9.2 se transforman en las desigualdades:

$$\text{Nproductos}^{31} \geq (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[N_u \cdot m + n \cdot m + \sum_{j=1}^n n_j + n \right] \tag{3.9-12}$$

$$\text{Nsumas}^{32} \geq (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[N_u \cdot m + n \cdot m + \sum_{j=1}^n n_j + n - 3 \right] + n \cdot m \tag{3.9-13}$$

Realizando ciertas transformaciones:

$$\begin{aligned}
 \text{Nproductos} \geq & (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[N_u \cdot m + n + m + \sum_{j=1}^n n_j + n \right] + \\
 & + (N_2 - N_1 + 1) \cdot n [n \cdot m - (n + m)] \tag{3.9-14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Nsumas} \geq & (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[N_u \cdot m + n + m + \sum_{j=1}^n n_j + n - 4 \right] + \\
 & + (N_2 - N_1 + 1) \cdot n [n \cdot m - (n + m) + 1] + n \cdot m \tag{3.9-15}
 \end{aligned}$$

Comparando estas expresiones con las asociadas a la formulación de espacio de estados (3.9-8) y (3.9-9):

$$\text{Nproductos}_{E/S} - \text{Nproductos}_{EE} \geq (N_2 - N_1 + 1) \cdot n [n \cdot m - (n + m)] -$$

³¹Número de productos

³²Número de sumas

$$- \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + m + n \right] \quad (3.9-16)$$

$$\begin{aligned} N_{\text{sumasE/S}} - N_{\text{sumasEE}} \geq & (N_2 - N_1 + 1) \cdot n [n \cdot m - (n + m) + 1] + m \cdot n - \\ & - \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + m + n - 3 \right] \quad (3.9-17) \end{aligned}$$

Los segundos miembros de estas desigualdades serán mayores o iguales que cero si se verifica que:

1. el término $n \cdot m - (n + m)$ sea mayor o igual que 1. El término $n \cdot m - (n + m)$ es mayor o igual que 1 si y sólo si $n > 2$ y $m > 2$, o si $n = 3$ y $m = 2$, o si $n = 2$ y $m = 3$.
2. $(N_2 - N_1 + 1) \cdot n \geq \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + m + n \right]$

Este análisis proporciona el siguiente resultado:

Proposición 3.9.3 *Bajo las condiciones de la Proposición 3.9.1 y de la Proposición 3.9.2, si $n > 2$ y $m > 2$, o si $n = 3$ y $m = 2$, o si $n = 2$ y $m = 3$, y si $(N_2 - N_1 + 1) \cdot n \geq \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + m + n \right]$ la formulación en espacio de estados requiere un número de operaciones igual o menor que la formulación E/S, es decir, tiene un tiempo de cálculo de las acciones de control igual o menor.*

Nota 3.9.2 *En la proposición anterior se analiza el caso en que $\text{grado}(T_j) = 0$ y $|\text{grado}(B_{ji})| \leq 2$. De ello se desprende, que si el grado de algunos de estos polinomios es mayor, en valor absoluto, entonces el número de operaciones se incrementa en la formulación E/S. Esto se debe a que en dicha proposición se emplea una cota inferior para la formulación E/S.*

Nota 3.9.3 *Para el caso $n \leq 2$ y $m \leq 2$ si el horizonte de predicción $(N_2 - N_1 + 1)$ es mucho mayor que las dimensiones del proceso (n , m o n_j), es fácil deducir que el número de operaciones que requieren ambas formulaciones es aproximadamente el mismo³³, como se puede apreciar comparando las ecuaciones (3.9-8) (3.9-9) y las ecuaciones (3.9-12) (3.9-13). De nuevo, este resultado está supeditado al empleo de una cota inferior para la formulación E/S.*

EJEMPLO 3.9.2 *Se van a presentar cinco casos distintos que tratarán de mostrar las discrepancias entre el número de productos y número de sumas que se requieren para la formulación en espacio de estados (3.9.1) y los que se requieren para la formulación E/S (3.9.2). En todos los casos se tomará $N_u = 1$.*

³³Cuando los grados de los polinomios $B_{r,j}$ sean, en valor absoluto, mayores que 2 y/o los grados de los polinomios de filtrado sean, en valor absoluto, mayores o iguales que 1, puede ocurrir que la representación en espacio de estados requiera un menor número de operaciones

Caso 1. Supóngase que se tiene un conjunto de procesos cuyas dimensiones son: $n = 2$, $m = 2$, $\sum n_j = 20$, que los polinomios B_{ji} correspondientes a cada uno ellos presentan un grado variable comprendido entre 1 y 10 y el horizonte de predicción empleado para el controlador es $N_2 - N_1 + 1 = 100$. En las figuras 3.5 y 3.6 se han representado el número de productos y de sumas, respectivamente, para ambas formulaciones en función del grado que presentan los polinomios B_{ji} . Como se aprecia, este factor no afecta a la formulación en espacio de estados, sin embargo, da lugar a una variación lineal del número de operaciones para el caso E/S.

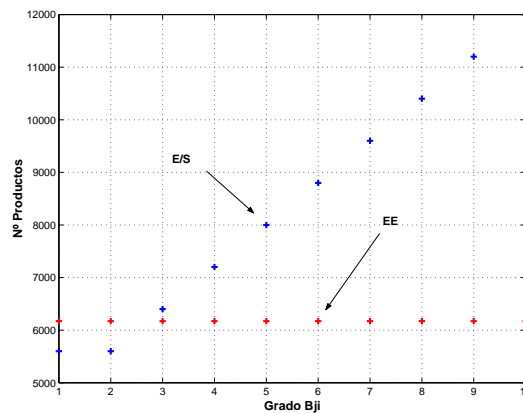


FIGURA 3.5: Número de productos que requieren ambas formulaciones cuando $m = 2$, $n = 2$, $\sum n_j = 20$, y el grado de los B_{ji} varía entre 1 y 10

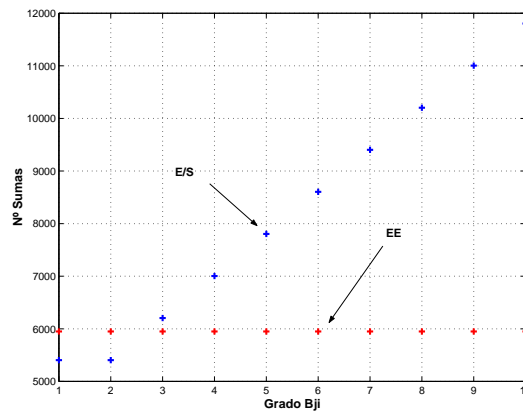


FIGURA 3.6: Número de sumas que requieren ambas formulaciones cuando $m = 2$, $n = 2$, $\sum n_j = 20$, y el grado de los B_{ji} varía entre 1 y 10

Caso 2. Supóngase ahora que se tiene un conjunto de procesos cuyas dimensiones son: $m = 2$, $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$, su número de salidas varía entre 1 y 10 y por cada salida que posee el proceso el término $\sum n_j$ se incrementa en 2. Para el diseño del controlador se asume que $N_2 - N_1 + 1 = 100$. En las figuras 3.7 y 3.8 se han representado el número de productos y de sumas, respectivamente, para ambas formulaciones en función del número de salidas del proceso. Se observa que para ambas formulaciones se

3.9 Comparación entre el GPC MIMO E/S y el GPC MIMO en espacio de estados

produce un incremento exponencial en el número de operaciones, y que para un número de salidas superior a 2 la formulación en espacio de estados requiere menos operaciones.

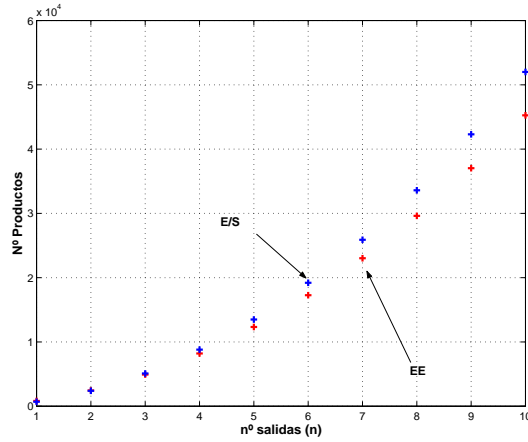


FIGURA 3.7: Número de productos que requieren ambas formulaciones cuando $m = 2$, $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$ y n varía entre 1 y 10

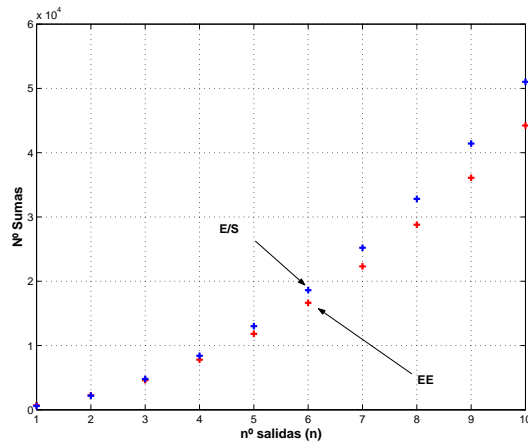


FIGURA 3.8: Número de sumas que requieren ambas formulaciones cuando $m = 2$, $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$ y n varía entre 1 y 10

Caso 3. En este caso se supone que los procesos poseen las dimensiones: $n = 2$, $\sum n_j = 4$, $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$, y su número de entradas varía entre 1 y 10. De nuevo se asume que $N_2 - N_1 + 1 = 100$. En las figuras 3.9 y 3.10 se han representado el número de productos y de sumas, respectivamente, en función del número de entradas del proceso. Se aprecia un incremento lineal del número de operaciones en ambas formulaciones. Además, se aprecia para un número de entradas superior a 2 la formulación en espacio de estados requiere menos operaciones.

Caso 4. Se aplican de forma simultánea las dimensiones de los dos casos anteriores: $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$, m y n varían entre 1 y 10, aunque con la condición de que sean

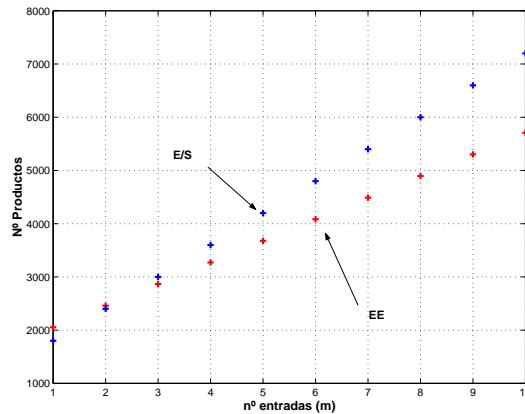


FIGURA 3.9: Número de productos que requieren ambas formulaciones cuando $n = 2$, $\sum n_j = 4$, $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$, y m varía entre 1 y 10

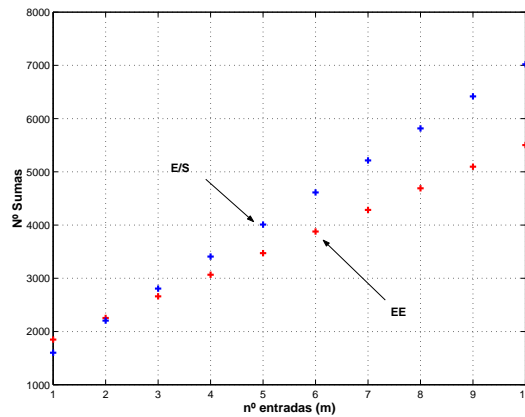


FIGURA 3.10: Número de sumas que requieren ambas formulaciones cuando $n = 2$, $\sum n_j = 4$, $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$, y m varía entre 1 y 10

iguales, y por cada salida que posee el proceso el término $\sum n_j$ se incrementa en 2. En las figuras 3.11 y 3.12 se han representado el número de productos y de sumas, respectivamente, en función del número de salidas del proceso. En esta figura se observa que el incremento en el número de operaciones para ambas formulaciones es exponencial, y que para un número de salidas/entradas superior a 2 la formulación en espacio de estados requiere menor número de operaciones. Es interesante destacar, que en este caso, el crecimiento exponencial para el caso E/S es mucho más rápido que para el caso en espacio de estados, pues cuando la figura 3.11 se representa con escala logarítmica en ambos ejes, figura 3.13, se aprecia una mayor pendiente para el caso E/S.

Caso 5. En este caso se supone que los procesos poseen las dimensiones: $m = 2$, $n = 2$, $\sum n_j = 4$ y $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$, y que el horizonte de predicción varía entre 10 y 100. En las figuras 3.14 y 3.15 se han representado el número de productos y de sumas, respectivamente, en función del número de entradas del proceso. Se observa

3.9 Comparación entre el GPC MIMO E/S y el GPC MIMO en espacio de estados

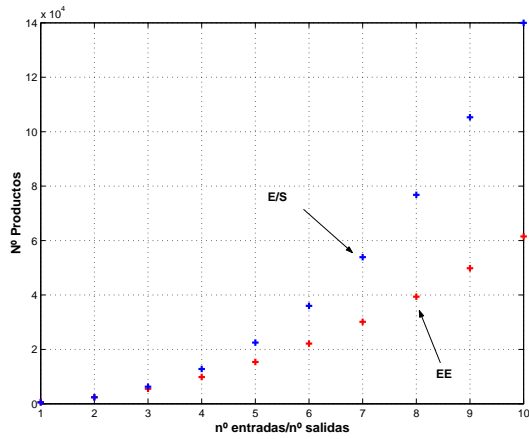


FIGURA 3.11: Número de productos que requieren ambas formulaciones cuando $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$ y m y n varían entre 1 y 10, con la restricción de que sean iguales

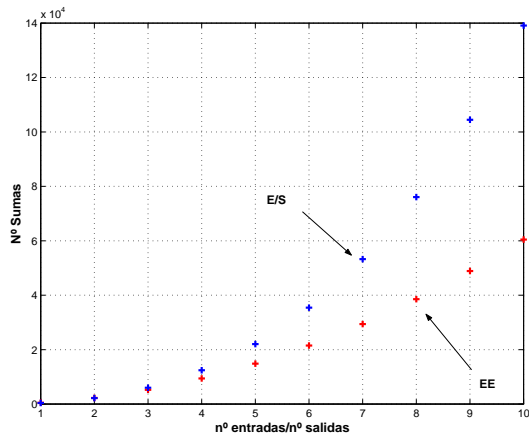


FIGURA 3.12: Número de sumas que requieren ambas formulaciones cuando $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$ y m y n varían entre 1 y 10, con la restricción de que sean iguales

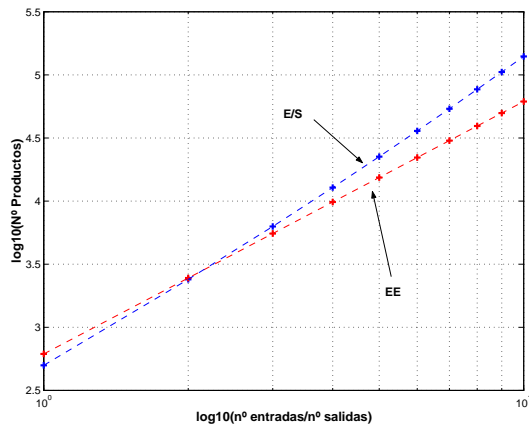


FIGURA 3.13: Número de productos que requieren ambas formulaciones cuando $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$ y m y n varían entre 1 y 10, empleando escalas logarítmicas en ambos ejes

un incremento lineal del número de operaciones con la misma pendiente para ambas formulaciones. Además, en todos los casos la formulación en espacio de estados requiere mayor número de operaciones, aunque éste es muy cercano al de la formulación E/S.

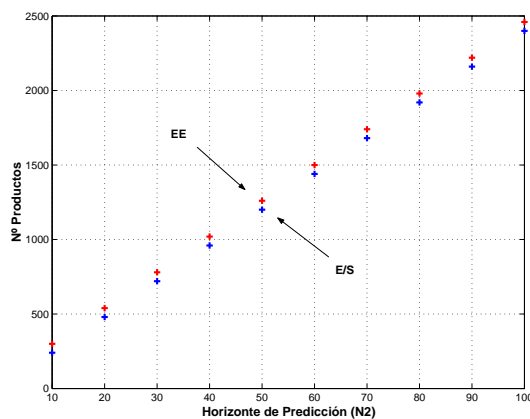


FIGURA 3.14: Número de productos que requieren ambas formulaciones cuando $m = 2$, $n = 2$, $\sum n_j = 4$, $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$, y $N_2 - N_1 + 1$ varía entre 10 y 100

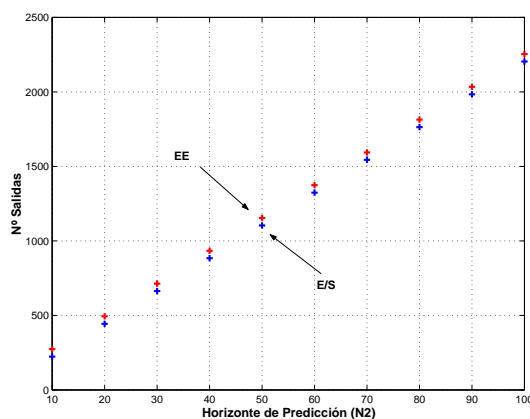


FIGURA 3.15: Número de sumas que requieren ambas formulaciones cuando $m = 2$, $n = 2$, $\sum n_j = 4$, $|\text{grado}(B_{ji})| = 2$, y $N_2 - N_1 + 1$ varía entre 10 y 100

EJEMPLO 3.9.3 Supóngase un proceso con $n = 2$, $m = 1$, $\sum_{j=1}^n n_j = 5$ y un GPC MIMO con $N_2 - N_1 + 1 = 200$ y $N_u = 2$. El número de operaciones es:

- **Formulación en espacio de estados:**

$$N_{\text{productos}} = (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[\underbrace{\sum_{j=1}^n n_j + n + N_u \cdot m + m + n}_{4800} \right] +$$

3.10 Aplicación: reactor agitado

$$+ \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + m + n \right]}_{70} \approx 4800 \quad (3.9-18)$$

$$N_{sumas} = (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \underbrace{\left[\sum_{j=1}^n n_j + n + N_u \cdot m + m + n - 4 \right]}_{3200} +$$

$$+ \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + m + n - 3 \right]}_{49} \approx 3200 \quad (3.9-19)$$

■ *Formulación E/S:*

$$N_{productos} \geq (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[N_u \cdot m + n \cdot m + \sum_{r=1}^n n_r + n \right] = 4400 \quad (3.9-20)$$

$$N_{sumas} \geq (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[N_u \cdot m + n \cdot m + \sum_{r=1}^n n_r + n - 3 \right] + n \cdot m = 3202 \quad (3.9-21)$$

Como se puede apreciar ambas formulaciones requieren aproximadamente el mismo número de operaciones. Este ejemplo respalda el comentario de la Nota 3.9.3.

Nota 3.9.4 En un caso particular³⁴ las **Proposiciones** (3.9.1) y (3.9.2) pueden ser aplicadas para determinar el número exacto de operaciones que cada formulación requiere para obtener las acciones de control, y consecuentemente determinar cuál es la más rápida.

3.10. Aplicación: reactor agitado

En esta sección se aplica la metodología de diseño del GPC MIMO en espacio de estados, desarrollada en las secciones anteriores, a un proceso concreto: un reactor agitado [Camacho y Bordóns 1995, página 113], el cual posee la siguiente matriz de transferencia:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+0.1s} & \frac{5}{1+s} \\ \frac{1}{1+0.5s} & \frac{2}{1+0.4s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (3.10-1)$$

Las variables de salida del modelo $Y_1(s)$ e $Y_2(s)$ representan la concentración del producto y la temperatura del reactor respectivamente. Las variables de control $U_1(s)$ y $U_2(s)$ representan el caudal de alimentación y el flujo de refrigerante en la camisa del reactor.

³⁴Conocidos el proceso y los parámetros del GPC MIMO

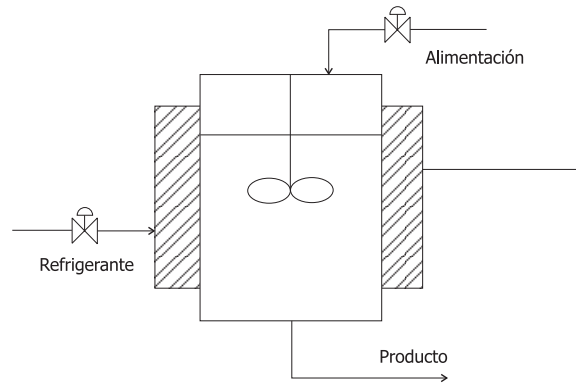


FIGURA 3.16: Esquema del reactor agitado

La unidad de tiempo empleada para la representación de la matriz de transferencia es el minuto.

La matriz de transferencia correspondiente a su modelo discretizado con ZOH a un periodo de muestreo de 0.01 minutos es:

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.09516}{z - 0.9048} & \frac{0.04975}{z - 0.99} \\ \frac{0.0198}{z - 0.9802} & \frac{0.04938}{z - 0.9753} \end{bmatrix} \quad (3.10-2)$$

Para diseñar el controlador GPC es necesario obtener un denominador común para cada salida, de acuerdo con el LEMA 3.2.1:

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.09516z - 0.09422}{z^2 - 1.895z + 0.8958} & \frac{0.04975z - 0.04502}{z^2 - 1.895z + 0.8958} \\ \frac{0.0198z - 0.01931}{z^2 - 1.956z + 0.956} & \frac{0.04938z - 0.0484}{z^2 - 1.956z + 0.956} \end{bmatrix} \quad (3.10-3)$$

3.10.1. Caso 1

En un primer caso se diseña un controlador GPC MIMO asumiendo que no hay discrepancias entre modelo y proceso, las perturbaciones son nulas y que se presentan exclusivamente restricciones sobre las acciones de control. El objetivo de este caso es mostrar el diseño del controlador GPC en espacio de estados y su equivalencia con la formulación E/S. Los parámetros del diseño del GPC para este caso son:

- Periodo de muestreo: $T = 0.01$ minutos. Horizonte de predicción: $N_1 = 1$ y $N_2 = 250$. Horizonte de control: $N_{ii} = 2$. Matrices de ponderación de los errores: $Q_i = I$ $i = N_1, \dots, N_2$. Matrices de ponderación de los incrementos de las acciones de control: $R_i = \mathbf{0}$ $i = 1, \dots, N_u$. Se ubican todos los polos del observador en 0, ya que no hay discrepancias entre modelo y proceso, y no se consideran aplicadas ni

3.10 Aplicación: reactor agitado

perturbaciones ni ruidos de medida. Cada salida tiene asociados $n_j + 1 = 2 + 1 = 3$ polos del observador, con lo cual, al haber 2 salidas el observador posee 6 polos. Las referencias futuras se desconocen.

Con estos parámetros el índice de coste queda así:

$$J_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)) = \sum_{i=1}^{250} (\hat{\mathbf{y}}(k+i|k) - \bar{\omega}(k+i))^T \mathbf{I}_2 (\hat{\mathbf{y}}(k+i|k) - \bar{\omega}(k+i)) \quad (3.10-4)$$

- Restricciones: $u_{max}(U_1) = 0.25$, $u_{min}(U_1) = 0$, $\Delta u_{max}(U_1) = 0.1$, $\Delta u_{min}(U_1) = -0.1$, $u_{max}(U_2) = 0.1$, $u_{min}(U_2) = 0$, $\Delta u_{max}(U_2) = 0.05$, $\Delta u_{min}(U_2) = -0.05$.

Con estos parámetros de diseño el modelo CARIMA a emplear es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k+1) \\ \bar{\mathbf{x}}^*(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \Sigma_{rxn} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{\mathbf{x}}^*(k) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \Pi_1(rxn) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}(k) \\ \bar{\xi}(k) \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{y}}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \Omega_{nxn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{\mathbf{x}}^*(k) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}(k) \\ \bar{\xi}(k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.10-5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0.8958 & 0 & 0 \\ 1.0000 & 1.8949 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.9560 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 1.9555 \end{bmatrix} \quad (3.10-6)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0.0942 & -0.0450 \\ 0.0952 & 0.0498 \\ -0.0193 & -0.0484 \\ 0.0198 & 0.0494 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10-7)$$

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} -0.8958 & 0 \\ 1.8949 & 0 \\ 0 & -0.9560 \\ 0 & 1.9555 \end{bmatrix} \quad \Omega = \mathbf{I}_n \quad \Sigma = \Pi_1 \Omega \quad (3.10-8)$$

Los resultados de la simulación del control del reactor agitado con el GPC diseñado en espacio de estados se muestran en la figura 3.17. Estos resultados son idénticos a los que se obtienen diseñando el controlador en su versión E/S.

Las referencias impuestas son 0.5 para la salida 1 y 0.3 para la salida 2, y una vez que éstas son alcanzadas se produce un cambio a 0.4 en la referencia para la salida 1. Como se aprecia la respuesta de ambas variables es suave y sin oscilaciones, no existiendo una excesiva interacción entre ambas ante cambios en la referencia de una de ellas. Las acciones de control presentan también una evolución suave y sin oscilaciones, y en todos los instantes de muestreo se satisfacen las restricciones impuestas.

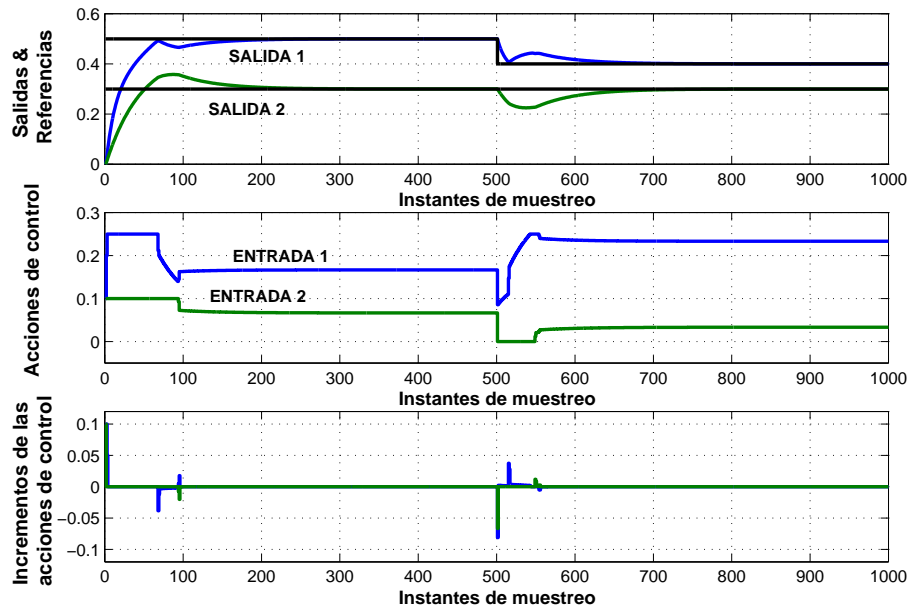


FIGURA 3.17: Control del reactor agitado utilizando GPC MIMO en espacio de estados

Puesto que en este ejemplo $n = 2$, $m = 2$, $\sum_{j=1} n_j = 4$ y el horizonte de predicción es $N_2 - N_1 + 1 = 250$ se deduce, aplicando el análisis de la *Nota* 3.9.4, que ambas formulaciones requieren aproximadamente el mismo número de operaciones para el cálculo de la acción de control. Pero además, en este ejemplo se puede determinar el número exacto de operaciones requeridas:

- Formulación en espacio de estados:

$$N_{\text{productos}} = 6060 \quad (3.10-9)$$

$$N_{\text{sumas}} = 5554 \quad (3.10-10)$$

- Formulación E/S:

$$N_{\text{productos}} = 6000 \quad (3.10-11)$$

$$N_{\text{sumas}} = 5504 \quad (3.10-12)$$

Como se aprecia estos resultados validan las afirmaciones previas.

3.10.2. Caso 2

En este segundo caso se supone que se presentan perturbaciones aditivas en ambas señales de salida. Se trata de perturbaciones aleatorias independientes con valores comprendidos, para ambas salidas, en el intervalo $[-0.005, 0.005]$. Si se emplea el mismo controlador diseñado en el caso 1 los resultados de la simulación se muestran en la figura 3.18.

3.10 Aplicación: reactor agitado

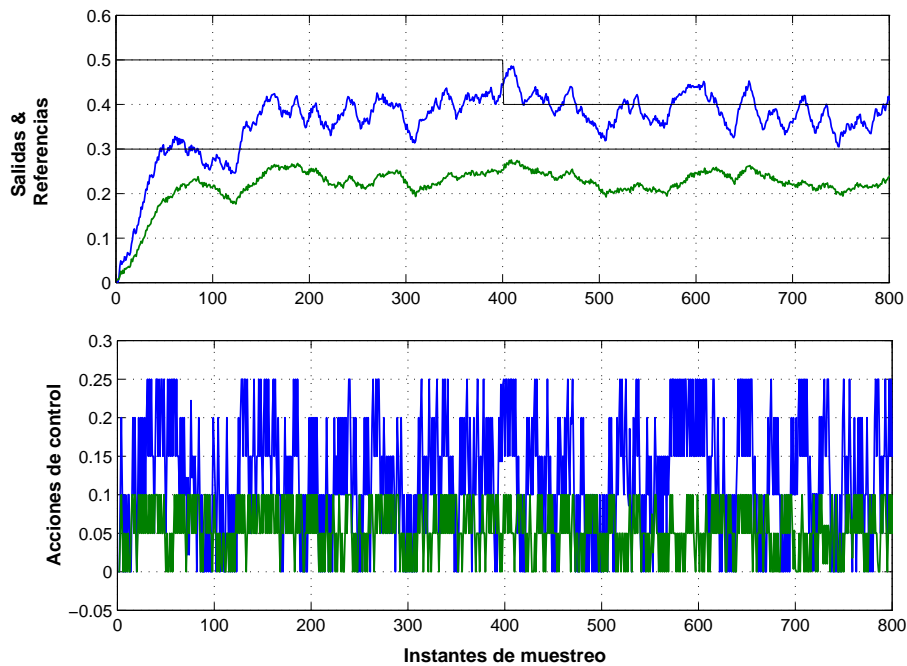


FIGURA 3.18: Control del reactor agitado en presencia de perturbaciones ubicando los polos del observador en 0

En dicha figura se aprecia el grave efecto de las perturbaciones en ambas salidas del proceso. Se puede concluir, pues, que el controlador diseñado no es robusto para este tipo concreto de perturbaciones. Sin embargo, se puede diseñar el observador para ubicar todos sus polos en 0.9, con el objetivo de mejorar la robustez del controlador. Si el resto de parámetros de diseño se mantienen iguales a los del caso 1, las matrices del modelo CARIMA que se modifican son:

$$\mathbf{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} -0.0858 & 0 \\ 0.0949 & 0 \\ 0 & -0.1460 \\ 0 & 0.1555 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Omega} = \text{diag}(0.1 \quad 0.1) \quad \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{\Omega} \quad (3.10-13)$$

Los resultados de la simulación con el nuevo controlador GPC diseñado se encuentran en la figura 3.19. Como se observa, el nuevo controlador presenta mayor robustez pues su funcionamiento se puede considerar como aceptable, a diferencia del diseño que asigna todos los polos del observador en el origen. Con estas simulaciones se muestra el hecho de que una elección adecuada de los polos del observador confiere robustez ante perturbaciones al controlador. Lo cual era esperado por la equivalencia existente entre las raíces de los polinomios de filtrado y los polos del observador.

La asignación de todos los polos en 0.9 supone imponer una dinámica del observador más lenta que en el caso de haberse asignado todos en cero. Este hecho induce a pensar que a mayor lentitud de la dinámica del observador mayor robustez posee el controlador ante perturbaciones aditivas a la salida, pudiéndose asociar este aumento de robustez al

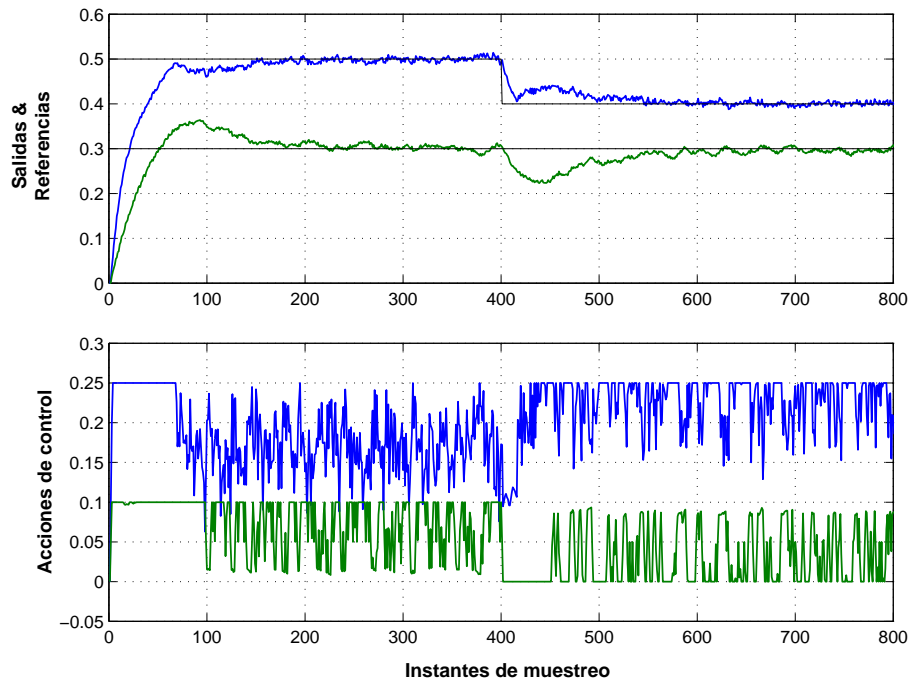


FIGURA 3.19: Control del reactor agitado en presencia de perturbaciones ubicando los polos del observador en 0.9

hecho de que el observador tiene más tiempo para estimar los valores correctos de los estados, o que filtra el valor de los estados evitando perturbaciones o incertidumbres puntuales.

3.11. Aplicación: péndulo invertido

Otro ejemplo de aplicación de la metodología del GPC MIMO con restricciones prodría ser el del control del péndulo invertido. El esquema del sistema se muestra en la figura 3.20. Se trata de un sistema no lineal con el siguiente modelo [Salcedo 1999]:

$$(m + M)\ddot{x} + \frac{1}{2}ml \cos(\alpha)\ddot{\alpha} - \frac{1}{2}ml \sin(\alpha)\dot{\alpha}^2 = \frac{P}{r} \quad (3.11-1)$$

$$\frac{1}{3}ml^2 \ddot{\alpha} + \frac{1}{2}ml \cos(\alpha)\ddot{x} - \frac{1}{2}mgl \sin(\alpha) = 0 \quad (3.11-2)$$

$$P = 0.0109V - 0.0488\dot{x} \quad (3.11-3)$$

siendo los valores de las constantes del modelo: $m = 0.21 \text{ Kg}$, $M = 0.455 \text{ Kg}$, $r = 0.0063 \text{ m}$ y $l = 0.61 \text{ m}$. P es el par aplicado por el motor a la rueda motriz para desplazar el carrito. Sin embargo, la única acción de control en este sistema es la tensión aplicada a dicho motor, V .

El objetivo de esta aplicación es mostrar la capacidad de diseñar robustamente el controlador GPC cuando existen incertidumbres en el modelo o discrepancias entre el

3.11 Aplicación: péndulo invertido

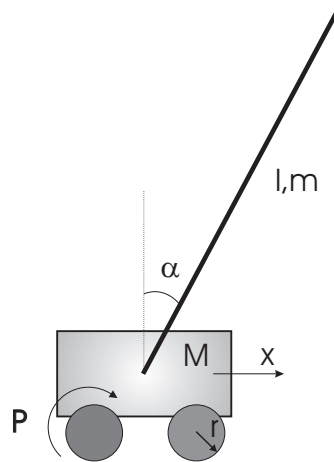


FIGURA 3.20: Esquema del péndulo invertido

modelo y el proceso. En concreto, se tiene un sistema no lineal y se diseñará el GPC para el modelo linealizado del mismo alrededor del punto de equilibrio $\alpha = 0^\circ$, por tanto, existirán siempre discrepancias entre el modelo y el proceso.

El modelo linealizado alrededor del punto de equilibrio $\alpha = 0^\circ$ es:

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ \alpha(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3.387s^2 - 81.7}{s^4 + 15.14s^3 - 31.61s^2 - 365.1s} \\ \frac{-8.329s + 0.00245}{s^3 + 15.14s^2 - 31.61s - 365.1} \end{bmatrix} V(s) \quad (3.11-4)$$

Este modelo linealizado es complejo de controlar debido a los siguientes factores:

- La FdT entre X y V posee un integrador, un polo inestable y dos ceros sobre el eje imaginario.
- La FdT entre α y V posee un polo inestable y cero real positivo muy cercano a cero.
- Se trata de un sistema con una entrada y dos salidas, las cuales están muy acopladas entre si ya que comparten tres polos.

En un primer paso se trató de diseñar el GPC a partir de este modelo linealizado para el control del sistema no lineal asignando todos los polos del observador en 0. El resultado de la simulación mostró que el bucle cerrado es inestable. Por ello, se planteó la alternativa de realizar diversas pruebas para la asignación de los polos del observador hasta conseguir un bucle cerrado estable. Un caso para el que se consiguió la estabilidad se corresponde con los siguientes parámetros de diseño del controlador:

- Periodo de muestreo $T = 0.01$ segundos.
- Horizonte de predicción: $N_1 = 1$ y $N_2 = 100$.

- Horizonte de control: $N_u = 2$.
- Matrices de ponderación de los errores: $Q_i = I \quad i = N_1, \dots, N_2$.
- Matrices de ponderación de los incrementos de las acciones de control: $R_i = 0$
 $i = 1, \dots, N_u$.

Con estas matrices de ponderación el índice de coste queda así:

$$J_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)) = \sum_{i=1}^{100} (\hat{\mathbf{y}}(k+i|k) - \bar{\omega}(k+i))^T I_2 (\hat{\mathbf{y}}(k+i|k) - \bar{\omega}(k+i)) \quad (3.11-5)$$

- Asignación de polos del observador. En este caso la salida 1 posee asociados $n_1 + 1 = 4 + 1 = 5$ polos del observador, y la segunda salida posee $n_2 + 1 = 3 + 1 = 4$ polos, dando un total de 9 polos para el observador. La asignación de polos se basa en colocar cuatro polos en 0.9 y el resto en el origen. Dos de los polos en 0.9 se ubican utilizando los estados asociados a la primera salida (estados 1 y 2) y los otros dos polos mediante estados asociados a la segunda (estados 5 y 6). Este diseño es equivalente a emplear los polinomios de filtrado en la versión E/S:

$$T_1(z^{-1}) = T_2(z^{-1}) = (1 - 0.9z^{-1})(1 - 0.9z^{-1}) \quad (3.11-6)$$

- Restricciones: $u_{max}(U) = 0.5$, $u_{min}(U) = -0.3$, $\Delta u_{max}(U) = 0.1$, $\Delta u_{min}(U) = -0.1$.
- Las referencias futuras se desconocen.

La matriz de transferencia del modelo discretizada con ZOH al periodo de muestreo es:

$$\begin{bmatrix} X(z) \\ \alpha(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1.611295z^3 - 1.694446z^2 - 1.456464z + 1.532031}{(z^3 - 2.862646z^2 + 2.721845z - 0.859538)(z - 1)} \cdot 10^{-4} \\ \frac{-3.962966z^2 + 0.194994z + 3.767995}{z^3 - 2.862646z^2 + 2.721845z - 0.859538} \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} V(z) \quad (3.11-7)$$

Aquí ya se cumple la condición de que cada salida posea un denominador común.

En estas circunstancias el modelo CARIMA en espacio de estados es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.859538 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 3.581383 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & -5.584491 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 3.862646 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.859538 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & -2.721845 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 2.862646 \end{bmatrix} \quad (3.11-8)$$

3.11 Aplicación: péndulo invertido

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1.532031 \\ -1.456646 \\ -1.694445 \\ 1.611130 \\ 3.767995 \\ 0.194994 \\ -3.962966 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11-9)$$

$$\mathbf{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} -0.859538 & 0 \\ 3.581384 & 0 \\ -4.774491 & 0 \\ 2.062646 & 0 \\ 0 & 0.859538 \\ 0 & -1.911845 \\ 0 & 1.062646 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{\Omega} \quad (3.11-10)$$

En la figura 3.21 se adjuntan los resultados de la simulación del control con GPC MIMO del péndulo invertido utilizando el sistema no lineal³⁵ como proceso. Inicialmente el péndulo está en su posición vertical $\alpha = 0^\circ$ y el carrito en $x = 0$ m, y se fija una referencia para la posición del carrito de $x = 0.1$ m, manteniendo el péndulo en su posición vertical, y transcurridas 500 muestras se cambia la referencia del carrito a $x = 0.05$ m.

Los resultados de la figura 3.21 ratifican el buen funcionamiento del GPC MIMO en espacio de estados controlando directamente al sistema no lineal. La asignación de cuatro polos del observador en 0.9 proporciona robustez al controlador, ya que éste es capaz de garantizar la estabilidad en bucle cerrado para el sistema no lineal.

Como ya se comentó en la aplicación al reactor agitado, la asignación de estos polos supone imponer una dinámica del observador más lenta que en el caso de haberse asignado todos en cero. Este hecho induce a pensar, ahora para el péndulo invertido, que a mayor lentitud de la dinámica del observador mayor robustez posee el controlador ante discrepancias entre el modelo y el proceso³⁶, pudiéndose asociar este aumento de robustez a las mismas razones que fueron comentadas para el caso del reactor agitado.

El efecto negativo del uso de una dinámica del observador más lenta es una pérdida de prestaciones del controlador, dando lugar, en general, a una menor rapidez de respuesta en bucle cerrado. Para el péndulo invertido, este efecto es prácticamente inapreciable, tal y como demuestran las simulaciones realizadas³⁷ empleando polos más lentos para el

³⁵Ecuaciones (3.11-1) y (3.11-2)

³⁶Esta conjetura también fue postulada para el caso de los polinomios de filtrado, aunque luego se comprobó que no es siempre cierta [Yoon y Clarke 1993]

³⁷Las cuales no se han incluido por no ser relevantes

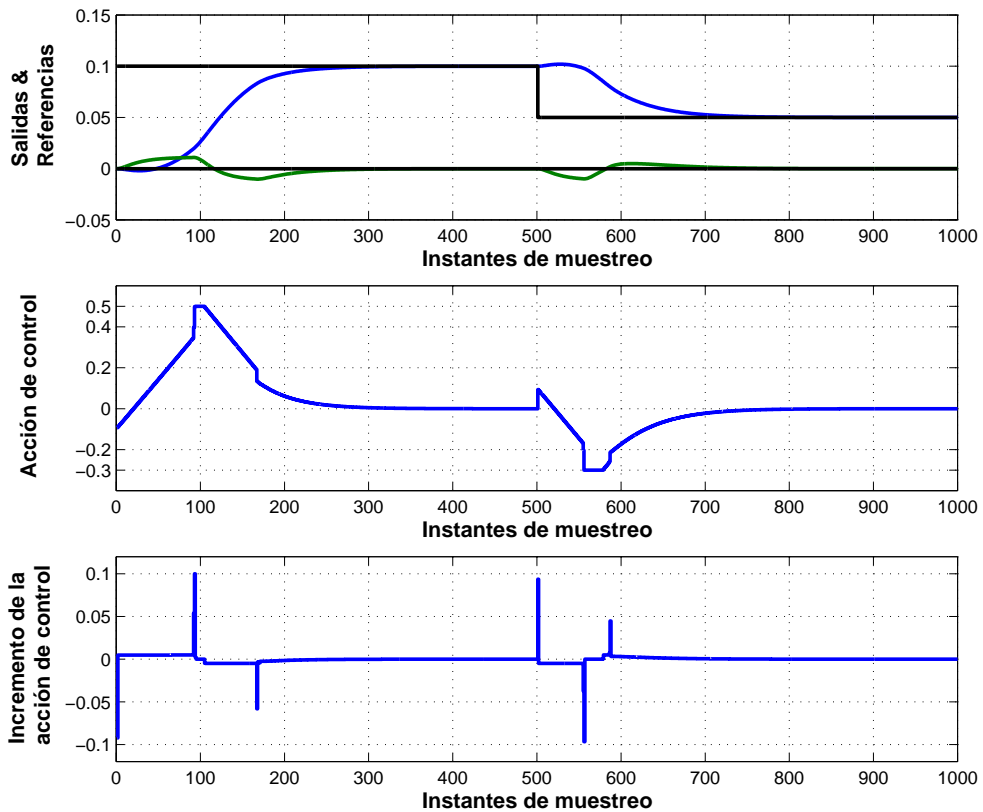


FIGURA 3.21: Control con GPC MIMO del péndulo invertido usando el modelo no lineal

observador. El siguiente ejemplo, correspondiente a un sistema de primer orden, permite apreciar mejor este efecto:

EJEMPLO 3.11.1 Sea un sistema de primer orden que tiene el siguiente modelo nominal:

$$G(z) = \frac{2}{z - 0.5} \quad (3.11-11)$$

Supóngase que el proceso real tiene el siguiente modelo:

$$G(z) = \frac{2}{z - 0.7} \quad (3.11-12)$$

Se diseñan dos controladores GPC para el modelo nominal, con los siguientes parámetros comunes a ambos: $N_1 = 1$, $N_2 = 20$, $N_u = 2$, $Q_i = 1 \forall i$, $R_i = 0 \forall i$. Éstos sólo difieren en la selección de los polos del observador: el primero los fija en 0.5 y 0, mientras que el segundo los fija en 0.6 y 0. En la figura 3.22 se representan los resultados de la simulación del control del proceso real con los dos controladores diseñados. Como se aprecia, ambos garantizan la estabilidad del bucle cerrado, aunque el segundo da lugar a una respuesta más lenta.

3.12 Conclusiones del capítulo

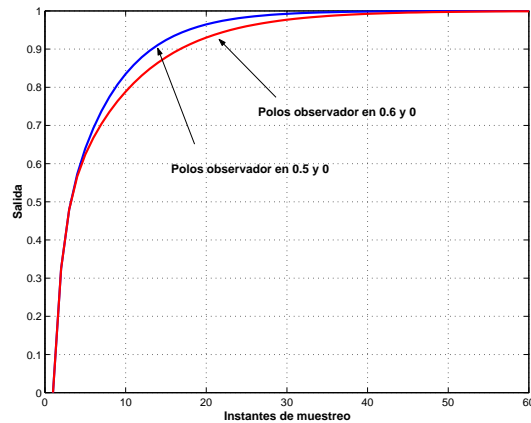


FIGURA 3.22: Efecto de los polos del observador en la rapidez de respuesta en bucle cerrado

3.12. Conclusiones del capítulo

1. Se ha propuesto un modelo CARIMA para la formulación en espacio de estados del controlador GPC MIMO, así como el análisis de su equivalencia con el modelo CARIMA E/S. Además, se ha mostrado que la formulación propuesta en espacio de estados representa satisfactoriamente al modelo del ruido a diferencia de las formulaciones ya existentes.
2. Las matrices que se obtienen en el modelo de predicción dependen, directamente, de las matrices del modelo CARIMA y no de forma recursiva, como ocurría en la versión E/S. Con ello se simplifica enormemente la metodología de diseño con respecto a la versión E/S.
3. La formulación E/S requiere una cantidad de memoria igual o mayor que la de espacio de estados, y en general, un mayor tiempo para calcular las acciones de control que la de espacio de estados.
4. El diseño del observador permite seleccionar de forma sistemática y única las matrices del ruido del modelo CARIMA. De esta forma se puede plantear el diseño del GPC en espacio de estados sin hacer referencia a la formulación E/S. Además, en este diseño se ha impuesto la equivalencia entre los polos de este observador y las raíces de los polinomios de filtrado.
5. Es conocido que los polinomios de filtrado, y en particular sus raíces, proporcionan robustez al controlador. Con el uso del nuevo modelo CARIMA en espacio de estados dicha propiedad es heredada por los polos del observador, por tanto, la robustez del controlador diseñado en espacio de estados reside en la elección de la dinámica de este observador.

6. Se podrían usar los polinomios de filtrado, diseñados en aquellas aplicaciones en las cuales ha sido implementado un GPC MIMO E/S, considerando sus raíces como los polos del observador que se podría emplear en la versión en espacio de estados de dicho controlador, para así conseguir las ventajas que se presentan en la formulación en espacio de estados: reducción de complejidad en el diseño y una mayor facilidad para el análisis de las propiedades relacionadas con estabilidad, robustez, restricciones, etc.
7. La equivalencia entre los polos del observador y las raíces de los polinomios de filtrado proporcionan una técnica para justificar si hay coherencia en la elección de los polinomios de filtrado en la versión E/S.

CAPÍTULO 4

Propiedades del controlador GPC en espacio de estados

4.1. Introducción	104
4.2. Análisis del modelo CARIMA	105
4.2.1. Observabilidad del modelo CARIMA	105
4.2.2. Controlabilidad del modelo CARIMA	105
4.2.3. El Modelo CARIMA es una realización mínima	106
4.3. Estudio de la existencia y unicidad de la ley de control	106
4.3.1. Caso sin restricciones	107
4.3.1.1. Casos en los que $N^T \bar{Q}N + \bar{R}$ es definida positiva	107
4.3.1.2. Caso de existencia de infinitas soluciones	108
Solución de mínima norma 2	109
4.3.2. Caso con restricciones	109
4.3.2.1. Caso de infinitas soluciones	110
Solución de mínima norma 2	110
Solución de mínimo coste económico	110
4.4. Efecto de robustez del observador	115
4.5. Análisis del bucle cerrado para el caso sin restricciones	121
4.6. Conclusiones del capítulo	125

4.1. **Introducción**

En este capítulo, una vez que han sido planteados los elementos básicos del diseño del controlador GPC MIMO en espacio de estados en el capítulo anterior, se analizan diversas propiedades asociadas a su diseño:

- Se estudia la observabilidad y la controlabilidad del modelo CARIMA, con el objetivo de analizar si se trata de una realización mínima. Se justifica que tal circunstancia es cierta bajo determinadas condiciones, las cuales no son excesivamente restrictivas en los casos analizados. El hecho de ser una realización mínima es importante, ya que las expresiones de la predicción de las salidas se plantean en términos de un modelo en espacio de estados que posee el mínimo número de estados posibles (tamaño mínimo posible para las matrices).
- En el capítulo anterior se presentaron resultados que garantizan la existencia y unicidad de la ley de control. En este capítulo se analizan con mayor detalle las condiciones que garantizan la unicidad de dicha ley. La utilidad de todo este análisis es importante, ya que permite establecer si el control de un proceso con un GPC diseñado con determinados parámetros, va a dar lugar a que las acciones de control sean o no únicas al optimizar el índice de coste.
- El análisis anterior se complementa con el estudio del caso en que la citada ley no posee solución única. Para este caso se obtienen todas las posibles soluciones y se busca aplicar al proceso aquella que resulte más ventajosa.
- Se estudia el efecto de robustez que produce la dinámica del observador a la hora de tratar de reducir tanto el efecto de las perturbaciones como el de las discrepancias entre modelo y proceso en la determinación de los valores de las salidas, para que éstas se acomoden a las del proceso real y no a las del modelo. Este estudio muestra el carácter robusto del observador, y en particular, la importancia de realizar una adecuada selección de sus polos para garantizar el rechazo de perturbaciones y de discrepancias entre modelo y proceso en la determinación de las salidas. Este resultado deberá ser tenido en cuenta en las posibles metodologías de diseño robusto del controlador GPC que se propongan en esta tesis.
- Finalmente, se obtiene la representación simplificada del bucle cerrado para el caso sin restricciones cuando ni hay discrepancias entre modelo y proceso ni se presentan perturbaciones. Dicha representación simplificada será de utilidad en el estudio de la estabilidad del bucle cerrado, que se realiza en el capítulo siguiente, para el caso sin restricciones.

4.2. Análisis del modelo CARIMA

En esta sección se va a analizar si el modelo CARIMA es una realización mínima. Dicho análisis se basa en estudiar sus características de observabilidad y controlabilidad.

4.2.1. Observabilidad del modelo CARIMA

Para establecer que el modelo CARIMA en espacio de estados, ecuación (3.6-23), es observable,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(k+1) &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k) + \Pi\bar{\xi}(k) \\
 \bar{\mathbf{y}}(k) &= \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k) + \bar{\xi}(k) \\
 \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \Sigma_{r \times n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
 \Pi &= \begin{bmatrix} \Pi_{1, r \times n} \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \Omega_{n \times n} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.2-1}$$

hay que justificar que el par $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{C}})$ es observable.

Proposición 4.2.1 *Si las matrices del ruido, Σ , Ω y Π_1 , se diseñan en base a la ubicación de los polos del observador (sección 3.6), entonces el par $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{C}})$ es observable si y sólo si ninguno de éstos polos se ubica en uno.*

Su demostración se encuentra en el apéndice A **proposicion** A.2.2.

4.2.2. Controlabilidad del modelo CARIMA

El modelo CARIMA será controlable si el par $(\bar{\mathbf{A}}, [\bar{\mathbf{B}} \Pi])$ lo es. La siguiente proposición justifica cuando dicho par es controlable:

Proposición 4.2.2 *Si las matrices del ruido, Σ , Ω y Π_1 , se diseñan en base a la ubicación de los polos del observador (sección 3.6), y las matrices \mathbf{K}_j :*

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} \Pi_{jj} & \mathbf{A}_j \Pi_{jj} + \Pi_{jj} \Omega_{jj} & \cdots & \mathbf{A}_j^{r+n-1} \Pi_{jj} + \mathbf{A}_j^{r+n-2} \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \cdots + \Pi_{jj} \Omega_{jj} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_j \times (r+n)}$$

$$j = 1, \dots, n \tag{4.2-2}$$

poseen todas, o excepto una de ellas, rango completo de filas (n_j), entonces el par $(\bar{\mathbf{A}}, [\bar{\mathbf{B}} \Pi])$ es controlable.

En el apéndice A **proposición** A.2.3 se encuentra su demostración.

4.3 Estudio de la existencia y unicidad de la ley de control

Nota 4.2.1 La exigencia de esta proposición relativa a las matrices K_j se puede relajar si se cumple la condición del siguiente COROLARIO.

COROLARIO 4.2.1 Si el par (A, B) es controlable entonces el par $(\bar{A}, [\bar{B} \Pi])$ también es controlable.

Su demostración se encuentra en el apéndice A COROLARIO A.2.1.

Nota 4.2.2 Si la condición anterior no se cumpliera, será necesario utilizar la siguiente proposición para garantizar cuando las matrices K_j poseen rango completo de filas. La condición que en ella aparece no es excesivamente exigente, de ahí que se pueda cumplir en muchos casos.

Proposición 4.2.3 (Caracterización de las matrices K_j) La matriz K_j posee rango completo de filas si y sólo si el par (A_j, Π_{jj}) es controlable.

En el apéndice A **proposición** A.2.4 se encuentra su demostración.

4.2.3. El Modelo CARIMA es una realización mínima

A partir de los resultados sobre observabilidad y controlabilidad se deduce el siguiente TEOREMA:

TEOREMA 4.2.1 (EL MODELO CARIMA ES UNA REALIZACIÓN MÍNIMA) El modelo CARIMA (3.6-23), bajo las hipótesis de las **Proposiciones** 4.2.1 y 4.2.2, es una realización mínima.

Demostración: A partir de las proposiciones referenciadas se deduce que el modelo CARIMA, al ser observable y controlable, es un realización mínima. ■

Este resultado es importante pues muestra que se trata de una realización del modelo CARIMA E/S en espacio de estados con el mínimo número posible de estados. Esto quiere decir que las matrices del modelo CARIMA en espacio de estados son del menor tamaño posible, y por tanto, el modelo de predicción de las salidas depende de matrices que poseen el mínimo tamaño posible.

4.3. Estudio de la existencia y unicidad de la ley de control

En esta sección se estudian más en profundidad los resultados presentados en el capítulo anterior sobre la existencia y unicidad de la ley de control, tanto para el caso sin restricciones como para el caso de que estén presentes. Además, se presentan nuevos resultados que complementan a los del capítulo anterior.

4.3.1. Caso sin restricciones

En la **proposición** 3.5.1 se obtuvo la expresión para la ley de control del GPC MIMO sin restricciones. Dicha ley se basa en resolver el sistema lineal de ecuaciones:

$$-(N^T \bar{Q}N + \bar{R}) \Delta \hat{u}(k) = N^T \bar{Q} \hat{e}_c(k) \quad (4.3-1)$$

Este sistema siempre tiene solución, sea cual sea $\hat{e}_c(k)$, ya que el problema de optimización del cual se deriva posee siempre solución, puesto que no hay restricciones. Además, posee solución única si y sólo si la matriz:

$$N^T \bar{Q}N + \bar{R} \quad (4.3-2)$$

es invertible. Como por construcción es semidefinida positiva, sólo será invertible si y sólo si es definida positiva.

4.3.1.1. Casos en los que $N^T \bar{Q}N + \bar{R}$ es definida positiva

Las condiciones para asegurar solución única son:

1. Cuando las matrices R_i sean definidas positivas. En tal caso \bar{R} también lo será y por tanto $N^T \bar{Q}N + \bar{R}$ también.
2. Cuando se verifiquen las condiciones de la **proposición** (3.5.1): Si las matrices Q_i son definidas positivas, las matrices R_i son semidefinidas positivas y la matriz N posee rango completo de columnas.

La condición asociada a exigir que la matriz N posea rango completo de columnas es analizada en el apéndice B, deduciéndose que se verifica, de forma general, en aquellas aplicaciones con un número de salidas mayor o igual que el de entradas.

3. Cuando no se dé ninguna de las hipótesis anteriores (1 y 2), es decir, que las matrices \bar{R} y $N^T \bar{Q}N$ sean semidefinidas positivas, pero su suma sea definida positiva. La siguiente proposición garantiza cuando ocurre esta situación:

Proposición 4.3.1 *Supóngase que las matrices \bar{R} y $N^T \bar{Q}N$ son semidefinidas positivas, es decir, $\exists x \neq 0, y \neq 0 : x^T \bar{R}x = 0, y^T N^T \bar{Q}Ny = 0$, entonces la matriz $N^T \bar{Q}N + \bar{R}$ es definida positiva si y sólo si los espacios nulos de $\bar{R}^{1/2}$ y N no poseen ningún vector en común (salvo el 0).*

La demostración de esta proposición se encuentra en el apéndice A **proposición** A.2.5.

4.3.1.2. Caso de existencia de infinitas soluciones

En el caso de que ésta matriz sea semidefinida positiva, hay infinitas soluciones para las acciones de control, proporcionando todas ellas el mismo valor mínimo para el índice de coste. Esto se debe a que el índice de coste es convexo pero no estrictamente convexo.

Dicha situación puede presentarse cuando no se pesan los incrementos de las acciones de control $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ y el proceso tiene más entradas que salidas, produciéndose que la matriz \mathbf{N} no posea rango completo de columnas para determinados valores de los horizontes de predicción y control. Dichos casos se caracterizan porque el proceso está sobreactuado, existiendo diferentes combinaciones de las entradas que permiten obtener los mismos valores para las salidas.

En concreto, se puede obtener una solución particular de ley de control empleando la descomposición en valores singulares de la matriz:

$$\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} = \mathbf{W} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad (4.3-3)$$

siendo:

$$\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_k, 0, \dots, 0) \quad (4.3-4)$$

la matriz de valores singulares, y \mathbf{W} y \mathbf{V} dos matrices ortonormales.

Con esta descomposición, se puede obtener el vector de incrementos de las acciones de control mediante su matriz pseudoinversa:

$$\mathbf{H} = (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N})^\dagger = \mathbf{V} \text{diag}\left(\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_k}, 0, \dots, 0\right) \mathbf{W}^T \quad (4.3-5)$$

con lo cual:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)_{\text{part}} = -\mathbf{H} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{e}}_c(k) \quad (4.3-6)$$

El resto de soluciones se obtienen sumando a esta particular cualquier vector del espacio nulo de la matriz $\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N}$:

$$\mathbf{z} \in \mathcal{N}^\perp(\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N}) \iff (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N}) \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4.3-7)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = \Delta \hat{\mathbf{u}}(k)_{\text{part}} + \mathbf{z} = -\mathbf{H} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{e}}_c(k) + \mathbf{z} \quad (4.3-8)$$

Nota 4.3.1 Es importante destacar que para el caso de que no existan discrepancias entre modelo y proceso y no se presenten perturbaciones, el valor que las salidas alcanzan es siempre el mismo independientemente de cuáles acciones de control, de las infinitas soluciones posibles (4.3-8), son aplicadas al proceso en el instante k . Esta misma conclusión, sin embargo, no es cierta para los estados del proceso. La demostración de este hecho se encuentra en el apéndice A LEMA A.2.4.

¹ $\mathcal{N}(\cdot)$ representa el espacio nulo de una matriz.

Solución de mínima norma 2

La solución particular (4.3-6) se caracteriza por ser la de menor norma 2:

$$\begin{aligned} \|\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)\|_2 &= \|\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)_{\text{part}} + \mathbf{z}\|_2 = \|\mathbf{-HN}^T \bar{\mathbf{Q}}^T \hat{\mathbf{e}}_c(k) + \mathbf{z}\|_2 = \\ &= (\mathbf{-HN}^T \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{e}}_c(k) + \mathbf{z})^T (\mathbf{-HN}^T \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{e}}_c(k) + \mathbf{z}) = \\ &= \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \hat{\mathbf{e}}_c^T(k) \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{e}}_c(k) - 2 \hat{\mathbf{e}}_c^T(k) \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} \mathbf{H}^T \mathbf{z} \end{aligned} \quad (4.3-9)$$

Como:

$$(\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N}) \mathbf{z} = \mathbf{0} \implies \mathbf{W} \text{diag}(s_1, \dots, s_k, 0, \dots, 0) \mathbf{V}^T \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4.3-10)$$

y puesto que las matrices \mathbf{W} y \mathbf{V} son ortogonales entonces se cumple que:

$$\text{diag}(s_1, \dots, s_k, 0, \dots, 0) \mathbf{V}^T \mathbf{z} = \mathbf{0} \implies \mathbf{V}^T \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k \times 1} \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} \quad (4.3-11)$$

siendo \mathbf{z}_1 un vector columna que no posee todos sus elementos nulos. Con este resultado se llega a que:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^T \mathbf{z} &= \left(\mathbf{V} \text{diag}\left(\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_k}, 0, \dots, 0\right) \mathbf{W}^T \right)^T \mathbf{z} = \mathbf{W} \text{diag}\left(\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_k}, 0, \dots, 0\right) \mathbf{V}^T \mathbf{z} = \\ &= \mathbf{W} \text{diag}\left(\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_k}, 0, \dots, 0\right) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k \times 1} \\ \mathbf{z}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.3-12)$$

Con esta condición la norma 2 (4.3-9) queda así:

$$\|\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)\|_2 = \mathbf{z}^T \mathbf{z} + \hat{\mathbf{e}}_c^T(k) \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{e}}_c(k) \quad (4.3-13)$$

la cual se hace mínima cuando $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Como se trata de la solución de menor norma 2 podría ser indicada para ser aplicada sobre el proceso, ya que supone suministrar la mínima energía posible.

Nota 4.3.2 La metodología desarrollada también es válida para el caso general en que $\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}$ es semidefinida positiva con $\bar{\mathbf{R}} \neq \mathbf{0}$.

4.3.2. Caso con restricciones

Si se analiza la existencia y unicidad de las acciones de control cuando hay presentes restricciones duras (sección 3.8.2) se llega a la misma conclusión que para el caso sin restricciones²: la solución es única si y sólo si la matriz $\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}$ es definida positiva. Los posibles casos en los que se puede garantizar dicha condición son los mismos que fueron presentados para el caso sin restricciones.

²Se supone que las restricciones definen un conjunto no vacío

4.3.2.1. Caso de infinitas soluciones

Si dicha matriz es semidefinida positiva entonces también habrá infinitas soluciones para el caso con restricciones. Al igual que para el caso sin restricciones, se analizará la obtención de soluciones para la ley de control en aquellos casos en que hay más entradas que salidas, $\bar{R} = 0$ y N no posee rango completo de columnas.

La obtención de una determinada solución particular de las acciones de control está ligada al algoritmo numérico empleado para la optimización (algoritmo QP en esta tesis), y a su implementación en un computador. Por tanto, para tratar de conocer qué resultado proporciona dicho algoritmo será necesario examinar su implementación. En concreto, el algoritmo QP siempre proporciona una solución particular sobre la frontera de la región factible establecida por las restricciones. El resto de las soluciones posibles se obtienen sumando a esta solución particular cualquier vector z del espacio nulo de la matriz $N^T \bar{Q} N$, con la condición de que se sigan verificando todas las restricciones:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{u}(k) &= \Delta \hat{u}_{\text{Frontera}}(k) + z \\ z \in \mathcal{N}(N^T \bar{Q} N) \quad ; \quad C \Delta \hat{u}(k) &\leq b(k) \quad ; \quad D \Delta \hat{u}(k) = e(k) \end{aligned} \quad (4.3-14)$$

Nota 4.3.3 Para el caso con restricciones sigue siendo válido el resultado de la NOTA 4.3.1.

Solución de mínima norma 2

Al igual que para el caso sin restricciones se puede obtener la solución con la mínima norma 2. Para su cálculo hay que resolver el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & \left\| \Delta \hat{u}_{\text{Frontera}}(k) + z \right\|_2 \\ \text{sujeto a: } & z \in \mathcal{N}(N^T \bar{Q} N) \quad ; \quad C \Delta \hat{u}(k) \leq b(k) \quad ; \quad D \Delta \hat{u}(k) = e(k) \end{aligned} \quad (4.3-15)$$

Esta solución, de nuevo, puede ser indicada ya que supone aplicar al proceso la mínima energía o mínimo esfuerzo de control.

Solución de mínimo coste económico

Se pueden emplear criterios económicos para analizar el coste de las soluciones de la ley de control con restricciones y elegir aquella que dé lugar al valor mínimo de dicho coste.

Se podría plantear como medida del coste económico una combinación lineal de los valores de las acciones de control a aplicar en k , considerando que éstas suponen un

aporte y/o extracción de materiales y/o de energía con un coste, si hay aportación, o beneficio, si hay extracción, proporcional a su valor³:

$$J_e = \mathbf{c}_u^T \bar{\mathbf{u}}(k) \quad \mathbf{c}_n \in \mathbb{R}^m \quad (4.3-16)$$

los coeficientes de \mathbf{c}_u se toman positivos si hay coste y negativos si hay beneficio. Las posibles acciones de control a aplicar son de la forma (4.3-14):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(k) &= \bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathcal{Y} \Delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{Frontera}}(k) + \mathcal{Y} \mathbf{z} \\ \mathbf{z} &\in \mathcal{N}(\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N}) \quad ; \quad \mathbf{C} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) \leq \mathbf{b}(k) \quad ; \quad \mathbf{D} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{e}(k) \end{aligned} \quad (4.3-17)$$

\mathcal{Y} es la matriz que permite obtener las m primeras acciones de control correspondientes al primer instante dentro del horizonte de control:

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0}_{m \times N_i(m-1)} \end{pmatrix} \quad (4.3-18)$$

Si la matriz \mathbf{V} contiene por columnas una base del espacio nulo de $\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N}$, entonces cualquier vector \mathbf{z} es de la forma:

$$\mathbf{z} = \mathbf{V} \boldsymbol{\lambda} \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l \quad (4.3-19)$$

siendo l el número de columnas de \mathbf{V} .

La minimización del índice de coste económico (4.3-16) sujeto a las infinitas soluciones para las acciones de control del instante k y a las restricciones (4.3-17) es un problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} \quad & \mathbf{c}_u^T (\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathcal{Y} \Delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{Frontera}}(k) + \mathcal{Y} \mathbf{V} \boldsymbol{\lambda}) \\ \text{sujeto a:} \quad & \mathbf{C} (\Delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{Frontera}}(k) + \mathbf{V} \boldsymbol{\lambda}) \leq \mathbf{b}(k) \\ & \mathbf{D} (\Delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{Frontera}}(k) + \mathbf{V} \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{e}(k) \end{aligned} \quad (4.3-20)$$

La incógnita de esta problema de programación lineal es $\boldsymbol{\lambda}$, y su solución es única si la región que definen las restricciones es cerrada y acotada. Una vez resulto este problema las acciones de control a aplicar se obtienen mediante (4.3-17) y (4.3-19).

EJEMPLO 4.3.1 *Se va a emplear un proceso de fraccionamiento por destilación de crudo, conocido como Shell Process Control Problem, el cual ha sido utilizado como benchmark en algunas publicaciones [Prett y Morari 1987; Aoyama et al. 1997], y se caracteriza por poseer diferentes retardos para las salidas. Este proceso tiene tres salidas a controlar y 3 actuadores disponibles. Sin embargo, para plantear un proceso con más entradas que salidas se va a tratar de controlar sólo dos de las salidas originales empleando los*

³No se consideran los valores de las salidas ya que de acuerdo con la nota 4.3.1 siempre toman los mismos independientemente de las acciones de control que se apliquen

4.3 Estudio de la existencia y unicidad de la ley de control

3 actuadores disponibles. Su modelo linealizado alrededor del punto de funcionamiento deseado es:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4.05e^{-27s} \frac{1}{50s+1} & 1.77e^{-28s} \frac{1}{60s+1} & 5.88e^{-27s} \frac{1}{50s+1} \\ 5.39e^{-18s} \frac{1}{50s+1} & 5.72e^{-14s} \frac{1}{60s+1} & 6.90e^{-15s} \frac{1}{40s+1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix} \quad (4.3-21)$$

la unidad de tiempo empleada es el minuto. y_1 e y_2 son, respectivamente, las composiciones de las partes superior y lateral de la columna de fraccionamiento, u_1 y u_2 son, respectivamente, las extracciones superior y lateral de la columna, y u_3 el reflujo de fondo. Dicho proceso presenta las siguientes restricciones:

- Limitación en los valores de los actuadores: $|u_j| \leq 0.5 \quad j = 1, 2, 3.$
- Limitación de los incrementos de los valores de los actuadores: $|\Delta u_j| \leq 0.2 \quad j = 1, 2, 3.$
- Limitación en los valores de las salidas: $|y_j| \leq 0.5 \quad j = 1, 2.$

Para el diseño del GPC se discretiza este modelo con ZOH a un periodo de muestreo de 4 minutos. Si se decide no pesar los incrementos de las acciones de control, $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$, y se elige $N_1 = 4$, $N_2 = 10$ y $N_u = 4$ entonces la matriz \mathbf{N} resultante no posee rango completo de columnas, lo cual implica que la ley de control no posee solución única.

Con el objetivo de comparar las dos alternativas propuestas para la obtención de una solución particular, en las figuras 4.1, 4.2 y 4.3 se han representando los valores que presentan los tres actuadores para ambas soluciones cuando inicialmente el proceso parte del equilibrio para $y_1 = 0.3$ e $y_2 = 0.3$ y la referencia impuesta es que ambas salidas alcancen el punto de funcionamiento asociado al modelo linealizado del proceso, es decir, que alcancen valor 0 en el régimen permanente. Para la minimización del coste económico se ha empleado $\mathbf{c}_u^T = [-1 \quad -1 \quad 1]$, lo cual supone ponderar con signo negativo las contribuciones de los dos primeros actuadores. Desde un punto de vista físico el efecto de los dos primeros es siempre un beneficio ya que supone la extracción de las fracciones ligera y semipesada. Por contra, el tercer actuador asociado al reflujo del fondo, supone siempre un coste ya que implica el uso de bombas que consumen energía eléctrica.

En la figura 4.4 se ha representado la evolución temporal de las dos salidas controladas, la cual, como ya se comentó anteriormente, es idéntica para ambas soluciones.

En las figuras 4.5 y 4.6 se han representado, respectivamente, el coste económico y el coste económico acumulado para ambas soluciones. Como se puede apreciar, la solución de mínimo coste económico posee en todo instante valores menores o iguales para ambos costes que la solución de mínima norma 2.

Nota 4.3.4 La metodología de mínimo coste económico no se planteó para el caso sin restricciones pues en dicha situación el problema de minimización (4.3-16) ya no sería

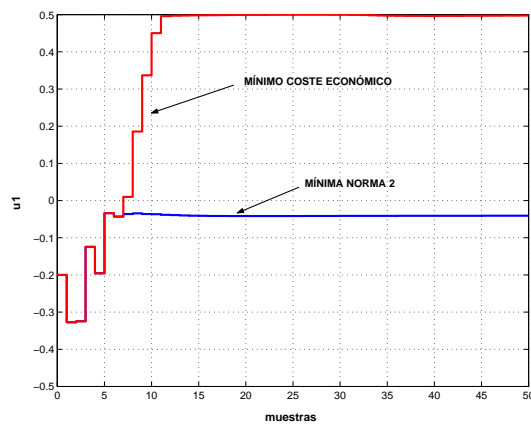


FIGURA 4.1: Valores que presenta el primer actuador para el caso de mínima norma 2 y para el caso de mínimo coste económico

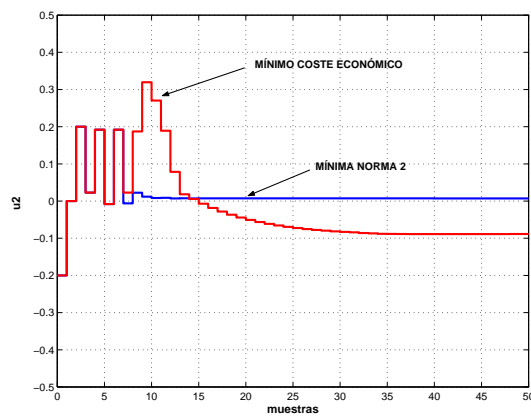


FIGURA 4.2: Valores que presenta el segundo actuador para el caso de mínima norma 2 y para el caso de mínimo coste económico

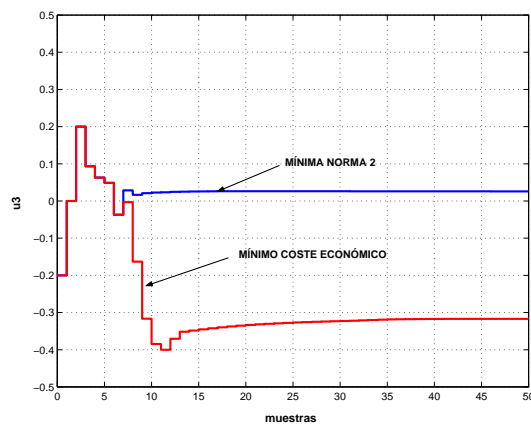


FIGURA 4.3: Valores que presenta el tercer actuador para el caso de mínima norma 2 y para el caso de mínimo coste económico

4.3 Estudio de la existencia y unicidad de la ley de control

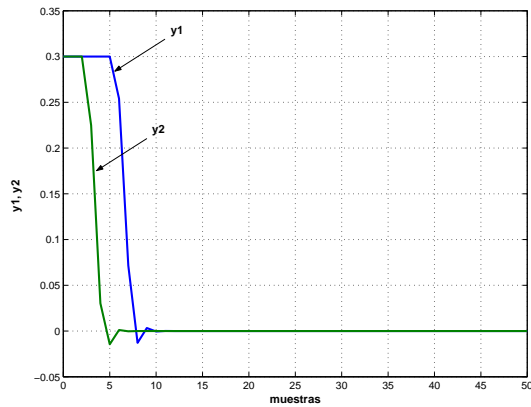


FIGURA 4.4: Evolución temporal que presentan las salidas controladas

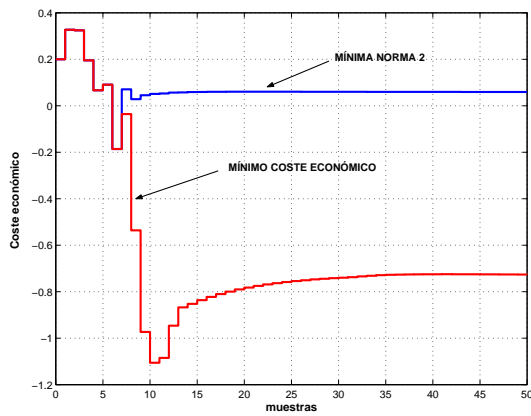


FIGURA 4.5: Valores que presenta el coste económico para el caso de mínima norma 2 y para el caso de mínimo coste económico

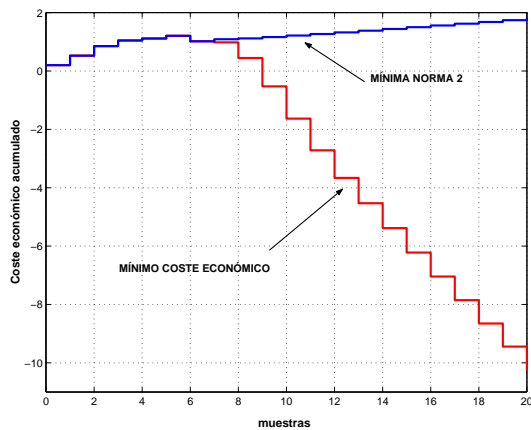


FIGURA 4.6: Valores que presenta el coste económico acumulado para el caso de mínima norma 2 y para el caso de mínimo coste económico

de programación lineal debido a la no existencia de restricciones. Además, las acciones de control que se obtendrían al resolver dicho problema de minimización no estarían acotadas proporcionando un valor de $-\infty$ para el coste económico.

4.4. Efecto de robustez del observador

En esta sección se pretende analizar el efecto de las perturbaciones y de las discrepancias entre modelo y proceso en la determinación de las salidas dentro del horizonte de predicción, en función de la dinámica asignada al observador de rango completo. El objetivo es tratar de analizar el error que se produce entre la predicción de las salidas y su verdadero valor real.

La predicción de las salidas en el instante $k + i$ viene dada por (3.3-8) y (3.6-1):

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{y}}(k+i|k) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{i-1}\hat{\mathbf{x}}(k+1) + \sum_{j=0}^{i-2} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^j\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k+i-j-1) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= (\bar{\mathbf{A}} - \Pi\bar{\mathbf{C}})\hat{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) + \Pi\bar{\mathbf{y}}(k)\end{aligned}\quad (4.4-1)$$

Supóngase que el proceso real viene dado por:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}^*\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}^*\bar{\mathbf{u}}(k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}^*\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{d}(k)\end{aligned}\quad (4.4-2)$$

siendo $\mathbf{d}(k)$ una señal de perturbación, y \mathbf{A}^* , \mathbf{B}^* y \mathbf{C}^* las verdaderas matrices de la representación interna del proceso real. El verdadero valor real de las salidas en $k + i$ es:

$$\bar{\mathbf{y}}(k+i) = \mathbf{C}^*\mathbf{A}^{*i-1}\bar{\mathbf{x}}(k+1) + \sum_{j=0}^{i-2} \mathbf{C}^*\mathbf{A}^{*j}\mathbf{B}^*\bar{\mathbf{u}}(k+i-j-1) + \mathbf{d}(k+i) \quad (4.4-3)$$

Para establecer la relación entre la predicción de las salidas $\bar{\mathbf{y}}(k+i|k)$ y el verdadero valor real de las salidas del proceso $\bar{\mathbf{y}}(k+i)$ se emplean las expresiones (4.4-1), (4.4-3) y (4.4-2):

$$\bar{\mathbf{y}}(k+i|k) = \bar{\mathbf{y}}(k+i) - \boldsymbol{\epsilon}(k+i)$$

siendo $\boldsymbol{\epsilon}(k+i)$ la salida del siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ \bar{\mathbf{x}}(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \Pi\bar{\mathbf{C}} & \Pi\mathbf{C}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{\mathbf{x}}(k) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi & \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \bar{\mathbf{u}}(k) \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\epsilon}(k+i) &= \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{i-1} & \mathbf{C}^*\mathbf{A}^{*i-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ \bar{\mathbf{x}}(k+1) \end{pmatrix} + \mathbf{d}(k+i) - \\ &\quad - \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{C}\mathbf{A}^{i-2}\mathbf{B}} & \dots & \overline{\mathbf{C}\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}(k+1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{u}}(k+i-1) \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.4-4)$$

4.4 Efecto de robustez del observador

con $\overline{CA^jB} = \tilde{C}\tilde{A}^j\tilde{B} - C^*A^{*j}B^*$.

Los polos asociados a la dinámica de $\epsilon(k+i)$ se corresponden, por un lado, con los del observador $\tilde{A} - \Pi\tilde{C}$, y por otro con los del proceso real A^* . Esto quiere decir, que una adecuada selección de los polos del observador puede reducir el efecto de la discrepancia entre la predicción de las salidas y su verdadero valor real, aproximando los valores de la predicción a los valores del proceso y no a los del modelo. Consecuentemente, con ello se proporciona mayor robustez al observador.

Los ceros también condicionan su dinámica y su valores, a diferencia de los polos, pueden cambiar con el valor del instante i dentro del horizonte de predicción. Esto significa que el efecto de robustez asociado a los polos del observador va a variar según de qué instante i se trate. Hay que hacer notar que no es sencillo, a partir de (4.4-4), deducir los ceros de la dinámica de $\epsilon(k+i)$. Por ello se va a analizar exclusivamente el instante $i = 1$.

En concreto, para dicho instante se puede obtener la matriz de transferencia que relaciona a ϵ con \mathbf{d} y \mathbf{u} mediante la siguiente expresión:

$$\epsilon(z) = \left\{ \begin{bmatrix} -\tilde{C} & C^* \end{bmatrix} \left(zI - \begin{bmatrix} \tilde{A} - \Pi\tilde{C} & \Pi C^* \\ \mathbf{0} & A^* \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \Pi & \tilde{B} \\ \mathbf{0} & B^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{d}(z) \\ \tilde{\mathbf{u}}(z) \end{pmatrix} \quad (4.4-5)$$

Tras una serie de operaciones matriciales (detalladas en el apéndice A LEMA A.2.5) se llega a la siguiente matriz de transferencia:

$$\epsilon(z) = - \operatorname{diag}_{j=1, \dots, n} \left(\frac{(z-1)A_j(z)}{(z-(1-\Omega_{jj}))(A_j(z) + F'_{jj}(z))} \right) \left[\mathbf{d}(z) + \left(C^*(zI - A^*)^{-1}B^* - \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \right) \tilde{\mathbf{u}}(z) \right] \quad (4.4-6)$$

De la expresión (4.4-6) se observa que la perturbación es filtrada por una matriz de transferencia que posee como polos los del observador, los cuales podrán ser seleccionados para rechazar de forma eficiente la perturbación $\mathbf{d}(k)$. Además, como esta matriz de transferencia posee un cero en 1 cancela el efecto de las perturbaciones de baja frecuencia.

Para el caso de discrepancias entre modelo y proceso la matriz de transferencia (4.4-6) proporciona un resultado muy similar al de la perturbación. Ahora la matriz de transferencia que filtraba la perturbación, filtra la discrepancia existente entre modelo y proceso. Consecuentemente, en función de la respuesta en frecuencia de la discrepancia se podrá hacer una adecuada selección de los polos del observador para conseguir un rechazo eficiente de la misma.

Para instantes posteriores al $i = 1$ éste análisis se dificulta, pues aumenta de forma importante la complejidad de la matriz de transferencia existente entre $\epsilon(k+i)$ y las

perturbaciones $\mathbf{d}(k)$ y las entradas $\mathbf{\bar{u}}(k)$, y, como consecuencia, aumenta la dificultad para interpretar el efecto del observador en el rechazo de las perturbaciones y de las discrepancias entre proceso y modelo. Pero lo que sí queda claro, es que en todas estas matrices de transferencia la dinámica viene impuesta por los polos del proceso real y los del observador (4.4-4), variando sólo sus ceros de unos instantes a otros.

Para el caso E/S y para procesos SISO, se presentaron resultados similares para el polinomio de filtrado [Clarke y Mohtadi 1989], en base a los trabajos de [Ljung 1987].

Estos resultados indican que una elección adecuada de los polos del observador puede conferir una mayor robustez al mismo. Esta idea supone desintonizar el observador llegando a una solución subóptima en relación a la que hubiera correspondido cuando modelo y proceso coincidieran, y que hubiera requerido una asignación de polos más rápidos, pero robusta en caso de existencia de discrepancias entre modelo y proceso, y presencia de perturbaciones.

EJEMPLO 4.4.1 En la sección 3.10 se realizó el diseño de controladores GPC para un reactor agitado. En el segundo caso se analiza la robustez del controlador GPC ante la presencia de perturbaciones aditivas en las salidas del proceso. Se plantearon dos alternativas para el diseño del controlador, una ubicando todos los polos del observador en 0 y otra ubicando todos los polos del observador en 0.9. De los resultados del control en bucle cerrado se dedujo que la segunda alternativa proporciona mayor robustez.

A esta misma conclusión se puede llegar si se emplea el análisis relativo a la discrepancia entre el valor predicho para las salidas y su verdadero valor real, a lo largo del horizonte de predicción. Como en este caso sólo hay perturbaciones habrá que analizar la dinámica existente entre $\epsilon(k+i)$ y $\mathbf{d}(k)$. En particular, para $i = 1$ se tiene que esta relación viene dada por la matriz de transferencia (4.4-6):

$$\epsilon(z) = - \text{diag}_{j=1,\dots,n} \left(\frac{(z-1)A_j(z)}{(z-(1-\Omega_{jj}))(A_j(z)+F'_{jj}(z))} \right) \mathbf{d}(z)$$

Esta matriz de transferencia es diagonal por bloques, ya que cada perturbación afecta sólo a una salida. Para el caso del reactor agitado cuando todos los polos del observador se ubican en 0 dicha matriz es:

$$\mathbf{G}_1(z) = \begin{bmatrix} \frac{(z-1)(z-0.99)(z-0.9048)}{z^3} & 0 \\ 0 & \frac{(z-1)(z-0.9802)(z-0.9753)}{z^3} \end{bmatrix} \quad (4.4-7)$$

y cuando todos los polos se ubican en 0.9 es:

$$\mathbf{G}_2(z) = \begin{bmatrix} \frac{(z-1)(z-0.99)(z-0.9048)}{(z-0.9)^3} & 0 \\ 0 & \frac{(z-1)(z-0.9802)(z-0.9753)}{(z-0.9)^3} \end{bmatrix} \quad (4.4-8)$$

4.4 Efecto de robustez del observador

Para comparar la robustez de ambos diseños, en la figura 4.7 se han representado los diagramas de Bode correspondientes a las funciones de transferencia asociadas a la discrepancia entre la predicción de la primera salida y su valor real, $\epsilon_1(z)$, y la perturbación que actúa sobre la salida 1, $d_1(z)$, para ambos diseños.

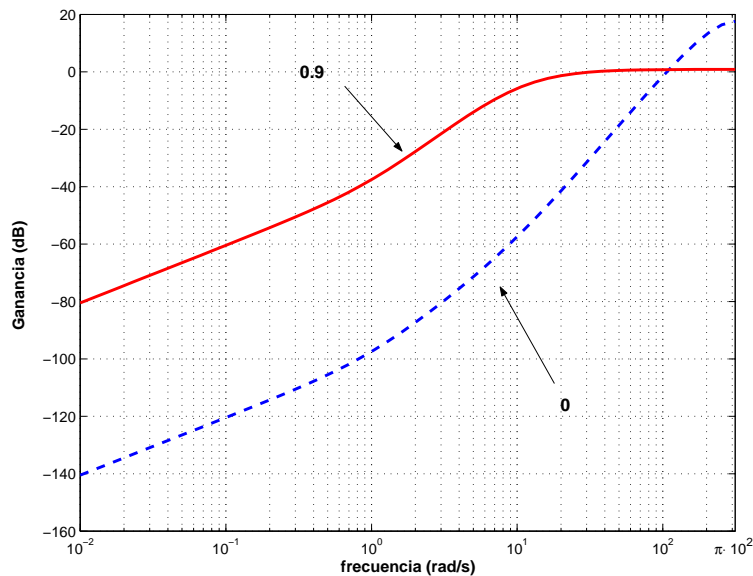


FIGURA 4.7: Diagramas de Bode de la relación entre $\epsilon_1(z)$ y $d_1(z)$ relativos a la primera salida. La línea continua corresponde al diseño con todos los polos del observador en 0.9 y la discontinua con todos los polos en 0.

En dicha figura se aprecia que el diseño con todos los polos en 0.9 mejora el filtrado de las señales de alta frecuencia, lo cual es más indicado cuando éstas están presentes en la perturbación. Esta circunstancia se da en este caso, pues las perturbaciones son aleatorias, y por tanto, contienen componentes de todas las frecuencias. Además, si se calcula la norma infinito de la función de transferencia en ambos casos, se obtiene para el caso de todos los polos en 0.9 un valor de 1.1068 (0.8813 dB) y 7.5939 (17.6093 dB) para el caso de todos los polos en 0, lo cual supone reducir la norma infinito en, aproximadamente, un 85%.

Al mismo resultado se llega para la segunda salida si se representan los diagramas de Bode entre $\epsilon_2(z)$ y $d_2(z)$ para ambos diseños. De este análisis se deduce que el diseño con todos los polos del observador en 0.9 debe de ser más robusto que el diseño con todos en 0, la misma conclusión a la que se llegó en la sección 3.10.

EJEMPLO 4.4.2 El objetivo de este ejemplo es el de mostrar el efecto de robustez del observador cuando existen discrepancias entre modelo y proceso real, para el caso del reactor

agitado 3.10. Supóngase que el proceso real viene dado por:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1.2}{1+0.1s} & \frac{0.7 \cdot 5}{1+s} \\ \frac{1.1}{1+0.5s} & \frac{0.9 \cdot 2}{1+0.4s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (4.4-9)$$

Si se diseña el GPC con el modelo inicial del reactor (3.10-1) empleando los mismos parámetros del caso 1 y ubicando todos los polos del observador en 0, los resultados de la simulación (figura 4.8) del control del proceso real (4.4-9) muestran que el controlador no es robusto para las discrepancias existentes entre modelo y proceso real, puesto que, ni tan siquiera las salidas alcanzan las referencias. Por ello, se realiza un nuevo diseño del controlador ubicando todos los polos del observador en 0.8, con el objetivo de aumentar la robustez del controlador. Los resultados de la simulación con este nuevo controlador se muestran también en la figura 4.8. Como se aprecia, en el segundo diseño se puede considerar el funcionamiento del controlador como aceptable, ya que, consigue que las salidas alcancen las referencias sin excesivas oscilaciones.

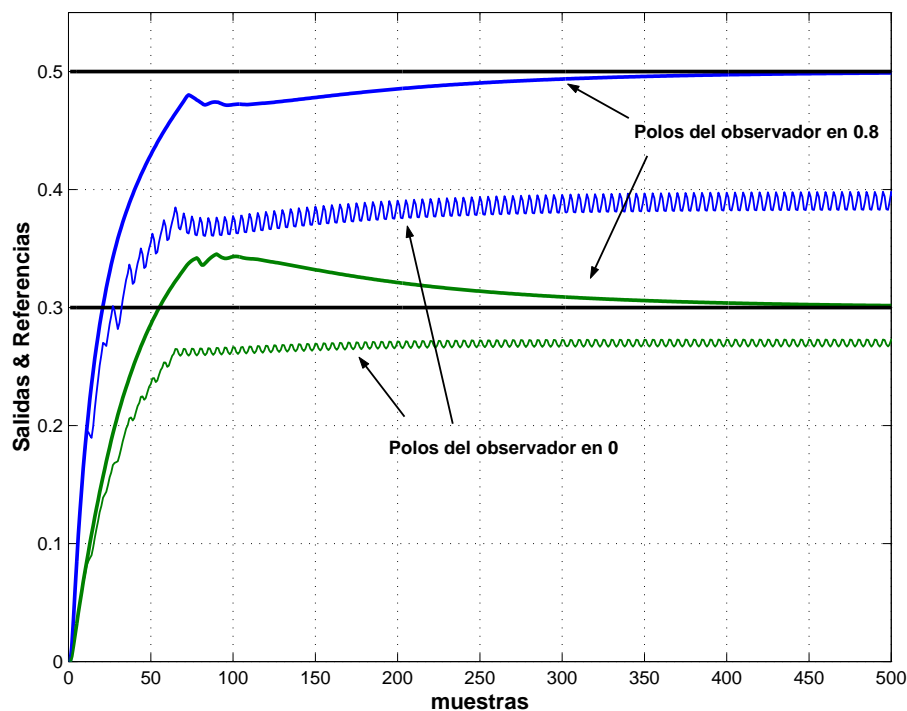


FIGURA 4.8: Salidas del reactor agitado utilizando los dos GPC diseñados.

Para realizar una comparativa de ambos diseños en cuanto a robustez, en la figura 4.9 se ha representado la norma 2 de la respuesta en frecuencia de la matriz de transferencia que relaciona a $\epsilon(z)$ con las entradas $u(z)$ (4.4-6), para cada diseño. Dicha matriz de

4.4 Efecto de robustez del observador

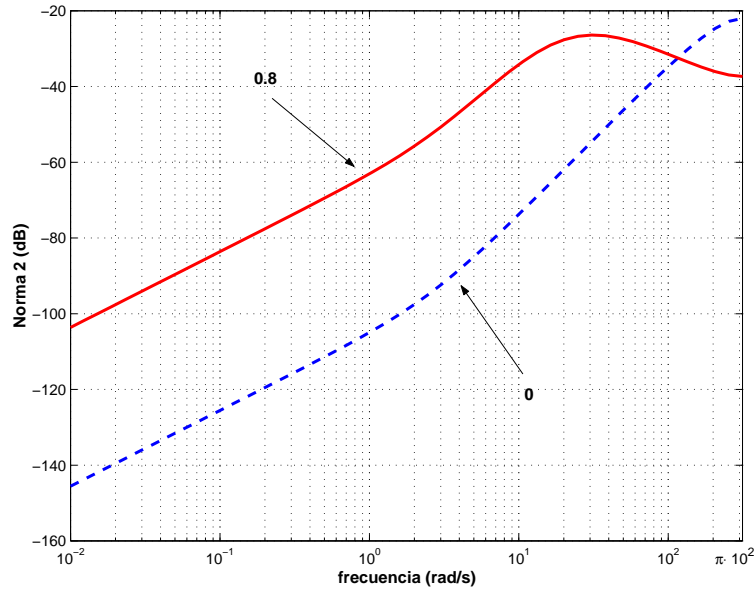


FIGURA 4.9: Norma 2 de la respuesta en frecuencia correspondiente a la relación entre $\epsilon(z)$ y $\mathbf{u}(z)$. La línea continua corresponde al diseño con todos los polos del observador en 0.8 y la discontinua con todos los polos en 0.

transferencia para el caso de ubicar todos los polos del observador en 0.8 es:

$$\mathbf{G}_3(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.019033(z-1)(z-0.99)}{(z-0.8)^3} & -\frac{0.0049751(z-1)(z-0.9048)}{(z-0.8)^3} \\ \frac{0.0019801(z-1)(z-0.9753)}{(z-0.8)^3} & -\frac{0.0064194(z-1)(z-0.9802)}{(z-0.8)^3} \end{bmatrix} \quad (4.4-10)$$

y para el caso de todos los polos en 0 es:

$$\mathbf{G}_4(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.019033(z-1)(z-0.99)}{z^3} & -\frac{0.0049751(z-1)(z-0.9048)}{z^3} \\ \frac{0.0019801(z-1)(z-0.9753)}{z^3} & -\frac{0.0064194(z-1)(z-0.9802)}{z^3} \end{bmatrix} \quad (4.4-11)$$

Como se aprecia, el diseño con todos los polos en 0.8 produce una mayor atenuación de las componentes de alta frecuencia presentes en las entradas, además de reducir la norma infinito de matriz de transferencia entre $\epsilon(z)$ y $\mathbf{u}(z)$ de 0.0794 (-22.5104 dB) a 0.0479 (-26.3933 dB), lo cual implica, aproximadamente, un 40% de reducción. Consecuentemente, esto supone un aumento en cuanto a la robustez frente a las entradas en presencia de discrepancias cuando todos los polos se ubican en 0.8.

Nota 4.4.1 La metodología aquí presentada es útil para poder analizar la robustez que produce en la predicción una determinada dinámica asignada al observador cuando $i = 1$. Sin embargo, dado que el efecto para instantes $i \geq 2$ es complejo de analizar con este método, no parece una técnica indicada para realizar un diseño óptimo de los polos del

observador para garantizar la estabilidad del bucle cerrado, entre otras razones, porque no tiene en cuenta el posible efecto de robustez del controlador y de sus parámetros (N_2 , N_u , etc.).

4.5. Análisis del bucle cerrado para el caso sin restricciones cuando no existen discrepancias entre modelo y proceso y no se presentan perturbaciones

En la sección 3.7 se estableció la representación interna del bucle cerrado para el GPC MIMO sin restricciones:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ \mathbf{x}_u(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* - \mathbf{B}^* \sigma \mathbf{P} \mathbf{C}^* & -\mathbf{B}^* \sigma \mathbf{M} & \mathbf{B}^* \\ (\mathbf{\Pi} - \bar{\mathbf{B}} \sigma \mathbf{P}) \mathbf{C}^* & \bar{\mathbf{A}} - \mathbf{\Pi} \bar{\mathbf{C}} - \bar{\mathbf{B}} \sigma \mathbf{M} & \bar{\mathbf{B}} \\ -(\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \sigma \mathbf{P} \mathbf{C}^* & -(\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \sigma \mathbf{M} & \mathbf{I} - \sigma \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{x}_u(k) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{B}^* \sigma & -\mathbf{B}^* \sigma \mathbf{P} & \mathbf{B}^* & \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{B}} \sigma & \mathbf{\Pi} - \bar{\mathbf{B}} \sigma \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \sigma & -(\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \sigma \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\omega}(k) \\ \mathbf{d}_y(k) \\ \mathbf{d}_u(k) \\ \mathbf{d}_x(k) \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{y}}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{x}_u(k) \end{pmatrix} + \mathbf{d}_y(k) \end{aligned} \quad (4.5-1)$$

Los estados del modelo CARIMA $\mathbf{x}(k)$ se clasifican en dos categorías, una correspondiente a los estados determinísticos $\bar{\mathbf{x}}(k)$ y otra a los estados del ruido $\bar{\mathbf{x}}^*(k)$:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{\mathbf{x}}^*(k) \end{pmatrix} \quad (4.5-2)$$

Consecuentemente, el valor estimado u observado de los estados del modelo CARIMA también admite esta clasificación:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{pmatrix} \hat{\bar{\mathbf{x}}}(k) \\ \hat{\bar{\mathbf{x}}}^*(k) \end{pmatrix} \quad (4.5-3)$$

Si se define a \mathbf{e}_D como el error en la estimación de los estados determinísticos:

$$\mathbf{e}_D(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) - \hat{\bar{\mathbf{x}}}(k) \quad (4.5-4)$$

se obtiene la siguiente expresión para la estimación de los estados del modelo CARIMA:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{e}_D(k) \\ \hat{\bar{\mathbf{x}}}^*(k) \end{pmatrix} \quad (4.5-5)$$

4.5 Análisis del bucle cerrado para el caso sin restricciones

En este punto se intenta analizar si es posible obtener una representación interna de menor orden cuando no existen discrepancias entre modelo y proceso y las perturbaciones no están presentes:

$$A^* = A, \quad B^* = B, \quad C^* = C \quad (4.5-6)$$

Con estas condiciones y recordando que:

$$\begin{aligned} \Pi &= \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ I \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \Pi_1 \Omega \\ \bar{A} &= \begin{pmatrix} A & \Sigma \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = [C \quad \Omega] \end{aligned} \quad (4.5-7)$$

la representación interna del bucle cerrado queda así:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \bar{x}(k+1) \\ \bar{x}(k+1) - e_D(k+1) \\ \hat{x}^*(k+1) \\ x_u(k+1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A - B\sigma PC & -B\sigma M & B \\ \left(\begin{pmatrix} \Pi_1 \\ I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \sigma P \right) C & \begin{pmatrix} A & \Sigma \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ I \end{pmatrix} [C \quad \Omega] - \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \sigma M & \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \\ -(I - \sigma O)\sigma PC & -(I - \sigma O)\sigma M & I - \sigma O \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{x}(k) - e_D(k) \\ \hat{x}^*(k) \\ x_u(k) \end{pmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} B\sigma \\ \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \sigma \\ (I - \sigma O)\sigma \end{bmatrix} \hat{\omega}(k) \\ \bar{y}(k) &= [C^* \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{x}(k) - e_D(k) \\ \hat{x}^*(k) \\ x_u(k) \end{pmatrix} = [C^* \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ e_D(k) \\ \hat{x}^*(k) \\ x_u(k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5-8)$$

Operando en la ecuación matricial de estado:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \bar{x}(k+1) \\ \bar{x}(k+1) - e_D(k+1) \\ \hat{x}^*(k+1) \\ x_u(k+1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A - B\sigma PC & -B\sigma M_1 & -B\sigma M_2 & B \\ \Pi_1 C - B\sigma PC & A - \Pi_1 C - B\sigma M_1 & -B\sigma M_2 & B \\ C & -C & I - \Omega & 0 \\ -(I - \sigma O)\sigma PC & -(I - \sigma O)\sigma M_1 & -(I - \sigma O)\sigma M_2 & I - \sigma O \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{x}(k) - e_D(k) \\ \hat{x}^*(k) \\ x_u(k) \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} B\sigma \\ B\sigma \\ 0 \\ (I - \sigma O)\sigma \end{bmatrix} \hat{\omega}(k)$$

donde la matriz M ha sido descompuesta en la forma:

$$M = [M_1 \quad M_2] \quad (4.5-9)$$

el número de columnas de M_1 se corresponde con el número de elementos de $\bar{x}(r)$, y el número de columnas de M_2 se corresponde con el número de elementos de $\hat{x}^*(n)$.

Ahora se extraen las ecuaciones de la ecuación matricial de estado:

$$\bar{x}(k+1) = (A - B\sigma PC)\bar{x}(k) - B\sigma M_1(\bar{x}(k) - e_D(k)) - B\sigma M_2 \hat{x}^*(k) + Bx_u(k) + B\sigma \hat{\omega}(k)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) - e_D(k+1) &= (\Pi_1 C - B\sigma PC)\bar{x}(k) + (A - \Pi_1 C - B\sigma M_1)(\bar{x}(k) - e_D(k)) - \\ &\quad - B\sigma M_2 \hat{x}^*(k) + Bx_u(k) + B\sigma \hat{\omega}(k) \end{aligned}$$

$$\hat{x}^*(k+1) = C\bar{x}(k) - C(\bar{x}(k) - e_D(k)) + (I - \Omega)\hat{x}^*(k)$$

$$\begin{aligned} x_u(k+1) &= -(I - \sigma O)\sigma PC\bar{x}(k) - (I - \sigma O)\sigma M_1(\bar{x}(k) - e_D(k)) - \\ &\quad - (I - \sigma O)\sigma M_2 \hat{x}^*(k) + (I - \sigma O)x_u(k) + (I - \sigma O)B\sigma \hat{\omega}(k) \end{aligned}$$

simplificando las ecuaciones:

$$\bar{x}(k+1) = (A - B\sigma(M_1 + PC))\bar{x}(k) + B\sigma M_1 e_D(k) - B\sigma M_2 \hat{x}^*(k) + Bx_u(k) + B\sigma \hat{\omega}(k) \quad (4.5-10)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) - e_D(k+1) &= (A - B\sigma(M_1 + PC))\bar{x}(k) - (A - \Pi_1 C - B\sigma M_1)e_D(k) - \\ &\quad - B\sigma M_2 \hat{x}^*(k) + Bx_u(k) + B\sigma \hat{\omega}(k) \end{aligned} \quad (4.5-11)$$

$$\hat{x}^*(k+1) = Ce_D(k) + (I - \Omega)\hat{x}^*(k) \quad (4.5-12)$$

$$\begin{aligned} x_u(k+1) &= -(I - \sigma O)\sigma(M_1 + PC)\bar{x}(k) + (I - \sigma O)\sigma M_1 e_D(k) - \\ &\quad - (I - \sigma O)\sigma M_2 \hat{x}^*(k) + (I - \sigma O)x_u(k) + (I - \sigma O)B\sigma \hat{\omega}(k) \end{aligned} \quad (4.5-13)$$

si a la ecuación (4.5-10) se le resta la ecuación (4.5-11):

$$e_D(k+1) = (A - \Pi_1 C)e_D(k) \quad (4.5-14)$$

Combinando las ecuaciones (4.5-10), (4.5-12), (4.5-13) y (4.5-14) se obtiene la nueva expresión de la ecuación matricial de estado:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}(k+1) \\ x_u(k+1) \\ e_D(k+1) \\ \hat{x}^*(k+1) \end{pmatrix} =$$

4.6 Análisis del bucle cerrado para el caso sin restricciones

$$\begin{aligned}
 = & \begin{bmatrix} A - B\sigma(M_1 + PC) & B & B\sigma M_1 & -B\sigma M_2 \\ -(I - \sigma O)\sigma(M_1 + PC) & (I - \sigma O) & (I - \sigma O)\sigma M_1 & -(I - \sigma O)\sigma M_2 \\ 0 & 0 & A - \Pi_1 C & 0 \\ 0 & 0 & C & I - \Omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ x_u(k) \\ e_D(k) \\ \hat{x}^*(k) \end{pmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} B\sigma \\ (I - \sigma O)\sigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\omega}(k) \quad (4.5-15)
 \end{aligned}$$

Si se analizan las expresiones (4.5-15) y (4.5-8) se aprecia que los estados e_D y \hat{x}^* son no controlables y que su dinámica asociada es estable, ya que ésta es la del observador de rango completo. Consecuentemente, si se desea obtener una realización mínima del bucle cerrado dichos estados tendrán que ser eliminados. Si se aplica esta eliminación, la representación interna del bucle cerrado que resulta es:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \bar{x}(k+1) \\ x_u(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} A - B\sigma(M_1 + PC) & B \\ -(I - \sigma O)\sigma(M_1 + PC) & I - \sigma O \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ x_u(k) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B\sigma \\ (I - \sigma O)\sigma \end{bmatrix} \hat{\omega}(k) \\
 \bar{y}(k) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ x_u(k) \end{pmatrix} \quad (4.5-16)
 \end{aligned}$$

Nótese que para alcanzar este resultado no se ha exigido que el controlador GPC MIMO estabilice al proceso, simplemente que no existan discrepancias entre modelo y proceso, que no se presenten perturbaciones, y que el observador posea una dinámica estable. Como consecuencia de este desarrollo se puede enunciar la siguiente proposición:

Proposición 4.5.1 *Si no existen discrepancias entre modelo y proceso, $A = A^*$, $B = B^*$ y $C = C^*$, no hay presentes perturbaciones, y todos los valores propios de la matriz Γ del observador están dentro del disco unidad, entonces la representación interna del bucle cerrado proceso+GPC MIMO se puede reducir a (4.5-16).*

Nota 4.5.1 *Es importante destacar que en (4.5-15) se aprecia claramente el principio de separación relativo al diseño del observador, cuando el modelo y el proceso son idénticos.*

Nota 4.5.2 *La reducción en la representación interna del bucle cerrado (4.5-16) muestra que los polos del observador no aparecen en la representación mínima del bucle cerrado, lo cual corrobora y extiende el resultado obtenido en [Yoon y Clarke 1993] para el caso de procesos SISO y en formulación E/S, en el caso de coincidencia entre modelo y proceso.*

Nota 4.5.3 *Si la matriz $\bar{R} = 0$ es posible simplificar aún más la representación interna del bucle cerrado. En la **proposición** A.2.6 del apéndice A se analiza dicho caso particular.*

4.6. Conclusiones del capítulo

1. Se ha realizado un análisis de la observabilidad del modelo CARIMA propuesto. Este análisis ha revelado que si ningún polo del observador se ubica en 1, entonces dicho modelo es observable. Se ha estudiado, además, la controlabilidad de dicho modelo. Bajo condiciones no demasiado restrictivas es posible garantizar que es controlable. Si se combinan ambas propiedades se deduce que el modelo CARIMA propuesto es una realización mínima. Esto viene a significar que las expresiones propuestas para el modelo de predicción se basan en matrices del menor tamaño posible, pues el número de estados empleados es el mínimo necesario.
2. Se ha analizado la unicidad de la ley de control del GPC MIMO (sin y con restricciones), presentándose varios criterios que justifican cuando ocurre esto. Uno de ellos está relacionado con propiedades estructurales del proceso a través de la matriz N , a la cual se le exige que posea rango completo. Para aquellos casos en los que la ley de control no tenga solución única, se han propuesto dos metodologías para la elección de una determinada solución. La primera consiste en aplicar la solución de mínima norma 2, y la segunda en escoger la que conduzca a un menor coste económico. No obstante, sea cual sea la que se aplique en k el valor de las salidas en $k + 1$ siempre es el mismo.
3. Se ha justificado el efecto de robustez del observador a la hora de tratar de reducir tanto el efecto de las perturbaciones como el de las discrepancias entre modelo y proceso en la determinación de los valores de las salidas, para que éstas se acomoden a las del proceso real y no a las del modelo. Dicho efecto de robustez se basa en realizar una adecuada selección de los polos del observador. Esta selección puede realizarse en base a estudiar la respuesta en frecuencia que se presenta entre $\epsilon(z)$ y las perturbaciones y entradas. Los casos estudiados en la aplicación del reactor agitado demuestran las ideas anteriores.
4. El análisis de robustez aquí presentado se ciñe, exclusivamente, al observador, sin embargo, hay que destacar que los parámetros de diseño del controlador (N_2 , N_u , etc.), en conjunción con los polos del observador, podrán ser seleccionados para garantizar la robustez del bucle cerrado.
5. Para el caso sin restricciones y cuando no existen discrepancias entre modelo y proceso y no se presentan perturbaciones, se llega a la conclusión de que los polos del observador no se ven reflejados en la representación interna mínima del bucle cerrado.

CAPÍTULO 5

Análisis y diseño de GPC estable

5.1. Introducción	127
5.2. Análisis de estabilidad nominal sin restricciones	128
5.2.1. Valor óptimo del índice de coste	128
5.2.2. Análisis de estabilidad	131
5.2.2.1. Casos en los que J_k^* no es función de Lyapunov	134
5.3. Diseño estable del GPC sin restricciones	139
5.3.1. Garantía de estabilidad	140
5.3.2. Método iterativo de elección de N_u y N_2 para diseño estable	143
5.4. Análisis de estabilidad con restricciones	146
5.4.1. Introducción	146
5.4.2. Resolubilidad	146
5.4.2.1. Aplicación de la Teoría de Conjuntos Invariantes al GPC	148
5.4.2.2. Caso de estimación de los estados mediante observador	159
5.5. Diseño estable de GPC con restricciones	168
5.5.1. Garantía de estabilidad	168
5.5.2. Método iterativo de elección de N_2 y N_u para diseño estable	169
5.6. Conclusiones del capítulo	172

5.1. Introducción

En este capítulo se va a realizar el análisis de la estabilidad del bucle cerrado formado por el proceso real y el controlador GPC para el caso de que no existan discrepancias

entre modelo y proceso, ni se presenten perturbaciones. A partir de este análisis se propondrá una metodología de diseño estable para el GPC.

En el capítulo siguiente se realizará el análisis de estabilidad robusta cuando hay discrepancias entre modelo y proceso y se presentan perturbaciones, así como el desarrollo de metodologías de diseño que garanticen estabilidad robusta.

Así pues, en la primera parte de este capítulo se abordará el análisis y diseño para el caso sin restricciones empleando las representaciones simplificadas para el bucle cerrado deducidas en el capítulo anterior. Dicho estudio se basará en el uso del valor óptimo del índice de coste como función de Lyapunov.

En la segunda parte de este capítulo se abordará el análisis y diseño para el caso con restricciones sobre las acciones de control y las salidas. En primer lugar se presentarán ideas básicas relacionadas con la teoría de conjuntos invariantes para garantizar la resolubilidad del problema de optimización con restricciones. Tras esto, se justificará la estabilidad del bucle cerrado con restricciones empleando, nuevamente, el valor óptimo del índice de coste como función de Lyapunov.

Para ambos casos, con y sin restricciones, se justifica que existen tamaños para los horizontes de predicción y control que garantizan la estabilidad del bucle cerrado. Partiendo de este resultado, se propondrá una metodología de diseño estable para el GPC, basada en encontrar los mínimos valores para los horizontes de predicción y control que garanticen estabilidad.

5.2. Análisis de estabilidad nominal sin restricciones

5.2.1. Valor óptimo del índice de coste

El índice de coste del GPC MIMO es (3.4-6):

$$J_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)) = (\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k))^T \bar{\mathbf{Q}} (\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k)) + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T(k) \bar{\mathbf{R}} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k)$$

introduciendo el error de la respuesta libre $\hat{\mathbf{e}}_c(k)$ (3.5-3):

$$J_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)) = \hat{\mathbf{e}}_c(k)^T \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{e}}_c(k) + 2 \hat{\mathbf{e}}_c(k)^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) + \Delta \hat{\mathbf{u}}(k)^T (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}) \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) \quad (5.2-1)$$

la solución para el caso sin restricciones es:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = - (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{e}}_c(k) \quad (5.2-2)$$

Sustituyendo la solución óptima en el índice (5.2-1):

$$J_k^* = \hat{\mathbf{e}}_c(k)^T \mathcal{K}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{R}}) \hat{\mathbf{e}}_c(k) \quad (5.2-3)$$

$$\text{con } \mathcal{K}(\bar{Q}, \bar{R}) = [\bar{Q} - \bar{Q}N(N^T\bar{Q}N + R)^{-1}N^T\bar{Q}].$$

Nota 5.2.1 La matriz \mathcal{K} en el caso de que $\bar{R} = \mathbf{0}$ y la matriz N sea cuadrada, es decir, $n^\circ \text{filas}(N) = n^\circ \text{columnas}(N)$ ($(N_2 - N_1 + 1) \cdot n = N_u \cdot m^1$) y de rango completo, toma el siguiente valor:

$$\mathcal{K} = \bar{Q} - \bar{Q}N(N^T\bar{Q}N)^{-1}N^T\bar{Q} = \mathbf{0} \quad (5.2-4)$$

Este resultado indica que a lo largo del horizonte de predicción las salidas predichas alcanzan las referencias con las acciones de control óptimas, es decir, que el GPC es un controlador de tiempo mínimo. Esto se consigue a costa de permitir cualquier valor para los incrementos de las acciones de control, pues $\bar{R} = \mathbf{0}$. Esta situación es equivalente a imponer en bucle abierto restricciones terminales de igualdad, lo cual garantiza estabilidad en bucle cerrado [Clarke y Scattolini 1991].

A partir de la expresión deducida para el valor óptimo del índice de coste, se va a obtener una nueva expresión para dicho valor empleando la expresión que define el error de la respuesta libre.

La obtención de dicho valor óptimo se realizará, en primer lugar, bajo la hipótesis de que todos los estados del modelo CARIMA son medibles y, más tarde, para el caso de que sea necesario estimarlos mediante el observador de rango completo propuesto en el capítulo 3.

En este caso la representación interna del bucle cerrado se podía reducir a (4.5-16):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k+1) \\ \mathbf{x}_u(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} A - B\sigma(M_1 + PC) & B \\ -(I - \sigma O)\sigma(M_1 + PC) & I - \sigma O \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{x}_u(k) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B\sigma \\ (I - \sigma O)\sigma \end{bmatrix} \hat{\omega}(k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) &= \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{x}_u(k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.2-5)$$

La expresión para el error bajo acciones de control constantes es (3.5-3):

$$\hat{\mathbf{e}}_c(k) = \hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k) - N\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) = M\hat{\mathbf{x}}(k) + O\hat{\mathbf{u}}(k-1) + P\bar{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k) \quad (5.2-6)$$

como se supone que se dispone de la medida de los estados y no hay perturbaciones:

$$M\hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}^*(k) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = M_1\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (5.2-7)$$

obteniéndose que:

$$\hat{\mathbf{e}}_c(k) = M_1\bar{\mathbf{x}}(k) + O\hat{\mathbf{u}}(k-1) + P\bar{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k) \quad (5.2-8)$$

¹ n es el número de salidas y m el número de entradas.

Empleando el resultado de la **Proposición** 3.5.2:

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{x}_u(k) - \sigma \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}(k) + \sigma \hat{\omega}(k) - \sigma \mathbf{P} \bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{x}_u(k) - \sigma \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{x}}(k) + \sigma \hat{\omega}(k) - \sigma \mathbf{P} \bar{\mathbf{y}}(k) \quad (5.2-9)$$

es posible sustituir el valor de $\bar{\mathbf{u}}(k-1)$ en (5.2-8):

$$\hat{\mathbf{e}}_c(k) = \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{O} \mathbf{x}_u(k-1) - \mathbf{O} \sigma \mathbf{M}_1 \bar{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{O} \sigma \hat{\omega}(k-1) - \mathbf{O} \sigma \mathbf{P} \bar{\mathbf{y}}(k-1) + \mathbf{P} \bar{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k) \quad (5.2-10)$$

Ahora se sustituyen los valores de las salidas en $k-1$ y k empleando la ecuación de salida de la representación interna del bucle cerrado (5.2-5):

$$\hat{\mathbf{e}}_c(k) = (\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C}) \bar{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{O} \sigma (\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C}) \bar{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{O} \mathbf{x}_u(k-1) + \mathbf{O} \sigma \hat{\omega}(k-1) - \hat{\omega}(k) \quad (5.2-11)$$

El siguiente paso consiste en sustituir el valor de los estados del proceso correspondientes al instante k utilizando la representación interna del bucle cerrado (5.2-5):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_c(k) = & [(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})) - \mathbf{O}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})] \bar{\mathbf{x}}(k-1) + \\ & + ((\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})\mathbf{B} + \mathbf{O}) \mathbf{x}_u(k-1) + ((\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})\mathbf{B} + \mathbf{O}) \sigma \hat{\omega}(k-1) - \hat{\omega}(k) \end{aligned} \quad (5.2-12)$$

Finalmente se obtiene que:

$$\hat{\mathbf{e}}_c(k) = \mathcal{T} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \mathbf{x}_u(k-1) \\ \hat{\omega}(k-1) \\ \hat{\omega}(k) \end{pmatrix} \quad (5.2-13)$$

siendo:

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \{(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})) - \mathbf{O}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})\}^T \\ ((\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})\mathbf{B} + \mathbf{O})^T \\ \{((\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})\mathbf{B} + \mathbf{O}) \sigma\}^T \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}^T \quad (5.2-14)$$

Si se utiliza la expresión (5.2-12) en la ecuación del coste óptimo del índice (5.2-3) se obtiene:

$$J_k^* = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \mathbf{x}_u(k-1) \\ \hat{\omega}(k-1) \\ \hat{\omega}(k) \end{pmatrix}^T \mathcal{T}^T \mathcal{K}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{R}}) \mathcal{T} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \mathbf{x}_u(k-1) \\ \hat{\omega}(k-1) \\ \hat{\omega}(k) \end{pmatrix} \quad (5.2-15)$$

como se puede apreciar este valor óptimo depende de los estados del proceso en $k-1$, de los del controlador en $k-1$ y de las referencias impuestas a lo largo de los horizontes de predicción correspondientes a los instantes $k-1$ y k .

Para el caso en que los estados del modelo CARIMA no sean medibles va a ser necesario emplear un observador, en particular el propuesto en esta tesis, para estimar sus valores. Como no hay discrepancias entre modelo y proceso y no se presentan perturbaciones, es posible aplicar el *Principio de separación* [O'Reilly, J. 1983] según el cual se pueden diseñar de forma separada observador y controlador. Dicho efecto, para el controlador GPC y el observador propuesto, se percibe en la ecuación (4.5-15). En concreto, para garantizar estabilidad basta con exigir que la dinámica del observador sea estable, y que la dinámica del controlador más el proceso real sea también estable. Esta última dinámica se obtiene suponiendo que los estados son medibles. Consecuentemente, para realizar el análisis de estabilidad cuando los estados no son medibles puede emplearse también la expresión para el valor óptimo del índice de coste (5.2-15), con la condición adicional de haber elegido polos estables para el observador.

Usualmente, las referencias impuestas para todas las salidas son constantes:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(k + N_1) = \bar{\omega}(k + N_1 + 1) = \dots = \bar{\omega}(k + N_2) = \bar{\omega}_0 \\ \hat{\omega}(k) = \begin{pmatrix} \bar{\omega}(k) \\ \bar{\omega}(k) \\ \vdots \\ \bar{\omega}(k) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \bar{\omega}(k) = U\bar{\omega}(k) = U\bar{\omega}_0 \quad \forall k \end{aligned} \quad (5.2-16)$$

donde $\bar{\omega}_0$ es un vector que contiene los valores a alcanzar en régimen permanente. Si utiliza este resultado en (5.2-15):

$$J_k^* = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \mathbf{x}_u(k-1) \\ \bar{\omega}_0 \end{pmatrix}^T \mathcal{T}_1^T \mathcal{K}(\bar{Q}, \bar{R}) \mathcal{T}_1 \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \mathbf{x}_u(k-1) \\ \bar{\omega}_0 \end{pmatrix} \quad (5.2-17)$$

siendo:

$$\mathcal{T}_1 = \begin{bmatrix} \{(\mathbf{M}_1 + \mathbf{PC})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{PC})) - \mathbf{O}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{PC})\}^T \\ ((\mathbf{M}_1 + \mathbf{PC})\mathbf{B} + \mathbf{O})^T \\ \{[(\mathbf{M}_1 + \mathbf{PC})\mathbf{B} + \mathbf{O}]\sigma - \mathbf{I}\} \mathbf{U} \}^T \end{bmatrix}^T \quad (5.2-18)$$

5.2.2. Análisis de estabilidad

En este punto se empleará el valor óptimo del índice de coste, obtenido en el punto anterior, como función de Lyapunov del bucle cerrado, con la hipótesis de que las referencias para todas las salidas son constantes, ya que se va a estudiar la estabilidad para el problema de regulación. Consecuentemente, será necesario emplear la expresión del valor óptimo deducida en dicha situación (5.2-17).

5.2 Análisis de estabilidad nominal sin restricciones

Para facilitar los desarrollos se realizará un cambio en todas las variables $\bar{\mathbf{x}}$, \mathbf{x}_u , \mathbf{y} y \mathbf{u} , de tal forma que tomen valores nulos una vez se alcance el régimen permanente. Dicho cambio es posible ya que siempre se puede encontrar un sistema equivalente que lo cumpla. En concreto, si las referencias constantes impuestas vienen dadas por $\bar{\omega}_0$ (C.2-8), se definen las siguientes variables:

$$\Delta\bar{\mathbf{x}}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) - \bar{\mathbf{x}}_0 \quad ; \quad \Delta\mathbf{x}_u(k) = \mathbf{x}_u(k) - \mathbf{x}_{u,0} \quad ; \quad \Delta\bar{\mathbf{u}}'(k) = \bar{\mathbf{u}}(k) - \bar{\mathbf{u}}_0^2 \quad ; \quad \Delta\bar{\mathbf{y}}(k) = \bar{\mathbf{y}}(k) - \bar{\omega}_0 \quad (5.2-19)$$

siendo $\bar{\mathbf{x}}_0$, $\mathbf{x}_{u,0}$ y $\bar{\mathbf{u}}_0$ los valores que alcanzan las variables en el régimen permanente. En el apéndice C se analiza la obtención de dichos valores a partir de prefijar determinado vector de referencias $\bar{\omega}_0$ alcanzable.

Además, en dicho apéndice se justifica que la expresión para el valor óptimo del índice de coste (5.2-17) con el cambio de variables resulta (C.2-14):

$$J_k^* = \begin{pmatrix} \Delta\bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta\mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix}^T \bar{\mathbf{T}}^T \mathcal{K}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \Delta\bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta\mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix} \quad (5.2-20)$$

siendo:

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})) - \mathbf{O}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C}) & (\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})\mathbf{B} + \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (5.2-21)$$

Proposición 5.2.1 Fijadas las matrices $\bar{\mathbf{Q}}$ y $\bar{\mathbf{R}}$, y unas referencias constantes para las salidas $\bar{\omega}_0$, para aquellas parejas de valores de N_2 y N_u tales que la matriz:

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathbf{A}_{BC}^T \bar{\mathbf{T}}^T \mathcal{K}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{T}} \mathbf{A}_{BC} - \bar{\mathbf{T}}^T \mathcal{K}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{T}} \quad (5.2-22)$$

siendo:

$$\mathbf{A}_{BC} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C}) & \mathbf{B} \\ -(\mathbf{I} - \sigma\mathbf{O})\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C}) & \mathbf{I} - \sigma\mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (5.2-23)$$

es definida negativa, entonces el bucle cerrado del proceso más GPC es asintóticamente estable con respecto al punto de equilibrio correspondiente a $\bar{\omega}_0$.

Demostración: La demostración se basa en justificar que si la matriz $\bar{\mathcal{L}}$ es definida negativa entonces el valor óptimo del índice de coste es función de Lyapunov para el bucle cerrado. Dicho valor óptimo es:

$$J_k^* = \begin{pmatrix} \Delta\bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta\mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix}^T \bar{\mathbf{T}}^T \mathcal{K} \bar{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \Delta\bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta\mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix} \geq 0 \quad \begin{pmatrix} \Delta\bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta\mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \quad (5.2-24)$$

²Esta variación es distinta del incremento de la acción de control: $\Delta\bar{\mathbf{u}}(k) = \bar{\mathbf{u}}(k) - \bar{\mathbf{u}}(k-1)$

Ahora se trata de analizar si este valor óptimo es decreciente con k :

$$J_{k+1}^* - J_k^* = \begin{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k) \end{pmatrix}^T \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix}^T \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix} \quad (5.2-25)$$

Los estados en k dependen de sus valores en $k-1$ de acuerdo con las expresiones (C.2-8) y (C.2-11). Introduciendo estas relaciones en (5.2-25) se obtiene:

$$J_{k+1}^* - J_k^* = \begin{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix}^T \tilde{\mathbf{L}} \begin{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix} \quad (5.2-26)$$

Como $\tilde{\mathbf{L}}$ es definida negativa entonces:

$$J_{k+1}^* - J_k^* < 0 \quad \forall \begin{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \quad (5.2-27)$$

por tanto, el bucle cerrado formado por el proceso más GPC es asintóticamente estable con respecto al punto de equilibrio correspondiente a $\bar{\omega}_0$. ■

Nota 5.2.2 Si la matriz $\tilde{\mathbf{L}}$ fuese semidefinida negativa y $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$, empleando el teorema de La Salle [La~Salle y Lefschetz 1961] puede justificarse que el bucle cerrado sea asintóticamente estable con respecto a $\bar{\omega}_0$. Dicho análisis se muestra en la **proposición A.3.1** del apéndice A.

Este resultado de estabilidad también se puede presentar en una forma alternativa, utilizando conceptos similares a los propuestos en [Primbs y Nevistić 1997; Senent 1998]:

Proposición 5.2.2 Supóngase que existe $\psi^* = \max\{\psi : - \begin{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix}^T \tilde{\mathbf{L}} \begin{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix} \geq \psi J_k^* \quad \forall k \geq 0\}$, entonces se cumple que:

$$J_{k+1}^* \leq (1 - \psi^*) J_k^* \quad k \geq 0 \quad (5.2-28)$$

Fijadas las matrices $\tilde{\mathbf{Q}}$ y $\bar{\mathbf{R}}$, y unas referencias constantes para las salidas $\bar{\omega}_0$, para aquellas parejas de valores de N_2 y N_u tales que $(1 - \psi^*) < 1$, entonces el bucle cerrado del proceso más GPC es asintóticamente estable con respecto al punto de equilibrio correspondiente a $\bar{\omega}_0$.

La demostración de esta proposición es obvia. Es muy interesante obtener la expresión que permite calcular ψ^* , ya que así se podrá utilizar para analizar la estabilidad del

bucle cerrado:

$$-\begin{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix}^T \tilde{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix} \geq \psi J_k^* \quad \forall k \quad (5.2-29)$$

$$\iff -\tilde{\mathcal{L}} \geq \psi \tilde{\mathcal{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathcal{T}}^3 \quad (5.2-30)$$

$$\iff \tilde{\mathcal{L}} + \psi \tilde{\mathcal{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathcal{T}} \leq \mathbf{0} \quad (5.2-31)$$

Si la matriz $\tilde{\mathcal{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathcal{T}}$ es definida positiva:

$$\iff \psi \mathbf{I} + \tilde{\mathcal{L}} \left(\tilde{\mathcal{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathcal{T}} \right)^{-1} \leq \mathbf{0} \quad (5.2-32)$$

$$\iff \psi \mathbf{I} \leq -\tilde{\mathcal{L}} \left(\tilde{\mathcal{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathcal{T}} \right)^{-1} \quad (5.2-33)$$

$$\iff \psi \leq \underline{\lambda} \left(-\tilde{\mathcal{L}} \left(\tilde{\mathcal{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathcal{T}} \right)^{-1} \right) \quad (5.2-34)$$

$\underline{\lambda}(\cdot)$ representa el valor propio más pequeño de la matriz. Consecuentemente se deduce que:

$$\psi^* = \underline{\lambda} \left(-\tilde{\mathcal{L}} \left(\tilde{\mathcal{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathcal{T}} \right)^{-1} \right) \quad (5.2-35)$$

Obsérvese que ψ^* puede calcularse si la matriz $\tilde{\mathcal{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathcal{T}}$ es definida positiva (invertible).

5.2.2.1. Casos en los que J_k^* no es función de Lyapunov

Puede ocurrir que J_k^* no sea función de Lyapunov para ciertos valores de N_u y N_2 , pero sin embargo, el bucle cerrado sea estable. No obstante, es posible que aumentando los tamaños de los horizontes de predicción y control se verifique que J_k^* sí sea función de Lyapunov. Sin embargo, esta alternativa supone emplear un criterio conservativo, por tanto, sería muy útil disponer de metodologías alternativas al uso de J_k^* como función de Lyapunov, para establecer cuando el bucle cerrado es estable.

Una posibilidad es proponer una función cuadrática alternativa que si sea función de Lyapunov del bucle cerrado conservando los horizontes de predicción y control:

$$I_k = \begin{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix}^T \mathbf{Z} \begin{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix} \quad (5.2-36)$$

que mayor al valor óptimo del índice de coste:

$$I_k \geq J_k^* \quad \forall k \quad \iff \mathbf{Z} \geq \tilde{\mathcal{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathcal{T}} \quad (5.2-37)$$

³La desigualdad matricial $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ implica que \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices simétricas, y que la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ es semidefinida positiva.

Para que ésta sea función de Lyapunov se ha de verificar que es monótona decreciente:

$$I_{k+1} - I_k < 0 \quad \forall \begin{pmatrix} \Delta \bar{x}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \quad (5.2-38)$$

operando:

$$I_{k+1} - I_k = \begin{pmatrix} \Delta \bar{x}(k) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k) \end{pmatrix}^T \mathbf{Z} \begin{pmatrix} \Delta \bar{x}(k) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta \bar{x}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix}^T \mathbf{Z} \begin{pmatrix} \Delta \bar{x}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix} \quad (5.2-39)$$

$$I_{k+1} - I_k = \begin{pmatrix} \Delta \bar{x}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix}^T \mathbf{A}_{BC}^T \mathbf{Z} \mathbf{A}_{BC} \begin{pmatrix} \Delta \bar{x}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta \bar{x}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix}^T \mathbf{Z} \begin{pmatrix} \Delta \bar{x}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix} \quad (5.2-40)$$

Consecuentemente para que ésta sea función de Lyapunov la siguiente matriz ha de ser definida negativa:

$$\mathbf{A}_{BC}^T \mathbf{Z} \mathbf{A}_{BC} - \mathbf{Z} < \mathbf{0} \quad (5.2-41)$$

Para construir una matriz \mathbf{Z} adecuada hay que satisfacer las condiciones (5.2-37) y (5.2-41). Esto se puede hacer resolviendo la siguiente ecuación de Lyapunov discreta:

$$\mathbf{A}_{BC}^T \mathbf{Z} \mathbf{A}_{BC} - \mathbf{Z} = -\mathbf{L} \quad (5.2-42)$$

eligiendo \mathbf{L} de tal forma que se verifique la otra condición (5.2-37).

En [Willems 1970] se presenta el siguiente resultado, que caracteriza la solución \mathbf{Z} de la ecuación de Lyapunov:

TEOREMA 5.2.1 *La evolución del sistema dinámico discreto:*

$$\Delta \bar{x}(k+1) = \mathbf{A}_{BC} \Delta \bar{x}(k) \quad (5.2-43)$$

es asintóticamente estable si y sólo si para cualquier matriz \mathbf{L} definida positiva, existe una única matriz definida positiva \mathbf{Z} que verique la ecuación discreta de Lyapunov (5.2-42).

A continuación se presenta un método particular de diseño de la matriz \mathbf{Z} , empleando, nuevamente, conceptos similares a los utilizados en [Primbs y Nevistić 1997; Senent 1998]:

$$\mathbf{A}_{BC}^T \mathbf{Z} \mathbf{A}_{BC} - \mathbf{Z} = -\mathbf{L}, \quad \text{tomando } \mathbf{L} = l\mathbf{I} \quad l > 0 \quad (5.2-44)$$

$$\mathbf{A}_{BC}^T \mathbf{Z} \mathbf{A}_{BC} - \mathbf{Z} = -l\mathbf{I} \quad (5.2-45)$$

$$\mathbf{A}_{BC}^T \underbrace{\mathbf{Z}/l}_{\mathbf{Z}_l} \mathbf{A}_{BC} - \underbrace{\mathbf{Z}/l}_{\mathbf{Z}_l} = -\mathbf{I} \quad (5.2-46)$$

5.2 Análisis de estabilidad nominal sin restricciones

Z_I es la única solución simétrica de la ecuación de Lyapunov discreta cuando $L = I$. Ahora se elige l para que se verifique la otra condición:

$$Z \geq \tilde{T}^T \mathcal{K}(\tilde{Q}, \tilde{R}) \tilde{T} \quad (5.2-47)$$

$$\Leftrightarrow l Z_I \geq \tilde{T}^T \mathcal{K}(\tilde{Q}, \tilde{R}) \tilde{T} \quad (5.2-48)$$

$$\Leftrightarrow l Z_I - \tilde{T}^T \mathcal{K}(\tilde{Q}, \tilde{R}) \tilde{T} \geq 0 \quad (5.2-49)$$

admitiendo que Z_I es definida positiva, es decir, sistema estable en bucle cerrado, se tiene que:

$$l I - \tilde{T}^T \mathcal{K}(\tilde{Q}, \tilde{R}) \tilde{T} Z_I^{-1} \geq 0 \quad (5.2-50)$$

$$\Leftrightarrow l \geq \bar{\lambda} \left(\tilde{T}^T \mathcal{K}(\tilde{Q}, \tilde{R}) \tilde{T} Z_I^{-1} \right) \quad (5.2-51)$$

donde $\bar{\lambda}(\cdot)$ representa el valor propio más grande de la matriz. Así pues la matriz Z se obtiene como sigue:

$$Z = l Z_I, \text{ siendo } l \geq \bar{\lambda} \left(\tilde{T}^T \mathcal{K}(\tilde{Q}, \tilde{R}) \tilde{T} Z_I^{-1} \right) \quad (5.2-52)$$

y Z_I la solución de la ecuación de Lyapunov discreta:

$$A_{BC}^T Z_I A_{BC} - Z_I = -I \quad (5.2-53)$$

Estos resultados dan lugar a la siguiente proposición:

Proposición 5.2.3 Fijadas las matrices \tilde{Q} y \tilde{R} , y unas referencias constantes para las salidas $\tilde{\omega}_0$, para cada pareja de valores de N_2 y N_u , si la matriz Z_I es la única solución de la ecuación de Lyapunov discreta:

$$A_{BC}^T Z_I A_{BC} - Z_I = -I \quad (5.2-54)$$

el bucle cerrado del proceso más GPC es asintóticamente estable con respecto al punto de equilibrio correspondiente a $\tilde{\omega}_0$ si y sólo si $\underline{\lambda}(Z_I) > 0$. Además la función cuadrática:

$$I_k = \begin{pmatrix} \Delta \tilde{x}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix}^T Z \begin{pmatrix} \Delta \tilde{x}(k-1) \\ \Delta \mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix}, \text{ con } Z = l Z_I \quad (5.2-55)$$

$$l \geq \bar{\lambda} \left(\tilde{T}^T \mathcal{K}(\tilde{Q}, \tilde{R}) \tilde{T} Z_I^{-1} \right) \quad (5.2-56)$$

es una función de Lyapunov del bucle cerrado que mayor en todo instante al valor óptimo del índice de coste:

$$I_k \geq J_k^* \quad \forall k \quad (5.2-57)$$

Nota 5.2.3 Si $\underline{\lambda}(Z_I) \leq 0$ además de ser el bucle cerrado inestable la función cuadrática alternativa I_k no mayor al valor óptimo del índice de coste.

EJEMPLO 5.2.1 En este ejemplo se muestra el empleo de las proposiciones anteriores para analizar la estabilidad del bucle cerrado formado por el reactor agitado empleado en la sección 3.10, más GPC.

Para este proceso se diseña un GPC MIMO con los siguientes parámetros:

- **Periodo de muestreo** : $T = 0.05$ minutos. $N_1 = 1$. **Matrices de ponderación del error**: $\mathbf{Q}_i = \mathbf{I} \quad i = N_1, \dots, N_2$. **Matrices de ponderación de los incrementos de las acciones de control**: $\mathbf{R}_j = 0.1\mathbf{I} \quad j = 1, \dots, N_u$. Todos los polos del observador se ubican en 0, y las referencias son constantes.

Se analizan tres casos distintos:

1. $N_2 = 20$ y $N_u = 1$. En este caso el bucle cerrado es inestable ya que $\bar{\lambda}(A_{BC}) = 1.0138$. La **proposición 5.2.1** proporciona $\bar{\lambda}(\tilde{\mathcal{L}}) = 4.5541 > 0$ y, por tanto, $\tilde{\mathcal{L}}$ no es definida negativa, consecuentemente este parámetro no proporciona información alguna acerca de la estabilidad.

La **proposición 5.2.2** da $1 - \psi^* = 1.2451 > 1$, y por tanto se llega a la misma conclusión que antes.

Sin embargo, la **proposición 5.2.3** proporciona $\underline{\lambda}(\mathbf{Z}_I) = -93.6489 < 0$ y, por tanto, el bucle cerrado es inestable. En la figura 5.1 se ha representado la evolución del valor óptimo del índice de coste suponiendo que el estado inicial del proceso es $\bar{\mathbf{x}}(0) = (0.5341 \ 0.2029 \ 0.7154 \ -0.2575)^T$ y el vector de referencias es $\bar{\omega}_0 = (1 \ 1)^T$. Como se observa dicho coste tiende a ∞ cuando $t \rightarrow 0$.

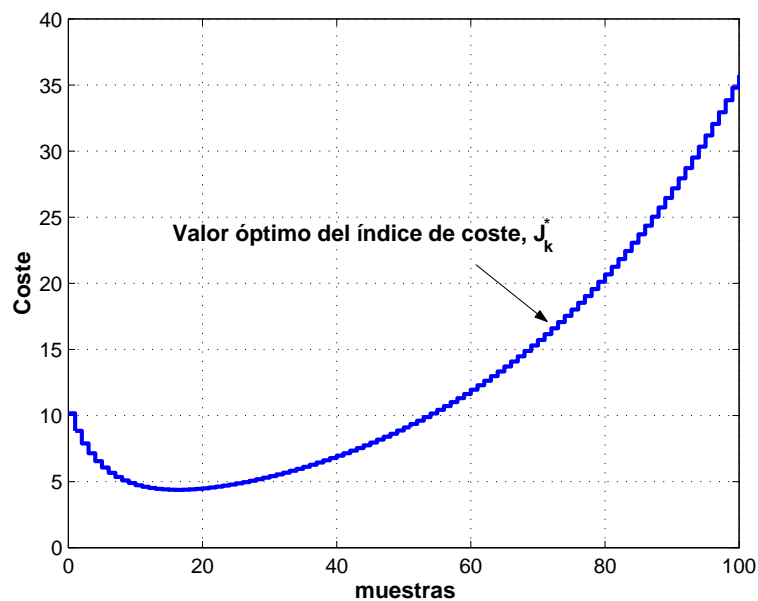


FIGURA 5.1: Valor óptimo de J_k cuando $N_2 = 20$ y $N_u = 1$

5.2 Análisis de estabilidad nominal sin restricciones

2. $N_2 = 50$ y $N_u = 1$. En este caso el bucle cerrado es estable ya que $\bar{\lambda}(A_{BC}) = 0.9583$.

La **proposición** 5.2.1 proporciona $\bar{\lambda}(\tilde{\mathcal{L}}_1) = 0.3285 > 0$ y, por tanto, $\tilde{\mathcal{L}}_1$ no es definida negativa y, nuevamente, este parámetro no proporciona ninguna información.

La **proposición** 5.2.2 proporciona $1 - \psi^* = 1.0312 > 1$, luego, se llega a la misma conclusión que con la anterior.

La **proposición** 5.2.3 proporciona $\underline{\lambda}(Z_1^1) = 0.7151 > 0$ y, por tanto, el bucle cerrado es estable.

En la figura 5.2 se comparan el valor óptimo del índice de coste y la función cuadrática alternativa suponiendo que el estado inicial del proceso es $\tilde{\mathbf{x}}(0) = (0.5341 \ 0.2029 \ 0.7154 \ -0.2575)^T$ y el vector de referencias es $\tilde{\omega}_0 = (1 \ 1)^T$. Como se puede apreciar en dicha figura, siempre la función cuadrática alternativa es una cota superior del valor óptimo del índice de coste. Además, en este caso J_k^* no es una función de Lyapunov aunque I_k sí.

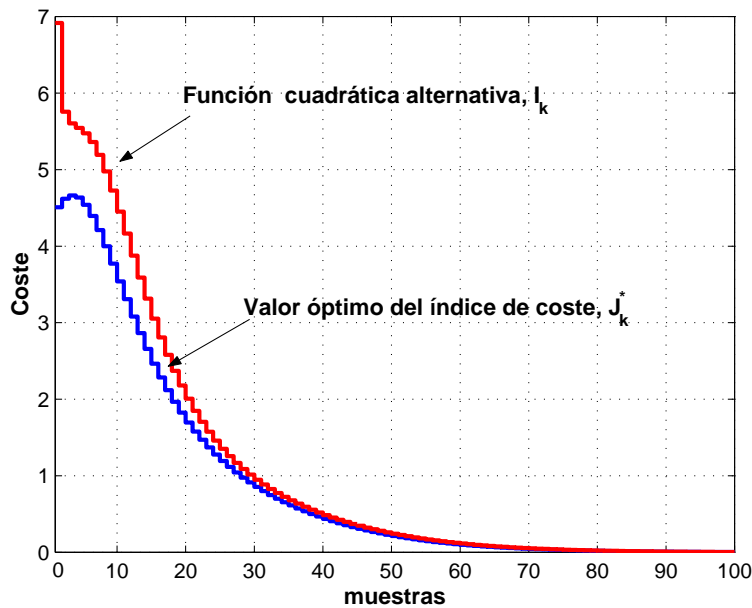


FIGURA 5.2: Comparación entre J_k^* y I_k cuando $N_2 = 50$ y $N_u = 1$

3. $N_2 = 50$ y $N_u = 2$. En este caso el bucle cerrado es estable ya que $\bar{\lambda}(A_{BC}) = 0.9023 \pm 0.0032j$.

La **proposición** 5.2.1 proporciona $\bar{\lambda}(\tilde{\mathcal{L}}) = -0.0044 < 0$ y, por tanto, $\tilde{\mathcal{L}}$ es definida negativa, consecuentemente con este parámetro el bucle cerrado también es estable. Ahora J_k^* sí es función de Lyapunov.

La **proposición** 5.2.2 proporciona $1 - \psi^* = 0.9809 < 1$, por tanto, la misma conclusión que con el parámetro anterior.

La **proposición** 5.2.3 proporciona $\underline{\lambda}(Z_1) = 0.6296 > 0$ y, por tanto, el bucle cerrado es también estable con este parámetro.

Este último caso comparado con el segundo, muestra que al aumentar el tamaño del horizonte de control de 1 a 2 se consigue que J_k^* sea función de Lyapunov, aunque cuando $N_u = 1$ el sistema es estable en bucle cerrado y la función cuadrática alternativa, I_k , es función de Lyapunov. Esto viene a mostrar que aumentar el tamaño de los horizontes da lugar a un método conservativo para el análisis de estabilidad.

En las tablas 5.1 y 5.2 se muestran los parámetros de estabilidad relativos al reactor agitado cuando el horizonte de predicción varía desde 1 hasta 60, para los casos $N_u = 1$ y $N_u = 2$. Dichas tablas permiten establecer un método iterativo de diseño de los horizontes de predicción y control, que se basa en comenzar por $N_2 = 1$ y $N_u = 1$, e ir aumentando sus valores hasta que algunos de los parámetros de estabilidad presentados garantice que el bucle cerrado sea estable. En concreto, para $N_u = 1$ se observa que el bucle cerrado es estable cuando $N_2 \geq 23$ según los parámetros $|\bar{\lambda}(A_{BC})|$ y $\underline{\lambda}(Z_I)$. Los otros dos parámetros no dan resultado positivo para los valores de los horizontes de predicción analizados.

Para el caso $N_u = 2$ se verifica la estabilidad cuando $N_2 \geq 19$ para los mismos parámetros del caso $N_u = 1$. Además, cuando $N_2 \geq 20$ los parámetros $\underline{\lambda}(\tilde{\mathcal{L}})$ y $1 - \psi^*$ sí que dan resultado afirmativo, justificando que J_k^* es función de Lyapunov.

N_2	$ \bar{\lambda}(A_{BC}) $	$\bar{\lambda}(\tilde{\mathcal{L}}) < 0$	$1 - \psi^* < 1$	$\underline{\lambda}(Z_I) > 0$
1	1.0714	0.3225	—	-302.7031
5	1.0941	1.3440	3.4833	-201.7411
10	1.0901	16.3129	1.8148	-12.6091
15	1.0544	17.4012	1.4226	-28.6008
20	1.0138	4.5541	1.2451	-93.6489
21	1.0072	3.0940	1.2222	-174.5687
22	1.0012	2.2093	1.2020	-1065.5888
23	0.9958	1.7044	1.1842	0.5599
25	0.9868	1.2337	1.1546	0.5786
30	0.9723	0.9062	1.1040	0.6162
40	0.9613	0.6041	1.0537	0.6765
50	0.9583	0.3285	1.0312	0.7151
60	0.9572	0.1766	1.0197	0.7367

TABLA 5.1: Parámetros de estabilidad para $N_u = 1$ asociados a las proposiciones 5.2.1, 5.2.2 y 5.2.3.

5.3. Diseño estable del GPC sin restricciones

Una vez que se han desarrollado diferentes parámetros de estabilidad que permiten determinar si el bucle cerrado es asintóticamente estable, el siguiente paso consiste en

5.3 Diseño estable del GPC sin restricciones

N_2	$ \bar{\lambda}(A_{BC}) $	$\bar{\lambda}(\bar{\mathcal{L}}) < 0$	$1 - \psi^* < 1$	$\underline{\lambda}(Z_I) > 0$
2	1.0808	0.0467	—	-296.6282
5	1.0896	0.0003	2.9305	-323.6004
10	1.0890	0.5641	1.6712	-315.8778
15	1.0442	2.9431	1.2468	-100.9548
18	1.0032	0.2581	1.0645	-744.0692
19	0.9907	0.0392	1.0212	0.2900
20	0.9794	-0.0036	0.9914	0.4102
30	0.9250	-0.0042	0.9817	0.6138
40	0.9114	-0.0043	0.9832	0.6202
50	0.9023	-0.0044	0.9809	0.6296
60	0.9013	-0.0043	0.9787	0.6377

TABLA 5.2: Parámetros de estabilidad para $N_u = 2$ asociados a las proposiciones 5.2.1, 5.2.2 y 5.2.3.

proponer una metodología de selección de los horizontes del controlador GPC (N_2 y N_u) que garantice estabilidad.

En concreto, en el siguiente punto se va a justificar que una vez fijadas las matrices de ponderación \bar{Q} y \bar{R} , bajo ciertas condiciones, siempre existen horizontes de predicción y control para los cuales el bucle cerrado es asintóticamente estable. Este resultado permite elegir, de forma previa al análisis de estabilidad, los valores de las matrices de ponderación, estando condicionada dicha elección a la dinámica que se desee obtener en bucle cerrado. Sin embargo, no existen metodologías que, de forma general, permitan elegir dichas matrices de peso para obtener determinadas especificaciones: tiempo de establecimiento, sobreoscilación, etc. [Camacho y Bordóns 1999].

Finalmente, a partir de este análisis y de la mecánica empleada en el ejemplo 5.2.1 se propondrá una metodología de diseño iterativa para la selección de los horizontes de predicción y control que asegure encontrar valores para los mimos tales que el bucle cerrado sea asintóticamente estable.

5.3.1. Garantía de estabilidad

En el resto del capítulo se empleará la nomenclatura:

$$J_{N_u, N_2}^*(k) \quad ; \quad J_{N_u, N_2}(k) \quad (5.3-1)$$

para denotar, respectivamente, a los valores óptimos y no óptimos⁴ del índice de coste en el instante k empleando horizontes de predicción y control N_u y N_2 , a los cuales se les ha añadido el término adicional:

$$\mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) \quad (5.3-2)$$

que no modifica la solución óptima de las acciones de control aunque sí su valor:

$$J_{N_u, N_2}(k) = \mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) + \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}(k+i|k)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(k+i|k) + \sum_{i=0}^{N_u-1} \Delta \mathbf{u}(k+i|k)^T \mathbf{R}_{i+1} \Delta \mathbf{u}(k+i|k) \quad (5.3-3)$$

Como paso previo a la presentación del resultado principal, se va a estudiar, brevemente, la existencia del valor óptimo del índice de coste cuando se incorporan al final del horizonte de predicción restricciones terminales de igualdad⁵:

$$\bar{\mathbf{y}}(k + N_2 + j|k) = \bar{\omega}_0 \quad j = 1, \dots, l \quad (5.3-4)$$

para garantizar que tras el horizonte de predicción el sistema ha alcanzado el punto de equilibrio asociado a $\bar{\omega}_0$.

Al valor óptimo del índice con las restricciones terminales se le denotará:

$$J_{N_u, N_2}^{TER,*}(k)^6 \quad (5.3-5)$$

Dicho valor óptimo existe si el problema de optimización con dichas restricciones es resoluble.

El lema A.3.3 del apéndice A justifica que dicho problema de optimización es resoluble si l se elige de tal forma que la matriz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{l-2} \end{pmatrix} \quad (5.3-6)$$

posea rango completo de columnas y $N_u \geq l$. A partir de este momento se tomará a l como el mínimo valor entero que satisface la condición anterior.

Una vez realizado este análisis que exige emplear un mínimo valor para el horizonte de control, se presenta el siguiente resultado, que utiliza ideas similares a las presentadas en [Primbs y Nevistić 1997; Senent 1998], el cual garantiza la existencia de horizontes de predicción y control para los cuales el bucle cerrado es asintóticamente estable:

TEOREMA 5.3.1 *Dadas matrices \mathbf{Q}_i y \mathbf{R}_i que verifiquen:*

$$\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1} \geq \mathbf{0} \quad \forall i \quad ; \quad \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i-1} \geq \mathbf{0} \quad \forall i \quad (5.3-7)$$

sea $s \geq 0$ el mínimo número entero tal que $\forall k$:

$$H(k) = \mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) + \sum_{i=1}^s \mathbf{e}(k+i|k)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(k+i|k) + \sum_{i=0}^{s-1} \Delta \mathbf{u}(k+i|k)^T \mathbf{R}_{i+1} \Delta \mathbf{u}(k+i|k) > 0$$

⁴Valor del índice de coste para cualquier secuencia de acciones de control distinta de la óptima.

⁵Este mecanismo fue empleado para garantizar la estabilidad del bucle cerrado en [Clarke y Scattolini 1991].

⁶Si se evalúa el índice para una secuencia de acciones de control distinta de la óptima entonces se denotará por $J_{N_u, N_2}^{TER}(k)$.

5.3 Diseño estable del GPC sin restricciones

$$\Delta \bar{\mathbf{x}}(k) \neq \mathbf{0} \quad (5.3-8)$$

y n_i el número de polos inestables del proceso, para $N_u \geq \max\{l, n_i + 1\} + s + 1$ existe N_2^* tal que para $N_2 \geq N_2^*$ el bucle cerrado del proceso más GPC es asintóticamente estable con respecto del punto de equilibrio correspondiente a $\bar{\omega}_0$.

Demostración: Se van a presentar sólo los elementos clave de la demostración. Ésta puede consultarse íntegra en el teorema A.3.1 del apéndice A. En concreto allí se justifica que $s \leq l - 1$.

Siguiendo ideas equivalentes a las empleadas en [Primbs y Nevistić 1997; Senent 1998], se define la función $\varphi_{N_2, N_u}(k)$ para $N_u \geq l$ como sigue:

$$\varphi_{N_2, N_u}(k) = \begin{cases} \frac{J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k) - J_{N_2, N_u}^*(k)}{H(k)} & \Delta \bar{\mathbf{x}}(k) \neq \mathbf{0} \\ \overline{\lim}_{\Delta \bar{\mathbf{x}}(k) \rightarrow 0} \varphi_{N_2, N_u}(k) & \Delta \bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.3-9)$$

En el apéndice A LEMA A.3.7 se demuestra que las funciones $\varphi_{N_2, \cdot}(k)$ convergen uniforme y monótonamente a cero, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe N_2^* tal que para todo k , $N_2 \geq N_2^*$ y $N_u \geq \max\{l, n_i + 1\}$ constante:

$$\frac{J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k) - J_{N_2, N_u}^*(k)}{H(k)} < \epsilon \quad (5.3-10)$$

A partir de esta relación y tras una serie de manipulaciones se obtiene que:

$$J_{N_2-1, N_u-1}^*(k+1) > \frac{1}{1+\epsilon} J_{N_2, N_u}^*(k+1) \quad \text{cuando: } N_u \geq \max\{l, n_i + 1\} + 1, N_2 \geq N_2^* \quad (5.3-11)$$

Ahora aplicando el Principio de Optimalidad de Bellman sobre la expresión del índice de coste óptimo en k suponiendo que $\mathbf{e}(k) \neq \mathbf{0}$, se llega a:

$$J_{N_2, N_u}^*(k) \geq \mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) + J_{N_2-1, N_u-1}^*(k+1) \quad \text{cuando: } N_u \geq 2 \quad (5.3-12)$$

Como $\mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) > 0$ se puede definir ρ^* como sigue:

$$\rho^* = \max \left\{ \rho : \mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) \geq \rho J_{N_2, N_u}^*(k) \right\} \quad (5.3-13)$$

cumpliéndose que $0 < \rho^* \leq 1$. Utilizando esta definición:

$$(1 - \rho^*) J_{N_2, N_u}^*(k) \geq J_{N_2-1, N_u-1}^*(k+1) \quad (5.3-14)$$

y la ecuación (5.3-11):

$$(1 + \epsilon)(1 - \rho^*) J_{N_2, N_u}^*(k) > J_{N_2, N_u}^*(k+1) \quad (5.3-15)$$

el factor $(1+\epsilon)(1-\rho^*)$ se puede hacer menor que 1 eligiendo ϵ lo suficientemente pequeño. Por tanto, si $N_2 \geq N_2^*$, N_2^* correspondiente a valor de ϵ elegido (LEMA A.3.7), y $N_u \geq \max\{l, n_i + 1\} + 1$ entonces:

$$J_{N_2, N_u}^*(k) > J_{N_2, N_u}^*(k+1) \quad e(k) \neq 0 \quad (5.3-16)$$

con lo que J_{N_2, N_u}^* es función de Lyapunov del bucle cerrado si $e(k) \neq 0$. El caso $e(k) = 0$ se analiza en la demostración del teorema A.3.1. ■

5.3.2. Método iterativo de elección de N_u y N_2 para diseño estable

A partir del resultado del punto precedente y teniendo en cuenta los resultados del ejemplo 5.2.1 se puede plantear el siguiente método iterativo de elección de N_2 y N_u que garantiza la estabilidad del bucle cerrado:

1. Partir de $N_2 = N_u = \max\{l, n_i + 1\} + s + 1$.
2. Determinar si algún parámetro de estabilidad (proposiciones 5.2.1, 5.2.2 y 5.2.3) proporciona resultado afirmativo. Si es así se termina el proceso iterativo y para cualquier horizonte de predicción mayor o igual que el actual se verifica la estabilidad, manteniendo constante el horizonte de control.
3. En caso contrario $N_2 = N_2 + 1$.
4. Volver al punto 2.

EJEMPLO 5.3.1 *Para el reactor agitado empleado en el ejemplo 5.2.1 se tiene que $l = 3$, $n_i = 0$ y $s \leq l - 1 = 2$, por tanto, el tamaño de partida de los horizontes de predicción y control es $\max\{l, n_i + 1\} + s + 1 = 6$. En la tabla 5.3 se muestran los parámetros de estabilidad para el caso $N_u = 6$ y diversos horizontes de predicción. Como se aprecia, para $N_2 \geq 84$ el bucle cerrado es asintóticamente estable aplicando los parámetros $|\bar{\lambda}(A_{BC})|$ y $\underline{\lambda}(Z_1)$. Además, los parámetros $\bar{\lambda}(\bar{\mathcal{L}})$ y $1 - \psi^*$ proporcionan resultado de estabilidad para $N_2 \geq 101$.*

No obstante, en el ejemplo 5.2.1 se comprobó que para $N_u = 1, 2$ (inferiores a $N_u = 6$) existían horizontes de predicción para los cuales el bucle cerrado también era asintóticamente estable. Ahora bien, este resultado es particular y no garantiza, en general, la estabilidad para cualquier horizonte de predicción mayor. Esta posible situación se muestra en el ejemplo siguiente.

5.3 Diseño estable del GPC sin restricciones

N_2	$ \bar{\lambda}(A_{BC}) $	$\bar{\lambda}(\bar{\mathcal{L}}) < 0$	$1 - \psi^* < 1$	$\underline{\lambda}(Z_I) > 0$
10	1.0167	0.0007	1.5391	$-0.2206 \cdot 10^5$
20	1.0166	0.0007	1.1407	$-0.2179 \cdot 10^5$
30	1.0163	0.0069	1.0958	$-0.2055 \cdot 10^5$
40	1.0157	0.2286	1.0797	$-0.1847 \cdot 10^5$
50	1.0143	15.4644	1.0654	$-0.1512 \cdot 10^5$
60	1.0115	64.6443	1.0496	$-0.1131 \cdot 10^5$
70	1.0072	99.3618	1.0330	$-0.0932 \cdot 10^5$
80	1.0019	75.0605	1.0178	$-0.2160 \cdot 10^5$
83	1.0004	56.7075	1.0139	$-1.3608 \cdot 10^5$
84	0.9998	49.9813	1.0127	0.2025
90	0.9969	12.2394	1.0065	0.3640
100	0.9926	0.0008	1.0001	0.5602
101	0.9923	-0.0012	0.9997	0.5722
110	0.9895	-0.0061	0.9975	0.6434
120	0.9872	-0.0070	0.9969	0.6807

TABLA 5.3: Parámetros de estabilidad para $N_u = 6$ asociados a las proposiciones 5.2.1, 5.2.2 y 5.2.3.

EJEMPLO 5.3.2 En este ejemplo se busca mostrar una situación que puede producirse en la elección de N_2 y N_u para garantizar estabilidad. En concreto, se va a emplear el proceso:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.44 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3-17)$$

con 2 polos inestables (-1.2 y 1.2), $n_i = 2$, $l = 3$ y $s = 2$.

Para este proceso el mínimo valor para el horizonte de control que garantiza estabilidad, según el teorema 5.3.1, es $\max\{l, n_i + 1\} + s + 1 = 6$. En la figura 5.3 se muestra para los casos $N_u = 1, 2, 3$ la evolución del mayor polo (en valor absoluto) del bucle cerrado en función del tamaño del horizonte de control. Como se aprecia, para $N_u = 1$ no hay ningún N_2 que garantice estabilidad. Para $N_u = 2$ existen valores para N_2 que si garantizan estabilidad como, por ejemplo, $N_2 = 15$. No obstante, conforme crece N_2 aumenta el mayor polo llegando cerca de 1. Para que se aprecie mejor la situación en la figura 5.4 se ha representado una ampliación de la zona comprendida entre 30 y 45 para el valor de N_2 . En esta figura se detecta que, por ejemplo, para $N_2 = 39$ el mayor polo supera a 1 y, por tanto, el bucle cerrado es inestable. Consecuentemente, aunque para $N_u = 2$ y $N_2 = 15$ se garantice estabilidad esto no implica que para cualquier valor mayor de N_2 también, pues el teorema 5.3.1 sólo lo garantiza para $N_u \geq 6$. Finalmente, para $N_u = 3$ se verifica

la estabilidad para, por ejemplo, $N_2 \geq 10$, al menos, con la información disponible en la gráfica.

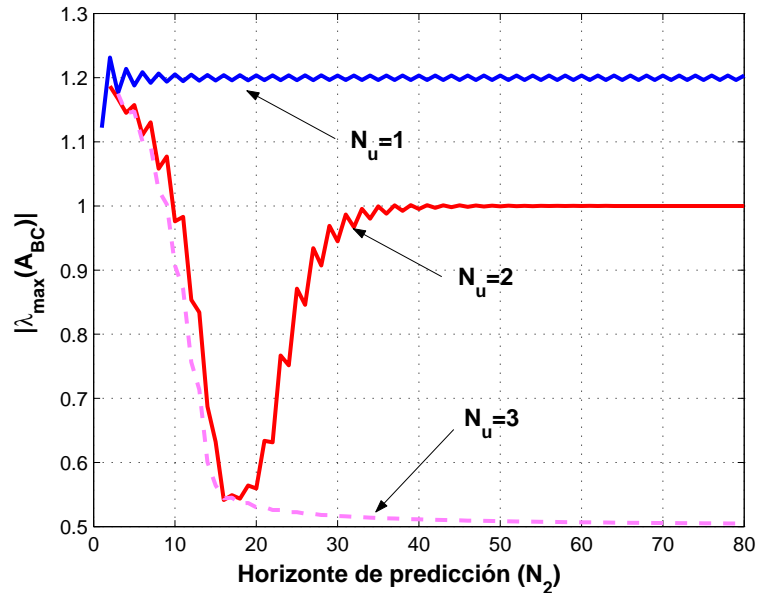


FIGURA 5.3: Evolución del mayor polo (en valor absoluto) del bucle cerrado para $N_u = 1, 2, 3$ en función del horizonte de control.

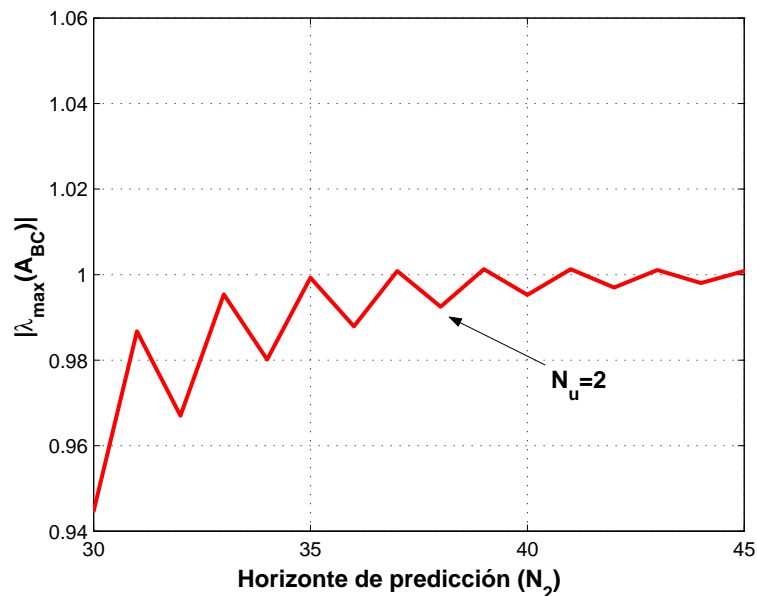


FIGURA 5.4: Aplicación de la figura 5.3.

Este análisis y los empleados en el ejemplo anterior y en el ejemplo 5.2.1, muestran que cuando se busquen horizontes de predicción y control que garanticen estabilidad es posible comenzar por tamaños para el horizonte de control inferiores a los proporcionados por la expresión $\max\{l, n_i + 1\} + s + 1$, aunque, a priori, no hay garantía de que existan valores para el horizonte de predicción que aseguren estabilidad. Más aún, suponiendo que exista

algún valor para el horizonte de predicción que proporcione estabilidad no hay garantía de que para cualquier horizonte mayor que éste también se verifique la estabilidad.

Además, hay que tener en cuenta que en la demostración del teorema de la garantía de estabilidad se ha empleado el hecho de que el índice de coste modificado sea función de Lyapunov, lo cual implica que es más conservativo que el criterio basado en los polos del bucle cerrado. Además, para garantizar que el índice de coste sea función de Lyapunov se ha exigido que exista el valor del mismo cuando se incluyen restricciones de igualdad, obteniéndose así un criterio aún más conservativo por este hecho.

5.4. Análisis de estabilidad con restricciones

5.4.1. Introducción

En las secciones 2.3 y 3.8 se analizaron algunos aspectos que caracterizan el diseño del controlador cuando hay presentes restricciones. En este punto del capítulo es necesario abordar la cuestión de la existencia de soluciones para las acciones de control que verifiquen todas las restricciones (resolubilidad), ya que de lo contrario no podría aplicarse, en principio, ninguna acción de control sobre el proceso. Este hecho es mucho más grave, si cabe, que el caso en el que el bucle cerrado es inestable.

5.4.2. Resolución

En este punto se va a analizar en profundidad qué condiciones permiten garantizar que el problema de optimización asociado al controlador GPC va a ser siempre resoluble.

En primer lugar, hay que detectar en cada aplicación qué tipos de restricciones hay presentes:

1. Si las restricciones sólo se refieren a los valores que pueden tomar las acciones de control (limitación en sus valores e incrementos), entonces el problema de optimización siempre es resoluble. En concreto, los siguientes valores de los incrementos a lo largo del horizonte de control verifican las restricciones:

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}(k) = \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+1) = \dots = \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+N_u-1) = \mathbf{0} \quad \forall k \geq 0 \quad (5.4-1)$$

2. Si se presentan limitaciones sobre los valores de las salidas, entonces ya no hay garantías de que el problema de optimización sea resoluble. En este caso se han propuesto diferentes metodologías para solucionar el problema de resolubilidad.

En [Rawlings y Muske 1993] se presenta un método que consiste en eliminar las restricciones sobre las salidas (o estados) durante los primeros instantes dentro del horizonte de predicción para garantizar que el problema de optimización sea resoluble. En concreto, justifica que siempre existe un número entero k_1 tal que si las restricciones sobre las salidas (o estados) sólo se consideran para $k \geq k_1$ entonces el problema siempre es resoluble.

Otra alternativa fue propuesta en [Zheng y Morari 1995], la cual consiste en introducir restricciones blandas asociadas a las limitaciones de las salidas (o estados). Con ello se consigue el problema siempre sea resoluble, aunque se permite la violación de las limitaciones.

Más tarde en [Sokaert y Rawlings 1999], se analizaron con mayor detalle los dos métodos anteriores. Al primero se le denomina *aproximación de tiempo mínimo* ya que garantiza que el número de instantes en los cuales se violan las limitaciones de las salidas sea el mínimo posible, aunque las violaciones que tienen lugar durante esos primeros instantes pueden llegar a ser muy importantes. Al segundo método denominado *aproximación con restricciones blandas*, viene caracterizado porque el número de instantes en los cuales se violan las limitaciones es mucho mayor que para el caso de tiempo mínimo, aunque el tamaño de las violaciones es menor. La principal desventaja de este método es que las predicciones que se realizan en bucle abierto y el comportamiento que se presenta en bucle cerrado son muy dispares, produciendo que éste último se vea degradado de forma importante.

Además, en este artículo se proponen modificaciones de ambos métodos para tratar de mejorar sus características negativas. En concreto, el método mejorado de restricciones blandas basado en el empleo de una función de penalización cuadrática y otra lineal ha sido adoptado en esta tesis como metodología de diseño del controlador GPC cuando se consideran restricciones blandas para las salidas (sección 3.8.3).

Sin embargo, estas metodologías implican que se puede producir una violación de las limitaciones impuestas sobre las salidas. Esto se debe a que el estado inicial del proceso puede ser cualquiera, sin ningún tipo de limitación, lo cual puede provocar que desde algún estado concreto sea imposible satisfacer las restricciones sobre las salidas.

Partiendo de este análisis, se podría plantear un esquema alternativo para la resolubilidad basado en determinar aquél conjunto de estados para los cuales es posible satisfacer en todo instante de tiempo las restricciones presentes sobre las acciones de control y las salidas. De esta forma sólo se considerarían restricciones duras y nunca se produciría violación alguna de ellas. Este esquema se va a basar en el empleo de la *Teoría*

de Conjuntos Invariantes [Kerrigan 2000], la cual se presenta de forma resumida en el apéndice D.

En el punto siguiente se hará mención a los conceptos clave de la misma que se emplearán en el resto del capítulo.

5.4.2.1. Aplicación de la Teoría de Conjuntos Invariantes al GPC

Se supondrá que el proceso viene dado por:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k)\end{aligned}\quad (5.4-2)$$

Además, este proceso está sujeto a restricciones sobre las acciones de control y los estados:

$$\bar{\mathbf{u}}(k) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \quad ; \quad \bar{\mathbf{x}}(k) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^r \quad (5.4-3)$$

Una acción de control (secuencia de acciones de control o ley de control) se dice que es admisible si pertenece al conjunto \mathcal{U} .

En primer lugar se presenta la definición de conjunto positivamente invariante:

Definición 5.4.1 (Conjunto positivamente invariante) *El conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ es positivamente invariante para el sistema autónomo $\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k)$ si y sólo si $\forall \bar{\mathbf{x}}(0) \in \Omega$ la evolución del sistema satisface $\bar{\mathbf{x}}(k) \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}$.*

A partir de esta definición y del problema de tratar de determinar si dado Ω y un estado inicial $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \Omega$ existe una ley de control tal que la evolución del estado permanece en Ω para todos los instantes posteriores para el proceso (5.4-2), se presenta la siguiente definición:

Definición 5.4.2 (Conjunto invariante bajo control) *El conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ es invariante bajo control para el proceso (5.4-2) si y sólo si existe una ley de control $\bar{\mathbf{u}}(k) = h(\bar{\mathbf{x}}(k))$ tal que Ω es positivamente invariante para el sistema en bucle cerrado $\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}h(\bar{\mathbf{x}}(k))$, y $\bar{\mathbf{u}}(k) \in \mathcal{U}, \forall \bar{\mathbf{x}}(k) \in \Omega$.*

En otras palabras, Ω es invariante bajo control si y sólo si:

$$\text{dado } \bar{\mathbf{x}}(k) \in \Omega \Rightarrow \exists \bar{\mathbf{u}}(k) \in \mathcal{U} : \bar{\mathbf{x}}(k+1) \in \Omega \quad \forall k \quad (5.4-4)$$

En las aplicaciones con restricciones interesa obtener el mayor conjunto invariante bajo control contenido en el conjunto de restricciones \mathcal{X} , por lo que se establece la siguiente definición:

Definición 5.4.3 (Mayor conjunto invariante bajo control) El conjunto $\mathcal{C}_\infty(\Omega)$ es el mayor conjunto invariante bajo control contenido en Ω para el proceso (5.4-2) si y sólo si $\mathcal{C}_\infty(\Omega)$ es invariante bajo control y contiene a todos los conjuntos invariantes bajo control contenidos en Ω .

La siguiente proposición justifica el por qué la teoría de conjuntos invariantes juega un papel fundamental en el estudio de los sistemas con restricciones:

Proposición 5.4.1 Dado el proceso (5.4-2), existe una ley de control admisible tal que las restricciones sobre el estado pueden ser satisfechas, $\bar{\mathbf{x}}(k) \in \mathcal{X}$, para todo instante $k \in \mathbb{N}$ si y sólo si el estado inicial $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ ⁷.

Como resultado de esta proposición, se deduce que si se desea diseñar un controlador que verifique las restricciones sobre las entradas y los estados (o equivalentemente sobre las salidas) es necesario que el estado inicial del proceso pertenezca a $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})$. Consecuentemente, como paso previo al diseño del controlador es necesario obtener dicho mayor conjunto invariante bajo control.

Supóngase que sólo se presentan restricciones que limitan los valores de las acciones de control y de las salidas⁸:

$$\mathbf{u}_{min} \leq \bar{\mathbf{u}}(k) \leq \mathbf{u}_{max} \quad (5.4-5)$$

$$\mathbf{y}_{min} \leq \bar{\mathbf{y}}(k) \leq \mathbf{y}_{max} \quad (5.4-6)$$

Entonces los conjuntos \mathcal{U} y \mathcal{X} son:

$$\mathcal{U} = \left\{ \bar{\mathbf{u}}(k) \in \mathbb{R}^m : \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}(k) \leq \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{max} \\ -\mathbf{u}_{min} \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4-7)$$

$$\mathcal{X} = \left\{ \bar{\mathbf{x}}(k) \in \mathbb{R}^r : \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \leq \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{max} \\ -\mathbf{y}_{min} \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4-8)$$

Dado que los conjuntos se definen en términos de desigualdades matriciales éstos resultan ser politopos convexos.

No obstante, el hecho de que se asegure la existencia de una ley de control admisible, no garantiza que la misma pueda proceder de un controlador GPC. En concreto, dicho controlador realiza la predicción de los estados a lo largo del horizonte de predicción (N_2) utilizando sólo un número finito de cambios en las acciones de control (N_u):

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1|k), \dots, \bar{\mathbf{x}}(k+N_u), \bar{\mathbf{x}}(k+N_u+1), \dots, \bar{\mathbf{x}}(k+N_2|k)$$

⁷Su demostración puede consultarse en [Kerrigan 2000].

⁸El caso de presencia de restricciones sobre los incrementos de las acciones de control se plantea más adelante.

$$\bar{\mathbf{u}}(k|k), \dots, \bar{\mathbf{u}}(k + N_u - 1|k), \bar{\mathbf{u}}(k + N_u|k), \dots, \bar{\mathbf{u}}(k + N_2 - 1|k) \quad (5.4-9)$$

siendo:

$$\bar{\mathbf{u}}(k + N_u + j|k) = \bar{\mathbf{u}}(k + N_u - 1|k) \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - N_u - 1 \quad (5.4-10)$$

De acuerdo con la definición de $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$, en principio, la resolubilidad del problema de optimización estaría garantizada tomando $N_u = N_2$, ya que, de lo contrario, no habría garantías, en general, de que para cualquier estado $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$ exista una acción de control constante a partir del instante $k + N_u - 1$ que pueda pertenecer a una ley de control admisible.

Sin embargo, con la metodología del diseño del GPC se asegura que $\bar{\mathbf{x}}(1|0) \in \mathbb{X}$ lo cual no permite garantizar la resolubilidad para el siguiente instante, ya que sería necesario que se cumpliera la condición $\bar{\mathbf{x}}(1|0) \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$. Una primera solución a este problema consistiría en que el GPC impusiera dicha restricción adicional. Esta restricción no introduce problemas de resolubilidad ya que $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$ garantiza que $\exists \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{U}$ tal que dicha restricción se cumple. El controlador GPC, al minimizar el índice de coste, obtendrá la solución de menor índice que sea compatible con esta restricción adicional.

Otra alternativa se basa en emplear la siguiente definición:

Definición 5.4.4 (Conjunto admisible) *El conjunto admisible de i pasos $\mathcal{C}_i(\Omega)$ contenido en Ω es el conjunto de estados para los cuales existe una ley de control admisible tal que la evolución del estado permanece dentro de Ω durante i pasos:*

$$\mathcal{C}_i(\Omega) \triangleq \{ \bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathbb{R}^n / \exists \{ \bar{\mathbf{u}}(k) = h(\bar{\mathbf{x}}(k)) \}_0^{i-1} : \{ \bar{\mathbf{x}}(k) \in \Omega \}_0^i \} \quad (5.4-11)$$

A partir de la definición de los conjuntos admisibles se puede establecer el siguiente resultado:

Proposición 5.4.2 (Determinación finita) *Si existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{C}_{i+1}(\Omega) = \mathcal{C}_i(\Omega)$ entonces $\mathcal{C}_\infty(\Omega) = \mathcal{C}_i(\Omega)$.*

De esta proposición se concluye que si existe tal $i < \infty$, entonces si se impone que los estados predichos estén en \mathbb{X} durante $i + 1$ o más instantes, o sea que $N_2 \geq i + 1$, se cumplirá que $\bar{\mathbf{x}}(1|0) \in \mathcal{C}_i(\mathbb{X}) = \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$ debido a que tras el instante $k = 1$ hay, al menos, i instantes posteriores que estarán en \mathbb{X} .

Resumiendo, si existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{C}_\infty(\Omega) = \mathcal{C}_i(\Omega)$ y se toma $N_2 = N_u \geq i + 1$ el problema de optimización asociado al controlador GPC va a ser siempre resoluble. En los casos en los que tal i no existe o bien aún existiendo se tome $N_2 = N_u < i + 1$, para garantizar la resolubilidad es necesario modificar la ley de control imponiendo la restricción adicional $\bar{\mathbf{x}}(1|0) \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$.

EJEMPLO 5.4.1 En este ejemplo se trata de mostrar la aplicación de la teoría de conjuntos invariantes al GPC y, en concreto, al cálculo del conjunto $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$ y de los conjuntos admisibles. Sea el proceso inestable de segundo orden (polos en 0.5 y 1.1):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.55 \\ 1 & 1.6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4-12)$$

cuya acción de control está limitada por $u_{max} = 0.25$ y $u_{min} = -0.25$ y su salida por $y_{max} = 1$ e $y_{min} = -1$. Los conjuntos \mathbb{U} y \mathbb{X} son:

$$\mathbb{U} = \left\{ \bar{\mathbf{u}}(k) \in \mathbb{R}^1 : \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}(k) \leq \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4-13)$$

$$\mathbb{X} = \left\{ \bar{\mathbf{x}}(k) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4-14)$$

Si se emplea la *Invariant Set Toolbox* de Matlab⁹ se obtiene que el mayor conjunto invariante bajo control contenido en \mathbb{X} es:

$$\mathcal{C}_\infty(\mathbb{X}) = \left\{ \bar{\mathbf{x}}(k) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 1.6 & 2.01 \\ -1.6 & -2.01 \\ 1 & 1.6 \\ -1 & -1.6 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \leq \begin{bmatrix} 2.15 \\ 2.15 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4-15)$$

el cual coincide con el conjunto admisible de 2 pasos, lo cual implica que $i=2$. Dicho conjunto y el conjunto admisible de un paso han sido representados en la figura 5.5.

Consecuentemente, para $N_2 = N_u \geq 3$ el problema de optimización del GPC va a ser resoluble para cualquier instante de tiempo con la condición de que $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$. Para los casos particulares $N_2 = N_u = 1, 2$ sería necesario añadir la restricción $\bar{\mathbf{x}}(1|0) \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$.

Estos resultados sólo son válidos cuando $N_u = N_2$, lo cual supone restringir la elección del parámetro de diseño N_u . Para extender la garantía de resolubilidad para los casos en que $N_u < N_2$ va a ser necesario considerar conjuntos más reducidos contenidos en $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$. En primer lugar se analiza el caso $N_u = 1$. Para que, a lo largo del horizonte de predicción, con una sola acción de control $\bar{\mathbf{u}}(0|0)$ el proceso se mantenga dentro de \mathbb{X} es suficiente exigir que el estado $\bar{\mathbf{x}}(0)$ pertenezca al conjunto de los puntos de equilibrio del proceso, \mathbb{E} , que están contenidos en $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$, es decir, $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$. Con esta condición siempre existe la solución factible $\bar{\mathbf{u}}(0|0) = \bar{\mathbf{u}}_0$, cuando $\bar{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0$. No obstante, este método es conservativo ya que, en general, el conjunto de estados iniciales que garantizan la resolubilidad para $N_u = 1$ contiene a $\mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$.

⁹La cual puede descargarse de la dirección web www-control.eng.com.ac.uk/eck21.

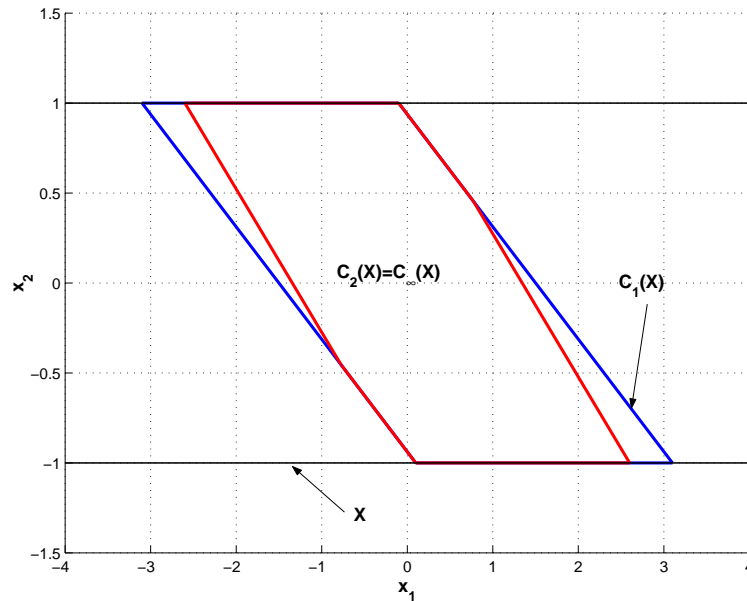


FIGURA 5.5: Mayor conjunto invariante bajo control contenido en \mathbb{X} y conjuntos admisibles para el proceso inestable de segundo orden.

Para el caso de procesos estables en bucle abierto puede calcularse un conjunto mayor, basado en la definición del siguiente conjunto invariante:

Definición 5.4.5 (Conjunto positivamente invariante robusto) El conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es positivamente invariante robusto para el sistema autónomo perturbado $\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{E}\bar{\mathbf{w}}(k)$ si y sólo si $\forall \bar{\mathbf{x}}(0) \in \Omega$ y para cualquier perturbación $\forall \bar{\mathbf{w}}(k) \in \mathbb{W}$, la evolución del sistema satisface $\bar{\mathbf{x}}(k) \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}$.

Al mayor conjunto positivamente invariante robusto contenido en \mathbb{X} se le denomina $\bar{\mathcal{O}}_\infty(\mathbb{X})$.

Es importante no confundir los conjuntos positivamente invariantes robustos y los conjuntos invariantes bajo control. En los primeros las entradas, $\bar{\mathbf{w}}$, se asimilan a perturbaciones y pueden ser cualquier secuencia de valores dentro del conjunto \mathbb{W} , mientras que en los segundos las entradas, $\bar{\mathbf{u}}$, juegan el papel de acciones de control cuyos valores se fijan de acuerdo a una ley de control admisible y, en principio, no pueden ser cualesquiera.

Si se considerase a las acciones de control como perturbaciones, es decir, $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{W}$ y $\bar{\mathcal{O}}_\infty(\mathbb{X}) \subseteq \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$ entonces para cualquier estado $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \bar{\mathcal{O}}_\infty(\mathbb{X})$ seguro que el problema de optimización será resoluble para $N_u = 1$. Consecuentemente, para procesos estables en bucle abierto el conjunto $\bar{\mathcal{O}}_\infty(\mathbb{X}) \cup (\mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X}))$ está contenido en el conjunto de los estados iniciales a partir de los cuales el problema de optimización es resoluble para $N_u = 1$ y $N_2 > N_u$.

Esta misma conclusión es, además, válida para $N_u \geq 1$, ya que es cierta para $N_u = 1$ y el aumento del tamaño del horizonte de control sólo produce un aumento en el número de cambios de la acción de control, para los cuales siempre existe la solución de que la acción de control sea constante y éstos sean nulos. No obstante, esto no implica que no existan otros cambios válidos para la acción de control que satisfagan las restricciones. Por tanto, cuando el GPC minimice el índice de coste obtendrá aquella secuencia de acciones de control que además de minimizarlo satisfaga las restricciones, la cual podrá ser una ley de control admisible constante o no.

Nota 5.4.1 Para procesos inestables en bucle abierto $\bar{\mathcal{O}}_\infty(\mathcal{X}) = \emptyset$, pues cualquier combinación de perturbaciones no estabiliza al proceso.

Para extender estas ideas para $N_u \geq 2$ y $N_2 > N_u$ hay que emplear un nuevo conjunto invariante:

Definición 5.4.6 (Conjunto estabilizable) El conjunto $\mathcal{S}_i(\Omega, \mathbb{T})$ es el conjunto estabilizable en i pasos contenido en Ω para el proceso (5.4-2) si y sólo si \mathbb{T} es un subconjunto invariante bajo control de Ω , y contiene todos los estados de Ω para los cuales existe una ley de control admisible que conducirá al estado del sistema a \mathbb{T} en un número de pasos menor o igual que i , manteniendo su evolución dentro de Ω :

$$\mathcal{S}_i(\Omega, \mathbb{T}) \triangleq \{ \bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathbb{R}^r / \exists \{ \bar{\mathbf{u}}(k) = h_k(\bar{\mathbf{x}}(k)) \in \cup_0^{i-1} \Omega, N \leq i : \{ \bar{\mathbf{x}}(k) \in \Omega \}_0^{N-1}, \{ \bar{\mathbf{x}}(k) \in \mathbb{T} \}_N^i \} \} \quad (5.4-16)$$

Proposición 5.4.3 Los conjuntos estabilizables $\mathcal{S}_i(\Omega, \mathbb{T})$ son invariantes bajo control, y siempre se cumple que el conjunto de $i - 1$ pasos está contenido en el de i pasos:

$$\mathcal{S}_{i-1} \subseteq \mathcal{S}_i \quad (5.4-17)$$

Para el caso de procesos inestables en bucle abierto, si se emplea el conjunto estabilizable de 1 paso $\mathcal{S}_1(\mathcal{X}, \mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}))$, entonces se garantiza que a partir de todos los estados, $\bar{\mathbf{x}}(0)$ contenidos en él existen acciones de control $\bar{\mathbf{u}}(0|0) \in \mathbb{U}$ que los confinan en $\mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})$ en un paso, es decir, $\bar{\mathbf{x}}(1|0) \in \mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})$. De este análisis se deduce que este conjunto estabilizable de 1 paso garantiza la resolubilidad para $N_u = 2$ y, empleando los mismos argumentos que para el caso $N_u = 1$, también garantiza la resolubilidad para $N_u \geq 2$.

Para el caso de procesos estables un resultado equivalente se verifica para el conjunto estabilizable de 1 paso $\mathcal{S}_1(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{O}}_\infty(\mathcal{X}) \cup (\mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})))$.

Esta metodología puede extenderse para conjuntos estabilizables de mayor número de pasos, lo cual garantizaría la resolubilidad para una mayor cantidad de estados iniciales, pero a costa de incrementar el valor mínimo del horizonte de control N_u . En concreto, si se emplean conjuntos estabilizables de i pasos puede tomarse $N_u \geq i + 1$ y $N_2 > N_u$.

Al igual que en otros conjuntos invariantes se puede definir al mayor conjunto estabilizable contenido en \mathcal{X} , $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{X}, \mathbb{T})$, como la unión de todos los conjuntos estabilizables de pasos comprendidos entre 1 y ∞ . Siempre se cumple que $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{X}, \mathbb{T}) \subseteq \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})$, aunque no tienen por qué ser coincidentes.

Finalmente hay que garantizar la resolubilidad para instantes posteriores al inicial. Para ello se puede, en primera instancia, imponer la restricción adicional de que $\bar{\mathbf{x}}(1|0) \in \mathcal{S}_i(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{O}}_\infty(\mathcal{X}) \cup (\mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})))$, para procesos estables, y $\bar{\mathbf{x}}(1|0) \in \mathcal{S}_i(\mathcal{X}, (\mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})))$ para procesos inestables, cuando se toma $N_u \geq i + 1$ y $N_2 > N_u$. Esta restricción no complica la resolubilidad pues los conjuntos estabilizables son invariantes bajo control y, por tanto, siempre existen acciones de control pertenecientes a \mathcal{U} que la cumplen.

Otra forma de resolver este problema se basa en determinar si existe $i < \infty$ tal que:

$$\mathcal{S}_i(\mathcal{X}, \mathbb{T}) = \mathcal{S}_\infty(\mathcal{X}, \mathbb{T}) = \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}) \quad (5.4-18)$$

En tal caso, si $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathcal{S}_\infty(\mathcal{X}, \mathbb{T})$, $N_u \geq i + 1$ y $N_2 > N_u$ entonces la restricción adicional anterior se cumple sin necesidad de ser añadida¹⁰.

En base a los análisis previos se puede presentar el siguiente resultado de resolubilidad:

Proposición 5.4.4 (Resultados de resolubilidad para el GPC) *Dado el proceso (5.4-2) y los conjuntos de restricciones sobre las acciones de control \mathcal{U} y sobre los estados \mathcal{X} , entonces se cumple:*

1. *Supóngase que existe $j^* < \infty$ tal que $\mathcal{C}_{j^*}(\Omega) = \mathcal{C}_\infty(\Omega)$. Si $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})$ y $N_u = N_2 \geq j^* + 1$, sea el proceso estable o inestable en bucle abierto, el problema de optimización asociado al GPC es resoluble para todo instante de tiempo. Si tal j^* no existe o se toma $N_u = N_2 < j^* + 1$ entonces es necesario añadir la restricción adicional $\bar{\mathbf{x}}(1|0) \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})$ para garantizar la resolubilidad en todo instante.*
2. *Si $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \bar{\mathcal{O}}_\infty(\mathcal{X}) \cup (\mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}))$ entonces para $N_u \geq 1$ y $N_2 \geq N_u$ el problema de optimización asociado al GPC es resoluble para todo instante de tiempo si se añade la restricción adicional $\bar{\mathbf{x}}(1|0) \in \bar{\mathcal{O}}_\infty(\mathcal{X}) \cup (\mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}))$.*
3. *Si $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathcal{S}_i(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{O}}_\infty(\mathcal{X}) \cup (\mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})))$ entonces para $N_u \geq i + 1$ y $N_2 \geq N_u$ el problema de optimización asociado al GPC es resoluble para todo instante de tiempo si se añade la restricción adicional $\bar{\mathbf{x}}(1|0) \in \mathcal{S}_i(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{O}}_\infty(\mathcal{X}) \cup (\mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})))$. Si además existe $i^* < \infty$ tal que $\mathcal{S}_{i^*}(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{O}}_\infty(\mathcal{X}) \cup (\mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}))) = \mathcal{S}_\infty(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{O}}_\infty(\mathcal{X}) \cup (\mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}))) = \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})$, entonces para $N_u \geq i^* + 1$ si $\bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathcal{S}_\infty(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{O}}_\infty(\mathcal{X}) \cup (\mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})))$ el problema de optimización asociado al GPC es resoluble para todo instante de tiempo.*

¹⁰Se basa en el mismo razonamiento empleado para el caso $N_2 = N_u$.

EJEMPLO 5.4.2 Empleando el mismo proceso y las mismas restricciones del ejemplo 5.4.1, se muestra el uso de los conjuntos estabilizables para garantizar resolubilidad. En la figura 5.6 se ha representado el conjunto de puntos de equilibrio contenidos en $C_\infty(\mathcal{X})$ y los sucesivos conjuntos estabilizables. Se comprueba que para $i \geq 4$ ya se ha alcanzado el mayor conjunto estabilizable, el cual coincide, en este ejemplo, con el mayor conjunto invariante bajo control. Se concluye, por tanto, que para $N_u \geq 5$ y $N_2 \geq N_u$ cualquier estado inicial que esté contenido en $C_\infty(\mathcal{X})$ garantiza la resolubilidad para todo instante de tiempo.

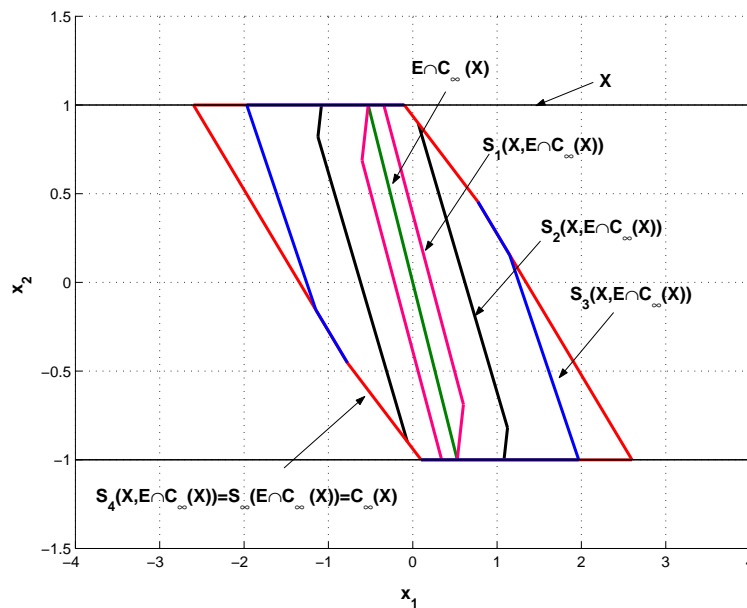


FIGURA 5.6: Conjuntos estabilizables y mayor conjunto invariante bajo control para el proceso inestable.

Este ejemplo permite dar más grados de libertad a diferencia del ejemplo 5.4.1, es decir, valores diferentes para N_2 y N_u , lo cual supone un mejor diseño de N_2 con menor N_u .

Puesto que el conjunto de restricción sobre las acciones de control, \mathcal{U} , es invariante con el tiempo, los resultados de la proposición 5.4.4 no son válidos para el caso de que existan restricciones en los incrementos de las acciones de control, ya que éstas implican que dicho conjunto varíe con el tiempo. Para solucionar esta limitación se emplea un proceso aumentado del original (5.4-2):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k+1) \\ \bar{\mathbf{u}}(k) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{\mathbf{u}}(k-1) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{\mathbf{u}}(k-1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.4-19)$$

5.4 Análisis de estabilidad con restricciones

cuyas entradas son los incrementos de las acciones de control. Ahora las restricciones sobre los incrementos de las acciones de control dan lugar a un conjunto de restricción ΔU que es invariante con el tiempo:

$$\Delta \mathbf{u}_{min} \leq \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max} \Rightarrow \Delta U = \left\{ \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) \in \mathbb{R}^m : \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) \leq \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{max} \\ -\Delta \mathbf{u}_{min} \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4-20)$$

pero ahora se tiene un estado aumentado formado por los estados del proceso y la última acción de control aplicada. A este estado aumentado le corresponde el siguiente conjunto de restricción:

$$\mathcal{X}U = \left\{ (\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k-1)) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m : \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \leq \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{max} \\ -\mathbf{y}_{min} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}(k-1) \leq \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{max} \\ -\mathbf{u}_{min} \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4-21)$$

Para este proceso aumentado sí que son válidos los resultados de la **proposición** 5.4.4.

EJEMPLO 5.4.3 Utilizando nuevamente el proceso del ejemplo 5.4.1, se van a incluir las siguientes restricciones sobre los incrementos de las acciones de control: $\Delta u_{min} = -0.15$ y $\Delta u_{max} = 0.15$. Con estas nuevas restricciones, el proceso aumentado posee el siguiente mayor conjunto invariante bajo control:

$$c_{\infty}(\mathcal{X}U) = \left\{ \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{\mathbf{u}}(k-1) \end{array} \right) \in \mathbb{R}^3 : \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.5760 & 0.7236 & 0 & 0.7740 & & \\ 0.5760 & 0.7236 & 0.9360 & 0.6804 & & \\ 0.6000 & 0.9600 & 0 & 0.9000 & & \\ 0.6000 & 0.9600 & 1.2000 & 0.7800 & & \\ -2.3040 & -2.8944 & -3.7440 & 2.7216 & & \\ -1.2000 & -1.9200 & -2.4000 & 1.5600 & & \\ -2.3040 & -2.8944 & -6.6240 & 2.8656 & & \\ -2.0840 & -2.4220 & -7.9419 & 3.2545 & & \\ 1.1520 & 1.4472 & 3.3120 & 1.4328 & & \\ 1.7366 & 2.0183 & 6.6182 & 2.7121 & & \\ -2.3040 & -2.8944 & 0 & 3.0960 & & \\ -1.2000 & -1.9200 & 0 & 1.8000 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & -1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0.2500 & & \\ 0 & 0 & -1 & 0.2500 & & \end{array} \right\} \quad (5.4-22)$$

En concreto, en el instante inicial es conocido que $\bar{\mathbf{u}}(k-1) = \mathbf{0}$, por lo que se puede representar en dos dimensiones (figura 5.7) el conjunto de los posibles estados iniciales del

proceso para los cuales es resoluble el problema de optimización. Dicho conjunto es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}(k) \in \mathbb{R}^2 : \left[\begin{array}{cc} 0.5760 & 0.7236 \\ 0.6000 & 0.9600 \\ -2.3040 & -2.8944 \\ -1.2000 & -1.9200 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right] \bar{x}(k) \leq \left[\begin{array}{c} 0.6804 \\ 0.7800 \\ 2.7216 \\ 1.5600 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (5.4-23)$$

Esta misma idea puede utilizarse para representar en dos dimensiones los sucesivos conjuntos estabilizables, que son diferentes de los obtenidos en el ejemplo anterior. En la figura 5.7 se han representado dichos conjuntos estabilizables, apreciándose que en este caso particular $i^* = 4$ y $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{X} \cup, \mathbb{E} \cap \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X} \cup)) = \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X} \cup)$. Se concluye, entonces, que para $N_u \geq 5$ si el estado inicial está en $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X} \cup)$ el problema de optimización será resoluble para todo instante de tiempo.

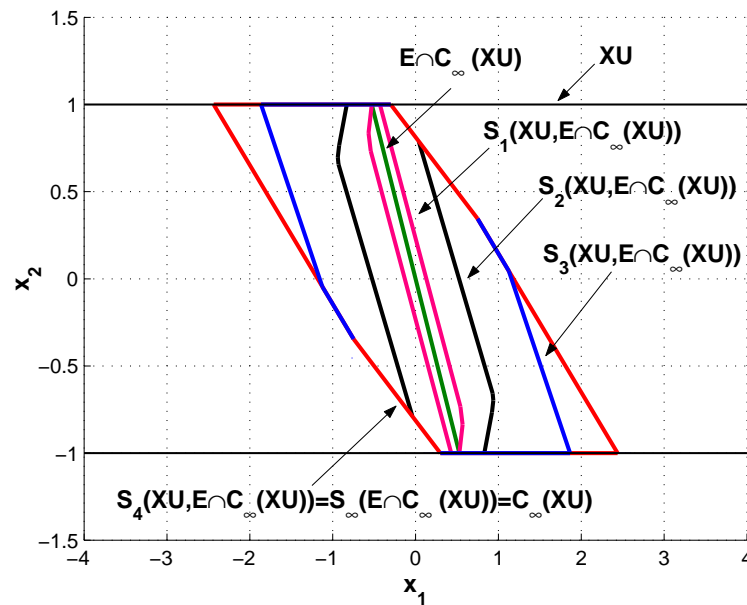


FIGURA 5.7: Mayor conjunto invariante bajo control y conjuntos estabilizables para el proceso inestable cuando se presentan restricciones sobre los incrementos de las acciones de control.

Para confirmar este hecho, en la figura 5.8 se ha representado la evolución de los estados de este proceso cuando es controlado con un GPC diseñado con los siguientes parámetros:

- $N_u = 5, N_2 = 15, Q_i = I \forall i, R_i = 0 \forall i$.

y el estado inicial del cual parte el proceso es:

1. El vértice $(0.3, -1)$ del conjunto $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X} \cup)$. Se corresponde con el trazado continuo en color rojo.

5.4 Análisis de estabilidad con restricciones

2. El punto $(0.29, -1)$, muy cercano a éste vértice pero no contenido en el mayor conjunto invariante bajo control anterior. Se corresponde con el trazado discontinuo en color negro.

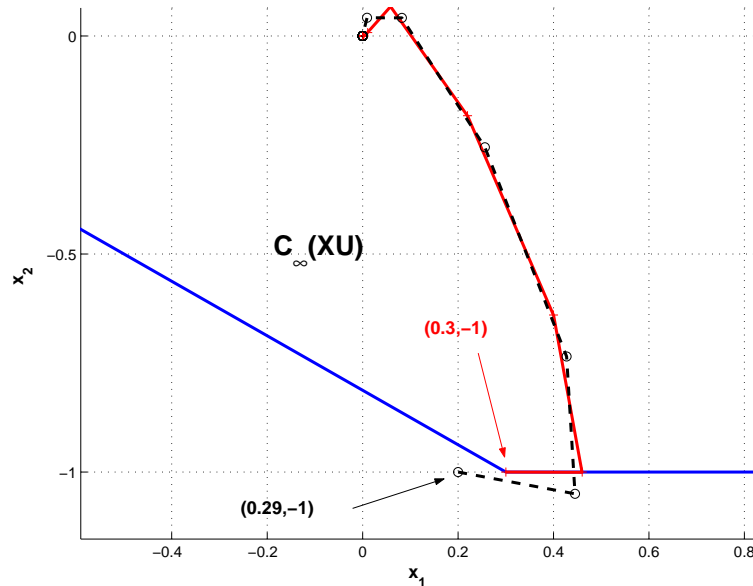


FIGURA 5.8: Trayectorias seguidas por el proceso inestable bajo el control de un GPC para dos puntos de partida.

Como se aprecia el trayecto que corresponde al punto de partida $(0.3, -1)$ siempre está contenido en $C_\infty(\mathcal{XU})$ y, por tanto, no se violan las restricciones impuestas. Sin embargo, para el caso del punto de partida $(0.29, -1)$ ya no se cumplen las restricciones sobre la salida, ya que el siguiente punto de dicha trayectoria está fuera de \mathcal{XU} . En concreto, se ha violado la restricción de que la salida sea mayor o igual que -1 . Obviamente, durante la simulación en Matlab el algoritmo QP muestra un mensaje de advertencia de que ha sido imposible obtener soluciones al problema de optimización que verifiquen todas las restricciones (\mathcal{XU} y ΔU).

Otro aspecto interesante está relacionado con si es posible encontrar estados iniciales que pertenezcan a $C_\infty(\mathcal{XU})$ y no a $\mathcal{S}_3(\mathcal{XU}, \mathbb{E} \cap C_\infty(\mathcal{XU}))$, para los cuales el problema de optimización sea resoluble para $N_u = 5$ y no para $N_u = 4$. Por ejemplo, si se elige como estado inicial el vértice $(-2.4375, 1)$ (ver figura 5.7) resulta que para este estado inicial se verifica que el problema de optimización no es resoluble para $N_u = 4$ en el instante inicial $k = 0$, en concreto, la primera acción de control que proporciona QP es $\bar{u}(0|0) = 0.1503$, la cual viola la restricción sobre el incremento máximo de la acción de control. Sin embargo, para instantes posteriores el problema es resoluble tanto para $N_u = 4$ como para $N_u = 5$. En la figura 5.9 se muestran las trayectorias seguidas para ambos tamaños del horizonte de control (que son muy similares). Además, se ha representado el conjunto $C_\infty(\mathcal{XU})$ para el instante inicial, $k = 0$, y para el siguiente instante $k = 1$. Lo mismo se ha hecho para el

conjunto $S_3(\mathcal{XU}, E \cap C_\infty(\mathcal{XU}))$. Hay que recordar que ambos conjuntos son tridimensionales, y cuando se desea obtener una representación de los mismos en dos dimensiones, ésta cambia con el instante de muestreo k .

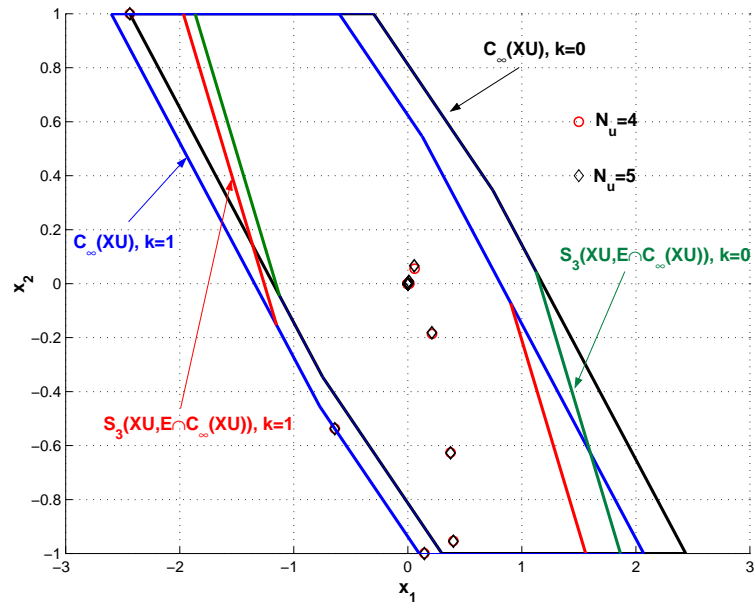


FIGURA 5.9: Trayectorias seguidas por el proceso inestable bajo el control de un GPC para el estado inicial $(-2.4374, 1)$ empleando $N_u = 4$ y $N_u = 5$.

5.4.2.2. Caso de estimación de los estados mediante observador

El análisis anterior es válido cuando todos los estados del proceso son medibles. Pero, en general, la metodología de diseño del GPC en espacio de estados requiere del uso de un observador de rango completo como el presentado en el capítulo 3 para la estimación de los estados del modelo CARIMA. Esto implica que habrá que adaptar el esquema de resolubilidad anterior si se usa un observador.

Para facilitar la comprensión de las expresiones, hay que tener en cuenta que $\hat{x}(k+j|k)$ representa la predicción de los estados en el instante $k+j$ con el valor de los estados observados en k , $\hat{x}(k)$.

Cuando se emplea el observador presentado en el capítulo 3 éste obtiene una estimación u observación del estado en el instante k , $\hat{x}(k)$, que depende de la medida real de la salida del proceso en el instante $k-1$ (3.6-2). Esta observación no será igual, en general, al valor del estado real del proceso $x(k)$. Consecuentemente, la predicción de los estados en base a este estado observado, $\hat{x}(k+j|k)$ $j = 1, \dots, N_2$, discrepará de los verdaderos valores del estado del proceso, $x(k+j)$.

Por otro lado, hay que recordar que los estados observados convergen hacia los verdaderos estados del proceso cuando $k \rightarrow \infty$, independientemente de la dinámica del

GPC, dado que la dinámica del observador es estable (3.6-28). Esto quiere decir que las predicciones realizadas por el GPC convergen hacia los verdaderos valores de los estados.

Como consecuencia del análisis anterior, se realizará una pequeña revisión de la metodología asociada al modelo de predicción presentada en el capítulo 3. En concreto, la expresión para la predicción de las salidas viene dada por (3.3-8):

$$\bar{y}(k+i|k) = \bar{C}\bar{A}^{i-1}(\bar{A} - \Pi\bar{C})\hat{x}(k) + \sum_{j=0}^{i-1} \bar{C}\bar{A}^j\bar{B}\bar{u}(k+i-j-1|k) + \bar{C}\bar{A}^{i-1}\Pi\bar{y}(k) = \bar{C}\hat{x}(k+i|k) \quad i \geq 1 \quad (5.4-24)$$

Para el instante $i = 1$ resulta:

$$\bar{y}(k+1|k) = \bar{C}(\bar{A} - \Pi\bar{C})\hat{x}(k) + \bar{C}\bar{B}\bar{u}(k|k) + \bar{C}\Pi\bar{y}(k) = \bar{C}\hat{x}(k+1|k) = \bar{C}\hat{x}(k+1) \quad (5.4-25)$$

hay que recordar que la predicción de los estados en el instante $k+1$ coincide con la observación de los estados realizada por el observador en $k+1$. Sin embargo, para instantes posteriores, al disponerse sólo de la medida real del proceso en el instante k , la predicción que se realiza es en bucle abierto y viene dada por (5.4-24).

A raíz de este análisis se deduce que sólo va a ser posible imponer restricciones sobre los estados predichos y no sobre sus verdaderos valores reales, a diferencia del caso en que los estados son medibles, para el cual dado que modelo y proceso coinciden, resulta que los estados predichos coinciden con los reales (suponiendo que se aplican al proceso todas las acciones de control del horizonte de control).

Dado que el GPC emplea una metodología de horizonte móvil y para realizar la predicción sólo se dispone de la medida de las salidas en k , se va a proponer que el GPC basado en observador sólo imponga restricciones sobre los estados predichos para el instante $k+1$, dejando el resto libres. sólo aplica Téngase en cuenta que imponerlas para instantes posteriores no garantiza que los correspondientes valores reales también las verifiquen.

Con esta propuesta el análisis de resolubilidad cuando se estiman los estados se basa en emplear el siguiente proceso aumentado, compuesto por proceso real más observador:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \Pi C & \bar{A} - \Pi\bar{C} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(k) \\ \hat{x}(k) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \bar{B} \end{bmatrix} \bar{u}(k) \quad \bar{y}(k+1|k) = \bar{C}\hat{x}(k+1) \quad (5.4-26)$$

Si se desea determinar para qué conjunto de valores iniciales de los estados del proceso y del observador el problema de optimización es siempre resoluble, hay que determinar el mayor conjunto invariante bajo control para este proceso aumentado, $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_o)$,

calculado a partir de los siguientes conjuntos de restricciones:

$$\mathbb{X}_o = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{r+n} : \bar{\mathbf{x}}(k) \in \mathbb{X} \ , \ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\ -\bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) \leq \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{max} \\ \mathbf{y}_{min} \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4-27)$$

$$\mathbb{U} = \left\{ \bar{\mathbf{u}}(k) \in \mathbb{R}^m : \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}(k) \leq \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{max} \\ -\mathbf{u}_{min} \end{bmatrix} \right\} \quad (5.4-28)$$

Nota 5.4.2 Si además existiesen restricciones sobre los incrementos de las acciones de control hay que emplear el proceso aumentado (5.4-19).

Siguiendo la metodología desarrollada para el caso sin observador (proposición 5.4.4), para garantizar la resolubilidad para cualesquiera N_z y N_u hay que imponer la restricción adicional de que $(\bar{\mathbf{x}}(k+1), \hat{\mathbf{x}}(k+1)) \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X}_o)$ a partir de $(\bar{\mathbf{x}}(k), \hat{\mathbf{x}}(k)) \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X}_o)$. Sin embargo, no va ser posible aplicar este esquema, pues, los estados reales del proceso, $\bar{\mathbf{x}}$, no son medibles. Por ello, hay que plantear otra metodología alternativa que garantice la resolubilidad. Esta metodología deberá basarse exclusivamente en el estado observado en el instante $k+1$:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\bar{\mathbf{A}} - \Pi \bar{\mathbf{C}}) \hat{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{u}}(k) + \Pi \bar{\mathbf{y}}(k) \quad (5.4-29)$$

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{u}}(k) + \Pi (\mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}(k) - \bar{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{x}}(k)) \quad (5.4-30)$$

Recordando la clasificación de los estados del observador (4.5-5) se deduce que:

$$\mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}(k) - \bar{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}(k) - \bar{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}^*(k) \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_D(k) \\ -\hat{\mathbf{x}}^*(k) \end{pmatrix} \quad (5.4-31)$$

con lo cual:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}^*(k+1) \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}^*(k) \end{pmatrix} + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{u}}(k) + \Pi \bar{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_D(k) \\ -\hat{\mathbf{x}}^*(k) \end{pmatrix} \quad (5.4-32)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}^*(k+1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \Pi_1 \Omega \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}^*(k) \end{pmatrix} + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{u}}(k) + \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \Omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_D(k) \\ -\hat{\mathbf{x}}^*(k) \end{pmatrix} \quad (5.4-33)$$

realizando ciertas simplificaciones:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}^*(k+1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}^*(k) \end{pmatrix} + \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{u}}(k) + \begin{bmatrix} \Pi_1 \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} - \Omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_D(k) \\ \hat{\mathbf{x}}^*(k) \end{pmatrix} \quad (5.4-34)$$

Siguiendo la metodología hasta ahora empleada, se define el conjunto de restricciones sobre los estados del observador como sigue:

$$\mathbb{X}^o = \{ \hat{\mathbf{x}}(k) \in \mathbb{R}^{r+n} : \mathbf{y}_{min} \leq \bar{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{x}}(k) \leq \mathbf{y}_{max} \} \quad (5.4-35)$$

5.4 Análisis de estabilidad con restricciones

a partir del cual hay que obtener el mayor conjunto invariante bajo control del sistema observador (5.4-34), para así poder establecer la condición de resolubilidad. Dicho conjunto deberá calcularse tomando a e_D y a $\hat{\mathbf{x}}^*$ como perturbaciones acotadas. Por ello, el siguiente paso consiste en determinar los conjuntos acotados a los cuales pertenecen.

La evolución dinámica de e_D y de $\hat{\mathbf{x}}^*$ viene dada por las ecuaciones (4.5-15):

$$\begin{aligned} e_D(k+1) &= (A - \Pi_1 C) e_D(k) \\ \hat{\mathbf{x}}^*(k+1) &= (I - \Omega) \hat{\mathbf{x}}^*(k) + C e_D(k) \end{aligned} \quad (5.4-36)$$

El valor inicial para $\hat{\mathbf{x}}^*$ se toma igual a cero pues no hay información a priori sobre dichos estados del ruido. Consecuentemente, los valores de $\hat{\mathbf{x}}^*$ y e_D para cualquier instante de tiempo se pueden obtener a partir del valor inicial $e_D(0)$, según las formulas:

$$\begin{aligned} e_D(k) &= (A - \Pi_1 C)^k e_D(0) \quad k \geq 0 \\ \hat{\mathbf{x}}^*(k) &= H_k e_D(0) \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (5.4-37)$$

siendo la matriz H_k :

$$H_0 = \mathbf{0} \quad ; \quad H_k = (I - \Omega) H_{k-1} + C (A - \Pi_1 C)^{k-1} \quad k \geq 1 \quad (5.4-38)$$

De estas expresiones se deduce que los valores de los sucesivos estados del ruido y de los errores de estimación de los estados determinísticos siempre están acotados por ser la dinámica del observador estable. En concreto se cumple que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_D(k) = \mathbf{0} \quad (5.4-39)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}^*(k) = \mathbf{0} \quad (5.4-40)$$

Teniendo en cuenta el modelo del observador (5.4-34) y las evoluciones dinámicas (5.4-37) éste se transforma en un sistema lineal variante con el tiempo:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}^*(k+1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}^*(k) \end{pmatrix} + \bar{B} \bar{u}(k) + \begin{bmatrix} \Pi_1 C (A - \Pi_1 C)^k \\ C (A - \Pi_1 C)^k + (I - \Omega) H_k \end{bmatrix} e_D(0) \quad (5.4-41)$$

donde $e_D(0)$ ha de considerarse como una perturbación acotada. En concreto, es necesario conocer el conjunto al cual pertenece. Partiendo de su definición:

$$e_D(0) = \bar{\mathbf{x}}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0) \quad (5.4-42)$$

y teniendo en cuenta que la observación inicial de los estados es siempre fija (por ejemplo $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$), y que el par $(\bar{\mathbf{x}}(0), \hat{\mathbf{x}}(0))$ ha de pertenecer necesariamente al conjunto $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_o)$ para que el problema de optimización del GPC sea resoluble (aunque se desconozca el valor de $\bar{\mathbf{x}}(0)$), resulta que $\mathbf{e}_D(0)$ pertenece a un conjunto que está relacionado con el mayor conjunto invariante anterior. Para la obtención de dicho conjunto se parte de la expresión del conjunto $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_o)$:

$$(\bar{\mathbf{x}}(0), \hat{\mathbf{x}}(0)) \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_o) \quad ; \quad \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_o) = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{r+n} : \mathbf{P}_1 \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{x}}(k) \leq \mathbf{S} \right\} \quad (5.4-43)$$

siendo \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 matrices de dimensiones adecuadas y \mathbf{S} un vector columna con las mismas filas que las matrices anteriores. Nótese que esta representación se deriva del hecho de que todos los conjuntos invariantes con politopos convexos (ver ejemplos 5.4.1, 5.4.2 y 5.4.3). Ahora se opera sobre dicha representación:

$$\mathbf{P}_1 \bar{\mathbf{x}}(0) + \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{x}}(0) \leq \mathbf{S} \quad (5.4-44)$$

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{e}_D(0) + \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{x}}(0) + \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{x}}(0) \leq \mathbf{S} \quad (5.4-45)$$

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{e}_D(0) \leq \mathbf{S} - (\mathbf{P}_1 [\mathbf{I}_r \mathbf{0}_{r \times n}] + \mathbf{P}_2) \hat{\mathbf{x}}(0) \quad (5.4-46)$$

luego $\mathbf{e}_D(0)$ pertenece al conjunto:

$$\mathcal{E}_D(\hat{\mathbf{x}}(0)) \triangleq \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^r : \mathbf{P}_1 \mathbf{z} \leq \mathbf{S} - (\mathbf{P}_1 [\mathbf{I}_r \mathbf{0}_{r \times n}] + \mathbf{P}_2) \hat{\mathbf{x}}(0) \} \quad (5.4-47)$$

Una vez determinado este conjunto de los posibles errores determinísticos, hay que obtener la condición adicional que han de cumplir los estados observados en $k + 1$ para garantizar la resolubilidad. Pero antes hay que destacar que el sistema (5.4-41) es lineal pero variante con el tiempo, lo cual supone que, en principio, la teoría de conjuntos invariantes antes aplicada al GPC deja de ser válida ya que ésta fue presentada para sistemas lineales e invariantes con el tiempo. En [Kerrigan 2000] se presenta una generalización de esta metodología al caso de sistemas variantes con el tiempo, la cual se basa en los conceptos ya presentados con ligeros cambios, aunque ya no va a ser posible, en general, garantizar la existencia de los mayores conjuntos invariantes bajo control. Esta metodología será la que se empleará a partir de este momento, pero antes se requiere presentar la siguiente definición:

Definición 5.4.7 (Conjunto robustamente controlable) *El conjunto robustamente controlable en i pasos $\tilde{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T}, \mathbb{W})$ es el mayor conjunto de estados de Ω para el cual existe una ley de control admisible para la cual un conjunto objetivo arbitrario $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^n$ es alcanzado exactamente en i pasos, mientras se mantiene la evolución de los estados dentro de Ω para los primeros $i - 1$ pasos, para todas las perturbaciones esperables:*

$$\tilde{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T}, \mathbb{W}) \triangleq \{ \bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathbb{R}^n / \exists \{ \bar{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{h}_k(\bar{\mathbf{x}}(k)) \in \mathbb{U} \}_0^{i-1} : \{ \bar{\mathbf{x}}(k) \in \Omega \}_0^{i-1}, \bar{\mathbf{x}}(i) \in \mathbb{T}, \forall \{ \bar{\mathbf{w}}(k) \in \mathbb{W} \}_0^{i-1} \} \quad (5.4-48)$$

5.4 Análisis de estabilidad con restricciones

Para los sistemas variantes con el tiempo la metodología a seguir consiste en partir de un determinado instante $k = N$ y regresar hacia el instante inicial $k = 0$, lo cual implica, que antes de aplicarla, es necesario fijar un determinado instante final finito. Para el caso que se está analizando, la matriz del sistema (5.4-41) que corresponde a los errores determinísticos iniciales tiende a la matriz nula conforme k tiende a infinito por ser la dinámica del observador estable. Esto supone que dicho sistema converge a un sistema lineal e invariante con el tiempo, que resulta ser el proceso real, pues los estados observados convergen a los estados reales del proceso. Este hecho sólo es estrictamente cierto para $k = \infty$, pero se puede obtener un valor finito para N imponiendo cierta tolerancia en la convergencia de los estados observados a los reales. En concreto, se ha optado por fijar una tolerancia, ϵ , en la convergencia a cero de los estados del ruido observados (5.4-40) $\hat{\mathbf{x}}^*$, siendo N el instante para el que se cumple:

$$\|\hat{\mathbf{x}}^*(N)\| < \epsilon \quad (5.4-49)$$

Si la tolerancia fijada ϵ es lo suficiente pequeña (por ejemplo 10^{-16}) se puede suponer que, aproximadamente, para dicho instante los estados observados coinciden con los reales, con lo cual para $k = N$ para garantizar la resolubilidad se ha de cumplir que:

$$\hat{\mathbf{x}}(N) \approx \bar{\mathbf{x}}(N) \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X}) \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}(N) \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X}) \quad (5.4-50)$$

tal y como se analizó para el caso sin observador. Todo esto se da para un N finito y conocido, ya que como:

$$\hat{\mathbf{x}}^*(k) = \mathbf{H}_k \mathbf{e}_D(0) \quad (5.4-51)$$

basta tomar:

$$N = \operatorname{argmin}_k \left\{ k : \|\mathbf{H}_k\| \cdot \max_{z \in \mathcal{E}_D(\hat{\mathbf{x}}(0))} \|z\| < \epsilon \right\} \quad (5.4-52)$$

Una vez obtenida la condición (5.4-50) para el instante N hay que obtener la condición de resolubilidad correspondiente al instante anterior $N - 1$. Dicha condición supone imponer que los estados observados en $N - 1$ han de pertenecer al conjunto robustamente controlable de un paso para el sistema variante (5.4-41) actualizado para el instante $N - 1$ tomando como perturbación a $\mathbf{e}_D(0)$ y obligando a que los estados observados alcancen el conjunto $\mathcal{C}'_\infty(\mathbb{X})$:

$$\tilde{\mathcal{K}}_1(\mathbb{X}^0, \mathcal{C}'_\infty(\mathbb{X}), \mathcal{E}_D(\hat{\mathbf{x}}(0))) \quad (5.4-53)$$

siendo:

$$\mathcal{C}'_\infty(\mathbb{X}) \triangleq \left\{ \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{x}}^* \end{pmatrix} : \hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{X}), \hat{\mathbf{x}}^* = \mathbf{0} \right\} \quad (5.4-54)$$

Esta misma idea ha de aplicarse para el instante $N - 2$, para el cual será necesario imponer la condición de que los estados observados pertenezcan al conjunto $\tilde{\mathcal{K}}_1(\mathcal{X}^0, \tilde{\mathcal{K}}_1(\mathcal{X}^0, \mathcal{C}'_\infty(\mathcal{X}), \mathcal{E}_D(\hat{\mathbf{x}}(0))), \mathcal{E}_D(\hat{\mathbf{x}}(0)))$. Y así se repite hasta llegar al instante $k = 0$, calculando los sucesivos conjuntos robustamente controlables de un paso tales que llevan a los estados observados en un paso al anterior conjunto robustamente controlable, para cualquier error determinístico inicial. Por tanto, el paso previo a la aplicación de este esquema de resolubilidad es el cómputo de todos estos conjuntos robustamente controlables¹¹. Finalmente, el problema de resolubilidad para el caso del observador tendrá solución si el conjunto robustamente controlable para el instante $k = 0$ es no vacío, ya que si lo fuese no sería posible encontrar estados iniciales para el observador tales que para los instantes siguientes pudiesen alcanzar los sucesivos conjuntos robustamente controlables de un paso satisfaciendo todas las restricciones, para alcanzar finalmente el mayor conjunto invariante bajo control $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})$.

Para simplificar la notación se usarán las siguientes definiciones:

$$\mathcal{K}_N \triangleq \mathcal{C}'_\infty(\mathcal{X}) \quad (5.4-55)$$

$$\mathcal{K}_{N-1} \triangleq \tilde{\mathcal{K}}_1(\mathcal{X}^0, \mathcal{K}_N, \mathcal{E}_D(\hat{\mathbf{x}}(0))) \quad (5.4-56)$$

$$\mathcal{K}_j \triangleq \tilde{\mathcal{K}}_1(\mathcal{X}^0, \mathcal{K}_{j+1}, \mathcal{E}_D(\hat{\mathbf{x}}(0))) \quad j = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (5.4-57)$$

Con estas definiciones y conocidos los sucesivos conjuntos robustamente controlables, \mathcal{K}_j , se propone el siguiente algoritmo que garantiza la resolubilidad:

1. Se inicializa $j = 0$. Se toma un valor inicial para los estados del observador, $\hat{\mathbf{x}}(0)$, que pertenezca a \mathcal{K}_0 .
2. Se resuelve la ley de control del GPC imponiendo las restricciones correspondientes sobre las acciones de control y la restricción de que $\hat{\mathbf{x}}(j + 1) \in \mathcal{K}_{j+1}$.
3. Se incrementa j y se vuelve al punto 2 si $j \leq N - 1$. En caso contrario a partir del instante N se aplica la metodología desarrollada para el caso sin observador, tomando a los estados determinísticos observados como los verdaderos valores de los estados del proceso.

Este esquema de resolubilidad es válido para cualquier tamaño de los horizontes de predicción y control, con lo condición de que el método de resolubilidad aplicado para el caso sin observador también lo cumpla (ver proposición 5.4.4).

En base a todos los desarrollos previos se puede enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA 5.4.1 *Para toda pareja de estados iniciales del proceso, $\bar{\mathbf{x}}(0)$, y de estados iniciales de estimación del observador, $\hat{\mathbf{x}}(0)$, pertenecientes a $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_o)$, con $\hat{\mathbf{x}}(0) \in \mathcal{K}_0$, suponiendo*

¹¹Para ello se puede emplear, por ejemplo, la *Invariant Set Toolbox*.

5.4 Análisis de estabilidad con restricciones

que \mathcal{X}_0 sea no vacío, el problema de optimización del GPC es siempre resoluble para $N_u \geq 1$, $N_2 \geq N_u$ cuando se emplea la restricción de que $\hat{\mathbf{x}}(j+1) \in \mathcal{X}_{j+1}$ $j = 0, 1, \dots, N-1$, aplicando a partir del instante $j = N$ los resultados de la **proposición** 5.4.4. La restricción impuesta sobre los estados observados por el observador asegura que éstos satisfarán las restricciones impuestas sobre los estados, es decir, $\hat{\mathbf{x}}(j+1) \in \mathcal{X}^0$.

EJEMPLO 5.4.4 Para el proceso inestable del ejemplo 5.4.1, se va a calcular el conjunto $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_0)$ con las mismas restricciones ya indicadas, y para el caso de que todos los polos del observador se ubiquen en 0.5. La expresión de dicho conjunto se adjunta en el anexo A ejemplo A.3.1.

Como la estimación inicial de los estados del proceso siempre es conocida, $\hat{\mathbf{x}}(0)$, a partir del conjunto $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_0)$ se puede determinar el posible conjunto de los estados iniciales del proceso. Dicho conjunto se ha representado en la figura 5.10 cuando, por ejemplo, $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$, junto con el conjunto $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})$, que contiene los posibles estados iniciales para el caso en que los estados son medibles. Como se puede apreciar, éste último contiene al conjunto obtenido para el caso del uso del observador.

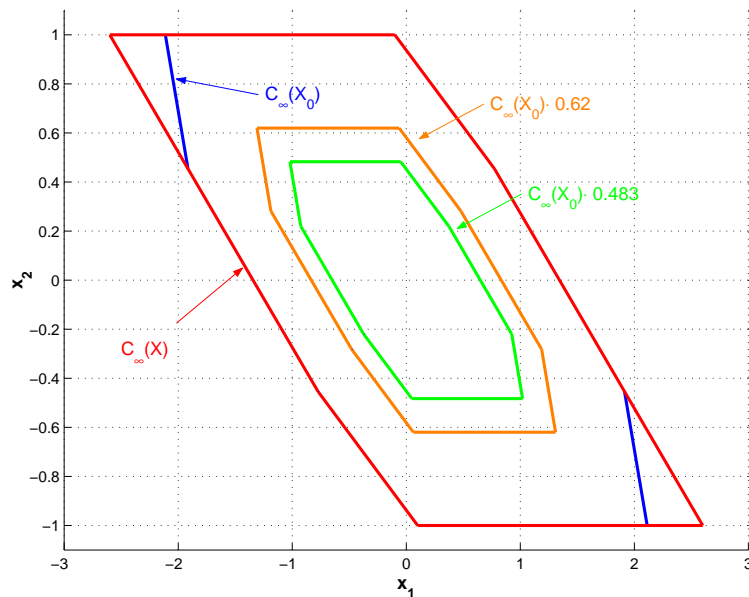


FIGURA 5.10: Mayor conjunto invariante bajo control para el caso en que los estados son medibles, y mayor conjunto invariante bajo control cuando se estiman los estados y $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$, para el proceso inestable.

Si se aplica el algoritmo antes propuesto se pueden determinar los conjuntos \mathcal{X}_j , para el caso en que $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$. Tras una serie de cálculos se ha determinado que para todo el conjunto de posibles perturbaciones, $\mathcal{E}_D(\mathbf{0})$, el conjunto \mathcal{X}_0 es vacío, lo cual indica que para todos los estados iniciales en $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_0)$ no es posible satisfacer las restricciones. Por ello, se ha probado con conjuntos de menor tamaño contenidos en él, obtenidos mediante escalado de éste. En concreto, tras una serie de iteraciones, se ha observado que \mathcal{X}_0 es no

vacío para escalados inferiores o iguales a 0.483 (ver figura 5.10). Para dicho valor de escalado en la figura 5.11 se han representado en dos dimensiones los primeros conjuntos robustamente controlables de un paso junto con el conjunto $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X})$, al cual convergen conforme j alcanza el valor N , que para este proceso resulta ser de 68 cuando se toma una tolerancia de 10^{-16} .

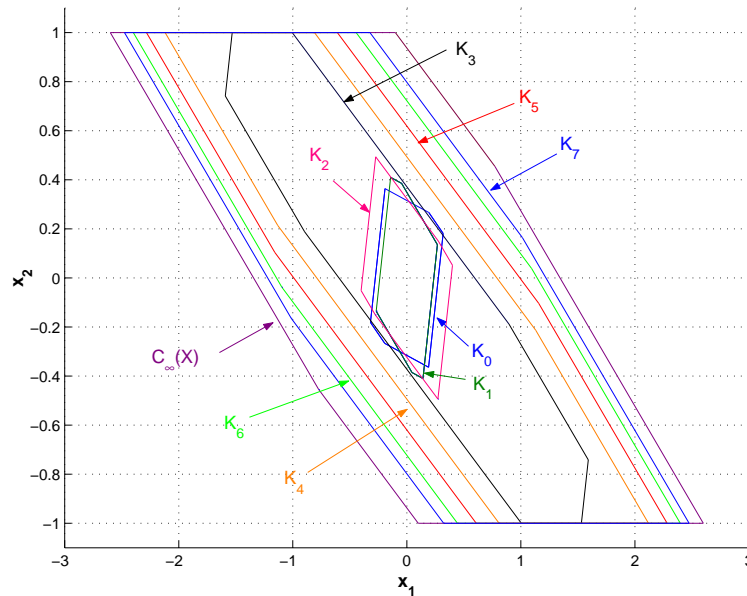


FIGURA 5.11: Conjuntos \mathcal{K}_j y mayor conjunto invariante bajo control para el caso en que los estados son medibles.

La metodología propuesta en el algoritmo anterior puede ser conservadora ya que asume que la perturbación puede variar de un instante a otro dentro del conjunto $\mathcal{E}_D(\mathbf{0})$, lo cual no es cierto, pues en realidad ésta toma un valor cualesquiera dentro de este conjunto pero constante a lo largo de los sucesivos instantes. En concreto, para este ejemplo resulta, tras una serie de iteraciones, que el esquema garantiza resolubilidad hasta para un escalado de 0.62 (ver figura 5.10), aplicando perturbaciones constantes, empleando los conjuntos \mathcal{K}_j obtenidos para el escalado de 0.483.

A modo de ejemplo, en la figura 5.12 se han presentado las evoluciones de la salida real y de la predicha cuando se diseña un controlador GPC con $N_u = 5$, $N_2 = 15$, $\mathbf{Q}_j = \mathbf{I}$, $\mathbf{R}_i = \mathbf{0}$, tomando como estado inicial el vértice $(-1.1872, 0.2818)$ del conjunto escalado por 0.62. Como se aprecia, la salida predicha satisface en todo momento las restricciones, mientras la real no.

Nota 5.4.3 Esta misma metodología puede aplicarse si se deseara emplear el conjunto estabilizable $\mathcal{S}_i(\mathcal{X}_o, \mathbb{E}_{\bar{\omega}_0}^l)$, en lugar de $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_o)$, siendo necesario obtener los conjuntos robustamente controlables de un paso para poder alcanzar el conjunto estabilizable $\mathcal{S}_i(\mathcal{X}, \mathbb{E}_{\bar{\omega}_0})$

5.5 Diseño estable de GPC con restricciones

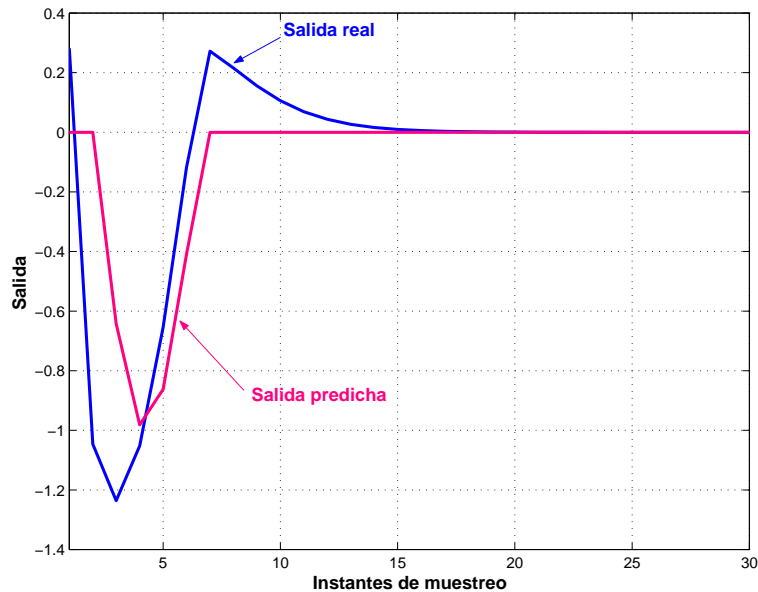


FIGURA 5.12: Evolución temporal de la salida predicha y la real bajo el control con GPC, partiendo del vértice $(-1.1872, 0.2818)$.

en lugar del conjunto $\mathcal{C}_\infty(\mathbb{X})$. $\mathbb{E}'_{\tilde{\omega}_0}$ representa el punto de equilibrio del sistema aumentado (5.4-26) asociado a $\tilde{\omega}_0$, y $\mathbb{E}_{\tilde{\omega}_0}$ lo mismo pero para el proceso real.

Nota 5.4.4 En el caso particular de que los polos del observador ($r + n$) se ubiquen en cero, se cumple que tras $r + n$ instantes de muestreo la estimación del estado converge al verdadero valor real de los estados del proceso. A partir de ese instante se puede, pues, aplicar la misma mecánica que para el caso de que todos los estados sean medibles.

5.5. Diseño estable de GPC con restricciones

En este punto se va a justificar, al igual que se hizo para el caso sin restricciones, que, bajo ciertas condiciones, siempre se pueden encontrar tamaños para el horizonte de predicción y para el de control que garanticen la estabilidad del bucle cerrado.

5.5.1. Garantía de estabilidad

El resultado principal viene impuesto por el siguiente teorema, que emplea ideas similares a las presentadas en [Primbs y Nevistić 1997; Senent 1998; Lee 2000]:

TEOREMA 5.5.1 Supóngase que se cumplen las condiciones de la **proposición** 5.4.3, para el caso en que los estados sean medibles, o las condiciones del **TEOREMA** 5.4.1, para el caso

del uso del observador del capítulo 3. Dadas matrices Q_i y R_i que verifiquen:

$$Q_i - Q_{i-1} \geq 0 \quad \forall i ; \quad R_i - R_{i-1} \geq 0 \quad \forall i \quad (5.5-1)$$

sea $s \geq 0$ el mínimo número entero tal que $\forall k$:

$$H(k) = \mathbf{e}(k)^T Q_1 \mathbf{e}(k) + \sum_{i=1}^s \mathbf{e}(k+i|k)^T Q_i \mathbf{e}(k+i|k) + \sum_{i=0}^{s-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k)^T R_{i+1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k) > 0$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k) \neq \mathbf{x}_0 \quad (5.5-2)$$

siendo \mathbf{x}_0 el valor del estado correspondiente al punto de equilibrio $\bar{\omega}_0$, y n_i el número de polos inestables del proceso, para todos los valores iniciales del estado y de la estimación de los mismos que pertenezcan al conjunto estabilizable $\mathcal{S}_j(\mathcal{X}_o, \mathbb{E}'_{\bar{\omega}_0}) \subseteq \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_o)$ y para $N_u \geq \max\{j+1, n_i+1\} + s + 1$ existe N_2^* tal que para $N_2 \geq N_2^*$ el bucle cerrado del proceso más GPC es asintóticamente estable con respecto del punto de equilibrio correspondiente a $\bar{\omega}_0$.

$\mathbb{E}'_{\bar{\omega}_0}$ representa el punto de equilibrio del sistema aumentado (5.4-26) asociado a $\bar{\omega}_0$.

Nota 5.5.1 El conjunto estabilizable $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{X}_o, \mathbb{E}'_{\bar{\omega}_0})$ es el mayor conjunto posible de valores iniciales para los estados y de sus estimaciones iniciales para los cuales, además de ser resoluble el problema de optimización, el controlador GPC puede llevar al proceso al punto de equilibrio $\bar{\omega}_0$. En general, $\mathcal{S}_\infty(\mathcal{X}_o, \mathbb{E}'_{\bar{\omega}_0}) \subseteq \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_o)$, aunque si coinciden, para todos los casos en los que el problema es resoluble además cabe la posibilidad de que el GPC lleve el proceso a dicho punto de equilibrio.

Su demostración se encuentra en el apéndice A **teorema** A.3.2.

Nota 5.5.2 Con las mismas ideas empleadas en esta demostración se puede justificar que la estabilidad es, además, exponencial. Este hecho se demuestra en la **proposición** A.3.3 del apéndice A.

5.5.2. Método iterativo de elección de N_2 y N_u para diseño estable

En la sección 5.3.2 se presentó una metodología iterativa para el diseño de estable de N_2 y N_u para el caso sin restricciones. Dicha metodología puede aplicarse, también, al caso con restricciones, aunque en este caso, va a ser necesario presentar algún parámetro garantice la estabilidad cuando se presentan restricciones.

El parámetro empleado en esta tesis es el cociente entre los valores óptimos consecutivos del índice de coste del GPC¹²:

$$\gamma^* = \max \left\{ \gamma : \gamma = \frac{J_{N_2, N_u}^*(k+1)}{J_{N_2, N_u}^*(k)} \quad \forall k, \quad \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_i(\mathcal{X}_o, \mathbb{E}'_{\bar{\omega}_0}) \right\} \quad (5.5-3)$$

¹²El mismo parámetro que fue empleado en [Primbs y Nevistić 1997; Senent 1998].

Si $\gamma^* < 1$ entonces el bucle cerrado del proceso más GPC cuando hay restricciones es asintóticamente estable.

A partir de esta definición, el cálculo del valor de γ^* requiere un enorme coste computacional, que en muchos casos va a ser prácticamente imposible de abordar. No obstante, es posible reformular esta definición para facilitar su cómputo. Para el caso de que los estados fuesen medibles, o de que todos los polos del observador se ubiquen en cero¹³, el valor de este parámetro también satisface esta relación:

$$\gamma^* = \max \left\{ \gamma : \gamma = \frac{J_{N_2, N_u}^*(1)}{J_{N_2, N_u}^*(0)} \quad \bar{\mathbf{x}}(0) \in \mathcal{S}_i(\mathbb{X}, \mathbb{E}_{\bar{\omega}_0}), \quad \bar{\mathbf{u}}(j|0) \in \mathbb{U} \quad j = 0, \dots, N_u - 1 \right\} \quad (5.5-4)$$

Si se presentasen restricciones sobre los incrementos de las acciones de control entonces se puede obtener una cota superior para el valor de γ^* :

$$\gamma^* \leq \max \left\{ \gamma : \gamma = \frac{J_{N_2, N_u}^*(1)}{J_{N_2, N_u}^*(0)} \quad (\bar{\mathbf{x}}(0), \bar{\mathbf{u}}(-1)) \in \mathcal{S}_i(\mathbb{X} \cup \mathbb{U}, \mathbb{E}_{\bar{\omega}_0}), \quad \Delta \bar{\mathbf{u}}(j|0) \in \Delta \mathbb{U} \quad j = 0, \dots, N_u - 1 \right\} \quad (5.5-5)$$

Este valor es una cota superior debido a que se incluyen en la optimización todas las combinaciones posibles de estados pertenecientes a \mathbb{X} y de acciones de control anteriores, $\bar{\mathbf{u}}(k-1)$, pertenecientes a \mathbb{U} , lo cual no tiene porqué ocurrir, ya que el controlador GPC no dará lugar, en general, a todas estas combinaciones.

Para el caso general de empleo del observador con polos no ubicados en cero, también se puede obtener una cota superior para el parámetro γ^* :

$$\gamma^* \leq \max \left\{ \gamma : \gamma = \frac{J_{N_2, N_u}^*(1)}{J_{N_2, N_u}^*(0)} \quad (\bar{\mathbf{x}}(0), \hat{\mathbf{x}}(0)) \in \mathcal{S}_i(\mathbb{X}_o, \mathbb{E}'_{\bar{\omega}_0}), \quad \hat{\mathbf{x}}(1) \in \mathcal{K}_1, \hat{\mathbf{x}}(2) \in \mathcal{K}_2 \right\} \quad (5.5-6)$$

los conjuntos robustamente controlables de un paso \mathcal{K}_j corresponden al caso de alcanzar el conjunto $\mathcal{S}_i(\mathbb{X}, \mathbb{E}_{\bar{\omega}_0})$ cuando $j = N$.

Esta expresión es generalizable al caso de presencia de restricciones sobre los incrementos de las acciones de control:

$$\gamma^* \leq \max \left\{ \gamma : \gamma = \frac{J_{N_2, N_u}^*(1)}{J_{N_2, N_u}^*(0)} \quad (\bar{\mathbf{x}}(0), \hat{\mathbf{x}}(0), \bar{\mathbf{u}}(-1)) \in \mathcal{S}_i(\mathbb{X} \cup \mathbb{U}_o, \mathbb{E}'_{\bar{\omega}_0}), \right. \\ \left. (\hat{\mathbf{x}}(1), \bar{\mathbf{u}}(0)) \in \mathcal{K}_1, (\hat{\mathbf{x}}(2), \bar{\mathbf{u}}(1)) \in \mathcal{K}_2 \right\} \quad (5.5-7)$$

Todos estos problemas de maximización son, en general, no convexos debido a que la función a optimizar no lo es, aunque el recinto de optimización si es convexo (los conjuntos invariantes son politopos convexos). Para su resolución se emplea la metodología de optimización heurística basada en algoritmos genéticos de codificación real [Blasco 2000].

¹³En este caso como el observador tiene $r+n$ polos, el valor del parámetro se refiere a los instantes $r+n+2$ y $r+n+1$: $\gamma^* = \max \left\{ \gamma : \gamma = \frac{J_{N_2, N_u}^*(r+n+2)}{J_{N_2, N_u}^*(r+n+1)} \quad \bar{\mathbf{x}}(r+n+1) \in \mathcal{S}_i(\mathbb{X}, \mathbb{E}_{\bar{\omega}_0}) \right\}$.

EJEMPLO 5.5.1 En este ejemplo se muestra el uso del parámetro γ^* para realizar un diseño iterativo estable del proceso con dos entradas y dos salidas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0.35 & 0 & 0 \\ 1 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4629 \\ 0 & 0 & 1 & 1.38 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.6 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -0.69 \\ -0.5 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5-8)$$

sometido a las siguientes restricciones:

- $\mathbf{u}_{max} = (0.5 \ 0.25)^T$, $\mathbf{u}_{min} = (0 \ 0)^T$.
- $\mathbf{y}_{max} = (1 \ 1)^T$, $\mathbf{y}_{min} = (0 \ 0)^T$.

cuando el punto de equilibrio deseado es $\bar{\omega}_0 = (0.5 \ 0.3)^T$.

Para el diseño del controlador GPC se han empleado las siguientes matrices de ponderación:

- $\mathbf{Q}_i = \mathbf{I} \ \forall i$, $\mathbf{R}_i = \mathbf{0} \ \forall i$.

Además, como no hay discrepancias entre modelo y proceso se ubican todos los polos del observador en cero. Consecuentemente, para el cálculo de γ^* se utilizará ecuación (5.5-4), y, por ejemplo, el conjunto estabilizable de cuatro pasos $\mathcal{S}_4(\mathbb{X}, \mathbb{E}_{\bar{\omega}_0})$, lo cual implica que $N_u \geq 5$ y $N_2 \geq 5$.

En las tablas 5.4 y 5.5 se muestran los valores para el parámetro de estabilidad γ^* para diferentes tamaños de los horizontes de predicción y control. En todos los casos analizados el bucle cerrado, como se observa, es asintóticamente estable con respecto al punto de equilibrio $\bar{\omega}_0$.

N_2	5	7	9	11	13
γ^*	0.6355	0.6258	0.5998	0.6058	0.6089

TABLA 5.4: Valores del parámetro γ^* para $N_u = 5$.

N_2	6	8	10	12	14
γ^*	0.5985	0.5978	0.6058	0.5967	0.5988

TABLA 5.5: Valores del parámetro γ^* para $N_u = 6$.

Al igual ocurrió para el caso sin restricciones, se ha utilizado este método para tratar de garantizar estabilidad para valores inferiores de N_u a los indicados por el **teorema 5.5.1**, aunque entonces no hay garantía de que se puedan encontrar valores para N_2 que impliquen estabilidad, aunque en este caso sí.

5.6. Conclusiones del capítulo

1. Para el caso sin restricciones se han presentado 3 métodos de estabilidad cuando las referencias impuestas sobre las salidas sean todas constantes (problema de regulación). Además, uno de ellos es válido, mediante adaptación, para aquellos casos en los que el valor óptimo del índice de coste no sea función de Lyapunov .
2. Se ha justificado que siempre existen tamaños de los horizontes de predicción y control para los cuales el bucle cerrado es asintóticamente estable (exponencialmente estable).
3. Estos resultados han permitido proponer un método iterativo para el diseño estable del controlador eligiendo de forma adecuada los tamaños del horizonte de predicción y del horizonte de control.
4. Para el caso con restricciones se ha empleado la Teoría de Conjuntos Invariantes para garantizar la resolubilidad del problema de optimización del GPC. Esta metodología permite obtener determinado conjunto de posibles estados iniciales para los cuales dicho problema siempre es resoluble. En particular, esta metodología se ha desarrollado en el caso de uso del observador, enunciado en el capítulo 3, para la estimación de los estados.
5. Al igual que para el caso sin restricciones, se ha justificado que siempre existen tamaños de los horizontes de predicción y control para los cuales el bucle cerrado es asintóticamente estable, sean cuáles sean los polos del observador (con la condición de que éste sea estable). Además, también se cumple que el bucle cerrado es exponencialmente estable.
6. Finalmente, se ha extendido la metodología iterativa de diseño de los horizontes de predicción y control al caso con restricciones, basada en el cálculo del parámetro de estabilidad γ^* .

CAPÍTULO 6

Diseño robusto del GPC

6.1. Introducción	174
6.2. Diseño robusto: caso nominal	175
6.3. Diseño robusto: caso general	184
6.3.1. Conceptos básicos del control robusto \mathcal{H}_∞	186
6.3.1.1. Incertidumbre estructurada, μ análisis.	191
6.3.2. Diseño basado en LMIs	193
6.3.2.1. Ideas previas	193
6.3.2.2. Conceptos y definiciones	194
6.3.2.3. Condiciones de estabilidad robusta	196
Metodología de diseño con garantía de estabilidad robusta	203
6.3.2.4. Condiciones de satisfacción de especificaciones basadas en normas	205
Norma ∞	205
Norma 2	207
Norma 1	209
Metodología de diseño con garantía de satisfacción robusta de normas	211
6.3.2.5. Condiciones de asignación de los polos en bucle cerrado	217
6.3.2.6. Inclusión de restricciones	223
Caso de referencias constantes y ausencia de perturbaciones	224
Caso con referencias y perturbaciones acotadas	231

6.3.2.7. Condiciones para el caso de sistemas con parámetros variables con el tiempo	232
6.4. Conclusiones del capítulo	234

6.1. **Introducción**

En este capítulo se van a presentar diversas metodologías de selección óptima de los parámetros del conjunto formado por el controlador GPC y el observador: horizontes, matrices de ponderación y polos del observador, que garanticen un diseño robusto del mismo ante diferentes tipos de incertidumbre, dinámica no modelada y/o perturbaciones, asegurando determinadas especificaciones sobre salidas y acciones de control.

Dichas metodologías de diseño robusto se fundamentan en dos aspectos:

1. Condiciones basadas en desigualdades lineales matriciales (LMIs) relativas a: estabilidad asintótica, norma infinito, norma 2, norma 1, ubicación de polos en bucle cerrado y satisfacción de restricciones, cuando se presentan diferentes tipos de incertidumbre y/o dinámica no modelada.
2. Resolución de los problemas de optimización, en general no convexos, asociados a la selección óptima de los parámetros del conjunto formado por el GPC y el observador, mediante algoritmos genéticos. Estos problemas de optimización son, en general, no convexos debido a que las funciones a optimizar dependen de forma no lineal con respecto de los parámetros del controlador y del observador. Esta afirmación puede constatarse, por ejemplo, observando la dependencia de las matrices del controlador y del observador, presentadas en el capítulo 3, en términos de sus parámetros.

En la parte final del capítulo se estudiarán los procesos con incertidumbre variable con el tiempo. Las metodologías que se presentan son una extensión de los resultados previos relativos a los casos con incertidumbre invariable. Estos resultados son el punto de partida de las metodologías propuestas en el capítulo siguiente, dedicado al control de sistemas no lineales, los cuales se tratarán como sistemas lineales de parámetros variables con el tiempo [Scherer y Weiland 2000; Scherer 2001; El Ghaoui y Niculescu 2000].

A partir de este momento, al conjunto formado por el controlador GPC y el observador se le pasará a denominar simplemente controlador-observador GPC, siendo sus parámetros, por tanto, los horizontes de predicción y control, las matrices de ponderación y los polos del observador.

6.2. Diseño robusto: caso nominal

En esta sección se va a realizar un análisis de robustez del bucle cerrado formado por el proceso real y el controlador-observador GPC cuando se da la circunstancia de que modelo y proceso coinciden. Dicho análisis se basa en el uso de las funciones de sensibilidad asociadas a dicho bucle. A partir de este análisis se propondrá un método de diseño óptimo de los polos del observador, de tal forma que el bucle cerrado posea unas funciones de sensibilidad lo más ajustadas posible a unas prefijadas de antemano. Los conceptos y términos que se emplearán a lo largo de la sección han sido extraídos de [Goodwin *et al.* 2001].

En primer lugar se procede a obtener una representación interna para el controlador-observador GPC. El controlador GPC presenta la representación interna (3.5-7):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(k+1) &= (\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \mathbf{x}_u(k) + (\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \begin{bmatrix} -\sigma \mathbf{M} & \sigma \mathbf{U} & -\sigma \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\omega}(k) \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{u}}(k) &= \mathbf{I} \mathbf{x}_u(k) + \begin{bmatrix} -\sigma \mathbf{M} & \sigma \mathbf{U} & -\sigma \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\omega}(k) \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.2-1)$$

y el observador de rango completo tiene la siguiente (3.6-1):

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = [\tilde{\mathbf{A}} - \Pi \tilde{\mathbf{C}}] \hat{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{u}}(k) + \Pi \tilde{\mathbf{y}}(k) \quad (6.2-2)$$

Combinando ambas representaciones internas se obtiene la del controlador-observador GPC:

$$\text{GPC}^1 = \left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{\mathbf{A}} - \Pi \tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{B}} \sigma \mathbf{M} & \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{B}} \sigma \mathbf{U} & \Pi - \tilde{\mathbf{B}} \sigma \mathbf{P} \\ -(\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \sigma \mathbf{M} & \mathbf{I} - \sigma \mathbf{O} & (\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \sigma \mathbf{U} & -(\mathbf{I} - \sigma \mathbf{O}) \sigma \mathbf{P} \\ \hline -\sigma \mathbf{M} & \mathbf{I} & \sigma \mathbf{U} & -\sigma \mathbf{P} \end{array} \right] \quad (6.2-3)$$

El controlador-observador GPC se puede interpretar como un controlador de dos grados de libertad típico, tal y como muestra la figura 6.1, en la que la matriz de transferencia \mathcal{H} representa la parte que depende de los valores de la referencia, y la matriz de transferencia \mathcal{R} representa la parte que depende de la medida de la salida. Ambas matrices de transferencia, presentan la siguiente representación interna obtenida a partir de la del controlador-observador GPC (6.2-3):

¹Esta notación indica que las matrices de su representación interna son \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} y están ordenadas así:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right].$$

6.2 Diseño robusto: caso nominal

$$\mathcal{R} = \left[\begin{array}{cc|c} \bar{A} - \Pi\bar{C} - \bar{B}\sigma M & \bar{B} & \Pi - \bar{B}\sigma P \\ -(I - \sigma O)\sigma M & I - \sigma O & -(I - \sigma O)\sigma P \\ \hline -\sigma M & I & -\sigma P \end{array} \right] \quad (6.2-4)$$

$$\mathcal{H} = \left[\begin{array}{cc|c} \bar{A} - \Pi\bar{C} - \bar{B}\sigma M & \bar{B} & \bar{B}\sigma U \\ -(I - \sigma O)\sigma M & I - \sigma O & (I - \sigma O)\sigma U \\ \hline -\sigma M & I & \sigma U \end{array} \right] \quad (6.2-5)$$

En dicha figura, además, se consideran aplicadas perturbaciones a la entrada y salida del proceso, d_u y d_y respectivamente, y ruido de medida d_m .

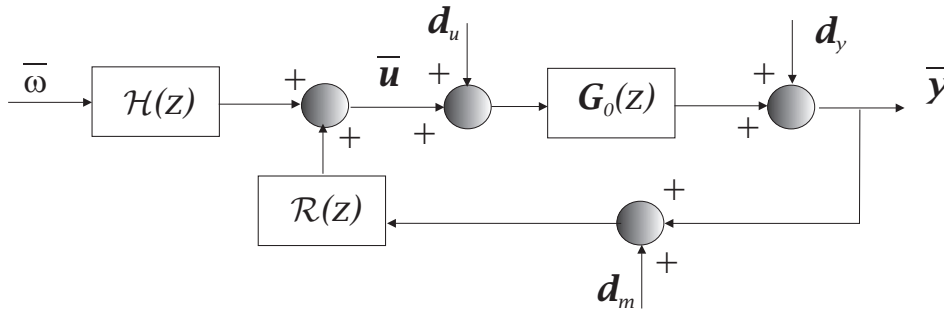


FIGURA 6.1: Diagrama de bloques del bucle cerrado cuando el GPC se descompone en sus partes \mathcal{H} y \mathcal{R} .

Realizando algunas transformaciones sobre el diagrama de bloques 6.1 se obtiene un nuevo diagrama de bloques (figura 6.2), que presenta la estructura de un lazo de control multivariable clásico cuyo controlador es $-\mathcal{R}$, más una matriz de transferencia de prefiltrado $-\mathcal{R}^{-1}\mathcal{H}$.

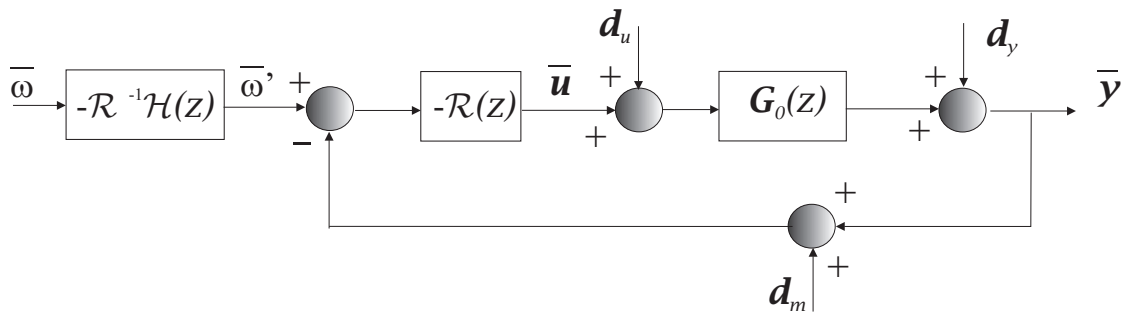


FIGURA 6.2: Diagrama de bloques del bucle cerrado transformado a la estructura de un lazo clásico de control multivariable con matriz de transferencia de prefiltrado.

Siguiendo la nomenclatura presentada en [Goodwin *et al.* 2001], el bucle cerrado de la figura 6.2 puede ser descrito mediante las siguientes matrices de transferencia:

- $S_0(z)$ función de sensibilidad nominal. Relaciona d_y con \bar{y} .
- $T_0(z)$ función de sensibilidad complementaria nominal. Relaciona $\bar{\omega}'$ con \bar{y} .

- $S_{u0}(z)$ función de sensibilidad nominal con respecto a la entrada. Relaciona $\bar{\omega}'$ con $\bar{\mathbf{u}}$.
- $S_{i0}(z)$ función de sensibilidad nominal con respecto a la perturbación de entrada. Relaciona \mathbf{d}_u con $\bar{\mathbf{y}}$.

Dando lugar a las siguientes relaciones [Goodwin *et al.* 2001]:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{y}}(z) &= \mathbf{T}_0(z)\bar{\omega}'(z) - \mathbf{T}_0(z)\mathbf{d}_m(z) + \mathbf{S}_0(z)\mathbf{d}_y(z) + \mathbf{S}_{i0}(z)\mathbf{d}_u(z) \\ \bar{\mathbf{u}}(z) &= \mathbf{S}_{u0}(z)\bar{\omega}'(z) - \mathbf{S}_{u0}(z)\mathbf{d}_m(z) - \mathbf{S}_{u0}(z)\mathbf{d}_y(z) - \mathbf{S}_{u0}\mathbf{G}_0(z)\mathbf{d}_u(z)\end{aligned}\quad (6.2-6)$$

siendo:

$$\mathbf{S}_0(z) = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_0(z)\mathcal{R}(z))^{-1} \quad (6.2-7)$$

$$\mathbf{T}_0(z) = -\mathbf{G}_0(z)\mathcal{R}(z)(\mathbf{I} - \mathbf{G}_0(z)\mathcal{R}(z))^{-1} = -(\mathbf{I} - \mathbf{G}_0(z)\mathcal{R}(z))^{-1}\mathbf{G}_0(z)\mathcal{R}(z) = \mathbf{I} - \mathbf{S}_0(z) \quad (6.2-8)$$

$$\mathbf{S}_{u0}(z) = -\mathcal{R}(z)(\mathbf{I} - \mathbf{G}_0(z)\mathcal{R}(z))^{-1} = -\mathcal{R}(z)\mathbf{S}_0(z) = (\mathbf{G}_0(z))^{-1}\mathbf{T}_0(z) \quad (6.2-9)$$

$$\mathbf{S}_{i0}(z) = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_0(z)\mathcal{R}(z))^{-1}\mathbf{G}_0(z) = \mathbf{G}_0(z)(\mathbf{I} - \mathbf{G}_0(z)\mathcal{R}(z))^{-1} = \mathbf{S}_0(z)\mathbf{G}_0(z) \quad (6.2-10)$$

Si ahora se sustituye el vector $\bar{\omega}'$:

$$\bar{\mathbf{y}}(z) = -\mathbf{T}_0(z)\mathcal{R}^{-1}(z)\mathcal{H}(z)\bar{\omega}(z) - \mathbf{T}_0(z)\mathbf{d}_m(z) + \mathbf{S}_0(z)\mathbf{d}_y(z) + \mathbf{S}_{i0}(z)\mathbf{d}_u(z) \quad (6.2-11)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(z) = -\mathbf{S}_{u0}(z)\mathcal{R}^{-1}(z)\mathcal{H}(z)\bar{\omega}(z) - \mathbf{S}_{u0}(z)\mathbf{d}_m(z) - \mathbf{S}_{u0}(z)\mathbf{d}_y(z) - \mathbf{S}_{u0}\mathbf{G}_0(z)\mathbf{d}_u(z) \quad (6.2-12)$$

Estas funciones de sensibilidad permiten analizar diferentes aspectos del funcionamiento del controlador [Goodwin *et al.* 2001]:

- Seguimiento de referencias.
- Comportamiento ante perturbaciones.
- Inmunidad al ruido de medida.
- Robustez ante incertidumbre y/o dinámica no modelada.
- Cuantificación del esfuerzo de control.

de ahí su utilidad en el análisis de la robustez.

Además, en base a estas funciones de sensibilidad, se puede establecer el siguiente resultado sobre la estabilidad interna del bucle cerrado de la figura 6.2:

Proposición 6.2.1 *El bucle cerrado de la figura 6.2 es internamente estable si y sólo si $\mathcal{R}^{-1}\mathcal{H}$ es estable y las cuatro funciones de sensibilidad anteriores son estables.*

Demostración: Para justificar esta proposición basta con emplear el resultado de estabilidad interna presentado en [Goodwin *et al.* 2001] y el hecho de que $\mathcal{R}^{-1}\mathcal{H}$ sea estable. ■

A partir de la relación (6.2-11) se puede obtener la matriz de transferencia correspondiente al bucle cerrado formado por el proceso real y el controlador-observador GPC:

$$\bar{\mathbf{y}}(z) = -\mathbf{T}_0 \mathcal{R}^{-1}(z) \mathcal{H}(z) \bar{\omega}(z) \quad (6.2-13)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(z) = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_0(z) \mathcal{R}(z))^{-1} \mathbf{G}_0(z) \mathcal{H}(z) \bar{\omega}(z) \quad (6.2-14)$$

Hay que recordar que como proceso real y modelo coinciden esta matriz de transferencia sólo dependerá de los horizontes de control y predicción, y de las matrices de ponderación, y no de los polos del observador, según el principio de separación ya comentado en la Nota 4.5.2. Téngase en cuenta que los polos del observador son los únicos parámetros del controlador-observador GPC que están asociados al observador, por tanto, sólo el resto influyen en la dinámica del bucle cerrado.

Un resultado análogo se obtiene para la matriz de transferencia que relaciona las acciones de control con las referencias (6.2-12):

$$\bar{\mathbf{u}}(z) = -\mathbf{S}_{u0}(z) \mathcal{R}^{-1}(z) \mathcal{H}(z) \bar{\omega}(z)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(z) = \mathcal{R}(z) (\mathbf{I} - \mathbf{G}_0(z) \mathcal{R}(z))^{-1} \mathcal{R}^{-1}(z) \mathcal{H}(z) \bar{\omega}(z) \quad (6.2-15)$$

Estos resultados muestran que es posible elegir los horizontes de control y predicción, y las matrices de ponderación para que las matrices de transferencia del bucle cerrado y de las acciones de control con las referencias cumplan determinadas características (tiempo de establecimiento, ancho de banda, etc.), independientemente de cuál sea la elección de los polos del observador.

El siguiente paso va a consistir en justificar, que a diferencia de las funciones de transferencia del bucle cerrado y de las acciones de control, la dinámica de las funciones de sensibilidad viene caracterizada, en parte, por los polos del observador. Como están interrelacionadas entre sí (6.2-7), (6.2-8), (6.2-9) y (6.2-10), bastará con justificar que una cualquiera de ellas lo cumple. Por ejemplo, se analizará la dinámica de la función de sensibilidad complementaria nominal \mathbf{T}_0 (6.2-8) a partir de la matriz de transferencia en bucle cerrado (6.2-13):

$$\mathbf{G}_{BC}(z) = -\mathbf{T}_0(z) \mathcal{R}^{-1}(z) \mathcal{H}(z) \quad (6.2-16)$$

$$\mathbf{T}_0(z) = -\mathbf{G}_{BC}(z) \mathcal{H}^{-1}(z) \mathcal{R}(z) \quad (6.2-17)$$

Salvo que se produzcan cancelaciones, los polos de \mathbf{T}_0 son los polos del bucle cerrado y los polos de $\mathcal{H}^{-1}(z) \mathcal{R}(z)$, y lo mismo ocurre con sus ceros. Por ello, a continuación se obtendrán los polos y ceros de $\mathcal{H}^{-1}(z) \mathcal{R}(z)$, a partir de su representación interna.

Primero se obtiene \mathcal{H}^{-1} utilizando la representación (6.2-5) y la expresión [Zhou y Doyle 1998]:

$$\mathcal{H}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_{\mathcal{H}} - B_{\mathcal{H}} D_{\mathcal{H}}^{-1} C_{\mathcal{H}} & -B_{\mathcal{H}} D_{\mathcal{H}}^{-1} \\ \hline D_{\mathcal{H}}^{-1} C_{\mathcal{H}} & D_{\mathcal{H}}^{-1} \end{array} \right] \quad (6.2-18)$$

Tras simplificar las operaciones:

$$\mathcal{H}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} \bar{A} - \Pi \bar{C} & 0 & -\bar{B} \\ 0 & 0 & -(I - \sigma O) \\ \hline -(\sigma U)^{-1} \sigma M & (\sigma U)^{-1} & (\sigma U)^{-1} \end{array} \right] \quad (6.2-19)$$

Para calcular el producto $\mathcal{H}^{-1}(z)\mathcal{R}(z)$ se utiliza la siguiente relación [Zhou y Doyle 1998]:

$$G_1 G_2 = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 C_2 & D_1 D_2 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1 C_2 & D_1 D_2 \end{array} \right] \quad (6.2-20)$$

Después de realizar algunas simplificaciones:

$$\mathcal{H}^{-1}(z)\mathcal{R}(z) = \left[\begin{array}{cccc|c} \bar{A} - \Pi \bar{C} & 0 & \bar{B} \sigma M & -\bar{B} & \bar{B} \sigma P \\ 0 & 0 & (I - \sigma O) \sigma M & -(I - \sigma O) & (I - \sigma O) \sigma P \\ 0 & 0 & \bar{A} - \Pi \bar{C} - \bar{B} \sigma M & \bar{B} & \Pi - \bar{B} \sigma P \\ 0 & 0 & -(I - \sigma O) \sigma M & (I - \sigma O) & -(I - \sigma O) \sigma P \\ \hline -(\sigma U)^{-1} \sigma M & (\sigma U)^{-1} & -(\sigma U)^{-1} \sigma M & (\sigma U)^{-1} & -(\sigma U)^{-1} \sigma P \end{array} \right] \quad (6.2-21)$$

Esta representación interna no es mínima, pero para que se aprecie mejor dicha circunstancia se introduce una transformación lineal del estado con matriz de transformación:

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (6.2-22)$$

que da lugar a la siguiente representación:

$$\mathcal{H}^{-1}(z)\mathcal{R}(z) = \left[\begin{array}{cccc|c} \bar{A} - \Pi \bar{C} & 0 & 0 & 0 & \Pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A} - \Pi \bar{C} - \bar{B} \sigma M & \bar{B} & \Pi - \bar{B} \sigma P \\ 0 & 0 & -(I - \sigma O) \sigma M & (I - \sigma O) & -(I - \sigma O) \sigma P \\ \hline -(\sigma U)^{-1} \sigma M & (\sigma U)^{-1} & 0 & 0 & -(\sigma U)^{-1} \sigma P \end{array} \right] \quad (6.2-23)$$

Como se puede apreciar, los estados correspondientes a los dos últimos bloques de filas en los que está dividida la matriz de estado no influyen sobre el valor de las salidas, por tanto, no son observables y serán eliminados para obtener la representación mínima. Además, los estados correspondientes al segundo bloque de filas de la matriz de estado son siempre nulos, por tanto, también son eliminados. Finalmente, la representación interna mínima es:

$$\mathcal{H}^{-1}(z)\mathcal{R}(z) = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} - \Pi\bar{C} & \Pi \\ \hline -(\sigma U)^{-1}\sigma M & -(\sigma U)^{-1}\sigma P \end{array} \right] \quad (6.2-24)$$

La matriz de estado de esta representación coincide con la matriz de estado del observador, con lo cual, el término $\mathcal{H}^{-1}(z)\mathcal{R}(z)$ tiene los mismos polos que el observador. En cuanto a sus ceros, es necesario determinar aquellos valores de z para los cuales la matriz siguiente pierde rango [Zhou y Doyle 1998]:

$$\left[\begin{array}{cc} \bar{A} - \Pi\bar{C} - zI & \Pi \\ -(\sigma U)^{-1}\sigma M & -(\sigma U)^{-1}\sigma P \end{array} \right] \quad (6.2-25)$$

lo cual ocurrirá cuando su determinante sea cero:

$$\det \left[\begin{array}{cc} \bar{A} - \Pi\bar{C} - zI & \Pi \\ -(\sigma U)^{-1}\sigma M & -(\sigma U)^{-1}\sigma P \end{array} \right] = 0 \quad (6.2-26)$$

simplificando el determinante²:

$$\begin{aligned} \det \left[\bar{A} - \Pi\bar{C} - zI - \Pi \left(-(\sigma U)^{-1}\sigma P \right)^{-1} \left(-(\sigma U)^{-1}\sigma M \right) \right] \det \left[-(\sigma U)^{-1}\sigma P \right] &= 0 \\ \det \left[\bar{A} - \Pi\bar{C} - \Pi(\sigma P)^{-1}\sigma M - zI \right] &= 0 \end{aligned} \quad (6.2-27)$$

por tanto, los ceros son los valores propios de la la matriz $\bar{A} - \Pi\bar{C} - \Pi(\sigma P)^{-1}\sigma M$. En general, los ceros dependen de \bar{A} , Π , \bar{C} , σ , M y P , lo que implica que sean función tanto de los polos del observador como de los horizontes de predicción y control, y de las matrices de ponderación.

A partir de la ecuación (6.2-19) se deduce que \mathcal{H} tiene por ceros a los polos del observador y a m ceros en 0, y de la ecuación (6.2-5) se deduce que tiene por polos los del controlador-observador GPC. Siguiendo el mismo razonamiento, se deduce que \mathcal{R} tiene por polos también los del controlador-observador GPC (6.2-4), y si se calculase su inversa se observaría que posee m ceros en 0 y otros ceros que dependen de todos los parámetros del controlador-observador GPC. El producto $\mathcal{H}^{-1}(z)\mathcal{R}(z)$ supone la cancelación de los polos del controlador-observador GPC (tal y como se ha analizado) y de los ceros m ceros en 0 de \mathcal{H} con los m ceros en 0 de \mathcal{R} . Además, el resto de ceros de \mathcal{H} se

² $\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \det (A_{22})$

convierten en los polos del producto (polos del observador) y el resto de ceros de \mathcal{R} se convierten en los ceros de este producto.

Consecuentemente, los polos de T_0 , salvo cancelaciones, son por un lado los del bucle cerrado y por otro los del observador. Además, sus ceros son los del bucle cerrado y otros que dependen tanto de los polos del observador como del resto de parámetros del controlador-observador GPC (salvo cancelaciones). Este resultado indica que seleccionando adecuadamente los polos del observador, una vez fijados los otros parámetros del controlador-observador, sería posible proporcionar determinadas características, con ciertas limitaciones, a la función de sensibilidad complementaria: rechazo de perturbaciones, inmunidad al ruido de medida, etc., que contribuyan a aumentar la robustez del controlador-observador. Este hecho conecta con los resultados mostrados en la sección 4.4, los cuales atribuyen robustez a los polos del observador. Sin embargo, en este capítulo el análisis se ha orientado hacia la robustez del bucle cerrado en lugar de la robustez asociada a la estimación del observador. No obstante, en ambos análisis se llega a la misma conclusión: los polos del observador proporcionan robustez.

Estos resultados no son extraños, pues al ser el controlador GPC interpretable como un controlador de dos grados de libertad, es posible por un lado ajustar el bucle con respecto al comportamiento deseado ante cambios en la referencia y, por otro, ajustar el comportamiento con respecto a las perturbaciones y/o ruidos de medida [Goodwin *et al.* 2001].

A partir de estos resultados se puede proponer la siguiente metodología de diseño robusto, basada en desintonizar el observador asignado a sus polos determinados valores que aumenten la robustez:

1. Se diseñan los horizontes y las matrices de ponderación del controlador para obtener una matriz de transferencia en bucle cerrado que cumpla con determinados requisitos: tiempo de establecimiento, ancho de banda, etc, y una matriz de transferencia entre acciones de control y referencias que mantenga las acciones de control dentro de unos límites razonables. La idea es garantizar un adecuado seguimiento de la referencia dentro de su espectro de frecuencias con un esfuerzo de control aceptable. Este primer paso no depende de la elección de los polos del observador, como ya se ha comentado.
2. Seleccionar los polos del observador para conseguir determinada robustez ante perturbaciones y/o ruidos de medida (atenuación de su efecto en la salida, limitar el esfuerzo de control, etc.). Este diseño puede hacerse imponiendo determinada función de sensibilidad objetivo T_0^{obj} , S_0^{obj} , S_{u0}^{obj} , S_{i0}^{obj} , y obtener aquél conjunto de valores para los polos del observador³ que proporcione una mínima norma infini-

³En total hay $r + n$ polos del observador, siendo r el número de estados del modelo del proceso y n su número de salidas. .

to, norma 2 o norma 1 para la discrepancia entre dicha sensibilidad objetivo y la obtenida con el controlador-observador GPC. Por ejemplo, si se impone una determinada función de sensibilidad complementaria objetivo:

$$\text{Polos Obs}^* = \underset{\text{Polos Obs} \in [0,1)^{r+n}}{\operatorname{argmin}} \left\| \mathbf{T}_0^{obj} - \mathbf{T}_0 \right\|_{2, \infty \text{ ó } 1} \quad (6.2-28)$$

Este problema de optimización es, en general, no convexo debido a que la función a minimizar depende de forma no lineal con respecto de los polos del observador⁴. Por ello, para su resolución se pueden emplear algoritmos genéticos, tal y como se ha propuesto en la introducción de este capítulo.

En el método propuesto se exige que los polos sean reales positivos y de módulo inferior a la unidad, aunque se podría realizar un búsqueda sobre cualquier número complejo de módulo inferior a la unidad (con su correspondiente conjugado).

Esta idea de diseño está basada [Goodwin *et al.* 2001] en la síntesis óptima de controladores MIMO empleando la parametrización de *Youla*, tratando de minimizar la norma 2 de la desviación entre una función de sensibilidad objetivo y la obtenida por el controlador estabilizante.

3. Una vez resulto el problema de optimización anterior habrá que verificar el ajuste, obtenido con los polos óptimos para el observador, de la función de sensibilidad con respecto al objetivo propuesto. Se podrá considerar que el diseño es adecuado cuando la función de sensibilidad obtenida cumpla, aproximadamente, las especificaciones de robustez impuestas por la función objetivo: ancho de banda, frecuencia de corte, ganancia a altas frecuencias, ganancia a bajas frecuencias, etc.
4. Si el diseño no fuese adecuado entonces se deduce que con los horizontes y matrices de ponderación seleccionados para el controlador no existe ningún conjunto de valores para los polos del observador que garantice las demandas de robustez impuestas en la función de sensibilidad objetivo. En este caso se puede proceder de dos formas: reduciendo alguna de las exigencias de robustez impuestas, o reajustando los parámetros del controlador. El segundo método supone modificar, además, alguna de las características de seguimiento de referencias del bucle cerrado.

Una propuesta alternativa consistiría en tratar de minimizar la discrepancia entre la función de sensibilidad proporcionada por el controlador-observador GPC y la objetivo, pero ahora tomando como incógnitas, además de a los polos del observador, a los horizontes y a las matrices de ponderación (todos los parámetros del controlador-observador

⁴Las matrices del controlador-observador dependen de forma no lineal con respecto de los polos del observador

GPC):

$$\text{Parámetros controlador-observador GPC}^* = \underset{\text{Polos Obs} \in [0,1)^{r+n}}{\operatorname{argmin}} \left\| \mathbf{T}_0^{obj} - \mathbf{T}_0 \right\|_{2, \infty \text{ ó } 1} \quad (6.2-29)$$

Si este problema de optimización no proporcionase un buen ajuste entonces no sería posible obtener un controlador-observador GPC que lograra obtener, aproximadamente, la función de sensibilidad objetivo.

Nota 6.2.1 Es conocido que hay exigencias de robustez que pueden ser incompatibles entre sí [Sanchez Peña y Sznaier 1998], siendo necesario, por tanto, relajarlas para que sea posible obtener una solución de compromiso entre ellas. Por ejemplo, atenuar el efecto de perturbaciones aditivas a la entrada sobre las salidas, a la vez que se desea limitar el esfuerzo de las acciones de control necesarias para atenuar dichas perturbaciones.

Para una adecuada selección de las funciones objetivo hay que partir de las ecuaciones (6.2-11)(6.2-12) y emplear la metodología de análisis utilizada en [Skogestad y Postlethwaite 1996; Goodwin *et al.* 2001]. Esta metodología requiere utilizar la respuesta en frecuencia de matrices de transferencia discretas, la cual está basada en los valores singulares mínimo, $\underline{\sigma}[\cdot]$, y máximo, $\overline{\sigma}[\cdot]$, correspondientes a su matriz de transferencia de respuesta en frecuencia:

$$\mathbf{G}(j\omega) \triangleq \mathbf{G}(z)_{z=e^{j\omega T_s}} \quad (6.2-30)$$

que varían con la frecuencia. También se suele emplear el denominado número de condición que se define como el cociente entre el valor singular máximo y el mínimo:

$$\kappa(\mathbf{G}(j\omega)) \triangleq \frac{\overline{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))}{\underline{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))} \quad (6.2-31)$$

Una definición formal de todos estos conceptos se encuentra en el apéndice E.

En la tabla 6.1 se muestran los criterios a emplear para garantizar robustez según qué circunstancia se dé. Esta tabla muestra criterios conservadores que no tienen en cuenta dos aspectos muy importantes [Sanchez Peña y Sznaier 1998]:

- El carácter direccional de la respuesta en frecuencia de los procesos MIMO. Según la frecuencia el mayor valor singular está asociado a diferentes combinaciones de valores de las entradas. Esta direccionalidad puede suponer, en ciertos casos, que la robustez demandada se consiga a pesar de que el criterio conservador anterior no se verifique.
- Separan las funciones de sensibilidad del bucle cerrado de la dinámica del proceso. Si se analiza la robustez sin realizar esta separación se obtienen criterios menos conservadores, ya que el acoplamiento entre funciones de sensibilidad y proceso puede dar lugar a que se produzcan cancelaciones de polos y/o ceros, y/o fenómenos de direccionalidad antes comentados.

6.3 Diseño robusto: caso general

Objetivo	Criterio	Rango w
Rechazo pertb. aditivas a la entrada	$\bar{\sigma}(S_0(w)) \ll \frac{1}{\bar{\sigma}(G_0(w))}$	Banda frecs. pertb.
Rechazo pertb. aditivas a la salida	$\bar{\sigma}(S_0(w)) \ll 1$	Banda frecs. pertb.
Inmunidad ruido medida	$\bar{\sigma}(T_0(w)) \ll 1$	Banda frecs. ruido
Limitar esfuerzo control ante pertb. aditivas a la entrada	$\bar{\sigma}(T_0(w)) \approx \frac{1}{\kappa(G_0(w))}$	Banda frecs. pertb.
Limitar esfuerzo control ante pertb. aditivas a la salida y/o ruido medida	$\bar{\sigma}(T_0(w)) \approx \underline{\sigma}(G_0(w))$	Banda frecs. pertb. y/o ruido de medida

TABLA 6.1: Criterios de de robustez para diferentes casos extraídos de [Goodwin et al. 2001]

Por ello, tras cualquier diseño es recomendable siempre realizar el análisis de robustez sin separar funciones de sensibilidad y proceso real, con lo cual el fenómeno de la direccionalidad también se tiene en cuenta.

6.3. Diseño robusto: caso general

En el control de procesos reales, además de la presencia de perturbaciones y/o de ruidos de medida, siempre ocurre que el modelo del proceso y el proceso real no coinciden, ya que el primero sólo es una representación simplificada del comportamiento de éste, provocando que entre ellos siempre existan discrepancias. Estas discrepancias pueden ser debidas a la incertidumbre sobre el valor real de determinados parámetros del modelo: masas, coeficientes, etc.; o bien a comportamientos dinámicos del proceso no contemplados en el modelo (no linealidades, reducción del orden del modelo, etc).

Este importante aspecto debe tenerse en cuenta si se desea diseñar un controlador robusto para el proceso real utilizando su modelo aproximado. Se han desarrollado diversas teorías para el diseño de controladores robustos. En concreto, en esta tesis se presentan, en primer lugar, las ideas básicas de la teoría de *Control robusto en \mathcal{H}_∞* [Zhou y Doyle 1998; Sanchez Peña y Sznaier 1998], las cuales servirán de apoyo a la *Teoría de desigualdades lineales matriciales* [Boyd et al. 1994], conocida con las siglas inglesas *LMI*⁵, para el diseño del controlador-observador GPC robusto.

El punto de partida para la aplicación de las ideas antes referenciadas será la representación interna del bucle cerrado formado por el proceso real y el controlador-

⁵Linear matrix inequalities

observador GPC (6.2-3). Se supondrá que el proceso puede ser representado mediante un modelo lineal incierto estrictamente propio, el cual es función de la incertidumbre y/o dinámica no modelada Δ presente al modelizar el proceso, y sobre el cual actúan una serie de señales de perturbación y/o ruidos de medida:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A(\Delta)\mathbf{x}(k) + B(\Delta)(\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{d}_u(k)) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) &= C(\Delta)\mathbf{x}(k) + \mathbf{d}_y(k) \quad ; \quad \bar{\mathbf{y}}_m(k) = \bar{\mathbf{y}}(k) + \mathbf{d}_m(k) \end{aligned} \quad (6.3-1)$$

$\bar{\mathbf{y}}_m$ es la medida de la salida que recibe el controlador-observador GPC, afectada por el ruido de medida \mathbf{d}_m .

La representación interna del bucle cerrado formado por el controlador-observador GPC y el modelo incierto anterior es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}^c(k+1) \end{pmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} A(\Delta) - B(\Delta)\sigma PC(\Delta) & -B(\Delta)\sigma M & B(\Delta) \\ (\Pi - \bar{B}\sigma P)C(\Delta) & \bar{A} - \Pi\bar{C} - \bar{B}\sigma M & \bar{B} \\ -(I - \sigma O)\sigma PC(\Delta) & -(I - \sigma O)\sigma M & I - \sigma O \end{bmatrix}}^{A_{BC}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}^c(k) \end{pmatrix} + \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} B(\Delta)\sigma P \\ \bar{B}\sigma U \\ (I - \sigma O)\sigma U \end{bmatrix}}^{B_{BC,r}} \bar{\omega}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} B(\Delta) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}^{B_{BC,du}} \mathbf{d}_u(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} -B(\Delta)\sigma P \\ \Pi - \bar{B}\sigma P \\ -(I - \sigma O)\sigma P \end{bmatrix}}^{B_{BC,dym}} (\mathbf{d}_y(k) + \mathbf{d}_m(k)) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} C(\Delta) & \mathbf{0} \end{bmatrix}}^{C_{BC,y}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}^c(k) \end{pmatrix} + \underbrace{I}_{D_{BC,yd}} \mathbf{d}_y(k) \\ \bar{\mathbf{u}}(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\sigma PC(\Delta) & -\sigma M & I \end{bmatrix}}^{C_{BC,u}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}^c(k) \end{pmatrix} + \underbrace{\sigma U}_{D_{BC,ur}} \bar{\omega}(k) + \underbrace{-\sigma P}_{D_{BC,ud}} (\mathbf{d}_y(k) + \mathbf{d}_m(k)) \end{aligned} \quad (6.3-2)$$

\mathbf{x}^c representa los estados del controlador-observador GPC. Para hacer referencia a esta presentación interna se hará uso de las matrices:

- A_{BC} matriz de estado.
- $B_{BC,r}$ matriz de entrada asociada a la referencia.
- $B_{BC,du}$ matriz de entrada asociada a la perturbación \mathbf{d}_u .
- $B_{BC,dym}$ matriz de entrada asociada a la perturbación \mathbf{d}_y y al ruido de medida \mathbf{d}_m .
- $C_{BC,y}$ matriz de salida asociada a $\bar{\mathbf{y}}$.
- $C_{BC,u}$ matriz de salida asociada a la acción de control.
- $D_{BC,yd}$ matriz de acoplamiento salida-perturbación \mathbf{d}_y .

- $D_{BC,ur}$ matriz de acoplamiento acción de control-referencia.
- $D_{BC,ud}$ matriz de acoplamiento acción de control-perturbación d_y y al ruido de medida d_m .

En general, todas estas matrices son función tanto de la incertidumbre Δ como de los parámetros del controlador-observador GPC: horizontes, matrices de ponderación y polos del observador.

6.3.1. Conceptos básicos del control robusto \mathcal{H}_∞

La metodología de diseño robusto basada en \mathcal{H}_∞ referenciada en esta tesis sigue la nomenclatura y los conceptos presentados en [Zhou y Doyle 1998; Sanchez Peña y Sznaier 1998]. El punto de partida de esta teoría es la representación del proceso real como perteneciente a un conjunto de modelos de la forma:

$$\mathcal{G}_{\text{mult}} \triangleq \{(I + \Delta W_\Delta(z)) G_0(z) : \bar{\sigma}[\Delta] < 1, \Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}\} \quad (6.3-3)$$

donde a $G_0(z)$ se le conoce como modelo nominal o promedio, a $W_\Delta(z)$ como la matriz de transferencia que contiene las posibles incertidumbres y/o dinámicas no modeladas en función de la frecuencia y Δ es una matriz compleja que representa la acotación de la incertidumbre. Esta estructura de representación de la discrepancia entre modelo y proceso se denomina incertidumbre multiplicativa. Esta forma de representar la incertidumbre y/o dinámica no modelada es un caso particular del modelo incierto propuesto antes para el proceso (6.3-1) [Boyd *et al.* 1994]. También es posible utilizar una representación con incertidumbre aditiva:

$$\mathcal{G}_{\text{ad}} \triangleq \{G_0(z) + \Delta W_\Delta(z) : \bar{\sigma}[\Delta] < 1, \Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}\} \quad (6.3-4)$$

Ambas incertidumbres admiten las interpretaciones en diagrama de bloques que se muestran en las figuras 6.3 y 6.4, respectivamente.

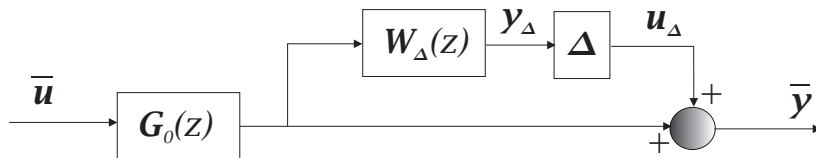


FIGURA 6.3: Diagrama de bloques correspondiente a la incertidumbre multiplicativa.

A este tipo de incertidumbre se le denomina no estructurada, pues la condición de pertenencia al conjunto de modelos está basada en acotar en norma la desviación con respecto al modelo nominal, en lugar de emplear una determinada estructura para el mismo.

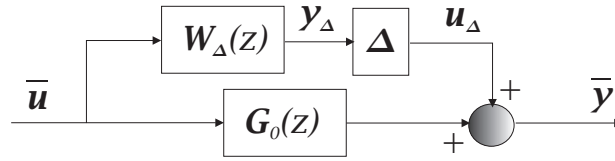


FIGURA 6.4: Diagrama de bloques correspondiente a la incertidumbre aditiva.

Nota 6.3.1 Además de los tipos presentados de incertidumbres se pueden considerar otros [Zhou y Doyle 1998; Sanchez Peña y Sznaier 1998] que pueden ser útiles en determinadas circunstancias. Por ejemplo, los siguientes:

- *Incertidumbre multiplicativa a la entrada:*

$$\mathcal{G}_{mult_ent} \triangleq \{G_0(z) (I + \Delta W_\Delta(z)) : \bar{\sigma}[\Delta] < 1, \Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}\} \quad (6.3-5)$$

- *Incertidumbre multiplicativa inversa:*

$$\mathcal{G}_{mult_i} \triangleq \{(I + \Delta W_\Delta(z))^{-1} G_0(z) : \bar{\sigma}[\Delta] < 1, \Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}\} \quad (6.3-6)$$

Una vez descrita la posible incertidumbre del proceso real mediante incertidumbre no estructurada, se emplean las denominadas *transformaciones lineales fraccionales* [Sanchez Peña y Sznaier 1998] para representar de forma compacta al controlador y al conjunto de modelos al cual pertenece el proceso real. De forma general, el diagrama de bloques de la figura 6.5 representa la combinación del conjunto de modelos y del controlador mediante dichas transformaciones lineales fraccionales. $P(z)$ contiene al modelo nominal del proceso, la incertidumbre $W_\Delta(z)$ y la estructura asociada a la misma. $K(z)$ es el controlador que se aplica a dicho conjunto de modelos, que en este caso es el controlador-observador GPC (6.2-3). La señal vectorial e contiene todas las medidas que se tienen en cuenta para determinar el adecuado comportamiento del bucle cerrado: error de seguimiento, acción de control, etc. La señal vectorial y contiene aquellas medidas que son utilizadas por el controlador K . La señal vectorial p contiene todas aquellas entradas aplicadas sobre el proceso: referencia, perturbaciones, etc. Las señales u_Δ e y_Δ están asociadas a la matriz compleja Δ , para los casos de incertidumbre multiplicativa y aditiva se han representado en las figuras 6.3 y 6.4.

A partir de este diagrama de bloques se pueden obtener las siguientes transformaciones lineales fraccionales:

1. Realimentación inferior de $P(z)$ con $K(z)$. Se la conoce como transformación fraccional inferior \mathcal{F}_i y se calcula suponiendo que la matriz Δ no está conectada. Se calcula con la expresión [Sanchez Peña y Sznaier 1998]:

$$\mathcal{F}_i[P(z), K(z)] = P_{11}^i(z) + P_{12}^i(z)K(z) [I - P_{22}^i(z)K(z)]^{-1} P_{21}^i(z) = M(z) \quad (6.3-7)$$

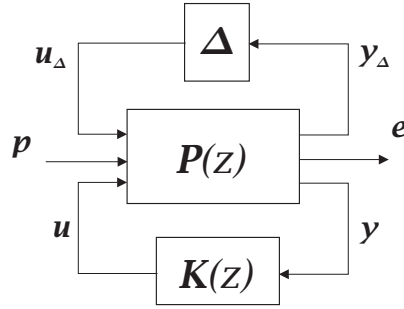


FIGURA 6.5: Diagrama de bloques correspondiente al esquema basado en transformaciones lineales fraccionales.

donde $P(z)$ se ha descompuesto en la forma:

$$\begin{pmatrix} y_{\Delta} \\ e \\ y \end{pmatrix} = P(z) \begin{pmatrix} u_{\Delta} \\ p \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{\Delta} \\ e \\ y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^i(z) & P_{12}^i(z) \\ P_{21}^i(z) & P_{22}^i(z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{\Delta} \\ p \\ u \end{pmatrix} \quad (6.3-8)$$

y:

$$\begin{pmatrix} y_{\Delta} \\ e \end{pmatrix} = M(z) \begin{pmatrix} u_{\Delta} \\ p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(z) & M_{12}(z) \\ M_{21}(z) & M_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{\Delta} \\ p \end{pmatrix} \quad (6.3-9)$$

En la figura 6.6 se muestra el resultado de esta transformación lineal fraccional inferior.

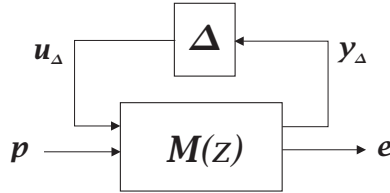


FIGURA 6.6: Simplificación de la transformación lineal fraccional inferior.

Esta transformación fraccional es utilizada en control robusto \mathcal{H}_{∞} para el diseño de controladores K , ante una determinada incertidumbre.

2. Realimentación superior de $P(z)$ con Δ . Se la conoce como transformación fraccional superior \mathcal{F}_s y se calcula suponiendo que el controlador no está conectado. Su expresión viene dada por [Sanchez Peña y Sznaier 1998]:

$$\mathcal{F}_s[P(z), \Delta] = P_{22}^s(z) + P_{21}^s(z)K(z) [I - P_{11}^s(z)\Delta]^{-1} P_{12}^s(z) = N(z) \quad (6.3-10)$$

donde $P(z)$ se ha descompuesto en la forma:

$$\begin{pmatrix} y_{\Delta} \\ e \\ y \end{pmatrix} = P(z) \begin{pmatrix} u_{\Delta} \\ p \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{\Delta} \\ e \\ y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^s(z) & P_{12}^s(z) \\ P_{21}^s(z) & P_{22}^s(z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{\Delta} \\ p \\ u \end{pmatrix} \quad (6.3-11)$$

y:

$$\begin{pmatrix} e \\ y \end{pmatrix} = N(z) \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}(z) & N_{12}(z) \\ N_{21}(z) & N_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} \quad (6.3-12)$$

En la figura 6.7 se muestra el resultado de esta transformación lineal fraccional superior. En concreto, el sistema N es justamente el modelo incierto presentado antes para el proceso (6.3-1).

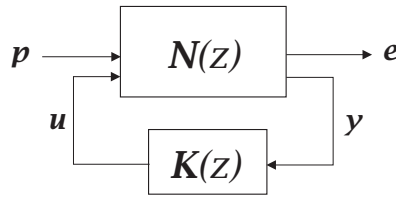


FIGURA 6.7: Simplificación de la transformación lineal fraccional superior.

Esta transformación fraccional es utilizada en control robusto \mathcal{H}_∞ para realizar el análisis de robustez dado un determinado controlador $K(z)$.

La transformación completa, es decir, realimentaciones superior e inferior, viene dada por:

$$\mathcal{F}_i[\mathcal{F}_s[P(z), \Delta], K(z)] = \mathcal{F}_s[\mathcal{F}_i[P(z), K(z)], \Delta] \quad (6.3-13)$$

Ahora ya se está en condiciones de dar a conocer, con los conceptos presentados, los resultados sobre análisis robusto desarrollados en [Sanchez Peña y Sznaier 1998]. En primer lugar, la siguiente proposición trata el tema de la estabilidad robusta:

TEOREMA 6.3.1 (ESTABILIDAD ROBUSTA) *Si el proceso nominal $G_0(z)$ es internamente estabilizado por un controlador $K(z)$, entonces todos los miembros de la familia de modelos \mathcal{G} serán internamente estabilizados por este controlador si y sólo si:*

$$\|M_{11}(z)\|_\infty \leq 1 \quad (6.3-14)$$

Su demostración se encuentra en [Sanchez Peña y Sznaier 1998].

Para el caso del controlador-observador GPC y empleando incertidumbre multiplicativa este resultado puede formularse de la siguiente forma:

COROLARIO 6.3.1 (INCERTIDUMBRE MULTIPLICATIVA) *Si el proceso nominal $G_0(z)$ es internamente estabilizado por el controlador-observador GPC, entonces todos los miembros de la familia de modelos \mathcal{G} con incertidumbre multiplicativa serán internamente estabilizados por él si y sólo si:*

$$\| -W_\Delta(z)T_0(z) \|_\infty \leq 1 \quad (6.3-15)$$

Su demostración se encuentra en el apéndice E COROLARIO E.3.1.

COROLARIO 6.3.2 (INCERTIDUMBRE ADITIVA) *Si el proceso nominal $G_0(z)$ es internamente estabilizado por el controlador-observador GPC, entonces todos los miembros de la familia de modelos \mathcal{G} con incertidumbre aditiva serán internamente estabilizados por él si y sólo si:*

$$\|W_{\Delta}(z)\mathcal{R}(z)S_0(z)\|_{\infty} \leq 1 \quad (6.3-16)$$

Su demostración es análoga a la del corolario anterior.

Estos resultados indican, de nuevo, que los polos del observador juegan un papel crucial en la robustez del bucle cerrado, ahora en el caso particular de existencia de dinámica no modelada y/o incertidumbre. Esta conclusión se deriva del hecho de que las condiciones de estabilidad robusta dependen de las funciones de sensibilidad.

En control \mathcal{H}_{∞} el diseño de estabilidad robusta suele combinarse con el diseño de inmunidad ante ruidos de medida y/o rechazo de perturbaciones presentando en la sección anterior, el cual se denomina de especificaciones nominales. A la combinación de la estabilidad robusta y a las especificaciones nominales se le denomina especificaciones robustas, ya que garantiza la estabilidad y las especificaciones demandadas para todo el conjunto de modelos.

Sin embargo, a diferencia del esquema presentado en la sección precedente, en control \mathcal{H}_{∞} , el diseño se realiza mediante el empleo de matrices de transferencia de peso en frecuencia, que son seleccionadas para tener en cuenta cuáles son las frecuencias importantes de las señales y ponderarlas según el canal correspondiente [Skogestad y Postlethwaite 1996].

Por ejemplo, si se desea realizar un diseño de especificaciones nominales para rechazar en la salida perturbaciones aditivas a la salida (figura 6.8) se introducen las matrices de transferencia W_{dy} y W_y . La primera tiene un comportamiento en frecuencia tal que sólo deja pasar señales en el rango de frecuencias al cual pertenecen aquellas perturbaciones que se desean rechazar y en los canales de interés. La segunda tiene la misma misión que la anterior pero sobre el rango de frecuencias de las salidas y según el canal. Sus ganancias se eligen para que la condición de especificaciones nominales a alcanzar sea equivalente a la siguiente condición en norma 2:

$$\|W_y \bar{y}\|_2 \leq 1 \quad (6.3-17)$$

suponiendo que las perturbaciones cumplen:

$$\|d_y\|_2 \leq 1 \quad (6.3-18)$$

Retomando las relaciones del bucle cerrado (6.2-6) y aplicando el principio de superposición, se tiene que el efecto de las perturbaciones sobre las salidas es:

$$\bar{\mathbf{y}}(z) = \mathbf{S}_0(z)\mathbf{W}_{d_y}(z)\mathbf{d}_y(z) \Rightarrow \|\mathbf{W}_y(z)\mathbf{S}_0(z)\mathbf{W}_{d_y}(z)\mathbf{d}_y(z)\|_2 \leq 1 \quad (6.3-19)$$

como las perturbaciones tienen norma 2 menor o igual que 1, esta última condición da lugar a la siguiente como consecuencia de que la norma infinita de matrices de transferencia es la inducida de la norma 2 de vectores (apéndice E):

$$\|\mathbf{W}_y(z)\mathbf{S}_0(z)\mathbf{W}_{d_y}(z)\|_\infty \leq 1 \quad (6.3-20)$$

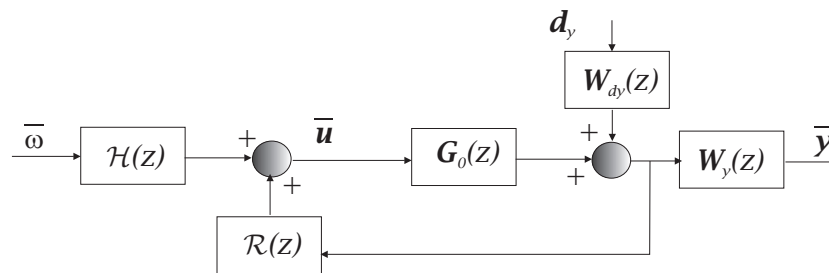


FIGURA 6.8: Perturbación aditiva a la salida

Si se desea que la anterior condición sea además robusta, es decir, se cumpla para todo el conjunto de modelos \mathcal{G} la función de sensibilidad nominal \mathbf{S}_0 debe sustituirse por la correspondiente a todos estos modelos [Goodwin *et al.* 2001]:

$$\|\mathbf{W}_y(z)\mathbf{S}(z)\mathbf{W}_{d_y}(z)\|_\infty \leq 1 \quad (6.3-21)$$

6.3.1.1. Incertidumbre estructurada. μ análisis.

El empleo de incertidumbre no estructurada puede ser interesante en aquellas aplicaciones en las que hay dinámica no modelada. Sin embargo, en aquellas en las cuales sólo se desconoce el verdadero valor de determinados parámetros, aunque se sabe que pueden variar en unos determinados rangos, el análisis basado en este tipo de incertidumbre puede llegar a ser muy conservativo. Por ello, se desarrolló una alternativa denominada incertidumbre estructurada [Zhou y Doyle 1998; Sanchez Peña y Sznaier 1998], que permite considerar que la incertidumbre Δ posee cierta estructura conocida de antemano:

$$\Delta = \left\{ \Delta = \text{diag}(\phi_1 \mathbf{I}_{c_1}, \dots, \phi_{nc} \mathbf{I}_{c_{nc}}, \Delta_1, \dots, \Delta_{nF}) : \phi_j \in \mathbb{C}, \Delta_l \in \mathbb{C}^{F_l \times F_l}, \sum_{j=1}^{nc} c_j + \sum_{l=1}^{nF} F_l = n \right\} \quad (6.3-22)$$

denominada incertidumbre estructurada compleja. Así la matriz Δ ya no es completa sino que presenta una estructura diagonal formada por bloques complejos diagonales $\phi_j \mathbf{I}_{c_j}$ y matrices complejas completas Δ_l .

6.3 Diseño robusto: caso general

Esta alternativa sigue siendo conservativa cuando existen parámetros inciertos que sólo toman valores reales. En respuesta a este tipo de problemas se introdujo la siguiente estructura para Δ conocida como incertidumbre estructurada mixta (real y compleja):

$$\Delta = \{\Delta = \text{diag}(\delta_1 \mathbf{I}_{r_1}, \dots, \delta_r \mathbf{I}_{r_r}, \phi_1 \mathbf{I}_{c_1}, \dots, \phi_{nc} \mathbf{I}_{c_{nc}}, \Delta_1, \dots, \Delta_{nF}) : \left. \begin{array}{l} \delta_i \in \mathbb{R}, \phi_j \in \mathbb{C}, \Delta_l \in \mathbb{C}^{F_l \times F_l}, \\ \sum_{i=1}^{nr} r_i + \sum_{j=1}^{nc} c_j + \sum_{l=1}^{nF} F_j = n \end{array} \right\} \quad (6.3-23)$$

ahora aparecen bloques reales diagonales $\delta_i \mathbf{I}_{r_i}$.

Con la introducción de la incertidumbre estructurada mixta o compleja, resulta que el mayor valor singular deja de ser el parámetro que permite analizar tanto la estabilidad robusta como las especificaciones robustas pues no tiene en cuenta dicha estructura. En su lugar se introduce el concepto de valor singular estructurado μ que resulta ser una generalización del mayor valor singular. Dada una matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ su valor singular estructurado con respecto a la estructura Δ se define como:

$$\mu_{\Delta}(\mathbf{M}) \triangleq \frac{1}{\min \{\bar{\sigma}[\Delta] : \Delta \in \mathbf{\Delta}, \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0\}} \quad (6.3-24)$$

a menos que no exista $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ que haga a $\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta$ singular, en cuyo caso $\mu_{\Delta}(\mathbf{M}) \triangleq 0$.

Nota 6.3.2 Se puede interpretar al valor singular estructurado (y, por tanto, al mayor valor singular) como la inversa de la norma de la menor matriz perturbación $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ que es capaz de desestabilizar a la matriz \mathbf{M} .

LEMA 6.3.1 ([ZHOU Y DOYLE 1998]) Dada $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$\rho(\mathbf{M}) \leq \mu_{\Delta}(\mathbf{M}) \leq \bar{\sigma}[\mathbf{M}] \quad (6.3-25)$$

donde ρ representa el radio espectral de la matriz. Si $\mathbf{\Delta} = \{\delta \mathbf{I}_n : \delta \in \mathbb{C}\}$ entonces:

$$\mu_{\Delta}(\mathbf{M}) = \rho(\mathbf{M}) \quad (6.3-26)$$

Si $\mathbf{\Delta} = \mathbb{C}^{n \times n}$ entonces:

$$\mu_{\Delta}(\mathbf{M}) = \bar{\sigma}[\mathbf{M}] \quad (6.3-27)$$

Este resultado muestra que si se utiliza incertidumbre estructurada el uso del mayor valor singular como parámetro de análisis puede dar lugar, en algunos casos, a criterios muy conservadores.

Tras la introducción del concepto de valor singular estructurado se presenta el resultado sobre estabilidad robusta para el caso de incertidumbre estructurada, que resulta ser una extensión del **teorema 6.3.1**:

TEOREMA 6.3.2 (ESTABILIDAD ROBUSTA CON INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA) *Si el proceso nominal $G_0(z)$ es internamente estabilizado por un controlador $K(z)$, entonces todos los miembros de la familia de modelos \mathcal{G} que emplea una estructura de incertidumbre Δ , serán internamente estabilizados por este controlador si y sólo si:*

$$\mu_{\Delta}(M_{11}(jw)) \leq 1 \quad \forall w \in \mathbb{R} \quad (6.3-28)$$

Su demostración se encuentra en [Sanchez Peña y Sznaier 1998].

Al igual que se hizo para el caso de incertidumbre no estructurada este teorema puede aplicarse al controlador-observador GPC para los casos de incertidumbre multiplicativa (corolario 6.3.1) y aditiva (corolario 6.3.2), sin más que cambiar el mayor valor singular presente en estos corolarios por el valor singular estructurado.

6.3.2. Diseño basado en LMIs

6.3.2.1. Ideas previas

De las ideas y resultados del punto anterior, relativo al control \mathcal{H}_{∞} , cabe destacar que en este punto serán de gran utilidad todos aquellos aspectos asociados a los diferentes tipos de incertidumbre y/o dinámica no modelada ya presentados.

Las razones que justifican que en esta tesis se empleen métodos basados en LMIs en lugar del μ análisis son:

- Los problemas numéricos que existen cuando se computa el valor singular estructurado real, es decir, cuando en la incertidumbre solo hay bloques diagonales reales [Balas *et al.* 1998]. Esta circunstancia se da en aquellas aplicaciones que poseen sólo parámetros inciertos reales.
- La posibilidad, como se verá más adelante, de incluir restricciones en el dominio del tiempo empleando LMIs.
- La capacidad de incluir especificaciones basadas en normas distintas a la infinito: norma 2 y norma 1.
- La posibilidad mediante LMIs de asignar los polos del bucle cerrado en determinadas regiones del plano complejo, garantizando la verificación de determinadas especificaciones dinámicas.

6.3.2.2. Conceptos y definiciones

Una desigualdad lineal matricial es una expresión de la forma [Boyd *et al.* 1994]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{F}_i > 0 \quad (6.3-29)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de incógnitas y las matrices simétricas $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ vienen dadas. El símbolo $>$ de la desigualdad anterior quiere decir que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es una matriz definida positiva. Por definición, la anterior LMI se denomina estricta, no obstante también se pueden considerar LMIs no estrictas utilizando el símbolo \geq en lugar de $>$.

Una de las principales propiedades de las LMIs es que definen un conjunto de restricción convexo sobre el vector de incógnitas \mathbf{x} , es decir, el conjunto $\mathcal{F} \triangleq \{\mathbf{x} : \mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0\}$ es convexo.

Las LMI tienen una gran aplicación en el diseño de sistemas de control [Boyd *et al.* 1994; Zhou y Doyle 1998; Sanchez Peña y Sznaiier 1998]. Un ejemplo típico viene asociado a la ecuación de Lyapunov de estabilidad para sistemas discretos:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X} \mathbf{A} - \mathbf{X} < 0 \quad (6.3-30)$$

el sistema discreto $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{z}_k$ es asintóticamente estable si y sólo si existe una matriz \mathbf{X} definida positiva que verifique la condición anterior. Como puede observarse, la desigualdad anterior puede considerarse como una LMI cuyo vector de incógnitas contiene los elementos no repetidos de la matriz \mathbf{X} .

De este ejemplo se deduce que un problema de vital importancia asociado a las LMIs es poder determinar si poseen solución, es decir, $\exists \mathbf{x}^*$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) > 0$. A este problema se le denomina de resolubilidad. Si la LMI (6.3-30) fuese resoluble entonces el sistema discreto $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{z}_k$ sería asintóticamente estable, y viceversa.

Asociados a las LMIs se pueden plantear además problemas de optimización:

$$\text{Minimizar: } g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.3-31)$$

sujeto a:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0 \quad (6.3-32)$$

si la función g es convexa, como la LMI es convexa, el problema de optimización anterior es convexo y, por tanto, tendrá un único mínimo global.

Según la formulación del problema de control a resolver pueden presentarse tanto problemas de resolubilidad de LMIs como de optimización sujetos a determinadas LMIs. En el entorno *Matlab* se han desarrollado diferentes *toolboxes* que permiten la resolución de ambos problemas asociados a LMIs, en concreto, en esta tesis se van a emplear

la *LMI toolbox* [Gahinet *et al.* 1995] y *Sedumi* [Sturm 1999] que se puede obtener en <http://fewcal.kub.nl/sturm/>.

Las LMIs permiten el análisis y el diseño de sistemas de control para procesos que presentan incertidumbres de tipo politópico, afín y LFR (linear fractional representation). Un proceso presenta incertidumbre politópica cuando el conjunto de posibles modelos es de la forma:

$$\mathcal{G} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right) : \mathbf{A} = \sum_{i=1}^q \mu_i \mathbf{A}_i, \mathbf{B} = \sum_{i=1}^q \mu_i \mathbf{B}_i, \mathbf{C} = \sum_{i=1}^q \mu_i \mathbf{C}_i, \mathbf{D} = \sum_{i=1}^q \mu_i \mathbf{D}_i, \sum_{i=1}^q \mu_i = 1, \mu_i \geq 0 \right\} \quad (6.3-33)$$

donde cualquier modelo es una combinación lineal convexa de q modelos lineales $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i$ y \mathbf{D}_i , a los que se conoce como modelos vértice.

La incertidumbre afín viene caracterizada por la dependencia de las matrices de la representación interna de una serie de parámetros inciertos δ_i que están acotados:

$$\mathcal{G} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right) : \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i \mathbf{A}_i, \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i \mathbf{B}_i, \right. \\ \left. \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i \mathbf{C}_i, \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i \mathbf{D}_i, \delta_i^- \leq \delta_i \leq \delta_i^+ \quad \forall i \right\} \quad (6.3-34)$$

Estos dos primeros tipos de incertidumbre son equivalentes ya que es posible pasar de un tipo de representación a otro [Scherer y Weiland 2000]. Estos tipos de incertidumbre se denominan paramétricos reales ya que dependen de ciertos parámetros que sólo toman valores reales. Por tanto, estos tipos de incertidumbre son útiles cuando en el proceso hay determinados parámetros físicos que pueden variar dentro de un determinado rango conocido, cosa bastante usual en la práctica.

El tercer tipo de incertidumbre, la fraccional lineal (LFR), es más general que los anteriores ya que los incluye como caso particular. En concreto, dicha incertidumbre supone que el conjunto de modelos se puede representar mediante una interconexión LFT superior entre un sistema $\mathbf{M}(z)$ y un bloque de incertidumbre Δ (figura 6.9) con la misma estructura que el empleado en el apartado del μ análisis:

$$\mathbf{M}(z) = \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_\Delta & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C}_\Delta & \mathbf{D}_\Delta & \mathbf{D}_{\Delta,p} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D}_{e,\Delta} & \mathbf{D} \end{array} \right) \\ \Delta = \{ \Delta = \text{diag}(\delta_1 \mathbf{I}_{r_1}, \dots, \delta_r \mathbf{I}_{r_r}, \phi_1 \mathbf{I}_{c_1}, \dots, \phi_{nc} \mathbf{I}_{c_{nc}}, \Delta_1, \dots, \Delta_{nF}) : \\ \delta_i \in \mathbb{R}, \phi_j \in \mathbb{C}, \Delta_l \in \mathbb{C}^{F_l \times F_l}, \sum_{i=1}^{nr} r_i + \sum_{j=1}^{nc} c_j + \sum_{l=1}^{nF} F_j = n \} \quad (6.3-35)$$

La simplificación de esta LFT da lugar a:

$$\mathcal{F}_s[M(z), \Delta] = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} B_\Delta \\ \hline D_{e,\Delta} \end{array} \right) (I - D_\Delta \Delta)^{-1} (C_\Delta \quad D_{\Delta,p}) \quad (6.3-36)$$

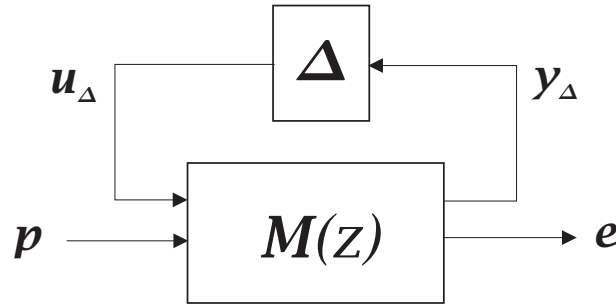


FIGURA 6.9: LFT superior correspondiente a la representación LFR

La importancia de este tipo de incertidumbre reside en que es bastante general y tiene gran aplicabilidad a casos reales [Boyd *et al.* 1994; El Ghaoui y Niculescu 2000]. Cuando en el modelo incierto sólo hay parámetros reales acotados se puede demostrar el siguiente resultado [Dussy y El Ghaoui 1998]:

TEOREMA 6.3.3 Para cualquier función matricial racional $G(\delta) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n \times c}$, sin singularidades en el origen, existen enteros no negativos r_1, \dots, r_p y matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times c}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times N}$, $R \in \mathbb{R}^{N \times c}$ y $D \in \mathbb{R}^{N \times N}$, con $N = r_1 + \dots + r_n$, tales que G tiene la siguiente LFR para todos los δ donde está definida:

$$G(\delta) = M + L\Delta(I - D\Delta)^{-1}R, \text{ con } \Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_p I_{r_p}) \quad \delta = (\delta_1 \quad \dots \quad \delta_p)^T \quad (6.3-37)$$

Este resultado será de vital importancia para el capítulo 7 en el que se abordará el estudio de sistemas no lineales mediante representaciones LFR.

Además, la incertidumbre de tipo LFR contempla como caso particular a las incertidumbres no estructuradas multiplicativa y aditiva presentadas antes.

Nota 6.3.3 Si en el teorema anterior se toma $D = 0$ entonces G es una función afín, con lo cual nos encontramos ante una incertidumbre de tipo afín.

6.3.2.3. Condiciones de estabilidad robusta

En este punto se van a presentar algunos resultados sobre estabilidad robusta de sistemas discretos para los diferentes tipos de incertidumbre presentados, en términos de LMIs. Estos criterios serán aplicados al bucle cerrado formado por el controlador-observador GPC y el modelo incierto, para un adecuado diseño del controlador-observador (horizontes, matrices de ponderación y polos del observador).

En la literatura hay una gran cantidad de artículos que desarrollan condiciones de estabilidad robusta basadas en LMIs para el caso de sistemas continuos [Boyd *et al.* 1994; Gahinet *et al.* 1996; Feron *et al.* 1996; El Ghaoui y Niculescu 2000; Scherer y Weiland 2000] y una menor cantidad para el caso de sistemas discretos [El Ghaoui y Niculescu 2000; Oliveira *et al.* 1999].

En primer lugar, se parte de la condición necesaria y suficiente de estabilidad asintótica para el sistema discreto:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (6.3-38)$$

basada en el empleo de la función de Lyapunov cuadrática:

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}(k)^T \mathbf{P}\mathbf{x}(k), \text{ con } \mathbf{P} > 0 \quad (6.3-39)$$

El sistema discreto anterior es asintóticamente estable si y sólo si existe \mathbf{P} tal que:

$$V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) < 0 \quad \forall k \geq 0, \text{ cuando } \mathbf{u}(k) = \mathbf{0} \quad (6.3-40)$$

que equivale a:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(k+1)^T \mathbf{P}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)^T \mathbf{P}\mathbf{x}(k) < 0 \\ \Leftrightarrow &\mathbf{x}(k)^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k)^T \mathbf{P}\mathbf{x}(k) < 0 \\ \Leftrightarrow &\mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P} < 0 \end{aligned} \quad (6.3-41)$$

la última expresión puede considerarse como una LMI donde las incógnitas son los coeficientes no repetidos de la matriz desconocida \mathbf{P} . Por tanto, dicha LMI es resoluble, es decir, existe $\mathbf{P} > 0$ tal que (6.3-41) se cumple, si y sólo si el sistema es asintóticamente estable. A esta condición de estabilidad se la denomina estabilidad cuadrática ya que es posible encontrar una función de Lyapunov cuadrática para el sistema. Para los sistemas lineales e invariantes con el tiempo la estabilidad asintótica y la cuadrática son condiciones equivalentes.

No obstante, cuando hay presente incertidumbre en el modelo la condición de estabilidad cuadrática (6.3-41) es sólo suficiente [Boyd *et al.* 1994]. Por ello, cuando se estudia la estabilidad robusta de un sistema discreto con incertidumbre y/o dinámica no modelada, como por ejemplo el bucle cerrado formado por modelo incierto y el controlador-observador GPC (6.3-2), se habla de que éste es cuadráticamente estable si existe una matriz $\mathbf{P} > 0$ tal que:

$$\mathbf{A}_{BC}(\Delta)^T \mathbf{P}\mathbf{A}_{BC}(\Delta) - \mathbf{P} < 0 \quad \forall \Delta \in \Delta \quad (6.3-42)$$

\mathbf{A}_{BC} es la matriz de estado del bucle cerrado formado por el modelo incierto y el controlador-observador GPC (6.3-2). El conjunto Δ contiene a todos los posibles valores de la

6.3 Diseño robusto: caso general

matriz de incertidumbre Δ . El principal problema para verificar esta condición es que hay que comprobar la resolubilidad de una cantidad infinita de LMIs, cada una de ellas correspondiente a un valor concreto de Δ .

Existen diferentes metodologías para transformar los problemas con un número infinito de LMIs en problemas con sólo un número finito. Una de las técnicas empleadas [Oliveira *et al.* 1999] se basa en el complemento de Schur [Boyd *et al.* 1994]:

LEMA 6.3.2 (COMPLEMENTO DE SCHUR) *La LMI:*

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (6.3-43)$$

es equivalente a las LMIs:

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \quad (6.3-44)$$

o a las LMIs:

$$Q(x) > 0, \quad R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1}S(x) > 0 \quad (6.3-45)$$

Partiendo de la condición de estabilidad cuadrática (6.3-42) y como P es definida positiva:

$$\begin{aligned} P > 0, \quad P - A_{BC}(\Delta)^T P A_{BC}(\Delta) > 0 \\ \Leftrightarrow P > 0, \quad P - A_{BC}(\Delta)^T P P^{-1} P A_{BC}(\Delta) > 0 \end{aligned}$$

aplicando el complemento de Schur se obtiene la condición equivalente:

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} P & A_{BC}(\Delta)^T P \\ P A_{BC}(\Delta) & P \end{bmatrix} > 0 \quad (6.3-46)$$

Suponiendo incertidumbre de tipo afín⁶ para el modelo incierto del proceso sobre las matrices $A(\Delta)$ y $B(\Delta)$ (6.3-1):

$$A(\Delta) = A_0 + \sum_i^q \delta_i A_i \quad ; \quad B(\Delta) = B_0 + \sum_i^q \delta_i B_i \quad ; \quad C(\Delta) = C_0 \quad (6.3-47)$$

la matriz de estado del bucle cerrado (6.3-2) también dependerá afinmente de la incertidumbre:

$$A_{BC}(\Delta) = \overbrace{\begin{bmatrix} A_0 - B_0 \sigma P C_0 & -B_0 \sigma M & B_0 \\ (\Pi - \tilde{B} \sigma P) C_0 & \tilde{A} - \Pi \tilde{C} - \tilde{B} \sigma M & \tilde{B} \\ -(I - \sigma O) \sigma P C_0 & -(I - \sigma O) \sigma M & I - \sigma O \end{bmatrix}}^{A_{BC,0}} + \sum_i^q \overbrace{\begin{bmatrix} A_i - B_i \sigma P C_0 & -B_i \sigma M & B_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A_{BC,i}} \quad (6.3-48)$$

⁶El caso de incertidumbre politópica es similar ya que ésta es equivalente a la afín.

Sustituyendo esta dependencia afín en (6.3-46) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \delta_i \mathbf{A}_{BC,i})^T \mathbf{P} \\ \mathbf{P}(\mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \delta_i \mathbf{A}_{BC,i}) & \mathbf{P} \end{bmatrix} > 0 \quad \forall \delta \quad (6.3-49)$$

El primer miembro de esta ecuación es afín en los parámetros inciertos ya que la dependencia de $\mathbf{A}_{BC}(\Delta)$ es afín. En el apéndice F sección F.2.1 se justifica que basta verificar dicha LMI en los vértices del conjunto de posibles valores de los parámetros para obtener una condición necesaria y suficiente de estabilidad cuadrática. Suponiendo que el conjunto de posibles valores para los parámetros es de la forma:

$$\mathcal{V} = \{ \delta : \delta_i^- \leq \delta_i \leq \delta_i^+ \quad i = 1, \dots, q \} \quad (6.3-50)$$

el conjunto de sus vértices \mathcal{V}_v es:

$$\mathcal{V}_v = \{ \delta \in \mathcal{V} : \delta_i \in \{ \delta_i^-, \delta_i^+ \} \} = \{ \delta^{v1}, \dots, \delta^{vl} \} \quad l = 2^q \quad (6.3-51)$$

Consecuentemente, la condición necesaria y suficiente de estabilidad cuadrática para este caso particular de incertidumbre es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{A}_{BC}(\delta))^T \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \mathbf{A}_{BC}(\delta) & \mathbf{P} \end{bmatrix} > 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v \quad (6.3-52)$$

Este criterio, como ya se ha comentado, es conservativo ya que un sistema con incertidumbre que es asintóticamente estable no tiene porqué ser cuadráticamente estable. Por ello, diversos autores han propuesto alternativas basadas en emplear criterios menos conservadores que el cuadrático. Una de las aproximaciones más utilizadas es la denominada estabilidad cuadrática paramétrica que emplea matrices $\mathbf{P}(\delta)$ que son función de la incertidumbre presente en el modelo. Así, por ejemplo, en [Gahinet *et al.* 1996; Feron *et al.* 1996; Scherer y Weiland 2000] se desarrollan condiciones suficientes de estabilidad cuadrática con dependencia afín de \mathbf{P} con respecto a los parámetros, para el caso de sistemas continuos. En la sección F.2.2 se extienden estas condiciones suficientes para garantizar estabilidad robusta con dependencia afín en la matriz \mathbf{P} , para el caso del bucle cerrado discreto formado por el modelo del proceso con incertidumbre afín y el controlador-observador GPC.

Otros autores [Trofino y de Souza 1999, 2001] proponen condiciones suficientes (para sistemas continuos y discretos) de estabilidad cuadrática paramétrica admitiendo dependencia cuadrática de $\mathcal{P}(\delta)$ respecto de los parámetros, a la cual denominan estabilidad bicuadrática. De nuevo, estos resultados se han adaptado para el bucle cerrado formado por el modelo incierto y el controlador-observador GPC (véase sección F.2.3).

Nota 6.3.4 Desde el punto de vista asociado a reducir al máximo el conservadurismo, el criterio de la estabilidad bicuadrática es el menos conservador. No obstante, cuando se

emplea este criterio aumenta la complejidad de las LMIs asociadas y el número de variables incógnitas⁷, lo cual supone un incremento computacional importante en la resolución numérica de dichas LMIs.

Es importante destacar que la incertidumbre del bucle cerrado es afín en el caso que se ha analizado⁸, sin embargo, en otros casos puede llegar a ser más compleja. Por ello, se hace necesario analizar el caso más general de incertidumbre LFR. En concreto, la técnica más empleada para analizar este caso se denomina *S-procedure* [Yakubovich 1977; Boyd *et al.* 1994; Feron *et al.* 1996; Kothare *et al.* 1996] que establece un condición suficiente para cualquier estructura de Δ . Posteriormente, otros autores han propuesto mejoras a dicho método para reducir su conservadurismo: basadas en el lema de Kalman-Yakubovich-Popov [Helmersson 1999; El Ghaoui y Niculescu 2000] o en el denominado *full block S-procedure* [Scherer 2001; El Ghaoui y Niculescu 2000]. Ambos métodos dan lugar a resultados similares y, en esta tesis, se va a emplear el segundo de ellos por su mayor sencillez de aplicación a los casos que se tratan [Scherer 2001]. Por otro lado, la mayor parte de los resultados analizados se refieren al caso de sistemas continuos, por ello, éstos han sido extendidos al caso de sistemas discretos empleando los mismos conceptos y técnicas.

A la función de Lyapunov se le proporcionará una dependencia LFR con respecto de la incertidumbre de acuerdo a la formulación presentada en [Helmersson 1999]:

$$\begin{aligned} P(\hat{\Delta}) &\triangleq T(\hat{\Delta})^T Q T(\hat{\Delta}) > 0 \quad \forall \hat{\Delta} \in \hat{\Delta} & (6.3-53) \\ T(\hat{\Delta}) &\triangleq T_A + T_B \hat{\Delta} (I - T_D \hat{\Delta})^{-1} T_C \end{aligned}$$

Se supondrá que $T(\hat{\Delta})$ es prefijada de antemano⁹ y la incógnita es la matriz Q .

Partiendo de la condición de estabilidad cuadrática (6.3-42) e incorporando la dependencia LFR para P (6.3-53) e incertidumbre LFR para la matriz de estado del bucle cerrado:

$$\begin{aligned} A_{BC}(\Delta)^T P(\hat{\Delta}) A_{BC}(\Delta) - P(\hat{\Delta}) &< 0 \quad \forall \Delta \in \Delta, \forall \hat{\Delta} \in \hat{\Delta} & (6.3-54) \\ A_{BC}(\Delta) &\triangleq A_{BC} + B_{BC,\Delta} \Delta (I - D_{BC,\Delta} \Delta)^{-1} C_{BC,\Delta} \end{aligned}$$

se obtiene la condición de estabilidad cuadrática con incertidumbre LFR. Nótese que se supone que la estructura de la incertidumbre para P , $\hat{\Delta}$, no tiene que ser igual que la de la matriz A_{BC} , Δ , aunque deben depender de los mismos parámetros inciertos (sean reales o complejos). La LMI (6.3-53) puede ser suprimida bajo la hipótesis de que el proceso nominal ($\Delta = 0$ y $\hat{\Delta} = 0$) sea asintóticamente estable. La demostración de este hecho puede consultarse en el apéndice F **proposición F.1.1**.

⁷Como puede apreciarse al comparar las condiciones deducidas en la sección F.2.

⁸ $A(\Delta)$ y $B(\Delta)$ tienen dependencia afín pero $C(\Delta)$ es constante.

⁹Las matrices T_A , T_B , T_C y T_D se eligen a priori.

Ahora, se puede trabajar sobre la ecuación (6.3-54) para obtener las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I \\ A_{BC}(\Delta) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -P(\hat{\Delta}) & 0 \\ 0 & P(\hat{\Delta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ A_{BC}(\Delta) \end{pmatrix} < 0 \\ & \begin{pmatrix} I \\ A_{BC}(\Delta) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} T(\hat{\Delta})^T & 0 \\ 0 & T(\hat{\Delta})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(\hat{\Delta}) & 0 \\ 0 & T(\hat{\Delta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ A_{BC}(\Delta) \end{pmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (6.3-55)$$

salvo la matriz central el resto son dependientes de la incertidumbre LFR. Tras una serie de operaciones, indicadas en la sección F.2.4, se llega a la condición equivalente:

$$\begin{aligned} G(\tilde{\Delta}) &= \begin{pmatrix} T(\hat{\Delta}) & 0 \\ 0 & T(\hat{\Delta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ A_{BC}(\Delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_A \\ T_A A_{BC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_B & 0 & 0 \\ 0 & T_B & T_A B_{BC,\Delta} \end{pmatrix} \tilde{\Delta} \left\{ I - \right. \\ & \quad \left. - \begin{pmatrix} T_D & 0 & 0 \\ 0 & T_D & T_C B_{BC,\Delta} \\ 0 & 0 & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix} \tilde{\Delta} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} T_C \\ T_C A_{BC} \\ C_{BC,\Delta} \end{pmatrix} \\ & \quad \tilde{\Delta} = \text{diag}(\hat{\Delta}, \hat{\Delta}, \Delta) \\ G(\tilde{\Delta})^T & \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} G(\tilde{\Delta}) < 0 \quad \forall \tilde{\Delta} \in \tilde{\Delta} \triangleq \text{diag}(\hat{\Delta}, \hat{\Delta}, \Delta) \end{aligned} \quad (6.3-56)$$

En este punto se aplica la técnica *full block S-procedure* [El Ghaoui y Niculescu 2000]:

LEMA 6.3.3 (FULL BLOCK S-PROCEDURE) *Sea \mathcal{S} un subespacio de \mathbb{R}^n , $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ una matriz con rango completo de filas y $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{k \times l}$ un conjunto compacto de matrices. Se definen los siguientes subespacios:*

$$\mathcal{S}_U \triangleq \mathcal{S} \cap \text{nucleo}(\mathbf{U}\mathbf{R}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{S} : \mathbf{U}\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{S} : \mathbf{R}\mathbf{x} \in \text{nucleo}(\mathbf{U})\} \quad (6.3-57)$$

indexados por la matriz $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$. Sea $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica fija, y \mathcal{S}_0 un subespacio fijo de \mathcal{S} con $\dim(\mathcal{S}_0) \geq k$. Entonces:

$$\forall \mathbf{U} \in \mathcal{U} : \mathcal{S}_U \cap \mathcal{S}_0 = \{0\} \text{ y } \mathbf{N} < 0 \text{ sobre } \mathcal{S}_U \quad (6.3-58)$$

si y sólo si existe un multiplicador simétrico \mathbf{V} que satisfice:

$$\forall \mathbf{U} \in \mathcal{U} : \mathbf{N} + \mathbf{R}^T \mathbf{V} \mathbf{R} < 0 \text{ sobre } \mathcal{S} \text{ y } \mathbf{P} > 0 \text{ sobre } \text{nucleo}(\mathbf{U}) \quad (6.3-59)$$

Esta técnica puede aplicarse a la condición (6.3-56) empleando los siguientes valores para los parámetros del LEMA anterior:

$$\mathcal{U} = \left\{ (I - \tilde{\Delta}) : \tilde{\Delta} \in \tilde{\Delta} \right\} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

6.3 Diseño robusto: caso general

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S} = \text{Span} \begin{pmatrix} T_A & T_B & 0 & 0 \\ T_A A_{BC} & 0 & T_B & T_A B_{BC,\Delta} \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ T_C & T_D & 0 & 0 \\ T_C A_{BC} & 0 & T_D & T_C B_{BC,\Delta} \\ C_{BC,\Delta} & 0 & 0 & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix} & \quad \mathcal{S}_0 = \text{Span} \begin{pmatrix} T_B & 0 & 0 \\ 0 & T_B & T_A B_{BC,\Delta} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ T_D & 0 & 0 \\ 0 & T_D & T_C B_{BC,\Delta} \\ 0 & 0 & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix} \\
 N = \left(\begin{array}{cc|c} -Q & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ \hline 0 & & 0 \end{array} \right) & \quad (6.3-60)
 \end{aligned}$$

obteniéndose las siguientes condiciones necesarias y suficientes de estabilidad cuadrática con dependencia LFR:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} * \\ * \\ \hline * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}^T & \left(\begin{array}{cc|c} -Q & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ \hline 0 & & V \end{array} \right) \begin{pmatrix} T_A & T_B & 0 & 0 \\ T_A A_{BC} & 0 & T_B & T_A B_{BC,\Delta} \\ \hline 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ T_C & T_D & 0 & 0 \\ T_C A_{BC} & 0 & T_D & T_C B_{BC,\Delta} \\ C_{BC,\Delta} & 0 & 0 & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix} < 0 \\
 \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \\ I \end{pmatrix}^T V \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \\ I \end{pmatrix} > 0 \quad \forall \tilde{\Delta} \in \tilde{\Delta} & \quad (6.3-61)
 \end{aligned}$$

Para verificar las infinitas LMIs correspondientes al multiplicador V [Scherer 2001; El Ghaoui y Niculescu 2000] hay que emplear una técnica conocida con el nombre de multiconvexidad y suponer que el conjunto $\tilde{\Delta}$ viene determinado por la envoltura convexa de un número finito de matrices:

$$\tilde{\Delta} = \text{Co} \{ \mathcal{X}_{\tilde{\Delta}} \} \quad ; \quad \mathcal{X}_{\tilde{\Delta}} \triangleq \{ \tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_r \} \quad (6.3-62)$$

En la sección F.2.4 se detallan todos los pasos a seguir hasta obtener la siguiente condición suficiente basada en un número finito de LMIs:

$$\tilde{\Delta}^T V_{11} \tilde{\Delta} + V_{12} \tilde{\Delta} + (V_{12} \tilde{\Delta})^T + V_{22} > 0 \quad \forall \tilde{\Delta} \in \mathcal{X}_{\tilde{\Delta}} \quad (6.3-63)$$

$$V_{11} < 0 \quad ; \quad V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12}^T & V_{22} \end{bmatrix} \quad (6.3-64)$$

En [El Ghaoui y Niculescu 2000] se justifica que estas condiciones son además necesarias si $\begin{pmatrix} T_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_D & T_C \mathbf{B}_{BC,\Delta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_\Delta \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, es decir, cuando la incertidumbre de $G(\hat{\Delta})$ es afín.

Nota 6.3.5 Las condiciones suficientes de estabilidad cuadrática LFR se pueden adaptar para diferentes tipos de dependencia paramétrica de la matriz \mathbf{P} como ya se hizo para el caso de incertidumbre afín. Basta con elegir adecuadamente las matrices T_A , T_B , T_C , T_D y \mathbf{Q} . Por ejemplo, para dependencia cuadrática [Helmersson 1999] y suponiendo que $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$T_A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ I_n \end{bmatrix}; T_B = \begin{bmatrix} I_n \\ \mathbf{0}_n \end{bmatrix}; T_C = I_n; T_D = \mathbf{0}_n; \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (6.3-65)$$

si se desea dependencia afín basta cambiar \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix}; \mathbf{Q}_{12}, \mathbf{Q}_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{Q}_{22} = \mathbf{Q}_{22}^T \quad (6.3-66)$$

y si se desea sin dependencia:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} \quad (6.3-67)$$

Finalmente, para un caso LFR general:

$$T_A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ I_n \end{bmatrix}; T_B = \begin{bmatrix} I_n \\ \mathbf{0}_n \end{bmatrix}; T_C, T_D \in \mathbb{R}^{n \times n}; \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix}; \mathbf{Q}_{12}, \mathbf{Q}_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{Q}_{22} = \mathbf{Q}_{22}^T \quad (6.3-68)$$

Metodología de diseño con garantía de estabilidad robusta

A partir de estos criterios suficientes de estabilidad, que se basan en problemas de resolubilidad de LMIs, es posible verificar si un controlador-observador GPC diseñado con determinados parámetros para el modelo nominal es capaz de estabilizar al modelo incierto del proceso. Si la respuesta es afirmativa se tiene un controlador válido, pero si la respuesta es negativa va a ser necesario utilizar una metodología de diseño robusto de sus parámetros para conseguir que establezca a dicho modelo incierto.

En este sentido, se puede proponer un método basado en obtener los parámetros óptimos para el controlador-observador GPC: horizontes, matrices de ponderación y polos del observador, de tal forma que se maximice el tamaño del conjunto de posibles valores

para los parámetros inciertos que es capaz de estabilizar robustamente dicho controlador. Por ejemplo, para el caso de incertidumbre paramétrica afín real empleando una matriz P para la función de Lyapunov también afín en los parámetros, la condición suficiente de estabilidad robusta es (sección F.2.2):

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) & (\mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \delta_i \mathbf{A}_{BC,i})^T (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) \\ (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) (\mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \delta_i \mathbf{A}_{BC,i}) & (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) \end{array} \right] - \sum_i \delta_i^2 \mathbf{M}_{ii} > 0 \\ & \forall \delta \in \mathcal{V} = \{ \delta : \delta_i \in \{ \delta_i^-, \delta_i^+ \} \} \\ & \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{BC,i}^T \mathbf{P}_i \\ -\mathbf{P}_i \mathbf{A}_{BC,i} & \mathbf{0} \end{array} \right] + \mathbf{M}_{ii} \geq 0 \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (6.3-69)$$

Esta condición de estabilidad puede interpretarse de otra forma. Dado un controlador-observador GPC que estabilice a la planta nominal ($\delta = \mathbf{0}$), las matrices $\mathbf{A}_{BC,0}$ y $\mathbf{A}_{BC,i}$ vienen fijadas y éste estabilizará robustamente al modelo incierto para un determinado conjunto de valores de los parámetros. Este conjunto viene caracterizado porque los parámetros inciertos variarán entre unos límites diferentes, casi con toda seguridad, a los existentes en el modelo incierto: $\delta_i^{-,*} \leq \delta_i \leq \delta_i^{+,*}$. Dichos límites se pueden obtener maximizando los valores de δ_i^+ y minimizando los de δ_i^- de entre aquellos que garanticen que las condiciones (6.3-69) son resolubles. Por tanto, se trata de un problema de optimización sujeto a desigualdades matriciales.

La diferencia con respecto al caso de verificación de estabilidad, es que ahora además de tener como incógnitas a las matrices \mathbf{P}_i también se tiene a los parámetros δ_i^- y δ_i^+ . Esto implica que las desigualdades anteriores ya no son lineales debido a que hay productos entre incógnitas. Sin embargo, pertenecen a un tipo particular de desigualdades matriciales no lineales denominado desigualdades matriciales bilineales (BMIs) [El Ghaoui y Niculescu 2000; Goh 1995], ya que si se fijan las matrices \mathbf{P}_i o los parámetros inciertos éstas se convierten en LMIs. Los problemas de optimización que deben satisfacer BMIs son no convexos ya que la región que éstas definen es no convexa, de ahí su dificultad de resolución. En esta tesis se va a emplear un paquete comercial denominado *PENBMI* de la empresa *PENOPT*¹⁰, que permite obtener óptimos locales para los problemas de optimización sujetos a BMIs. En la literatura actual sobre diseño de controladores robustos mediante LMIs [Tuan y Apkarian 2000; Fukuda y Kojima 2001] las BMIs tienen una gran importancia, dado que muchos problemas de diseño se reducen a minimizar una función que está obligada a verificar una determinada BMI. Sin embargo, a diferencia de las LMIs, el problema de optimización con una BMI puede llegar a ser NP-hard [Toker y Özbay 1995]. Dado su interés, se han propuesto numerosos algoritmos para tratar de resolver problemas de optimización sujetos a BMIs, que pueden clasificarse en dos tipos: [Tuan y Apkarian 2000; Fukuda y Kojima 2001]:

¹⁰Su página web es www.penopt.com.

- Métodos de optimización globales. Garantizan la obtención de un óptimo global pero su tiempo de cómputo es muy elevado. Son sólo aplicables a problemas con un número reducido de incógnitas.
- Métodos de optimización locales. Tienen el problema de que sólo son capaces de localizar mínimos locales, pero tienen la ventaja de ser computacionalmente mucho más eficientes y ser aplicables, por tanto, a problemas con un número elevado de incógnitas.

El paquete *PENBMI* pertenece al segundo tipo de algoritmos.

A raíz de la nueva interpretación de la condición de estabilidad, antes presentada, dados unos parámetros del controlador-observador GPC éste posee un rango máximo de estabilidad robusta en términos de los parámetros inciertos. De este análisis se deduce que un método a seguir sería obtener aquellos parámetros del controlador-observador que maximicen el rango de estabilidad:

$$\text{Parámetros GPC}^* = \underset{\text{Parámetros GPC}}{\operatorname{argmax}} (-\delta_1^-, \delta_1^+, \dots, -\delta_q^-, \delta_q^+) \quad (6.3-70)$$

sujeto a las BMIs¹¹ (6.3-69). En general, este problema de optimización podrá ser no convexo y multiobjetivo. Podrá ser multiobjetivo ya que aumentar δ_i^+ , por ejemplo, puede ser incompatible con aumentar δ_j^+ . La no convexidad se basa en las mismas razones expuestas al principio del capítulo, cuando se presentaron los problemas de optimización correspondientes al caso nominal. Consecuentemente, se pueden emplear algoritmos genéticos multiobjetivo para la resolución de este problema de optimización.

6.3.2.4. Condiciones de satisfacción de especificaciones basadas en normas

Otro aspecto muy interesante de las LMIs es que permiten estimar cotas superiores de diferentes tipos de normas para procesos con incertidumbre [Zhou y Doyle 1998; Sanchez Peña y Sznaier 1998]: norma infinito, norma 2 y norma 1. Estas normas permiten cuantificar desde diferentes puntos de vista el efecto de las perturbaciones y referencias sobre las salidas del proceso y las acciones de control.

Norma ∞

La norma ∞ de un sistema representa el valor máximo de la relación entre las normas 2 de su señal de salida y de su señal de entrada [Zhou *et al.* 1996] (inducida de la norma 2 para señales). Viene a indicar el caso de peor norma 2 de la salida (es decir, de mayor

¹¹Estas BMIs pueden reformularse a un tipo de problemas conocidos con el nombre de autovalores generalizados (GEVP) descritos en [Boyd *et al.* 1994]. Este tipo de problemas pueden ser resueltos por la *LMI toolbox*.

magnitud o energía) para todos los posibles valores de la señal de entrada con norma 2 acotada. Este tipo de análisis es aplicable sólo cuando las señales de entrada presentes en el proceso poseen energía finita (norma 2), ya que de lo contrario su norma 2 tendría un valor infinito.

El lema real acotado para procesos discretos [Doyle *et al.* 1991; Gahinet y Apkarian 1994; Zhou *et al.* 1996; Sanchez Peña y Sznaier 1998] es una de las metodologías que se emplean para el cálculo de normas infinito de sistemas discretos mediante LMIs:

LEMA 6.3.4 (LEMA REAL ACOTADO) *Dado sistema discreto:*

$$G(z) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right) \quad (6.3-71)$$

la condición $\|\mathbf{G}(z)\|_\infty < \gamma$ es equivalente a cualquiera de las siguientes:

1. $\exists \mathbf{P} > 0$ tal que:

$$\left(\begin{array}{cc} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{D}^T \mathbf{C} & \mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{array} \right) < 0 \quad (6.3-72)$$

2. $\exists \mathbf{P} > 0$ tal que la función cuadrática $V(k) = \mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k$ cumple:

$$V(k+1) - V(k) - \gamma^2 \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k + \mathbf{y}_k^T \mathbf{y}_k < 0 \quad \forall k \geq 0 \quad (6.3-73)$$

El cómputo de la norma infinito se puede realizar, pues, minimizando el valor de γ de entre aquellos que garantizan la resolubilidad de la LMI (6.3-72):

$$\|\mathbf{G}(z)\|_\infty = \gamma^* = \min_{\gamma, \mathbf{P}} \gamma \quad (6.3-74)$$

sujeto a (6.3-72)

Un aspecto a tener en cuenta es que si un sistema posee una norma ∞ finita entonces éste es asintóticamente estable (véase sección F.3.1).

Para procesos con incertidumbre es más útil la segunda condición del LEMA REAL ACOTADO para formular el problema en términos de LMIs. Además, en este caso sólo se pueden obtener, en general, cotas superiores para la norma infinito ya que las condiciones son sólo suficientes [El Ghaoui y Niculescu 2000]. Al igual que se realizó en la sección correspondiente a la estabilidad robusta, se van a presentar condiciones basadas en LMIs que permitan el cálculo de cotas superiores para la norma infinito de un determinado canal entrada/salida del bucle cerrado formado por el modelo incierto y el controlador-observador GPC (6.3-2). Por ejemplo, partiendo de la segunda condición del LEMA REAL ACOTADO y suponiendo incertidumbre afín en el modelo del bucle cerrado y

función de Lyapunov no paramétrica, es posible obtener una cota superior para la norma infinito existente entre la salida y la referencia resolviendo:

$$\gamma^* = \min_{\gamma, P} \gamma$$

$$\begin{pmatrix} P & A_{BC}(\delta)^T P & C_{BC,y}(\delta)^T & 0 \\ PA_{BC}(\delta) & P & 0 & -PB_{BC,r}(\delta) \\ C_{BC,y}(\delta) & 0 & \gamma I & -D_{BC,yr}(\delta) \\ 0 & -B_{BC,r}^T(\delta)P & -D_{BC,yr}^T(\delta) & \gamma I \end{pmatrix} > 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V} \quad (6.3-75)$$

Para deducir esta LMI basta con aplicar varias veces el complemento de Schur. En la sección F.3.1.1 se reseñan los problemas de optimización a resolver para otros tipos de incertidumbre y otras dependencias de la función de Lyapunov.

Nota 6.3.6 El problema (6.3-75) puede extenderse fácilmente a cualquier otra pareja entrada/salida ($\bar{\omega}/\bar{u}$, du/\bar{u} , dy/\bar{y} , etc.) sin más que cambiar las matrices $B_{BC,r}$, $C_{BC,y}$ y $B_{BC,yr}$ por las correspondientes al nuevo par entrada/salida.

Norma 2

La norma 2 de un sistema es más compleja de interpretar que la norma infinito. Una posible interpretación está relacionada con la cuantificación del efecto de perturbaciones aleatorias sobre el sistema. En concreto, representa el valor máximo de la varianza de la señal de salida para todos los posibles casos de señales de entrada asumidos a ser ruidos blancos [Zhou *et al.* 1996; El Ghaoui y Niculescu 2000].

La forma habitual para el cálculo de normas 2 de sistemas discretos se basa en el empleo del gramiano de observabilidad L_O o de controlabilidad L_C [Zhou *et al.* 1996; Sanchez Peña y Sznaier 1998]:

$$\|G(z)\|_2^2 = \text{Traza}(B^T L_O B + D^T D) = \text{Traza}(C L_C C^T + D D^T) \quad (6.3-76)$$

que son solución de las ecuaciones de Lyapunov discretas:

$$\begin{aligned} A^T L_O A - L_O + C^T C &= 0 \\ A L_C A^T - L_C + B B^T &= 0 \end{aligned} \quad (6.3-77)$$

No obstante, este método sólo es útil para sistemas sin incertidumbre. Para el caso con sistemas con incertidumbre es más interesante emplear un método equivalente basado en LMIs [El Ghaoui y Niculescu 2000; de Oliveira *et al.* 2002]:

6.3 Diseño robusto: caso general

LEMA 6.3.5 La desigualdad $\|G(z)\|_2 \leq \mu$ se verifica si y sólo si existen matrices simétricas P y W tales que cumplen las LMIs¹²:

$$\begin{aligned} \text{Traza}(W) \leq \mu^2, \quad W - B^T P B - D^T D \geq 0 \\ P > 0, \quad A^T P A - P + C^T C \leq 0 \end{aligned} \quad (6.3-78)$$

O equivalentemente las LMIs:

$$\text{Traza}(W) \leq \mu^2, \quad \begin{pmatrix} W & B^T P & D^T \\ P B & P & 0 \\ D & 0 & I \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} -P & A^T P & C^T \\ P A & -P & 0 \\ C & 0 & -I \end{pmatrix} \leq 0 \quad (6.3-79)$$

Al igual que ocurría para la norma infinito, si un sistema tiene una norma 2 finita entonces éste es asintóticamente estable.

A partir de las condiciones (6.3-79) es posible obtener condiciones suficientes para determinar una cota superior para la norma 2 correspondiente a un determinado canal entrada/salida del bucle cerrado formado por el modelo incierto del proceso y el controlador-observador GPC. En concreto, para el canal $\bar{\omega}/\bar{y}$ suponiendo incertidumbre paramétrica afín y función de Lyapunov también afín se tiene que:

$$\begin{aligned} \|G(z)\|_2 \leq \mu \text{ si se verifican LMIs:} \\ \text{Traza}(W) \leq \mu^2, \quad \begin{pmatrix} W & B_{BC,r}^T(\delta)P(\delta) & D_{BC,yr}^T(\delta) \\ P(\delta)B_{BC,r}(\delta) & P(\delta) & 0 \\ D_{BC,yr}(\delta) & 0 & I \end{pmatrix} - \sum_i \delta_i^2 M_{ii} \geq 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v \\ \begin{pmatrix} 0 & -B_{BC,r,i}^T P_i & 0 \\ -P_i B_{BC,r,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + M_{ii}^2 \geq 0 \quad i = 1, \dots, q \\ \begin{pmatrix} -P(\delta) & A_{BC}^T(\delta)P(\delta) & C_{BC,y}^T(\delta) \\ P(\delta)A_{BC}(\delta) & -P(\delta) & 0 \\ C_{BC,y}(\delta) & 0 & -I \end{pmatrix} + \sum_i \delta_i^2 N_{ii} \leq 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v \\ \begin{pmatrix} 0 & A_{BC,i}^T P_i & 0 \\ P_i A_{BC,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + N_{ii} \geq 0 \\ W = W^T, \quad M_{ii} \geq 0, \quad N_{ii} \geq 0 \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (6.3-80)$$

Nota 6.3.7 Es posible obtener condiciones para otros tipos de incertidumbre y/o dependencia de la función de Lyapunov siguiendo las mismas ideas que las utilizadas para la norma ∞ .

¹²Estas se basan en el empleo del gramiano de observabilidad. Análogamente, se pueden obtener LMIs basadas en el gramiano de controlabilidad.

Norma 1

La norma 1 de un sistema representa el valor máximo de la relación entre las normas infinito de la señal de salida y de la señal de entrada (inducida de la norma infinito de señales). Esta norma es útil cuando se presentan perturbaciones persistentes, las cuales dan lugar a variaciones acotadas de la salida y se desea acotar dichas variaciones. Para este tipo de perturbaciones la norma infinito no es válida ya que éstas tienen energía (norma 2) infinita.

Esta norma ha sido aplicada al diseño de controladores en menor medida y más tarde que las anteriores dada su mayor complejidad de cómputo [Dahleh y Boyd 1987a, b; Bu 1997]. No obstante, el principal problema relativo al cómputo de la norma 1 es que no se puede realizar vía LMIs, pues, en general, hay que emplear métodos basados en programación lineal [Dahleh y Boyd 1987a] o aproximaciones basadas en optimización convexa [Bu 1997].

Por esta razón, diversos autores [Abedor *et al.* 1996; Bu 1997] introdujeron una norma que acota superiormente a la 1: la denominada norma estrella (*), que puede ser obtenida mediante LMIs. Para el caso de sistemas discretos la norma * se define como [Bu 1997]:

$$V_\alpha = \inf_{\sigma > 0, \eta > 0} \eta \text{ sujeto a : } \begin{pmatrix} \sigma Q_\alpha^{-1} & \mathbf{0} & C^T \\ \mathbf{0} & (\eta - \sigma)I & D^T \\ C & D & \eta I \end{pmatrix} > 0 \quad (6.3-81)$$

siendo Q_α la solución de la ecuación de Lyapunov:

$$\frac{1}{1 - \alpha} A Q_\alpha A^T - Q_\alpha + \frac{1}{\alpha} B B^T = 0$$

$$\|G(z)\|_* \triangleq \inf_{0 \leq \alpha < 1 - \rho^2(A)} V_\alpha, \quad \rho(\cdot) \text{ representa el radio espectral.} \quad (6.3-82)$$

Además, siempre se cumple la desigualdad:

$$\|G(z)\|_1 \leq \|G(z)\|_*$$

El cálculo de la norma * se basa, pues, en una resolución iterativa de una ecuación de Lyapunov y de una minimización sujeta a una LMI para un valor fijo de α hasta encontrar el valor de V_α mínimo.

Es posible obtener la norma * mediante la minimización de un problema sujeto a BMIs¹³ [Bu 1997; Scherer y Weiland 2000; El Ghaoui y Niculescu 2000]:

$$\|G(z)\|_* = \inf_{P, \alpha, \lambda}$$

¹³También se puede analizar con LMIs si se fija un valor constante para α y se busca de forma iterativa cuál es el valor que hace mínimo a η .

6.3 Diseño robusto: caso general

$$\begin{pmatrix} A^T P A - (1 - \alpha)P & A^T P B \\ B^T P A & B^T P B - \lambda I \end{pmatrix} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} \alpha P & 0 & C^T \\ 0 & (\eta - \lambda)I & D^T \\ C & D & \eta I \end{pmatrix} > 0$$

$$P > 0, \quad \lambda \geq 0, \quad 0 \leq \alpha < 1 - \rho^2(A) \quad (6.3-83)$$

Al igual que para las otras normas, esta condición necesaria y suficiente se convierte en sólo suficiente (conservadora) para sistemas con incertidumbre. Por ejemplo, si se desea obtener una cota superior para la norma * del canal $\bar{\omega}/\bar{y}$ correspondiente al bucle cerrado formado por el modelo incierto del proceso y el controlador-observador GPC, admitiendo incertidumbre LFR para el modelo y empleando una función de Lyapunov con dependencia LFR, se puede utilizar el siguiente problema de minimización sujeto a BMIs que se deduce a partir de (6.3-83):

$$P(\hat{\Delta}) = T(\hat{\Delta})^T Q T(\hat{\Delta}) \quad ; \quad \left(\begin{array}{c|c} A_{BC}(\Delta) & B_{BC,r}(\Delta) \\ \hline C_{BC,y}(\Delta) & D_{BC,yr}(\Delta) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{BC} & B_{BC,r} \\ \hline C_{BC,y} & D_{BC,yr} \end{array} \right) +$$

$$+ \left(\begin{array}{c} B_{BC,\Delta} \\ D_{BC,y\Delta} \end{array} \right) \Delta (I - D_{BC,\Delta} \Delta)^{-1} \left(\begin{array}{c|c} C_{BC,\Delta} & D_{BC,\Delta r} \end{array} \right)$$

$$\eta^* = \min_{Q, V_1, V_2, \lambda, \alpha} \eta$$

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}^T \left(\begin{array}{cc|cc} -(1-\alpha)Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ \hline 0 & & -\lambda I & 0 \\ \hline 0 & & 0 & V_1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} T_A & 0 & T_B & 0 & 0 \\ T_A A_{BC} & T_A B_{BC,r} & 0 & T_B & T_A B_{BC,\Delta} \\ \hline 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ T_C & 0 & T_D & 0 & 0 \\ T_C A_{BC} & T_C B_{BC,r} & 0 & T_D & T_C D_{BC,\Delta} \\ C_{BC,\Delta} & D_{BC,\Delta r} & 0 & 0 & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}^T \left(\begin{array}{c|cc} -\alpha Q & 0 & 0 \\ 0 & -(\eta^2 - \lambda)I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \\ \hline 0 & 0 & V_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} T_A & 0 & T_B & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ C_{BC,y} & D_{BC,yr} & 0 & D_{BC,y\Delta} \\ \hline 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ T_C & 0 & T_D & 0 \\ C_{BC,\Delta} & D_{BC,\Delta r} & 0 & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Delta}^1 \\ I \end{pmatrix}^T V_1 \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}^1 \\ I \end{pmatrix} > 0 \quad \forall \tilde{\Delta}^1 = \text{diag}(\hat{\Delta}, \hat{\Delta}, \Delta) \in \{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_r\}, \quad V_{1,11} < 0$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}^2 \\ I \end{pmatrix}^T V_2 \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}^2 \\ I \end{pmatrix} > 0 \quad \forall \tilde{\Delta}^2 = \text{diag}(\hat{\Delta}, \Delta) \in \{\tilde{\Delta}'_1, \dots, \tilde{\Delta}'_s\}, \quad V_{2,11} < 0 \\ Q = Q^T, \quad \lambda \geq 0, \quad 0 \leq \alpha < \min_{\Delta} (1 - \rho^2(A_{BC}(\Delta))) \end{aligned} \quad (6.3-84)$$

Es posible estimar la desviación existente entre el valor de la norma * y la norma 1 del sistema. Para ello basta tener en cuenta la múltiple desigualdad [Abedor *et al.* 1996]:

$$\|G(z)\|_{\infty} \leq \|G(z)\|_1 \leq \|G(z)\|_* \quad (6.3-85)$$

la cual muestra que el error máximo cometido en la acotación superior es siempre menor o igual que la diferencia entre la norma * y la ∞ . Esta relación es útil en la práctica ya que la norma ∞ puede obtenerse también mediante LMIs. Los autores de [Abedor *et al.* 1996] comentan que, a partir la experiencia adquirida en aplicaciones reales, para muchos sistemas la norma * y la norma infinito están bastante próximas entre sí.

Metodología de diseño con garantía de satisfacción robusta de normas

Como se acaba de analizar, la existencia de una cota superior finita para las normas antes tratadas implica que el proceso es asintóticamente estable. Con esta idea en mente se pueden plantear diversos esquemas de diseño robusto del controlador-observador GPC. Por ejemplo:

- Obtención del controlador-observador GPC que minimiza la norma infinito de un determinado canal entrada(w)/salida(z) $\|G_{z,w}\|_{\infty}$ fijando un determinado modelo incierto para el proceso. Desde el punto de vista del control robusto a este diseño se le suele denominar diseño h_{∞} de un controlador. Con este diseño, además de garantizarse la estabilidad robusta se obtienen los parámetros de diseño para el controlador-observador GPC que proporcionan la mínima norma para dicho canal:

$$\text{Parámetros GPC}^* = \underset{\text{Parámetros GPC}}{\text{argmin}} \|G_{z,w}\|_{\infty} \quad (6.3-86)$$

Se trata de un problema de optimización que puede resolverse mediante algoritmos genéticos, ya que, en general, será no convexo por las razones comentadas en la sección de estabilidad robusta.

Este mismo problema puede plantearse minimizando la norma 2 o 1 de un determinado canal.

- Obtención del controlador-observador GPC que optimiza un problema h_{∞}/h_2 . Este problema supone minimizar la norma infinito del canal entrada(w)/salida(z) y garantizar una determinada norma 2 para otro canal entrada(p)/salida(q), para un

modelo incierto del proceso concreto:

$$\text{Parámetros GPC}^* = \underset{\text{Parámetros GPC}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{G}_{z,w}\|_{\infty} \text{ sujeto a : } \|\mathbf{G}_{q,p}\|_2 \leq \eta \quad (6.3-87)$$

Problemas similares son: h_{∞}/l_1 , h_2/h_{∞} , h_2/l_1 , l_1/h_{∞} y l_1/h_2 . Todos ellos se pueden resolver, también, mediante algoritmos genéticos.

- Otra clase de problemas más complejos son aquellos en los que se pretende minimizar de forma simultánea diferentes tipos de normas asociados a diferentes canales entrada/salida y/o maximizar el tamaño del conjunto de valores para los parámetros inciertos, que se ha de estabilizar. Estos problemas de optimización son multiobjetivo y, casi seguro, no convexos. Por tanto, pueden ser resueltos con algoritmos genéticos multiobjetivo.

EJEMPLO 6.3.1 Este ejemplo está referido al proceso benchmark empleado en [Wie y Bernstein 1992; Kothare et al. 1996] formado por dos masas y un muelle (figura 6.10) cuyo modelo es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K/m_1 & K/m_2 & 0 & 0 \\ K/m_2 & -K/m_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad y = (0 \ 1 \ 0 \ 0) \quad (6.3-88)$$

donde $m_1 = m_2 = 1 \text{ Kg}$ y $K \in [0.5 \ 10] \text{ N/m}$, es decir, hay incertidumbre en la constante elástica del muelle. Se toma como valor nominal de K al valor medio de su intervalo de variación: 5.25.

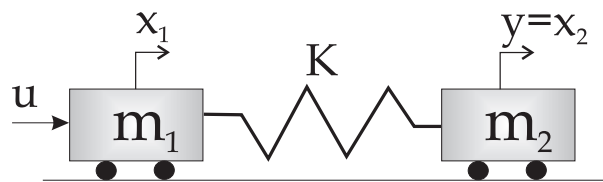


FIGURA 6.10: Sistema mecánico con dos masas acopladas mediante un muelle

La principal dificultad asociada al manejo de la incertidumbre proveniente de sistemas continuos aparece al aplicar la discretización basada en un retenedor de orden cero (usual en control por computador) para obtener el modelo discretizado, ya que no es sencillo obtener la expresión matemática de la incertidumbre resultante en discreto, la cual, además, es más compleja. Este hecho se puede apreciar mejor si se recuerdan las fórmulas que ligan las matrices de estado y de entrada continuas con las discretas tras aplicar esta discretización [Astrom y Wittenmark 1997]:

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_c T}, \quad \mathbf{B}_d = \int_0^T e^{\mathbf{A}_c t} \mathbf{B}_c dt \quad (6.3-89)$$

T es el periodo de muestreo. Estas relaciones muestran, por ejemplo, que una dependencia afín de A_c con respecto a algún parámetro se traduce en A_d en una dependencia exponencial.

En esta tesis y en la literatura analizada la incertidumbre más compleja empleada es la LFR o racional, la cual es menos compleja que la exponencial. Para solventar este problema se puede recurrir al desarrollo en serie de potencias de la exponencial¹⁴:

$$A_d = e^{A_c T} = I + A_c T + \frac{(A_c T)^2}{2!} + \frac{(A_c T)^3}{3!} + \dots \quad (6.3-90)$$

Basta, pues, elegir un periodo de muestreo T lo más pequeño posible que sea asequible con el hardware disponible y la complejidad del controlador, para emplear sólo un número finito de términos del desarrollo que garanticen una cota de error máxima dada entre la exponencial y el desarrollo truncado. Así, si la incertidumbre de A_c es LFR la de A_d tras el truncamiento también.

En [Kothare et al. 1996] se utiliza un periodo de muestreo $T = 0.1s$ y un desarrollo hasta primer orden, es decir, la discretización de Euler o del rectángulo posterior. En esta tesis, se va a utilizar un periodo de muestreo inferior $T = 0.01$ y también un desarrollo de primer orden:

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ -KT/m_1 & KT/m_1 & 1 & 0 \\ KT/m_2 & -KT/m_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T/m_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_d = (0 \ 1 \ 0 \ 0) \quad (6.3-91)$$

Para este caso se fija una cota máxima de error en norma de 0.001 entre las matrices exactas y las aproximadas. Para el valor nominal de K la norma de la diferencia entre las matrices de estado y de entrada discretas obtenidas por el método exacto y el aproximado de primer orden para $T = 0.01$ s es:

$$\begin{aligned} \|e^{A_c T} - (I + A_c T)\|_2 &= 5.3336 \cdot 10^{-4} \\ \left\| \int_0^T e^{A_c t} B_c dt - T B_c \right\|_2 &= 5.0013 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \quad (6.3-92)$$

lo cual justifica la validez de la aproximación. Como el valor de K varía en un intervalo hay que analizar si esta aproximación sigue siendo válida en todos los valores de dicho intervalo. En concreto, se observa que la mayor desviación se produce para $K = 10$, proporcionando una norma de 0.001 para la discrepancia entre las matrices de estado, y una norma de $5.0051 \cdot 10^{-5}$ para la discrepancia entre las matrices de entrada, las cuales siguen siendo válidas de acuerdo con la cota máxima fijada.

¹⁴También puede emplearse la aproximación bilineal de la exponencial.

6.3 Diseño robusto: caso general

Para el caso de emplear la aproximación de primer orden, si la incertidumbre de A_c es afín, como ocurre en este caso, la de A_d también será afín, tal y como se aprecia en (6.3-91), lo cual simplifica la incertidumbre del modelo discreto.

Una vez presentado el modelo del proceso a controlar, el siguiente paso es plantear las condiciones que debe de cumplir el GPC a diseñar:

- Maximizar el rango de variabilidad de K alrededor del valor nominal que garantice la estabilidad del bucle cerrado.
- Minimizar la norma infinito entre la referencia y la salida controlada. Esta condición garantiza que se minimiza el efecto de los cambios de referencia en la salida.

Estas condiciones son, en general, contrapuestas por lo que se trata de un problema de optimización multiobjetivo no convexo, que será resuelto mediante algoritmos genéticos multiobjetivo.

El algoritmo genético multiobjetivo realizó esta optimización con las siguientes restricciones:

- $1 \leq N_2 \leq 256$.
- $1 \leq N_u \leq 8$
- Polos observador $\in [0, 0.99]$.
- Matrices de ponderación de los errores: $Q_i = 1$.
- Matrices de ponderación de los incrementos de las acciones de control: $R_i = 1$, $0 \leq l \leq 100$
- $K(\delta) = 5.25 + 4.75 \cdot \delta$, $|\delta| \leq 1$.

En la figura 6.11 se ha representado el frente de Pareto óptimo correspondiente al problema de optimización multiobjetivo anterior obtenido tras 300 generaciones con el algoritmo genético. En dicha figura se aprecia que para valores bajos de δ la norma infinito es prácticamente 1, mientras que el valor máximo de δ para el cual el bucle cerrado es asintóticamente estable es de 0.916 con una norma infinito de 10.9001. Ambas situaciones dan lugar a los controladores-observadores GPC límite: el de mínima norma infinito y el de máximo rango de estabilidad.

De esta figura es posible extraer los controladores-observadores GPC que cumplan:

- Controlador-observador GPC con mínima norma infinito fijando una determinada incertidumbre. Basta con entrar en dicha figura con el valor de δ prefijado y prolongar hasta que corte al frente de Pareto. El punto intersección proporciona la norma

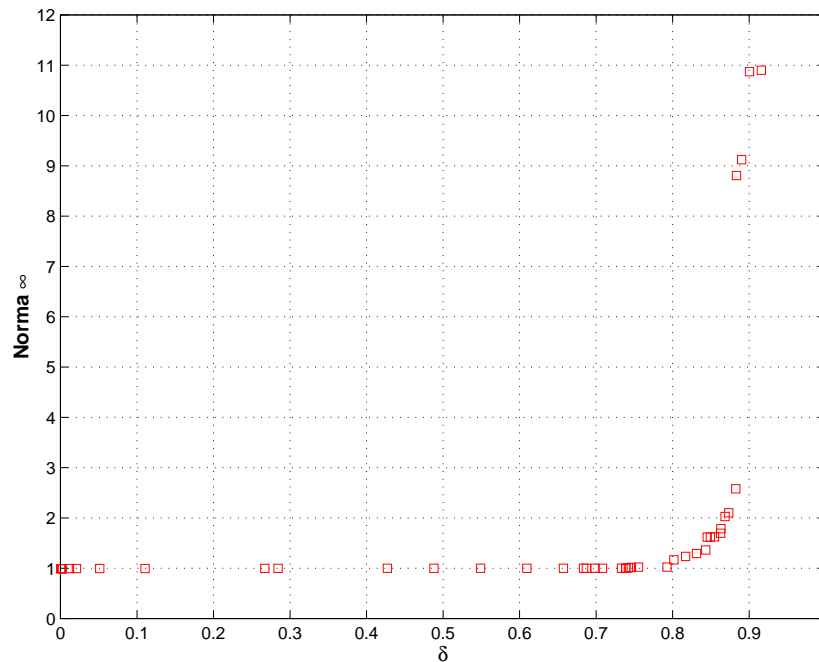


FIGURA 6.11: Frente de Pareto óptimo para el problema de optimización multiobjetivo correspondiente al sistema mecánico formado por dos masas y un muelle.

infinito mínima y los parámetros correspondientes al GPC, ya que cada punto del frente de Pareto corresponde a un GPC distinto.

- Controlador-observador GPC con mayor rango para δ que garantice una máxima norma infinito. El procedimiento es análogo al del caso anterior, pero ahora entrando con la norma infinito máxima indicada hasta cortar al frente de Pareto, obteniendo así el máximo valor para δ y los parámetros del controlador-observador.

Por ejemplo, si se plantea obtener el controlador-observador GPC que garantice que la norma infinito sea menor o igual que 1.1, del frente óptimo de Pareto se deduce que $\delta_{\max} = 0.8017$ y que el GPC posee los siguientes parámetros:

- $N_u = 3, N_2 = 164, l = 0.0046$.
- Polos del observador: 0.2049, 0.2800, 0.0530, 0.0368 y 0.3339.

el rango de δ obtenido implica que $1.4420 \leq K \leq 9.0580$.

En la figura 6.12 se han representado las respuestas del bucle cerrado formado por el modelo continuo del sistema mecánico y el GPC elegido, para los casos $\delta = 0, \pm 0.4, \pm 0.8$. Todos los casos presentan una respuesta simular salvo el correspondiente a $\delta = -0.8$ que posee un peor comportamiento. Tras una serie de simulaciones se ha comprobado que este bucle cerrado es estable, aproximadamente, para $-0.83 \leq \delta \leq 0.9$, es decir, $1.3075 \leq K \leq 9.525$, aunque en este rango no hay garantía de acotación de la norma

6.3 Diseño robusto: caso general

infinito por 1.1. En la figura 6.13 se han representado las respuestas para $\delta = 0, 0.9$ y -0.83 , comprobándose que la correspondiente a $\delta = -0.83$ o $K = 1.3075$ tiene un comportamiento dinámico mucho peor que las otras dos.

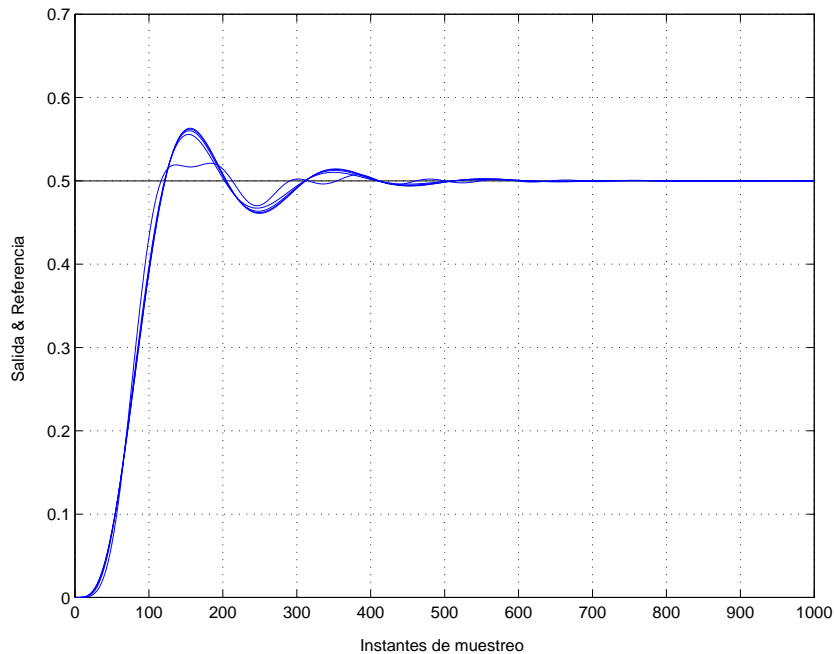


FIGURA 6.12: Respuestas del bucle cerrado formado por el modelo continuo del sistema mecánico y el GPC elegido, para los casos $\delta = 0, \pm 0.4, \pm 0.8$.

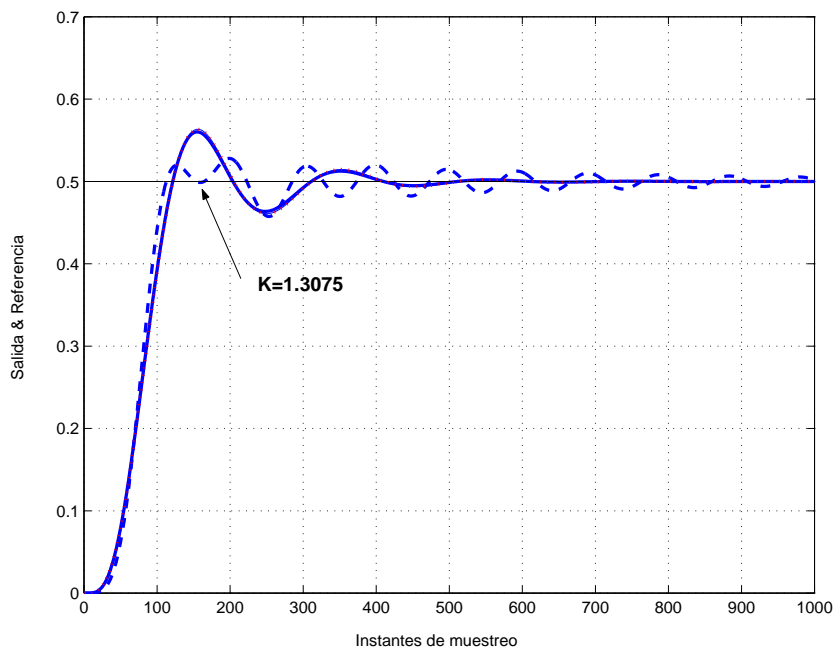


FIGURA 6.13: Respuestas del bucle cerrado formado por el modelo continuo del sistema mecánico y el GPC elegido, para los casos $\delta = 0, 0.9$ y -0.83 .

6.3.2.5. Condiciones de asignación de los polos en bucle cerrado

Hay que tener presente que la condición de estabilidad robusta del bucle cerrado:

$$A_{BC}^T(\Delta)P(\Delta)A_{BC}(\Delta) - P(\Delta) < 0 \quad \forall \Delta \quad (6.3-93)$$

es equivalente a comprobar si todos los polos del bucle cerrado están contenidos en el disco unidad. Desde este punto de vista, sería interesante poder verificar si dichos polos están contenidos en otros subconjuntos del plano complejo. Esta idea está íntimamente relacionada con la asignación de especificaciones para el bucle cerrado: tiempo de establecimiento, sobreoscilación, etc., las cuales se traducen en la ubicación de los polos del bucle cerrado en determinadas regiones del plano complejo [Blasco *et al.* 2000].

Uno de los primeros trabajos que tratan el diseño de controladores garantizado la asignación de los polos del bucle en una determinada región convexa empleando LMIs fue [Chiali y Gahinet 1996]. Este trabajo se desarrolla para sistemas continuos sin incertidumbre, y establece un resultado basado en LMIs y funciones de Lyapunov que permite determinar si el bucle cerrado posee sus polos en una determinada región convexa del plano complejo, la cual viene definida en términos de LMIs.

Para el caso continuo se pueden establecer las siguiente regiones de interés [Scherer y Weiland 2000]:

- Garantía de tiempo de establecimiento máximo:

$$\operatorname{Re}(s) < -\alpha, \alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad s + \bar{s} + 2\alpha < 0 \quad (6.3-94)$$

\bar{s} es el conjugado de s .

- Garantía de máxima frecuencia de oscilaciones β :

$$|\operatorname{Im}(s)| < \beta, \beta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2\beta & s - \bar{s} \\ \bar{s} - s & -2\beta \end{pmatrix} < 0 \quad (6.3-95)$$

- Garantía de sobreoscilación máxima o mínimo coeficiente de amortiguamiento ξ :

$$\operatorname{arctg} \left(-\frac{|\operatorname{Im}(s)|}{\operatorname{Re}(s)} \right) < \theta, \xi = \cos(\theta), 0 \leq \xi < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} (s + \bar{s}) \operatorname{sen} \theta & (s - \bar{s}) \operatorname{cos} \theta \\ (\bar{s} - s) \operatorname{cos} \theta & (s + \bar{s}) \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix} < 0 \quad (6.3-96)$$

Todas las condiciones de la derecha son LMIs en las variables s y \bar{s} .

Las condiciones anteriores pueden ser trasladadas al caso discreto [Astrom y Wittenmark 1997] mediante la ecuación que relaciona el plano s y el z , $z = e^{sT}$, siendo T el periodo de muestreo:

6.3 Diseño robusto: caso general

- Garantía de tiempo de establecimiento máximo:

$$|z| < e^{-\alpha T} \Leftrightarrow z\bar{z} - e^{-2\alpha T} < 0 \quad (6.3-97)$$

- Garantía de máxima frecuencia de oscilaciones, se basa en la condición de pertenencia al sector:

$$\arctg\left(\frac{|\operatorname{Im}(z)|}{\operatorname{Re}(z)}\right) < \beta T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -(z + \bar{z}) \operatorname{sen}(\beta T) & (z - \bar{z}) \operatorname{cos}(\beta T) \\ (\bar{z} - z) \operatorname{cos}(\beta T) & -(z + \bar{z}) \operatorname{sen}(\beta T) \end{pmatrix} < 0 \quad (6.3-98)$$

- Garantía de sobreoscilación máxima. Esta condición da lugar a una región no convexa en el plano z y, además, compleja de expresar matemáticamente. Su forma gráfica se muestra en la figura 6.14.

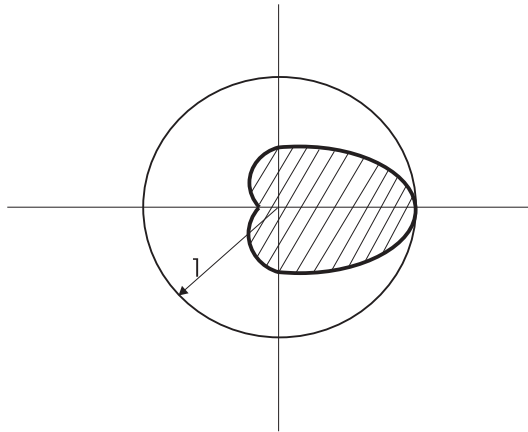


FIGURA 6.14: Región en el plano z correspondiente a los casos en que la sobreoscilación es menor igual que un determinado valor.

La condición de sobreoscilación máxima, a pesar de su compleja descripción, no complica en exceso el planteamiento basado en LMIs ya que, en general, suele venir acompañada de otras. Por ejemplo, si se proponen las siguientes condiciones:

- Tiempo de establecimiento máximo: $\operatorname{Re}(s) < -\alpha$.
- Máxima frecuencia de oscilación: $|\operatorname{Im}(s)| < \beta$.
- Máxima sobreoscilación: $\arctg\left(-\frac{|\operatorname{Im}(z)|}{\operatorname{Re}(z)}\right) < \theta$

en la figura 6.15 se muestra la región de especificaciones correspondiente al caso continuo y su equivalente en discreto. Como se observa, la región resultante en el plano z es convexa y, por tanto, puede ser expresada con arbitraria precisión [Chiali y Gahinet 1996] mediante conjuntos convexos definidos mediante LMIs.

Un vez descrita la región deseada mediante LMIs es posible emplear la condición de pertenencia de los polos del bucle cerrado a dicha región. En [Peaucelle *et al.* 2000] se

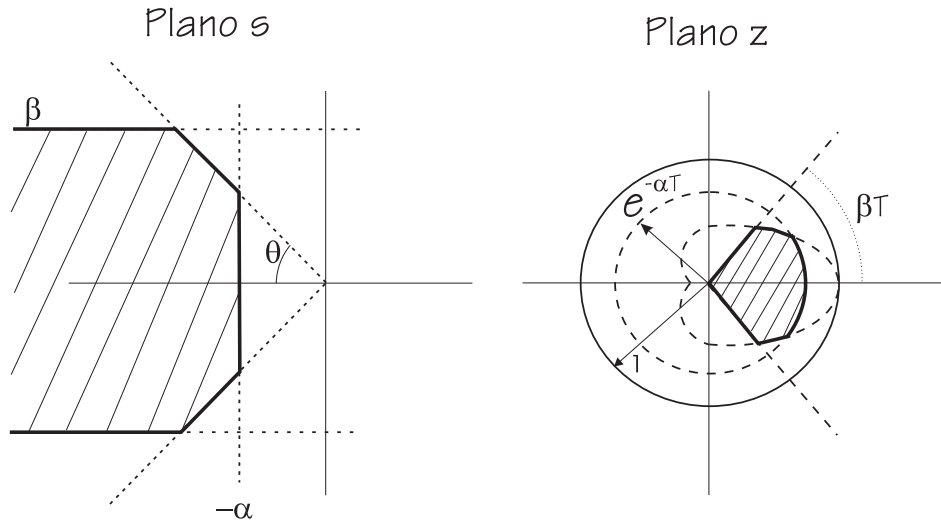


FIGURA 6.15: Regiones en los planos s y z correspondientes a las especificaciones indicadas.

desarrollan condiciones de pertenencia de los polos en bucle cerrado a determinadas regiones del plano complejo para sistemas discretos, partiendo de las ideas de [Chiali y Gahinet 1996]. En primer lugar se presentan las siguientes definiciones:

Definición 6.3.1 (Región \mathcal{D}_R) Sea $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$ una matriz simétrica particionada como sigue:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{12}^T & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{R}_{11} = \mathbf{R}_{11}^T \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad \mathbf{R}_{22} = \mathbf{R}_{22}^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

Se define la región \mathcal{D}_R del plano complejo como:

$$\mathcal{D}_R \triangleq \{z \in \mathbb{C} : \mathbf{R}_{11} + \mathbf{R}_{12}z + \mathbf{R}_{12}^T \bar{z} + \mathbf{R}_{22}z\bar{z} < 0\} \quad (6.3-99)$$

Como se aprecia, las regiones \mathcal{D}_R vienen definidas mediante una BMI en las variables z y \bar{z} , es decir, un caso más general que aquellas que vienen definidas con una LMI.

Definición 6.3.2 (\mathcal{D}_R estabilidad) Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es \mathcal{D}_R estable si y sólo si todos sus valores propios están contenidos en la región \mathcal{D}_R .

Y finalmente, el resultado que permite garantizar la pertenencia de los polos a una región \mathcal{D}_R :

TEOREMA 6.3.4 Una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es \mathcal{D}_R estable si y sólo si existe una matriz definida positiva $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que:

$$\mathbf{R}_{11} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{R}_{12} \otimes (\mathbf{P}\mathbf{A}) + \mathbf{R}_{12}^T \otimes (\mathbf{A}^T \mathbf{P}) + \mathbf{R}_{22} \otimes (\mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{A}) < 0 \quad (6.3-100)$$

donde \otimes representa el producto de Kronecker de dos matrices.

El producto de Kronecker de dos matrices $X \in \mathbb{R}^{r \times r}$ y $Y \in \mathbb{R}^{s \times s}$ se define como sigue:

$$X \otimes Y \triangleq [X_{i,j} Y]_{1 \leq i, j \leq r} \quad (6.3-101)$$

el cual da lugar a una nueva matriz de dimensiones $r \cdot s \times r \cdot s$.

Por ejemplo, para el caso de fijación de un de tiempo de establecimiento máximo la condición del **teorema** 6.3.4 aplicada sobre la región \mathcal{D}_R (6.3-97) produce:

$$R = \begin{bmatrix} -e^{-2\alpha T} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad -e^{-2\alpha T} P + A^T P A < 0 \quad (6.3-102)$$

la cual coincide con la condición de estabilidad si $\alpha = 0$.

Finalmente, estas ideas se pueden extender para el caso del bucle cerrado incierto formado por el modelo incierto del proceso y el controlador-observador GPC:

Definición 6.3.3 La matriz incierta $A_{BC}(\Delta)$ es \mathcal{D}_R estable si y sólo si $\forall \Delta$ la matriz $A_{BC}(\Delta)$ es \mathcal{D}_R estable.

A partir de esta definición se deduce que la condición del **teorema** 6.3.4 es sólo una condición suficiente para sistemas con incertidumbre, ya que utiliza una matriz P constante. En general, esta condición puede ser mejorada introduciendo dependencia en la matriz P con respecto de la incertidumbre, tal y como ya se ha analizado en los puntos anteriores, proporcionando así condiciones suficientes menos conservadoras.

Siguiendo las mismas ideas del apartado relativo a las normas, es posible proponer metodologías de diseño robusto para el controlador-observador GPC que garanticen el cumplimiento de determinadas especificaciones en el dominio del tiempo, por ejemplo:

- Fijar unas determinadas especificaciones en el dominio del tiempo, o lo que es lo mismo, una determinada región en el plano complejo donde han de ubicarse los polos del bucle, y buscar los parámetros del controlador-observador (horizontes, matrices de peso y polos del observador) tal que se consiga la inclusión de todos los polos en dicha región, maximizando el tamaño del conjunto de posibles valores para los parámetros inciertos del modelo.
- Minimizar la norma h_∞ de un determinado canal entrada/salida bajo la restricción de que todos los polos del bucle cerrado estén localizados en una región determinada del plano complejo (especificaciones) y para un determinado modelo incierto del proceso.

A partir de estas ideas pueden proponerse muchas otras combinaciones para plantear otros problemas de interés.

EJEMPLO 6.3.2 En este ejemplo se va a diseñar un controlador-observador GPC que garantice para el proceso formado por dos reactores químicos en serie [Marlin 1995], cuyo modelo alrededor del punto de funcionamiento (20 moles/m³, 50% apertura) es:

$$G(s) = \frac{K_p}{(\tau s + 1)^2}, \quad K_p = 0.1 \frac{\text{moles}}{\text{m}^3 \% \text{apertura}}, \quad \tau = 0.5 \text{ min} \quad (6.3-103)$$

las especificaciones dinámicas siguientes:

$$t_e \leq 1.5 \text{ min} \quad \delta \leq 10\% \quad \omega_p \leq 5 \text{ rad/min} \quad (6.3-104)$$

teniendo en cuenta que la ganancia estática del proceso tiene una incertidumbre alrededor de su valor nominal $K_p = 0.1 + \delta_{K_p}$, con $|\delta_{K_p}| \leq \delta_{K_p}^{\max}$ que habrá que maximizar.

En primer lugar se obtiene un modelo discretizado del proceso aplicando ZOH con un periodo de muestreo de $T = 0.05 \text{ min}$:

$$G_d(z) = \frac{10^{-2} \cdot K_p(0.4679z + 0.4377)}{z^2 - 1.8097z + 0.8187} \quad (6.3-105)$$

Como se aprecia, al existir sólo incertidumbre sobre la ganancia del proceso el modelo discretizado con ZOH depende afínmente de la incertidumbre de la ganancia, al igual que el modelo continuo. Consecuentemente, para este ejemplo no es necesario plantear la aproximación empleada en el ejemplo 6.3.1.

Las especificaciones dinámicas al traducirse al plano z dan lugar a la región que se muestra en la figura 6.16. Los puntos (a) = $0.8067 + 0.206j$, (b) = $0.8464 + 0.1716j$ y (c) = $0.8606 + 0.1585j$ constituyen la aproximación que se realiza para la curva límite de la máxima sobreoscilación permitida, mediante las dos rectas que unen dichos puntos. Esta aproximación conservadora puede mejorarse tomando más puntos de la curva, aunque, en este caso, la aproximación es bastante buena.

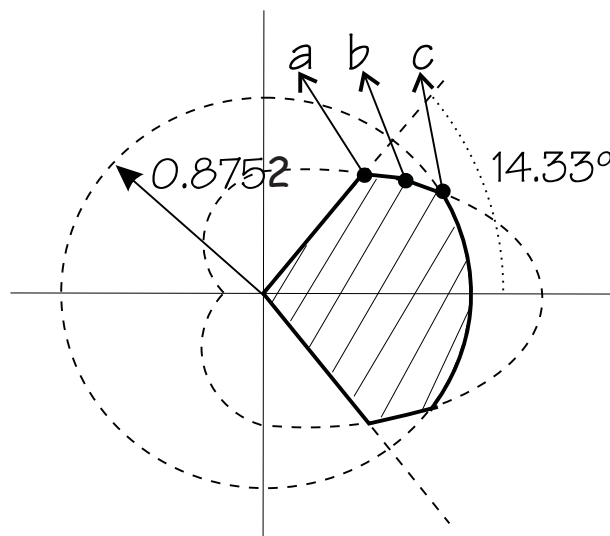


FIGURA 6.16: Región de especificaciones para el ejemplo 6.3.2

La expresión matemática de esta región \mathcal{D}_R viene dada por las desigualdades:

- Condición de tiempo de establecimiento máximo:

$$z\bar{z} - e^{-2*4/1.5*T} < 0 \quad (6.3-106)$$

- Condición de máxima frecuencia de oscilaciones:

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(14.33^\circ)(z + \bar{z}) & \cos(14.33^\circ)(z - \bar{z}) \\ \cos(14.33^\circ)(\bar{z} - z) & -\operatorname{sen}(14.33^\circ)(z + \bar{z}) \end{pmatrix} < 0 \quad (6.3-107)$$

- Condición de máxima sobreoscilación:

$$\begin{pmatrix} 0.4332(z + \bar{z}) - 0.9050 & 0.5(z - \bar{z}) \\ 0.5(\bar{z} - z) & 0.4332(z + \bar{z}) - 0.9050 \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} 0.4613(z + \bar{z}) - 0.9524 & 0.5(z - \bar{z}) \\ 0.5(\bar{z} - z) & 0.4613(z + \bar{z}) - 0.9524 \end{pmatrix} < 0 \quad (6.3-108)$$

la primera desigualdad corresponde a la recta que une los puntos (a) y (b) (y su simétrica respecto del eje real) y la segunda a la recta que une a los puntos (b) y (c).

Estas expresiones se transforman en condiciones suficientes de verificación de especificaciones robustas basadas en LMIs aplicando el **teorema 6.3.4**. En este ejemplo se ha optado por emplear una función de Lyapunov no dependiente de la incertidumbre.

El objetivo es, pues, diseñar un controlador-observador GPC tal que el bucle cerrado verifique las especificaciones dinámicas propuestas (LMIs correspondientes a las especificaciones (6.3-106), (6.3-107) y (6.3.2)) y que maximice el valor de $\delta_{K_p}^{max}$. Este problema de optimización va a ser resuelto aplicando algoritmos genéticos, con las siguientes restricciones:

- $1 \leq N_2 \leq 256$.
- $1 \leq N_u \leq 8$
- Polos observador $\in [0, 0.8752]$.
- Matrices de ponderación de los errores: $Q_i = 1$.
- Matrices de ponderación de los incrementos de las acciones de control: $R_i = l$, $0 \leq l \leq 0.1$

La razón que justifica que los polos del observador no puedan ser mayores de 0.8752 es que el tiempo de establecimiento máximo admisible obliga a que los polos tengan módulo inferior a $e^{-4/1.5*0.05} = 0.8752$.

El algoritmo genético tras 500 generaciones proporcionó la siguiente solución:

- $N_2 = 162$, $N_u = 2$, $l = 0.0014$.

- Polos del observador: 0.0109, 0.1682 y 0.8497.
- $\delta_{K_p}^{max} = 0.0202$.

En la figura 6.17 se han representado las respuestas del bucle cerrado formado por el proceso continuo y el controlador-observador GPC obtenido, para el valor nominal de $K_p = 0.1$ y los valores extremos correspondientes a $\delta_{K_p}^{max}$: $K_p = 0.0798$ y $K_p = 0.1202$. Como se aprecia, el caso más desfavorable es el que corresponde a $K_p = 0.0798$, ya que su tiempo de establecimiento, aproximadamente, es de 30 muestras, es decir, 1.5 min, el máximo tiempo de establecimiento admisible.

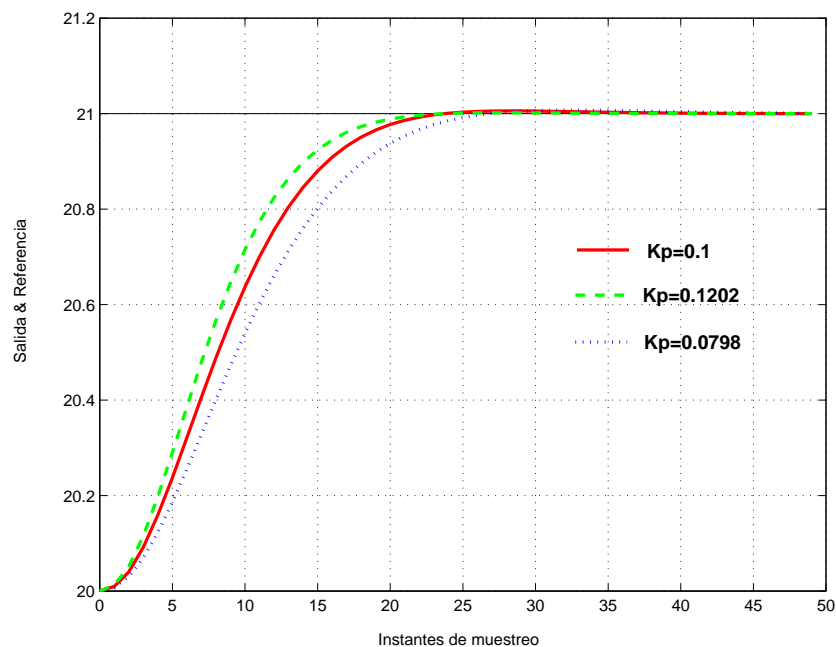


FIGURA 6.17: Respuestas del bucle cerrado formado por el proceso continuo y el controlador-observador GPC obtenido, para $K_p = 0.1$, $K_p = 0.0798$ y $K_p = 0.1202$.

Por otro lado, todas las respuestas presentan una sobreoscilación prácticamente nula y una frecuencia para las oscilaciones mucho menor que 5 rad/min. Esto muestra, que la condición que ha limitado el máximo valor de $\delta_{K_p}^{max}$ es la correspondiente al tiempo de establecimiento.

6.3.2.6. Inclusión de restricciones

Una de las ventajas que presentan las LMIs frente al control \mathcal{H}_∞ es la posibilidad de incluir condiciones (suficientes) que aseguren que el bucle cerrado verifique restricciones tanto sobre las salidas como sobre las acciones de control, pero manteniendo en todo momento la linealidad del bucle.

La idea consiste en obtener el elipsoide de mayor tamaño contenido en el espacio de las variables de estado que garantice que en bucle cerrado [Kothare *et al.* 1996; Boyd *et al.* 1994]:

1. a partir de cualquier estado inicial perteneciente a dicho elipsoide la trayectoria descrita por el bucle cerrado esté siempre contenida en él.
2. Para cualquier estado de dicho elipsoide se cumplan las restricciones sobre las salidas y las acciones de control.

A este tipo de elipsoides se les denomina invariantes o inescapables.

Para el análisis que se va a realizar se recupera la representación interna del bucle cerrado formado por el modelo incierto del proceso y el controlador-observador GPC (6.3-2) suponiendo que no se presentan perturbaciones ni ruidos de medida:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_{BC}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_{BC,r}\bar{\omega}(k), & \bar{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}_{BC,y}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{BC,yr}\bar{\omega}(k) \\ \bar{\mathbf{u}}(k) &= \mathbf{C}_{BC,u}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{BC,ur}\bar{\omega}(k) \end{aligned} \quad (6.3-109)$$

Se supondrá que se han impuesto las siguientes restricciones¹⁵:

$$y_j^{\min} \leq y_j(k) \leq y_j^{\max} \quad j = 1, \dots, r, \quad u_j^{\min} \leq u_j(k) \leq u_j^{\max} \quad j = 1, \dots, m \quad (6.3-110)$$

Caso de referencias constantes y ausencia de perturbaciones

En un primer caso se va a suponer que la referencia es constante: $\bar{\omega}(k) = \bar{\omega}_0$. Con esta hipótesis, suponiendo que no hay incertidumbre en el modelo del proceso y que el bucle cerrado es asintóticamente estable, éste tenderá al punto de equilibrio correspondiente a $\bar{\mathbf{y}}(k) = \bar{\omega}_0$ ($\mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{x}}_0$ y $\bar{\mathbf{u}}(k) = \bar{\mathbf{u}}_0$), siendo posible introducir el siguiente cambio de variables:

$$\mathbf{x}'(k) = \mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{y}'(k) = \bar{\mathbf{y}}(k) - \bar{\omega}_0, \quad \mathbf{u}'(k) = \bar{\mathbf{u}}(k) - \bar{\mathbf{u}}_0$$

dando lugar a la siguiente representación para el bucle cerrado:

$$\mathbf{x}'(k) = \mathbf{A}_{BC}\mathbf{x}'(k), \quad \mathbf{y}'(k) = \mathbf{C}_{BC,y}\mathbf{x}'(k), \quad \mathbf{u}'(k) = \mathbf{C}_{BC,u}\mathbf{x}'(k) \quad (6.3-111)$$

y a las nuevas restricciones:

$$y_j^{\min'} = y_j^{\min} - \omega_{0,j}, \quad y_j^{\max'} = y_j^{\max} - \omega_{0,j}, \quad u_j^{\min'} = u_j^{\min} - u_{0,j}, \quad u_j^{\max'} = u_j^{\max} - u_{0,j} \quad (6.3-112)$$

¹⁵Si aparecen restricciones sobre los incrementos de las acciones de control basta con considerar un proceso aumentado que contenga por estados a los originales más el vector de acciones de control anterior

El método que se va a aplicar sólo es válido cuando las restricciones son simétricas, es decir, $y_j^{max'} = -y_j^{min'}$. Como esta condición, en general, no se tiene porqué verificar, se va a realizar un nuevo cambio de variables para lograrlo:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_j &\triangleq \frac{y_j^{max'} + y_j^{min'}}{2}, & dy_j &\triangleq \frac{y_j^{max'} - y_j^{min'}}{2}, & \tilde{\mathbf{y}} &= (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_r)^T, & \mathbf{dy} &= (dy_1, \dots, dy_r)^T \\ \tilde{u}_j &\triangleq \frac{u_j^{max'} + u_j^{min'}}{2}, & du_j &\triangleq \frac{u_j^{max'} - u_j^{min'}}{2}, & \tilde{\mathbf{u}} &= (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m)^T, & \mathbf{du} &= (du_1, \dots, du_m)^T \\ \mathbf{y}^*(k) &\triangleq \mathbf{y}'(k) - \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{C}_{BC,y}\mathbf{x}'(k) - \tilde{\mathbf{y}}, & \mathbf{u}^*(k) &\triangleq \mathbf{u}'(k) - \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{C}_{BC,u}\mathbf{x}'(k) - \tilde{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (6.3-113)$$

Una vez presentada la formulación, el siguiente paso va a consistir en deducir la condición que va a permitir obtener un elipsoide inescapable [Abedor *et al.* 1996; Boyd *et al.* 1994]. El elipsoide \mathcal{E} que contiene al origen (punto de equilibrio):

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{x}'(k) \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}'(k))^T \mathbf{P}\mathbf{x}'(k) + 2(\mathbf{x}'(k))^T \mathbf{b} - 1 \leq 0\} \quad (6.3-114)$$

es inescapable para el sistema:

$$\mathbf{x}'(k+1) = \mathbf{A}_{BC}\mathbf{x}'(k)$$

si cumple que:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{x}'(k+1))^T \mathbf{P}\mathbf{x}'(k+1) + 2(\mathbf{x}'(k+1))^T \mathbf{b} - 1) - ((\mathbf{x}'(k))^T \mathbf{P}\mathbf{x}'(k) + 2(\mathbf{x}'(k))^T \mathbf{b} - 1) &< 0 \\ \forall \mathbf{x}'(k) : (\mathbf{x}'(k))^T \mathbf{P}\mathbf{x}'(k) + 2(\mathbf{x}'(k))^T \mathbf{b} - 1 &> 0 \end{aligned} \quad (6.3-115)$$

es decir, que la función de Lyapunov basada en dicho elipsoide presente un incremento negativo en los puntos exteriores a dicho elipsoide. Esta condición implica que si se está dentro del elipsoide es imposible salir de él.

Antes de continuar es necesario presentar la técnica conocida como *S-procedure* [Boyd *et al.* 1994]:

LEMA 6.3.6 (*S-procedure*) Sean F_i $i = 0, \dots, q$ funciones cuadráticas de la variable $\zeta \in \mathbb{R}^n$:

$$F_i(\zeta) = \zeta^T \mathbf{T}_i \zeta + 2\mathbf{u}_i^T \zeta + v_i, \quad i = 0, \dots, q$$

Entonces, $F_0 \geq 0$ para todo ζ tal que $F_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$ si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_q \geq 0$ tales que para todo ζ :

$$F_0(\zeta) - \sum_{i=1}^q \lambda_i F_i(\zeta) \geq 0 \quad (6.3-116)$$

Para el caso $q = 1$ esta condición es además necesaria.

Volviendo a la condición del elipsoide inescapable (6.3-115) y aplicando sobre ella *S-procedure* se deduce que es equivalente a la existencia de $\lambda \geq 0$ tal que:

$$(\mathbf{x}'(k+1))^T \mathbf{P}\mathbf{x}'(k+1) + 2(\mathbf{x}'(k+1))^T \mathbf{b} - (\mathbf{x}'(k))^T \mathbf{P}\mathbf{x}'(k) - 2(\mathbf{x}'(k))^T \mathbf{b} +$$

6.3 Diseño robusto: caso general

$$+\lambda ((\mathbf{x}'(k))^T \mathbf{P} \mathbf{x}'(k) + 2(\mathbf{x}'(k))^T \mathbf{b} - 1) < 0 \quad \forall \mathbf{x}'(k) \quad (6.3-117)$$

Utilizando la dinámica del bucle cerrado y simplificando:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}'(k))^T (\mathbf{A}_{BC}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_{BC} - (1 - \lambda) \mathbf{P}) \mathbf{x}'(k) + (\mathbf{x}'(k))^T (\mathbf{A}_{BC}^T \mathbf{b} - \mathbf{b}(1 - \lambda)) + (\mathbf{b}^T \mathbf{A}_{BC} - \mathbf{b}^T (1 - \lambda)) \mathbf{x}'(k) - \lambda < 0 \\ & \left((\mathbf{x}'(k))^T \quad 1 \right) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{BC}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_{BC} - (1 - \lambda) \mathbf{P} & \mathbf{A}_{BC}^T \mathbf{b} - \mathbf{b}(1 - \lambda) \\ \mathbf{b}^T \mathbf{A}_{BC} - \mathbf{b}^T (1 - \lambda) & -\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}'(k) \\ 1 \end{pmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (6.3-118)$$

esta condición se verificará si se cumple la siguiente condición suficiente:

$$\lambda \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{BC}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_{BC} - (1 - \lambda) \mathbf{P} & \mathbf{A}_{BC}^T \mathbf{b} - \mathbf{b}(1 - \lambda) \\ \mathbf{b}^T \mathbf{A}_{BC} - \mathbf{b}^T (1 - \lambda) & -\lambda \end{bmatrix} < 0 \quad (6.3-119)$$

En el apéndice F se justifica que esta condición es además necesaria.

El siguiente paso es deducir la condición que garantiza la satisfacción de las restricciones en todos los puntos del elipsoide, en concreto, se va a desarrollar para una componente cualquiera del vector de salidas. La condición que garantiza la verificación de las restricciones de la componente j del vector de salidas, se basa en imponer que su valor máximo dentro del elipsoide nunca supera el valor de las restricciones simétricas:

$$\max_{\mathbf{x}'(k) \in \mathcal{E}} |y_j^*(k)|^2 = \max_{\mathbf{x}'(k) \in \mathcal{E}} (\mathbf{C}_{BC,y,j} \mathbf{x}'(k) - \tilde{y}_j)^T (\mathbf{C}_{BC,y,j} \mathbf{x}'(k) - \tilde{y}_j) \leq dy_j^2 \quad (6.3-120)$$

Si vuelve a aplicarse la técnica del *S-procedure* se obtiene la siguiente condición equivalente:

$$(\mathbf{C}_{BC,y,j} \mathbf{x}'(k) - \tilde{y}_j)^T (\mathbf{C}_{BC,y,j} \mathbf{x}'(k) - \tilde{y}_j) - \sigma_j ((\mathbf{x}'(k))^T \mathbf{P} \mathbf{x}'(k) + 2(\mathbf{x}'(k))^T \mathbf{b} - 1) \leq dy_j^2, \quad \sigma_j \geq 0 \quad (6.3-121)$$

que tras ciertas operaciones da lugar a:

$$\left((\mathbf{x}'(k))^T \quad 1 \right) \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{BC,y,j}^T \mathbf{C}_{BC,y,j} - \sigma_j \mathbf{P} & -\mathbf{C}_{BC,y,j}^T \tilde{y}_j - \sigma_j \mathbf{b} \\ -\tilde{y}_j \mathbf{C}_{BC,y,j} - \mathbf{b}^T \sigma_j & \tilde{y}_j^2 - dy_j^2 + \sigma_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}'(k) \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \quad (6.3-122)$$

Esta condición se cumple si se da la condición suficiente:

$$\sigma_j \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{BC,y,j}^T \mathbf{C}_{BC,y,j} - \sigma_j \mathbf{P} & -\mathbf{C}_{BC,y,j}^T \tilde{y}_j - \sigma_j \mathbf{b} \\ -\tilde{y}_j \mathbf{C}_{BC,y,j} - \mathbf{b}^T \sigma_j & \tilde{y}_j^2 - dy_j^2 + \sigma_j \end{bmatrix} \leq 0 \quad (6.3-123)$$

Esta expresión habrá de aplicarse a todas las componentes del vector de salidas y del vector de acciones de control. Además, en el apéndice F se justifica que la condición de verificación de las restricciones es además necesaria.

Para obtener el elipsoide de mayor tamaño que cumple la condición de ser inescapable (6.3-119) y todas las condiciones de verificaciones de restricciones (6.3-123), existen

varias posibilidades [Boyd *et al.* 1994]. La que suele dar mejores resultados es la basada en obtener el elipsoide de mayor volumen¹⁶. El volumen del elipsoide \mathcal{E} es proporcional a $\det(\mathbf{P}^{-1})$, por tanto, se debería de resolver un problema sujeto a las condiciones anteriores y que maximizase dicho volumen. Sin embargo, el volumen del elipsoide no es un función convexa de \mathbf{P} ya que la función determinante no lo es. Por ello, diversos autores [Boyd *et al.* 1994; Wu *et al.* 1996; El Ghaoui y Niculescu 2000] formularon este problema de maximización de un determinante como un problema de minimización convexo denominado *maxdet*:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar : } -\log \det \mathbf{G}(\mathbf{x}) \\ & \text{sujeto a las LMIs: } \mathbf{G}(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0 \end{aligned} \quad (6.3-124)$$

Este problema se ha convertido en convexo debido a que se aplica la función logaritmo sobre el determinante. El caso que nos ocupa, al aplicar el logaritmo queda:

$$\max \log \det(\mathbf{P}^{-1}) = \min -\log \det(\mathbf{P}^{-1})$$

Para que se pueda considerar como un problema *maxdet* es necesario introducir la variable $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$, lo cual obliga a conseguir que las condiciones (6.3-119) y (6.3-123) dependan de \mathbf{Q} en lugar de \mathbf{P} , lo cual no es posible lograr en este caso. Estas circunstancias dificultan la resolución del problema como *maxdet*. Por ello, se ha optado por resolver las condiciones anteriores minimizando la traza de la matriz \mathbf{P} . Al minimizar su traza se reducen su valores propios y, por tanto, su determinante, lo cual provoca un aumento del volumen del elipsoide al aumentar el determinante de su matriz inversa.

Otro detalle importante a destacar es que las condiciones (6.3-119) y (6.3-123) no son LMIs ya que hay productos entre variables, tratándose, por tanto, de BMIs. Este aspecto no dificulta su resolución ya que ésta se puede realizar con el paquete *PENBMI*.

EJEMPLO 6.3.3 *Sea el sistema discreto de segundo orden:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0.36 \\ 1 & 1.25 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.85 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1] \quad (6.3-125)$$

Se va a diseñar un controlador-observador GPC para este sistema con los siguientes parámetros:

- $N_2 = 20, N_u = 1, Q = 1, R = 0$.
- *Los tres polos del observador se ubican en 0.7.*

Este controlador resulta ser de orden 3.

¹⁶También es posible maximizar el semieje mayor del elipsoide que es proporcional al mayor valor propio de \mathbf{P}^{-1}

6.3 Diseño robusto: caso general

Una vez obtenido el controlador se procede a determinar el elipsoide inescapable de mayor volumen dentro del cual se verifican las siguientes restricciones:

- $y_{min} = 0, y_{max} = 0.5$.
- $u_{min} = 0.1, u_{max} = 0.4$.

cuando la referencia impuesta sobre la salida es de 0.3. Para hallar tal elipsoide se minimiza la traza de la matriz \mathbf{P} sujeta a las BMIs (6.3-119) y (6.3-123). Hay que tener en cuenta que al ser el proceso de orden 2 y el controlador de orden 3 el bucle cerrado resultante es de orden 5, lo cual implica que el elipsoide que se obtenga pertenezca a \mathbb{R}^5 .

Desde un punto de vista práctico, resulta más útil determinar el elipsoide perteneciente a \mathbb{R}^2 y contenido en el anterior que proporciona el posible conjunto de condiciones iniciales del sistema discreto para las cuales el bucle cerrado satisfará las restricciones para cualquier instante posterior. En concreto, en la figura 6.18 se ha representado dicho elipsoide bidimensional correspondiente al elipsoide de mayor volumen perteneciente a \mathbb{R}^5 .

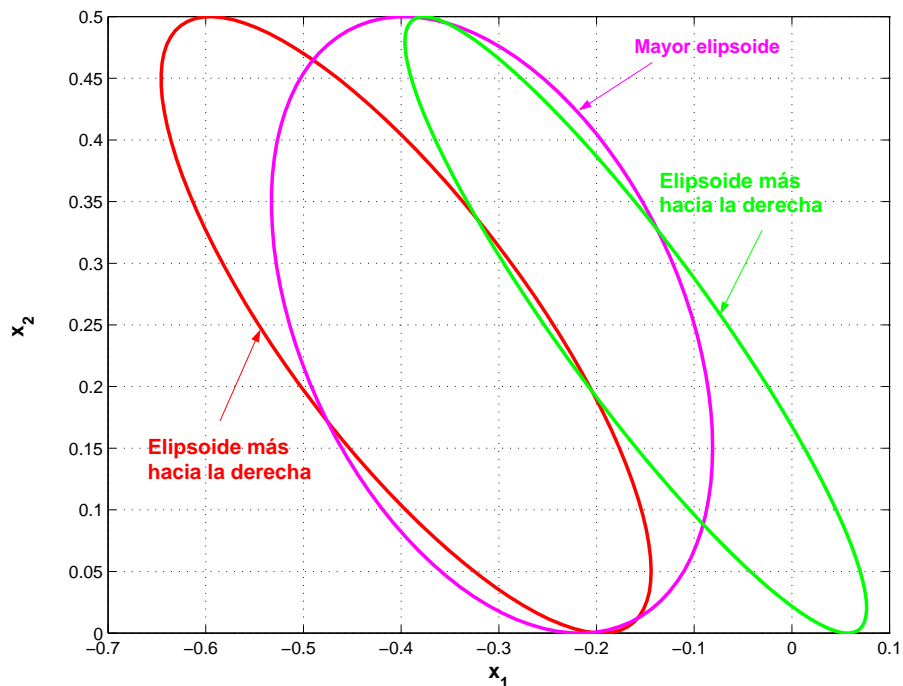


FIGURA 6.18: Elipsoides inescapables para el sistema discreto de segundo orden.

Otra idea a considerar es que, en principio, existen infinitos elipsoides \mathcal{E} que satisfacen las BMIs (6.3-119) y (6.3-123), lo cual muestra que sería interesante obtener otros diferentes al de mayor volumen para ampliar, con su unión, el conjunto de estados para los cuales el bucle cerrado satisface las restricciones. Siguiendo esta idea, en la figura 6.18 se han representado en dos dimensiones los elipsoides correspondientes a aquél que se localiza más a la derecha y a aquél que se encuentra más a la izquierda, que pueden ser

considerados como los extremos de los posibles elipsoides. Consecuentemente, si se obtiene un número suficiente de elipsoides intermedios entre el de mayor volumen y los extremos anteriores se podría conseguir, de forma aproximada, la envolvente de su unión, la cual daría lugar al conjunto de estados para el que se cumplen las restricciones. Dicha idea se ha representado en la figura 6.19. Para establecer comparaciones entre este método y el basado en los conjuntos invariantes del capítulo 5, en esa misma figura se ha representado el mayor conjunto invariante bajo control \mathcal{C}_∞ . Como se aprecia éste contiene estrictamente a la envolvente o unión de elipsoides. Este hecho era de esperar, ya que el método basado en los elipsoides supone que se mantiene en todo momento la linealidad del bucle cerrado, mientras que el basado en conjuntos invariantes permite la saturación de la ley de control.

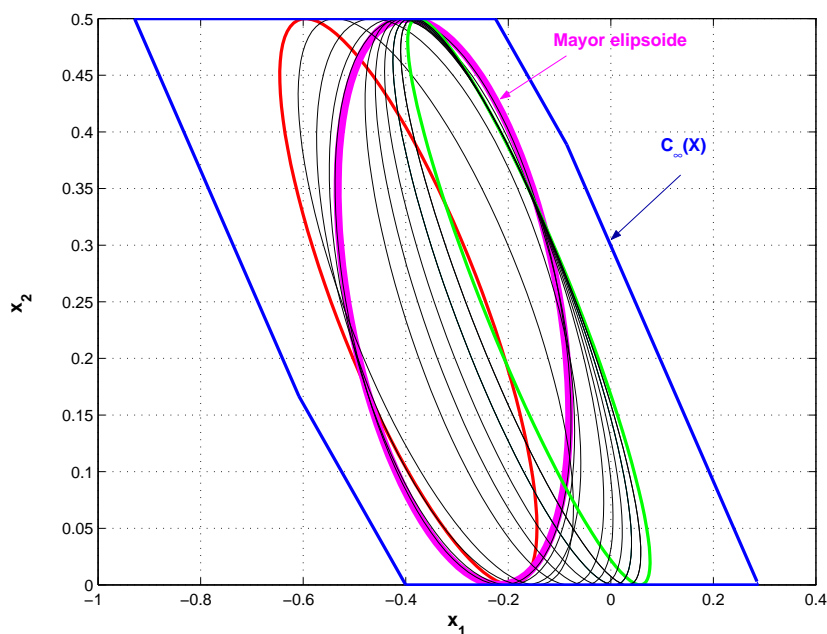


FIGURA 6.19: Comparación entre \mathcal{C}_∞ y la envolvente de los elipsoides inescapables para el sistema discreto de segundo orden.

Al igual que en todos los apartados precedentes, las condiciones para garantizar la satisfacción de restricciones pueden extenderse al caso de sistemas con incertidumbre. Por ejemplo, suponiendo incertidumbre paramétrica afín para el bucle cerrado y función de Lyapunov constante las condiciones suficientes que garantizan la verificación de restricciones son:

$$\min_{P, \mathbf{b}, \lambda, \sigma_j, \sigma_j^u V_j} \text{Traza}(P)$$

$$\begin{pmatrix} -(1-\lambda)P & A_{BC}^T(\delta)\mathbf{b} - \mathbf{b}(1-\lambda) & A_{BC}^T(\delta)P \\ \mathbf{b}^T A_{BC}(\delta) - \mathbf{b}^T(1-\lambda) & -\lambda & \mathbf{0} \\ PA_{BC}(\delta) & \mathbf{0} & -P \end{pmatrix} < 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v$$

6.3 Diseño robusto: caso general

$$\begin{pmatrix} -\sigma_j \mathbf{P} & -\mathbf{C}_{BC,y,j}^T(\delta) \tilde{\mathbf{y}}_j - \sigma_j \mathbf{b} & \mathbf{C}_{BC,y,j}^T(\delta) \\ -\tilde{\mathbf{y}}_j \mathbf{C}_{BC,y,j}(\delta) - \mathbf{b}^T \sigma_j & \tilde{\mathbf{y}}_j^2 - d\mathbf{y}_j^2 + \sigma_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{BC,y,j}(\delta) & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \leq 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v \quad j = 1, \dots, r$$

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}^T \left(\begin{array}{cc|cc} -\sigma_j^u \mathbf{P} & -\sigma_j^u \mathbf{b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{b}^T \sigma_j^u & \sigma_j^u & & \\ \hline & & du_j^2 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ \hline & & \mathbf{0} & \mathbf{V}_j \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{BC,u,j}^0 & -\tilde{u}_j & \mathbf{C}_{BC,u,j}^1 & -\tilde{\mathbf{L}}_j \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_{BC,u,j}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{R}}_j & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{D}}_j \end{pmatrix} < 0 \quad j = 1, \dots, m$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Delta} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}^T \mathbf{V}_j \begin{bmatrix} \tilde{\Delta} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \quad \mathbf{V}_{j,11} < 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \forall \tilde{\Delta} = \text{diag}(\Delta', \Delta) \in \mathcal{X}$$

$$\Delta = \text{diag}(\delta_1 \mathbf{I}_{s_1}, \dots, \delta_q \mathbf{I}_{s_q}), \quad \Delta' = \text{diag}(\delta_1 \mathbf{I}_n, \dots, \delta_q \mathbf{I}_n), \quad \mathcal{X} \triangleq \{ \tilde{\Delta} : \delta \in \mathcal{V}_v \}$$

$$\lambda \geq 0, \quad \sigma_j \geq 0, \quad \sigma_j^u \geq 0$$

$$\mathbf{C}_{BC,u,j} = \mathbf{C}_{BC,u,j}^0 + \sum_i \delta_i \mathbf{C}_{BC,u,j}^i = \mathbf{C}_{BC,u,j}^0 + \mathbf{C}_{BC,u,j}^1 \Delta' \mathbf{C}_{BC,u,j}^*, \quad \tilde{u}_j(\delta) = \tilde{u}_j + \tilde{\mathbf{L}}_j \Delta (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{D}}_j \Delta)^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_j$$

$$j = 1, \dots, m \tag{6.3-126}$$

Nótese que la principal complicación del caso con incertidumbre se debe a que el valor del vector de acciones de control en el equilibrio, $\tilde{\mathbf{u}}_0$, es función de la incertidumbre δ , lo cual provoca que los términos \tilde{u}_j también lo sean. Esta dependencia, en general, ya no va a ser afín sino LFR a pesar de que la del modelo sea afín. Es fácil verificar, a partir de su definición, que los términos du_j no dependen de la incertidumbre. Esta situación no se da para el caso de las salidas controladas, ya que sea cual sea la incertidumbre si el controlador estabiliza asintóticamente al bucle cerrado el valor de las salidas iguala al de las referencias. Además, hay que tener en cuenta que el estado en equilibrio \mathbf{x}_0 también depende de la incertidumbre, lo cual implica que el elipsoide inescapable depende de la incertidumbre ya que \mathbf{x}_0 es justamente su centro. Por tanto, la intersección de todos los elipsoides inescapables correspondientes a los diferentes valores de la incertidumbre generará el conjunto inescapable donde el bucle cerrado satisfará las restricciones.

EJEMPLO 6.3.4 *Supóngase que el sistema discreto del ejemplo 6.3.3 posee la siguiente incertidumbre afín sobre la matriz de estado:*

$$\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{A} + \delta \begin{bmatrix} 0 & 0.12 \\ 0 & -0.15 \end{bmatrix} \quad ; \quad |\delta| < 0.1 \tag{6.3-127}$$

Empleando el mismo controlador diseñado en el ejemplo 6.3.3, resulta que para esta incertidumbre el vector de estados y de acciones de control en el equilibrio dependen afínmente

de la incertidumbre y no de forma LFR:

$$\bar{\mathbf{u}}_0(\delta) = 0.22 + \delta 0.16 \quad ; \quad \mathbf{x}_0(\delta) = \begin{bmatrix} -0.2950 \\ 0.3 \\ -0.2950 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -0.0150 \\ 0 \\ -0.1 \\ 0.1 \\ -0.3333 \end{bmatrix} \quad (6.3-128)$$

Resolviendo las condiciones (6.3-126) se obtienen todos los elipsoides inescapables de menor traza, o equivalentemente, de mayor tamaño. Dichos elipsoides se han representado bidimensionalmente en la figura 6.20 de forma que representen el posible conjunto de estados iniciales del sistema para los cuales el bucle cerrado satisfará en todo instante las restricciones. Como se aprecia, en este caso particular su intersección no supone una pérdida excesiva de estados iniciales con respecto al caso sin incertidumbre (figura 6.18).

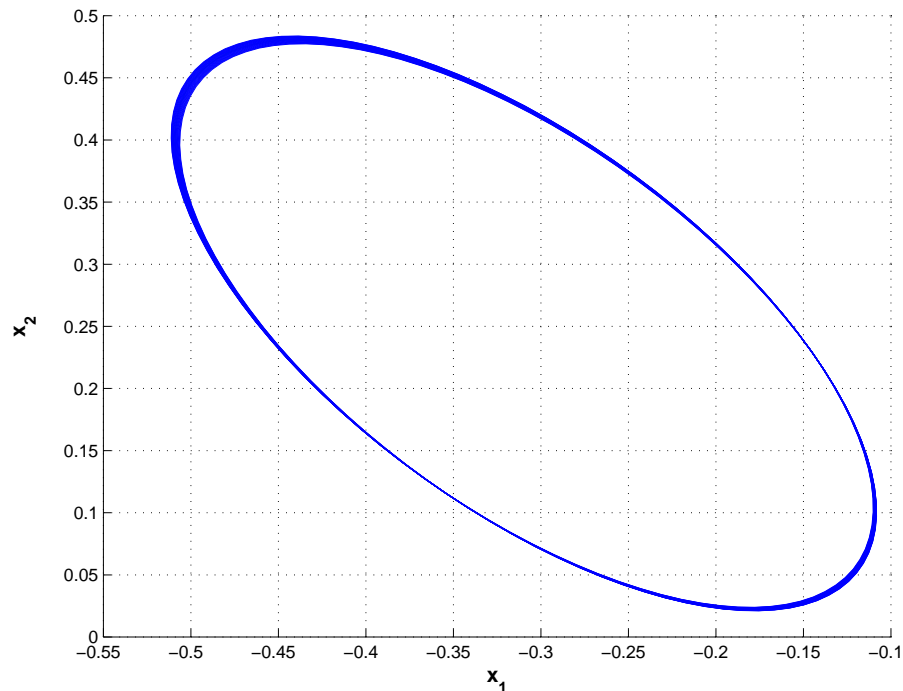


FIGURA 6.20: Elipsoides inescapables de mayor tamaño para el sistema discreto incierto.

Caso con referencias y perturbaciones acotadas

Este caso es más general que el anterior, pero su planteamiento se basa en las mismas ideas de éste: obtener un elipsoide inescapable y acotar los valores de salidas y acciones de control para garantizar la satisfacción de las restricciones. Ahora se va a asumir que $\bar{\omega}(k)$ aglutina tanto a referencias como a las perturbaciones y que está acotado:

$$\bar{\omega}(k)^T \bar{\omega}(k) \leq 1 \quad (6.3-129)$$

6.3 Diseño robusto: caso general

Para el modelo discreto (6.3-109) y suponiendo restricciones simétricas¹⁷, las condiciones suficientes para garantizar la existencia del elipsoide inescapable y la verificación de las restricciones son:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} A_{BC}^T P A_{BC} - (1 - \lambda) P & A_{BC}^T P B_{BC,r} & A_{BC}^T \mathbf{b} - \mathbf{b}(1 - \lambda) \\ B_{BC,r}^T P A_{BC} & B_{BC,r}^T P B_{BC,r} - \mu I & B_{BC,r}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T A_{BC} - \mathbf{b}^T (1 - \lambda) & \mathbf{b}^T B_{BC,r} & \mu - \lambda \end{pmatrix} < 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \mu \geq 0 \\
 & \begin{pmatrix} C_{BC,y,j}^T C_{BC,y,j} - \sigma_j P & C_{BC,y,j}^T D_{BC,yr,j} & -\sigma_j \mathbf{b} \\ D_{BC,yr,j}^T C_{BC,y,j} & D_{BC,yr,j}^T D_{BC,yr,j} - \rho_j I & \mathbf{0} \\ -\mathbf{b}^T \sigma_j & \mathbf{0} & \sigma_j + \rho_j - y_j^{\max 2} \end{pmatrix} \leq 0, \quad \sigma_j \geq 0, \quad \rho_j \geq 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad j = 1, \dots, r \\
 & \begin{pmatrix} C_{BC,u,j}^T C_{BC,u,j} - \sigma_j^u P & C_{BC,u,j}^T D_{BC,ur,j} & -\sigma_j^u \mathbf{b} \\ D_{BC,ur,j}^T C_{BC,u,j} & D_{BC,ur,j}^T D_{BC,ur,j} - \rho_j^u I & \mathbf{0} \\ -\mathbf{b}^T \sigma_j^u & \mathbf{0} & \sigma_j^u + \rho_j^u - u_j^{\max 2} \end{pmatrix} \leq 0, \quad \sigma_j^u \geq 0, \quad \rho_j^u \geq 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad j = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{6.3-130}$$

Nota 6.3.8 Las condiciones anteriores pueden ser obtenidas para otros casos interesantes:

- Cuando la acotación de cada componente de $\tilde{\omega}(k)$ sea distinta. Basta introducir una matriz diagonal \mathbf{J} tal que dicha acotación se exprese con la condición $\omega(k)^T \mathbf{J} \omega(k) \leq 1$.
- Cuando la acotación de las componentes de $\tilde{\omega}(k)$ sea no simétrica. Basta introducir una nueva variable $\tilde{\omega}'(k)$ tal que si posea una acotación simétrica. Esta idea ya se utilizó para convertir restricciones no simétricas en simétricas.
- Cuando se presenten componentes en $\tilde{\omega}(k)$ que sean constantes y el resto acotadas en magnitud. Hay que aplicar una mecánica mixta entre la de este apartado y la del anterior.
- Cuando las restricciones sobre salidas y acciones de control sean no simétricas. Basta aplicar el método utilizado en el apartado anterior.

Nota 6.3.9 Finalmente, es también posible aplicar estas condiciones de verificación de restricciones para el caso de sistemas con incertidumbre.

6.3.2.7. Condiciones para el caso de sistemas con parámetros variables con el tiempo

Todas las condiciones expuestas anteriormente han sido desarrolladas suponiendo que los parámetros inciertos del sistema son constantes a lo largo del tiempo. No obstante, es posible extender estas condiciones para el caso en que los parámetros inciertos

¹⁷ $y_j^{\max} = -y_j^{\min}$ y $u_j^{\max} = -u_j^{\min}$.

puedan variar. Para realizar dicho análisis se va a suponer que además de que los parámetros permanezcan a un determinado conjunto, su variación con el tiempo también pertenezca a un conjunto conocido [Gahinet *et al.* 1996; Trofino y de Souza 1999; Helmersson 1999]:

$$\delta_k \in \mathcal{V}, \quad \delta_{k+1} - \delta_k \triangleq \beta_k \in \partial\mathcal{V} = \text{Co} \{\beta_1, \dots, \beta_s\} \quad (6.3-131)$$

el cual se supondrá que es un politopo convexo¹⁸.

Con esta novedad, las condiciones suficientes de estabilidad robusta ya presentadas, por ejemplo, pueden ser reformuladas para obtener nuevos criterios suficientes para el caso de incertidumbre variable. Para el caso de incertidumbre afín en el bucle cerrado y función de Lyapunov no paramétrica, la condición suficiente de estabilidad cuadrática es válida también en este caso ya que permite variaciones arbitrariamente rápidas de los parámetros inciertos [Gahinet *et al.* 1996; Trofino y de Souza 1999].

Donde si se puede tener en cuenta la acotación de la variación de los parámetros, por ejemplo, es para el caso de incertidumbre afín en el bucle cerrado y función de Lyapunov con dependencia afín siguiendo las ideas de [Gahinet *et al.* 1996]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\delta_k) > 0, \quad \mathbf{P}(\delta_k) - \mathbf{A}_{BC}(\delta_k)^T \mathbf{P}(\delta_{k+1}) \mathbf{A}_{BC}(\delta_k) > 0, \quad \forall k \geq 0 \\ \mathbf{P}(\delta_{k+1}) = \mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_{i,k+1} \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_{i,k} \mathbf{P}_i + \sum_i \beta_{i,k} \mathbf{P}_i = \mathbf{P}(\delta_k) + \partial\mathbf{P}(\beta_k) \end{aligned} \quad (6.3-132)$$

Aplicando el complemento de Schur a las desigualdades matriciales anteriores:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}(\delta_k) & \mathbf{A}_{BC}(\delta_k)^T (\mathbf{P}(\delta_k) + \partial\mathbf{P}(\beta_k)) \\ (\mathbf{P}(\delta_k) + \partial\mathbf{P}(\beta_k)) \mathbf{A}_{BC}(\delta_k) & (\mathbf{P}(\delta_k) + \partial\mathbf{P}(\beta_k)) \end{bmatrix} > 0 \quad \forall k \forall \delta_k \in \mathcal{V} \forall \beta_k \in \partial\mathcal{V} \quad (6.3-133)$$

Este conjunto de infinitas LMIs no es afín en δ_k , por tanto, hay que aplicar nuevamente el procedimiento de la multiconvexidad¹⁹ para reducirlo a un número finito de LMIs:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\delta) & \mathbf{A}_{BC}(\delta)^T (\mathbf{P}(\delta) + \partial\mathbf{P}(\beta)) \\ (\mathbf{P}(\delta) + \partial\mathbf{P}(\beta)) \mathbf{A}_{BC}(\delta) & (\mathbf{P}(\delta) + \partial\mathbf{P}(\beta)) \end{bmatrix} - \sum_i \delta_i^2 \mathbf{M}_{ii} > 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}, \forall \beta \in \partial\mathcal{V} \\ \partial\mathcal{V} \triangleq \{\beta_1, \dots, \beta_s\}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{BC,i}^T \mathbf{P}_i \\ -\mathbf{P}_i \mathbf{A}_{BC,i} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{ii} \geq 0, \quad \mathbf{M}_{ii} \geq 0 \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (6.3-134)$$

Nota 6.3.10 Con estas ideas es posible extender cualquiera de las condiciones sobre estabilidad, normas, especificaciones y/o restricciones suponiendo incertidumbre LFR variable con el tiempo en el bucle cerrado.

¹⁸Si no lo fuera siempre se puede contener dentro de un conjunto que sí lo sea

¹⁹Ya empleado en la secciones F.2.2 y F.2.4.

6.4 Conclusiones del capítulo

En concreto, en el próximo capítulo van a ser empleadas las condiciones para el bucle cerrado suponiendo que éste presenta incertidumbre LFR variable. Como ya se ha comentado antes, si se utiliza una función de Lyapunov sin dependencia (estabilidad cuadrática) el criterio resultante es válido para variaciones arbitrariamente rápidas de los parámetros. De la condición de estabilidad para incertidumbre LFR (6.3-61) se puede derivar el caso particular de estabilidad cuadrática:

$$T(\hat{\Delta}) = I, \quad T_A = I, \quad T_B = T_C = T_D = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}^T \left(\begin{array}{cc|c} -Q & 0 & 0 \\ 0 & Q & \\ \hline & & V \end{array} \right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{BC} & B_{BC,\Delta} \\ 0 & I \\ C_{BC,\Delta} & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix}^T V \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix} > 0, \quad V_{11} < 0, \quad \forall \Delta \in \Delta$$

(6.3-135)

Evidentemente, para este caso se requiere el menor coste computacional para analizar la estabilidad, aunque es el más conservador. Es posible obtener las expresiones correspondientes a la estabilidad con funciones de Lyapunov afines, cuadráticas y LFR, las cuales requieren un mayor coste computacional pero a cambio son menos conservadoras, ya que entre otros aspectos, tienen en cuenta que la variación de los parámetros está acotada.

6.4. Conclusiones del capítulo

1. Se ha justificado que las funciones de sensibilidad, para el caso nominal, dependen, salvo cancelaciones, de los polos del observador y de los polos del bucle cerrado. Esto indica que una adecuada selección de los polos del observador puede conferir robustez al bucle cerrado ante perturbaciones, ruidos de medida, incertidumbre y/o dinámica no modelada.
2. Para el caso nominal, se ha propuesto una metodología de selección óptima de los polos del observador que trata de garantizar la consecución de unas determinadas funciones de sensibilidad objetivo para el bucle cerrado, en base a minimizar la diferencia en norma entre la sensibilidad deseada y la que proporciona el controlador-observador GPC.
3. Basándose en el empleo de LMIs, se han propuesto varias metodologías de diseño óptimo de los parámetros del controlador-observador GPC (horizontes, matrices de ponderación y polos del observador) que garantizan diferentes aspectos para el bucle cerrado formado por el modelo incierto del proceso y el controlador-observador: estabilidad robusta, acotación de normas, asignación de especificaciones y/o verificación de restricciones.

4. Por último, se ha tratado el diseño del GPC para procesos con incertidumbre variable con el tiempo. Los resultados asociados a este caso servirán como punto de partida para el diseño de controladores-observadores robustos GPCs para sistemas no lineales, que se realizará en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO 7

Control de sistemas no lineales

7.1. Introducción	238
7.2. Sistemas LPV	238
7.2.1. Inclusión de un sistema no lineal dentro un sistema LPV	239
7.2.1.1. Caso particular: sistemas no lineales identificados en diferentes puntos de funcionamiento	241
7.3. Diseño del controlador-observador GPC para sistemas LPV	246
7.3.1. Aplicación a una unión flexible	248
7.4. Controladores LPV robustos	252
7.4.1. Controlador-observador GPC-LPV	253
7.5. Diseño del controlador-observador GPC-LPV	256
Condiciones suficientes de estabilidad robusta	256
Condiciones de satisfacción de restricciones basadas en normas	258
Inclusión de restricciones	260
7.5.1. Caso de sistemas LPV obtenidos por identificación	262
7.6. Aplicación: vaporizador de gases	264
7.7. Aplicación: motor diesel sobrealimentado	271
7.7.1. Introducción	271
7.7.2. Modelo del motor	272
7.7.3. Diseño del controlador GPC-LPV	273
7.8. Conclusiones del capítulo	280

7.1. Introducción

En este capítulo se va a abordar el control de sistemas no lineales cuyas trayectorias dinámicas puedan ser incluidas dentro de las trayectorias dinámicas de un sistema lineal de parámetros variables con el tiempo (LPV) [Boyd *et al.* 1994]. Esta idea ya ha sido considerada en trabajos anteriores [Liu 1968; Packard 1994; Kothare *et al.* 1996; Dussy y El Ghaoui 1998; Scherer 2001]. La principal ventaja de este método es que permite utilizar todos aquellos resultados que son válidos para sistemas LPV como, por ejemplo, los presentados al final del capítulo anterior basados en LMIs. La principal desventaja de este método es el conservadurismo adquirido al trabajar sobre el sistema LPV cuya dinámica incluye la del sistema no lineal, en lugar de directamente sobre el no lineal, ya que el LPV puede presentar trayectorias no existentes en el no lineal.

En una primera parte del capítulo se presenta la nomenclatura relativa a los sistemas LPV que será empleada en el resto del mismo, así como la forma de asegurar la inclusión de trayectorias de un sistema no lineal dentro de un LPV. Tras esto, se utilizan los resultados e ideas presentadas al final de capítulo anterior para diseñar el controlador-observador GPC que garantice determinadas especificaciones para el sistema LPV y, por tanto, para el sistema no lineal.

Seguidamente, se presenta la metodología general del diseño de controladores por planificación de ganancia o de parámetros variables basada en LMIs. Estos controladores se caracterizan porque utilizan la medida en línea de determinadas señales: salidas controladas, perturbaciones, etc., para mejorar el comportamiento del bucle cerrado. Dicha metodología será aplicada de forma particular al controlador-observador GPC presentado en esta tesis, dando lugar al denominado controlador-observador GPC-LPV.

Finalmente, se ejemplifica el diseño del GPC-LPV para diferentes sistemas no lineales.

7.2. Sistemas LPV

La nomenclatura que se va a emplear es bastante general, pero se basa, fundamentalmente, en la empleada en [Scherer 2001]. En primer lugar se va a asumir una dependencia LFR para la incertidumbre, y que ésta se caracteriza por que la matriz de incertidumbre Δ pertenece a un conjunto admisible Δ tal que:

$$\Delta \subset \mathbb{C}^{s \times l}, \text{ con } : \mathbf{0} \in \Delta$$

es importante destacar que Δ depende tanto del tamaño de las incertidumbres como de su estructura. Dado el conjunto Δ , la incertidumbre variable con el tiempo está formada por todas las secuencias:

$$\Delta(k) : k = \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow \Delta \quad (7.2-1)$$

Tal y como se presentó en el capítulo anterior, un sistema posee incertidumbre LFR si se establece una LFT superior entre un sistema lineal e invariable con el tiempo (LTI) y la matriz de incertidumbre $\Delta(k)$, que en este caso es variable con el tiempo. En concreto, un sistema con incertidumbre LFR variable tiene la estructura:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{y}_\Delta \\ \mathbf{e} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_\Delta & \mathbf{B} & \mathbf{B}_u \\ \mathbf{C}_\Delta & \mathbf{D}_\Delta & \mathbf{D}_{\Delta,p} & \mathbf{D}_{\Delta,u} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D}_{e,\Delta} & \mathbf{D} & \mathbf{D}_{e,u} \\ \mathbf{C}_y & \mathbf{D}_{y,\Delta} & \mathbf{D}_{y,p} & \mathbf{D}_{y,u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}_\Delta \\ \mathbf{p} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{pmatrix}, \mathbf{u}_\Delta = \Delta(k)\mathbf{y}_\Delta \quad (7.2-2)$$

las señales de entrada \mathbf{p} representan a las posibles señales de referencia y/o de perturbación que actúan sobre el sistema. Las señales de entrada $\bar{\mathbf{u}}$ representan a las acciones de control actuantes sobre el sistema. Las señales de salida \mathbf{e} representan las salidas sobre las que se ha establecido algún tipo de especificación a verificar: norma infinito, restricciones, etc. Finalmente, las señales de salida $\bar{\mathbf{y}}$ son aquellas cuya medida está disponible para el controlador.

El modelo LPV anterior puede reducirse si se simplifica su LFT superior asociada:

$$\text{LPV} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{B}_u \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{D}_{e,u} \\ \mathbf{C}_y & \mathbf{D}_{y,p} & \mathbf{D}_{y,u} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_\Delta \\ \mathbf{D}_{e,\Delta} \\ \mathbf{D}_{y,\Delta} \end{pmatrix} \Delta(k) \{ \mathbf{I} - \mathbf{D}_\Delta \Delta(k) \}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_\Delta & \mathbf{D}_{\Delta,p} & \mathbf{D}_{\Delta,u} \end{pmatrix} \quad (7.2-3)$$

La principal diferencia entre el análisis del capítulo anterior y el presente es que se incorpora la posibilidad de que los valores de la matriz $\Delta(k)$ puedan ser medidos en línea y, por tanto, puedan ser utilizados por el controlador para mejorar el control, suponiendo que dependen de ciertas señales (salidas, perturbaciones, etc.). En el capítulo anterior eran desconocidos y sólo se sabía que pertenecían a un determinado conjunto. Este concepto asociado a la capacidad de medida de la incertidumbre variable, es el que proporciona el nombre de controladores basados en planificación de ganancia o de parámetros variables con el tiempo a aquellos controladores que emplean esta medida en línea para el control del sistema.

7.2.1. Inclusión de un sistema no lineal dentro un sistema LPV

Una gran variedad de sistemas no lineales se caracterizan porque sus trayectorias pueden incluirse dentro de las trayectorias de un sistema LPV. Por ejemplo, en [El Gahoui

y Scorletti 1996] se analizan sistemas no lineales continuos con dependencia racional con respecto del estado y afín con respecto al control. Este análisis es posible extenderlo al caso de sistemas no lineales discretos con la estructura:

$$\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}(k)), \quad \bar{\mathbf{y}}(k) = g(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}(k))$$

siendo f y g funciones racionales del vector de estados y afines en el vector de acciones de control. En dicho artículo se presentó como ejemplo un sistema de *Van der Pol*:

$$\ddot{y} + (1 - y^2)\dot{y} + y = -u \quad (7.2-4)$$

Para obtener el correspondiente sistema discreto se discretiza la ecuación diferencial anterior aplicando la aproximación de Euler:

$$\dot{y} = \frac{y(k+1) - y(k)}{T}, \quad \ddot{y} = \frac{y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)}{T^2}$$

proporcionando:

$$y(k+2) = (2 - T)y(k+1) + (-1 + T - T^2)y(k) - T^2u(k) + Ty(k)^2(y(k+1) - y(k)) \quad (7.2-5)$$

Es habitual en la literatura de control predictivo obtener modelos discretizados mediante la aproximación de Euler [Kothare *et al.* 1996; Angeli *et al.* 2000]. Tomando como vector de estado a $(y(k+1), y(k))^T$:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 2 - T + Ty^2(k) & -1 + T - T^2 - Ty^2(k) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} -T^2 \\ 0 \end{pmatrix} u(k) \quad (7.2-6)$$

Como se aprecia, la no linealidad en este sistema viene dada por el factor $y^2(k)$ que aparece en la matriz de estado. Para convertir este sistema en un sistema LPV la parte no lineal se expresa mediante dependencia LFR respecto de $y(k)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} 2 - T & -1 + T - T^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + T \begin{pmatrix} y^2(k) & -y^2(k) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} -T^2 \\ 0 \end{pmatrix} u(k) \\ \mathbf{x}(k+1) &= \begin{pmatrix} 2 - T & -1 + T - T^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_\Delta(k) + \begin{pmatrix} -T^2 \\ 0 \end{pmatrix} u(k) \\ \mathbf{y}_\Delta(k) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & -T \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_\Delta(k), \quad \mathbf{u}_\Delta(k) = y(k)\mathbf{I}_2\mathbf{y}_\Delta(k) \end{aligned} \quad (7.2-7)$$

Finalmente, si se expresa en la forma de (7.2-2):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{y}_\Delta \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} 2 - T & -1 + T - T^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -T^2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ T & -T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}_\Delta \\ u \end{pmatrix} \quad (7.2-8)$$

$$\mathbf{u}_\Delta = \Delta(k)\mathbf{y}_\Delta, \quad \Delta(k) = y(k)\mathbf{I}_2 \quad (7.2-9)$$

Aquí se aprecia muy bien el hecho de que la matriz de incertidumbre sea medible en línea, ya que, en este caso, depende de la salida, la cual es medida. Otro aspecto a destacar es que la incertidumbre LFR representa la parte no lineal del modelo discreto con dependencia racional: $Ty(k)^2(y(k+1) - y(k))$.

En otros artículos [Dussy y El Ghaoui 1997, 1998] se comenta que esta metodología sigue siendo válida para sistemas con dependencia irracional con respecto al estado.

Es posible considerar sistemas LPV [Dussy y El Ghaoui 1997, 1998] en los que parte de la matriz de incertidumbre sea medible, $\Delta_m(k)$, y el resto esté acotada pero no sea susceptible de ser medida Δ_{nm} :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{nm} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_m \end{pmatrix} \quad (7.2-10)$$

Se trata de un caso mixto entre el planteamiento del capítulo anterior y el de los párrafos anteriores. A los controladores diseñados para este tipo de sistemas LPV se les denomina controladores de planificación de ganancia robustos o controladores de parámetros variables robustos.

7.2.1.1. Caso particular: sistemas no lineales identificados en diferentes puntos de funcionamiento

Por otro lado, en la práctica existen gran cantidad de sistemas no lineales para los cuales sólo es posible obtener modelos, que representen con cierto grado de aproximación su comportamiento, a partir de su identificación experimental en diferentes puntos de funcionamiento. Esta metodología de trabajo puede utilizarse debido a que, por ejemplo, el modelo resultante basado en ecuaciones de primeros principios sea enormemente complejo, o, por ejemplo, a que las ecuaciones teóricas conocidas no representan de forma fiel su comportamiento. Para estos casos, la metodología propuesta de inclusión del sistema no lineal dentro de uno LPV sigue siendo válida [Bodenheimer y Bendotti 1995; Bodenheimer *et al.* 1996]. La idea consiste en tratar de ajustar un modelo LPV con incertidumbre LFR que dé lugar a los diferentes modelos linealizados en cada uno de los puntos de funcionamiento.

Por ejemplo, en [Bodenheimer y Bendotti 1995] se identifican modelos para un reactor nuclear en diferentes puntos de funcionamiento. Estos modelos son de primer orden para las diferentes salidas. Así, para cada salida Δy_j^1 se busca ajustar un modelo LPV en función del vector de entradas $\Delta \bar{\mathbf{u}}(k)$ con la siguiente estructura:

$$\Delta x(k+1) = a \cdot \Delta x(k) + \mathbf{b} \cdot \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) + b_\Delta \cdot u_\Delta$$

¹Los modelos identificados dependen de los incrementos de las señales

$$\begin{aligned} \Delta y_j(k) &= c \cdot \Delta x(k) + \mathbf{d} \cdot \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) + d_{y,\Delta} \cdot u_\Delta \\ y_\Delta &= c_\Delta \Delta x(k) + \mathbf{d}_{\Delta,u} \cdot \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) + d_\Delta \cdot u_\Delta, \quad u_\Delta = \delta y_\Delta, \text{ con } |\delta| \leq 1 \end{aligned} \quad (7.2-11)$$

El parámetro incierto δ representa el cambio en el punto de funcionamiento, que en este ejemplo es la potencia del reactor, que es una señal que se mide. Así pues, a cada punto de funcionamiento p_i le corresponde un determinado valor δ_i tal que el sistema LPV para dicho valor sea justamente el sistema LTI identificado para dicho punto de funcionamiento:

$$\mathbf{G}_i = \left(\begin{array}{c|c} a_i & \mathbf{b}_i \\ \hline c_i & \mathbf{d}_i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} a & \mathbf{b} \\ \hline c & \mathbf{d} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} b_\Delta \\ d_{y,\Delta} \end{array} \right) \delta_i (1 - d_\Delta \delta_i)^{-1} (c_\Delta \quad \mathbf{d}_{\Delta,u}) \quad \forall p_i \quad (7.2-12)$$

que para cada matriz de la representación interna queda así:

$$\begin{aligned} a_i &= a + b_\Delta \delta_i (1 - d_\Delta \delta_i)^{-1} c_\Delta, \quad \mathbf{b}_i = \mathbf{b} + b_\Delta \delta_i (1 - d_\Delta \delta_i)^{-1} \mathbf{d}_{\Delta,u} \\ c_i &= c + d_{y,\Delta} \delta_i (1 - d_\Delta \delta_i)^{-1} c_\Delta, \quad \mathbf{d}_i = \mathbf{d} + d_{y,\Delta} \delta_i (1 - d_\Delta \delta_i)^{-1} \mathbf{d}_{\Delta,u} \quad \forall p_i \end{aligned} \quad (7.2-13)$$

En la referencia indicada, la obtención de a , \mathbf{b} , c , \mathbf{d} , b_Δ , $d_{y,\Delta}$, c_Δ , $\mathbf{d}_{\Delta,u}$ y δ_i se realiza calculando la solución minimocuadrática de las ecuaciones (7.2-13), es decir, minimizando el error cuadrático existente entre los valores identificados para a_i , \mathbf{b}_i , etc. y los valores proporcionados por (7.2-13).

El ajuste del sistema LPV así obtenido al sistema no lineal cabe que sea mejor, en principio, cuanto mayor número de puntos de funcionamiento hayan sido identificados. Otro aspecto importante viene dado por la complejidad de la representación LFR, es decir, por el tamaño de la matriz Δ que va a ser función de los valores de las salidas en los puntos de funcionamiento. Es obvio que a mayor tamaño de esta matriz más grados de libertad se presentan y, por tanto, es posible lograr un mejor ajuste a los modelos identificados. Nótese que en el ejemplo anterior dicha matriz se ha tomado como un escalar (mínimo número de grados de libertad), a pesar de lo cual el ajuste que se obtiene es bastante bueno [Bodenheimer y Bendotti 1995].

Este problema de ajuste mínimo cuadrático es conocido en la literatura matemática como *Least squares curve fitting*, es decir, ajuste minimocuadrático de funciones. El algoritmo usualmente empleado en la práctica es el de Levenberg y Marquardt, disponible en la toolbox de optimización de Matlab. Dicho algoritmo ha sido utilizado en esta tesis.

Hay que tener cuenta, además, la necesidad de obtener los valores de salidas (y_j) y entradas (u_j) en los puntos de funcionamiento donde se ha identificado el sistema no lineal real. Dichos valores son función, por tanto, de δ_i . Para poder aplicar la metodología que se propone en este capítulo va a ser necesario ajustar dichos valores en los puntos de funcionamiento mediante ecuaciones con dependencia LFR con respecto de δ_i , tal y como se ha hecho con los modelos identificados:

$$y_j^{eq,i} = y_{j,0} + y_{j,1} \delta_i (1 - y_{j,2} \delta_i)^{-1} y_{j,3}$$

$$\mathbf{u}_j^{eq,i} = \mathbf{u}_{j,0} + \mathbf{u}_{j,1} \delta_i (1 - \mathbf{u}_{j,2} \delta_i)^{-1} \mathbf{u}_{j,3} \quad (7.2-14)$$

Una vez que han sido ajustados los diferentes modelos identificados y los puntos de equilibrio el sistema no lineal puede ser representado por [Rugh y Shamma 2000]:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x^{eq}(\delta) + a(\delta)(x(k) - x^{eq}(\delta)) + b(\delta)(\bar{\mathbf{u}}(k) - \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\delta)) \\ y_j(k) &= y_j^{eq}(\delta) + c(\delta)(x(k) - x^{eq}(\delta)) + d(\delta)(\bar{\mathbf{u}}(k) - \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\delta)) \end{aligned} \quad (7.2-15)$$

donde $x^{eq}(\delta)$ es el valor del estado del proceso en equilibrio que, en principio, cuya dependencia respecto de δ puede ser fijada de forma arbitraria [Rugh y Shamma 2000].

De la ecuación (7.2-15) se puede deducir que para que este sistema LPV represente coherentemente al sistema no lineal identificado, debería de existir alguna relación entre el ajuste realizado para los modelos lineales identificados y el realizado para los puntos de equilibrio correspondientes, ya que cualquier combinación de ambos no tendría que proporcionar un sistema no lineal válido. Esta idea de buscar coherencia entre ambos ajustes minimocuadráticos requerirá, probablemente, que ambos ajustes minimocuadráticos se realicen de forma simultánea y coordinada. Una posible forma de realizar ambos ajustes coordinadamente, se basa en obtener los estados del proceso en equilibrio x^{eq} [Rugh y Shamma 2000] de tal forma que el modelo linealizado de (7.2-15) en cada punto de funcionamiento se corresponda con el modelo identificado y ajustado para dicho punto (7.2-11). Este requerimiento garantiza, además, que el modelo LPV (7.2-15) sea coherente con los modelos identificados. En la referencia [Rugh y Shamma 2000] se deduce, para un caso general de un sistema LPV, que el estado en equilibrio debe satisfacer un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Seguidamente, se va a particularizar este resultado para el caso de un sistema LPV ajustado a partir de modelos identificados, correspondientes a un caso general de sistema no lineal. Una vez obtenidas las ecuaciones en derivadas parciales, se analizará cuando éstas poseen solución, y en caso afirmativo se obtendrá ésta. Como se verá más adelante, las condiciones que garantizan que dichas ecuaciones en derivadas parciales posean solución, establecen que debe existir una coordinación entre los modelos identificados ajustados y los puntos de equilibrio ajustados.

Sea $\bar{\mathbf{y}}$ el vector de salidas del proceso no lineal, y $\bar{\mathbf{u}}$ el vector de entradas. Se va a proponer realizar la identificación de cada una de las salidas, y_j , por separado con respecto a todas las entradas empleando un modelo en representación interna. Dicha identificación se realiza mediante la *System Identification Toolbox* de Matlab. Posteriormente, este modelo en interna se transforma a la estructura del modelo MISO en espacio de estados

presentado en el capítulo 3:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_j &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{0,j} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{1,j} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{2,j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{n_j-1,j} \end{bmatrix}_{n_j \times n_j} & \mathbf{B}_j &= \begin{bmatrix} b_{0,j,1} & b_{0,j,2} & \cdots & b_{0,j,m} \\ b_{1,j,1} & b_{1,j,2} & \cdots & b_{1,j,m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n_j-1,j,1} & b_{n_j-1,j,2} & \cdots & b_{n_j-1,j,m} \end{bmatrix}_{n_j \times m} \\
 \mathbf{C}_j &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{1 \times n_j}
 \end{aligned} \tag{7.2-16}$$

este modelo tiene la principal ventaja de que requiere un menor número de parámetros a ajustar mediante mínimos cuadrados, a diferencia del modelo en interna inicialmente identificado, que, en general, poseerá unas matrices \mathbf{A}_j y \mathbf{C}_j llenas de coeficientes. Al agrupar estos modelos correspondientes a todas las salidas se obtiene el modelo completo identificado en un determinado punto de funcionamiento:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}_{r \times r} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_n \end{bmatrix}_{r \times m} \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{C}_n \end{bmatrix}_{n \times r} & r &= \sum_{j=1}^n n_j
 \end{aligned} \tag{7.2-17}$$

$$\Delta \mathbf{x}_p(k+1) = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}_p(k) + \mathbf{B} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) \quad ; \quad \Delta \bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}_p(k) \tag{7.2-18}$$

Una vez obtenidos los modelos identificados en los diferentes puntos de funcionamiento de interés, se realiza el ajuste minimocuadrático para obtener el modelo con dependencia LFR respecto de las salidas:

$$\Delta \mathbf{x}_p(k+1) = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{y}}) \Delta \mathbf{x}_p(k) + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{y}}) \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) \quad ; \quad \Delta \bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}(\bar{\mathbf{y}}) \Delta \mathbf{x}_p(k) \tag{7.2-19}$$

Este modelo LPV correspondiente a los linealizados se convierte en el del sistema no lineal al incorporar el valor de las señales en el punto de funcionamiento:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_p(k+1) - \mathbf{x}_p^{eq}(\bar{\mathbf{y}}) &= \mathbf{A}(\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{x}_p(k) - \mathbf{x}_p^{eq}(\bar{\mathbf{y}})) + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{y}})(\bar{\mathbf{u}}(k) - \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}})) \\
 \bar{\mathbf{y}}(k) - \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}(\bar{\mathbf{y}})(\mathbf{x}_p(k) - \mathbf{x}_p^{eq}(\bar{\mathbf{y}}))
 \end{aligned} \tag{7.2-20}$$

los valores de las entradas en equilibrio son función de las salidas, y su dependencia se obtiene al ajustar minimocuadráticamente los valores de éstas correspondientes a los puntos de funcionamiento analizados. El estado del proceso en equilibrio posee, a priori, una expresión desconocida. No obstante, en [Rugh y Shamma 2000] se propone su

obtención imponiendo la condición de que el modelo linealizado de (7.2-20) alrededor de cada punto de funcionamiento coincida con el modelo linealizado ajustado (7.2-19). El modelo linealizado de (7.2-20) es:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_p(k+1) - \frac{d\mathbf{x}_p^{eq}(\bar{\mathbf{y}})}{d\bar{\mathbf{y}}} \Delta \bar{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{A}(\bar{\mathbf{y}})(\Delta \mathbf{x}_p(k) - \frac{d\mathbf{x}_p^{eq}(\bar{\mathbf{y}})}{d\bar{\mathbf{y}}} \Delta \bar{\mathbf{y}}(k)) + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{y}})(\Delta \bar{\mathbf{u}}(k) - \frac{d\bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}})}{d\bar{\mathbf{y}}} \Delta \bar{\mathbf{y}}(k)) \\ \Delta \bar{\mathbf{y}}(k) - \Delta \bar{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}(\bar{\mathbf{y}})(\Delta \mathbf{x}_p(k) - \frac{d\mathbf{x}_p^{eq}(\bar{\mathbf{y}})}{d\bar{\mathbf{y}}} \Delta \bar{\mathbf{y}}(k)) \end{aligned} \quad (7.2-21)$$

Para que este modelo coincida con (7.2-19) $\forall k$ es necesario y suficiente que:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - (\mathbf{A}(\bar{\mathbf{y}})) \frac{d\mathbf{x}_p^{eq}(\bar{\mathbf{y}})}{d\bar{\mathbf{y}}} &= \mathbf{B}(\bar{\mathbf{y}}) \frac{d\bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}})}{d\bar{\mathbf{y}}} \\ \mathbf{C}(\bar{\mathbf{y}}) \frac{d\mathbf{x}_p^{eq}(\bar{\mathbf{y}})}{d\bar{\mathbf{y}}} &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (7.2-22)$$

O equivalentemente a:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\bar{\mathbf{y}})) \\ \mathbf{C}(\bar{\mathbf{y}}) \end{bmatrix} \frac{d\mathbf{x}_p^{eq}(\bar{\mathbf{y}})}{d\bar{\mathbf{y}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}(\bar{\mathbf{y}}) \frac{d\bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}})}{d\bar{\mathbf{y}}} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (7.2-23)$$

Es importante darse cuenta de que esta ecuación diferencial vectorial es en derivadas parciales, ya que tanto el estado en equilibrio como las entradas en equilibrio están derivadas con respecto a todas las salidas. Es posible, pues, tratar de obtener la expresión de los estados en equilibrio para que estas ecuación vectorial en derivadas parciales se satisfaga, ya que tras el ajuste de modelos y puntos de equilibrio se obtienen $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{y}})$, $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{y}})$, $\mathbf{C}(\bar{\mathbf{y}})$ y $\bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}})$, luego son ya conocidos.

Esta ecuación vectorial está compuesta por $r + n$ ecuaciones escalares, r filas de $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{y}})$ y n filas de $\mathbf{C}(\bar{\mathbf{y}})$, y r incógnitas correspondientes a cada una de las componentes de \mathbf{x}_p^{eq} . Por tanto, hay más ecuaciones que incógnitas. Para que el sistema tenga solución, es necesario que, al menos, n ecuaciones sean linealmente dependientes de las otras r para todo $\bar{\mathbf{y}}$. En el apéndice G sección G.1 se justifica para el caso de dos salidas ($n = 2$), n ecuaciones son dependientes del resto si y sólo si:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \sum_{i=0}^{n_1-1} a_{i,1}(\bar{\mathbf{y}})} \sum_{\text{filas}} B_1(\bar{\mathbf{y}}) \\ \sum_{\text{filas}} B_2(\bar{\mathbf{y}}) \end{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}})}{\partial y_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \sum_{i=0}^{n_2-1} a_{i,2}(\bar{\mathbf{y}})} \sum_{\text{filas}} B_2(\bar{\mathbf{y}}) \\ \sum_{\text{filas}} B_1(\bar{\mathbf{y}}) \end{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}})}{\partial y_2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.2-24)$$

Estas condiciones no son más que dos ecuaciones en derivadas parciales donde se establece una relación entre los modelos ajustados y los puntos de equilibrio ajustados. Si los modelos y los puntos de equilibrio son ajustados de forma independiente, entonces, casi con toda seguridad, estas ecuaciones no se verificarán. Para garantizar que se cumplan será necesario imponerlas como condición durante la fase de ajuste, lo cual implica

que el ajuste de modelos y puntos de equilibrio deba realizarse simultáneamente y forma coordinada imponiendo (7.2-24). Estas condiciones, como se puede apreciar, establecen una relación entre los modelos ajustados y las derivadas de los puntos de equilibrio, es decir, proporcionan información adicional a la que estaba disponible durante el ajuste independiente, ya que ahora se aporta cuánto deben valer las derivadas de los puntos de equilibrio.

Volviendo a las ecuaciones en derivadas parciales que permiten obtener \mathbf{x}_p^{eq} (7.2-23), para garantizar la existencia de soluciones, además de haber exigido que el número de ecuaciones coincida con el de incógnitas, al tratarse de ecuaciones en derivadas parciales, es necesario que se cumplan las condiciones de Cauchy-Schwarz para que exista solución:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}_p^{eq}}{\partial y_j \partial y_k} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}_p^{eq}}{\partial y_k \partial y_j} \quad \forall k \neq j = 1, \dots, n \quad (7.2-25)$$

Las cuales adquieren la forma:

$$\frac{\partial \left[\begin{array}{c} (I - A(\bar{\mathbf{y}})) \\ C(\bar{\mathbf{y}}) \end{array} \right]^\dagger \left(\begin{array}{c} B(\bar{\mathbf{y}}) \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}})}{\partial y_k} \\ V_k \end{array} \right)}{\partial y_j} = \frac{\partial \left[\begin{array}{c} (I - A(\bar{\mathbf{y}})) \\ C(\bar{\mathbf{y}}) \end{array} \right]^\dagger \left(\begin{array}{c} B(\bar{\mathbf{y}}) \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}})}{\partial y_j} \\ V_j \end{array} \right)}{\partial y_k} \quad \forall k \neq j = 1, \dots, n \quad (7.2-26)$$

$$\mathbf{V}_l = \left(V_l(1) \quad \dots \quad V_l(n) \right)^T \quad ; \quad V_l(i) = \begin{cases} 1 & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases}$$

Finalmente, para garantizar la existencia de \mathbf{x}_p^{eq} es necesario que durante la fase coordinada de ajuste de modelos y puntos de equilibrio se impongan las condiciones (7.2-24) y (7.2-26).

Si se deseara obtener la expresión de \mathbf{x}_p^{eq} bastaría con integrar las ecuaciones en derivadas parciales (7.2-23). Dicha integración se resuelve en el apéndice G sección G.1.

7.3. Diseño del controlador-observador GPC para sistemas LPV

En esta sección se presenta la metodología a seguir para el diseño del controlador-observador GPC para sistemas LPV. En concreto, la idea es emplear los criterios basados en LMIs presentados al final del capítulo anterior para el caso de sistemas con parámetros variables con el tiempo.

El punto de partida, es pues, obtener, a partir de las representaciones en espacio de estados del sistema LPV (7.2-3) y del controlador-observador GPC (6.2-3), una repre-

sentación en espacio de estados del bucle cerrado que incluya al vector de acciones de control, bajo la hipótesis de que la matriz $D_{y,u}$ sea nula:

$$\begin{aligned}
 BC = & \left(\begin{array}{cc|cc} A + B_u D_y^c C_y & B_u C^c & B_u D_r^c & B + B_u D_y^c D_{y,p} \\ B_y^c C_y & A^c & B_r^c & B_y^c D_{y,p} \\ \hline C + D_{e,u} D_y^c C_y & D_{e,u} C^c & D_{e,u} D_r^c & D + D_{e,u} D_y^c D_{y,p} \\ C_y & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{y,p} \\ D_y^c C_y & C^c & D_r^c & D_y^c D_{y,p} \end{array} \right) + \\
 & + \left(\begin{array}{c} B_\Delta + B_u D_y^c D_{y,\Delta} \\ B_y^c D_{y,\Delta} \\ \hline D_{e,\Delta} + D_{e,u} D_y^c D_{y,\Delta} \\ D_{y,\Delta} \\ D_y^c D_{y,\Delta} \end{array} \right) \Delta \left\{ I - (D_\Delta + D_{\Delta,u} D_y^c D_{y,\Delta}) \cdot \Delta \right\}^{-1} \cdot \\
 & \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} C_\Delta + D_{\Delta,u} D_y^c C_y & D_{\Delta,u} C^c & D_{\Delta,u} D_r^c & D_{\Delta,p} + D_{\Delta,u} D_y^c D_{y,p} \end{array} \right) \quad (7.3-1)
 \end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 A^c = & \begin{pmatrix} \bar{A} - \Pi \bar{C} - \bar{B} \sigma M & \bar{B} \\ -(I - \sigma O) \sigma M & I - \sigma O \end{pmatrix} ; \quad B_r^c = \begin{pmatrix} \bar{B} \sigma U \\ (I - \sigma O) \sigma U \end{pmatrix} ; \quad B_y^c = \begin{pmatrix} \Pi - \bar{B} \sigma P \\ -(I - \sigma O) \sigma P \end{pmatrix} \\
 C^c = & (-\sigma M \quad I) ; \quad D_r^c = \sigma U ; \quad D_y^c = -\sigma P \quad (7.3-2)
 \end{aligned}$$

La hipótesis de que la matriz $D_{y,u}$ sea nula se basa en que los procesos reales suelen caracterizarse porque las salidas medidas que se emplean para control no están acopladas directamente con las acciones de control. No obstante, es posible obtener también la representación del bucle cerrado cuando dicha matriz es no nula, aunque esta resulta mucho más compleja.

Una vez obtenida la representación del bucle cerrado el siguiente paso es utilizar las condiciones basadas en LMIs deducidas en el capítulo anterior. En concreto, para verificar la estabilidad robusta utilizando una función de Lyapunov cuadrática sin dependencia se dedujo la condición (6.3-135). Si se aplica dicha condición al caso particular del bucle cerrado formado por el sistema LPV más el controlador-observador GPC (7.3-1) se obtiene la condición:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ * \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{cc|c} -Q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q & \\ \hline \mathbf{0} & & V \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} I & \mathbf{0} \\ A_{BC} & B_{BC,\Delta} \\ \hline \mathbf{0} & I \\ C_{BC,\Delta} & D_{BC,\Delta} \end{array} \right) < 0 \\
 A_{BC} = & \begin{pmatrix} A + B_y D_y^c C_u & B_u C^c \\ B_y^c C_y & A^c \end{pmatrix}, \quad B_{BC,\Delta} = \begin{pmatrix} B_\Delta + B_u D_y^c D_{y,\Delta} \\ B_y^c D_{y,\Delta} \end{pmatrix} \\
 C_{BC,\Delta} = & (C_\Delta + D_{\Delta,u} D_y^c C_y \quad D_{\Delta,u} C^c), \quad D_{BC,\Delta} = (D_\Delta + D_{\Delta,u} D_y^c D_{y,\Delta})
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix}^T V \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix} > 0, \quad V_{11} < 0, \quad \forall \Delta \quad (7.3-3)$$

Es posible emplear, también, condiciones relativas a: normas, especificaciones en el dominio del tiempo y/o restricciones, tal y como ya se ha analizado en el capítulo precedente. Finalmente, en base a estas condiciones es posible plantear el diseño de los parámetros del controlador-observador GPC (horizontes, matrices de ponderación y polos del observador) con las mismas ideas propuestas en el capítulo anterior:

- Maximizar el tamaño del conjunto de valores para los parámetros inciertos del modelo del proceso que estabiliza el controlador-observador.
- Diseños h_∞ , h_∞/h_2 , etc. fijado un determinado modelo incierto.
- Asignar especificaciones al bucle cerrado maximizando el conjunto de valores de los parámetros inciertos.
- Etc.

7.3.1. Aplicación a una unión flexible

En este punto se van a diseñar controladores-observadores GPC para el sistema no lineal constituido por una unión flexible entre un motor y una barra en rotación [Perez y Berná 1998] que se muestra en la figura 7.1.

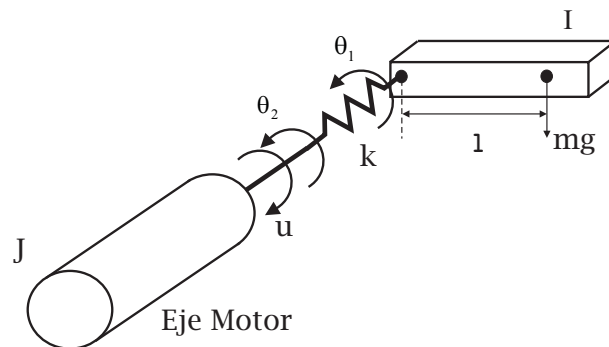


FIGURA 7.1: Unión flexible entre motor y barra

El modelo de este sistema no lineal es:

$$I\ddot{\theta}_1 = -mgl \sin \theta_1 - k(\theta_1 - \theta_2) - c_1 \dot{\theta}_1 \quad (7.3-4)$$

$$J\ddot{\theta}_2 = k(\theta_1 - \theta_2) + u - c_2 \dot{\theta}_2 \quad (7.3-5)$$

con $m = 0.5$ Kg, $k = 0.2$ N/rad, $J = 0.03$ Kg · m², $I = 0.008$ Kg · m², $l = 0.03$ m, $g = 9.8$ m/s² y $c_1 = c_2 = 0.01$ N·s/m.

En este sistema no linealidad viene impuesta por el término $\text{sen } \theta_1$.

Para obtener una representación LPV que incluya a este sistema no lineal se obtiene una representación interna del modelo anterior tomando como variables de estado a θ_1 , θ_2 , $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -mgl/I \cdot \text{sen } \theta_1/\theta_1 - k/I & k/I & -c_1/I & 0 \\ k/J & -k/J & 0 & -c_2/J \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J \end{pmatrix} \quad (7.3-6)$$

Para obtener la dependencia LPV se toma como parámetro variable con el tiempo a $\delta = \text{sen } \theta_1/\theta_1$, el cual siempre pertenecerá al intervalo $[\text{mín}(\text{sen } \theta_1^{\text{max}}/\theta_1^{\text{max}}, \text{sen } \theta_1^{\text{min}}/\theta_1^{\text{min}}), 1]$, siendo θ_1^{max} y θ_1^{min} los valores máximo y mínimo, respectivamente, que toma θ_1 . Con la introducción de δ la matriz A depende afínmente de él mientras que la matriz B es constante.

Este modelo LPV es continuo y hay que discretizarlo. Para ello se obtiene una aproximación de la exponencial de la matriz A tomando un desarrollo de hasta orden 2 [Astrom y Wittenmark 1997]:

$$A_d = e^{A \cdot T} \approx I + A \cdot T + \frac{1}{2} A^2 \cdot T^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{kT^2}{2I} & \frac{kT^2}{2I} & T - \frac{c_1 T^2}{2I} & 0 \\ \frac{kT^2}{2J} & 1 - \frac{kT^2}{2J} & 0 & T - \frac{c_2 T^2}{2J} \\ -\frac{kT}{I} + \frac{kc_1 T^2}{2I^2} & \frac{kT}{I} - \frac{kc_1 T^2}{2I^2} & 1 - \frac{c_1 T}{I} - \frac{kT^2}{2I} + \frac{c_1^2 T^2}{2I^2} & \frac{kT^2}{2I} \\ \frac{kT}{J} - \frac{c_2 kT^2}{2J^2} & -\frac{kT}{J} + \frac{c_2 kT^2}{2J^2} & \frac{kT^2}{2J} & 1 - \frac{c_2 T}{J} - \frac{kT^2}{2J} + \frac{c_2^2 T^2}{2J^2} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -\frac{mglT^2}{2I} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{mglT}{I} + \frac{mglc_1 T^2}{2I^2} & -\frac{mglT^2}{2I} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3-7)$$

$$B_d \approx \left(I \cdot T + \frac{1}{2} A \cdot T^2 \right) B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T^2}{2J} \\ 0 \\ \frac{T}{J} - \frac{c_2 T^2}{2J^2} \end{pmatrix} \quad (7.3-8)$$

El utilizar un desarrollo de segundo orden se debe a que para conseguir una buena aproximación entre la matriz exacta y la aproximada con un desarrollo de primer orden es necesario tomar periodos de muestreo muy bajos ($T \leq 0.001s$). Sin embargo, con el desarrollo de segundo orden se pueden utilizar periodos del orden de $T = 0.01s$. Por otro lado, a pesar un de ser un desarrollo de segundo orden la dependencia de A_d con respecto de δ es afín y la matriz B_d es constante, al igual que ocurría con el modelo continuo.

7.3 Diseño del controlador-observador GPC para sistemas LPV

En este sistema no lineal la salida a analizar es el ángulo θ_1 , por ello el resto de matrices del modelo discretizado son:

$$C_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; D_d = 0 \quad (7.3-9)$$

A partir de esta representación interna discretizada se obtiene la siguiente representación LPV discreta:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{y}_\Delta \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_\Delta & \mathbf{B}_u \\ \hline \mathbf{C}_\Delta & \mathbf{D}_\Delta & \mathbf{D}_{\Delta,u} \\ \mathbf{C}_y & \mathbf{D}_{y,\Delta} & \mathbf{D}_{y,u} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}_\Delta \\ u \end{pmatrix}, \mathbf{u}_\Delta = \Delta(k)\mathbf{y}_\Delta, \Delta(k) = \begin{pmatrix} \delta(k) & 0 \\ 0 & \delta(k) \end{pmatrix} \quad (7.3-10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{kT^2}{2I} & \frac{kT^2}{2I} & T - \frac{c_1 T^2}{2I} & 0 \\ \frac{kT^2}{2J} & 1 - \frac{kT^2}{2J} & 0 & T - \frac{c_2 T^2}{2J} \\ -\frac{kT}{I} + \frac{kc_1 T^2}{2I^2} & \frac{kT}{I} - \frac{kc_1 T^2}{2I^2} & 1 - \frac{c_1 T}{I} - \frac{kT^2}{2I} + \frac{c_1^2 T^2}{2I^2} & \frac{kT^2}{2I} \\ \frac{kT}{J} - \frac{c_2 kT^2}{2J^2} & -\frac{kT}{J} + \frac{c_2 kT^2}{2J^2} & \frac{kT^2}{2J} & 1 - \frac{c_2 T}{J} - \frac{kT^2}{2J} + \frac{c_2^2 T^2}{2J^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_\Delta = \begin{pmatrix} -\frac{mglT^2}{2I} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{mglT}{I} + \frac{mglc_1 T^2}{2I^2} & -\frac{mglT^2}{2I} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{B}_u = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T^2}{2J} \\ 0 \\ \frac{T}{J} - \frac{c_2 T^2}{2J^2} \end{pmatrix} ; \mathbf{C}_\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_\Delta = \mathbf{0}_2 ; \mathbf{D}_{\Delta,u} = \mathbf{0}_{2 \times 1} ; \mathbf{C}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{D}_{y,\Delta} = \mathbf{0}_{1 \times 2} ; \mathbf{D}_{y,u} = 0$$

Para esta representación LPV se van a diseñar controladores-observadores GPC para un periodo de muestreo de $T = 0.01s$ con las siguientes especificaciones:

- $-\theta_1^{min} = \theta_1^{max} = 45^\circ$, lo que implica que $\delta(k) \in [0.9003, 1]$.
- La acción de control u debe estar entre -10 y 10 .
- El tiempo de establecimiento en bucle cerrado debe de ser inferior al 90% del tiempo de establecimiento correspondiente al bucle abierto.
- Se ha de minimizar la norma infinito entre la señal de referencia y θ_1 .
- Se ha de maximizar el conjunto de posibles estados iniciales para los cuales se verifiquen todas las condiciones anteriores.

Las dos últimas especificaciones parecen, en principio, contrapuestas, por ello para poder resolver este problema de diseño se utilizará un algoritmo genético multiobjetivo. En concreto, tras 30 generaciones de este algoritmo genético se obtuvo el frente de Pareto que se muestra en la figura 7.2.

Si se desea utilizar la solución de mínima norma infinito, a partir de este frente se obtiene que el controlador GPC correspondiente proporciona una norma infinito de 1.1257

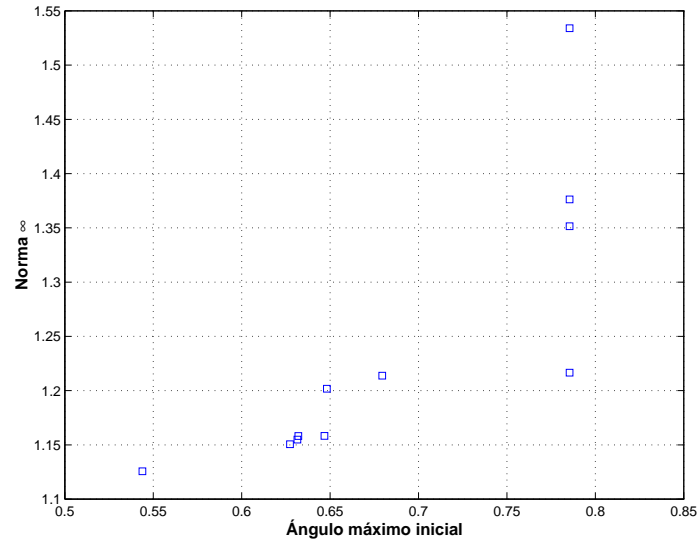


FIGURA 7.2: Frente de Pareto para el problema de optimización multiobjetivo asociado al diseño del GPC para la junta flexible

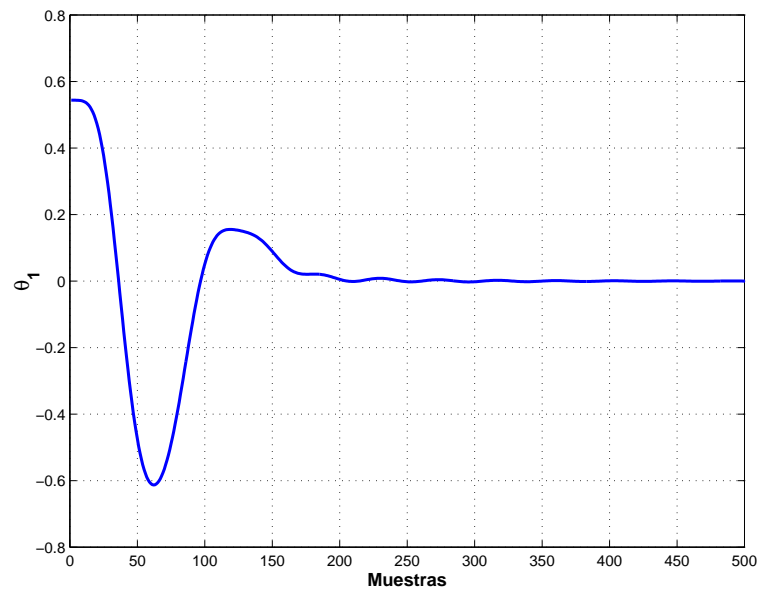


FIGURA 7.3: Respuesta de θ_1 en bucle cerrado empleando el GPC de mínima norma infinito.

y un ángulo máximo inicial de 0.5438 rad, es decir, 31.1574 °. En las figuras 7.3 y 7.4 se han representado, respectivamente, la evolución temporal del ángulo θ_1 y de la acción de control cuando se controla la junta flexible con este GPC tomando como estado inicial aquel en que ésta se encuentra en equilibrio y $\theta_1(0) = 0.5438$. En ellas se observa, en primer lugar, que ambas señales no violan las restricciones impuestas, y que el tiempo de establecimiento resultante es de aproximadamente 250 muestras, es decir, 2.5 s el cual es muy inferior al tiempo de establecimiento en bucle abierto (23.51 s).

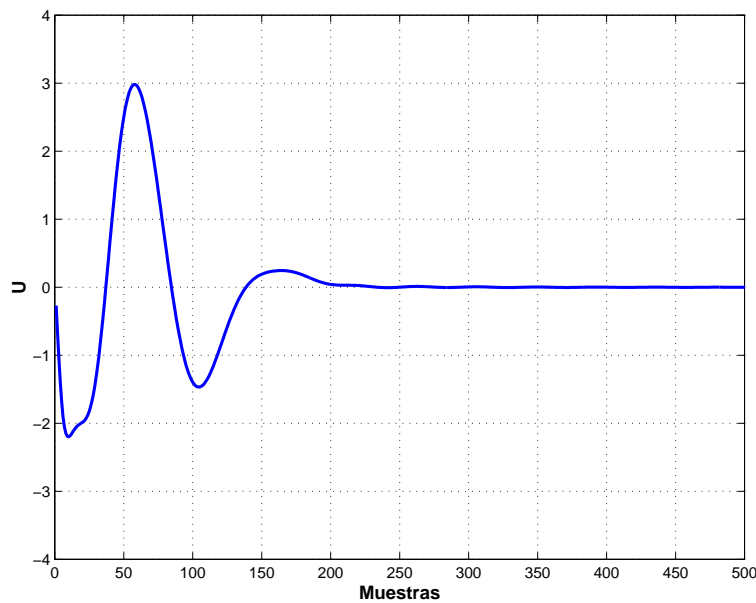


FIGURA 7.4: Acción de control aplicada sobre la junta flexible cuando se emplea el GPC de mínima norma infinito.

7.4. Controladores LPV robustos

Un controlador robusto de planificación de ganancia o de parámetros variables con el tiempo (LPV) para el sistema LPV (7.2-2)(7.2-10) posee la estructura [Apkarian *et al.* 2000]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^c(k+1) \\ y_{\Delta}^c \\ \bar{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} A^c & B_{\Delta}^c & B_r^c & B_y^c \\ \hline C_{\Delta}^c & D_{\Delta}^c & D_{\Delta,r}^c & D_{\Delta,y}^c \\ \hline C^c & D_{u,\Delta}^c & D_r^c & D_y^c \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}^c(k) \\ u_{\Delta}^c \\ \bar{\omega} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \quad u_{\Delta}^c = \Delta^c(\Delta_m(k)) y_{\Delta}^c \quad (7.4-1)$$

Obsérvese cómo la matriz de incertidumbre del controlador sólo depende de la parte de la incertidumbre del sistema LPV que es medida en línea. Una forma trivial de elegir dicha dependencia es tomar: $\Delta^c(\Delta_m) = \Delta_m$.

Existe una gran variedad de trabajos [Becker y Packard 1994; Packard 1994; Helmersson 1995; El Gahoui y Scorletti 1996; Scorletti y El Ghaoui 1998; Apkarian y Tuan 1998;

[Scherer 2001; Wang y Balakrishnan 2002] que proponen diversos diseños de controladores de parámetros variables con el tiempo basados en LMIs. Las principales diferencias entre ellos están relacionadas con: el tipo de dependencia paramétrica adoptado y las condiciones suficientes basadas en LMIs que permiten el diseño del controlador. La mayor parte de los trabajos analizados en la literatura están referidos al caso de sistemas continuos, aunque es posible encontrar alguna referencia que trabaja el caso discreto [Apkarian *et al.* 2000].

7.4.1. Controlador-observador GPC-LPV

Un objetivo importante de este capítulo es el diseño de controladores-observadores GPC que incorporen la medida en línea de la incertidumbre para el control de sistemas no lineales cuyas trayectorias están incluidas dentro de las de un sistema LPV. Esta idea va a dar lugar al controlador-observador GPC-LPV, que es una versión ampliada del GPC desarrollado anteriormente (6.2-3), al cual se le incorpora la capacidad de modificar las acciones de control en función de la medida disponible de la incertidumbre. Así pues, combinando las ecuaciones (6.2-3) y (7.4-1) se obtiene la siguiente estructura para el GPC-LPV:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^c(k+1) \\ \mathbf{y}_\Delta^c \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|ccc} \bar{\mathbf{A}} - \Pi\bar{\mathbf{C}} - \bar{\mathbf{B}}\sigma\mathbf{M} & \bar{\mathbf{B}} & \mathbf{B}_\Delta^c & \bar{\mathbf{B}}\sigma\mathbf{U} & \Pi - \bar{\mathbf{B}}\sigma\mathbf{P} \\ -(I - \sigma\mathbf{O})\sigma\mathbf{M} & I - \sigma\mathbf{O} & \mathbf{D}_\Delta^c & (I - \sigma\mathbf{O})\sigma\mathbf{U} & -(I - \sigma\mathbf{O})\sigma\mathbf{P} \\ \mathbf{C}_\Delta^c & & \mathbf{D}_\Delta^c & \mathbf{D}_{\Delta,r}^c & \mathbf{D}_{\Delta,y}^c \\ -\sigma\mathbf{M} & \mathbf{I} & \mathbf{D}_{u,\Delta}^c & \sigma\mathbf{U} & -\sigma\mathbf{P} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}^c(k) \\ \mathbf{u}_\Delta^c \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \quad (7.4-2)$$

$$\mathbf{u}_\Delta^c = \Delta^c (\Delta_m(k)) \mathbf{y}_\Delta^c$$

en este controlador-observador las matrices $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{C}}$, \mathbf{M} , \mathbf{O} , \mathbf{P} , \mathbf{U} , Π y σ son fijadas una vez seleccionados los parámetros del controlador-observador GPC: horizontes, matrices de ponderación y polos del observador; tal y como ya ocurría en capítulos anteriores. La principal novedad es la aparición de unas nuevas matrices que corresponden a la parte variable con el tiempo del controlador-observador: \mathbf{B}_Δ^c , \mathbf{C}_Δ^c , \mathbf{D}_Δ^c , $\mathbf{D}_{\Delta,r}^c$, $\mathbf{D}_{\Delta,y}^c$ y $\mathbf{D}_{u,\Delta}^c$. Estas matrices son nuevos grados de libertad añadidos y tendrán que ser diseñadas para garantizar, al menos, la estabilidad robusta del bucle cerrado formado por el sistema LPV y el GPC-LPV.

En la figura 7.5 se ha representado gráficamente el diagrama de bloques correspondiente el bucle cerrado formado por el sistema LPV y el controlador-observador GPC-LPV.

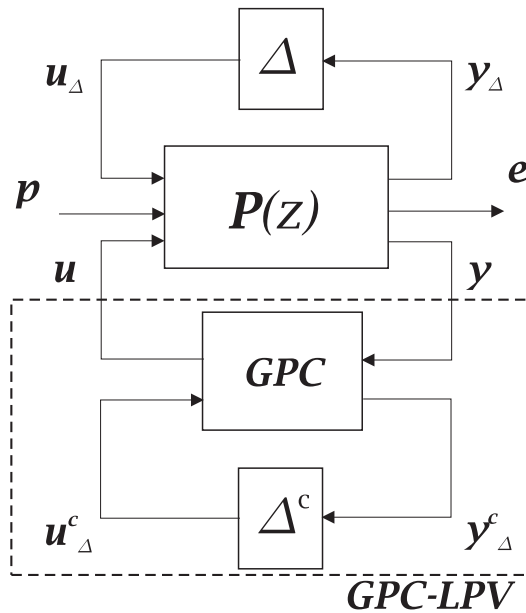


FIGURA 7.5: Bucle cerrado conformado por el sistema LPV y el controlador GPC-LPV.

Para desarrollar la metodología de diseño del GPC-LPV se va a simplificar su estructura (7.4-2) resolviendo su correspondiente LFT, la cual da lugar a:

$$\text{GPC-LPV} = \left(\begin{array}{c|cc} A^c & B_r^c & B_y^c \\ \hline C^c & D_r^c & D_y^c \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} B_\Delta^c \\ D_{u,\Delta}^c \end{array} \right) \Delta^c \{I - D_\Delta^c \Delta^c\}^{-1} \left(\begin{array}{c|cc} C_\Delta^c & D_{\Delta,r}^c & D_{\Delta,y}^c \end{array} \right) \quad (7.4-3)$$

Hay que tener en cuenta que el controlador-observador GPC-LPV (7.4-3), en general, no poseerá efecto integral, ya que aunque la matriz de estado del controlador-observador GPC, A^c , tenga un número de polos en 1 igual al número de salidas controladas, esto no garantiza que la matriz de estado variable con el tiempo del GPC-LPV:

$$A^c + B_\Delta^c \Delta^c (I - D_\Delta^c \Delta^c)^{-1} C_\Delta^c \quad (7.4-4)$$

también los tenga. Este hecho puede producir que el GPC-LPV no pueda garantizar, a priori, el seguimiento de referencias constantes.

Para solventar este problema se propone la siguiente metodología de selección de las matrices del GPC-LPV (7.4-3). En primer lugar se obtiene una transformación lineal, T , de los estados del controlador-observador GPC que garantice la obtención de la siguiente estructura para la representación transformada:

$$AS^c = T^{-1}A^cT = \begin{pmatrix} A^{c'} & Z \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix}, \quad BS_r^c = T^{-1}B_r^c = \begin{pmatrix} BS_r^{c'} \\ X \end{pmatrix}$$

$$BS_y^c = T^{-1}B_y^c = \begin{pmatrix} BS_y^{c'} \\ -X \end{pmatrix}, \quad CS^c = C^cT$$

n representa el número de salidas controladas, Z y X pueden ser cualquier matriz con las dimensiones apropiadas. Esta transformación siempre existe ya que la matriz A^c tiene n polos en 1, como ya se ha comentado.

Realizando el cambio de variables de estado asociado a la matriz T el GPC-LPV (7.4-2) tiene la siguiente representación interna alternativa:

$$\text{GPC-LPV} = \left(\begin{array}{cc|ccc} \left[\begin{array}{cc} A^c & Z \\ \mathbf{0} & I_n \end{array} \right] & & BS_{\Delta}^c & \left[\begin{array}{c} BS_r^c \\ X \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} BS_y^c \\ -X \end{array} \right] \\ \hline CS_{\Delta}^c & & D_{\Delta}^c & D_{\Delta,r}^c & D_{\Delta,y}^c \\ CS^c & & D_{u,\Delta}^c & D_r^c & D_y^c \end{array} \right) \quad (7.4-5)$$

de esta última representación se deduce que el efecto integral del GPC se mantendrá en el GPC-LPV si la matriz BS_{Δ}^c es de la forma:

$$BS_{\Delta}^c = \begin{pmatrix} BS_{\Delta}^{c'} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (7.4-6)$$

donde la matriz nula debe tener un número de filas igual a n .

De este análisis se concluye que antes de diseñar el GPC-LPV se ha de obtener esta transformación T . Una vez realizado el cambio de variables de estado, a partir de (7.4-5) el GPC-LPV toma la estructura:

$$\text{GPC-LPV} = \left(\begin{array}{cc|cc} AS^c & BS_r^c & BS_y^c & \\ \hline CS^c & D_r^c & D_y^c & \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} BS_{\Delta}^{c'} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \\ \hline D_{u,\Delta}^c \end{array} \right) \Delta^c \{I - D_{\Delta}^c \Delta^c\}^{-1} \left(\begin{array}{cc|cc} CS_{\Delta}^c & & D_{\Delta,r}^c & D_{\Delta,y}^c \end{array} \right) \quad (7.4-7)$$

Tomando las representaciones en espacio de estados del sistema LPV (7.2-3) y del controlador-observador GPC-LPV (7.4-7) es posible obtener una representación en espacio de estados del bucle cerrado que incluya al vector de acciones de control, bajo la hipótesis de que la matriz $D_{y,u}$ es nula:

$$\begin{pmatrix} A + B_u D_y^c C_y & B_u C S^c & B_u D_r^c & B + B_u D_y^c D_{y,p} \\ BS_y^c C_y & A S^c & BS_r^c & BS_y^c D_{y,p} \\ \hline C + D_{e,u} D_y^c C_y & D_{e,u} C S^c & D_{e,u} D_r^c & D + D_{e,u} D_y^c D_{y,p} \\ C_y & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{y,p} \\ D_y^c C_y & C S^c & D_r^c & D_y^c D_{y,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{\Delta} + B_u D_y^c D_{y,\Delta} & B_u D_{u,\Delta}^c \\ BS_y^c D_{y,\Delta} & BS_{\Delta}^c \\ \hline D_{e,\Delta} + D_{e,u} D_y^c D_{y,\Delta} & D_{e,u} D_{u,\Delta}^c \\ D_{y,\Delta} & \mathbf{0} \\ D_y^c D_{y,\Delta} & D_{u,\Delta}^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta^c \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D_{\Delta} + D_{\Delta,u} D_y^c D_{y,\Delta} & D_{\Delta,u} D_{u,\Delta}^c \\ D_{\Delta,y}^c D_{y,\Delta} & D_{\Delta}^c \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta^c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C_\Delta + D_{\Delta,u} D_y^c C_y & D_{\Delta,u} C S^c & \left| \begin{array}{cc} D_{\Delta,u} D_r^c & D_{\Delta,p} + D_{\Delta,u} D_y^c D_{y,p} \\ D_{\Delta,r}^c & D_{\Delta,y}^c D_{y,p} \end{array} \right. \end{pmatrix} \quad (7.4-8)$$

7.5. Diseño del controlador-observador GPC-LPV

En este punto se van a proponer diversas metodologías de diseño para el controlador-observador GPC-LPV basadas en las condiciones de estabilidad y de especificaciones presentadas en el capítulo anterior para sistemas con incertidumbre LFR variable con el tiempo.

Condiciones suficientes de estabilidad robusta

En concreto, para verificar la estabilidad robusta utilizando una función de Lyapunov cuadrática sin dependencia se dedujo la condición (6.3-135). Si se aplica dicha condición al caso particular del bucle cerrado formado por el sistema LPV más el controlador-observador GPC-LPV (7.4-8) se obtiene la condición:

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -Q & 0 & \left| 0 \\ 0 & Q & \left| 0 \\ 0 & 0 & \left| V \right. \right. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{BC} & B_{BC,\Delta} \\ 0 & I \\ C_{BC,\Delta} & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix} < 0$$

$$A_{BC} = \begin{pmatrix} A + B_y D_y^c C_u & B_u C S^c \\ B S_y^c C_y & A S^c \end{pmatrix}, \quad B_{BC,\Delta} = \begin{pmatrix} B_\Delta + B_u D_y^c D_{y,\Delta} & B_u D_{u,\Delta}^c \\ B S_y^c D_{y,\Delta} & B S_\Delta^c \end{pmatrix}$$

$$C_{BC,\Delta} = \begin{pmatrix} C_\Delta + D_{\Delta,u} D_y^c C_y & D_{\Delta,u} C S^c \\ D_{\Delta,y}^c C_y & C S_\Delta^c \end{pmatrix}, \quad D_{BC,\Delta} = \begin{pmatrix} D_\Delta + D_{\Delta,u} D_y^c D_{y,\Delta} & D_{\Delta,u} D_{u,\Delta}^c \\ D_{\Delta,y}^c D_{y,\Delta} & D_\Delta^c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \\ I \end{pmatrix}^T V \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \\ I \end{pmatrix} > 0, \quad V_{11} < 0, \quad \forall \tilde{\Delta}, \quad \tilde{\Delta} = \text{diag}(\Delta, \Delta^c) \quad (7.5-1)$$

Ha llegado el momento de tratar la dependencia de Δ^c en función de Δ_m . En esta tesis se propone una dependencia LFR, lo cual supone admitir una dependencia bastante general:

$$\Delta^c = \Delta_M^c + \Delta_L^c \Delta_m (I - \Delta_D^c \Delta_m) \Delta_R^c \quad (7.5-2)$$

siendo Δ_M^c , Δ_L^c , Δ_D^c y Δ_R^c matrices incógnitas. Evidentemente, como caso particular es posible realizar la elección $\Delta^c = \Delta_m$ con lo cual los criterios que se derivarán serán menos costosos computacionalmente, aunque seguramente más conservadores.

Volviendo a la condición (7.5-1), es importante observar que la primera desigualdad matricial no es una BMI ya que hay variables que están multiplicadas consigo mismas.

Para solventar este problema es necesario aplicar el *complemento de Schur* para derivar una nueva condición que sí dependa de BMIs. Tras las operaciones necesarias y admitir dependencia LFR para Δ^c se obtiene la siguiente condición suficiente de estabilidad cuadrática para el bucle cerrado:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{c|c} M^T \left(\begin{array}{c|c} -Q & 0 \\ 0 & Q \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ V \end{array} \right) & M - M_1^T M_2 \left(\begin{array}{c|c} Q & 0 \\ 0 & V_{22,22} \end{array} \right) M_2^T M_1 & M_1^T M_2 \left(\begin{array}{c|c} Q & 0 \\ 0 & V_{22,22} \end{array} \right) \\ \hline & \left(\begin{array}{c|c} Q & 0 \\ 0 & V_{22,22} \end{array} \right) M_2^T M_1 & - \left(\begin{array}{c|c} Q & 0 \\ 0 & V_{22,22} \end{array} \right) \end{array} \right) < 0 \\
 & M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{BC} & B_{BC,\Delta} \\ 0 & I \\ C_{BC,\Delta} & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & B_{BC,\Delta} \\ C_{BC,\Delta} & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} I_{n_{bc}} & 0 & 0 \\ 0 & 0_{n_d \times n_{dc}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_{dc}} \end{pmatrix} \quad (7.5-3) \\
 & \left(\begin{array}{c|c} (N_1 + N_2)^T \left(\begin{array}{c|c} -V & 0 \\ 0 & W \end{array} \right) N_1^T + N_1^T \left(\begin{array}{c|c} -V & 0 \\ 0 & W \end{array} \right) N_2 & N_3^T \left(\begin{array}{c|c} -V & 0 \\ 0 & W \end{array} \right) \\ \hline & \left(\begin{array}{c|c} -V & 0 \\ 0 & W \end{array} \right) N_3 & \left(\begin{array}{c|c} V_{11,22} & 0 \\ 0 & -W_{22,22} \end{array} \right) \end{array} \right) < 0 \\
 & N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_M^c & 0 & \Delta_L^c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_R^c & 0 & \Delta_D^c \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_M^c & 0 & \Delta_L^c \\ 0 & \Delta_R^c & 0 & \Delta_D^c \end{pmatrix} \\
 & \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{c|c} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_m \end{array} \right)^T & \left(\begin{array}{c|c} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_m \end{array} \right) \\ \hline I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right) W > 0, \quad W_{11} < 0 \quad \forall \Delta \\
 & V = \left(\begin{array}{c|c} V_{11} & V_{12} \\ \hline V_{12}^T & V_{22} \end{array} \right); \quad V_{11} = \left(\begin{array}{c|c} V_{11,11} & V_{11,12} \\ \hline V_{11,12}^T & V_{11,22} \end{array} \right); \quad V_{22} = \left(\begin{array}{c|c} V_{22,11} & V_{22,12} \\ \hline V_{22,12}^T & V_{22,22} \end{array} \right) \\
 & W = \left(\begin{array}{c|c} W_{11} & W_{12} \\ \hline W_{12}^T & W_{22} \end{array} \right); \quad W_{22} = \left(\begin{array}{c|c} W_{22,11} & W_{22,12} \\ \hline W_{22,12}^T & W_{22,22} \end{array} \right) \quad (7.5-4)
 \end{aligned}$$

n_{bc} es el número de estados del bucle cerrado, n_d la dimensión de Δ^2 y n_{dc} la dimensión de Δ^c . Las matrices $V_{11,11}$, $V_{22,11}$ y $W_{22,11}$ tienen el mismo tamaño que la matriz Δ , las matrices $V_{11,22}$ y $V_{22,22}$ tienen el mismo tamaño que Δ^c y la matriz $W_{22,22}$ tiene el mismo tamaño que la matriz Δ_m . Las condiciones (7.5-4) pueden simplificarse considerablemente si se toma $\Delta^c = \Delta_m$.

Esta condición suficiente de estabilidad se basa en detectar si existe solución factible para un conjunto de BMIs.

Una aplicación directa de esta condición es que una vez fijados los parámetros del GPC (horizontes, matrices de ponderación y polos del observador) y diseñando el mismo para el sistema LTI correspondiente a fijar un valor concreto de la incertidumbre en el sistema LPV (por ejemplo Δ_{nominal}), permita obtener las restantes matrices del GPC-LPV BS_{Δ}^c , CS_{Δ}^c , $D_{\Delta,r}^c$, $D_{\Delta,y}^c$, D_{Δ}^c y $D_{u,\Delta}^c$ (matrices Δ) con la condición de que se satisfagan las BMIs (7.5-3) (7.5-4). Si dichas BMIs son resolubles entonces se habrá obtenido un GPC-LPV que estabiliza al sistema LPV y, por consiguiente, al sistema no lineal.

Como ya se comentó en el capítulo anterior, una alternativa más interesante es la que emplea la condición de estabilidad (7.5-3) (7.5-4) para obtener los parámetros del controlador-observador GPC-LPV: horizontes, matrices de ponderación, polos del observador y matrices Δ , maximizando el conjunto de posibles incertidumbres Δ . Este problema de maximización suele ser multiobjetivo y no convexo, y puede ser resuelto mediante algoritmos genéticos multiobjetivo, tal y como ya se analizó en el capítulo anterior.

Nota 7.5.1 Es posible obtener condiciones de estabilidad menos conservadoras utilizando funciones de Lyapunov dependientes de la incertidumbre. La principal desventaja de estas alternativas es que su formulación en términos de BMIs se vuelve mucho más compleja que (7.5-3) (7.5-4).

Condiciones de satisfacción de restricciones basadas en normas

Este punto sigue las mismas líneas que el correspondiente al capítulo anterior pero aplicado a sistemas LPV. Combinando todas las ideas expuestas hasta ahora en este capítulo y las ideas relativas a sistemas con incertidumbre variable con el tiempo se puede deducir, por ejemplo, la siguiente condición suficiente que acota superiormente

²Se supone que es cuadrada, aunque se puede extender al caso rectangular.

la norma infinito para el canal p/e por γ :

$$\begin{aligned}
 & \left(L^T \left(\begin{array}{c|c|c} -Q & 0 & 0 \\ \hline 0 & Q & 0 \\ \hline 0 & -\gamma^2 I_m & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 & V \end{array} \right) L^T - L_1^T L_2 \left(\begin{array}{c|c|c} Q & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & V_{22,22} \end{array} \right) L_2^T L_1 - L_1^T L_2 \left(\begin{array}{c|c|c} Q & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & V_{22,22} \end{array} \right) L_2^T L_1 - \left(\begin{array}{c|c|c} Q & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & V_{22,22} \end{array} \right) L_2^T L_1 \right) < 0 \\
 & L = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \hline A_{BC} & B_{BC,p} & B_{BC,\Delta} \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline C_{BC,e} & D_{BC,pe} & D_{BC,e\Delta} \\ \hline 0 & 0 & I \\ \hline C_{BC,\Delta} & D_{BC,\Delta p} & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_{BC,\Delta} \\ 0 & 0 & D_{BC,e\Delta} \\ \hline C_{BC,\Delta} & D_{BC,\Delta p} & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} I_{n_{bc}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n_d \times n_{dc}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_{dc}} \end{pmatrix} \\
 & B_{BC,p} = \begin{pmatrix} B + B_u D_y^c D_y, p \\ \hline B S_y^c D_y, p \end{pmatrix}, \quad C_{BC,e} = \begin{pmatrix} C + D_{e,u} D_y^c C_y & D_{e,n} C S^c \end{pmatrix}, \quad D_{BC,pe} = D + D_{e,u} D_y^c D_y, p \\
 & D_{BC,e\Delta} = D_{e,\Delta} + D_{e,u} D_y^c D_y, \Delta, \quad D_{BC,\Delta p} = \begin{pmatrix} D_{\Delta,p} + D_{\Delta,u} D_y^c D_y, p \\ \hline D_{\Delta,y}^c D_y, p \end{pmatrix} \tag{7.5-5}
 \end{aligned}$$

más las BMIs (7.5-4). m es el tamaño de p y r el de e .

Expresiones similares permiten calcular cotas superiores para la norma 1 o 2 del canal p/e .

Nota 7.5.2 La condición (7.5-5) se ha basado en una función de Lyapunov sin dependencia. Es posible reducir su conservadurismo utilizando funciones de Lyapunov dependientes de la incertidumbre.

Con las condiciones de acotación de las normas se pueden utilizar las mismas propuestas del capítulo anterior para el diseño de controladores-observadores GPC-LPV:

- Obtención del GPC LPV que minimiza la norma infinito de un determinado canal entrada (p) /salida (e) fijado un determinado modelo incierto para el proceso. Este mismo problema puede plantearse minimizando la norma 2 o 1 de un determinado canal.
- Obtención del GPC LPV que optimiza un problema h_∞/h_2 . Este problema supone minimizar la norma infinito de algún canal y garantizar una determinada norma 2 para otro canal entrada(p)/salida(e), para un modelo incierto del proceso concreto.

Problemas similares son: h_∞/l_1 , h_2/h_∞ , h_2/l_1 , l_1/h_∞ y l_1/h_2 . Todos ellos se pueden resolver mediante algoritmos genéticos.

- Otra clase de problemas más complejos son aquellos en los que se pretende minimizar de forma simultánea diferentes tipos de normas asociados a diferentes canales entrada/salida y/o maximizar el tamaño del conjunto de valores para los parámetros inciertos, que se ha de estabilizar.

Nota 7.5.3 *Los problemas relativos a asignar los polos del bucle cerrado en determinadas regiones del plano complejo, se basan en las mismas ideas desarrolladas en el apartado correspondiente del capítulo anterior, pero teniendo en cuenta el carácter LPV de los sistemas, tal y como se viene realizando en el presente capítulo.*

Inclusión de restricciones

Al igual que para el caso de sistemas lineales, la satisfacción de restricciones también es muy importante en sistemas no lineales. Sin embargo, para los controladores LPV hay otra razón que justifica la necesidad de incluir restricciones: garantizar que la evolución temporal del bucle cerrado jamás abandone la zona de operación definida por el conjunto Δ . Esta condición es vital, ya que si durante el control el sistema LPV abandona dicha zona no hay garantía alguna de que el bucle cerrado sea estable, pues el diseño sólo asegura estabilidad dentro de esta zona de operación.

Este problema sólo ha sido considerado en algunas publicaciones [El Gahoui y Scorletti 1996; Dussy y El Ghaoui 1998; El Ghaoui y Niculescu 2000], y la solución del mismo se basa, simplemente, en incorporar restricciones sobre las variables que integran Δ para que éstas no abandonen la zona de operación definida de antemano. La incorporación de restricciones se basa en la obtención de elipsoides inescapables para el bucle cerrado, tal y como se hizo en el capítulo anterior.

Partiendo de las condiciones asociadas al elipsoide inescapable y la verificación de restricciones sobre las salidas (6.3-119) (6.3-123), se puede obtener una condición suficiente para que las salidas del sistema en bucle cerrado (7.4-8) (incluidas las acciones de control) verifiquen las restricciones cuando se aplica una referencia constante $\bar{\omega}_0$, adoptando un elipsoide con matriz P y vector b constantes, mediante la aplicación de la técnica *full block S-procedure*. La condición de existencia del elipsoide inescapable es:

$$\min_{P, b, \lambda, V, V_1, V_2, \sigma_j, \sigma_j^u} \text{Traza}(P)$$

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}^T \left(\begin{array}{ccc|ccc} -(1-\lambda)P & 0 & & & & \\ 0 & P & & & & \\ \hline & & 0 & I & & \\ & & I & 0 & & \\ \hline & & & & 0 & -(1-\lambda)b \\ & & & & -(1-\lambda)b^T & -\lambda \\ \hline & & & & & V \end{array} \right) \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ A_{BC} & 0 & B_{BC,\Delta} & 0 \\ \hline 0 & b & 0 & 0 \\ A_{BC} & 0 & 0 & B_{BC,\Delta} \\ \hline I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ C_{BC,\Delta} & 0 & D_{BC,\Delta} & 0 \\ C_{BC,\Delta} & 0 & 0 & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix} < 0$$

$$\lambda \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} & 0 \\ 0 & \tilde{\Delta} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T V \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} & 0 \\ 0 & \tilde{\Delta} \\ I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0 \quad V_{11} < 0, \quad \tilde{\Delta} = \text{diag}(\Delta, \Delta^c) \quad (7.5-6)$$

para las salidas controladas del sistema LPV la condición de verificación de restricciones dentro del elipsoide inescapable es:

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}^T \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_j - dy_j^2 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ \hline & & 0 & \sigma_j I & & \\ & & \sigma_j I & -\sigma_j P & & \\ \hline & & & & 0 & V_1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ [C_{y,j} \ 0] & \bar{y}_j & [D_{y,\Delta,j} \ 0] \\ \hline 0 & b & 0 \\ I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \\ C_{BC,\Delta} & 0 & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\sigma_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \\ I \end{pmatrix}^T V_1 \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \\ I \end{pmatrix} > 0 \quad V_{1,11} < 0 \quad (7.5-7)$$

las matrices $C_{y,j}$ y $D_{y,\Delta,j}$ representan la fija j -ésima de las matrices C_y y $D_{y,\Delta}$, y n es el número de salidas controladas.

La condición de verificación de restricciones para las acciones de control y para el vector de salidas auxiliares, e , es mucho más compleja debido a que los valores de \tilde{u}_j y \tilde{e}_j son dependientes de la incertidumbre, a diferencia de \tilde{y}_j que es constante. Esta misma circunstancia ya se presentó en el capítulo anterior al extender las condiciones a sistemas con incertidumbre. Por ejemplo, para las acciones de control la condición suficiente es:

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}^T \left(\begin{array}{cc|cc} \sigma_j^u - du_j^2 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \sigma_j^u \mathbf{I} & \\ \hline & & \sigma_j^u \mathbf{I} & -\sigma_j^u \mathbf{P} \\ & & \mathbf{0} & V_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C_{BC,u,j} & K_{A,j} & D_{BC,u\Delta,j} & K_{B,j} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ C_{BC,\Delta} & \mathbf{0} & D_{BC,\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_{C,j} & \mathbf{0} & K_{D,j} \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\sigma_j^u \geq 0 \quad j = 1, \dots, m, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta' \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T V_2 \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta' \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} > 0 \quad V_{2,11} < 0 \quad (7.5-8)$$

las matrices $K_{A,j}$, $K_{B,j}$, $K_{C,j}$ y $K_{D,j}$ corresponden a la representación LFR de \tilde{u}_j siendo Δ' su matriz de incertidumbre asociada, que es función de $\tilde{\Delta}$. m es el número de acciones de control. Las matrices $C_{BC,u,j}$ y $D_{BC,u\Delta,j}$ son las filas j -ésimas de las matrices:

$$C_{BC,u} = \begin{pmatrix} D_y^c C_y & C S^c \end{pmatrix}, \quad D_{BC,u\Delta} = \begin{pmatrix} D_y^c D_{y,\Delta} & D_{u,\Delta}^c \end{pmatrix} \quad (7.5-9)$$

Las condiciones (7.5-6), (7.5-7) y (7.5-8) no son BMIs, pero pueden transformarse de forma sencilla a BMIs aplicando el *complemento de Schur* tal y como ya se ha realizado en los puntos anteriores de esta sección.

Nota 7.5.4 Otras situaciones adicionales, como por ejemplo, referencias acotadas, perturbaciones acotadas, etc., pueden ser tratadas con las mismas ideas que las presentadas en el capítulo anterior.

7.5.1. Caso de sistemas LPV obtenidos por identificación

Si el modelo LPV se ha obtenido tras aplicar las ideas de la sección 7.2.1.1, la forma en la que se diseña el controlador GPC-LPV no se ve modificada. La diferencia reside en que ahora todas las señales que aparecen en el controlador son los incrementos de las

señales con respecto a los puntos de funcionamiento:

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}^c(k+1) \\ \mathbf{y}_\Delta^c \\ \Delta \bar{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AS^c & BS_\Delta^c & BS_r^c & BS_y^c \\ CS_\Delta^c & D_\Delta^c & D_{\Delta,r}^c & D_{\Delta,y}^c \\ CS^c & D_{u,\Delta}^c & D_r^c & D_y^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}^c(k) \\ \mathbf{u}_\Delta^c \\ \Delta \bar{\omega} \\ \Delta \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_\Delta^c = \Delta^c(\bar{\mathbf{y}}) \mathbf{y}_\Delta^c \quad (7.5-10)$$

y que la matriz Δ_c es función del punto de funcionamiento.

El controlador GPC-LPV para cada punto de funcionamiento es tal que las matrices de la representación interna tienen una dependencia LFR con respecto a $\bar{\mathbf{y}}$:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_c(k+1) &= AS^c(\bar{\mathbf{y}}) \Delta \mathbf{x}_c(k) + BS_r^c(\bar{\mathbf{y}}) \Delta \bar{\omega}(k) + BS_y^c(\bar{\mathbf{y}}) \Delta \bar{\mathbf{y}}(k) \\ \Delta \bar{\mathbf{u}}(k) &= CS^c(\bar{\mathbf{y}}) \Delta \mathbf{x}_c(k) + D_r^c(\bar{\mathbf{y}}) \Delta \bar{\omega}(k) + D_y^c(\bar{\mathbf{y}}) \Delta \bar{\mathbf{y}}(k) \end{aligned} \quad (7.5-11)$$

Aplicando la misma metodología que en la sección 7.2.1.1 el controlador global será:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_c(k+1) - \mathbf{x}_c^{eq}(\bar{\mathbf{y}}) &= AS^c(\bar{\mathbf{y}}) (\mathbf{x}_c(k) - \mathbf{x}_c^{eq}(\bar{\mathbf{y}})) + BS_r^c(\bar{\mathbf{y}}) (\bar{\omega}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)) + BS_y^c(\bar{\mathbf{y}}) (\bar{\mathbf{y}}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)) \\ \bar{\mathbf{u}}(k) - \bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{\mathbf{y}}) &= CS^c(\bar{\mathbf{y}}) (\mathbf{x}_c(k) - \mathbf{x}_c^{eq}(\bar{\mathbf{y}})) + D_r^c(\bar{\mathbf{y}}) (\bar{\omega}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)) + D_y^c(\bar{\mathbf{y}}) (\bar{\mathbf{y}}(k) - \bar{\mathbf{y}}(k)) \end{aligned} \quad (7.5-12)$$

Para garantizar que el controlador global coincida al ser linealizado en cada punto de funcionamiento con el controlador local, el estado del controlador en equilibrio deberá satisfacer la ecuación diferencial vectorial:

$$\begin{bmatrix} I - AS^c(\bar{\mathbf{y}}) \\ CS^c(\bar{\mathbf{y}}) \end{bmatrix} \frac{d\mathbf{x}_c^{eq}(\bar{\mathbf{y}})}{d\bar{\mathbf{y}}} = \begin{pmatrix} BS_r^c(\bar{\mathbf{y}}) + BS_y^c(\bar{\mathbf{y}}) \\ \frac{d\bar{\mathbf{u}}^{eq}}{d\bar{\mathbf{y}}} - D_r^c(\bar{\mathbf{y}}) - D_y^c(\bar{\mathbf{y}}) \end{pmatrix} \quad (7.5-13)$$

A diferencia del caso de ajuste de modelos y puntos de equilibrio, en esta ecuación el único grado de libertad son los estados del controlador en equilibrio, ya que los controladores locales ya están calculados así como ajustados los puntos de funcionamiento. Por ello, en general esta ecuación [Rugh y Shamma 2000] no tiene por qué tener solución, lo cual implicaría que el controlador global obtenido podría no conservar alguna de las especificaciones obtenidas por los locales: estabilidad, verificación de restricciones, condiciones basadas en normas, etc. Lo cual lo invalida a efectos prácticos, ya que no se podría garantizar ninguna de sus características.

Una posible solución a este problema, es tratar de garantizar durante el proceso de diseño del controlador GPC-LPV que esta ecuación diferencial posee solución. En el apéndice G sección G.2 se justifica que las siguientes condiciones son suficientes para garantizar la existencia de una solución para los estados del controlador en equilibrio:

7.6 Aplicación: vaporizador de gases

1. $D_{\Delta,r}^c + D_{\Delta,y}^c = 0$.
2. $CS_{\Delta}^c X^{-1} \begin{bmatrix} BS_{r'}^c + BS_{y'}^c & 0 \\ D_y^c + D_y^c & L_u \end{bmatrix} = 0$
3. $D_{\Delta}^c + CS_{\Delta}^c X^{-1} BS_{\Delta}^c = 0$.
4. $D_{\Delta}^c \frac{\partial \Delta_{eq}(\bar{y})}{\partial y_1} D_{\Delta}^c = D_{\Delta}^c \frac{\partial \Delta_{eq}(\bar{y})}{\partial y_2} D_{\Delta}^c$.

donde:

$$X = \begin{bmatrix} I - A^{c'} & -Z \\ CS^c & \end{bmatrix} \quad (7.5-14)$$

$\Delta_{eq}(\bar{y})$ es la matriz delta correspondiente a los puntos de equilibrio ajustados con dependencia LFR:

$$\bar{u}^{eq}(\bar{y}) = M_u + L_u \Delta_{eq}(\bar{y}) (I - D_u \Delta_{eq}(\bar{y}))^{-1} R_u \quad (7.5-15)$$

Estas condiciones deben incorporarse a las BMIs correspondientes al dicho de los controladores locales. Desde un punto de vista matemático, son restricciones matriciales de igualdad. La primera y la segunda son lineales con respecto a las incógnitas, mientras que la tercera es bilineal y la cuarta cuadrática. Las restricciones matriciales de igualdad pueden incorporarse sin problemas para ser resueltas por el programa comercial PENBMI, sin más que incluir, en su lugar, las dos desigualdades matriciales que equivalen a cada una de las restricciones de igualdad. Por otro lado, dicho programa admite también restricciones con dependencia cuadrática con respecto a las incógnitas, no sólo bilineales como se había comentado hasta el momento.

Finalmente, para poder aplicar el controlador global (7.5-12) es necesario integrar la ecuación diferencial vectorial (7.5-13) para obtener x_c^{eq} , lo cual se puede realizar siguiendo el procedimiento descrito en la sección G.1 del apéndice G.

7.6. Aplicación: vaporizador de gases

Se va a aplicar la metodología de diseño del GPC-LPV sobre un vaporizador de un componente (figura 7.6), muy utilizado en la industria del petróleo para vaporizar gases licuables, que en este caso va a ser propano líquido. El modelo no lineal de este sistema ha sido extraído de [Perez y Berná 1998; Luyben 1994]:

$$\begin{aligned} \dot{V}_L &= F_o - \frac{K}{\rho} \left(\frac{e^{A_1/T+A_2}}{T} \cdot T - \frac{RT}{M} \cdot \rho_v \right) \\ \dot{T} &= \frac{1}{V_L} \left[F_o(T_o - T) + \frac{Q}{\rho C_p} - \frac{K\lambda_v}{\rho C_p} \left(\frac{e^{A_1/T+A_2}}{T} \cdot T - \frac{RT}{M} \cdot \rho_v \right) \right] \end{aligned}$$

$$\dot{\rho}_v = \frac{1}{V - V_L} \left[\rho_v(F_o - F_v) + K(1 - \frac{\rho_v}{\rho}) \left(\frac{e^{A_1/T+A_2}}{T} \cdot T - \frac{RT}{M} \cdot \rho_v \right) \right] \quad (7.6-1)$$

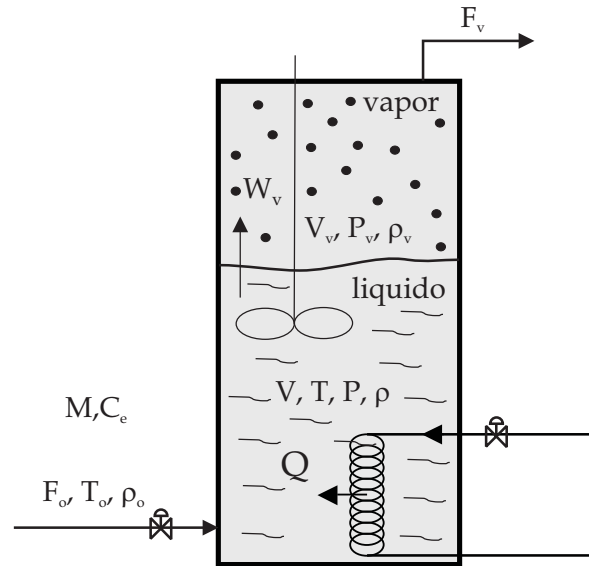


FIGURA 7.6: Esquema del vaporizador

En este modelo en espacio de estados las variables de estado son: T ($^{\circ}\text{C}$) la temperatura que presenta la fase líquida que se supone coincidente con la de la fase vapor, V_L (m^3) el volumen que ocupa la fase líquida y ρ_v (Kg/m^3) la densidad de la fase vapor. Las señales de entrada son tres: F_o (m^3/seg) caudal de entrada manipulable de propano líquido, Q (Kcal/seg) potencia calorífica manipulable que proporciona el intercambiador de calor y F_v (m^3/seg) caudal de extracción superior de propano vaporizado, que se asume constante e igual a $0.105 \text{ m}^3/\text{seg}$. Durante la fase de modelado se ha supuesto que la densidad de la fase líquida es constante e igual a $\rho = 500 \text{ Kg}/\text{m}^3$. El resto de señales que aparecen en el modelo se asumen constantes durante la operación, y sus valores junto con los de las constantes físicas se muestran en la tabla 7.1.

El siguiente paso es discretizar el modelo no lineal (7.6-1) a un periodo de muestreo T_s empleando un desarrollo de primer orden, ya que con periodos de muestreo entorno a 0.5 s se consigue una buena aproximación entre el modelo discretizado aproximado y el que se obtiene con la expresión exponencial. Dicho modelo discretizado es:

$$\begin{pmatrix} V_L(k+1) \\ T(k+1) \\ \rho_v(k+1) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_d \begin{pmatrix} V_L(k) \\ T(k) \\ \rho_v(k) \end{pmatrix} + \mathbf{B}_d \begin{pmatrix} F_o(k) \\ Q(k) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{K}{\rho} \frac{e^{A_1/T+A_2}}{T} \cdot T_s & \frac{KRT}{\rho M} \cdot T_s \\ 0 & 1 - \frac{K\lambda_v}{\rho C_p} \frac{e^{A_1/T+A_2}}{T} \frac{1}{V_L} \cdot T_s & \frac{K\lambda_v RT}{\rho C_p M} \frac{1}{V_L} \cdot T_s \\ 0 & \frac{1}{V - V_L} K \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho}\right) \frac{e^{A_1/T+A_2}}{T} \cdot T_s & 1 - \frac{1}{V - V_L} \left(F_v + K \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho}\right) \frac{RT}{M}\right) \cdot T_s \end{pmatrix}$$

7.6 Aplicación: vaporizador de gases

Nombre	Descripción	Valor
V	Volumen del vaporizador	3.14 m ³
T _o	Temperatura de la corriente de entrada	323 K
λ _v	Calor latente de vaporización	75 Kcal/Kg
C _p	Calor específico del líquido	0.6 Kcal/(Kg· K)
A ₁		-2359
A ₂		10.165
R	Constante de los gases perfectos	2 Kcal/(K· Kmol)
M	Masa molecular del propano	44 Kg/Kmol
K	Constante de vaporización	2.7554·10 ⁻⁵ Kg/(seg· Pa)

TABLA 7.1: Tabla de parámetros físicos del vaporizador

$$\mathbf{B}_d = \begin{pmatrix} T_s & 0 \\ \frac{1}{V_L}(T_o - T) \cdot T_s & \frac{1}{\rho C_p V_L} \cdot T_s \\ \frac{\rho_v}{V - V_L} \cdot T_s & 0 \end{pmatrix} \quad (7.6-2)$$

Las matrices \mathbf{A}_d y \mathbf{B}_d dependen de forma no lineal de las tres variables de estado, con lo cual habrá que tomar como parámetros variables con el tiempo a expresiones que contengan a dichas variables con el objeto de obtener un modelo LPV discreto:

$$\delta_1 = 1/V_L, \quad \delta_2 = T - T_o, \quad \delta_3 = \rho_v \quad (7.6-3)$$

La justificación de esta elección está asociada a la forma en la que se obtiene el modelo LPV a partir de \mathbf{A}_d y \mathbf{B}_d . Dicha obtención se ha omitido dada la complejidad de las expresiones que se presentan y, por ello, sólo se muestra el modelo LPV final.

Por otro lado, como aparece una dependencia exponencial con respecto de la temperatura en \mathbf{A}_d es necesario utilizar un desarrollo de Taylor de la misma para que se pueda obtener una incertidumbre variable de tipo LFR:

$$e^{A_1/T+A_2} \approx a_0 + a_1 \cdot (T - T_o) + a_2 \cdot (T - T_o)^2 \quad (7.6-4)$$

se ha elegido un desarrollo de orden 2 alrededor de T_o ya que se consigue un buen ajuste en el rango de temperaturas de trabajo. Con la introducción de estas incertidumbres variables con el tiempo y tomando como salidas a V_L y a T se obtiene el siguiente modelo LPV:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{y}_\Delta \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_\Delta & \mathbf{B}_u \\ \hline \mathbf{C}_\Delta & \mathbf{D}_\Delta & \mathbf{D}_{\Delta,u} \\ \mathbf{C}_y & \mathbf{D}_{y,\Delta} & \mathbf{D}_{y,u} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}_\Delta \\ \mathbf{u}(k) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_\Delta = \Delta(k)\mathbf{y}_\Delta$$

$$\Delta(k) = \text{Diag} \left(\delta_1(k)\mathbf{I}_2, \quad \delta_2(k), \quad \delta_3(k), \quad \delta_2(k)\mathbf{I}_4 \right) \quad (7.6-5)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{Ka_0 T_s}{\rho T_o} & \frac{KRT_s T_o}{\rho M} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{B}_\Delta &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{KRT_s}{\rho M} & \frac{KT_s}{\rho T_o} & -\frac{Ka_2 T_s}{\rho T_o} & -\frac{Ka_1 T_s}{\rho T_o} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{B}_u &= \begin{pmatrix} T_s & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{C}_\Delta &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{K\lambda_v a_0 T_s}{\rho C_p T_o} & \frac{K\lambda_v RT_s T_o}{\rho C_p M} \\ 0 & \frac{Ka_0 T_s}{T_o} & -F_v T_s - \frac{KRT_s T_o}{M} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Ka_0 T_s}{\rho T_o} & \frac{KRT_s T_o}{\rho M} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_0/T_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{D}_\Delta &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{K\lambda_v RT_s}{\rho C_p M} & \frac{KT_s \lambda_v}{\rho T_o C_p} & -\frac{K\lambda_v a_2 T_s}{\rho C_p T_o} & -\frac{K\lambda_v a_1 T_s}{\rho C_p T_o} \\ 0 & V & 0 & 1 & -\frac{KRT_s}{M} & -\frac{KT_s}{T_o} & \frac{\rho C_p T_o}{KT_s a_2} & \frac{\rho C_p T_o}{KT_s a_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{KRT_s}{\rho M} & \frac{KT_s}{\rho T_o} & -\frac{Ka_2 T_s}{\rho T_o} & -\frac{Ka_1 T_s}{\rho T_o} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/T_o & a_2/T_o & a_1/T_o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{D}_{\Delta,u} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{T_s}{\rho C_p} \\ 0 & 0 \\ -T_s & 0 \\ T_s & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{C}_y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{D}_{y,\Delta} &= \mathbf{0}_{2 \times 8} & \mathbf{D}_{y,u} &= \mathbf{0}_2 & (7.6-6)
 \end{aligned}$$

Un adecuado funcionamiento del vaporizador exige que éste se encuentre en equilibrio a una temperatura de $T_{eq} = T_o = 323$ K y ocupando la fase líquida la mitad del volumen del vaporizador $V_{L,eq} = 1.57$ m³. En estas condiciones es posible extraer el vapor también a una temperatura de 323 K. Siguiendo esta especificación se va a diseñar un controlador GPC-LPV que garantice la estabilidad asintótica del vaporizador alrededor de este punto de equilibrio suponiendo que la temperatura, el volumen del líquido y la densidad del vapor fluctúan dentro de los siguientes rangos: $300K \leq T \leq 350K$, $0.3V \leq V_L \leq 0.7V$ y $20Kg/m^3 \leq \rho_v \leq 30Kg/m^3$. Para el proceso real sólo se dispone de la

7.6 Aplicación: vaporizador de gases

medida de la temperatura y del volumen del líquido, con lo cual el GPC-LPV sólo podrá emplear estas medidas dentro de su parte variable con el tiempo:

$$\Delta_C(k) = f(\delta_1(k), \delta_2(k)) \quad (7.6-7)$$

En concreto, se optó por emplear la dependencia más sencilla posible:

$$\Delta_C(k) = \begin{pmatrix} \delta_1(k) & 0 \\ 0 & \delta_2(k) \end{pmatrix} \quad (7.6-8)$$

En primer lugar, se diseña un controlador-observador GPC para el modelo lineal obtenido a partir del LPV fijando para el volumen y la temperatura los valores correspondientes al equilibrio antes mencionado. Este modelo se puede considerar como el que representa el comportamiento del vaporizador alrededor del punto de equilibrio. Los valores empleados para los parámetros del GPC han sido:

- $N_1 = 1, N_2 = 120, N_u = 1.$
- $Q_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, R_i = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix} \forall i.$
- Polos del observador. Para la primera salida: 0.4, 0.5, 0.7 y 0.8. Para la segunda salida: 0.2, 0.4 y 0.7.

Estos parámetros fueron ajustados manualmente tras una serie de experimentos sobre el vaporizador, los cuales garantizan para el bucle cerrado formado por el modelo LPV del vaporizador y el GPC estabilidad en los intervalos de variación fijados para las salidas. Dicha garantía se basa en la satisfacción de las condiciones basadas en LMIs presentadas en este capítulo.

En la figuras 7.7, 7.8, 7.9 y 7.10 se han presentado, respectivamente, la temperatura, el volumen del líquido, el caudal F_o y la potencia calorífica Q cuando se controla el vaporizador con el GPC diseñado, suponiendo que éste parte del equilibrio para una temperatura de 340 K y un volumen del líquido de 1.9 m^3 .

A partir de este GPC se ha diseñado un GPC-LPV con la matriz Δ_C dada por la ecuación (7.6-8), y obligando a que la norma infinito entre las señales de referencia sobre V y T y las acciones de control sea inferior a la proporcionada por el GPC originario. Dicho diseño se basa en las BMIs presentadas en la sección 7.5. En concreto, el GPC inicial proporciona una norma infinito de 514.5597 mientras que el GPC-LPV obtenido proporciona 392.8146. Las matrices delta correspondientes al GPC-LPV son:

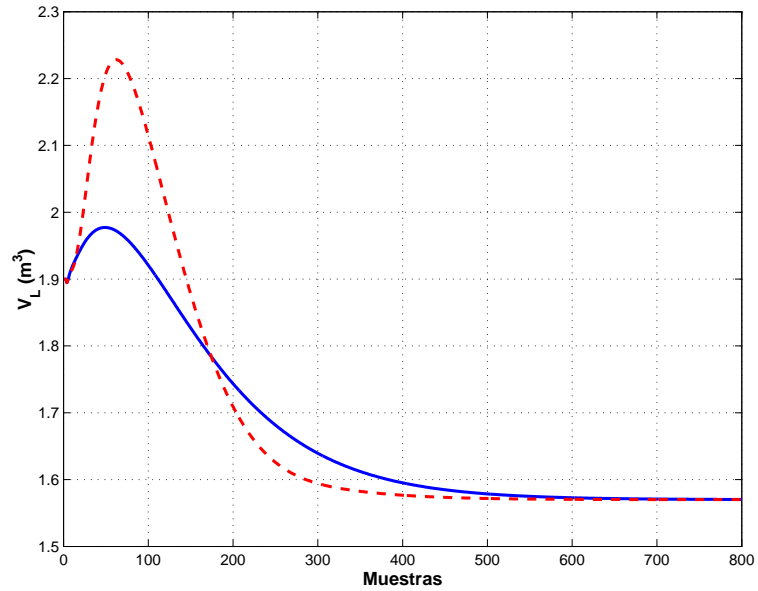


FIGURA 7.7: Volumen de la fase líquida. Línea azul continua: GPC. Línea roja a trazos: GPC-LPV.

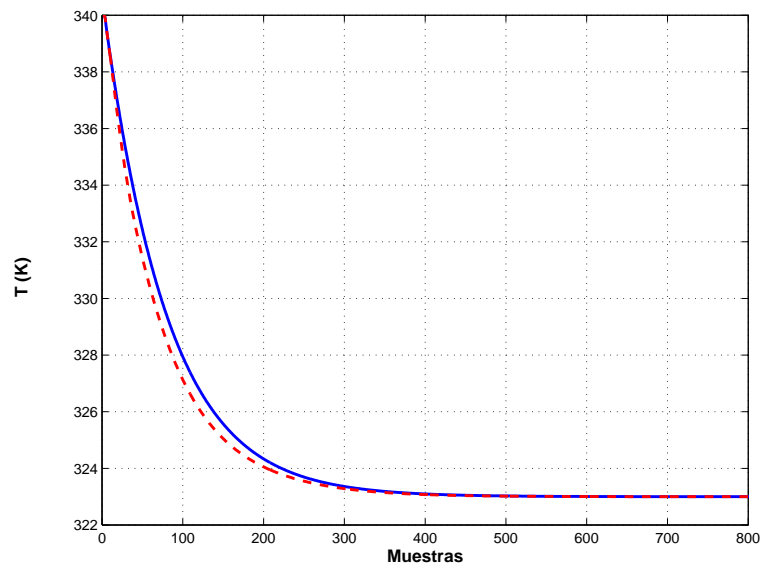


FIGURA 7.8: Temperatura de la fase líquida. Línea azul continua: GPC. Línea roja a trazos: GPC-LPV.

7.6 Aplicación: vaporizador de gases

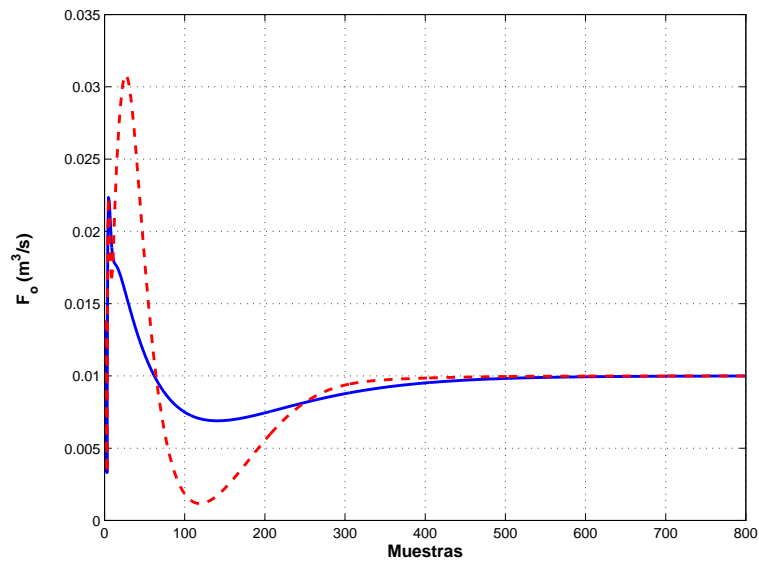


FIGURA 7.9: Caudal de propano líquido. Línea azul continua: GPC. Línea roja a trazos: GPC-LPV.

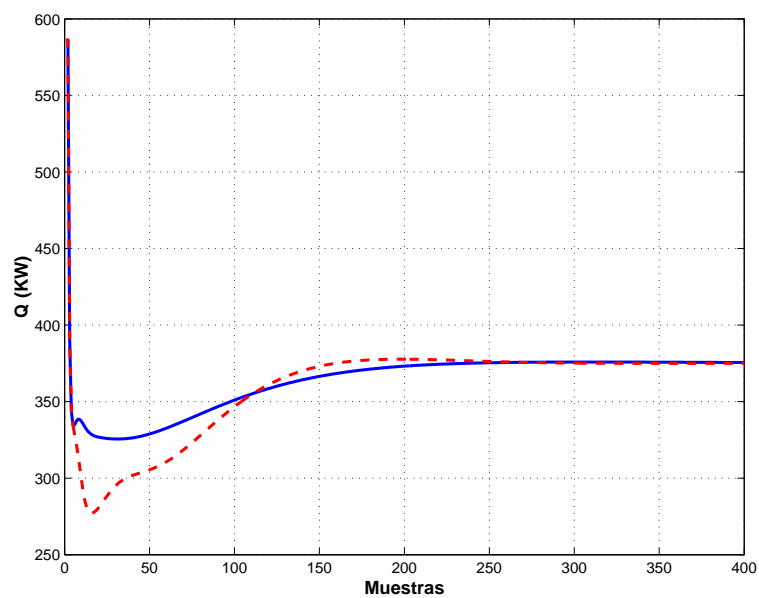


FIGURA 7.10: Potencia calorífica suministrada a la fase líquida. Línea azul continua: GPC. Línea roja a trazos: GPC-LPV.

$$\begin{aligned}
\mathbf{BS}_{\Delta}^c &= \begin{pmatrix} -1.7537 \cdot 10^{-2} & 3.0914 \cdot 10^{-3} \\ 1.6954 \cdot 10^{-4} & -6.6281 \cdot 10^{-5} \\ -1.8793 \cdot 10^{-5} & 3.9026 \cdot 10^{-6} \\ -5.1626 \cdot 10^{-5} & 4.7361 \cdot 10^{-6} \\ -1.2388 \cdot 10^{-5} & -7.6908 \cdot 10^{-8} \\ 4.1258 \cdot 10^{-7} & -1.9465 \cdot 10^{-7} \\ -5.2850 \cdot 10^{-7} & 6.9737 \cdot 10^{-8} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{CS}_{\Delta}^{c,T} = \begin{pmatrix} 2.5626 & -0.5310 \\ 20.1832 & -21.4447 \\ -72.2428 & -181.1467 \\ 118.1280 & 353.9015 \\ -54.0962 & -365.9777 \\ -111.2757 & -68.8352 \\ -14.0149 & -57.4931 \\ -11.8806 & -42.3621 \\ 211.3161 & 36.0944 \end{pmatrix} \\
\mathbf{D}_{\Delta}^c &= \begin{pmatrix} -0.4583 & 0.0298 \\ 0.0573 & 0.0185 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{D}_{\Delta,y}^c = \begin{pmatrix} 125.5063 & -26.0878 \\ 300.6801 & -3.8997 \end{pmatrix} \\
\mathbf{D}_{\Delta,r}^c &= \begin{pmatrix} -55.2494 & -11.6330 \\ -3.1525 & 0.8039 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{D}_{u,\Delta}^c = \mathbf{0}_2 \quad (7.6-9)
\end{aligned}$$

7.7. Aplicación: motor diesel sobrealimentado

7.7.1. Introducción

En la actualidad los motores diesel con grupo turbocompresor disfrutan de mejor rendimiento y de mayor potencia que los motores diesel atmosféricos. Sin embargo, como consecuencia de la sobrealimentación y de las temperaturas y presiones más elevadas dentro del motor, se produce el efecto desfavorable de producción de óxidos de nitrógeno NO_x en los gases de escape. La actual normativa sobre la producción de tales óxidos es bastante restrictiva, por lo cual los fabricantes han optado por incluir en el diseño la recirculación de gases inertes (H_2O y C_2O) desde el colector de escape al colector de admisión, dando lugar al circuito denominado EGR. Al gasto másico recirculado de estos gases se le denomina \dot{m}_{EGR} , el cual puede modificarse mediante la válvula EGR situada en el circuito EGR. El principal problema de este mecanismo es que reduce de forma significativa las prestaciones del motor. Por otro lado, en un futuro próximo las normativas serán mucho más restrictivas y el sistema actual de gestión del aire con toda probabilidad no podrá alcanzar los niveles de óxidos de nitrógeno que se exigirán.

Para poder contrarrestar la pérdida de potencia o de par del motor debida a los gases recirculados, se puede modificar el grado de apertura de la turbina (turbinas de geometría variable denominadas TGV), haciendo que la presión de los gases en el colector de escape aumente o disminuya, y, en consecuencia, se consiga una mayor o menor potencia mecánica en la misma, que se empleará para que el compresor genere mayores o menores presiones de sobrealimentación. Conforme se aumenta la presión de sobre-

7.7 Aplicación: motor diesel sobrealimentado

alimentación se consigue un mayor gasto másico de aire \dot{m}_a (que permitirá emplear un mayor gasto de combustible) y, por tanto, conseguir un mayor par motor.

El punto de funcionamiento definido por el fabricante para el motor turbodiesel viene dado por las dos variables siguientes:

- Cantidad de combustible inyectada (\dot{m}_f), que viene impuesta por el pedal del acelerador.
- Régimen de giro del motor (N), que viene impuesto por el par motor y el par resistente de la carretera.

Para cada punto de funcionamiento el fabricante posee un mapa en el que se indican las cantidades de gasto de aire (\dot{m}_a) y de presión en el colector de admisión (P_a) que se requieren para evitar los humos y los óxidos de nitrógeno, así como para garantizar un determinado par motor. Ambos valores son las **referencias** que han de emplearse para poder fijar las posiciones de las válvulas de EGR y TGV mediante el algoritmo de control que se implemente, y conseguir así reducir la emisión de contaminantes y la potencia requerida por el usuario.

7.7.2. Modelo del motor

En colaboración con el Departamento de Máquinas y Motores Térmicos de la UPV se ha desarrollado una primera aproximación a lo que sería un modelo simplificado del conjunto compresor+motor+cirucito de EGR+turbina (véase figura 7.11). Esta colaboración está enmarcada dentro del proyecto FEDER-CICYT DPI2001-3106-C02-02 de título **Optimización del Control del Aire en Motores Diesel Sobrealimentados. Control Predictivo Multivariable.**

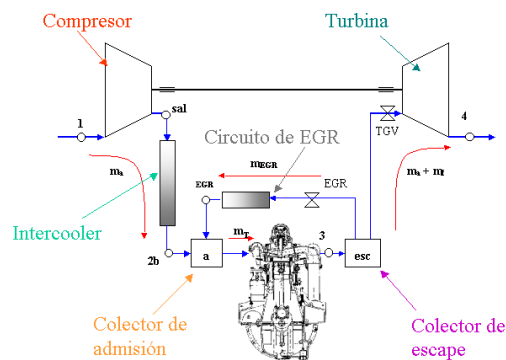


FIGURA 7.11: Esquema de un motor diesel con turbocompresor

Este modelo consta tanto de ecuaciones diferenciales, como de ecuaciones estáticas así como de tablas obtenidas a partir de experimentos realizados sobre el motor real. Dada esta particular estructura, se planteó su implementación en el entorno Simulink de Matlab con el objetivo de obtener un modelo de fácil simulación. El diagrama Simulink resultante se muestra en la figura 7.12.

Para realizar las simulaciones existe la posibilidad de modificar ciertas variables según la situación:

1. Régimen de giro del motor (N).
2. Gasto másico de combustible (\dot{m}_f).
3. % Apertura válvula EGR.
4. % Apertura válvula TGV.
5. Temperatura a la salida del intercooler (T_{2b}).
6. Temperatura del aire exterior (T_1).

De todas las variables de salida que proporciona este modelo en Simulink cabe destacar las siguientes:

1. Gasto másico de aire trasegado por el compresor (\dot{m}_a).
2. Presión en el colector de admisión (P_a).

que son las dos salidas controladas del sistema.

La validación del modelo obtenido corrió a cargo de los investigadores del Departamento de Motores, los cuales llegaron a la conclusión de que se comporta de forma muy similar a un motor real.

7.7.3. Diseño del controlador GPC-LPV

Antes de poder diseñar el controlador es necesario disponer de un modelo LPV para el motor. Como en este caso se dispone de un modelo en Simulink, se plantea un método que consiste en identificarlo alrededor de determinados puntos de funcionamiento, y en base a los modelos lineales identificados tratar de ajustar mediante optimización minimocuadrática un modelo LPV tal y como se ha analizado en la sección 7.2.1.1. La principal dificultad de esta metodología reside en el ajuste por mínimos cuadrados, ya que, en general, a priori no se conoce la estructura de la matriz Δ que vaya a tener el modelo LPV y el problema de optimización será, casi seguro, no convexo.

7.7 Aplicación: motor diesel sobrealimentado

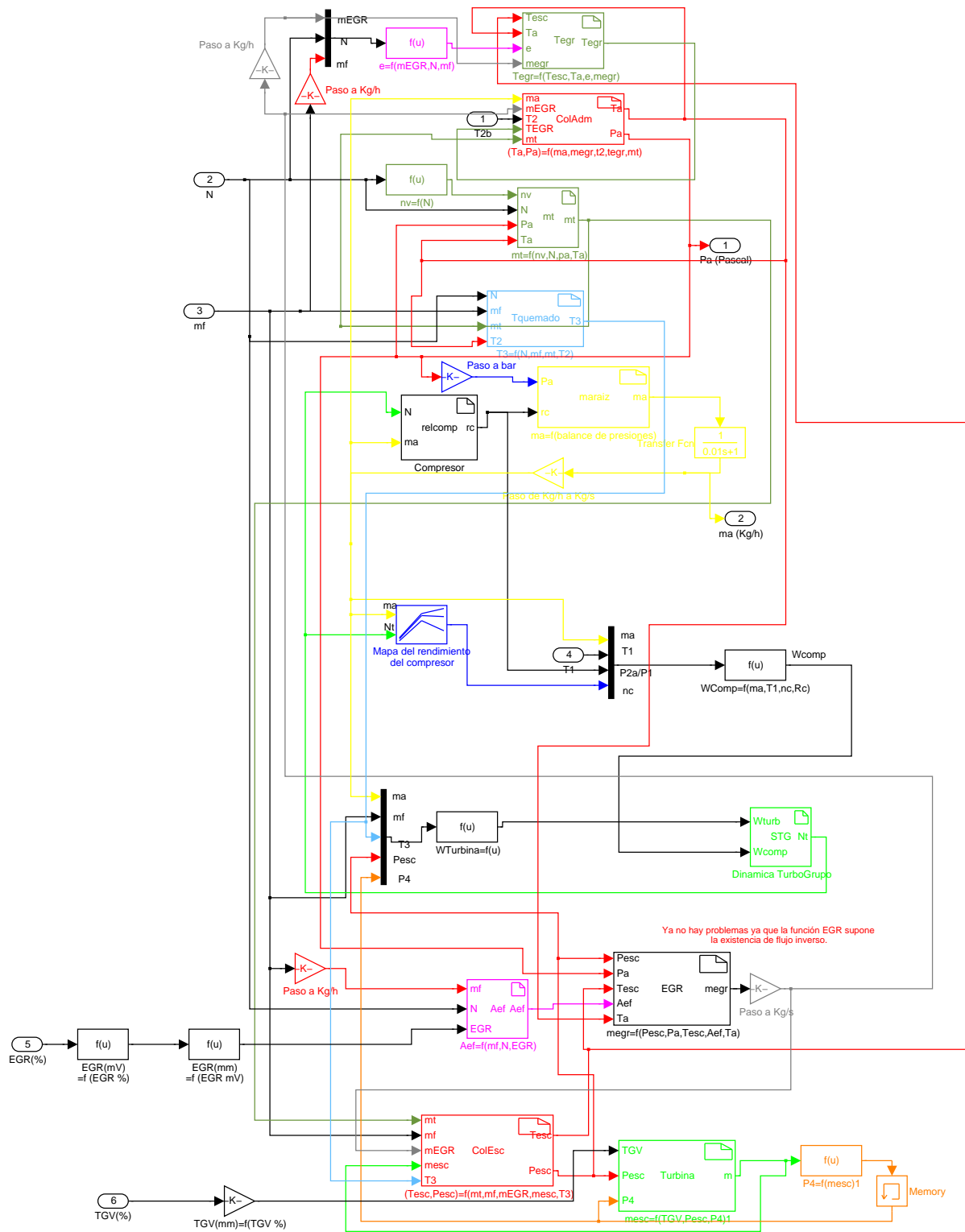


FIGURA 7.12: Modelo Simulink del motor

Para la obtención del modelo LPV se van a fijar los valores del régimen de giro y del gasto de combustible siguientes: $N = 1500$ rpm y $\dot{m}_f = 0.003$ Kg/s. La idea consiste en tener como acciones de control sólo a %TGV y %EGR, así se tiene un proceso con estas dos entradas y como salidas a \dot{m}_a y P_a . Por otro lado, se va a acotar la zona de operación obligando a que \dot{m}_a varíe ente 90 y 120 Kg/s y P_a varíe entre 1 y 1.2 bar. Esta zona de operación pertenece a la zona de funcionamiento del motor.

Bajo estas condiciones, en primer lugar se obtuvieron los valores de la variables manipuladas (%EGR y %TGV) para los que el motor se encuentra en equilibrio para diversos puntos dentro de la zona de operación antes definida. En concreto, los puntos de funcionamiento analizados se muestran en la figura 7.13.

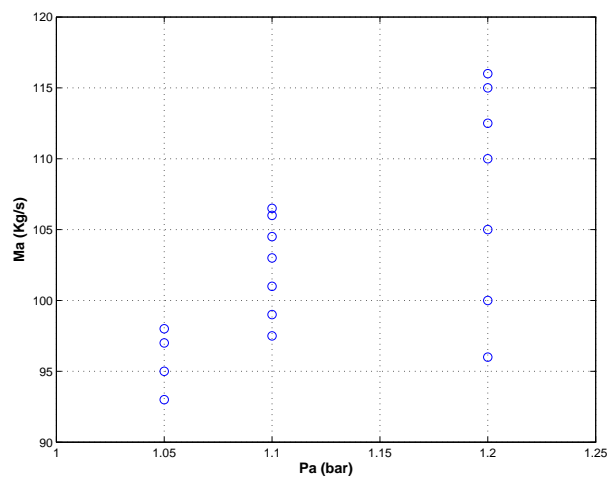


FIGURA 7.13: Zona de operación analizada para el motor diesel

Los puntos analizados tratan de representar aquella parte de la zona de operación que es alcanzable por el motor, ya que, aunque se dispone de dos variables manipulables para controlar sus dos salidas, se observó, tras una serie de experimentos sobre el modelo, que sólo algunas combinaciones eran posibles para \dot{m}_a y P_a dentro de la zona de operación. Se podrían plantear más puntos alcanzables, pero tras los experimentos pareció razonable utilizar sólo los mostrados. Hay que tener en cuenta que a mayor número de puntos más modelos y, por tanto, más complejidad computacional para la obtención del modelo LPV por ajuste.

Para determinar los valores de las variables manipuladas se emplearon dos PID's para estabilizar el motor en el punto de funcionamiento deseado. Éstos fueron diseñados a partir de un modelo linealizado del motor para el punto de funcionamiento $P_a = 1.2$ bar y $\dot{m}_a = 100$ Kg/s. El primer PID estabiliza P_a mediante %TGV, y el segundo \dot{m}_a mediante %EGR. Este procedimiento es una metodología habitualmente empleada para controlar procesos multivariables.

Los valores de las variables manipuladas para los diferentes puntos de equilibrio han sido ajustados mediante dependencia LFR con respecto de P_a y \dot{m}_a . Esta tarea ha sido realizada con la ayuda de la *Optimization Toolbox* de Matlab y, en concreto, con la función *lsqcurvefit* que implementa el algoritmo de ajuste minimocuadrático no lineal propuesto por Levenberg y Marquardt. Este ajuste requiere elegir la estructura de la matriz Δ_{eq} , siendo la más sencilla que se puede proponer:

$$\Delta_{eq} = \begin{pmatrix} P_a & 0 \\ 0 & \dot{m}_a \end{pmatrix} \quad (7.7-1)$$

No obstante, tras una serie de intentos de ajuste para %EGR y %TGV se observó la necesidad de incrementar la complejidad de Δ para garantizar un buen ajuste:

$$\Delta_{eq} = \begin{pmatrix} (P_a - 1.1278)\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\dot{m}_a - 103.0556)\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \quad (7.7-2)$$

Los valores 1.1278 y 103.0556 representan, respectivamente, los valores promedio de P_a y \dot{m}_a en los puntos de funcionamiento analizados. Su uso en el ajuste ha facilitado el problema de optimización.

La identificación de los modelos linealizados en los diferentes puntos de funcionamiento se realizó siguiendo los siguientes pasos:

1. Generación de las señales de entrada excitantes para %EGR y %TGV. Se optó por emplear señales PRBS (*Pseudo Random Binary Signal*) con amplitud de $\pm 2\%$ en ambas variables manipuladas. Fueron generadas mediante la *System Identification Toolbox* de Matlab.
2. Simulación del modelo Simulink sometido a estas señales PRBS y recogida de las señales de salida, a un periodo de muestreo de 5 ms.
3. Identificación de un modelo lineal mediante el interfaz gráfico *ident* de la citada *ToolBox*. Tras una serie de pruebas, se tomó la decisión de identificar para todos los puntos un modelo de segundo orden entre P_a y las entradas, por un lado, y, por otro, un modelo de segundo orden entre \dot{m}_a y las entradas. Con este elección se observó un buen ajuste en todos los puntos.

Una vez se han obtenido los modelos linealizados el paso final consiste en ajustarlos a un modelo LPV mediante optimización minimocuadrática, siguiendo la misma metodología empleada para ajustar los puntos de funcionamiento. El ajuste se ha realizado, por un lado, para los modelos de segundo orden identificados para P_a , y por otro los modelos de segundo orden identificados para \dot{m}_a . Para los primeros, el modelo LPV ajustado es:

$$(A_{Pa}(\Delta_M) | B_{Pa}(\Delta_M)) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -0.8683 & -1.2063 \cdot 10^{-5} & 1.5134 \cdot 10^{-5} \\ 1 & 1.8681 & 1.2031 \cdot 10^{-5} & -1.6317 \cdot 10^{-5} \end{array} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \begin{pmatrix} 3.3675 & 3.6314 & -1.0461 & 0.0797 & -0.0270 & 0.3550 \\ -1.0506 & -8.0678 & -0.8572 & -0.0828 & 0.0279 & -0.3545 \end{pmatrix} \Delta_M \\
 & \left(\mathbf{I}_6 - \begin{pmatrix} 0.5960 & 0.9246 & -0.5833 & 0.4099 & 0.2969 & 0.0013 \\ -0.1709 & -0.5993 & 0.3231 & 0.2405 & 0.0402 & 0.1072 \\ 1.9570 & 2.2998 & -4.1452 & 0.0195 & 0.2319 & -0.2417 \\ -0.0663 & 0.7888 & -0.8255 & -0.0308 & 0.0666 & 0.0257 \\ 0.0484 & -1.5073 & -0.5309 & -0.1389 & 0.1580 & 0.0436 \\ -0.4513 & -0.2079 & -0.2525 & -0.0198 & -0.0106 & -0.0011 \end{pmatrix} \Delta_M \right)^{-1} \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 0.1182 & -2.6591 \cdot 10^{-5} & 1.7523 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0.0614 & -0.7453 \cdot 10^{-5} & 3.5521 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0.0058 & -1.4076 \cdot 10^{-5} & -3.9178 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0.0012 & -0.6964 \cdot 10^{-5} & -0.3396 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0.0054 & -1.0880 \cdot 10^{-5} & -0.0465 \cdot 10^{-5} \\ 0 & -0.0089 & -0.0599 \cdot 10^{-5} & -0.7830 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} \\
 & \Delta_M = \begin{pmatrix} (P_a - 1.1278)\mathbf{I}_3 & 0 \\ 0 & (\dot{m}_a - 103.0556)\mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \quad (7.7-3)
 \end{aligned}$$

Para el caso de \dot{m}_a :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}_{\dot{m}_a}(\Delta_M) | \mathbf{B}_{\dot{m}_a}(\Delta_M)) & = \begin{pmatrix} 0 & -0.8721 & 1.1337 \cdot 10^{-2} & -0.72682 \cdot 1049 \cdot 10^{-2} \\ 1 & 1.8721 & -1.1352 \cdot 10^{-2} & 0.7000 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} + \\
 & \begin{pmatrix} 1.0677 & -1.5163 & 3.2300 & -0.1295 & 0.1656 & 0.2362 \\ -1.0999 & 1.7531 & -3.2016 & 0.1316 & -0.1583 & -0.2358 \end{pmatrix} \Delta_M \\
 & \left(\mathbf{I}_6 - \begin{pmatrix} 2.1071 & -2.0461 & -0.0833 & 1.3615 & 0.0366 & -0.0883 \\ -3.8453 & 2.1076 & -1.3796 & 0.2788 & -0.2140 & -0.1767 \\ 3.1570 & -5.8776 & 2.8766 & 0.4769 & -0.5487 & 1.0598 \\ -0.9692 & -0.3370 & 0.2413 & 0.0343 & 0.1801 & -0.0283 \\ 0.1508 & -1.0368 & 0.2809 & 0.0513 & -0.0183 & 0.0065 \\ -0.1332 & -0.7943 & 0.5497 & 0.0145 & -0.1361 & -0.0794 \end{pmatrix} \Delta_M \right)^{-1} \\
 & \begin{pmatrix} 0 & 0.2461 & 2.1049 \cdot 10^{-2} & -3.40882 \cdot 1049 \cdot 10^{-2} \\ 0 & 0.0954 & 0.63592 \cdot 1049 \cdot 10^{-2} & -0.24142 \cdot 1049 \cdot 10^{-2} \\ 0 & 0.1074 & 2.88792 \cdot 1049 \cdot 10^{-2} & -5.13132 \cdot 1049 \cdot 10^{-2} \\ 0 & -0.0217 & -0.13372 \cdot 1049 \cdot 10^{-2} & -0.40902 \cdot 1049 \cdot 10^{-2} \\ 0 & -0.0070 & -0.02682 \cdot 1049 \cdot 10^{-2} & -0.18902 \cdot 1049 \cdot 10^{-2} \\ 0 & 0.0457 & -0.05972 \cdot 1049 \cdot 10^{-2} & 1.41742 \cdot 1049 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \quad (7.7-4)
 \end{aligned}$$

A la vista de estos resultados, la complejidad de la matriz Δ_M es una cuestión que sólo se puede dilucidar tras diversos intentos de ajuste con estructuras que comienzan por

7.7 Aplicación: motor diesel sobrealimentado

la más sencilla posible, y que, ante fracasos de ajuste, será necesario ir complicando sucesivamente.

En la sección 7.2.1.1 se mostró que los modelos y los puntos de funcionamiento deben satisfacer determinadas condiciones (7.2-24) (7.2-26). Por ello, a nivel práctico se procede a reajustar los valores en los puntos de equilibrio, ya obtenidos de forma aislada, para que se cumpla la primera condición (7.2-24). Tras este reajuste se logró que se verificase dicha condición y se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \%EGR(\Delta_{eq}) &= 67.6567 + \begin{pmatrix} 45.7295 & -13.1682 & -2.5689 & -1.8963 \end{pmatrix} \Delta_{eq} \\ \cdot \left(\mathbf{I}_4 - \begin{pmatrix} -9.3118 & -17.5138 & 0.0902 & 1.1073 \\ 9.1019 & 0.8676 & -0.0508 & -0.5492 \\ -1.2622 & -2.2126 & 0.0036 & 0.0746 \\ -0.1330 & 1.4614 & 0.0211 & 0.0493 \end{pmatrix} \Delta_{eq} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14.8849 \\ 7.2524 \\ 3.6351 \\ -0.6077 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.7-5)$$

$$\begin{aligned} \%TGV(\Delta_{eq}) &= 43.9517 + \begin{pmatrix} 9.7142 & -2.7235 & 1.6473 & -0.9210 \end{pmatrix} \Delta_{eq} \\ \cdot \left(\mathbf{I}_4 - \begin{pmatrix} -6.9053 & -6.3849 & -0.0164 & -0.3172 \\ -3.4293 & -9.5395 & 0.7457 & 0.5598 \\ 0.3089 & -0.3053 & 0.1118 & -0.0001 \\ -0.2381 & -1.5791 & 0.1316 & 0.0324 \end{pmatrix} \Delta_{eq} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -16.3780 \\ 10.4702 \\ 0.4342 \\ 0.4424 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.7-6)$$

Además, la otra condición (7.2-26) se cumple, tras este reajuste, de forma aproximada.

Una vez que se dispone de un modelo LPV para el motor en la zona de operación indicada, ya es posible diseñar un controlador GPC-LPV para el mismo. En primer lugar, se diseña un controlador-observador GPC³ para el modelo linealizado ajustado para $P_a = 1.1278$ bar y $\dot{m}_a = 103.0556$ Kg/s. Los valores empleados para los parámetros del GPC han sido:

- $N_1 = 1, N_2 = 50, N_u = 1$.
- $\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \forall i$.
- Polos del observador. Para la primera salida: 0.1, 0.3 y 0.5. Para la segunda salida: 0.2, 0.7 y 0.9.

Estos parámetros fueron ajustados manualmente tras una serie de experimentos sobre el motor. A partir de este GPC se ha diseñado un GPC-LPV con matriz Δ_C dada por la ecuación:

$$\Delta_C = \begin{pmatrix} (P_a - 1.1278)\mathbf{I}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\dot{m}_a - 103.0556)\mathbf{I}_4 \end{pmatrix} \quad (7.7-7)$$

³Al igual que se hizo para el vaporizador

de tal forma que se establezca al modelo LPV dentro de la zona de operación mostrada en la figura 7.13. Como el modelo LPV se ha obtenido por ajuste de modelos linealizados, es necesario incorporar las condiciones (7.5-14) al diseño para garantizar el que se pueda obtener el estado del controlador en equilibrio y, por tanto, el controlador GPC-LPV global. Las matrices delta correspondientes al GPC-LPV obtenido son:

$$\begin{aligned}
 BS_{\Delta}^c &= \begin{pmatrix} 0.0004 & -0.0004 & 0.0003 & 0.0016 & -0.0232 & -0.0417 & 0.0030 & 0.0253 \\ -0.0033 & 0.0022 & -0.0034 & -0.0021 & -0.0624 & 0.0391 & -0.0275 & 0.0613 \\ -0.0041 & -0.0027 & -0.0034 & -0.0011 & 0.0143 & -0.0103 & 0.0056 & -0.0118 \\ -0.0005 & -0.0007 & -0.0009 & -0.0003 & -0.0014 & 0.0045 & -0.0012 & 0.0011 \\ -0.0029 & -0.0037 & -0.0039 & -0.0013 & 0.0013 & 0.0004 & 0.0003 & 0.0007 \\ -0.0036 & 0.0018 & -0.0009 & -0.0005 & -0.0009 & 0.0003 & -0.0016 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 CS_{\Delta}^c &= \begin{pmatrix} -0.0072 & 0.4827 & 3.1882 & 1.9616 & 2.5940 & 0.8795 & -1.5901 & -5.9040 \\ 0.2070 & 0.0327 & 1.1639 & 4.0855 & 0.9584 & 0.4819 & -0.0023 & -3.9088 \\ 0.0411 & -0.1995 & -0.8876 & 0.6546 & -1.3264 & 0.1612 & -5.6376 & 6.2872 \\ 0.1962 & 0.3569 & 2.7059 & 3.8865 & 2.7663 & 2.0095 & 4.6505 & 6.4710 \\ -0.1942 & 0.0224 & -0.6755 & -3.5286 & -0.3655 & -1.0796 & 1.8742 & -6.3032 \\ 0.3020 & -0.1728 & 0.2140 & 5.0445 & -0.0347 & 0.8959 & -1.6388 & 4.5960 \\ -0.2100 & 0.4697 & 1.9916 & -2.3982 & 1.7531 & 0.8289 & -0.1669 & 3.2774 \\ -0.2147 & 0.2687 & 0.8856 & -2.7476 & 0.6568 & -0.1088 & -1.5288 & -2.1455 \end{pmatrix} \\
 D_{\Delta}^c &= \begin{pmatrix} -0.0035 & 0.0113 & 0.0052 & 0.0015 & -0.0048 & -0.0005 & -0.0041 & -0.0034 \\ -0.0027 & 0.0113 & 0.0054 & 0.0010 & -0.0037 & 0.0009 & -0.0046 & -0.0013 \\ -0.0059 & -0.0237 & -0.0183 & -0.0056 & 0.0066 & 0.0012 & 0.0048 & 0.0079 \\ 0.0445 & 0.0168 & 0.0361 & 0.0130 & 0.0035 & -0.0044 & 0.0101 & -0.0130 \\ -0.0142 & 0.0064 & -0.0040 & -0.0018 & -0.0053 & 0.0007 & -0.0063 & 0.0001 \\ 0.0090 & -0.0034 & 0.0028 & 0.0009 & 0.0037 & 0.0005 & 0.0034 & 0.0011 \\ 0.0163 & -0.0019 & 0.0085 & 0.0040 & 0.0028 & -0.0031 & 0.0069 & -0.0051 \\ -0.0067 & -0.0030 & -0.0054 & -0.0015 & -0.0011 & -0.0005 & -0.0008 & 0.0003 \end{pmatrix} \\
 D_{\Delta,y}^c &= \begin{pmatrix} -0.0889 & 0.2160 \\ 0.0909 & -0.4357 \\ -0.1496 & 0.3885 \\ -0.2053 & 0.0053 \\ -0.0546 & -1.7469 \\ -0.3007 & -2.3081 \\ -0.2239 & 1.3952 \\ 0.0753 & 1.9878 \end{pmatrix} = -D_{\Delta,r}^c ; \quad D_{u,\Delta}^c = \mathbf{0}_{2 \times 8} \quad (7.7-8)
 \end{aligned}$$

7.8 Conclusiones del capítulo

En las figuras 7.14, 7.15, 7.16 y 7.17 se muestran los resultados de la simulación del bucle cerrado cuando se aplica el GPC-LPV global diseñado, a lo largo de distintos puntos de funcionamiento pertenecientes a la zona de operación, partiendo del punto de funcionamiento correspondiente a $P_a = 1.1$ bar y $\dot{m}_a = 103$ Kg/s. De estas figuras se puede concluir, ante la ausencia de especificaciones de tipo dinámico, que el control se ejerce de una forma aceptable.

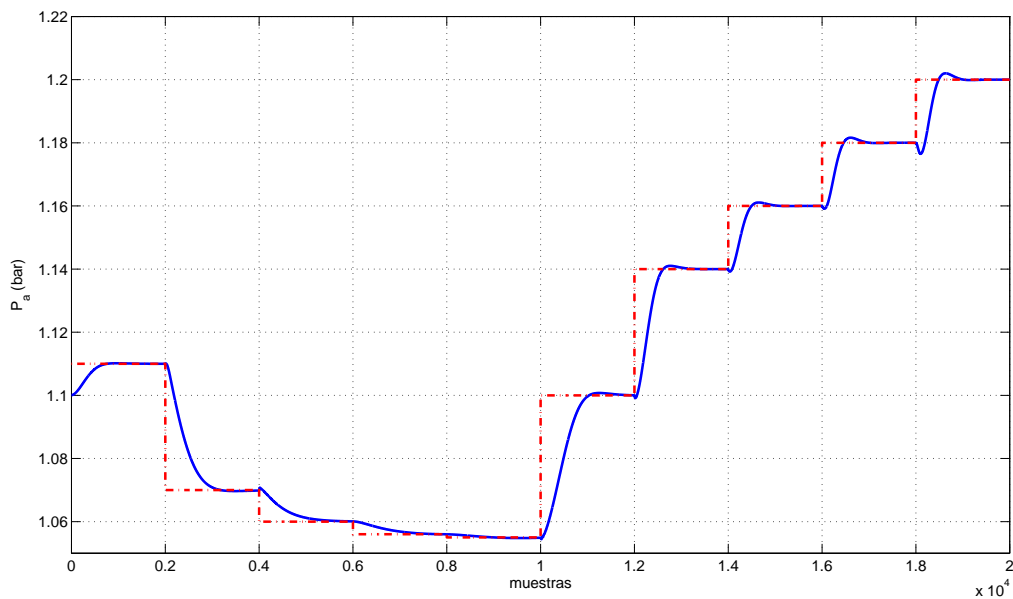


FIGURA 7.14: Presión en el colector de admisión y su referencia en bucle cerrado bajo el control del GPC-LPV global.

7.8. Conclusiones del capítulo

1. En este capítulo se ha abordado el diseño de controladores-observadores GPC para sistemas no lineales cuyas trayectorias dinámicas se pueden contener dentro de las trayectorias dinámicas de un sistema lineal variable con el tiempo (LPV). La parte variable con el tiempo representa la parte no lineal del sistema, la cual puede depender de los valores de las salidas y que, por tanto, puede ser conocida en línea por el controlador si se dispone de sensores de medida para dichas salidas, situación habitual en control de procesos.
2. Estos modelos LPV pueden ser obtenidos de dos formas. Si se dispone de un modelo no lineal basado en ecuaciones diferenciales, el modelo LPV se puede obtener a partir del anterior introduciendo como parámetros variables con el tiempo a los

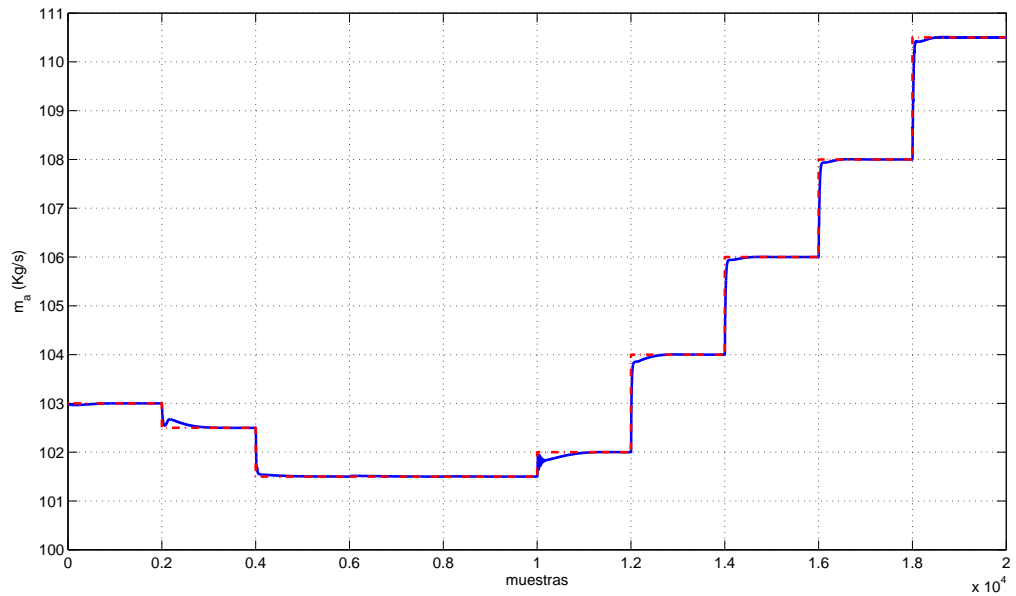


FIGURA 7.15: Gasto másico de aire y su referencia en bucle cerrado bajo el control del GPC-LPV global.

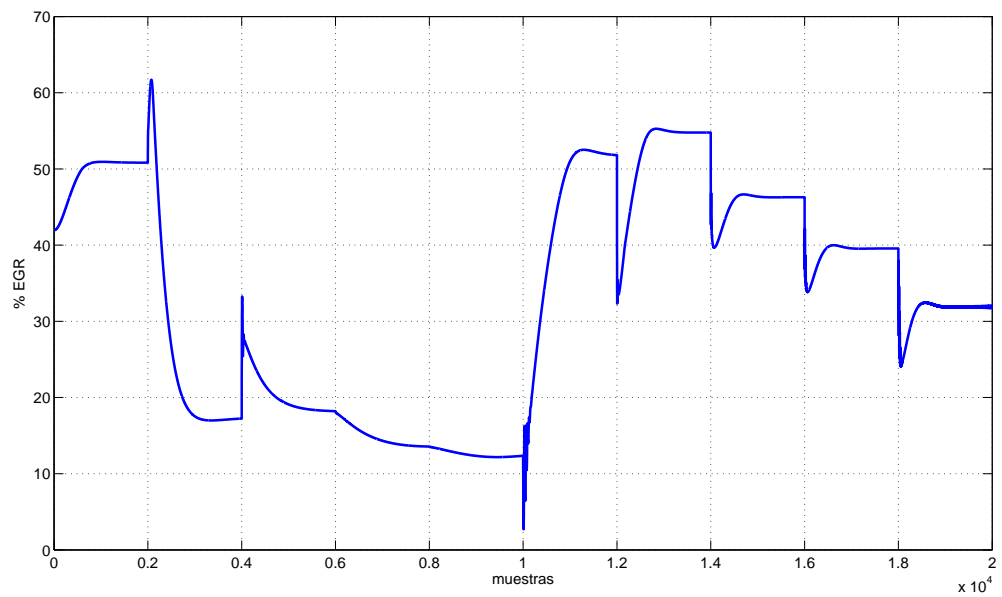


FIGURA 7.16: Apertura de la válvula de EGR resultante en bucle cerrado bajo el control del GPC-LPV global.

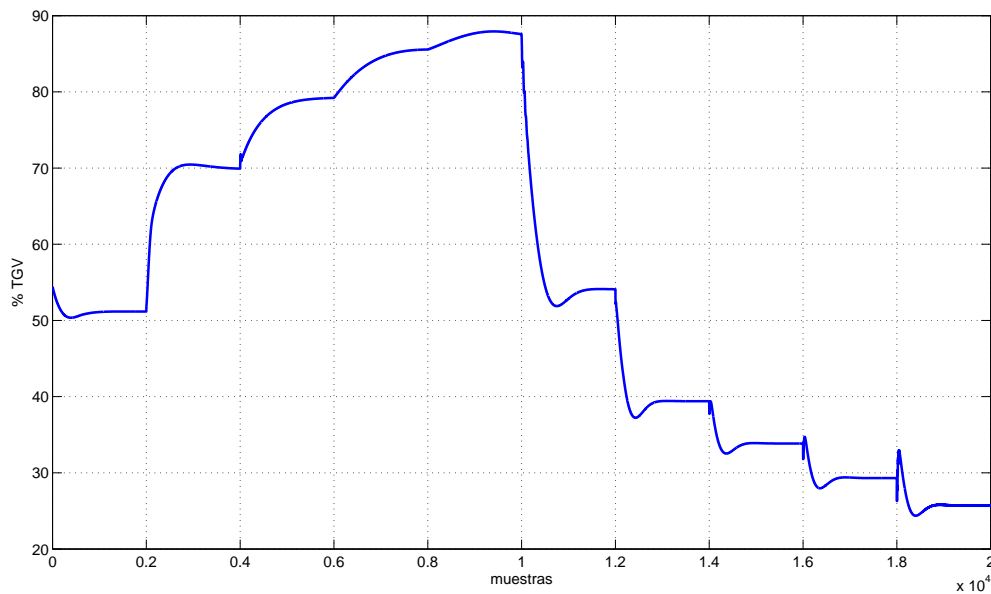


FIGURA 7.17: Apertura de la válvula de TGV resultante en bucle cerrado bajo el control del GPC-LPV global.

términos no lineales presentes en dichas ecuaciones. Esta metodología ha sido aplicada sobre dos ejemplos: unión flexible y vaporizador de gases.

3. En otros casos sólo es posible disponer de modelos lineales identificados alrededor de diferentes puntos de funcionamiento. En estos casos una posible vía de obtención de un modelo LPV es tratar de ajustarlo mediante optimización minimocuadrática de tal manera que en cada punto de funcionamiento el modelo LPV dé lugar al modelo identificado. Este método es complejo debido a dos factores: elección de la estructura de la matriz Δ y la no convexidad, en general, del problema de optimización minimocuadrático. Esta metodología ha sido aplicada al motor diesel sobrealimentado.
4. Para la obtención de los modelos LPV globales se incorpora a los LPV locales el denominado estado del proceso en equilibrio. El análisis de la existencia de soluciones para tal estado en equilibrio permite establecer condiciones que garanticen un ajuste minimocuadrático coordinado entre los valores de las señales de entrada en los puntos de funcionamiento y los modelos lineales identificados.
5. En la primera parte del capítulo se aborda el diseño del controlador-observador GPC para sistemas LPV. La metodología de diseño se basa en la propuesta al final del capítulo 6: condiciones basadas en LMIs para sistemas variables con el tiempo. El diseño puede tener en cuenta: estabilidad, acotación de normas, especificaciones para el bucle cerrado y restricciones. En concreto, se han diseñado controladores-observadores GPC para el modelo no lineal de una unión flexible.

6. En la segunda parte del capítulo se presenta el diseño de un controlador variable con el tiempo basado en el controlador-observador GPC: el GPC-LPV. Esta propuesta se basa en la idea de que para obtener mejores prestaciones en el control de sistemas no lineales es necesario emplear controladores también no lineales, ya que los lineales podrían proporcionar unas prestaciones limitadas en algunas aplicaciones. El GPC-LPV es un controlador cuyas matrices de estado varían con el tiempo, dependiendo este cambio de la medida en línea de aquellas salidas del sistema que están presentes en la matriz Δ .
7. Al ser el GPC-LPV un sistema lineal variable con el tiempo, la metodología de diseño propuesta en la primera parte del capítulo para el GPC ha extendida sin dificultad para realizar el diseño del GPC-LPV. La principal diferencia en el diseño de ambos reside en que aparecen una mayor cantidad de BMIs para el caso del GPC-LPV, lo cual complica enormemente su diseño, pues los problemas basados en BMIs son no convexos.
8. Para el caso de modelos LPV obtenidos a partir del ajuste de puntos de funcionamiento y modelos lineales identificados, se analizan las diferencias en la forma de diseñar el GPC-LPV. Fundamentalmente, el punto crucial es el de garantizar la existencia del estado del controlador en equilibrio y su cálculo mediante la integración de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. El resultado más importante establece la necesidad de incorporar de una serie de restricciones matriciales de igualdad dentro de las BMIs para garantizar, a priori, la existencia del estado del controlador en equilibrio.
9. Finalmente, se han realizado dos aplicaciones del GPC-LPV: una sobre un vaporizador de gases y otra sobre un modelo Simulink de un motor diesel sobrealimentado.

CAPÍTULO 8

Conclusiones de la Tesis y trabajos futuros

8.1. Conclusiones

A lo largo del desarrollo de esta tesis se han logrado las siguientes aportaciones o resultados:

1. En el capítulo 3 se ha propuesto una reformulación del GPC en espacio de estados que posee las siguientes características:
 - Un modelo Carima alternativo en espacio de estados equivalente al E/S presentado en la literatura.
 - Uso de un observador de rango completo alternativo al filtro de Kalman que es diseñado mediante asignación de polos.
 - Si se desea establecer una equivalencia entre el observador propuesto y los polinomios de filtrado de la versión E/S es necesario modificar ligeramente la estructura del modelo Carima anterior.
 - Esta equivalencia permite atribuir las características de robustez del GPC en espacio de estados al observador, estando, por tanto, ligado su diseño al hecho de conferir ciertas características de robustez al controlador.
 - Se ha realizado una comparativa entre el GPC propuesto en espacio de estados y el entrada/salida deduciéndose que el E/S requiere una cantidad de memoria

igual o mayor que el de espacio de estados, y , en general, un mayor tiempo para calcular las acciones de control que el de espacio de estados.

2. En el capítulo 4 se han estudiado algunas propiedades del controlador GPC en espacio de estados:

- Se ha analizado bajo que condiciones el modelo Carima propuesto es una realización mínima, llegándose a la conclusión de esto se produce cuando el observador propuesto es estable y bajo una serie de condiciones no demasiado restrictivas que se han verificado en los ejemplos presentados en la tesis.
- Se ha justificado el efecto de robustez del observador cuando se analiza la repercusión de perturbaciones y/o discrepancias entre modelo y proceso sobre la predicción de las salidas. En concreto, una adecuada selección de sus polos permite que la predicción se acomode a la salidas reales y no a las del modelo.

3. En el capítulo 5 se ha presentado un diseño del GPC en espacio de estados que garantiza estabilidad y resolubilidad cuando se presentan restricciones duras sobre salidas y acciones de control. La estabilidad se basa en el empleo como función de Lyapunov del índice de coste del controlador. Se ha justificado, en base a esta elección, que es posible encontrar tamaños para los horizontes de predicción y control tales que el bucle cerrado es asintóticamente estable. Para la adecuada elección de dichos horizontes se ha presentado un método de diseño iterativo.

La garantía de satisfacción de restricciones se ha basado en la aplicación de la teoría de conjuntos invariantes al GPC en espacio de estados. Dicha teoría persigue obtener aquel conjunto de estados iniciales del proceso para los cuáles en cualquier instante posterior se verificarán las restricciones duras impuestas. Esta teoría es de fácil aplicación para el caso en que todos los estados son medibles. Sin embargo, dado que esta condición no se verifica para el GPC, dicha teoría ha sido extendida con éxito para el caso de utilizar el observador de rango completo propuesto.

4. En el capítulo 6 se ha presentado un diseño robusto del controlador GPC propuesto en espacio de estados. Dicho diseño tuvo como punto de partida la justificación de la dependencia de la dinámica de las funciones de sensibilidad del bucle cerrado con respecto a los polos del observador. Este resultado muestra, nuevamente, la influencia del observador en la robustez. Además, a partir de ese momento se va a considerar en el diseño al conjunto formado por el controlador GPC y el observador de rango completo, lo cual da lugar al controlador-observador GPC.

Empleando LMIs se han deducido condiciones que permiten el diseño de los parámetros del controlador-observador GPC con vistas a garantizar para procesos lineales:

- Estabilidad robusta cuando se presentan dinámica no modelada y/o incertidumbres en el proceso.
- Cotas superiores para la norma ∞ , 2 o 1 entre determinados canales entrada/salida cuando se presentan perturbaciones, ruidos de medida, dinámica no modelada y/o incertidumbres.
- Determinadas especificaciones en bucle cerrado: tiempo de establecimiento, sobreoscilación, etc, cuando se presentan dinámica no modelada y/o incertidumbres en el proceso.
- La verificación de determinadas restricciones duras sobre salidas y acciones de control cuando se presentan perturbaciones, ruidos de medida, dinámica no modelada y/o incertidumbres.

Al final de dicho capítulo se extendieron estas ideas para sistemas lineales con incertidumbre variable con el tiempo.

5. En el capítulo 7 se han extendido las ideas presentadas en el capítulo anterior para el diseño de controladores-observadores GPC para sistemas no lineales. Este diseño reside en obtener un sistema lineal variable con el tiempo cuyas trayectorias dinámicas contengan a las trayectorias dinámicas del proceso no lineal. Este procedimiento se puede aplicar tanto en aquellos casos en los que se dispone de un modelo no lineal o de modelos lineales identificados alrededor de diferentes puntos de funcionamiento.

Para el caso de disponer los modelos lineales identificados y los valores de las señales en varios puntos de funcionamiento, se ha propuesto una metodología para el ajuste minimocuadrático de ambos conjuntos mediante funciones matriciales con dependencia LFR. Se ha analizado la existencia del estado del proceso en equilibrio, lo cual establece relaciones que permiten realizar un ajuste coordinado entre modelos y puntos de funcionamiento. Tras todo esto se obtiene un modelo LPV que representa aproximadamente el comportamiento del sistema no lineal.

Una vez que se dispone de un modelo lineal variable con el tiempo se puede aplicar la metodología propuesta al final del capítulo 6 basada en el empleo de LMIs para obtener controladores-observadores GPC que verifiquen: estabilidad robusta, acotación de normas, restricciones, etc.

La principal limitación de esta metodología es que se diseña un controlador lineal para un sistema no lineal, lo cual implica que, aunque éste este muy bien diseñado, se reduzcan de forma importante las especificaciones que se pueden lograr en bucle cerrado: tiempo de establecimiento, restricciones, región de estabilidad, etc. Para solventar esta dificultad, se ha propuesto un controlador-observador GPC variable con el tiempo, GPC-LPV, el cual presenta una dinámica cambiante según el valor

medido para las salidas del sistema no lineal. Este controlador, consecuentemente, va a ser no lineal lo cual va a permitir alcanzar mayores prestaciones en bucle cerrado. En este supuesto, controlador y modelo van a dar lugar a un bucle cerrado lineal variable con el tiempo, con lo cual la metodología de diseño del GPC-LPV se basa también en LMIs y BMIs, las cuales son una extensión de las empleadas para el caso de un controlador-observador GPC lineal.

Para el caso particular de modelos LPV obtenidos para un sistema no lineal mediante ajuste de modelos lineales identificados, el GPC-LPV representa un controlador linealizado para cada punto de funcionamiento. Para extender el controlador de forma global es necesario incluir el estado del controlador en equilibrio, de forma análoga al proceso de introducción del estado del proceso durante de fase de ajuste. Este estado en equilibrio existe si se verifican ciertas condiciones, que para el caso del GPC-LPV se traducen en unas restricciones matriciales de igualdad que han de ser incluidas durante la fase de diseño.

Finalmente, se ha ejemplificado este diseño sobre dos aplicaciones:

- Vaporizador de un sólo componente. De este sistema se dispone de un modelo no lineal conocido y a partir del cual se obtiene un modelo lineal variable con el tiempo discretizado.
- Sistema de renovación de la carga de un motor turbodiesel. Se trata de un proceso real que se ha analizado a partir de un modelo disponible en el entorno Simulink de Matlab. Para obtener un modelo lineal variable con el tiempo se han identificado varios modelos lineales en algunos puntos de funcionamiento y, posteriormente, se ha realizado su ajuste minimocuadrático para obtener un modelo LPV que representa, aproximadamente, el comportamiento del motor en dichos puntos de funcionamiento.

8.2. Trabajos futuros

Se han propuesto las siguientes líneas de trabajo futuras:

1. Extender el trabajo realizado sobre el modelo Simulink del sistema de renovación de la carga del motor turbodiesel, a todo el rango de operación del motor para desarrollar un controlador GPC-LPV válido para dicho rango que garantice una serie de especificaciones demandadas por el fabricante de automóviles. Posteriormente, esta metodología deberá ser aplicada al motor real.
2. Mejorar las metodologías de optimización para el ajuste de modelos lineales variables con el tiempo a partir de modelos lineales identificados en diversos puntos

de funcionamiento de un sistema no lineal, que garanticen un buen ajuste para un número elevado de modelos identificados. Este trabajo será de vital importancia para la línea anterior.

3. Utilizando LMIs y/o BMIs proponer diseños alternativos para el GPC y para el GPC-LPV que no requieran optimizar los parámetros de los mismos (horizontes, matrices de ponderación y polos del observador) mediante el uso de algoritmos genéticos, sino que el controlador se pueda obtener directamente a partir de dichas LMIs y/o BMIs.
4. Trabajar en nuevas técnicas de optimización numérica que permitan obtener óptimos globales para las desigualdades matriciales bilineales (BMIs) con un menor coste computacional que las disponibles actualmente, con el objetivo de conseguir que sean aplicables en el diseño del GPC-LPV mediante BMIs.

APÉNDICE A

Demostraciones

A.1. Demostraciones correspondientes al capítulo 3

Proposición A.1.1 Si las matrices Q_i son definidas positivas, las matrices R_i son semidefinidas positivas y la matriz N posee rango completo de columnas entonces el problema de optimización (3.5-1) posee un único mínimo dado por:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = - (N^T \bar{Q} N + \bar{R})^{-1} N^T \bar{Q}^T (M \mathbf{x}(k) + O \bar{\mathbf{u}}(k-1) + P \bar{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k)) \quad (\text{A.1-1})$$

Demostración: Partiendo de la ecuación (3.5-1), y definiendo a $\hat{\mathbf{e}}_c(k)$ como el error de la respuesta libre a partir de k^1 :

$$\hat{\mathbf{e}}_c(k) \triangleq \hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k) - N \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = M \mathbf{x}(k) + O \bar{\mathbf{u}}(k-1) + P \bar{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k) \quad (\text{A.1-2})$$

el índice de coste toma la forma:

$$\begin{aligned} J_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)) &= (\hat{\mathbf{e}}_c(k) + N \Delta \hat{\mathbf{u}}(k))^T \bar{Q} (\hat{\mathbf{e}}_c(k) + N \Delta \hat{\mathbf{u}}(k)) + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T(k) \bar{R} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = \\ &= \hat{\mathbf{e}}_c^T(k) \bar{Q} \hat{\mathbf{e}}_c(k) + 2 \hat{\mathbf{e}}_c^T(k) \bar{Q} N \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) + \Delta \hat{\mathbf{u}}^T(k) (N^T \bar{Q} N + \bar{R}) \Delta \hat{\mathbf{u}}(k) \end{aligned} \quad (\text{A.1-3})$$

El mínimo de $J_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k))$ se alcanza cuando su gradiente es igual al vector nulo:

$$\frac{dJ_k(\Delta \hat{\mathbf{u}}(k))}{d\Delta \hat{\mathbf{u}}(k)} = \mathbf{0} = 2 N^T \bar{Q} \hat{\mathbf{e}}_c(k) + 2 (N^T \bar{Q} N + \bar{R}) \Delta \hat{\mathbf{u}}(k)$$

Finalmente el vector de incrementos de las acciones de control óptimo sobre el horizonte de control es:

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = - (N^T \bar{Q} N + \bar{R})^{-1} N^T \bar{Q} \hat{\mathbf{e}}_c(k)$$

¹Equivalente al error bajo acciones de control constantes a partir de k

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k) = - (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} (\mathbf{M} \mathbf{x}(k) + \mathbf{O} \bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P} \bar{\mathbf{y}}(k) - \hat{\omega}(k)) \quad (\text{A.1-4})$$

Para completar la prueba se emplean dos lemas adicionales:

LEMA A.1.1 *Sea A una matriz real mxn entonces $A^T A$ es una matriz semidefinida positiva. Si además A tiene rango completo de columnas entonces $A^T A$ será definida positiva.*

Véase [Perez~Carreras 1989, página 408] para una prueba de este lema.

LEMA A.1.2 (CHOLEVSKI) *Una matriz simétrica real Q nxn es definida positiva si y sólo si existe una única matriz triangular inferior Δ con entradas positivas en la diagonal tal que:*

$$\mathbf{Q} = \Delta \Delta^T \quad (\text{A.1-5})$$

Véase [Perez~Carreras 1989, página 409] para una prueba de este lema.

Retomando la demostración, la ley sin restricciones (A.1-4) será el único mínimo del problema de optimización (3.5-1) si y sólo si la matriz $\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}$ es definida positiva.

La matriz $\bar{\mathbf{Q}}$ es simétrica y definida positiva ya que las matrices \mathbf{Q}_i son definidas positivas. Por el LEMA A.1.2 la matriz $\bar{\mathbf{Q}}$ puede descomponerse en la forma $\Delta \Delta^T$ donde Δ es una matriz triangular inferior con entradas positivas en su diagonal principal. Entonces:

$$\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} = \mathbf{N}^T \Delta \Delta^T \mathbf{N} = (\Delta^T \mathbf{N})^T \Delta^T \mathbf{N} \quad (\text{A.1-6})$$

Por construcción Δ es una matriz no singular, y por lo tanto posee rango completo tanto de columnas como de filas. Consecuentemente $\Delta^T \mathbf{N}$ posee rango completo de columnas ya que Δ tiene rango completo de filas y \mathbf{N} tiene rango completo de columnas². Aplicando el LEMA A.1.1 y tomando $\mathbf{A} = \Delta^T \mathbf{N}$ se deduce que $\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N}$ es una matriz definida positiva.

Finalmente la suma de una matriz definida positiva $\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N}$ y una matriz semidefinida negativa $\bar{\mathbf{R}}$ ³ es también una matriz definida positiva. ■

Proposición A.1.2 *El número de operaciones de multiplicación (o productos) y de suma requeridas para estimar los estados y para predecir las salidas en la formulación de espacio de estados es:*

$$\text{Número de productos} = (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + N_u \cdot m + m + n \right] +$$

²El producto de dos matrices tiene rango completo de columnas si ambas tienen rango completo de columnas

³Nótese que \mathbf{R} es simétrica y semidefinida positiva ya que las matrices \mathbf{R}_i son semidefinidas positivas

$$+ \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + m + n \right] \quad (\text{A.1-7})$$

$$\begin{aligned} \text{Número de sumas} &= (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + N_u \cdot m + m + n - 1 \right] + \\ &+ \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + m + n - 1 \right] \quad (\text{A.1-8}) \end{aligned}$$

Demostración: La ecuación de predicción en la formulación de espacio de estados es:

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{O}\bar{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\bar{\boldsymbol{\xi}}(k) \quad (\text{A.1-9})$$

En esta ecuación hay cuatro productos matriciales, de modo que el número total de operaciones, asociadas sólo a los productos, será la suma del número de operaciones de cada producto matricial por separado. Empleando LEMA 3.9.1:

$$\begin{aligned} \text{Número de productos} &= \text{filas}(\mathbf{M}) \cdot \text{colum}(\mathbf{M}) \cdot 1 + \text{filas}(\mathbf{N}) \cdot \text{colum}(\mathbf{N}) \cdot 1 + \\ &+ \text{filas}(\mathbf{O}) \cdot \text{colum}(\mathbf{O}) \cdot 1 + \text{filas}(\mathbf{P}) \cdot \text{colum}(\mathbf{P}) \cdot 1 \quad (\text{A.1-10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Número de sumas} &= \text{filas}(\mathbf{M}) \cdot (\text{colum}(\mathbf{M}) - 1) \cdot 1 + \text{filas}(\mathbf{N}) \cdot (\text{colum}(\mathbf{N}) - 1) \cdot 1 + \\ &+ \text{filas}(\mathbf{O}) \cdot (\text{colum}(\mathbf{O}) - 1) \cdot 1 + \text{filas}(\mathbf{P}) \cdot (\text{colum}(\mathbf{P}) - 1) \cdot 1 \quad (\text{A.1-11}) \end{aligned}$$

$\text{colum}(\cdot)$ proporciona el número de columnas y $\text{filas}(\cdot)$ proporciona el número de filas.

Recordando las dimensiones de estas matrices⁴:

$$\begin{aligned} \text{Número de productos} &= (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) + (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot N_u \cdot m + \\ &+ (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot m + (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot n = \\ &= (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + N_u \cdot m + m + n \right] \quad (\text{A.1-12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Número de sumas} &= (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) - 1 \right) + \\ &+ (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot (N_u \cdot m - 1) \cdot 1 + \\ &+ (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot (m - 1) + (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot (n - 1) = \\ &= (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + N_u \cdot m + m + n - 4 \right] \quad (\text{A.1-13}) \end{aligned}$$

Es importante contabilizar también el número de sumas que se requieren para sumar los cuatro términos de la ecuación de la predicción (A.1-9). Todos ellos tienen $(N_2 - N_1 + 1) \cdot n$

⁴Véase sección 3.3

filas, y así:

$$\text{Número de sumas} = (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot 3 \quad (\text{A.1-14})$$

Repetiendo este mismo desarrollo con la ecuación del observador CARIMA (3.6-4):

$$\mathbf{x}(k+1) = [\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{\Pi}\bar{\mathbf{C}}] \mathbf{x}(k) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{\Pi}\bar{\mathbf{y}}(k) \quad (\text{A.1-15})$$

$$\begin{aligned} \text{Número de productos} &= \text{filas} [\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{\Pi}\bar{\mathbf{C}}] \cdot \text{colum} [\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{\Pi}\bar{\mathbf{C}}] \cdot 1 + \\ &\quad + \text{filas}(\bar{\mathbf{B}}) \cdot \text{colum}(\bar{\mathbf{B}}) \cdot 1 + \text{filas}(\mathbf{\Pi}) \cdot \text{colum}(\mathbf{\Pi}) \cdot 1 = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) + \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \cdot m + \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \cdot n = \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + m + n \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1-16})$$

$$\begin{aligned} \text{Número de sumas} &= \text{filas} [\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{\Pi}\bar{\mathbf{C}}] \cdot (\text{colum} ([\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{\Pi}\bar{\mathbf{C}}] - 1) \cdot 1 + \\ &\quad + \text{filas}(\bar{\mathbf{B}}) \cdot (\text{colum}(\bar{\mathbf{B}}) - 1) \cdot 1 + \text{filas}(\mathbf{\Pi}) \cdot (\text{colum}(\mathbf{\Pi}) - 1) \cdot 1 = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \left(\left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) - 1 \right) + \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) (m - 1) + \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) (n - 1) = \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \left[\sum_{j=1}^n n_j + n + m + n - 3 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1-17})$$

El número de sumas requeridas para sumar los términos del observador CARIMA es:

$$\text{Número de sumas} = \left(\sum_{j=1}^n n_j + n \right) \cdot 2 \quad (\text{A.1-18})$$

Finalmente, el número de productos viene dado por la suma de las operaciones de las ecuaciones (A.1-12) y (A.1-16), y el número de sumas viene dado por la suma de las ecuaciones (A.1-13), (A.1-14), (A.1-17) y (A.1-18). ■

Proposición A.1.3 Si $N_1^j = N_1 \quad j = 1, \dots, n$, $N_2^j = N_2 \quad j = 1, \dots, n^5$ y $N_u^i = N_u \quad i = 1, \dots, m^6$, el número de productos y de sumas requeridas para obtener las señales filtradas y para predecir las salidas en la formulación E/S es:

$$\text{Número de productos} = (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[N_u \cdot m + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) + \right.$$

⁵Todos los horizontes de predicción son iguales

⁶Todos los horizontes de control son iguales

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^n \max(|\text{grado}(A_j)| + 1, |\text{grado}(T_j)|) \Big] + \\
 & + \sum_{j=1}^n |\text{grado}(T_j)| \cdot (m + 1) \tag{A.1-19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Número de sumas} = & (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[N_u \cdot m + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^n \max(|\text{grado}(A_j)| + 1, |\text{grado}(T_j)|) - 1 \right] + \\
 & + \left(\sum_{j=1}^n |\text{grado}(T_j)| + n \right) \cdot (m + 1) - n \tag{A.1-20}
 \end{aligned}$$

Demostración: La ecuación de predicción en la formulación E/S es:

$$\hat{y}(k) = \mathbf{G}\Delta\hat{u}(k) + \mathbf{\Gamma}\Delta\hat{u}^f(k) + \mathbf{F}\hat{y}^f(k) \tag{A.1-21}$$

En esta ecuación hay tres productos matriciales, y por tanto el número total de operaciones, relacionadas sólo con los productos, será la suma del número de operaciones requeridas para cada producto matricial. Utilizando LEMA 3.9.1:

$$\begin{aligned}
 \text{Número de productos} = & \text{filas}(\mathbf{G}) \cdot \text{colum}(\mathbf{G}) \cdot 1 + \text{filas}(\mathbf{\Gamma}) \cdot \text{colum}(\mathbf{\Gamma}) \cdot 1 + \\
 & + \text{filas}(\mathbf{F}) \cdot \text{colum}(\mathbf{F}) \cdot 1 \tag{A.1-22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Número de sumas} = & \text{filas}(\mathbf{G}) \cdot (\text{colum}(\mathbf{G}) - 1) \cdot 1 + \text{filas}(\mathbf{\Gamma}) \cdot (\text{colum}(\mathbf{\Gamma}) - 1) \cdot 1 + \\
 & + \text{filas}(\mathbf{F}) \cdot (\text{colum}(\mathbf{F}) - 1) \cdot 1 \tag{A.1-23}
 \end{aligned}$$

Recordando las dimensiones de estas matrices⁷:

$$\begin{aligned}
 \text{Número de productos} = & \sum_{j=1}^n (N_2^j - N_1^j + 1) \cdot \sum_{i=1}^m N_u^i + \\
 & + \sum_{j=1}^n (N_2^j - N_1^j + 1) \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) + \\
 & + \sum_{j=1}^n (N_2^j - N_1^j + 1) \cdot \sum_{j=1}^n \max(|\text{grado}(A_j)| + 1, |\text{grado}(T_j)|) \tag{A.1-24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Número de sumas} = & \sum_{j=1}^n (N_2^j - N_1^j + 1) \cdot \left(\sum_{i=1}^m N_u^i - 1 \right) + \\
 & + \sum_{j=1}^n (N_2^j - N_1^j + 1) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) - 1 \right) +
 \end{aligned}$$

⁷Ecuaciones (2.2-12), (2.2-13) y (2.2-14)

$$+ \sum_{j=1}^n (N_2^j - N_1^j + 1) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \max(|\text{grado}(A_j)| + 1, |\text{grado}(T_j)|) - 1 \right) \quad (\text{A.1-25})$$

Como $N_1^j = N_1 \quad j = 1, \dots, n$, $N_2^j = N_2 \quad j = 1, \dots, n$ y $N_u^i = N_u \quad i = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \text{Número de productos} &= (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot N_u \cdot m + \\ &+ (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) + \\ &+ (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot \sum_{j=1}^n \max(|\text{grado}(A_j)| + 1, |\text{grado}(T_j)|) = \\ &= (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[N_u \cdot m + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) + \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^n \max(|\text{grado}(A_j)| + 1, |\text{grado}(T_j)|) \right] \quad (\text{A.1-26}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Número de sumas} &= (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot (N_u \cdot m - 1) + \\ &+ (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) - 1 \right) + \\ &+ (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot \left(\sum_{j=1}^n \max(|\text{grado}(A_j)| + 1, |\text{grado}(T_j)|) - 1 \right) = \\ &= (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \left[N_u \cdot m + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \max(1, |\text{grado}(B_{ji})| - 1) + \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^n \max(|\text{grado}(A_j)| + 1, |\text{grado}(T_j)|) - 3 \right] \quad (\text{A.1-27}) \end{aligned}$$

El número de sumas requerido para sumar los términos de la ecuación de predicción es:

$$\text{Número de sumas} = (N_2 - N_1 + 1) \cdot n \cdot 2 \quad (\text{A.1-28})$$

Las señales de salida filtradas se obtienen empleando la ecuación:

$$y_j^f(k) = \frac{y_j(k)}{T_j(z^{-1})} \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.1-29})$$

En esta operación hay $|\text{grado}(T_j)|$ productos⁸ y $|\text{grado}(T_j)|$ sumas. Teniendo en cuenta todas las salidas, el número de operaciones es:

$$\text{Número de productos} = \sum_{j=1}^n |\text{grado}(T_j)| \quad (\text{A.1-30})$$

⁸Los polinomios de filtrado tienen siempre su primer coeficiente igual a uno y por tanto el producto por este uno no se implementa

$$\text{Número de sumas} = \sum_{j=1}^n |\text{grado}(T_j)| \quad (\text{A.1-31})$$

Los incrementos de las acciones de control filtradas se obtienen empleando:

$$\Delta u_i^{f,j}(k) = \frac{\Delta u_i(k)}{T_j(z^{-1})} \quad (\text{A.1-32})$$

En esta expresión hay $|\text{grado}(T_j)|$ productos y $|\text{grado}(T_j)| + 1$ sumas⁹. Teniendo presentes todas las entradas y todos los polinomios de filtrado el número de operaciones requerido es:

$$\text{Número de productos} = \sum_{j=1}^n |\text{grado}(T_j)| \cdot m \quad (\text{A.1-33})$$

$$\text{Número de sumas} = \left(\sum_{j=1}^n |\text{grado}(T_j)| + n \right) \cdot m \quad (\text{A.1-34})$$

Finalmente sumando las ecuaciones (A.1-26), (A.1-30) y (A.1-33) se obtiene el número total de productos, y sumando las ecuaciones (A.1-27), (A.1-28), (A.1-31) y (A.1-34) se obtiene el número total de sumas. ■

A.2. Demostraciones correspondientes al capítulo 4

Proposición A.2.1 *El par (A, C) es observable si las matrices A y C se construyen de acuerdo al LEMA 3.2.1.*

Demostración: Para demostrar este hecho hay que establecer que la matriz de observabilidad, Ob , tiene rango completo de columnas (r):

$$Ob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} ; \quad r = \sum_{j=1}^n n_j \quad (\text{A.2-1})$$

La matrix CA^i es la de forma:

$$CA^i = \text{diag}_{j=1, \dots, n} (C_j) \text{diag}_{j=1, \dots, n} (A_j^i) = \text{diag}_{j=1, \dots, n} (C_j A_j^i) \quad (\text{A.2-2})$$

⁹Se supone que en la implementación del algoritmo sólo se emplean las acciones de control y por tanto sus incrementos han de ser calculados

Consecuentemente la matriz de observabilidad es de la forma:

$$\mathbf{Ob} = \begin{bmatrix} \text{diag} (C_j) \\ \text{diag} (C_j A_j) \\ \vdots \\ \text{diag} (C_j A_j^{r-1}) \end{bmatrix}_{j=1, \dots, n} \quad (\text{A.2-3})$$

Como lo que interesa es determinar su rango, se realizan una serie de intercambios de filas hasta conseguir la siguiente matriz \mathbf{Ob}' :

$$\mathbf{Ob}' = \text{diag} (\mathbf{Ob}_1, \mathbf{Ob}_2, \dots, \mathbf{Ob}_n) \quad (\text{A.2-4})$$

donde:

$$\mathbf{Ob}_j = \begin{bmatrix} C_j \\ C_j A_j \\ \vdots \\ C_j A_j^{r-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-5})$$

El cálculo de su rango se puede descomponer así:

$$\text{Rango } \mathbf{Ob} = \text{Rango } \mathbf{Ob}' = \sum_{j=1}^n \text{Rango } \mathbf{Ob}_j \quad (\text{A.2-6})$$

Los pares (A_j, C_j) son observables, puesto que son las formas canónicas observables correspondientes a cada una de las salidas por separado, con lo cual:

$$\text{Rango} \begin{bmatrix} C_j \\ C_j A_j \\ \vdots \\ C_j A_j^{n_j-1} \end{bmatrix} = n_j = \text{Rango } \mathbf{Ob}_j, \text{ pues } r \geq n_j. \quad (\text{A.2-7})$$

Tras esta expresión ya se está en disposición de calcular el rango de \mathbf{Ob} :

$$\text{Rango } \mathbf{Ob} = \sum_{j=1}^n \text{Rango } \mathbf{Ob}_j = \sum_{j=1}^n n_j = r \quad (\text{A.2-8})$$

Por tanto, la matriz de observabilidad posee rango completo de columnas y el par (A, C) es observable. ■

Proposición A.2.2 Si las matrices del ruido, Σ , Ω y Π_1 , se diseñan en base a la ubicación de los polos del observador (sección 3.6), entonces el par (\tilde{A}, \tilde{C}) es observable si y sólo si ninguno de éstos polos se ubica en uno.

Demostración: Al igual que en la proposición anterior A.2.1, la demostración se basa en establecer que la matriz de observabilidad, $\overline{\mathbf{O}b}$, posee rango completo de columnas:

$$\overline{\mathbf{O}b} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{r+n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-9})$$

Empleando las expresiones de \bar{C} y \bar{A} , y desarrollando las sucesivas potencias de \bar{A} , se obtiene la siguiente expresión:

$$\overline{\mathbf{O}b} = \begin{bmatrix} C & \Omega \\ CA & C\Sigma + \Omega \\ \vdots & \\ CA^{r+n-1} & CA^{r+n-2}\Sigma + \dots + C\Sigma + \Omega \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-10})$$

Recordando que:

$$C = \text{diag}(C_1, \dots, C_n) = \text{diag}_{j=1, \dots, n}(C_j) \quad ; \quad \Omega = \text{diag}(\Omega_{11}, \dots, \Omega_{nn}) = \text{diag}_{j=1, \dots, n}(\Omega_{jj}) \quad (\text{A.2-11})$$

y que la matriz Π_1 es diagonal por bloques (3.6-7):

$$\Pi_1 = \text{diag}(\Pi_{11}, \Pi_{22}, \dots, \Pi_{nn}) = \text{diag}_{j=1, \dots, n}(\Pi_{jj})$$

$$\Pi_{jj} = \left[\Pi_{jj}(1) \quad \Pi_{jj}(2) \quad \dots \quad \Pi_{jj}(n_j) \right]_{n_j \times 1}^T \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.2-12})$$

$$\Sigma = \Pi_1 \Omega = \text{diag}(\Pi_{11}\Omega_{11}, \dots, \Pi_{nn}\Omega_{nn}) = \text{diag}_{j=1, \dots, n}(\Pi_{jj}\Omega_{jj}) \quad (\text{A.2-13})$$

se llega a:

$$\overline{\mathbf{O}b} = \begin{bmatrix} \text{diag}_{j=1, \dots, n}(C_j) & \text{diag}_{j=1, \dots, n}(\Omega_{jj}) \\ \text{diag}_{j=1, \dots, n}(C_j A_j) & \text{diag}_{j=1, \dots, n}(C_j \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \Omega_{jj}) \\ \vdots & \vdots \\ \text{diag}_{j=1, \dots, n}(C_j A_j^{r+n-1}) & \text{diag}_{j=1, \dots, n}(C_j A_j^{r+n-2} \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \dots + C_j \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \Omega_{jj}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-14})$$

El rango de la matriz de observabilidad, $\overline{\mathbf{O}b}$, es igual al rango de la siguiente matriz $\overline{\mathbf{O}b'}$ que se obtiene a partir de la primera intercambiando determinadas filas y columnas:

$$\overline{\mathbf{O}b'} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & V_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-15})$$

Las matrices V_j son de la forma:

$$V_j = \begin{bmatrix} C_j & & \Omega_{jj} \\ C_j A_j & & C_j \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \Omega_{jj} \\ \vdots & & \vdots \\ C_j A_j^{r+n-1} & C_j A_j^{r+n-2} \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \cdots + C_j \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \Omega_{jj} & \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{A.2-16})$$

De esta forma el rango de la matriz de observabilidad es:

$$\text{Rango } \overline{Ob} = \text{Rango } \overline{Ob}' = \sum_{j=1}^n \text{Rango } V_j \quad (\text{A.2-17})$$

Las matrices V_j tienen dimensión $(r+n) \times (n_j+1)$. Para poder analizar su rango se emplearán las siguientes submatrices V_j^* :

$$V_j^* = \begin{bmatrix} C_j & & \Omega_{jj} \\ C_j A_j & & C_j \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \Omega_{jj} \\ \vdots & & \vdots \\ C_j A_j^{n_j} & C_j A_j^{n_j-1} \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \cdots + C_j \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \Omega_{jj} & \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-18})$$

que tienen dimensión $(n_j+1) \times (n_j+1)$. Estas submatrices tienen rango siempre mayor o igual que n_j , pues contienen la matriz de observabilidad del par (A_j, C_j) que poseía rango completo de columnas e igual a n_j . Las submatrices V_j^* poseen una fila y una columna más, con lo cual, su rango podría ser a lo sumo n_j+1 . El lema A.2.1 muestra que su rango es igual a n_j+1 si y sólo si ningún polo del observador correspondiente a la salida j -ésima se ubica en uno.

Si esta hipótesis se extiende a la totalidad de salidas:

$$\text{Rango } \overline{Ob} = \text{Rango } \overline{Ob}' = \sum_{j=1}^n \text{Rango } V_j = \sum_{j=1}^n (n_j+1) = r+n \quad (\text{A.2-19})$$

con lo que queda demostrado que el par (\bar{A}, \bar{C}) es observable. ■

LEMA A.2.1 *Las submatrices V_j^* :*

$$V_j^* = \begin{bmatrix} C_j & & \Omega_{jj} \\ C_j A_j & & C_j \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \Omega_{jj} \\ \vdots & & \vdots \\ C_j A_j^{n_j} & C_j A_j^{n_j-1} \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \cdots + C_j \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \Omega_{jj} & \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-20})$$

tienen dimensión $(n_j+1) \times (n_j+1)$. Su rango es n_j+1 si y sólo si ningún polo del observador correspondiente a la salida j -ésima se ubica en 1.

Demostración: Estas submatrices tienen rango siempre mayor o igual que n_j , pues contienen la matriz de observabilidad del par (A_j, C_j) que poseía rango completo de columnas e igual a n_j . Las submatrices V_j^* poseen una fila y una columna más, con lo cual, su rango podría ser a lo sumo $n_j + 1$.

Para estudiar tal situación, se analiza bajo qué condiciones la última fila es linealmente dependiente de las otras n_j primeras:

$$\begin{aligned} & \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_j} \text{ no todos nulos :} \\ & [C_j A_j^{n_j} \quad C_j A_j^{n_j-1} \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \dots + \Omega_{jj}] = \lambda_1 [C_j \quad \Omega_{jj}] + \lambda_2 [C_j A_j \quad C_j \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \Omega_{jj}] + \dots + \\ & + \lambda_{n_j} [C_j A_j^{n_j-1} \quad C_j A_j^{n_j-2} \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \dots + \Omega_{jj}] \end{aligned} \quad (\text{A.2-21})$$

Para que se satisfaga esta relación se ha de verificar que:

$$C_j A_j^{n_j} = \lambda_1 C_j + \lambda_2 C_j A_j + \dots + \lambda_{n_j} C_j A_j^{n_j-1} \quad (\text{A.2-22})$$

$$C_j A_j^{n_j} = C_j (\lambda_1 I + \lambda_2 A_j + \dots + \lambda_{n_j} A_j^{n_j-1}) \quad (\text{A.2-23})$$

Esta última relación se verifica si:

$$\lambda_1 = -a_{0,j} \quad \lambda_2 = -a_{1,j} \quad \dots \quad \lambda_{n_j} = -a_{n_j-1,j} \quad (\text{A.2-24})$$

ya que la matriz A_j anula a su polinomio característico $(A_j(z))$:

$$\begin{aligned} & A_j^{n_j} + a_{n_j-1,j} A_j^{n_j-1} + \dots + a_{0,j} I = \mathbf{0} \\ & A_j^{n_j} = -a_{n_j-1,j} A_j^{n_j-1} - \dots - a_{0,j} I \end{aligned} \quad (\text{A.2-25})$$

La combinación lineal de $C_j A_j^{n_j}$ se establece en términos de un conjunto de vectores linealmente independientes:

$$\begin{aligned} & C_j I = C_j = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \\ & C_j A_j = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad -a_{n_j-1,j}] \\ & C_j A_j^2 = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad -a_{n_j-1,j} \quad X_1] \\ & \quad \quad \quad \vdots \\ & C_j A_j^{n_j-1} = [1 \quad -a_{n_j-1,j} \quad X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_{n_j-2}] \end{aligned} \quad (\text{A.2-26})$$

X_j son coeficientes que dependen de los coeficientes no nulos de la matriz A_j .

Entonces, los coeficientes de dicha combinación son únicos, por tanto, no hay otra combinación lineal de dichos vectores que dé lugar a $C_j A_j^{n_j}$.

El siguiente paso consiste en analizar cuando se verifica que el otro término de la última fila de V_j^* es combinación lineal del resto de filas:

$$C_j A_j^{n_j-1} \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \dots + \Omega_{jj} = -a_{0,j} \Omega_{11} - a_{1,j} (C_j \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \Omega_{jj}) - \dots -$$

$$-a_{n_j-1,j} \left(C_j A_j^{n_j-2} \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \dots + \Omega_{jj} \right) \quad (\text{A.2-27})$$

Reagrupando términos:

$$\begin{aligned} & \left[C_j A_j^{n_j-1,j} + (1 + a_{n_j-1,j}) C_j A_j^{n_j-2} + (1 + a_{n_j-1,j} + a_{n_j-2,j}) C_j A_j^{n_j-3} + \dots + \right. \\ & \left. + (1 + a_{n_j-1,j} + \dots + a_{1,j}) C_j \right] \Pi_{jj} \Omega_{jj} = -(1 + a_{0,j} + a_{1,j} + \dots + a_{n_j-1,j}) \Omega_{jj} \end{aligned} \quad (\text{A.2-28})$$

En el LEMA A.2.2 del Apéndice A se justifica que:

$$\begin{aligned} & \left[C_j A_j^{n_j-1,j} + (1 + a_{n_j-1,j}) C_j A_j^{n_j-2} + \dots + (1 + a_{n_j-1,j} + \dots + a_{1,j}) C_j \right] = \\ & = \underbrace{[1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]}_{n_j} \end{aligned} \quad (\text{A.2-29})$$

Con este resultado:

$$[1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1] \Pi_{jj} \Omega_{jj} = -(1 + a_{0,j} + a_{1,j} + \dots + a_{n_j-1,j}) \Omega_{jj} \quad (\text{A.2-30})$$

En el diseño del observador se asignaban sus polos mediante la elección de las matrices Π_1 y Ω , en particular, cada una de ella asignaba de forma independiente dichos polos. Si γ_j $j = 1, \dots, n$ son los polos a asignar por Ω , entonces $\Omega_{jj} = 1 - \gamma_j$. Los polos a asignar por Π_1 eran los valores propios de la matriz Γ_1 :

$$\Gamma_1 = A - \Pi_1 C = \text{diag}(A_1 - \Pi_{11} C_1, \dots, A_n - \Pi_{nn} C_n) \quad (\text{A.2-31})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{jj} = A_j - \Pi_{jj} C_j &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_{0,j} - \Pi_{jj}(1) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{1,j} - \Pi_{jj}(2) \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_{2,j} - \Pi_{jj}(3) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n_j-1,j} - \Pi_{jj}(n_j) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\Gamma_{jj,0} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\Gamma_{jj,1} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -\Gamma_{jj,2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\Gamma_{jj,n_j-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.2-32})$$

Los coeficientes $\Gamma_{jj,k}$ corresponden al polinomio característico de Γ_{jj} , los cuales vienen determinados por los polos de Γ_{jj} . En esta situación:

$$\Pi_{jj} = \begin{bmatrix} \Gamma_{jj,0} - a_{0,j} \\ \Gamma_{jj,1} - a_{1,j} \\ \vdots \\ \Gamma_{jj,n_j-1} - a_{n_j-1,j} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-33})$$

Volviendo a la ecuación (A.2-30):

$$[1 \ 1 \ 1 \ \cdots \ 1] \mathbf{\Pi}_{jj} \Omega_{jj} = -(1 + a_{0,j} + a_{1,j} + \cdots + a_{n_j-1,j}) \Omega_{jj} \quad (\text{A.2-34})$$

La primera posibilidad de que se satisfaga es que $\Omega_{jj} = 0$, lo cual se produce cuando el polo γ_j del observador se ubica en 1, siendo esta posibilidad no válida pues en el enunciado de la proposición se exigía que ningún polo se ubicara en 1.

Suponiendo que esta condición no se da se tiene que:

$$[1 \ 1 \ 1 \ \cdots \ 1] \mathbf{\Pi}_{jj} = -(1 + a_{0,j} + a_{1,j} + \cdots + a_{n_j-1,j}) \quad (\text{A.2-35})$$

$$[1 \ 1 \ 1 \ \cdots \ 1] \begin{bmatrix} \Gamma_{jj,0} - a_{0,j} \\ \Gamma_{jj,1} - a_{1,j} \\ \vdots \\ \Gamma_{jj,n_j-1} - a_{n_j-1,j} \end{bmatrix} = -(1 + a_{0,j} + a_{1,j} + \cdots + a_{n_j-1,j}) \quad (\text{A.2-36})$$

$$\Gamma_{jj,0} + \Gamma_{jj,1} + \cdots + \Gamma_{jj,n_j-1} - a_{0,j} - a_{1,j} - \cdots - a_{n_j-1,j} = -(1 + a_{0,j} + a_{1,j} + \cdots + a_{n_j-1,j}) \quad (\text{A.2-37})$$

$$\Gamma_{jj,0} + \Gamma_{jj,1} + \cdots + \Gamma_{jj,n_j-1} = -1 \quad (\text{A.2-38})$$

Esta última condición se verifica si y sólo si el polinomio característico de Γ_{jj} tiene alguna raíz en 1, es decir, si dicha matriz tiene algún valor propio en 1, tal y como garantiza el lema A.2.3.

Consecuentemente, la última fila de la matriz V_j^* será linealmente independiente de las otras n_j si y sólo si ninguno de los polos del observador asociados a la salida j -ésima se ubican en uno. En tal caso se tendrá:

$$\text{Rango } V_j = \text{Rango } V_j^* = n_j + 1 \quad (\text{A.2-39})$$

■

LEMA A.2.2

$$\begin{aligned} & \left[C_j A_j^{n_j-1,j} + (1 + a_{n_j-1,j}) C_j A_j^{n_j-2} + \cdots + (1 + a_{n_j-1,j} + \cdots + a_{1,j}) C_j \right] = \\ & = \underbrace{[1 \ 1 \ 1 \ \cdots \ 1]}_{n_j} \end{aligned} \quad (\text{A.2-40})$$

Demostración: Las matrices C_j son de la forma:

$$C_j = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] \quad (\text{A.2-41})$$

Consecuentemente, sólo interesa la expresión de la última fila de las matrices A_j^k . Con tal fin se define $r_l = A_j^{n_j-1}(l, n_j)$ como el elemento l dentro de la última fila de la matriz $A_j^{n_j-1}$:

$$r_l = \begin{cases} 1 & l = 1 \\ \sum_{k=1}^{l-1} r_k(-a_{n_j-l+k, j}) & l > 1 \end{cases} \quad (\text{A.2-42})$$

Esta fórmula recursiva se puede extender para $r_l^m = A_j^{n_j-m}(l, n_j)$:

$$r_l^m = \begin{cases} 0 & l < m \\ r_{l-m+1} & l \geq m \end{cases} \quad (\text{A.2-43})$$

Estas fórmulas se deducen obteniendo las expresiones analíticas para la última fila de las matrices A_j^k . Tras esto se tiene:

$$\begin{aligned} & \left[C_j A_j^{n_j-1, j} + (1 + a_{n_j-1, j}) C_j A_j^{n_j-2} + \cdots + (1 + a_{n_j-1, j} + \cdots + a_{1, j}) C_j \right] = \\ & = [r_1 \ r_2 \ r_3 \ \cdots \ r_{n_j}] + \\ & + (1 + a_{n_j-1, j}) [r_1^2 \ r_2^2 \ \cdots \ r_{n_j}^2] + \\ & + \vdots + \\ & (1 + a_{n_j-1, j} + \cdots + a_{1, j}) [r_1^{n_j} \ \cdots \ r_{n_j}^{n_j}] \end{aligned} \quad (\text{A.2-44})$$

El primer término de esta suma es:

$$r_1 + (1 + a_{n_j-1, j}) \underbrace{r_1^2}_0 + \cdots + (1 + a_{n_j-1, j} + \cdots + a_{1, j}) \underbrace{r_1^{n_j}}_0 = r_1 = 1 \quad (\text{A.2-45})$$

El segundo término es:

$$\begin{aligned} & r_2 + (1 + a_{n_j-1, j}) \underbrace{r_2^2}_{r_1} + \cdots + (1 + a_{n_j-1, j} + \cdots + a_{1, j}) \underbrace{r_2^{n_j}}_0 = \\ & = r_2 + (1 + a_{n_j-1, j}) r_1 = r_1(-a_{n_j-1, j}) + (1 + a_{n_j-1, j}) r_1 = r_1 = 1 \end{aligned} \quad (\text{A.2-46})$$

El elemento p -ésimo es:

$$\begin{aligned} & r_p + (1 + a_{n_j-1, j}) \underbrace{r_p^2}_{r_{p-1}} + \cdots + (1 + a_{n_j-1, j} + \cdots + a_{n_j-p+1, j}) \underbrace{r_p^p}_{r_1} + \cdots + (1 + \cdots + a_{1, j}) \underbrace{r_p^{n_j}}_0 = \\ & = r_p + (1 + a_{n_j-1, j}) r_{p-1} + \cdots + (1 + a_{n_j-1, j} + \cdots + a_{n_j-p+1, j}) r_1 \end{aligned}$$

$$\text{Aplicando que: } r_p = r_{p-1}(-a_{n_j-1, j}) + r_{p-2}(-a_{n_j-2, j}) + \cdots + r_1(-a_{n_j-p+1, j}) \quad (\text{A.2-47})$$

$$r_{p-1} = r_{p-2}(-a_{n_j-1, j}) + r_{p-3}(-a_{n_j-2, j}) + \cdots + r_1(-a_{n_j-p+2, j}) \quad (\text{A.2-48})$$

⋮

$$r_p + (1 + a_{n_j-1,j})r_{p-1} + \cdots + (1 + a_{n_j-1,j} + \cdots + a_{n_j-p+1})r_1 = r_1 = 1 \quad (\text{A.2-49})$$

■

LEMA A.2.3 Dado el polinomio $z^{n_j} + \Gamma_{jj,n_j-1}z^{n_j-1} + \cdots + \Gamma_{jj,1}z + \Gamma_{jj,0}$,

$$\sum_{k=0}^{n_j-1} \Gamma_{jj,k} = -1 \iff \text{el polinomio posee al menos una raíz en uno.} \quad (\text{A.2-50})$$

Demostración: En primer lugar se demuestra en el sentido (\Leftarrow):

Sean r_1, r_2, \dots, r_{n_j} las raíces del polinomio. Por la fórmulas de Cardano-Vietta se conoce que:

$$\Gamma_{jj,n_j-1} = -(r_1 + r_2 + \cdots + r_{n_j}) \quad (\text{A.2-51})$$

$$\Gamma_{jj,n_j-2} = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{n_j-1} r_{n_j} \quad (\text{A.2-52})$$

$$\vdots \quad (\text{A.2-53})$$

$$\Gamma_{jj,0} = r_1 r_2 \cdots r_{n_j} (-1)^{n_j} \quad (\text{A.2-54})$$

Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $r_{n_j} = 1$. Entonces:

$$\Gamma_{jj,0} = r_1 r_2 \cdots r_{n_j-1} \cdot 1 (-1)^{n_j} \quad (\text{A.2-55})$$

$$\Gamma_{jj,0} + \Gamma_{jj,1} = r_1 r_2 \cdots r_{n_j-1} (-1)^{n_j} + r_1 r_2 \cdots r_{n_j-1} (-1)^{n_j-1} + \cdots + r_2 r_3 \cdots r_{n_j} (-1)^{n_j-1} \quad (\text{A.2-56})$$

$$\Gamma_{jj,0} + \Gamma_{jj,1} = r_1 r_3 \cdots r_{n_j} (-1)^{n_j-1} + \cdots + r_2 r_3 \cdots r_{n_j} (-1)^{n_j-1} \quad (\text{A.2-57})$$

Como se aprecia, al sumar los dos primeros coeficientes se ha simplificado uno de los términos del coeficiente correspondiente a la potencia de orden uno con el coeficiente del término independiente. Este hecho se repite al añadir en la suma el coeficiente correspondiente a la potencia de segundo orden, puesto que ahora se simplifican todos los términos restantes correspondientes a la potencia de orden uno con otros tantos correspondientes a la de segundo orden.

Este efecto se repite de forma similar hasta llegar a sumar todos los coeficientes del polinomio, quedando, tras las correspondientes simplificaciones, el único término del último coeficiente, Γ_{jj,n_j-1} , que no está en el penúltimo, $\Gamma_{jj,n_j-2}, -r_{n_j}$:

$$\sum_{k=0}^{n_j-1} \Gamma_{jj,k} = -r_{n_j-1} = -1 \quad (\text{A.2-58})$$

El siguiente paso es demostrar el sentido (\Rightarrow):

Se empleará el procedimiento de inducción sobre el orden del polinomio n_j . En primer lugar se analiza el caso $n_j = 1$:

$$z + \Gamma_{jj,0} \quad (\text{A.2-59})$$

Si $\sum_{k=0}^0 \Gamma_{jj,k} = -1$:

$$z - 1 \tag{A.2-60}$$

luego es cierto que hay una raíz en uno.

Ahora se trata el caso $n_j = 2$:

$$z^2 + \Gamma_{jj,1}z + \Gamma_{jj,0} \tag{A.2-61}$$

Se cumple que $\sum_{k=0}^1 \Gamma_{jj,k} = -1$. Por las fórmulas de Cardano-Vieta:

$$\Gamma_{jj,0} = r_1 r_2 \quad \Gamma_{jj,1} = -(r_1 + r_2) \tag{A.2-62}$$

luego:

$$\Gamma_{jj,0} + \Gamma_{jj,1} = -1 = r_1 r_2 - (r_1 + r_2) \tag{A.2-63}$$

Supóngase que $r_1 \neq 1$:

$$r_2(r_1 - 1) - r_1 = -1 \Rightarrow r_2 = \frac{-1 + r_1}{r_1 - 1} = 1 \tag{A.2-64}$$

por tanto, siempre posee al menos una raíz en uno.

Supóngase ahora que la hipótesis es válida para orden $n_j - 1$, y se tratará de justificar para orden n_j :

$$z^{n_j} + \Gamma_{jj,n_j-1}z^{n_j-1} + \dots + \Gamma_{jj,1}z + \Gamma_{jj,0} \tag{A.2-65}$$

Las relaciones de Cardano-Vieta son:

$$\Gamma_{jj,n_j-1} = -(r_1 + r_2 + \dots + r_{n_j}) \tag{A.2-66}$$

$$\Gamma_{jj,n_j-2} = r_1 r_2 + \dots + r_{n_j-1} r_{n_j} \tag{A.2-67}$$

$$\vdots \tag{A.2-68}$$

$$\Gamma_{jj,0} = (-1)^{n_j} r_1 r_2 \dots r_{n_j} \tag{A.2-69}$$

Se verifica que la suma de los coeficientes es -1:

$$\sum_{k=0}^{n_j-1} \Gamma_{jj,k} = -1 \tag{A.2-70}$$

Si se construye un polinomio de orden $n_j - 1$ con las raíces r_1, \dots, r_{n_j-1} , éste tendrá por coeficientes:

$$\Gamma'_{jj,n_j-2} = -(r_1 + r_2 + \dots + r_{n_j-1}) \tag{A.2-71}$$

$$\Gamma'_{jj,n_j-3} = r_1 r_2 + \dots + r_{n_j-2} r_{n_j-1} \tag{A.2-72}$$

$$\vdots \quad (\text{A.2-73})$$

$$\Gamma'_{jj,0} = (-1)^{n_j-1} r_1 r_2 \cdots r_{n_j-1} \quad (\text{A.2-74})$$

definiendo:

$$S_{n_j-1} = \sum_{k=0}^{n_j-2} \Gamma'_{jj,k} + 1 \quad (\text{A.2-75})$$

y aplicando desde la ecuación (A.2-66) a la (A.2-74) se deduce:

$$-1 \cdot r_{n_j} S_{n_j-1} + S_{n_j-1} = 0 \quad (\text{A.2-76})$$

si $r_1, r_2, \dots, r_{n_j-1} \neq 1$ entonces $S_{n_j-1} \neq 0$, y por tanto:

$$r_{n_j} = \frac{S_{n_j-1}}{S_{n_j-1}} = 1 \quad (\text{A.2-77})$$

luego el polinomio de orden n_j siempre posee al menos una raíz en uno. ■

Proposición A.2.3 Si las matrices del ruido, Σ , Ω y Π_1 , se diseñan en base a la ubicación de los polos del observador (sección 3.6), y las matrices K_j :

$$K_j = \begin{bmatrix} \Pi_{jj} & A_j \Pi_{jj} + \Pi_{jj} \Omega_{jj} & \cdots & A_j^{r+n-1} \Pi_{jj} + A_j^{r+n-2} \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \cdots + \Pi_{jj} \Omega_{jj} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_j \times (r+n)} \\ j = 1, \dots, n \quad (\text{A.2-78})$$

poseen todas, o excepto una de ellas, rango completo de filas (n_j), entonces el par $(\bar{A}, [\bar{B} \Pi])$ es controlable.

Demostración: Se justificará que la matriz de controlabilidad, \overline{Co} , posee rango completo de filas:

$$\overline{Co} = \begin{bmatrix} (\bar{B} \Pi) & \bar{A}(\bar{B} \Pi) & \cdots & \bar{A}^{r+n-1}(\bar{B} \Pi) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-79})$$

El término genérico de esta matriz es:

$$\bar{A}^l(\bar{B} \Pi) = \begin{bmatrix} A^l B & A^l \Pi_1 + A^{l-1} \Pi_1 \Omega + \cdots + A \Pi_1 \Omega + \Pi_1 \Omega \\ \mathbf{0} & I_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-80})$$

con lo que toma la forma:

$$\overline{Co} = \begin{bmatrix} B & \Pi_1 & AB & A \Pi_1 + \Pi_1 \Omega & \cdots & A^{r+n-1} B & A^{r+n-1} \Pi_1 + \cdots + \Pi_1 \Omega \\ \mathbf{0} & I_n & \mathbf{0} & I_n & \cdots & \mathbf{0} & I_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-81})$$

Su rango es:

$$\text{Rango} \begin{bmatrix} B & \Pi_1 & AB & A \Pi_1 + \Pi_1 \Omega & \cdots & A^{r+n-1} B & A^{r+n-1} \Pi_1 + \cdots + \Pi_1 \Omega \\ \mathbf{0} & I_n & \mathbf{0} & I_n & \cdots & \mathbf{0} & I_n \end{bmatrix} =$$

$$= \text{Rango} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{r+n-1}\mathbf{B} & \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{A}\mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_1\mathbf{\Omega} & \cdots & \mathbf{A}^{r+n-1}\mathbf{\Pi}_1 + \cdots + \mathbf{\Pi}_1\mathbf{\Omega} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n & \cdots & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} =$$

Intercambiando columnas en esta matriz:

$$= \text{Rango} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{r+n-1}\mathbf{B}_1 & \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{A}_2^{r+n-1}\mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \vdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_n & \mathbf{A}_n\mathbf{B}_n & \cdots & \mathbf{A}_n^{r+n-1}\mathbf{B}_n & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{K}_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-82})$$

siendo:

$$\mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{jj} & \mathbf{A}_j\mathbf{\Pi}_{jj} + \mathbf{\Pi}_{jj}\mathbf{\Omega}_{jj} \cdots & \mathbf{A}_j^{r+n-1}\mathbf{\Pi}_{jj} + \cdots + \mathbf{A}_j\mathbf{\Pi}_{jj}\mathbf{\Omega}_{jj} + \mathbf{\Pi}_{jj}\mathbf{\Omega}_{jj} \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{1 \times (r+n)} \quad (\text{A.2-83})$$

Como las matrices \mathbf{K}_j poseen todas rango completo de filas, salvo a lo sumo una, entonces las filas de la matriz (A.2-82) correspondientes a cualquier matriz \mathbf{K}_j son linealmente independientes de las correspondientes a cualquier otra matriz \mathbf{K}_i con $i \neq j$. Además, bajo estas condiciones, se va a justificar que las últimas n filas de la matriz (A.2-82) son linealmente independientes de todas las demás. En concreto, la fila j -ésima, dentro de estas últimas n , sólo se puede obtener por combinación lineal de las filas correspondientes a la matriz \mathbf{K}_j . Esta combinación lineal depende de la matriz $\mathbf{C}\mathbf{o}'_j$:

$$\mathbf{C}\mathbf{o}'_j = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_j & \mathbf{A}_j\mathbf{B}_j & \cdots & \mathbf{A}_j^{r+n-1}\mathbf{B}_j \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-84})$$

cuyo rango es:

$$\begin{aligned} \text{Rango } \mathbf{C}\mathbf{o}'_j &= \text{Rango} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_j & \mathbf{A}_j\mathbf{B}_j & \cdots & \mathbf{A}_j^{r+n-1}\mathbf{B}_j \end{bmatrix} = \\ &= \text{Rango } \mathbf{C}\mathbf{o}_j = \text{Rango} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_j & \mathbf{A}_j\mathbf{B}_j & \cdots & \mathbf{A}_j^{n_j-1}\mathbf{B}_j \end{bmatrix} = n_j \end{aligned} \quad (\text{A.2-85})$$

Donde \mathbf{Co}_j es la matriz de controlabilidad asociada a la realización canónica observable de la salida j -ésima, la cual posee rango completo de filas ya que se trata de una realización que es además controlable. Este resultado indica que como la matriz \mathbf{Co}'_j posee rango completo de filas la única combinación lineal que podría dar lugar a dicha fila j -ésima sería con todos los coeficientes nulos. Esto quiere decir que esta fila j -ésima es linealmente independiente de las filas correspondientes a las matrices \mathbf{K}_j . Por tanto, las n últimas filas de la matriz (A.2-82) son linealmente independientes de todas las demás. Como consecuencia de todos estos análisis, el rango de la matriz de controlabilidad es:

$$\text{Rango } \overline{\mathbf{Co}} = n + \sum_{j=1}^n n_j = n + r \quad (\text{A.2-86})$$

por tanto posee rango completo de filas y entonces el par $(\bar{\mathbf{A}}, [\bar{\mathbf{B}} \ \mathbf{\Pi}])$ es controlable. ■

COROLARIO A.2.1 *Si el par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) es controlable entonces el par $(\bar{\mathbf{A}}, [\bar{\mathbf{B}} \ \mathbf{\Pi}])$ también es controlable.*

Demostración: Retomando la ecuación (A.2-82):

$$\text{Rango} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{r+n-1} \mathbf{B}_1 & \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{A}_2^{r+n-1} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \vdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_n & \mathbf{A}_n \mathbf{B}_n & \cdots & \mathbf{A}_n^{r+n-1} \mathbf{B}_n & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{K}_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-87})$$

Como el par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) es controlable entonces su matriz de controlabilidad, \mathbf{Co} , tiene rango completo de filas:

$$\text{Rango } \mathbf{Co} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{r-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} = \text{Rango} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{r-1} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{A}_2^{r-1} \mathbf{B}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{B}_n & \mathbf{A}_n \mathbf{B}_n & \cdots & \mathbf{A}_n^{r-1} \mathbf{B}_n \end{bmatrix} = r \quad (\text{A.2-88})$$

entonces:

$$\text{Rango} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{r+n-1} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 & \cdots & \mathbf{A}_2^{r+n-1} \mathbf{B}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{B}_n & \mathbf{A}_n \mathbf{B}_n & \cdots & \mathbf{A}_n^{r+n-1} \mathbf{B}_n \end{bmatrix} = \text{Rango } \mathbf{Co} = r \quad (\text{A.2-89})$$

Consecuentemente, sean cuáles sean las matrices K_j :

$$\text{Rango} \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \cdots & A_1^{r+n-1} B_1 & K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ B_2 & A_2 B_2 & \cdots & A_2^{r+n-1} B_2 & 0 & K_2 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n & A_n B_n & \cdots & A_n^{r+n-1} B_n & 0 & \cdots & 0 & K_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} & 1 & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times (r+n)} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \text{Rango } C\mathbf{o} + n = n + r \quad (\text{A.2-90})$$

■

Proposición A.2.4 (Caracterización de las matrices K_j) La matriz K_j posee rango completo de filas si y sólo si el par (A_j, Π_{jj}) es controlable.

Demostración: Si el par (A_j, Π_{jj}) es controlable entonces:

$$\text{Rango} \begin{bmatrix} \Pi_{jj} & A_j \Pi_{jj} & \cdots & A_j^{n_j-1} \Pi_{jj} \end{bmatrix} = n_j \quad (\text{A.2-91})$$

Realizando las siguientes operaciones elementales sobre las columnas de esta matriz:

$$2^{\text{a}} \text{columna} = 2^{\text{a}} \text{ columna} + 1^{\text{a}} \text{ columna} \cdot \Omega_{jj}$$

$$3^{\text{a}} \text{columna} = 3^{\text{a}} \text{ columna} + (1^{\text{a}} \text{ columna} + 2^{\text{o}} \text{ columna}) \cdot \Omega_{jj}$$

$$\vdots$$

$$n_j\text{-ésima columna} = n_j\text{-ésima columna} + (1^{\text{a}} + 2^{\text{a}} + \cdots + (n_j - 1)\text{-ésima}) \text{ columnas} \cdot \Omega_{jj}$$

Se llega a:

$$\begin{aligned} & \text{Rango} \begin{bmatrix} \Pi_{jj} & A_j \Pi_{jj} & \cdots & A_j^{n_j-1} \Pi_{jj} \end{bmatrix} = \\ & = \text{Rango} \begin{bmatrix} \Pi_{jj} & A_j \Pi_{jj} + \Pi_{jj} \Omega_{jj} & \cdots & A_j^{n_j-1} \Pi_{jj} + \cdots + A_j \Pi_{jj} \Omega_{jj} + \Pi_{jj} \Omega_{jj} \end{bmatrix} = n_j \end{aligned} \quad (\text{A.2-92})$$

Consecuentemente:

$$\text{Rango } K_j = n_j \quad (\text{A.2-93})$$

y por tanto, posee rango completo de filas si sólo si el par (A_j, Π_{jj}) es controlable. ■

LEMA A.2.4 *En el caso de que no existan discrepancias entre modelo y proceso y no se presenten perturbaciones, el valor que las salidas alcanzan a lo largo del horizonte de predicción es siempre el mismo independientemente de cuáles acciones de control, de las infinitas soluciones posibles (4.3-8), son aplicadas al proceso en el instante k . Esta misma conclusión, sin embargo, no es cierta para los estados del proceso en $k + 1$.*

Demostración: El valor que las salidas alcanzan a lo largo del horizonte de predicción viene dado por (3.3-11):

$$\hat{y}(k) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{O}\hat{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\hat{\mathbf{y}}(k) \quad (\text{A.2-94})$$

Si se sustituye la expresión de una cualquiera de las soluciones:

$$\hat{y}(k) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k)_{\text{part}} + \mathbf{N}\mathbf{z} + \mathbf{O}\hat{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\hat{\mathbf{y}}(k) \quad (\text{A.2-95})$$

\mathbf{z} pertenece al espacio nulo de $\mathbf{N}^T\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{N}$, es decir, al espacio nulo de \mathbf{N} , con lo cual:

$$\hat{y}(k) = \mathbf{M}\mathbf{x}(k) + \mathbf{N}\Delta\hat{\mathbf{u}}(k)_{\text{part}} + \mathbf{O}\hat{\mathbf{u}}(k-1) + \mathbf{P}\hat{\mathbf{y}}(k) \quad (\text{A.2-96})$$

expresión que resulta ser independiente de cuál solución se aplique. Por lo tanto, los valores que alcanzan las salidas son los mismos sean cuáles sean las acciones de control que se apliquen en k . ■

Proposición A.2.5 *Supóngase que las matrices $\tilde{\mathbf{R}}$ y $\mathbf{N}^T\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{N}$ son semidefinidas positivas, es decir, $\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0} : \mathbf{x}^T\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{y}^T\mathbf{N}^T\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{N}\mathbf{y} = 0$, entonces la matriz $\mathbf{N}^T\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{N} + \tilde{\mathbf{R}}$ es definida positiva si y sólo si los espacios nulos de $\tilde{\mathbf{R}}^{1/2}$ y \mathbf{N} no poseen ningún vector en común (salvo el $\mathbf{0}$).*

Demostración: Sean $\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{R}}^{1/2})$ y $\mathcal{N}(\mathbf{N})$ los espacios nulos de $\tilde{\mathbf{R}}^{1/2}$ y \mathbf{N} respectivamente. Por las condiciones del enunciado se sabe que:

$$\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{R}}^{1/2}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{N}) = \{\mathbf{0}\} \quad (\text{A.2-97})$$

El conjunto de vectores que anula la forma cuadrática dada por $\tilde{\mathbf{R}}$ coincide con $\mathcal{N}(\tilde{\mathbf{R}}^{1/2})$:

$$\forall \mathbf{x} : \mathbf{x}^T\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{R}}^{1/2}) \quad (\text{A.2-98})$$

Como pone de manifiesto la siguiente descomposición:

$$\mathbf{x}^T\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x}^T\tilde{\mathbf{R}}^{1/2}\tilde{\mathbf{R}}^{1/2}\mathbf{x} = (\tilde{\mathbf{R}}^{1/2}\mathbf{x} / \tilde{\mathbf{R}}^{1/2}\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{A.2-99})$$

(\cdot / \cdot) denota el producto escalar. Y como se recordará el producto escalar de un vector por si mismo es 0 si y sólo si es el vector nulo:

$$(\tilde{\mathbf{R}}^{1/2}\mathbf{x} / \tilde{\mathbf{R}}^{1/2}\mathbf{x}) = 0 \iff \tilde{\mathbf{R}}^{1/2}\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\tilde{\mathbf{R}}^{1/2}) \quad (\text{A.2-100})$$

Análogamente para el caso de N :

$$\forall \mathbf{y}: \mathbf{y}^T \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} \mathbf{y} = 0 \iff \mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{N}) \quad (\text{A.2-101})$$

A continuación se pasa a estudiar si la matriz $\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}$ es definida positiva. Se pueden dar tres casos:

1. Que $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ no pertenezca a los espacios nulos de $\bar{\mathbf{R}}^{1/2}$ y \mathbf{N} :

$$\mathbf{z}^T (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}) \mathbf{z} = \underbrace{\mathbf{z}^T \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} \mathbf{z}}_{>0} + \underbrace{\mathbf{z}^T \bar{\mathbf{R}} \mathbf{z}}_{>0} \quad (\text{A.2-102})$$

$$\mathbf{z}^T (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}) \mathbf{z} > 0 \quad (\text{A.2-103})$$

2. Que $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ pertenezca al espacio nulo de $\bar{\mathbf{R}}^{1/2}$:

$$\mathbf{z}^T (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}) \mathbf{z} = \underbrace{\mathbf{z}^T \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} \mathbf{z}}_{>0} + \underbrace{\mathbf{z}^T \bar{\mathbf{R}} \mathbf{z}}_{=0} \quad (\text{A.2-104})$$

$$\mathbf{z}^T (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}) \mathbf{z} > 0 \quad (\text{A.2-105})$$

3. Que $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ pertenezca al espacio nulo de \mathbf{N} :

$$\mathbf{z}^T (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}) \mathbf{z} = \underbrace{\mathbf{z}^T \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} \mathbf{z}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{z}^T \bar{\mathbf{R}} \mathbf{z}}_{>0} \quad (\text{A.2-106})$$

$$\mathbf{z}^T (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}) \mathbf{z} > 0 \quad (\text{A.2-107})$$

Finalmente se concluye que:

$$\forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \quad \mathbf{z}^T (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}) \mathbf{z} > 0 \quad (\text{A.2-108})$$

por tanto la matriz $\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{N} + \bar{\mathbf{R}}$ es definida positiva. ■

LEMA A.2.5 $\epsilon(k+1) = \bar{\mathbf{y}}(k+1) - \bar{\mathbf{y}}(k+1|k)$ es la salida del siguiente sistema dinámico:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ \bar{\mathbf{x}}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \mathbf{\Pi} \bar{\mathbf{C}} & \mathbf{\Pi} \mathbf{C}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{\mathbf{x}}(k) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi} & \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \bar{\mathbf{u}}(k) \end{pmatrix}$$

$$\epsilon(k+1) = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{C}} & \mathbf{C}^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ \bar{\mathbf{x}}(k+1) \end{pmatrix} + \mathbf{d}(k+1)$$

Su correspondiente matriz de transferencia es:

$$\epsilon(z) = - \text{diag}_{j=1, \dots, n} \left(\frac{(z-1)A_j(z)}{(z-(1-\Omega_{jj}))(A_j(z) + F'_{jj}(z))} \right) \left[\mathbf{d}(z) + \right. \\ \left. + (\mathbf{C}^*(z\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{B}^* - \bar{\mathbf{C}}(z\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{B}}) \bar{\mathbf{u}}(z) \right]$$

Demostración: La matriz de transferencia de esta representación interna es:

$$\epsilon(z) = - \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} \tilde{C} & -C^* \end{bmatrix} \left(zI - \begin{bmatrix} \tilde{A} - \Pi \tilde{C} & \Pi C^* \\ 0 & A^* \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \Pi & \tilde{B} \\ 0 & B^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I & 0 \end{bmatrix} \right\}}_{G(z)} \begin{pmatrix} d(z) \\ \tilde{u}(z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.2-109})$$

En primer lugar se obtiene la siguiente matriz inversa:

$$\left(zI - \begin{bmatrix} \tilde{A} - \Pi \tilde{C} & \Pi C^* \\ 0 & A^* \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} [zI - (\tilde{A} - \Pi \tilde{C})]^{-1} & [zI - (\tilde{A} - \Pi \tilde{C})]^{-1} \Pi C^* [zI - A^*]^{-1} \\ 0 & [zI - A^*]^{-1} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo este resultado en (A.2-109):

$$G(z) = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{C} & -C^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} [zI - (\tilde{A} - \Pi \tilde{C})]^{-1} & [zI - (\tilde{A} - \Pi \tilde{C})]^{-1} \Pi C^* [zI - A^*]^{-1} \\ 0 & [zI - A^*]^{-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Pi & \tilde{B} \\ 0 & B^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

operando:

$$G(z) = \left\{ \begin{array}{cc} \tilde{C} [zI - (\tilde{A} - \Pi \tilde{C})]^{-1} \Pi - I & \tilde{C} [zI - (\tilde{A} - \Pi \tilde{C})]^{-1} \tilde{B} + \\ & + \tilde{C} [zI - (\tilde{A} - \Pi \tilde{C})]^{-1} \Pi C^* [zI - A^*]^{-1} B^* - \\ & - C^* [zI - A^*]^{-1} B^* \end{array} \right\} \quad (\text{A.2-110})$$

En primer lugar se analiza el primer término de esta matriz de transferencia:

$$zI - (\tilde{A} - \Pi \tilde{C}) = \begin{bmatrix} zI - (A - F_1 C) & 0 \\ C & zI - (I - \Omega) \end{bmatrix}$$

su inversa es:

$$[zI - (\tilde{A} - \Pi \tilde{C})]^{-1} = \begin{pmatrix} [zI - (A - F_1 C)]^{-1} & 0 \\ -[zI - (I - \Omega)]^{-1} C [zI - (A - F_1 C)]^{-1} & [zI - (I - \Omega)]^{-1} \end{pmatrix}$$

con lo que el primer término de $G(z)$ queda así:

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \tilde{C} [zI - (\tilde{A} - \Pi \tilde{C})]^{-1} \Pi - I = \\ &= \begin{bmatrix} C & \Omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} [zI - (A - F_1 C)]^{-1} & 0 \\ -[zI - (I - \Omega)]^{-1} C [zI - (A - F_1 C)]^{-1} & [zI - (I - \Omega)]^{-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ I \end{bmatrix} - I \end{aligned}$$

operando:

$$G_1(z) = C [zI - (A - F_1 C)]^{-1} F_1 - \Omega [zI - (I - \Omega)]^{-1} C [zI - (A - F_1 C)]^{-1} F_1 +$$

$$+\Omega[zI - (I - \Omega)]^{-1} - I$$

Recordando la estructura de las matrices A y C (LEMA 3.2.1), de la matriz F_1 (ecuación (3.6-7)) y de la matriz Ω (ecuación (3.6-16)), se deduce que $G_1(z)$ es una matriz de transferencia diagonal por bloques de la forma:

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \text{diag}_{j=1,\dots,n} \left(\frac{F'_{jj}(z)}{A_j(z) + F'_{jj}(z)} \right) - \text{diag}_{j=1,\dots,n} \left(\frac{\Omega_{jj}}{z - (1 - \Omega_{jj})} \frac{F'_{jj}(z)}{A_j(z) + F'_{jj}(z)} \right) + \\ &\quad + \text{diag}_{j=1,\dots,n} \left(\frac{\Omega_{jj}}{z - (1 - \Omega_{jj})} \right) - \text{diag}_{j=1,\dots,n} (1) = \\ &= \text{diag}_{j=1,\dots,n} \left(\frac{(z-1)A_j(z)}{(z - (1 - \Omega_{jj}))(A_j(z) + F'_{jj}(z))} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2-111})$$

Ahora se pasa a analizar el segundo término de $G(z)$ (A.2-110):

$$\begin{aligned} G_2(z) &= \bar{C} [zI - (\bar{A} - \Pi\bar{C})]^{-1} \bar{B} + \bar{C} [zI - (\bar{A} - \Pi\bar{C})]^{-1} \Pi C^* [zI - A^*]^{-1} B^* - \\ &\quad - C^* [zI - A^*]^{-1} B^* = \\ &= \bar{C} [zI - (\bar{A} - \Pi\bar{C})]^{-1} \bar{B} + \left(\bar{C} [zI - (\bar{A} - \Pi\bar{C})]^{-1} \Pi - I \right) C^* [zI - A^*]^{-1} B^* \end{aligned}$$

recordando la expresión de $G_1(z)$ (A.2-110):

$$G_2(z) = \bar{C} [zI - (\bar{A} - \Pi\bar{C})]^{-1} \bar{B} + G_1(z) C^* [zI - A^*]^{-1} B^* \quad (\text{A.2-112})$$

Tras esto se trabaja con el primer término de $G_2(z)$:

$$G_{21}(z) = \bar{C} [zI - (\bar{A} - \Pi\bar{C})]^{-1} \bar{B} = \bar{C} [zI - \bar{A} + \Pi\bar{C}]^{-1} \bar{B}$$

aplicando el lema de inversión de matrices¹⁰:

$$G_{21}(z) = \bar{C} [(zI - \bar{A})^{-1} - (zI - \bar{A})^{-1} \Pi (I + \bar{C}(zI - \bar{A})^{-1} \Pi)^{-1} \bar{C} (zI - \bar{A})^{-1}] \bar{B}$$

operando:

$$\begin{aligned} G_{21}(z) &= [I - \bar{C}(zI - \bar{A})^{-1} \Pi (I + \bar{C}(zI - \bar{A})^{-1} \Pi)^{-1}] \bar{C} (zI - \bar{A})^{-1} \bar{B} = \\ &= [I - ((\bar{C}(zI - \bar{A})^{-1} \Pi)^{-1} + I)^{-1}] \bar{C} (zI - \bar{A})^{-1} \bar{B} = \\ &= [I - (I + (\bar{C}(zI - \bar{A})^{-1} \Pi)^{-1})^{-1}] \bar{C} (zI - \bar{A})^{-1} \bar{B} \end{aligned}$$

aplicando nuevamente el lema de inversión de matrices:

$$\begin{aligned} G_{21} &= [I - (I - I[\bar{C}(zI - \bar{A})^{-1} \Pi + I]^{-1} I)] \bar{C} (zI - \bar{A})^{-1} \bar{B} = \\ &= [I - (I - [\bar{C}(zI - \bar{A})^{-1} \Pi + I]^{-1})] \bar{C} (zI - \bar{A})^{-1} \bar{B} = \\ &= [\bar{C}(zI - \bar{A})^{-1} \Pi + I]^{-1} \bar{C} (zI - \bar{A})^{-1} \bar{B} = \end{aligned}$$

¹⁰ $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$

$$= [I + \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\Pi]^{-1} \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$$

aplicando una vez más el lema de inversión de matrices:

$$\begin{aligned} G_{21}(z) &= [I - I\tilde{C}[(zI - \tilde{A}) + \Pi I\tilde{C}]^{-1}\Pi I] \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \\ &= [I - \tilde{C}[zI - (\tilde{A} - \Pi\tilde{C})]^{-1}\Pi] \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \end{aligned}$$

recordando la expresión de $G_1(z)$ (A.2-110):

$$G_{21} = -G_1(z)\tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$$

y volviendo a (A.2-112):

$$G_2(z) = G_1(z) \left(C^* [zI - A^*]^{-1} B^* - \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \right) \quad (\text{A.2-113})$$

Finalmente, utilizando esta última expresión, (A.2-111) y (A.2-109) se llega a:

$$\epsilon(z) = - \text{diag}_{j=1, \dots, n} \left(\frac{(z-1)A_j(z)}{(z-(1-\Omega_{jj}))(A_j(z) + F'_{jj}(z))} \right) \left[\begin{array}{c} \mathbf{d}(z) \\ (C^*(zI - A^*)^{-1}B^* - \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}) \mathbf{u}(z) \end{array} \right]$$

■

Proposición A.2.6 Si no existen discrepancias entre modelo y proceso, $A = A^*$, $B = B^*$ y $C = C^*$, no hay presentes perturbaciones, todos los valores propios de la matriz Γ del observador están dentro del disco unidad y $\tilde{R} = \mathbf{0}$, entonces la representación interna del bucle cerrado proceso+GPC MIMO se puede reducir a las matrices dadas por (A.2-127). Además, se verifican las siguientes relaciones:

$$\sigma = \mathcal{Y}(N^T \tilde{Q}N)^{-1} N^T \tilde{Q} = \mathcal{Y}(\tilde{Q}^{1/2}N)^+ \tilde{Q}^{1/2} \quad (\text{A.2-114})$$

$$\sigma O = I_m, \quad \text{Rango } \sigma = \text{Rango } O = m \quad (\text{A.2-115})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(k) = -\sigma (M_1 + PC) \hat{\mathbf{x}}(k) + \sigma \hat{\omega}(k) \quad (\text{A.2-116})$$

Demostración: Se va a justificar que si $\tilde{R} = \mathbf{0}$ la representación interna del bucle cerrado aún se puede reducir más. En primer lugar se analiza la expresión que adopta la matriz σ en este caso concreto. En la sección 3.5 se estableció que dicha matriz está constituida por las m primeras filas de la matriz $(N^T \tilde{Q}N + \tilde{R})^{-1} N^T \tilde{Q}$:

$$\sigma = \mathcal{Y}(N^T \tilde{Q}N + \tilde{R})^{-1} N^T \tilde{Q} \quad (\text{A.2-117})$$

siendo \mathcal{Y} la matriz que obtiene las m primeras filas de la matriz $(N^T \tilde{Q}N + \tilde{R})^{-1} N^T \tilde{Q}$:

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0}_{m \times N_i(m-1)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2-118})$$

Para el caso en estudio:

$$\sigma = \mathcal{Y}(N^T \bar{Q}N)^{-1} N^T \bar{Q} \quad (\text{A.2-119})$$

Si ahora se compara la expresión de la matriz O (véase sección 3.3):

$$O = \begin{bmatrix} H^{N_1} \\ H^{N_1+1} \\ \vdots \\ H^{N_2} \end{bmatrix} ; \quad H^i = [\bar{C}\bar{B} + \dots + \bar{C}\bar{A}^{i-1}\bar{B}] \quad (\text{A.2-120})$$

con la expresión de la matriz N :

$$N = \begin{bmatrix} R^{N_1} \\ R^{N_1+1} \\ \vdots \\ R^{N_2} \end{bmatrix} ; \quad R^i = \begin{bmatrix} (\bar{C}\bar{B} + \dots + \bar{C}\bar{A}^{i-1}\bar{B})^T \\ (\bar{C}\bar{B} + \dots + \bar{C}\bar{A}^{i-2}\bar{B})^T \\ \vdots \\ (\bar{C}\bar{B} + \dots + \bar{C}\bar{A}^{i-N_i}\bar{B})^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-121})$$

se deduce que O está constituida por las m primeras columnas de N :

$$O = N\mathcal{W}, \quad \mathcal{W} = \begin{pmatrix} I_m \\ \mathbf{0}_{N_u(m-1) \times m} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2-122})$$

Empleando las ecuaciones (A.2-119) y (A.2-122), el producto de la matriz σ por la matriz O es:

$$\sigma O = \mathcal{Y}(N^T \bar{Q}N)^{-1} N^T \bar{Q}N\mathcal{W} = \mathcal{Y}\mathcal{W} = \begin{pmatrix} I_m & \mathbf{0}_{m \times N_u(m-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m \\ \mathbf{0}_{N_u(m-1) \times m} \end{pmatrix} = I_m \quad (\text{A.2-123})$$

De este resultado se deduce que O es una inversa por la derecha de σ , y que σ es una inversa por la izquierda de O . Como consecuencia, O posee rango completo de columnas y σ posee rango completo de filas, ambos iguales al número de entradas (m):

$$\text{Rango } O = \text{Rango } \sigma = m \quad (\text{A.2-124})$$

Aplicando este resultado a la matrices de la representación interna del bucle cerrado simplificado (4.5-16):

$$A_{BC} = \begin{bmatrix} A - B\sigma(M_1 + PC) & B \\ -(I - \sigma O)\sigma(M_1 + PC) & (I - \sigma O) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B\sigma(M_1 + PC) & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-125})$$

$$B_{BC} = \begin{bmatrix} B\sigma \\ (I - \sigma O)\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\sigma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad C_{BC} = (C \quad \mathbf{0}) \quad (\text{A.2-126})$$

estas expresiones muestran que los estados de la acciones de control, \mathbf{x}_u , son siempre nulos y, por tanto, se pueden eliminar para obtener una representación aún más reducida:

$$A_{BC} = A - B\sigma(M_1 + PC), \quad B_{BC} = B\sigma, \quad C_{BC} = C \quad (\text{A.2-127})$$

■

Nota A.2.1 La nueva representación interna del bucle cerrado (A.2-127) indica que sobre el proceso se ha aplicado la siguiente ley de control:

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = -\sigma(M_1 + PC)\hat{\mathbf{x}}(k) + \sigma\hat{\omega}(k) \quad (\text{A.2-128})$$

lo cual justifica que en el caso en que $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ el GPC MIMO se reduce a una realimentación lineal del estado.

Nota A.2.2 Para el caso $N_u = 1$ se cumple que $\mathbf{N} = \mathbf{O}$ y $\mathbf{Y} = \mathbf{I}$, con lo que la expresión de σ (A.2-119) es:

$$\sigma = (\mathbf{O}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{O})^{-1} \mathbf{O}^T \bar{\mathbf{Q}} \quad (\text{A.2-129})$$

si además se cumple que $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}$:

$$\sigma = (\mathbf{O}^T \mathbf{O})^{-1} \mathbf{O}^T \quad (\text{A.2-130})$$

esta última operación proporciona la conocida inversa de Moore-Penrose¹¹:

$$\sigma = \mathbf{O}^+ \quad (\text{A.2-131})$$

A.3. Demostraciones correspondientes al capítulo 5

LEMA A.3.1 (LASALLE) Sea $V(\mathbf{x}) \geq 0$ una función escalar definida en un conjunto Ω compacto y positivamente invariante para el sistema $\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k))$. Supóngase que $V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) \leq 0$ en Ω , y que $\mathcal{E} = \{\mathbf{x} \in \Omega / V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) = 0\}$ y sea \mathcal{M} el mayor conjunto invariante contenido en \mathcal{E} . Entonces cualquier solución del sistema con condición inicial en Ω tiende a puntos de \mathcal{M} .

Su demostración, para sistemas continuos, puede consultarse en [La~Salle y Lefschetz 1961].

¹¹ $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$.

LEMA A.3.2 Para el caso $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$, la matriz A_{BC} posee valores propios en cero si y sólo si la matriz $\tilde{\mathbf{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathbf{T}}$ es semidefinida positiva, los espacios nulos de CA_{BC} y A_{BC} coinciden y A_{BC} es diagonalizable. Además, estos espacios nulos coinciden con el de $\tilde{\mathbf{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathbf{T}}$.

Demostración: Si A_{BC} tiene valores propios en cero, entonces existen estados $\Delta \bar{\mathbf{x}}(k)$ tales que (los que pertenecen al espacio nulo):

$$\Delta \bar{\mathbf{x}}(k+1) = A_{BC} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{0} \quad (\text{A.3-1})$$

esto implica que $\mathbf{e}(k+i|k) = \mathbf{0} \quad i \geq 1$. Consecuentemente, $J_k^* = 0$ obligando a que $\tilde{\mathbf{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathbf{T}}$ sea semidefinida positiva. Como los espacios nulos de CA_{BC} y A_{BC} coinciden entonces necesariamente coinciden con el de $\tilde{\mathbf{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathbf{T}}$.

Si $\tilde{\mathbf{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathbf{T}}$ es semidefinida positiva entonces existen estados $\Delta \bar{\mathbf{x}}(k) \neq \mathbf{0}$ tales que (aquellos que forman el espacio nulo de dicha matriz):

$$\mathbf{e}(k+i|k) = \mathbf{0} \quad i \geq 1 \quad (\text{A.3-2})$$

por tanto:

$$\mathbf{e}(k+i|k) = C \Delta \bar{\mathbf{x}}(k+i|k) = CA_{BC} \bar{\mathbf{x}}(k+i-1|k) = \mathbf{0} \quad i \geq 1 \quad (\text{A.3-3})$$

lo cual implica que dichos estados pertenecen al espacio nulo de A_{BC} . En concreto $\Delta \bar{\mathbf{x}}(k+1|k)$ pertenece a dicho espacio nulo y como se tiene que cumplir que:

$$\Delta \bar{\mathbf{x}}(k+1) = A_{BC} \Delta \bar{\mathbf{x}}(k) \quad (\text{A.3-4})$$

al ser A_{BC} diagonalizable, los elementos del espacio nulo distintos del vector nulo (vectores propios asociados al valor propio 0) no son alcanzables a partir de ningún estado en k . No obstante, esta ecuación si se puede verificar si $\Delta \bar{\mathbf{x}}(k)$ pertenece al espacio nulo de A_{BC} y, por tanto, se tendrá que $\Delta \bar{\mathbf{x}}(k+i|k) = \mathbf{0} \quad i \geq 1$. Esto implica que los espacios nulos de $\tilde{\mathbf{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathbf{T}}$ y A_{BC} coinciden. ■

Proposición A.3.1 Para el caso $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ supóngase que $\tilde{\mathcal{L}}$ es semidefinida negativa y $\tilde{\mathbf{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathbf{T}}$ es semidefinida positiva. Si ambas matrices poseen el mismo espacio nulo y se cumplen las condiciones del LEMA A.3.2, entonces el sistema es asintóticamente estable con respecto al punto de equilibrio $\bar{\omega}_0$.

Demostración: Por aplicación del LEMA de La Salle A.3.1 se deduce que el sistema en bucle cerrado tenderá hacia los estados que pertenecen al espacio nulo de $\tilde{\mathcal{L}}$. Su espacio nulo coincide con el de las matrices $\tilde{\mathbf{T}}^T \mathcal{K} \tilde{\mathbf{T}}$ y A_{BC} (LEMA A.3.2). Consecuentemente, una vez que el bucle cerrado en su evolución temporal alcance el citado espacio nulo, instante $j \geq 1$, ocurre que:

$$\Delta \bar{\mathbf{x}}(j+1) = A_{BC} \Delta \bar{\mathbf{x}}(j) = \mathbf{0} \quad (\text{A.3-5})$$

lo cual implica que el sistema en bucle cerrado es asintóticamente estable. ■

LEMA A.3.3 *El problema de optimización asociado al GPC con las restricciones terminales de igualdad:*

$$\bar{\mathbf{y}}(k + N_2 + j|k) = \bar{\omega}_0 \quad j = 1, \dots, l \quad (\text{A.3-6})$$

que garantizan que tras el horizonte de predicción el sistema ha alcanzado el punto de equilibrio asociado a $\bar{\omega}_0$, es resoluble si la matriz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{l-2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3-7})$$

posee rango completo de columnas y $N_u \geq l$. Además, dicha matriz posee rango completo de columnas si $l \geq r + 1$, siendo r el tamaño de la matriz \mathbf{A} .

Demostración: En primer lugar, dado que existen l ecuaciones de restricción es necesario que el número de grados de libertad para las acciones de control sea de al menos l : $N_u \geq l$.

Partiendo de las restricciones terminales:

$$\bar{\mathbf{y}}(k + N_2 + j|k) = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k + N_2 + j|k) = \bar{\omega}_0 \quad j = 1, \dots, l \quad (\text{A.3-8})$$

y desarrollando $\bar{\mathbf{x}}(k + N_2 + j|k)$ en términos de $\bar{\mathbf{x}}(k + N_2 + 1|k)$ y $\bar{\mathbf{u}}(k + N_2 + j - 1 - i|k)$ $i = 0, \dots, j - 2$ queda:

$$\bar{\mathbf{y}}(k + N_2 + j|k) = \mathbf{CA}^{j-1}\bar{\mathbf{x}}(k + N_2 + 1|k) + \sum_{i=0}^{j-2} \mathbf{CA}^i \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k + N_2 + j - 1 - i|k) \quad j = 1, \dots, l$$

Tras el horizonte de control se mantienen constantes las acciones de control:

$$\bar{\mathbf{u}}(k + N_u + i|k) = \bar{\mathbf{u}}(k + N_u - 1|k) \quad i \geq 0$$

y como siempre $N_u \leq N_2$:

$$\bar{\mathbf{u}}(k + N_2 + j - 1 - i|k) = \bar{\mathbf{u}}(k + N_u - 1|k) \quad i = 0, \dots, j - 2 \quad (\text{A.3-9})$$

se obtiene que:

$$\bar{\mathbf{y}}(k + N_2 + j|k) = \bar{\omega}_0 = \mathbf{CA}^{j-1}\bar{\mathbf{x}}(k + N_2 + 1|k) + \sum_{i=0}^{j-2} \mathbf{CA}^i \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k + N_u - 1|k) \quad j = 1, \dots, l \quad (\text{A.3-10})$$

Representando esta ecuación en forma matricial para todos los instantes j :

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_0 \\ \vdots \\ \bar{\omega}_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA} & \mathbf{CB} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{l-1} & \mathbf{CB} + \dots + \mathbf{CA}^{l-2}\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k + N_2 + 1|k) \\ \bar{\mathbf{u}}(k + N_u - 1|k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3-11})$$

Para que se verifique (A.3-11) y se cumpla que el sistema haya alcanzado el equilibrio correspondiente a $\bar{\omega}_0$, es suficiente con garantizar que los valores de $\bar{\mathbf{x}}(k + N_2 + 1|k)$ y $\bar{\mathbf{u}}(k + N_u - 1|k)$ correspondan a dicho punto de equilibrio. Por ello, se analizará qué valores de l hacen posible que (A.3-11) se cumpla sólo para valores relativos al citado punto de equilibrio. En el apéndice C se muestra que los estados y las entradas en equilibrio deben verificar (C.1-3):

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} - \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k + N_2 + 1|k) \\ \bar{\mathbf{u}}(k + N_u - 1|k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3-12})$$

Procediendo por reducción al absurdo, se supondrá que dichos estados y entradas no cumplen la condición del equilibrio, es decir:

$$\exists \mathbf{d} \neq \mathbf{0} \text{ tal que: } (\mathbf{A} - \mathbf{I})\bar{\mathbf{x}}(k + N_2 + 1|k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k + N_u - 1|k) = \mathbf{d} \quad (\text{A.3-13})$$

Despejando $\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k + N_u - 1|k)$ de la ecuación anterior y sustituyéndolo en (A.3-11) se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_0 \\ \vdots \\ \bar{\omega}_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{l-1} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k + N_2 + 1|k) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{C} + \dots + \mathbf{CA}^{l-2} \end{pmatrix} (-(\mathbf{A} - \mathbf{I})\bar{\mathbf{x}}(k + N_2 + 1|k) + \mathbf{d}) \quad (\text{A.3-14})$$

operando:

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_0 \\ \vdots \\ \bar{\omega}_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k + N_2 + 1|k) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{C} + \dots + \mathbf{CA}^{l-2} \end{pmatrix} \mathbf{d} \quad (\text{A.3-15})$$

como $\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k + N_2 + 1|k) = \bar{\omega}_0$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{C} + \dots + \mathbf{CA}^{l-2} \end{pmatrix} \mathbf{d} \quad (\text{A.3-16})$$

realizando operaciones elementales sobre las filas de la matriz anterior:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{l-2} \end{pmatrix} \mathbf{d} \quad (\text{A.3-17})$$

si se toma $l - 2 \geq r - 1$ ¹² como el proceso es observable (A.2.1), entonces la matriz anterior posee rango completo de columnas y necesariamente $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, llegando a una contradicción. Por tanto, si $l \geq r + 1$ entonces se cumplen todas las restricciones terminales:

$$\bar{\mathbf{y}}(k + N_2 + j) = \bar{\omega}_0 \quad j \geq 1 \quad (\text{A.3-18})$$

pues $\bar{\mathbf{x}}(k + N_2 + 1|k)$ y $\bar{\mathbf{u}}(k + N_u - 1|k)$ corresponden a un punto de equilibrio asociado a $\bar{\omega}_0$.

Sin embargo, puede ocurrir que para valores menores de l dicha circunstancia sea cierta, por ello, se define a l como el menor valor entero que produce que dicha matriz posea rango completo de columnas. ■

LEMA A.3.4 *Dados horizontes $N_2 \geq N_u$ y $N_u \geq l$, haya o no restricciones duras, se cumple que:*

$$J_{N_2, N_u}^*(k) \leq J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k) \quad (\text{A.3-19})$$

Demostración: Si existiesen restricciones duras se supondrá que los problemas de optimización son resolubles y, por tanto, ambos valores óptimos existen. Como se observa, las expresiones para ambos costes son las mismas ya que sus horizontes de predicción y control son los mismos. La diferencia reside en los valores óptimos para los incrementos de las acciones de control y, consecuentemente, en los valores de los errores. Supóngase que $\Delta \bar{\mathbf{u}}(k + i|k)^*$ son los incrementos de las acciones de control óptimas para el caso de restricciones terminales, entonces estos incrementos verifican también las posibles restricciones duras para el caso sin restricciones terminales, dando lugar a un coste subóptimo en dicho caso:

$$J_{N_2, N_u}^*(k) \leq J_{N_2, N_u}(k) = J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k) \quad (\text{A.3-20})$$

lo que demuestra la afirmación del lema. ■

LEMA A.3.5 *Dados horizontes $N_2 \geq N_u$ y $N_u \geq l$, haya o no restricciones duras, se cumple que:*

$$J_{N_2+1, N_u+1}^{TER,*}(k) \leq J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k) \quad (\text{A.3-21})$$

Demostración: Si existiesen restricciones duras se supondrá que los problemas de optimización son resolubles y, por tanto, ambos valores óptimos existen.

Supóngase que:

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}(k|k)^* \quad \dots \quad \Delta \bar{\mathbf{u}}(k + N_u - 1|k)^* \quad (\text{A.3-22})$$

¹²La matriz A es de tamaño $r \times r$

son los incrementos de las acciones de control óptimas para el índice de horizontes N_2 y N_u . Entonces los siguientes incrementos de acciones de control serán válidos para los horizontes $N_2 + 1$ y $N_u + 1$:

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}(k|k)^* \quad \cdots \quad \Delta \bar{\mathbf{u}}(k + N_u - 1|k)^* \quad \mathbf{0} \quad (\text{A.3-23})$$

El valor del índice correspondiente a dichos horizontes con los incrementos anteriores será subóptimo:

$$\begin{aligned} J_{N_2+1, N_u+1}^{TER,*}(k) &\leq J_{N_2+1, N_u+1}^{TER}(k) \\ &\leq \mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) + \sum_{i=1}^{N_2+1} \mathbf{e}(k+i|k)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(k+i|k) + \sum_{i=0}^{N_u-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k)^{T,*} \mathbf{R}_{i+1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k)^* \\ &\leq J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k) + \mathbf{e}(k+N_2+1|k)^T \underbrace{\mathbf{Q}_{N_2+1} \mathbf{e}(k+N_2+1|k)}_{=0} \end{aligned} \quad (\text{A.3-24})$$

lo que demuestra la afirmación del lema. ■

TEOREMA A.3.1 Dadas matrices \mathbf{Q}_i y \mathbf{R}_i que verifiquen:

$$\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1} \geq \mathbf{0} \quad \forall i \quad ; \quad \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i-1} \geq \mathbf{0} \quad \forall i \quad (\text{A.3-25})$$

sea $s \geq 0$ el mínimo número entero tal que $\forall k$:

$$\begin{aligned} H(k) = \mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) + \sum_{i=1}^s \mathbf{e}(k+i|k)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(k+i|k) + \sum_{i=0}^{s-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k)^T \mathbf{R}_{i+1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k) > 0 \\ \Delta \bar{\mathbf{x}}(k) \neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{A.3-26})$$

y n_i el número de polos inestables del proceso, para $N_u \geq \max\{l, n_i + 1\} + s + 1$ existe N_2^* tal que para $N_2 \geq N_2^*$ el bucle cerrado del proceso más GPC es asintóticamente estable con respecto del punto de equilibrio correspondiente a $\bar{\omega}_0$.

Demostración: En general, se puede garantizar que con $s = l - 1$ se tiene que $H(k) > 0$, ya que si $H(k) = 0$ el sistema estaría necesariamente en equilibrio de acuerdo con el análisis realizado antes (A.3-18), implicando que $\Delta \bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{0}$ y dando lugar a una contradicción.

Se define la función $\varphi_{N_2, N_u}(k)$ para $N_u \geq l$ como sigue:

$$\varphi_{N_2, N_u}(k) = \begin{cases} \frac{J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k) - J_{N_2, N_u}^*(k)}{H(k)} & \Delta \bar{\mathbf{x}}(k) \neq \mathbf{0} \\ \overline{\lim}_{\Delta \bar{\mathbf{x}}(k) \rightarrow \mathbf{0}} \varphi_{N_2, N_u}(k) & \Delta \bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{A.3-27})$$

En el apéndice A LEMA A.3.7 se demuestra la siguiente propiedad:

LEMA A.3.6 Las funciones $\varphi_{N_2, \cdot}(k)$ convergen uniforme y monótonamente a cero, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe N_2^* tal que para todo k , $N_2 \geq N_2^*$ y $N_u \geq \max\{l, n_i + 1\}$ constante:

$$\frac{J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k) - J_{N_2, N_u}^*(k)}{H(k)} < \epsilon \quad (\text{A.3-28})$$

donde n_i es el número de polos inestables del proceso en bucle abierto.

Si se parte de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} J_{N_2, N_u}^*(k+1) - J_{N_2-1, N_u-1}^*(k+1) &\leq J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k+1) - J_{N_2-1, N_u-1}^*(k+1)^{13} \\ &\leq J_{N_2-1, N_u-1}^{TER,*}(k+1) - J_{N_2-1, N_u-1}^*(k+1)^{14} \end{aligned} \quad (\text{A.3-29})$$

aplicando ahora el resultado del lema anterior:

$$J_{N_2, N_u}^*(k+1) - J_{N_2-1, N_u-1}^*(k+1) < \epsilon H(k+1) \leq \epsilon J_{N_2-1, N_u-1}^*(k+1) \quad (\text{A.3-30})$$

se obtiene que:

$$J_{N_2-1, N_u-1}^*(k+1) > \frac{1}{1+\epsilon} J_{N_2, N_u}^*(k+1) \quad \text{cuando: } N_u \geq \max\{l, n_i + 1\} + 1 \quad (\text{A.3-31})$$

Ahora se trabaja sobre la expresión del índice de coste óptimo en k suponiendo que $\mathbf{e}(k) \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} J_{N_2, N_u}^*(k) &= \mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) + \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}(k+i|k)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(k+i|k) + \sum_{i=0}^{N_u-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k)^T \mathbf{R}_{i+1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k) = \\ &= \mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) + \Delta \bar{\mathbf{u}}(k|k)^T \mathbf{R}_1 \Delta \bar{\mathbf{u}}(k|k) + \mathbf{e}(k+1|k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k+1|k) + \\ &+ \sum_{i=2}^{N_2} \mathbf{e}(k+i|k)^T \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{e}(k+i|k) + \underbrace{\sum_{i=2}^{N_2} \mathbf{e}(k+i|k)^T (\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}) \mathbf{e}(k+i|k)}_{\geq 0} + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_u-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k)^T \mathbf{R}_i \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k) + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_u-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k)^T (\mathbf{R}_{i+1} - \mathbf{R}_i) \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k)}_{\geq 0} \end{aligned} \quad (\text{A.3-32})$$

$$\begin{aligned} J_{N_2, N_u}^*(k) &\geq \mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) + \mathbf{e}(k+1|k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k+1|k) + \sum_{i=2}^{N_2} \mathbf{e}(k+i|k)^T \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{e}(k+i|k) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_u-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k)^T \mathbf{R}_i \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k) \end{aligned} \quad (\text{A.3-33})$$

Si se aplica el principio de optimalidad de Bellman resulta que el coste óptimo en $k+1$ con horizontes $N_2 - 1$ y $N_u - 1$ es ($N_u \geq 2$):

$$J_{N_2-1, N_u-1}^*(k+1) = \mathbf{e}(k+1)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k+1) + \sum_{i=1}^{N_2-1} \mathbf{e}(k+i+1|k+1)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(k+i+1|k+1) +$$

¹³El LEMA A.3.4 muestra que $J_{N_2, N_u}^*(k+1) \leq J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k+1)$.

¹⁴El LEMA A.3.5 muestra que $J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k+1) \leq J_{N_2-1, N_u-1}^{TER,*}(k+1)$.

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=0}^{N_u-2} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i+1|k+1)^T \mathbf{R}_{i+1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i+1|k+1) = \\
 = & \mathbf{e}(k+1|k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k+1|k) + \sum_{i=2}^{N_2} \mathbf{e}(k+i|k)^T \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{e}(k+i|k) + \sum_{i=1}^{N_u-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k)^T \mathbf{R}_i \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k)
 \end{aligned} \tag{A.3-34}$$

ya que $\mathbf{e}(k+i+1|k+1) = \mathbf{e}(k+i+1|k)$ para $i = 0, \dots, N_2 - 1$ y que $\Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i+1|k+1) = \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i+1|k)$ para $i = 0, \dots, N_u - 2$.

Utilizando este resultado en (A.3-33):

$$J_{N_2, N_u}^*(k) \geq \mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) + J_{N_2-1, N_u-1}^*(k+1) \quad \text{cuando: } N_u \geq 2 \tag{A.3-35}$$

Como $\mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) > 0$ se puede definir ρ^* como sigue:

$$\rho^* = \max \left\{ \rho : \mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) \geq \rho J_{N_2, N_u}^*(k) \right\} \tag{A.3-36}$$

cumpliéndose que $0 < \rho^* \leq 1$. Utilizando esta definición:

$$\begin{aligned}
 J_{N_2, N_u}^*(k) & \geq \rho^* J_{N_2, N_u}^*(k) + J_{N_2-1, N_u-1}^*(k+1) \\
 (1 - \rho^*) J_{N_2, N_u}^*(k) & \geq J_{N_2-1, N_u-1}^*(k+1)
 \end{aligned} \tag{A.3-37}$$

utilizando ahora (A.3-31):

$$\begin{aligned}
 (1 - \rho^*) J_{N_2, N_u}^*(k) & > \frac{1}{1 + \epsilon} J_{N_2, N_u}^*(k+1) \\
 (1 + \epsilon)(1 - \rho^*) J_{N_2, N_u}^*(k) & > J_{N_2, N_u}^*(k+1)
 \end{aligned} \tag{A.3-38}$$

el factor $(1 + \epsilon)(1 - \rho^*)$ se puede hacer menor que 1 eligiendo ϵ lo suficientemente pequeño. Por tanto, si $N_2 \geq N_2^*$, N_2^* correspondiente a valor de ϵ elegido (LEMA A.3.7), y $N_u \geq \max\{l, n_i + 1\} + 1$ entonces:

$$J_{N_2, N_u}^*(k) > J_{N_2, N_u}^*(k+1) \quad \mathbf{e}(k) \neq \mathbf{0} \tag{A.3-39}$$

con lo que J_{N_2, N_u}^* es función de Lyapunov del bucle cerrado si $\mathbf{e}(k) \neq \mathbf{0}$.

Si $\mathbf{e}(k) = \mathbf{0}$ no hay más remedio que utilizar $H(k)$, con lo que la expresión del índice de coste óptimo en k queda así (A.3-35):

$$J_{N_2, N_u}^*(k) \geq H(k) + J_{N_2-s-1, N_u-s-1}^*(k+s+1) \quad \text{cuando: } N_u \geq s+2 \tag{A.3-40}$$

si se repite la metodología antes empleada:

$$\begin{aligned}
 \rho^\dagger & = \max \left\{ \rho : H(k) \geq \rho J_{N_2, N_u}^*(k) \right\} \quad 0 < \rho^\dagger \leq 1 \\
 J_{N_2, N_u}^*(k) & \geq \rho^\dagger J_{N_2, N_u}^*(k) + J_{N_2-s-1, N_u-s-1}^*(k+s+1) \\
 (1 - \rho^\dagger) J_{N_2, N_u}^*(k) & \geq J_{N_2-s-1, N_u-s-1}^*(k+s+1)
 \end{aligned} \tag{A.3-41}$$

utilizando ahora la misma metodología empleada para obtener (A.3-31) basada en el LEMA A.3.7 suponiendo que $N_u \geq \max\{l, n_i + 1\} + s + 1$ se obtiene que:

$$J_{N_2-s-1, N_u-s-1}^*(k+s+1) > \frac{1}{1+\epsilon} J_{N_2, N_u}^*(k+s+1) \quad (\text{A.3-42})$$

$$(1 - \rho^\dagger) J_{N_2, N_u}^*(k) > \frac{1}{1+\epsilon} J_{N_2, N_u}^*(k+s+1)$$

$$(1 + \epsilon)(1 - \rho^\dagger) J_{N_2, N_u}^*(k) > J_{N_2, N_u}^*(k+s+1) \quad (\text{A.3-43})$$

el factor $(1 + \epsilon)(1 - \rho^\dagger)$ se puede hacer, de nuevo, menor que 1 eligiendo ϵ lo suficientemente pequeño. Por tanto, si $N_2 \geq N_2^*$, N_2^* correspondiente al valor de ϵ elegido (LEMA A.3.7), y $N_u \geq \max\{l, n_i + 1\} + s + 1$ entonces:

$$J_{N_2, N_u}^*(k) > J_{N_2, N_u}^*(k+s+1) \quad (\text{A.3-44})$$

este resultado indica que J_{N_2, N_u}^* es función Lyapunov para saltos de tamaño $s + 1$ en el número de muestras, con lo cual se sigue garantizando que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_{N_2, N_u}^*(k) = 0 \quad (\text{A.3-45})$$

siendo, por tanto, el bucle cerrado asintóticamente estable. ■

LEMA A.3.7 *Las funciones $\varphi_{N_2, \cdot}(k)$ convergen uniforme y monótonamente a cero, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe N_2^* tal que para todo k , $N_2 \geq N_2^*$ y $N_u \geq \max\{l, n_i + 1\}$ constante:*

$$\frac{J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k) - J_{N_2, N_u}^*(k)}{H(k)} < \epsilon \quad (\text{A.3-46})$$

donde n_i es el número de polos inestables del proceso en bucle abierto.

Demostración: Antes de empezar con la demostración es necesaria la definición:

Definición A.3.1 Convergencia puntual de una sucesión de funciones. Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida en el conjunto X se dice que converge en el punto x_0 , si converge la sucesión numérica $\{f_n(x_0)\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0) \quad (\text{A.3-47})$$

Si la sucesión converge puntualmente en todos los puntos de X entonces se dice que la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente.

A partir de la definición de $\varphi_{N_2, N_u}(k)$ se va demostrar que converge puntualmente a 0:

$$\lim_{N_2 \rightarrow \infty} \varphi_{N_2, N_u}(k) = \lim_{N_2 \rightarrow \infty} \frac{J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k) - J_{N_2, N_u}^*(k)}{H(k)} \quad (\text{A.3-48})$$

cuando N_2 tiende a infinito los valores óptimos de los índices de coste con y sin restricciones terminales se convierten en el valor óptimo del índice coste del GPC^∞ [Scockaert y Clarke 1993a, b; Scockaert 1997]. En dichas referencias se demostró que el GPC^∞ tiene un índice de coste con valor óptimo finito si $N_u \geq n_i + 1$, donde n_i es el número de polos inestables del proceso en bucle abierto. Esta condición se cumple de acuerdo con el enunciado de este lema, con lo cual:

$$\lim_{N_2 \rightarrow \infty} \varphi_{N_2, N_u}(k) = 0 \quad (\text{A.3-49})$$

En segundo lugar se va a ver que $\varphi_{N_2, N_u}(k)$ es monótona decreciente:

$$\varphi_{N_2+1, N_u}(k) = \frac{J_{N_2+1, N_u}^{TER,*}(k) - J_{N_2+1, N_u}^*(k)}{H(k)} \stackrel{15}{\leq} \frac{J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k) - J_{N_2, N_u}^*(k)}{H(k)} \leq \varphi_{N_2, N_u}(k) \quad (\text{A.3-50})$$

Ahora se emplea una nueva definición:

Definición A.3.2 Una función f es semicontinua superior en y si el valor de la función en ese punto existe y:

$$f(y) \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow y} f(x) \quad (\text{A.3-51})$$

Una función es semicontinua superior cuando es semicontinua superior en todos sus puntos.

Por construcción las funciones $\varphi_{N_2, N_u}(k)$ son semicontinuas superiores. El paso final consiste en emplear el siguiente resultado:

Proposición A.3.2 Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales semicontinuas superiores. Si para cada punto y la sucesión $\{f_n(y)\}$ decrece monótonamente a cero, entonces $\{f_n\}$ converge a cero uniformemente.

Su demostración se encuentra en [Nevistić 1997].

Como se verifican las condiciones de esta proposición para las funciones $\varphi_{N_2, N_u}(k)$, entonces se demuestra que éstas convergen uniformemente a cero. ■

¹⁵Se ha utilizado que $J_{N_2+1, N_u}^{TER,*}(k) \leq J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k)$ y que $J_{N_2+1, N_u}^*(k) \geq J_{N_2, N_u}^*(k)$.

de los mismos que pertenezcan al conjunto estabilizable $\mathcal{S}_j(\mathcal{X}_o, \mathbb{E}'_{\bar{\omega}_o}) \subseteq \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_o)$ y para $N_u \geq \max\{j+1, n_i+1\} + s+1$ existe N_2^* tal que para $N_2 \geq N_2^*$ el bucle cerrado del proceso más GPC es asintóticamente estable con respecto del punto de equilibrio correspondiente a $\bar{\omega}_o$.

$\mathbb{E}'_{\bar{\omega}_o}$ representa el punto de equilibrio del sistema aumentado (5.4-26) asociado a $\bar{\omega}_o$.

Demostración: Para realizar la demostración se empleará como función de Lyapunov a:

$$V_{N_2, N_u}^*(k) \triangleq J_{N_2, N_u}^*(k) + \sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{e}_o(i)^T \mathbf{O} \mathbf{e}_o(i) \quad (\text{A.3-55})$$

donde \mathbf{O} es una matriz definida positiva y el vector \mathbf{e}_o viene definido por:

$$\mathbf{e}_o(k) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{e}_D(k) \\ -\hat{\mathbf{x}}^*(k) \end{pmatrix} \quad (\text{A.3-56})$$

Esta función siempre posee valor finito ya que el error en la estimación de los estados determinísticos y la estimación de los estados del ruido tienen a cero.

Su variación es:

$$V_{N_2, N_u}^*(k) - V_{N_2, N_u}^*(k+1) = J_{N_2, N_u}^*(k) - J_{N_2, N_u}^*(k+1) + \mathbf{e}_o(k)^T \mathbf{O} \mathbf{e}_o(k) \quad (\text{A.3-57})$$

En primer lugar se aborda la acotación de la variación del óptimo del índice de coste, de la misma forma que se realizó en la demostración del **teorema** 5.3.1. Se define la función $\varphi_{N_2, N_u}(k)$ para $N_u \geq j+1$ como sigue:

$$\varphi_{N_2, N_u}(k) = \begin{cases} \frac{J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k) - J_{N_2, N_u}^*(k)}{H(k)} & \hat{\mathbf{x}}(k) \neq \mathbf{x}_0 \\ \overline{\lim}_{\hat{\mathbf{x}}(k) \rightarrow \mathbf{x}_0} \varphi_{N_2, N_u}(k) & \hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (\text{A.3-58})$$

El resultado del LEMA A.3.7 se puede extender al caso con restricciones, ya que como el conjunto de estados iniciales para el proceso y de sus estimaciones iniciales es $\mathcal{S}_j(\mathcal{X}_o, \mathbb{E}_{\bar{\omega}_o})$, entonces los problemas de optimización con restricciones terminales y de horizonte infinito son resolubles. Consecuentemente, se tiene que:

LEMA A.3.8 *Las funciones $\varphi_{N_2, \cdot}(k)$ convergen uniforme y monótonamente a cero, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe N_2^* tal que para todo k , $N_2 \geq N_2^*$ y $N_u \geq \max\{j+1, n_i+1\}$ constante:*

$$\frac{J_{N_2, N_u}^{TER,*}(k) - J_{N_2, N_u}^*(k)}{H(k)} < \epsilon \quad (\text{A.3-59})$$

donde n_i es el número de polos inestables del proceso en bucle abierto.

Operando de la misma forma que en el **teorema** 5.3.1 se llega a:

$$J_{N_2-s-1, N_u-s-1}^*(k+s+1) > \frac{1}{1+\epsilon} J_{N_2, N_u}^*(k+s+1) \quad N_u \geq \max\{j+1, n_i+1\} + s+1 \quad (\text{A.3-60})$$

Si se desarrolla la misma metodología que para dicho teorema:

$$\begin{aligned} J_{N_2, N_u}^*(k) &= \mathbf{e}(k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k) + \sum_{i=1}^{N_2} \mathbf{e}(k+i|k)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(k+i|k) + \sum_{i=0}^{N_u-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k)^T \mathbf{R}_{i+1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k) \\ J_{N_2, N_u}^*(k) &\geq H(k) + \mathbf{e}(k+s+1|k)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k+s+1|k) + \sum_{i=s+2}^{N_2} \mathbf{e}(k+i|k)^T \mathbf{Q}_{i-s-1} \mathbf{e}(k+i|k) + \\ &\quad + \sum_{i=s+1}^{N_u-1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k)^T \mathbf{R}_{i-s} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i|k) \end{aligned} \quad (\text{A.3-61})$$

Ahora aplicando el principio optimalidad de Bellman se obtiene que el coste óptimo en el instante $k+s+1$ con horizontes N_2-s-1 y N_u-s-1 es:

$$\begin{aligned} J_{N_2-s-1, N_u-s-1}^*(k+s+1) &= \mathbf{e}(k+s+1)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}(k+s+1) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_2-s-1} \mathbf{e}(k+i+s+1|k+s+1)^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(k+i+s+1|k+s+1) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{N_u-s-2} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i+s+1|k+s+1)^T \mathbf{R}_{i+1} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i+s+1|k+s+1) \end{aligned} \quad (\text{A.3-62})$$

en este caso debido al hecho de que los estados son estimados con el observador, ocurre que $\mathbf{e}(k+i+s+1|k+s+1) \neq \mathbf{e}(k+i+s+1|k)$ y que $\bar{\mathbf{u}}(k+i+s+1|k+s+1) \neq \bar{\mathbf{u}}(k+i+s+1|k)$. Este problema puede resolverse introduciendo las siguientes definiciones:

$$\boldsymbol{\chi}(k+i+s+1|k+s+1) \triangleq \mathbf{x}(k+i+s+1|k+s+1) - \mathbf{x}(k+i+s+1|k) \quad i \geq 0 \quad (\text{A.3-63})$$

$$\mathbf{v}(k+i+s+1|k+s+1) \triangleq \bar{\mathbf{u}}(k+i+s+1|k+s+1) - \bar{\mathbf{u}}(k+i+1|k) \quad i \geq 0 \quad (\text{A.3-64})$$

estas nuevas variables miden la discrepancia entre los estados predichos y las acciones de control óptimas cuando se dispone de la información de los instantes $k+s+1$ y k .

En el LEMA A.3.9 del apéndice A se demuestran las siguientes relaciones basadas en las nuevas definiciones:

$$\mathbf{e}(k+i+s+1|k) = \mathbf{e}(k+i+s+1|k+s+1) - \bar{\mathbf{C}} \boldsymbol{\chi}(k+i+s+1|k+s+1) \quad i \geq 0 \quad (\text{A.3-65})$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i+s+1|k) &= \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i+s+1|k+s+1) - \mathbf{v}(k+i+s+1|k+s+1) + \\ &\quad + \mathbf{v}(k+i+s|k+s+1) \quad i \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{A.3-66})$$

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}(k+s+1|k) = \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+s+1|k+s+1) - \mathbf{v}(k+s+1|k+s+1) + \mathbf{v}(k+s|k+s) \quad (\text{A.3-67})$$

sustituyendo estas relaciones en (A.3-61) se obtiene:

$$J_{N_2, N_u}^*(k) \geq H(k) + \left\| \mathbf{e}(k+s+1|k+s+1) - \bar{\mathbf{C}} \boldsymbol{\chi}(k+s+1|k+s+1) \right\|_{\mathbf{Q}_1}^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{N_2-s-1} \left\| \mathbf{e}(k+i+s+1|k+s+1) - \bar{\mathbf{C}}\chi(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_i}^2 + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_u-s-2} \left\| \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i+s+1|k+s+1) - \mathbf{v}(k+i+s+1|k+s+1) + \mathbf{v}(k+i+s|k+s+1) \right\|_{R_{i+1}}^2 + \\
 & + \left\| \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+s+1|k+s+1) - \mathbf{v}(k+s+1|k+s+1) + \mathbf{v}(k+s|k+s) \right\|_{R_1}^2 \quad (\text{A.3-68})
 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $\|\mathbf{x}\|_P^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$.

Para continuar es necesario emplear la siguiente desigualdad:

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|_P^2 \geq (1 - \delta) \|\mathbf{a}\|_P^2 + (1 - \frac{1}{\delta}) \|\mathbf{b}\|_P^2 \quad \delta > 0 \quad (\text{A.3-69})$$

su demostración se puede consultar en [Lee 2000].

En concreto, para $\delta_1 > 0$ la ecuación (A.3-68) toma la forma:

$$\begin{aligned}
 J_{N_2, N_u}^*(k) & \geq H(k) + (1 - \delta_1) \left(\left\| \mathbf{e}(k+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_1}^2 + \right. \\
 & + \sum_{i=1}^{N_2-s-1} \left\| \mathbf{e}(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_i}^2 + \sum_{i=1}^{N_u-s-2} \left\| \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{R_{i+1}}^2 + \\
 & + \left. \left\| \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+s+1|k+s+1) \right\|_{R_1}^2 \right) + (1 - \frac{1}{\delta_1}) \left(\left\| \bar{\mathbf{C}}\chi(k+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_1}^2 + \right. \\
 & + \sum_{i=1}^{N_2-s-1} \left\| \bar{\mathbf{C}}\chi(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_i}^2 + \left\| -\mathbf{v}(k+s+1|k+s+1) + \mathbf{v}(k+s|k+s) \right\|_{R_1}^2 + \\
 & + \left. \sum_{i=1}^{N_u-s-2} \left\| -\mathbf{v}(k+i+s+1|k+s+1) + \mathbf{v}(k+i+s|k+s+1) \right\|_{R_{i+1}}^2 \right) \quad (\text{A.3-70})
 \end{aligned}$$

Si se emplea la ecuación (A.3-62) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 J_{N_2, N_u}^*(k) & \geq H(k) + (1 - \delta_1) J_{N_2-s-1, N_u-s-1}^*(k+s+1) + (1 - \frac{1}{\delta_1}) \left(\left\| \bar{\mathbf{C}}\chi(k+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_1}^2 + \right. \\
 & + \sum_{i=1}^{N_2-s-1} \left\| \bar{\mathbf{C}}\chi(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_i}^2 + \left\| -\mathbf{v}(k+s+1|k+s+1) + \mathbf{v}(k+s|k+s) \right\|_{R_1}^2 + \\
 & + \left. \sum_{i=1}^{N_u-s-2} \left\| -\mathbf{v}(k+i+s+1|k+s+1) + \mathbf{v}(k+i+s|k+s+1) \right\|_{R_{i+1}}^2 \right) \quad (\text{A.3-71})
 \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la desigualdad (A.3-69), se obtiene que para $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$:

$$\begin{aligned}
 J_{N_2, N_u}^*(k) & \geq H(k) + (1 - \delta_1) J_{N_2-s-1, N_u-s-1}^*(k+s+1) + (1 - \frac{1}{\delta_1}) \left(\left\| \bar{\mathbf{C}}\chi(k+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_1}^2 + \right. \\
 & + \sum_{i=1}^{N_2-s-1} \left\| \bar{\mathbf{C}}\chi(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_i}^2 + (1 - \delta_2) \left(\left\| \mathbf{v}(k+s|k+s) \right\|_{R_1}^2 + \right. \\
 & + \sum_{i=1}^{N_u-s-2} \left\| \mathbf{v}(k+i+s|k+s+1) \right\|_{R_{i+1}}^2 \left. \right) + (1 - \frac{1}{\delta_2}) \left(\left\| \mathbf{v}(k+s+1|k+s+1) \right\|_{R_1}^2 + \right. \\
 & + \left. \left. \sum_{i=1}^{N_u-s-2} \left\| \mathbf{v}(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{R_{i+1}}^2 \right) \right) \quad (\text{A.3-72})
 \end{aligned}$$

y simplificando:

$$\begin{aligned}
 J_{N_2, N_u}^*(k) &\geq H(k) + (1 - \delta_1)J_{N_2-s-1, N_u-s-1}^*(k+s+1) + \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right) \left\| \tilde{\mathcal{C}}\chi(k+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_1}^2 + \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right) \sum_{i=1}^{N_2-s-1} \left\| \tilde{\mathcal{C}}\chi(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_i}^2 + \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right)(1 - \delta_2) \left\| \mathbf{v}(k+s|k+s) \right\|_{R_1}^2 + \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right)(1 - \delta_2) \sum_{i=1}^{N_u-s-2} \left\| \mathbf{v}(k+i+s|k+s+1) \right\|_{R_{i+1}}^2 + \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\delta_2}\right) \sum_{i=0}^{N_u-s-2} \left\| \mathbf{v}(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{R_{i+1}}^2 \quad (\text{A.3-73})
 \end{aligned}$$

Se toma $\delta_1 < 1$ para que $1 - \delta_1 > 0$, con lo cual es posible aplicar ahora la desigualdad (A.3-60):

$$\begin{aligned}
 J_{N_2, N_u}^*(k) &> H(k) + \frac{(1 - \delta_1)}{1 + \epsilon} J_{N_2, N_u}^*(k+s+1) + \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right) \left\| \tilde{\mathcal{C}}\chi(k+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_1}^2 + \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right) \sum_{i=1}^{N_2-s-1} \left\| \tilde{\mathcal{C}}\chi(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_i}^2 + \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right)(1 - \delta_2) \left\| \mathbf{v}(k+s|k+s) \right\|_{R_1}^2 + \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right)(1 - \delta_2) \sum_{i=1}^{N_u-s-2} \left\| \mathbf{v}(k+i+s|k+s+1) \right\|_{R_{i+1}}^2 + \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\delta_2}\right) \sum_{i=0}^{N_u-s-2} \left\| \mathbf{v}(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{R_{i+1}}^2 \quad (\text{A.3-74})
 \end{aligned}$$

Si se define a ρ^* como sigue:

$$\rho^* = \max \left\{ \rho : \rho J_{N_2, N_u}^* \leq H(k) \forall k \right\} \quad 0 < \rho^* < 1 \quad (\text{A.3-75})$$

se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 J_{N_2, N_u}^*(k) &> \rho^* J_{N_2, N_u}^* + \frac{(1 - \delta_1)}{1 + \epsilon} J_{N_2, N_u}^*(k+s+1) + \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right) \left\| \tilde{\mathcal{C}}\chi(k+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_1}^2 + \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right) \sum_{i=1}^{N_2-s-1} \left\| \tilde{\mathcal{C}}\chi(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_i}^2 + \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right)(1 - \delta_2) \left\| \mathbf{v}(k+s|k+s) \right\|_{R_1}^2 + \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right)(1 - \delta_2) \sum_{i=1}^{N_u-s-2} \left\| \mathbf{v}(k+i+s|k+s+1) \right\|_{R_{i+1}}^2 + \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\delta_2}\right) \sum_{i=0}^{N_u-s-2} \left\| \mathbf{v}(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{R_{i+1}}^2 \quad (\text{A.3-76})
 \end{aligned}$$

si ahora se exige que $\delta_2 > 1$ se tiene que $(1 - \frac{1}{\delta_1})(1 - \delta_2) > 0$ y $(1 - \frac{1}{\delta_1})(1 - \frac{1}{\delta_2}) < 0$ y, por tanto:

$$\begin{aligned}
 (1 - \rho^*)J_{N_2, N_u}^*(k) &> \frac{(1 - \delta_1)}{1 + \epsilon} J_{N_2, N_u}^*(k+s+1) + \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right) \left\| \tilde{\mathcal{C}}\chi(k+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_1}^2 + \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{\delta_1}\right) \sum_{i=1}^{N_2-s-1} \left\| \tilde{\mathcal{C}}\chi(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{Q_i}^2 +
 \end{aligned}$$

$$+(1 - \frac{1}{\delta_1})(1 - \frac{1}{\delta_2}) \sum_{i=0}^{N_u-s-2} \left\| v(k+i+s+1|k+s+1) \right\|_{\mathbf{R}_{i+1}}^2 \quad (\text{A.3-77})$$

cuando $0 < \delta_1 < 1$ y $\delta_2 > 1$. Tras esto se realizan algunas transformaciones:

$$\begin{aligned} J_{N_2, N_u}^*(k) &> \frac{(1 - \delta_1)}{(1 + \epsilon)(1 - \rho^*)} J_{N_2, N_u}^*(k + s + 1) + \frac{(1 - \frac{1}{\delta_1})}{1 - \rho^*} \bar{\lambda}(\bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{Q}_1 \bar{\mathbf{C}}) \left\| \chi(k + s + 1|k + s + 1) \right\|^2 + \\ &\quad + \frac{(1 - \frac{1}{\delta_1})}{1 - \rho^*} \sum_{i=1}^{N_2-s-1} \bar{\lambda}(\bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{Q}_i \bar{\mathbf{C}}) \left\| \chi(k + i + s + 1|k + s + 1) \right\|^2 + \\ &\quad + \frac{(1 - \frac{1}{\delta_1})(1 - \frac{1}{\delta_2})}{1 - \rho^*} \sum_{i=0}^{N_u-s-2} \bar{\lambda}(\mathbf{R}_{i+1}) \left\| v(k + i + s + 1|k + s + 1) \right\|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.3-78})$$

En el lema A.3.9 del apéndice A se justifican las siguientes desigualdades:

$$\left\| \chi(k + s + i + 1|k + s + 1) \right\|^2 \leq \kappa_\chi \left\| \mathbf{e}_O(k) \right\|^2 \quad \forall s \geq 0, \forall i \geq 0 \quad (\text{A.3-79})$$

$$\left\| v(k + i + s + 1|k + s + 1) \right\|^2 \leq \kappa_v \left\| \mathbf{e}_O(k) \right\|^2 \quad \forall s \geq 0, \forall i \geq 0 \quad (\text{A.3-80})$$

Si se aplican en la ecuación (A.3-78):

$$\begin{aligned} J_{N_2, N_u}^*(k) &> \frac{(1 - \delta_1)}{(1 + \epsilon)(1 - \rho^*)} J_{N_2, N_u}^*(k + s + 1) + \frac{(1 - \frac{1}{\delta_1})}{1 - \rho^*} \bar{\lambda}(\bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{Q}_1 \bar{\mathbf{C}}) \kappa_\chi \left\| \mathbf{e}_O(k) \right\|^2 + \\ &\quad + \frac{(1 - \frac{1}{\delta_1})}{1 - \rho^*} \kappa_\chi \left\| \mathbf{e}_O(k) \right\|^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N_2-s-1} \bar{\lambda}(\bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{Q}_i \bar{\mathbf{C}})}_{\triangleq \bar{\lambda}_1 > 0} + \frac{(1 - \frac{1}{\delta_1})(1 - \frac{1}{\delta_2})}{1 - \rho^*} \kappa_v \left\| \mathbf{e}_O(k) \right\|^2 \underbrace{\sum_{i=0}^{N_u-s-2} \bar{\lambda}(\mathbf{R}_{i+1})}_{\triangleq \bar{\lambda}_2 \geq 0} \end{aligned} \quad (\text{A.3-81})$$

y se agrupan términos:

$$\begin{aligned} J_{N_2, N_u}^*(k) &> \frac{(1 - \delta_1)}{(1 + \epsilon)(1 - \rho^*)} J_{N_2, N_u}^*(k + s + 1) + \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{(1 - \frac{1}{\delta_1})}{1 - \rho^*} \bar{\lambda}(\bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{Q}_1 \bar{\mathbf{C}}) \kappa_\chi + \frac{(1 - \frac{1}{\delta_1})}{1 - \rho^*} \kappa_\chi \bar{\lambda}_1 + \frac{(1 - \frac{1}{\delta_1})(1 - \frac{1}{\delta_2})}{1 - \rho^*} \kappa_v \bar{\lambda}_2 \right)}_{\triangleq -\kappa_\eta (\kappa_\eta > 0)} \left\| \mathbf{e}_O(k) \right\|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.3-82})$$

Si ahora se retoma la ecuación (A.3-57), pero para una variación de $s + 1$ instantes, se tiene que:

$$V_{N_2, N_u}^*(k) - V_{N_2, N_u}^*(k + s + 1) = J_{N_2, N_u}^*(k) - J_{N_2, N_u}^*(k + s + 1) + \sum_{i=k}^{k+s} \mathbf{e}_O(i)^T \mathbf{O} \mathbf{e}_O(i) \quad (\text{A.3-83})$$

y utilizando (A.3-82):

$$\begin{aligned} V_{N_2, N_u}^*(k) - V_{N_2, N_u}^*(k + s + 1) &> \left(\frac{(1 - \delta_1)}{(1 + \epsilon)(1 - \rho^*)} - 1 \right) J_{N_2, N_u}^*(k + s + 1) - \\ &\quad - \kappa_\eta \left\| \mathbf{e}_O(k) \right\|^2 + \sum_{i=k}^{k+s} \lambda(\mathbf{O}) \left\| \mathbf{e}_O(i) \right\|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.3-84})$$

Si se elige $\underline{\lambda}(\mathbf{O}) > \kappa_\eta$:

$$V_{N_2, N_u}^*(k) - V_{N_2, N_u}^*(k+s+1) > \left(\frac{(1-\delta_1)}{(1+\epsilon)(1-\rho^*)} - 1 \right) J_{N_2, N_u}^*(k+s+1) + \underbrace{(\underline{\lambda}(\mathbf{O}) - \kappa_\eta)}_{>0} \left\| \mathbf{e}_O(k) \right\|^2 + \sum_{i=k+1}^{k+s} \underline{\lambda}(\mathbf{O}) \left\| \mathbf{e}_O(i) \right\|^2 \quad (\text{A.3-85})$$

El vector $\mathbf{e}_O(k)$ es no nulo ya que existe error entre el estado estimado y el real. Además, el factor $\left(\frac{(1-\delta_1)}{(1+\epsilon)(1-\rho^*)} - 1 \right)$ puede hacerse positivo si se toma $\delta_1 < \rho^* < 1$ y a ϵ lo suficientemente pequeño. Bajo estas condiciones se cumplirá que:

$$V_{N_2, N_u}^*(k) - V_{N_2, N_u}^*(k+s+1) > 0 \quad (\text{A.3-86})$$

con lo cual:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_{N_2, N_u}^*(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} J_{N_2, N_u}^*(k) = 0 \quad (\text{A.3-87})$$

luego el bucle cerrado es asintóticamente estable. ■

Proposición A.3.3 *Bajo las condiciones del teorema 5.5.1 se cumple que el bucle cerrado es exponencialmente estable con respecto de $\tilde{\omega}_0$.*

Demostración: Se toma la ecuación (A.3-82):

$$J_{N_2, N_u}^*(k) > \frac{(1-\delta_1)}{(1+\epsilon)(1-\rho^*)} J_{N_2, N_u}^*(k+s+1) - \kappa_\eta \left\| \mathbf{e}_O(k) \right\|^2 \quad (\text{A.3-88})$$

y se despeja el coste óptimo en el instante $k+s+1$:

$$J_{N_2, N_u}^*(k+s+1) < \frac{(1+\epsilon)(1-\rho^*)}{(1-\delta_1)} J_{N_2, N_u}^*(k) + \frac{(1+\epsilon)(1-\rho^*)}{(1-\delta_1)} \kappa_\eta \left\| \mathbf{e}_O(k) \right\|^2 \quad (\text{A.3-89})$$

Ahora se emplea la ecuación (A.3-57):

$$V_{N_2, N_u}^*(k) - V_{N_2, N_u}^*(k+s+1) = J_{N_2, N_u}^*(k) - J_{N_2, N_u}^*(k+s+1) + \sum_{i=k}^{k+s} \mathbf{e}_O(i)^T \mathbf{O} \mathbf{e}_O(i) \quad (\text{A.3-90})$$

$$V_{N_2, N_u}^*(k) - V_{N_2, N_u}^*(k+s+1) > \left(1 - \frac{(1+\epsilon)(1-\rho^*)}{(1-\delta_1)} \right) J_{N_2, N_u}^*(k) - \frac{(1+\epsilon)(1-\rho^*)}{(1-\delta_1)} \kappa_\eta \left\| \mathbf{e}_O(k) \right\|^2 + \sum_{i=k}^{k+s} \underline{\lambda}(\mathbf{O}) \left\| \mathbf{e}_O(i) \right\|^2 \quad (\text{A.3-91})$$

$$V_{N_2, N_u}^*(k) - V_{N_2, N_u}^*(k+s+1) > \left(1 - \frac{(1+\epsilon)(1-\rho^*)}{(1-\delta_1)} \right) J_{N_2, N_u}^*(k) + \left(\underline{\lambda}(\mathbf{O}) - \frac{(1+\epsilon)(1-\rho^*)}{(1-\delta_1)} \right) \kappa_\eta \left\| \mathbf{e}_O(k) \right\|^2 \quad (\text{A.3-92})$$

eligiendo adecuadamente $0 < \delta_1 < 1$, ϵ y $\underline{\lambda}(\mathbf{O})$ se obtiene que:

$$V_{N_2, N_u}^*(k) - V_{N_2, N_u}^*(k+s+1) > \alpha J_{N_2, N_u}^*(k) + \beta \left\| \mathbf{e}_O(k) \right\|^2 \quad (\text{A.3-93})$$

con α y β positivos. El coste óptimo $J_{N_2, N_u}^*(k)$ corresponde al caso con restricciones, y es mayor o igual que el coste para el caso sin restricciones, el cual, es una función cuadrática del estado estimado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ y del error en la observación $\mathbf{e}_O(k)$, por tanto:

$$V_{N_2, N_u}^*(k) - V_{N_2, N_u}^*(k+s+1) > \alpha' \left(\|\hat{\mathbf{x}}(k)\|^2 + \|\mathbf{e}_O(k)\|^2 \right) + \beta \|\mathbf{e}_O(k)\|^2 \quad (\text{A.3-94})$$

esta última relación y el hecho de que la función de Lyapunov $V_{N_2, N_u}^*(k)$ es cuadrática permiten afirmar que el bucle cerrado es exponencialmente estable [Willems 1970; Lee 2000]. ■

LEMA A.3.9 *Dadas las definiciones:*

$$\chi(k+i+s+1|k+s+1) \triangleq \mathbf{x}(k+i+s+1|k+s+1) - \mathbf{x}(k+i+s+1|k) \quad i \geq 0 \quad (\text{A.3-95})$$

$$\mathbf{v}(k+i+s+1|k+s+1) \triangleq \bar{\mathbf{u}}(k+i+s+1|k+s+1) - \bar{\mathbf{u}}(k+i+1|k) \quad i \geq 0 \quad (\text{A.3-96})$$

se cumplen las siguientes propiedades:

1.

$$\mathbf{e}(k+i+s+1|k) = \mathbf{e}(k+i+s+1|k+s+1) - \bar{\mathbf{C}}\chi(k+i+s+1|k+s+1) \quad i \geq 0 \quad (\text{A.3-97})$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i+s+1|k) &= \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+i+s+1|k+s+1) - \mathbf{v}(k+i+s+1|k+s+1) + \\ &\quad + \mathbf{v}(k+i+s|k+s+1) \quad i \geq 1 \end{aligned} \quad (\text{A.3-98})$$

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}(k+s+1|k) = \Delta \bar{\mathbf{u}}(k+s+1|k+s+1) - \mathbf{v}(k+s+1|k+s+1) + \mathbf{v}(k+s|k+s) \quad (\text{A.3-99})$$

2.

$$\|\chi(k+s+i+1|k+s+1)\|^2 \leq \kappa_\chi \|\mathbf{e}_O(k)\|^2 \quad \forall s \geq 0, \forall i \geq 0 \quad (\text{A.3-100})$$

$$\|\mathbf{v}(k+i+s+1|k+s+1)\|^2 \leq \kappa_v \|\mathbf{e}_O(k)\|^2 \quad \forall s \geq 0, \forall i \geq 0 \quad (\text{A.3-101})$$

Demostración: Todas estas propiedades son fácilmente obtenibles a partir de las definiciones, siguiendo la metodología propuesta en [Lee 2000] y teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{e}_O(k+1) = \begin{bmatrix} A - \Pi_1 C & \mathbf{0} \\ (I - \Omega) & -C \end{bmatrix} \mathbf{e}_O(k) \quad (\text{A.3-102})$$

■

APÉNDICE **B**

Análisis del rango de la matriz N

La forma de la matriz N es (véase sección 3.3):

$$N = \begin{bmatrix} R^{N_1} \\ R^{N_1+1} \\ \vdots \\ R^{N_2} \end{bmatrix} ; \quad R^i = \begin{bmatrix} \left(\bar{C}\bar{B} + \dots + \bar{C}\bar{A}^{i-1}\bar{B} \right)^T \\ \left(\bar{C}\bar{B} + \dots + \bar{C}\bar{A}^{i-2}\bar{B} \right)^T \\ \vdots \\ \left(\bar{C}\bar{B} + \dots + \bar{C}\bar{A}^{i-N_u}\bar{B} \right)^T \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.0-1})$$

En el análisis se asumirá que $N_1 = 1$:

$$N_{N_2 \cdot n \times N_u \cdot m} = \begin{bmatrix} \bar{C}\bar{B} & 0 & \dots & 0 \\ \bar{C}\bar{B} + \bar{C}\bar{A}\bar{B} & \bar{C}\bar{B} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{C}\bar{B} + \dots + \bar{C}\bar{A}^{N_u-1}\bar{B} & \dots & \dots & \bar{C}\bar{B} \\ \bar{C}\bar{B} + \dots + \bar{C}\bar{A}^{N_u}\bar{B} & \dots & \dots & \bar{C}\bar{B} + \bar{C}\bar{A}\bar{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{C}\bar{B} + \dots + \bar{C}\bar{A}^{N_2-1}\bar{B} & \dots & \dots & \bar{C}\bar{B} + \dots + \bar{C}\bar{A}^{N_2-N_u}\bar{B} \end{bmatrix} \quad (\text{B.0-2})$$

Realizando operaciones elementales sobre filas de la matriz N se llega a que su rango es:

$$\text{Rango } N = \text{Rango} \begin{bmatrix} \bar{C}\bar{B} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \bar{C}\bar{A}\bar{B} & \bar{C}\bar{B} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{N_u-1}\bar{B} & \dots & \dots & \bar{C}\bar{B} \\ \bar{C}\bar{A}^{N_u}\bar{B} & \dots & \dots & \bar{C}\bar{A}\bar{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{N_2-1}\bar{B} & \dots & \dots & \bar{C}\bar{A}^{N_2-N_u}\bar{B} \end{bmatrix} \quad (\text{B.0-3})$$

Para el caso $N_u = 1$ su rango viene dado por:

$$\text{Rango } N = \text{Rango} \begin{bmatrix} \bar{C}\bar{B} \\ \bar{C}\bar{A}\bar{B} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{N_2-1}\bar{B} \end{bmatrix} \quad (\text{B.0-4})$$

Esta matriz tiene rango completo de columnas en los siguientes casos:

- Si la matriz $\bar{C}\bar{B}$ posee rango completo de columnas. En este caso se cumple que el rango de N es completo de columnas $\forall N_2$ si $N_u = 1$.
- Si la matriz anterior no tuviese rango completo de columnas, entonces se puede garantizar que N si lo tenga, exigiendo en primer lugar que la matriz B tenga rango completo de columnas y que el par (\bar{A}, \bar{C}) sea observable:

$$\text{Rango } N = \text{Rango} \left(\begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{N_2-1} \end{bmatrix} \bar{B} \right) \quad (\text{B.0-5})$$

Puesto que B tiene rango completo de columnas \bar{B} también lo tiene. Además, al ser el par (\bar{A}, \bar{C}) observable la matriz:

$$\begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{N_2-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.0-6})$$

tendrá rango completo de columnas si $N_2 - 1 \geq r + n - 1$. Por tanto, N tendrá rango completo de columnas si $N_2 \geq r + n$ cuando $N_u = 1$. Es importante destacar, que dependiendo del modelo del proceso, N puede tener rango de columnas completo para N_2 inferiores al anterior.

La exigencia relativa a que B posea rango completo de columnas implica una buena selección de los actuadores, ya que se supone que su efecto sobre el proceso es independiente. La condición de que el par (\bar{A}, \bar{C}) sea observable sólo requiere que ninguno de los polos del observador se ubique en 1.

Como $\bar{C}\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ si el número de salidas, n , es menor que el número de entradas, m , entonces la matriz $\bar{C}\bar{B}$ no podrá nunca tener rango completo de columnas sea cual sea la elección de los actuadores (B), ya que tendrá mas columnas que filas.

Si $N_u \geq 2$ el rango de N viene dado por:

$$\text{Rango } N = \text{Rango} \begin{bmatrix} \bar{C}\bar{B} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \bar{C}\bar{A}\bar{B} & \bar{C}\bar{B} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{N_u-1}\bar{B} & \cdots & \cdots & \bar{C}\bar{B} \\ \bar{C}\bar{A}^{N_u}\bar{B} & \cdots & \cdots & \bar{C}\bar{A}\bar{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{N_2-1}\bar{B} & \cdots & \cdots & \bar{C}\bar{A}^{N_2-N_u}\bar{B} \end{bmatrix}$$

si se cumple la condición de que $\bar{C}\bar{B}$ posea rango completo de columnas, entonces N también tendrá rango de columnas $\forall N_2$, ya que las matrices Z_j poseerán rango completo de columnas:

$$Z_j = \begin{bmatrix} \bar{C}\bar{B} \\ \bar{C}\bar{A}\bar{B} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{N_2-j}\bar{B} \end{bmatrix} \quad j = 1, \dots, N_u \quad (\text{B.0-7})$$

y sus correspondientes columnas en la matriz N son linealmente independientes de las correspondientes a cualquier otra matriz Z_k con $k \neq j$.

Si la matriz $\bar{C}\bar{B}$ no posee rango completo de columnas, entonces ya no es sencillo justificar cuando la matriz N posee rango completo de columnas. En tales casos, va a ser necesario calcular directamente el rango de N .

Nota B.0.1 Para $j \geq 0$ se cumple que:

$$\bar{C}\bar{A}^j\bar{B} = CA^jB \quad (\text{B.0-8})$$

Nota B.0.2 El producto $\bar{C}\bar{B} = CB$ es de la forma (sección 3.2.2 ecuación (3.2-15)):

$$CB = \begin{bmatrix} C_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 B_1 \\ C_2 B_2 \\ \vdots \\ C_n B_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.0-9})$$

las matrices C_j son de la forma:

$$C_j = \left(\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)_{1 \times n_j} \quad (\text{B.0-10})$$

con lo cual el producto queda así:

$$CB = \begin{bmatrix} \text{uf}(\mathbf{B}_1) \\ \vdots \\ \text{uf}(\mathbf{B}_n) \end{bmatrix} \quad (\text{B.0-11})$$

donde $\text{uf}(\cdot)$ obtiene la última fila de una matriz. De este resultado se desprende que para que el producto CB posea rango completo de columnas, la submatriz de la matriz B que contiene todas las últimas filas de las matrices B_j ha de poseer rango completo de columnas. La última fila de la matriz B_j se corresponde con la influencia directa de las entradas sobre el último estado de la salida j -ésima, o sea, justamente la propia salida j -ésima. De este análisis se deduce que la condición de rango completo del producto CB está relacionada con la independencia de los efectos directos de las entradas sobre cada una de las salidas del proceso.

APÉNDICE C

Cálculo de puntos de equilibrio

C.1. Introducción

Dado el sistema dinámico lineal:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}(k)\end{aligned}\tag{C.1-1}$$

tiene por puntos de equilibrio $(\bar{\omega}_0, \bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{x}}_0)$ aquellos que verifican las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}_0 \\ \bar{\omega}_0 &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_0\end{aligned}\tag{C.1-2}$$

Si se desean obtener los valores de las entradas y de los estados en equilibrio fijando determinados valores deseados para las salidas hay que resolver la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} - \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{u}}_0 \end{bmatrix}\tag{C.1-3}$$

este sistema tiene solución si los valores fijados por las salidas son alcanzables por el sistema, es decir:

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} - \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \text{Rango} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \bar{\omega}_0 \\ \mathbf{A} - \mathbf{I} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\tag{C.1-4}$$

Si éste posee solución, una particular para el punto de equilibrio se puede obtener así:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{u}}_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} - \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \bar{\omega}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\tag{C.1-5}$$

El resto de soluciones se obtiene sumando a la particular cualquier vector del espacio nulo de esta matriz.

EJEMPLO C.1.1 Este ejemplo muestra el análisis previo para un sistema cuadrado $n = m = 2$. En concreto se emplea el reactor agitado de la sección 3.10. Para dicho sistema se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} - \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5769 & 0 & 0 & -0.3743 & -0.1479 \\ 1 & 1.5578 & 0 & 0 & 0.3935 & 0.2439 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7985 & -0.0840 & -0.2126 \\ 0 & 0 & 1 & 1.7873 & 0.0952 & 0.2350 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1-6})$$

Esta matriz posee rango completo y, por tanto, es invertible. Consecuentemente, cualquier valor para las salidas es alcanzable en régimen permanente con solución única para los estados y las entradas.

EJEMPLO C.1.2 En este ejemplo se emplea un sistema rectangular con $n = 1$ y $m = 2$. Su modelo viene dado por:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -0.24 \\ 1 & 1.1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = (0 \quad 1) \quad (\text{C.1-7})$$

obteniéndose que:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} - \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0.2400 & 1 & 0 \\ 1 & 0.1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1-8})$$

Esta matriz posee rango 3 (completo de filas). Esto quiere decir que cualquiera que sea el punto de equilibrio se cumple la condición (C.1-4) y, por tanto, éste siempre es alcanzable. No obstante, la solución para los estados y las acciones de control no es única, ya que la matriz no posee rango completo de columnas. En concreto, para el punto de equilibrio $\bar{\omega}_0 = 1$ una solución particular es:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \bar{\mathbf{u}}_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} - \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [-0.1533 \quad 1 \quad 0.0867 \quad 0.0333]^T \quad (\text{C.1-9})$$

El resto de soluciones se obtiene sumando a esta particular cualquier vector del espacio nulo de dicha matriz:

$$\mathcal{N} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} - \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \right\} = (0.5 \quad 0 \quad 0.5 \quad 1)^T \quad (\text{C.1-10})$$

EJEMPLO C.1.3 En este ejemplo se utiliza un sistema rectangular con $n = 2$ y $m = 1$. Su modelo viene dado por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -0.24 & 0 & 0 \\ 1 & 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 & 0.4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1-11})$$

obteniéndose que:

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ A - I & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.24 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0.05 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1-12})$$

Esta matriz tiene rango 5 (completo de columnas). Como consecuencia, pueden existir puntos de equilibrio para los cuales no se cumpla (C.1-4). En concreto, sólo son alcanzables los puntos de equilibrio que cumplen $\bar{\omega}_0 = (1 \quad -0.2545)^T \lambda$, siendo λ cualquier número real.

De estos ejemplos se deduce que el elemento crucial para el análisis de si es posible alcanzar un determinado punto de equilibrio, es el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ A - I & B \end{pmatrix} \quad (\text{C.1-13})$$

de dimensiones $(r + n) \times (r + m)$.

Si su rango es completo de filas, entonces siempre existe solución. Además, si su número de columnas es igual al de filas entonces la solución es única.

Si su rango es completo de columnas, pero no de filas ($n > m$), puede ser que no exista solución dependiendo del punto de equilibrio a alcanzar.

La siguiente proposición permite conocer el rango de esta matriz a priori:

Proposición C.1.1 *Supóngase que para cada salida exista una función de transferencia que la relacione con alguna entrada tal que no posea ceros en 1, entonces el rango de la matriz (C.1-13) es $\min\{r + n, r + m\}$.*

Su demostración es trivial empleando la estructura particular empleada para las matrices A , B y C , que fue presentada en el capítulo 3.

Nota C.1.1 Del análisis anterior se deduce que cuando $n < m$ seguro que no hay solución única. No obstante, dicho punto de equilibrio siempre existe, y viene impuesto por las condiciones iniciales y los parámetros de diseño del controlador, siendo, por tanto, único para cada caso.

Nota C.1.2 Estos resultados siguen siendo válidos cuando hay presentes restricciones duras bajo la hipótesis de que todas las variables en el régimen permanente satisfacen las restricciones impuestas, pues de lo contrario no se podría alcanzar dicho régimen permanente.

C.2. Ecuaciones para el controlador GPC asociadas a las nuevas variables

En el capítulo 5 se introduce un cambio en las variables del proceso, del controlador GPC y del observador, con la finalidad de que las nuevas variables alcancen valor nulo en el régimen permanente, el cual viene impuesto por las referencias constantes deseadas $\bar{\omega}_0$. Consecuentemente:

$$\bar{y}_0 = \bar{\omega}_0 \quad ; \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{u}_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ A - I & B \end{pmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \bar{\omega}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2-1})$$

Las nuevas variables que se introducen son:

$$\Delta \bar{x}(k) = \bar{x}(k) - \bar{x}_0 \quad ; \quad \Delta \mathbf{x}_u(k) = \mathbf{x}_u(k) - \mathbf{x}_{u,0} \quad ; \quad \Delta \bar{u}'(k) = \bar{u}(k) - \bar{u}_0 \quad ; \quad \Delta \bar{y}(k) = \bar{y}(k) - \bar{\omega}_0 \quad (\text{C.2-2})$$

El valor de $\mathbf{x}_{u,0}$ se obtiene a partir de las expresiones obtenidas en la proposición 3.5.2:

$$\mathbf{x}_{u,0} = (I - \sigma O) \bar{u}_0 \quad (\text{C.2-3})$$

teniendo en cuenta que:

$$\hat{\omega}(k) = U \bar{\omega}_0 \quad ; \quad \hat{y}(k) = C \bar{x}(k) = C \bar{x}_0 = \bar{\omega}_0 \quad (\text{C.2-4})$$

A partir del modelo de predicción (3.3-11) aplicado en régimen permanente se obtiene que:

$$\hat{y}(k) = U \bar{\omega}_0 = (M_1 + PC) \bar{x}_0 + O \bar{u}_0 \quad (\text{C.2-5})$$

^oEste análisis supone que dichas referencias son alcanzables por las salidas

Con estos valores en régimen permanente se puede obtener la expresión para la representación interna del bucle cerrado para el caso sin restricciones y de coincidencia entre modelo y proceso, en términos de las nuevas variables (4.5-16):

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C}))\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{x}_u(k) + \mathbf{B}\sigma\hat{\omega}(k) \quad (\text{C.2-6})$$

$$\Delta\bar{\mathbf{x}}(k+1) + \bar{\mathbf{x}}_0 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C}))(\Delta\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{x}}_0) + \mathbf{B}\Delta\mathbf{x}_u(k) + \mathbf{B}\mathbf{x}_{u,0} + \mathbf{B}\sigma\mathbf{U}\tilde{\omega}_0 \quad (\text{C.2-7})$$

$$\Delta\bar{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C}))\Delta\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\Delta\mathbf{x}_u(k) \quad (\text{C.2-8})$$

$$\mathbf{x}_u(k+1) = -(\mathbf{I} - \sigma\mathbf{O})\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})\bar{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{I} - \sigma\mathbf{O})\mathbf{x}_u(k) + (\mathbf{I} - \sigma\mathbf{O})\sigma\hat{\omega}(k) \quad (\text{C.2-9})$$

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}_u(k+1) + \mathbf{x}_{u,0} = & -(\mathbf{I} - \sigma\mathbf{O})\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})(\Delta\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{x}}_0) + \\ & + (\mathbf{I} - \sigma\mathbf{O})(\Delta\mathbf{x}_u(k) + \mathbf{x}_{u,0}) + (\mathbf{I} - \sigma\mathbf{O})\sigma\mathbf{U}\tilde{\omega}_0 \end{aligned} \quad (\text{C.2-10})$$

$$\Delta\mathbf{x}_u(k+1) = -(\mathbf{I} - \sigma\mathbf{O})\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})\Delta\bar{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{I} - \sigma\mathbf{O})\Delta\mathbf{x}_u(k) \quad (\text{C.2-11})$$

Para el valor del error de la respuesta libre también se puede deducir una expresión reducida (5.2-12):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_c(k) = & [(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})) - \mathbf{O}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})] \bar{\mathbf{x}}(k-1) + \\ & + ((\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})\mathbf{B} + \mathbf{O}) \mathbf{x}_u(k-1) + [((\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})\mathbf{B} + \mathbf{O}) \sigma - \mathbf{I}] \mathbf{U}\tilde{\omega}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_c(k) = & [(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})) - \mathbf{O}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})] (\Delta\bar{\mathbf{x}}(k-1) + \bar{\mathbf{x}}_0) + \\ & + ((\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})\mathbf{B} + \mathbf{O}) (\Delta\mathbf{x}_u(k-1) + \mathbf{x}_{u,0}) + [((\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})\mathbf{B} + \mathbf{O}) \sigma - \mathbf{I}] \mathbf{U}\tilde{\omega}_0 \\ \hat{\mathbf{e}}_c(k) = & [(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})) - \mathbf{O}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})] \Delta\bar{\mathbf{x}}(k-1) + \\ & + ((\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})\mathbf{B} + \mathbf{O}) \Delta\mathbf{x}_u(k-1) \end{aligned} \quad (\text{C.2-12})$$

la cual da lugar al siguiente valor para el valor óptimo del índice de coste (5.2-17):

$$\mathbf{J}_k^* = \begin{pmatrix} \Delta\bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta\mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix}^T \tilde{\mathbf{T}}^T \mathcal{K}(\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{R}}) \tilde{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \Delta\bar{\mathbf{x}}(k-1) \\ \Delta\mathbf{x}_u(k-1) \end{pmatrix} \quad (\text{C.2-13})$$

siendo:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})(\mathbf{A} - \mathbf{B}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})) - \mathbf{O}\sigma(\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C}) & (\mathbf{M}_1 + \mathbf{P}\mathbf{C})\mathbf{B} + \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2-14})$$

APÉNDICE D

Teoría de conjuntos invariantes

D.1. Introducción

En este apéndice se presentan los conceptos básicos relativos a la teoría de conjuntos invariantes. Dicha teoría es puede ser muy útil en el diseño de sistemas de control que estén sujetos a restricciones sobre los estados y/o las salidas. Las definiciones aquí presentadas han sido extraídas de [Kerrigan 2000]. Además, su autor ha desarrollado una *toolbox* para Matlab que permite el cómputo de conjuntos invariantes denominada *Set Invariance Toolbox*, la cual puede descargarse de la dirección web www-control.eng.ac.uk/eck21.

Un problema fundamental en control es determinar el conjunto de los posibles estados para los cuales es posible encontrar una secuencia de acciones de control que permita llevarlos hacia un conjunto objetivo (por ejemplo, un punto aislado), bajo la condición de que se verifiquen todas las restricciones sobre los estados y las acciones de control, y bajo todas las posibles perturbaciones actuantes sobre el sistema.

En este apéndice se asumirá que los sistemas en estudio son discretos no lineales, con incertidumbres y presencia de perturbaciones, de la forma:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \quad (\text{D.1-1})$$

siendo \mathbf{x}_k el estado, \mathbf{u}_k las entradas de control y \mathbf{w}_k perturbaciones actuantes sobre el sistema:

$$\mathbf{w}_k \in \mathbb{W} \subset \mathbb{R}^d \quad (\text{D.1-2})$$

Además, este sistema está sujeto a restricciones sobre los estados y las entradas de control:

$$\mathbf{u}_k \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m \quad ; \quad \mathbf{x}_k \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \quad (\text{D.1-3})$$

se supondrá que tanto el sistema como las restricciones son invariantes con el tiempo. Además, debe verificarse la hipótesis de que el estado es completamente medible.

Una acción de control (secuencia de acciones de control o ley de control) se dice que es admisible si pertenece al conjunto \mathcal{U} . Una secuencia de perturbaciones se dice que es esperable si pertenece al conjunto \mathcal{W} .

D.2. Conjuntos admisibles con respecto a la entrada y a la salida

Un aspecto interesante es deducir cuál subconjunto de uno dado es compatible con las restricciones sobre la salida y la entrada. En relación a ello se definen los conjuntos admisibles en relación con la entrada y la salida.

Definición D.2.1 (Conjunto admisible con respecto a la entrada) *Dada una ley de control $\mathbf{u}_k = h(\mathbf{x}_k)$, y un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, el subconjunto admisible de éste con respecto a la entrada viene dado por:*

$$\Omega^h \triangleq \{\mathbf{x}_k \in \Omega / h(\mathbf{x}_k) \in \mathcal{U}\} \quad (\text{D.2-1})$$

Supóngase la salida del sistema dinámico discreto verifica las restricciones:

$$\mathbf{y}_k = \phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p \quad (\text{D.2-2})$$

Definición D.2.2 (Conjunto admisible con respecto a la salida) *El subconjunto admisible de Ω con respecto a la salida viene dado por:*

$$\Omega^\phi \triangleq \{\mathbf{x}_k \in \Omega / \phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k) \in \mathcal{Y}, \forall \mathbf{w}_k \in \mathcal{W}\} \quad (\text{D.2-3})$$

El subconjunto admisible con respecto de la entrada y de la salida viene dado por:

$$\Omega^{h,\phi} \triangleq \Omega^h \cap \Omega^\phi \quad (\text{D.2-4})$$

D.3. Conjuntos robustos de un paso y conjuntos robustos alcanzados

Definición D.3.1 (Conjunto robusto de un paso $\tilde{\mathcal{Q}}(\Omega)$) *El conjunto $\tilde{\mathcal{Q}}(\Omega)$ es el conjunto de estados de \mathbb{R}^n para los cuales existe una acción de control admisible que garantiza que el*

sistema será conducido a Ω en un paso para todas las perturbaciones esperables:

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\Omega) = \{\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n / \exists \mathbf{u}_k \in \mathcal{U} : f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \in \Omega, \forall \mathbf{w}_k \in \mathcal{W}\} \quad (\text{D.3-1})$$

Una definición alternativa es:

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\Omega) = \{\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n / \exists \mathbf{u}_k \in \mathcal{U} : f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathcal{W}) \subseteq \Omega\} \quad (\text{D.3-2})$$

Proposición D.3.1 Para cualesquiera Ω_1, Ω_2 , si $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \Rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}(\Omega_1) \subseteq \tilde{\mathcal{Q}}(\Omega_2)$.

Definición D.3.2 (Conjunto alcanzable $\tilde{\mathcal{R}}(\Omega)$) El conjunto $\tilde{\mathcal{R}}(\Omega)$ es el conjunto de estados de \mathbb{R}^n a los cuales evolucionará en el siguiente instante cualquier $\mathbf{x}_k \in \Omega$ con cualesquiera acción de control admisible y perturbación esperable:

$$\tilde{\mathcal{R}}(\Omega) = \{\mathbf{x}_{k+1} \in \mathbb{R}^n / \exists \mathbf{x}_k \in \Omega, \mathbf{u}_k \in \mathcal{U}, \mathbf{w}_k \in \mathcal{W} : \mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)\} \quad (\text{D.3-3})$$

Una definición equivalente es:

$$\tilde{\mathcal{R}}(\Omega) = \{\mathbf{x}_{k+1} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{x}_{k+1} = f(\Omega, \mathcal{U}, \mathcal{W})\} \quad (\text{D.3-4})$$

Nota D.3.1 Si no hay presentes perturbaciones entonces:

$$\mathcal{Q}(\Omega) = \{\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n / \exists \mathbf{u}_k \in \mathcal{U} : f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \in \Omega\} \quad (\text{D.3-5})$$

$$\mathcal{R}(\Omega) = \{\mathbf{x}_{k+1} \in \mathbb{R}^n / \exists \mathbf{x}_k \in \Omega, \mathbf{u}_k \in \mathcal{U} : \mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)\} \quad (\text{D.3-6})$$

que representan el conjunto de un paso y el conjunto alcanzable, respectivamente. Obsérvese que los conjuntos se denotan con sobrebarra cuando se consideran perturbaciones, incorporando entonces la calificación de robustos.

Proposición D.3.2 Si Ω viene dado por la unión $\Omega \triangleq \bigcup_i \Omega_i$, entonces $\mathcal{Q}(\Omega) = \bigcup_i \mathcal{Q}(\Omega_i)$.

D.4. Conjuntos positivamente invariantes robustos

Definición D.4.1 (Conjunto positivamente invariante robusto) El conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es positivamente invariante robusto para el sistema $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k)$ si y sólo si $\forall \mathbf{x}_0 \in \Omega$ y $\forall \mathbf{w}_k \in \mathcal{W}$, la evolución del sistema satisface $\mathbf{x}_k \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}$.

Proposición D.4.1 La unión de dos conjuntos positivamente invariantes robustos es también un conjunto positivamente invariante robusto.

Nota D.4.1 Este resultado no es cierto para la intersección de conjuntos positivamente invariantes robustos.

Nota D.4.2 En general, cualquier conjunto Ω no es positivamente invariante robusto. Por ello, un problema típico consiste en tratar de obtener el mayor conjunto contenido en Ω que sí lo sea.

Definición D.4.2 (Mayor conjunto positivamente invariante robusto) El conjunto $\tilde{\mathcal{O}}_\infty(\Omega)$ es el mayor conjunto positivamente invariante robusto contenido en Ω para el sistema $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k)$ si y sólo si $\tilde{\mathcal{O}}_\infty(\Omega)$ es positivamente invariante robusto y contiene todos los conjuntos positivamente invariantes contenidos en Ω .

Proposición D.4.2 El mayor conjunto positivamente invariante es único.

Nota D.4.3 El mayor conjunto positivamente invariante robusto para el sistema en bucle cerrado $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, h(\mathbf{x}_k), \mathbf{w}_k)$ se denotará como $\tilde{\mathcal{O}}_\infty^h(\Omega)$, y se define como el mayor conjunto positivamente invariante robusto contenido en el conjunto admisible con respecto a la entrada Ω^h : $\tilde{\mathcal{O}}_\infty^h(\Omega) \triangleq \tilde{\mathcal{O}}_\infty(\Omega^h)$

D.5. Conjuntos invariantes robustos bajo control

También se puede plantear el problema de tratar de determinar si dado Ω y un estado inicial $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ existe una ley de control tal que la evolución del estado permanece en Ω para todos los instantes posteriores, a pesar de la presencia de perturbaciones.

Definición D.5.1 (Conjunto invariante robusto bajo control) El conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es invariante robusto bajo control para el sistema $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$ si y sólo si existe una ley de control $\mathbf{u}_k = h(\mathbf{x}_k)$ tal que Ω es positivamente invariante robusto para el sistema en bucle cerrado $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, h(\mathbf{x}_k), \mathbf{w}_k)$, y $\mathbf{u}_k \in \mathcal{U}$, $\forall \mathbf{x}_k \in \Omega$.

En otras palabras, Ω es invariante robusto bajo control si y sólo si:

$$\mathbf{x}_k \in \Omega \Rightarrow \exists \mathbf{u}_k \in \mathcal{U} : \mathbf{x}_{k+1} \in \Omega, \forall \mathbf{w}_k \in \mathcal{W} \quad (\text{D.5-1})$$

Proposición D.5.1 La unión de dos conjuntos invariantes robustos bajo control también es invariante robusto bajo control.

Definición D.5.2 (Mayor conjunto invariante robusto bajo control) El conjunto $\bar{\mathcal{C}}_\infty(\Omega)$ es el mayor conjunto invariante robusto bajo control contenido en Ω para el sistema $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$ si y sólo si $\bar{\mathcal{C}}_\infty(\Omega)$ es invariante robusto bajo control y contiene a todos los conjuntos invariantes robustos bajo control contenidos en Ω .

Proposición D.5.2 El mayor conjunto invariante robusto bajo control es único.

La siguiente proposición justifica el por qué la teoría de conjuntos invariantes juega un papel fundamental en el estudio de los sistemas con restricciones.

Proposición D.5.3 *Dado el sistema incierto (D.1-1), existe una ley de control admisible tal que las restricciones sobre el estado pueden ser satisfechas, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{X}$, para todo instante $k \in \mathbb{N}$ y para todas las perturbaciones esperables si y sólo si el estado inicial $\mathbf{x}_0 \in \tilde{\mathcal{C}}_\infty(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{X}$.*

Nota D.5.1 *Una proposición simular se puede establecer para sistemas en bucle cerrado empleando el mayor conjunto positivamente invariante robusto $\tilde{\mathcal{O}}_\infty^h(\mathbb{X})$.*

TEOREMA D.5.1 (CONDICIÓN GEOMÉTRICA PARA LA INVARIANZA) *El conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es invariante robusto bajo control si y sólo si $\Omega \subseteq \tilde{\mathcal{Q}}(\Omega)$.*

Este resultado es utilizado por los algoritmos para verificar si se tiene un conjunto invariante robusto bajo control.

D.6. Conjuntos robustamente controlables

En esta sección se presentan definiciones que tratar de dar respuesta a la pregunta de si es posible alcanzar un determinado conjunto objetivo de estados, a pesar de las perturbaciones, en un número finito de pasos.

Definición D.6.1 (Conjunto robustamente controlable) *El conjunto robustamente controlable en i pasos $\tilde{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T})$ es el mayor conjunto de estados de Ω para el cual existe una realimentación del estado variante con el tiempo para la cual un conjunto objetivo arbitrario $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^n$ es alcanzado exactamente en i pasos, mientras se mantiene la evolución de los estados dentro de Ω para los primeros $i - 1$ pasos, para todas las perturbaciones esperables:*

$$\tilde{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T}) \triangleq \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n / \exists \{u_k = h_k(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{U}\}_0^{i-1} : \{\mathbf{x}_k \in \Omega\}_0^{i-1}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{T}, \forall \{\mathbf{w}_k \in \mathbb{W}\}_0^{i-1}\} \quad (\text{D.6-1})$$

Si existe, se puede definir el conjunto robustamente controlable en tiempo infinito como el límite:

$$\tilde{\mathcal{K}}_\infty(\Omega, \mathbb{T}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T}) \quad (\text{D.6-2})$$

Nota D.6.1 *Si el conjunto \mathbb{T} es invariante robusto bajo control, entonces se puede probar que existe una realimentación del estado invariante con el tiempo que asegura que el estado alcanza \mathbb{T} tras exactamente i pasos.*

El cálculo de los conjuntos robustamente controlables se puede realizar en base al siguiente algoritmo:

$$\tilde{\mathcal{K}}_0(\Omega, \mathbb{T}) = \mathbb{T} \quad (\text{D.6-3})$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_{i+1}(\Omega, \mathbb{T}) = \tilde{\mathcal{Q}}(\tilde{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T})) \cap \Omega \quad i \geq 0 \quad (\text{D.6-4})$$

Proposición D.6.1 (Determinación finita) Si $\exists i \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T}) = \tilde{\mathcal{K}}_{i+1}(\Omega, \mathbb{T})$ entonces $\tilde{\mathcal{K}}_\infty(\Omega, \mathbb{T}) = \tilde{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T})$, y además el conjunto robustamente controlable en tiempo infinito es invariante robusto bajo control.

Proposición D.6.2

1. Para $i > 0$, si $\tilde{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T})$ es invariante robusto bajo control entonces $\tilde{\mathcal{K}}_{i+1}(\Omega, \mathbb{T})$ también lo es.
2. Si $\mathbf{x}_k \in \tilde{\mathcal{K}}_{i+1}(\Omega, \mathbb{T}) - \tilde{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T}) \neq \emptyset$, entonces existe una acción de control admisible tal que garantiza que para todas las perturbaciones esperables el estado en el siguiente instante alcanzará $\tilde{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T})$.
3. Si $\mathbf{x}_k \in \tilde{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T}) - \tilde{\mathcal{K}}_{i+1}(\Omega, \mathbb{T}) \neq \emptyset$, entonces no existe ninguna acción de control admisible tal que garantice que para todas las perturbaciones esperables el estado en el siguiente instante seguirá estando en $\tilde{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T})$.
4. No existe ninguna ley de control admisible que asegure que sistema alcanzará \mathbb{T} en i o menos pasos para todas las perturbaciones esperables si y sólo si:

$$\mathbf{x}_k \notin \bigcup_{j=0}^i \tilde{\mathcal{K}}_j(\Omega, \mathbb{T}) \quad (\text{D.6-5})$$

D.7. Conjuntos robustamente estabilizables

Si el conjunto objetivo es invariante robusto bajo control, entonces, la definición de los conjuntos robustamente controlables adquieren propiedades especiales.

Definición D.7.1 (Conjunto robustamente estabilizable) El conjunto $\tilde{\mathcal{S}}_i(\Omega, \mathbb{T})$ es el conjunto robustamente estabilizable en i pasos contenido en Ω para el sistema $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$ si y sólo si \mathbb{T} es un subconjunto invariante robusto bajo control de Ω , y contiene todos los estados de Ω para los cuales existe una ley realimentación variante con el tiempo que conducirá al estado del sistema a \mathbb{T} en un número de pasos menor o igual que i , manteniendo su evolución dentro de Ω para todas las perturbaciones esperables:

$$\tilde{\mathcal{S}}_i(\Omega, \mathbb{T}) \triangleq \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n / \exists \{u_k = h_k(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{U}\}_0^{i-1}, N \leq i : \{\mathbf{x}_k \in \Omega\}_0^{N-1}, \{\mathbf{x}_k \in \mathbb{T}\}_N^i, \mathbb{T} \subseteq \tilde{\mathcal{Q}}(\mathbb{T})\} \quad (\text{D.7-1})$$

Nota D.7.1 Si \mathbb{T} es un subconjunto invariante robusto bajo control de Ω se utiliza la notación $\bar{\mathcal{S}}_i(\Omega, \mathbb{T})$, si por contra es un subconjunto cualquiera de \mathbb{R}^n entonces se utiliza $\bar{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T})$.

Definición D.7.2 (Mayor conjunto robustamente estabilizable) El conjunto $\bar{\mathcal{S}}_\infty(\Omega, \mathbb{T})$ es el mayor conjunto robustamente estabilizable contenido en Ω para el sistema $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$ si y sólo si $\bar{\mathcal{S}}_\infty(\Omega, \mathbb{T})$ es la unión de todos los subconjuntos robustamente estabilizables en $i \geq 0$ pasos contenidos en Ω .

Nota D.7.2 En general, el mayor conjunto robustamente estabilizable $\bar{\mathcal{S}}_\infty(\Omega, \mathbb{T})$ no es igual al mayor conjunto invariante robusto bajo control $\bar{\mathcal{C}}_\infty(\Omega)$, incluso para sistemas lineales. $\bar{\mathcal{S}}_\infty(\Omega, \mathbb{T}) \subseteq \bar{\mathcal{C}}_\infty(\Omega)$ para todo conjunto invariante robusto bajo control \mathbb{T} . El conjunto $\bar{\mathcal{C}}_\infty(\Omega) - \bar{\mathcal{S}}_\infty(\Omega, \mathbb{T})$ contiene todos los estados que no pueden ser llevados de forma robusta a la región estabilizable $\bar{\mathcal{S}}_\infty(\Omega, \mathbb{T})$ (y por tanto a \mathbb{T}). Equivalentemente, $\bar{\mathcal{S}}_\infty(\Omega, \{0\})$ no es necesariamente equivalente a $\bar{\mathcal{S}}_\infty(\Omega, \mathbb{T})$ si $0 \in \mathbb{T}$, ya que no es posible llevar algunos sistemas al origen.

Proposición D.7.1

1. Cada conjunto $\bar{\mathcal{S}}_i(\Omega, \mathbb{T})$ es invariante robusto bajo control.
2. Cada conjunto contiene a todos los anteriores:

$$\bar{\mathcal{S}}_{i+1}(\Omega, \mathbb{T}) \supseteq \bar{\mathcal{S}}_i(\Omega, \mathbb{T}) \quad i \geq 0 \quad (\text{D.7-2})$$

3. Para cada $i \geq 0$ se cumple:

$$\bar{\mathcal{S}}_i(\Omega, \mathbb{T}) = \bigcup_{j=0}^i \bar{\mathcal{S}}_j(\Omega, \mathbb{T}) \quad (\text{D.7-3})$$

4. Si $\mathbf{x}_k \in \bar{\mathcal{S}}_{i+1}(\Omega, \mathbb{T})$ entonces existe una acción de control admisible que lleva al estado a $\bar{\mathcal{S}}_i(\Omega, \mathbb{T})$ al instante siguiente para todas las perturbaciones esperables.
5. No existe una ley de control admisible que asegure que el sistema alcance \mathbb{T} en i pasos o menos para todas las perturbaciones esperables si y sólo si $\mathbf{x}_k \notin \bar{\mathcal{S}}_i(\Omega, \mathbb{T})$.

Puesto que los conjuntos estabilizables son un caso particular de los controlables, éstos se pueden calcular utilizando el mismo algoritmo para los segundos teniendo en cuenta que:

$$\bar{\mathcal{S}}_i(\Omega, \mathbb{T}) = \bar{\mathcal{K}}_i(\Omega, \mathbb{T}) \quad (\text{D.7-4})$$

Si $\bar{\mathcal{S}}_{i+1}(\Omega, \mathbb{T}) = \bar{\mathcal{S}}_i(\Omega, \mathbb{T})$, entonces $\bar{\mathcal{S}}_\infty(\Omega, \mathbb{T}) = \bar{\mathcal{S}}_i(\Omega, \mathbb{T})$ (determinación finita).

D.8. Conjuntos robustamente admisibles y el cálculo del mayor conjunto invariante robusto bajo control

Definición D.8.1 (Conjunto robustamente admisible) El conjunto robustamente admisible de i pasos $\bar{\mathcal{C}}_i(\Omega)$ contenido en Ω es el conjunto de estados para los cuales existe una ley de control variante con el tiempo admisible tal que la evolución del estado permanece dentro de Ω durante i pasos, para todas las perturbaciones esperables:

$$\bar{\mathcal{C}}_i(\Omega) \triangleq \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n / \exists \{\mathbf{u}_k = h(\mathbf{x}_k)\}_0^{i-1} : \{\mathbf{x}_k \in \Omega\}_0^i, \forall \{\mathbf{w}_k \in \mathbb{W}\}_0^{i-1}\} \quad (\text{D.8-1})$$

Proposición D.8.1 (Determinación finita) Si existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{\mathcal{C}}_{i+1}(\Omega) = \bar{\mathcal{C}}_i(\Omega)$ entonces $\bar{\mathcal{C}}_\infty(\Omega) = \bar{\mathcal{C}}_i(\Omega)$

Obsérvese que por la definición de los conjuntos robustamente admisibles y del mayor conjunto invariante robusto bajo control:

$$\bar{\mathcal{C}}_\infty(\Omega) = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\mathcal{C}}_i(\Omega) \quad (\text{D.8-2})$$

Proposición D.8.2

1. El conjunto robustamente admisible de $i + 1$ pasos está contenido en todos los anteriores:

$$\bar{\mathcal{C}}_{i+1}(\Omega) \subseteq \bar{\mathcal{C}}_i(\Omega) \quad (\text{D.8-3})$$

2. Para $i \geq 0$:

$$\bar{\mathcal{C}}_i(\Omega) = \bigcap_{j=0}^i \bar{\mathcal{C}}_j(\Omega) \quad (\text{D.8-4})$$

3. No existe una ley de control admisible que asegure que la evolución del estado permanecerá dentro de Ω durante i pasos para todas las perturbaciones esperables si y sólo si el estado $\mathbf{x}_k \notin \bar{\mathcal{C}}_i(\Omega)$.

4. Si el estado $\mathbf{x}_k \in \bar{\mathcal{C}}_i(\Omega) - \bar{\mathcal{C}}_\infty(\Omega) \neq \emptyset$, entonces no existe una acción de control admisible que asegure que el estado en el siguiente estado esté en $\bar{\mathcal{C}}_i(\Omega)$ para todas las perturbaciones esperables.

Además, es fácil comprobar que $\bar{\mathcal{C}}_i(\Omega) = \bar{\mathcal{K}}_i(\Omega, \Omega)$. Por tanto, el mayor conjunto invariante robusto bajo control contenido en Ω se puede obtener con el mismo algoritmo que los conjuntos robustamente controlables. Dicho algoritmo se detendrá cuando se dé alguna de las siguientes circunstancias:

$$\text{Si } \bar{\mathcal{C}}_i(\Omega) = \emptyset \text{ entonces } \bar{\mathcal{C}}_\infty(\Omega) = \emptyset \quad (\text{D.8-5})$$

$$\text{Si } \bar{\mathcal{C}}_{i+1}(\Omega) = \bar{\mathcal{C}}_i(\Omega), \text{ entonces } \bar{\mathcal{C}}_\infty(\Omega) = \bar{\mathcal{C}}_i(\Omega) \quad (\text{D.8-6})$$

Proposición D.8.3 (Convergencia al mayor conjunto invariante robusto bajo control)

Se asume que el sistema es de la forma $\mathbf{x}_{k+1} = f_{xu}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k$ y que $\bar{\mathcal{C}}_\infty(\Omega)$ es no vacío. Si Ω y \mathcal{U} son compactos y la función f_{xu} es continua, entonces dado cualquier conjunto abierto acotado Φ tal que $\bar{\mathcal{C}}_\infty(\Omega) \subset \Phi$, existe un entero positivo $i < \infty$ tal que $\bar{\mathcal{C}}_\infty(\Omega) \subseteq \bar{\mathcal{C}}_i(\Omega) \subset \Phi$.

En general, el mayor conjunto invariante robusto bajo control no se puede determinar de forma finita.

APÉNDICE E

Análisis en frecuencia de matrices de transferencia discretas

E.1. Valores singulares

Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ de rango r puede ser descompuesta en la forma:

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^* \quad (\text{E.1-1})$$

siendo $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, con $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, y U y V matrices unitarias. A los coeficientes σ_j se les denomina valores singulares de la matriz A .

Al mayor valor singular de una matriz se le denomina $\bar{\sigma}(A) = \sigma_1$, y al menor valor singular $\underline{\sigma}(A) = \sigma_r$.

Los valores singulares cumplen las siguientes propiedades:

$$\bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}, \text{ si existe } A^{-1}. \quad (\text{E.1-2})$$

$$\sigma_i(A) - \bar{\sigma}(B) \leq \sigma_i(A + B) \leq \sigma_i(A) + \bar{\sigma}(B) \quad (\text{E.1-3})$$

La matriz pseudoinversa puede ser calculada a partir de su descomposición en valores singulares:

$$A^\dagger = V \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* \quad (\text{E.1-4})$$

El número de condición de una matriz se define como:

$$\kappa(A) = \frac{\bar{\sigma}(A)}{\underline{\sigma}(A)} \quad (\text{E.1-5})$$

el cual cuantifica la relación entre la máxima y la mínima ganancia de A con respecto a las diferentes direcciones asociadas al vector de entrada. Por ejemplo, las matrices ortogonales poseen un número de condición igual a la unidad, por lo que se denominan esféricas, ya que amplifican por uno todas las direcciones. Por otro lado, están las matrices singulares cuyo número de condición es infinito.

E.2. Respuesta en frecuencia de sistemas discretos

Dado el sistema discreto $G(z)$ estable su respuesta en frecuencia se define como la colección de sus respuestas en régimen permanente ante entradas senoidales discretas de frecuencias comprendidas entre 0 y $+\infty$. Se puede justificar que las respuestas, en régimen permanente, también son señales senoidales de la misma frecuencia de que senoidal de entrada, aunque con diferente amplitud y desfase que ésta. La función de transferencia de respuesta en frecuencia, que se define como:

$$G(j\omega) \triangleq G(z)|_{z=e^{j\omega T}} \quad (\text{E.2-1})$$

es tal que su módulo para cada frecuencia representa la relación entre las amplitudes de la senoidal de salida y la de, y su fase el desfase entre dichas senoidales. Estas características son las que le otorgan su nombre.

Para sistemas SISO el manejo de la respuesta en frecuencia es sencillo, ya que la función de transferencia de respuesta en frecuencia es un número complejo y basta manejar su módulo y su fase. Para el caso MIMO la cosa se complica, ya que según la combinación de las señales de entrada las respuestas del sistema son distintas. A este efecto se le denomina direccionalidad. Para simplificar el análisis evitando la direccionalidad es posible recurrir al mayor y al menor valor singular de la matriz de respuesta en frecuencia:

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)), \underline{\sigma}(G(j\omega)) \quad (\text{E.2-2})$$

que proporcionan la máxima y la mínima ganancia de la respuestas para una frecuencia dada. Estos parámetros permiten establecer condiciones que a veces son conservadoras, ya que obvian la direccionalidad, aunque permiten una mejor interpretación de la respuesta en frecuencia.

Otra razón que justifica la importancia del uso de los valores singulares mayor y menor es que lo norma infinito del sistema discreto se define en términos del mayor valor singular de la matriz de transferencia de respuesta en frecuencia:

$$\|G(z)\|_{\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (\text{E.2-3})$$

que viene a representar la máxima ganancia que presenta el sistema para todas las frecuencias.

E.3. Normas inducidas

Definición E.3.1 Sean dos espacios vectoriales normados \mathcal{V} y \mathcal{W} con normas $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ respectivamente, y L una transformación lineal entre ellos $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$. La norma inducida de la transformación se define como sigue:

$$\|L\|_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}} \triangleq \sup_{\|v\|_{\mathcal{V}} \neq 0} \frac{\|L(v)\|_{\mathcal{W}}}{\|v\|_{\mathcal{V}}} \quad (\text{E.3-1})$$

E.3.1. Algunas normas inducidas importantes de sistemas

- Si se considera el espacio vectorial de las señales dotadas con norma infinito:

$$\|u(k)\|_{\infty} \triangleq \max_k \left(\max_i |u_i(k)| \right) \quad (\text{E.3-2})$$

la norma inducida de una función de transferencia cuando las señales de entrada y salida se ponderan por su norma infinito es la denominada norma 1:

$$\|G\|_1 \triangleq \sup_{\|u\|_{\infty} \neq 0} \frac{\|Gu\|_{\infty}}{\|u\|_{\infty}} \quad (\text{E.3-3})$$

- Si se considera el espacio vectorial de las señales dotadas con norma 2:

$$\|u(k)\|_2 \triangleq \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \text{traza}(u(k)u(k)^T)} \quad (\text{E.3-4})$$

la norma inducida de una función de transferencia cuando las señales de entrada y salida se ponderan por su norma 2 es la denominada norma ∞ :

$$\|G\|_{\infty} \triangleq \sup_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2} \quad (\text{E.3-5})$$

- La norma 2 de funciones de transferencia también se puede interpretar en términos de una norma inducida, aunque que los espacios de partida y llega son más complejos que hasta los ahora utilizados y, además, poco usuales en control. Para el caso SISO se puede interpretar como la inducida entre el espacio vectorial de señales de entrada dotado con norma 2 y el de las salidas dotado con norma ∞ .

E.3.2. Demostraciones

COROLARIO E.3.1 (INCERTIDUMBRE MULTIPLICATIVA) *Si el proceso nominal $G_0(z)$ es internamente estabilizado por el GPC, entonces todos los miembros de la familia de modelos \mathcal{G} con incertidumbre multiplicativa serán internamente estabilizados por él si y sólo si:*

$$\| -W_\Delta(z)T_0(z) \|_\infty \leq 1 \quad (\text{E.3-6})$$

Demostración: Basta con calcular la expresión de $M_{11}(z)$ a partir de la transformación lineal fraccional inferior y luego aplicar el resultado del **teorema 6.3.1**.

Para poder calcular la transformación fraccional inferior se obtiene la matriz de transferencia $P(z)$ (figura 6.5) a partir de las figuras correspondientes al bucle cerrado más GPC (6.2) y a la incertidumbre multiplicativa (6.3). En concreto se tienen las siguientes relaciones:

$$\mathbf{p}(z) = \tilde{\omega}(z) \quad (\text{E.3-7})$$

$$\mathbf{y}_\Delta(z) = W_\Delta(z)G_0(z)\tilde{\mathbf{u}}(z) \quad (\text{E.3-8})$$

$$\mathbf{y}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}(z) \\ \tilde{\mathbf{y}}(z) \end{pmatrix} \quad (\text{E.3-9})$$

$$\mathbf{e}(z) = \tilde{\mathbf{y}}(z) \quad (\text{E.3-10})$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(z) = \mathbf{u}_\Delta(z) + G_0(z)\tilde{\mathbf{u}}(z) \quad (\text{E.3-11})$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(z) = \mathcal{H}\tilde{\omega}(z) + \mathcal{R}\tilde{\mathbf{y}}(z) \quad (\text{E.3-12})$$

que dan lugar a (6.3-8):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_\Delta \\ \tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = P(z) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\Delta \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_\Delta G_0 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & G_0 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & G_0 \end{array} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\Delta \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^i(z) & P_{12}^i(z) \\ P_{21}^i(z) & P_{22}^i(z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\Delta \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \quad (\text{E.3-13})$$

La transformación fraccional inferior es (6.3-7):

$$M(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_\Delta G_0 \\ G_0 \end{bmatrix} \left[\mathcal{H} \quad \mathcal{R} \right] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ G_0 \end{bmatrix} \left[\mathcal{H} \quad \mathcal{R} \right] \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{E.3-14})$$

Realizando estas operaciones:

$$M(z) = \begin{bmatrix} W_\Delta G_0 \mathcal{R} (\mathbf{I} - G_0 \mathcal{R})^{-1} & W_\Delta (\mathbf{I} - G_0 \mathcal{R})^{-1} G_0 \mathcal{H} \\ (\mathbf{I} - G_0 \mathcal{R})^{-1} & (\mathbf{I} - G_0 \mathcal{R})^{-1} G_0 \mathcal{H} \end{bmatrix} \quad (\text{E.3-15})$$

Recordando la expresión de la función de sensibilidad complementaria T_0 (6.2-8) se obtiene que:

$$\mathbf{M}_{11}(z) = -W_{\Delta} \mathbf{T}_0 \quad (\text{E.3-16})$$

lo cual demuestra el corolario. ■

APÉNDICE F

Resultados sobre LMIs

F.1. Demostraciones generales

Proposición F.1.1 ($P(\Delta) > 0$) *Sea un proceso discreto con incertidumbre cuya matriz de estado es $A(\Delta)$. Supóngase que existe Δ' fijo para el que el sistema es asintóticamente estable, es decir, existe $P(\Delta') > 0$ que verifica la desigualdad:*

$$A(\Delta')^T P(\Delta') A(\Delta') - P(\Delta') < 0 \quad (\text{F.1-1})$$

entonces si dicha desigualdad se cumple para todo Δ entonces $P(\Delta) > 0$ para todo Δ .

Demostración: En primer lugar se demostrará este hecho para el caso continuo:

LEMA F.1.1 ($P(\Delta) > 0$) *Sea un proceso continuo con incertidumbre cuya matriz de estado es $A(\Delta)$. Supóngase que existe Δ' fijo para el que el sistema es asintóticamente estable, es decir, existe $P(\Delta') > 0$ que verifica la desigualdad:*

$$A(\Delta')^T P(\Delta') + P(\Delta') A(\Delta') < 0 \quad (\text{F.1-2})$$

entonces si dicha desigualdad se cumple para todo Δ entonces $P(\Delta) > 0$ para todo Δ .

En primer lugar se va demostrar que si se cumple la condición (F.1-2) para todo Δ entonces $P(\Delta)$ es no singular para todo Δ . Se va a proceder por reducción al absurdo, supóngase que existe Δ^* tal que es singular, entonces $\exists \mathbf{v} \neq 0$ tal que $P(\Delta^*)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Premultiplicando y postmultiplicando (F.1-2) por \mathbf{v}^T y \mathbf{v} :

$$\mathbf{v}^T A(\Delta^*)^T P(\Delta^*) \mathbf{v} + \mathbf{v}^T P(\Delta^*) A(\Delta^*) \mathbf{v} < 0$$

$$0 < 0 \quad (\text{F.1-3})$$

lo cual es una contradicción. En el enunciado del lema se ha afirmado que existe Δ' para el que $P(\Delta') > 0$, o sea, que posee todos sus valores propios positivos. Como los valores propios de $P(\Delta)$ son una función continua de Δ y $P(\Delta)$ nunca se vuelve singular entonces se concluye que todos sus valores propios son siempre positivos.

Una vez demostrado el caso continuo lo que se va a hacer es transformar el caso discreto al continuo. Para ello se parte de la ecuación estabilidad de discreta:

$$A(\Delta)^T P(\Delta) A(\Delta) - P(\Delta) < 0 \quad (\text{F.1-4})$$

entonces existe $Z(\Delta) < 0$ tal que:

$$A(\Delta)^T P(\Delta) A(\Delta) - P(\Delta) = Z(\Delta) \quad (\text{F.1-5})$$

Esta es la ecuación de Lyapunov discreta que puede transformarse en la continua con el cambio de variables:

$$A_c(\Delta) = (A(\Delta) + I)^{-1} (A(\Delta) - I) , \quad Z_c(\Delta) = (I - A_c(\Delta)) Z(\Delta) (I - A_c(\Delta))^T / 2$$

$$A_c^T(\Delta) P(\Delta) + P(\Delta) A_c(\Delta) = Z_c(\Delta) \quad (\text{F.1-6})$$

verificándose que $A_c(\Delta)$ es estable y $Z_c(\Delta)$ es definida negativa para todo Δ si lo son $A(\Delta)$ y $Z(\Delta)$.

De la ecuación de Lyapunov continua se deduce que:

$$A_c^T(\Delta) P(\Delta) + P(\Delta) A_c(\Delta) < 0 \quad \forall \Delta \quad (\text{F.1-7})$$

lo cual supone, aplicando el lema precedente, que $P(\Delta) > 0$ para todo Δ . ■

Proposición F.1.2 *El elipsoide \mathcal{E} que contiene al origen (punto de equilibrio):*

$$\mathcal{E} = \{ \mathbf{x}'_k \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}'_k)^T P \mathbf{x}'_k + 2(\mathbf{x}'_k)^T \mathbf{b} - 1 \leq 0 \} \quad (\text{F.1-8})$$

es inescapable para el sistema:

$$\mathbf{x}'_{k+1} = A \mathbf{x}'_k$$

si y sólo si cumple que:

$$\lambda \geq 0 , \quad \begin{bmatrix} A^T P A - (1 - \lambda) P & A^T \mathbf{b} - \mathbf{b}(1 - \lambda) \\ \mathbf{b}^T A - \mathbf{b}^T (1 - \lambda) & -\lambda \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{F.1-9})$$

Demostración: La parte correspondiente a la suficiencia ya fue probada en el capítulo 6. Ahora se va a probar la necesidad. Supóngase que \mathcal{E} es inescapable, en primer lugar se va a justificar que:

$$\Delta(\mathbf{x}'_k{}^T \mathbf{P} \mathbf{x}'_k + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x}'_k + 1) \leq 0 \text{ si } \mathbf{x}'_k{}^T \mathbf{P} \mathbf{x}'_k + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x}'_k \geq \rho_0, \quad 0 < \rho_0 \leq 1, \quad \mathbf{x}'_k \in \mathcal{E} \quad (\text{F.1-10})$$

Se va a proceder por reducción al absurdo, supóngase que $\exists \mathbf{x}'_0 \in \mathcal{E}$ tal que:

$$\Delta(\mathbf{x}'_0{}^T \mathbf{P} \mathbf{x}'_0 + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x}'_0 + 1) > 0 \text{ con } \mathbf{x}'_0{}^T \mathbf{P} \mathbf{x}'_0 + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x}'_0 \geq \rho_0 \quad (\text{F.1-11})$$

Si se expresa el elipsoide \mathcal{E} en la forma alternativa:

$$\underbrace{(\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_c)^T}_{\mathbf{x}_0^*} \mathbf{P} \underbrace{(\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_c)}_{\mathbf{x}_0^*} \leq 1 \text{ con } \mathbf{x}_c = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{b} \quad (\text{F.1-12})$$

se da origen a un nuevo elipsoide \mathcal{E}^* :

$$\mathcal{E}^* = \{ \mathbf{x}^* : \mathbf{x}^{*T} \mathbf{P} \mathbf{x}^* \leq 1 \} \quad (\text{F.1-13})$$

que es inescapable al serlo \mathcal{E} .

Tomando ahora:

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = \frac{\mathbf{x}_0^*}{\sigma}, \quad \sigma > 0 \text{ tal que } \bar{\mathbf{x}}_0^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}_0 = 1 \quad (\text{F.1-14})$$

Se llega a que:

$$\begin{aligned} 0 < \Delta(\bar{\mathbf{x}}_0^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}_0) &= \bar{\mathbf{x}}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}_0 - 1 \\ &\quad \bar{\mathbf{x}}_0^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}_0 > 1 \end{aligned} \quad (\text{F.1-15})$$

lo cual implica que \mathcal{E}^* no es inescapable, lo cual es una contradicción.

Tras el desarrollo anterior se tiene que:

$$\Delta(\mathbf{x}'_k{}^T \mathbf{P} \mathbf{x}'_k + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x}'_k) \leq 0 \text{ si } \mathbf{x}'_k{}^T \mathbf{P} \mathbf{x}'_k + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x}'_k \geq \rho_0 \quad (\text{F.1-16})$$

Esta condición es equivalente a la siguiente tras aplicar S-procedure:

$$\mathbf{x}'_{k+1}{}^T \mathbf{P} \mathbf{x}'_{k+1} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x}'_{k+1} - \mathbf{x}'_k{}^T \mathbf{P} \mathbf{x}'_k + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x}'_k + \lambda(\mathbf{x}'_k{}^T \mathbf{P} \mathbf{x}'_k + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x}'_k - \rho_0) \leq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad (\text{F.1-17})$$

que se cumple para $0 < \rho_0 \leq 1$. En concreto, para $\rho_0 = 1$ se tiene que es equivalente a:

$$\mathbf{x}'_k{}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - (1 - \lambda) \mathbf{P}) \mathbf{x}'_k + 2\mathbf{b}^T (\mathbf{A} - (1 - \lambda) \mathbf{I}) \mathbf{x}'_k - \lambda \leq 0 \quad (\text{F.1-18})$$

esta última condición se cumplirá para todo \mathbf{x}'_k si y sólo si el máximo de la función del primer miembro también lo cumple. Su valor máximo, calculando las derivadas primera y segunda de la función, deberá cumplir:

$$\begin{aligned} -2\mathbf{b}^T (\mathbf{A} - (1 - \lambda) \mathbf{I}) (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - (1 - \lambda) \mathbf{P})^{-1} (\mathbf{A} - (1 - \lambda) \mathbf{I})^T \mathbf{b} - \lambda \leq 0, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - (1 - \lambda) \mathbf{P} < 0 \\ (\text{F.1-19}) \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el complemento de Schur se obtiene la LMI del enunciado. ■

Proposición F.1.3 La condición que garantiza la verificación de las restricciones de la componente j del vector de salidas, se basa en imponer que su valor máximo dentro del elipsoide nunca supera el valor de las restricciones simétricas:

$$\max_{\mathbf{x}'_k \in \mathcal{E}} |y_{j,k}^*|^2 = \max_{\mathbf{x}'_k \in \mathcal{E}} (\mathbf{C}_j \mathbf{x}'_k - \bar{y}_j)^T (\mathbf{C}_j \mathbf{x}'_k - \bar{y}_j) \leq dy_j^2 \quad (\text{F.1-20})$$

Esta condición se cumple si y sólo si:

$$\sigma_j \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{C}_j^T \mathbf{C}_j - \sigma_j \mathbf{P} & -\mathbf{C}_j^T \bar{y}_j - \sigma_j \mathbf{b} \\ -\bar{y}_j \mathbf{C}_j - \mathbf{b}^T \sigma_j & \bar{y}_j^2 - dy_j^2 + \sigma_j \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{F.1-21})$$

Demostración: En el capítulo 6 se justifico la suficiencia de la condición basada en la LMI. Para justificar la necesidad hay que recuperar la condición equivalente (6.3-121):

$$(\mathbf{C}_j \mathbf{x}'_k - \bar{y}_j)^T (\mathbf{C}_j \mathbf{x}'_k - \bar{y}_j) - \sigma_j ((\mathbf{x}'_k)^T \mathbf{P} \mathbf{x}'_k + 2(\mathbf{x}'_k)^T \mathbf{b} - 1) \leq dy_j^2, \quad \sigma_j \geq 0 \quad (\text{F.1-22})$$

La idea es seguir la misma técnica de la demostración anterior, basada en obtener el máximo del primer miembro y garantizar que se cumpla también para él. Tras aplicar la técnica de obtención del máximo, basada en las derivadas primera y segunda:

$$-(\bar{y}_j \mathbf{C}_j^T + \sigma_j \mathbf{b})^T (\mathbf{C}_j^T \mathbf{C}_j - \sigma_j \mathbf{P})^{-1} (\bar{y}_j \mathbf{C}_j^T + \sigma_j \mathbf{b}) + \bar{y}_j^2 + \sigma_j - dy_j^2 \leq 0, \quad \mathbf{C}_j^T \mathbf{C}_j - \sigma_j \mathbf{P} < 0 \quad (\text{F.1-23})$$

Finalmente, aplicando complemento de Schur se obtiene la condición basada en la LMI del enunciado. ■

F.2. Condiciones de estabilidad robusta

F.2.1. Incertidumbre afín en el bucle cerrado

Suponiendo incertidumbre de tipo afín¹ para el modelo incierto del proceso sobre las matrices $A(\Delta)$ y $B(\Delta)$ (6.3-1):

$$A(\Delta) = A_0 + \sum_i^q \delta_i A_i \quad ; \quad B(\Delta) = B_0 + \sum_i^q \delta_i B_i \quad ; \quad C(\Delta) = C_0 \quad (\text{F.2-1})$$

la matriz de estado del bucle cerrado (6.3-2) también dependerá afínmente de la incertidumbre:

$$A_{BC}(\Delta) = \overbrace{\begin{bmatrix} A_0 - B_0 \sigma P C_0 & -B_0 \sigma M & B_0 \\ (\Pi - \bar{B} \sigma P) C_0 & \bar{A} - \Pi \bar{C} - \bar{B} \sigma M & \bar{B} \\ -(I - \sigma O) \sigma P C_0 & -(I - \sigma O) \sigma M & I - \sigma O \end{bmatrix}}^{A_{BC,0}} + \sum_i^q \overbrace{\begin{bmatrix} A_i - B_i \sigma P C_0 & -B_i \sigma M & B_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A_{BC,i}} \quad (\text{F.2-2})$$

¹El caso de incertidumbre politópica es similar ya que ésta es equivalente a la afín.

Sustituyendo esta dependencia afín en (6.3-46) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \delta_i \mathbf{A}_{BC,i})^T \mathbf{P} \\ \mathbf{P}(\mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \delta_i \mathbf{A}_{BC,i}) & \mathbf{P} \end{bmatrix} > 0 \quad \forall \delta \quad (\text{F.2-3})$$

El primer miembro de esta ecuación es afín en los parámetros inciertos ya que la dependencia de $\mathbf{A}_{BC}(\Delta)$ es afín. Por tanto, basta verificar dicha LMI sólo en los vértices del conjunto de posibles valores de los parámetros para obtener una condición necesaria y suficiente de estabilidad cuadrática. El conjunto de posibles valores para los parámetros es:

$$\mathcal{V} = \{ \delta : \delta_i^- \leq \delta_i \leq \delta_i^+ \quad i = 1, \dots, q \} \quad (\text{F.2-4})$$

siendo \mathcal{V}_v el conjunto de sus vértices:

$$\mathcal{V}_v = \{ \delta \in \mathcal{V} : \delta_i \in \{ \delta_i^-, \delta_i^+ \} \} = \{ \delta^{v^1}, \dots, \delta^{v^l} \} \quad l = 2^q \quad (\text{F.2-5})$$

Lo que parece obvio que es que si se cumple (F.2-3) entonces también se cumple en \mathcal{V}_v , lo cual justifica la necesidad. Ahora se va a verificar la suficiencia, supóngase que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{A}_{BC}(\delta))^T \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \mathbf{A}_{BC}(\delta) & \mathbf{P} \end{bmatrix} > 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v \quad (\text{F.2-6})$$

la matriz incierta $\mathbf{A}_{BC}(\delta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es de la forma:

$$\mathbf{A}_{BC}(\delta) = \mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \delta_i \mathbf{A}_{BC,i} = \mathbf{A}_{BC,0} + \begin{bmatrix} \delta_1 \mathbf{I}_n & \dots & \delta_q \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{BC,1} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{BC,q} \end{bmatrix} \quad (\text{F.2-7})$$

y cualquier $\delta \in \mathcal{V}$ se puede obtener como combinación lineal convexa de los vértices:

$$\delta = \sum_i \mu_i \delta^{v^i} \quad \sum_i \mu_i = 1 \quad \mu_i \geq 0 \quad (\text{F.2-8})$$

con lo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{BC}(\delta) &= \mathbf{A}_{BC,0} + \begin{bmatrix} \delta_1 \mathbf{I}_n & \dots & \delta_q \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{BC,1} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{BC,q} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \mu_i \begin{bmatrix} \delta_1^{v^i} \mathbf{I}_n & \dots & \delta_q^{v^i} \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{BC,1} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{BC,q} \end{bmatrix} = \\ &= \sum_i \mu_i \left(\mathbf{A}_{BC,0} + \begin{bmatrix} \delta_1^{v^i} \mathbf{I}_n & \dots & \delta_q^{v^i} \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{BC,1} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{BC,q} \end{bmatrix} \right) = \sum_i \mu_i \mathbf{A}_{BC}(\delta^{v^i}) \end{aligned} \quad (\text{F.2-9})$$

si ahora se toma la expresión (F.2-6) para el vértice δ^{vi} se multiplica por μ_i y se suma desde $i = 1$ hasta $i = l$ se recupera la condición de estabilidad cuadrática:

$$\begin{aligned} \sum_i \mu_i \begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{A}_{BC}(\delta^{vi}))^T \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \mathbf{A}_{BC}(\delta^{vi}) & \mathbf{P} \end{bmatrix} &> 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\sum_i \mu_i \mathbf{A}_{BC}(\delta^{vi}))^T \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \sum_i \mu_i \mathbf{A}_{BC}(\delta^{vi}) & \mathbf{P} \end{bmatrix} &> 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{A}_{BC}(\delta))^T \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \mathbf{A}_{BC}(\delta) & \mathbf{P} \end{bmatrix} &> 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (\text{F.2-10})$$

Por tanto, para analizar la estabilidad cuadrática bajo incertidumbre real afín basta emplear la condición necesaria y suficiente (F.2-6).

F.2.2. Incertidumbre afín en el bucle cerrado con función de Lyapunov paramétrica afín

En [Gahinet *et al.* 1996; Feron *et al.* 1996; Scherer y Weiland 2000] se desarrollan condiciones suficientes de estabilidad cuadrática con dependencia afín de \mathbf{P} con respecto a los parámetros, para el caso de sistemas continuos. En esta sección se van a extender dichos resultados para el caso discreto.

Partiendo de la condición (F.2-3) y admitiendo dependencia afín para $\mathbf{P}(\delta)$ se tiene que:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) & (\mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \delta_i \mathbf{A}_{BC,i})^T (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) \\ (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) (\mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \delta_i \mathbf{A}_{BC,i}) & (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) \end{bmatrix} > 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V} \quad (\text{F.2-11})$$

A diferencia del caso cuadrático puro esta condición no tiene un primer miembro afín sino cuadrático en los parámetros, lo que imposibilita aplicar la idea de la combinación lineal convexa empleada antes. No obstante, es posible, aplicando un criterio sólo suficiente, denominado de multiconvexidad [Gahinet *et al.* 1996; Apkarian y Tuan 1998], garantizar la estabilidad cuadrática con dependencia afín verificando la condición (F.2-11) sólo en \mathcal{V}_v .

Definición F.2.1 (Multiconvexidad) Una función $f(\delta)$ es multiconvexa con respecto a δ si $\frac{\partial^2 f}{\partial \delta_i^2} \geq 0 \quad i = 1, \dots, q$.

LEMA F.2.1 Sea $f(\delta)$ una función cuadrática en el vector de parámetros δ y multiconvexa, entonces $f(\delta) < 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}$ si y sólo si $f(\delta) < 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v$.

Este resultado permite garantizar que (F.2-11) se verifique si se cumplen:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) & (\mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \delta_i \mathbf{A}_{BC,i})^T (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) \\ (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) (\mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \delta_i \mathbf{A}_{BC,i}) & (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) \end{bmatrix} > 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v \quad (\text{F.2-12})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{BC,i}^T \mathbf{P}_i \\ -\mathbf{P}_i \mathbf{A}_{BC,i} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{F.2-13})$$

donde f se ha tomado como el primer miembro de (F.2-11) tras multiplicarlo por -1 (así f es negativa), y siendo (F.2-13) la condición de multiconvexidad.

Es posible obtener un criterio menos conservativo [Gahinet *et al.* 1996; Apkarian y Tuan 1998] introduciendo unas matrices incógnita $\mathbf{M}_{ii} \geq 0 \quad i = 1, \dots, q$ para relajar la condición de multiconvexidad (F.2-13):

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) & (\mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \delta_i \mathbf{A}_{BC,i})^T (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) \\ (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) (\mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \delta_i \mathbf{A}_{BC,i}) & (\mathbf{P}_0 + \sum_i \delta_i \mathbf{P}_i) \end{bmatrix} - \sum_i \delta_i^2 \mathbf{M}_{ii} > 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v \quad (\text{F.2-14})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{BC,i}^T \mathbf{P}_i \\ -\mathbf{P}_i \mathbf{A}_{BC,i} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{ii} \geq 0 \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{F.2-15})$$

F.2.3. Incertidumbre afín en el bucle cerrado y función de Lyapunov con dependencia cuadrática

Siguiendo con la idea de obtener condiciones menos conservadoras, [Trofino y de Souza 1999, 2001] proponen condiciones suficientes (para sistemas continuos y discretos) de estabilidad cuadrática paramétrica admitiendo dependencia cuadrática de $\mathcal{P}(\delta)$ respecto de los parámetros, a la cual denominan estabilidad bicuadrática. El punto de partida de estos resultados, para el caso discreto, es suponer, en el caso que nos ocupa, que el bucle cerrado posee incertidumbre paramétrica afín que puede expresarse en la forma:

$$\mathbf{A}_{BC}(\delta) = \mathbf{A}_{BC,0} + \sum_i \delta_i \mathbf{A}_{BC,i} = \mathbf{A}_{BC,0} + \mathbf{A}_{BC} \Theta \quad (\text{F.2-16})$$

\mathbf{A}_{BC} es una matriz $n \times p$ constante y Θ es una matriz $p \times n$ que depende afínmente de los parámetros. En principio, hay múltiples formas de elección de dichas matrices y de la dimensión p . Por ejemplo:

$$\mathbf{A}_{BC} = [\mathbf{A}_{BC,1} \quad \dots \quad \mathbf{A}_{BC,q}] \quad \Theta = [\delta_1 \mathbf{I}_n \quad \dots \quad \delta_q \mathbf{I}_n]^T \quad (\text{F.2-17})$$

La matriz $\mathcal{P}(\delta)$ toma la forma:

$$\mathcal{P}(\delta) = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 \Theta + \Theta^T \mathbf{P}_1^T + \Theta^T \mathbf{P}_2 \Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Theta^T \end{bmatrix} \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \Theta \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{P} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1^T & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{F.2-18})$$

Finalmente, la condición suficiente para la estabilidad bicuadrática es [Trofino y de Souza 1999]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -P & \bar{A}(\delta)^T P \\ P \bar{A}(\delta) & -P \end{bmatrix} + L \left[\begin{array}{c|c} \Theta & -I \\ \hline \bar{A}(\delta) & -I \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} \Theta & -I \\ \hline \bar{A}(\delta) & -I \end{array} \right]^T L^T > 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v \\ P + M \left[\begin{array}{c|c} \Theta & -I \\ \hline \Theta & -I \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} \Theta & -I \\ \hline \Theta & -I \end{array} \right]^T M^T > 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v \end{aligned} \quad (\text{F.2-19})$$

con:

$$M \in \mathbb{R}^{(n+p) \times p}, \quad L \in \mathbb{R}^{2(n+p) \times (2p+n)}, \quad \bar{A}(\delta) = \begin{bmatrix} A_{BC,0} & \mathcal{A}_{BC} \\ \Theta A_{BC,0} & \Theta \mathcal{A}_{BC} \end{bmatrix} \quad (\text{F.2-20})$$

La segunda LMI de la condición (F.2-19) puede omitirse si el bucle cerrado es estable para el caso nominal $\delta = 0$.

F.2.4. Incertidumbre LFR en el bucle cerrado

Una vez analizado el caso paramétrico afín se pasa a estudiar el caso más general de incertidumbre LFR. Este caso es más complejo que el anterior. En concreto, la técnica más empleada para analizar este caso se denomina *S-procedure* [Yakubovich 1977; Boyd *et al.* 1994; Feron *et al.* 1996; Kothare *et al.* 1996] que establece un condición suficiente para cualquier estructura de Δ . Posteriormente, otros autores han propuesto mejoras a dicho método para reducir su conservadurismo: basadas en el lema de Kalman-Yakubovich-Popov [Helmersson 1999; El Ghaoui y Niculescu 2000] o en el denominado *full block S-procedure* [Scherer 2001; El Ghaoui y Niculescu 2000]. Ambos métodos dan lugar a resultados similares, y, en esta tesis, se va a emplear el segundo de ellos, junto a la dependencia LFR para la función de Lyapunov presentada en [Helmersson 1999]. La mayor parte de los resultados se refieren al caso de sistemas continuos, por ello, éstos han sido extendidos al caso de sistemas discretos empleando los mismos conceptos y técnicas.

Partiendo de la condición de estabilidad cuadrática (6.3-42) suponiendo que P posee dependencia LFR y que el modelo incerto del proceso presenta incertidumbre LFR:

$$A_{BC}(\Delta)^T P(\hat{\Delta}) A_{BC}(\Delta) - P(\hat{\Delta}) < 0 \quad \forall \Delta \in \Delta, \forall \hat{\Delta} \in \hat{\Delta} \quad (\text{F.2-21})$$

$$P(\hat{\Delta}) = T(\hat{\Delta})^T Q T(\hat{\Delta}) > 0 \quad \forall \hat{\Delta} \in \hat{\Delta} \quad (\text{F.2-22})$$

$$T(\hat{\Delta}) = T_A + T_B \hat{\Delta} (I - T_D \hat{\Delta})^{-1} T_C \quad (\text{F.2-23})$$

se obtiene la condición estabilidad cuadrática con dependencia LFR. Nótese que se supone que la estructura de la incertidumbre para P (o T) no tiene que ser igual que la de la matriz A_{BC} , aunque debe depender de los mismos parámetros inciertos (sean reales o complejos). Se supondrá que $T(\hat{\Delta})$ es prefijada de antemano² y la incógnita es la

²Las matrices T_A , T_B , T_C y T_D son elegidas a priori [Helmersson 1999].

matriz Q . La LMI (F.2-22) puede ser suprimida bajo la hipótesis de que el proceso nominal ($\Delta = 0$ y $\hat{\Delta} = 0$) sea asintóticamente estable. La demostración de este hecho puede consultarse en el apéndice F **proposición** F.1.1.

Ahora, se puede trabajar sobre la ecuación (F.2-21) para obtener las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I \\ A_{BC}(\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -P(\hat{\Delta}) & 0 \\ 0 & P(\hat{\Delta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ A_{BC}(\Delta) \end{pmatrix} < 0 \\ & \begin{pmatrix} I \\ A_{BC}(\Delta) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} T(\hat{\Delta})^T & 0 \\ 0 & T(\hat{\Delta})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(\hat{\Delta}) & 0 \\ 0 & T(\hat{\Delta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ A_{BC}(\Delta) \end{pmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (\text{F.2-24})$$

salvo la matriz central el resto son dependientes de la incertidumbre LFR. En concreto, para simplificar la expresión se multiplican dichas matrices, teniendo en cuenta que son LFRs:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T(\hat{\Delta}) & 0 \\ 0 & T(\hat{\Delta}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} T_A & 0 \\ 0 & T_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_B & 0 \\ 0 & T_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\Delta} & 0 \\ 0 & \hat{\Delta} \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \right. \\ & \left. - \begin{pmatrix} T_D & 0 \\ 0 & T_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\Delta} & 0 \\ 0 & \hat{\Delta} \end{pmatrix} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} T_C & 0 \\ 0 & T_C \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F.2-25})$$

$$\begin{pmatrix} I \\ A(\Delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ A_{BC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_{BC,\Delta} \end{pmatrix} \Delta (I - D_{BC,\Delta})^{-1} C_{BC,\Delta} \quad (\text{F.2-26})$$

Para calcular el producto de dos LFRs hay que emplear la fórmula [Dussy y El Ghaoui 1998]:

$$\begin{aligned} G(\Delta) = G_1(\Delta_1) \cdot G_2(\Delta_2) &= M_1 M_2 + \begin{bmatrix} L_1 & M_1 L_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \right. \\ & \left. - \begin{pmatrix} D_1 & R_1 L_2 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} R_1 M_2 \\ R_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F.2-27})$$

siendo:

$$\begin{aligned} G_1(\Delta_1) &= M_1 + L_1 \Delta_1 \{I - D_1 \Delta_1\}^{-1} R_1 \\ G_2(\Delta_2) &= M_2 + L_2 \Delta_2 \{I - D_2 \Delta_2\}^{-1} R_2 \\ \Delta &= \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F.2-28})$$

dando lugar a:

$$G(\hat{\Delta}) = \begin{pmatrix} T(\hat{\Delta}) & 0 \\ 0 & T(\hat{\Delta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ A_{BC}(\Delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_A \\ T_A A_{BC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_B & 0 & 0 \\ 0 & T_B & T_A B_{BC,\Delta} \end{pmatrix} \hat{\Delta} \left\{ I - \right.$$

$$- \left(\begin{array}{ccc} T_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_D & T_C \mathbf{B}_{BC,\Delta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{BC,\Delta} \end{array} \right) \tilde{\Delta} \Bigg\}^{-1} \begin{pmatrix} T_C \\ T_C A_{BC} \\ C_{BC,\Delta} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Delta} = \text{diag}(\hat{\Delta}, \hat{\Delta}, \Delta) \quad (\text{F.2-29})$$

Con este cálculo la ecuación (F.2-24) queda:

$$\mathbf{G}(\tilde{\Delta})^T \begin{pmatrix} -Q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{pmatrix} \mathbf{G}(\tilde{\Delta}) < 0 \quad \forall \tilde{\Delta} \in \hat{\Delta} \triangleq \text{diag}(\hat{\Delta}, \hat{\Delta}, \Delta)$$

En este punto se aplica la técnica *full block S-procedure* [El Ghaoui y Niculescu 2000]:

LEMA F.2.2 (FULL BLOCK S-PROCEDURE) *Sea \mathcal{S} un subespacio de \mathbb{R}^n , $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{l \times n}$ una matriz con rango completo de filas y $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{k \times l}$ un conjunto compacto de matrices. Se definen los siguientes subespacios:*

$$\mathcal{S}_U \triangleq \mathcal{S} \cap \text{nucleo}(\mathbf{U}\mathbf{R}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{S} : \mathbf{U}\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{S} : \mathbf{T}\mathbf{x} \in \text{nucleo}(\mathbf{U})\} \quad (\text{F.2-30})$$

indexados por la matriz $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$. Sea $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica fija, y \mathcal{S}_0 un subespacio fijo de \mathcal{S} con $\dim(\mathcal{S}_0) \geq k$. Entonces:

$$\forall \mathbf{U} \in \mathcal{U} : \mathcal{S}_U \cap \mathcal{S}_0 = \{\mathbf{0}\} \text{ y } \mathbf{N} < 0 \text{ sobre } \mathcal{S}_U \quad (\text{F.2-31})$$

si y sólo si existe un multiplicador simétrico \mathbf{V} que satisfice:

$$\forall \mathbf{U} \in \mathcal{U} : \mathbf{N} + \mathbf{R}^T \mathbf{V} \mathbf{R} < 0 \text{ sobre } \mathcal{S} \text{ y } \mathbf{P} > 0 \text{ sobre } \text{nucleo}(\mathbf{U}) \quad (\text{F.2-32})$$

Esta técnica puede aplicarse a la condición (F.2.4) empleando los siguientes valores para los parámetros del resultado anterior:

$$\mathcal{U} = \left\{ \left(\mathbf{I} - \tilde{\Delta} \right) : \tilde{\Delta} \in \hat{\Delta} \right\} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{S} = \text{Span} \begin{pmatrix} T_A & T_B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ T_A A_{BC} & \mathbf{0} & T_B & T_A B_{BC,\Delta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ T_C & T_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ T_C A_{BC} & \mathbf{0} & T_D & T_C B_{BC,\Delta} \\ C_{BC,\Delta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix} \quad \mathcal{S}_0 = \text{Span} \begin{pmatrix} T_B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_B & T_A B_{BC,\Delta} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ T_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_D & T_C B_{BC,\Delta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \left(\begin{array}{cc|c} -Q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right) \quad (\text{F.2-33})$$

obteniéndose las siguientes condiciones necesarias y suficientes de estabilidad cuadrática con dependencia LFR:

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ \hline * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}^T \left(\begin{array}{cc|c} -Q & 0 & 0 \\ 0 & Q & \\ \hline 0 & & V \end{array} \right) \begin{pmatrix} T_A & T_B & 0 & 0 \\ T_A A_{BC} & 0 & T_B & T_A B_{BC,\Delta} \\ \hline 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ T_C & T_D & 0 & 0 \\ T_C A_{BC} & 0 & T_D & T_C B_{BC,\Delta} \\ C_{BC,\Delta} & 0 & 0 & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \\ I \end{pmatrix}^T V \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \\ I \end{pmatrix} > 0 \quad \forall \tilde{\Delta} \in \tilde{\Delta} \quad (\text{F.2-34})$$

para verificar las infinitas LMIs correspondientes al multiplicador V [Scherer 2001; El Ghaoui y Niculescu 2000] hay que emplear, de nuevo, la condición de multiconvexidad presentada en la sección F.2.2 y suponer que el conjunto $\tilde{\Delta}$ viene determinado por la envoltura convexa de un número finito de matrices:

$$\tilde{\Delta} = \text{Co}\{\mathcal{X}_{\tilde{\Delta}}\} \quad ; \quad \mathcal{X}_{\tilde{\Delta}} \triangleq \{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_r\} \quad (\text{F.2-35})$$

V se descompone en la forma:

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12}^T & V_{22} \end{bmatrix}$$

dando lugar a las LMIs:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \\ I \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12}^T & V_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \\ I \end{pmatrix} > 0 \quad \tilde{\Delta} \in \tilde{\Delta}$$

$$\tilde{\Delta}^T V_{11} \tilde{\Delta} + V_{12} \tilde{\Delta} + (V_{12} \tilde{\Delta})^T + V_{22} > 0 \quad (\text{F.2-36})$$

que son cuadráticas en la incertidumbre y, por tanto, son no convexas. Sin embargo, imponiendo multiconvexidad estas LMIs se cumplen si se verifican las siguientes condiciones suficientes basadas en un número finito de LMIs:

$$\tilde{\Delta}^T V_{11} \tilde{\Delta} + V_{12} \tilde{\Delta} + (V_{12} \tilde{\Delta})^T + V_{22} > 0 \quad \forall \tilde{\Delta} \in \mathcal{X}_{\tilde{\Delta}} \quad (\text{F.2-37})$$

$$V_{11} < 0 \quad (\text{F.2-38})$$

F.3. Condiciones de satisfacción de normas

F.3.1. Norma ∞

Un aspecto a tener en cuenta es que si un sistema posee una norma ∞ finita entonces éste es asintóticamente estable. Este hecho puede deducirse de la LMI (6.3-72) cuando se premultiplica por $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y se postmultiplica por la traspuesta de esta matriz:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T P A - P + C^T C & A^T P B + C^T D \\ B^T P A + D^T C & D^T D + B^T P B - \gamma^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T < 0$$

$$\begin{pmatrix} A^T P A - P + C^T C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} < 0$$

$$A^T P A - P + C^T C < 0$$

como $C^T C \geq 0$ se obtiene:

$$A^T P A - P < 0 \tag{F.3-1}$$

que es la condición de estabilidad cuadrática para procesos discretos.

F.3.1.1. Cálculo de la norma ∞

En esta sección se presentan las LMIs que permitirán obtener cotas superiores para la norma infinito para diferentes tipos de incertidumbre y funciones de Lyapunov. Por brevedad se omitirá su deducción y sólo se presentarán los resultados finales. La deducción de estos resultados es análogo al caso de las condiciones de estabilidad robusta cuando se emplea la expresión (6.3-73).

- Incertidumbre paramétrica afín real con función de Lyapunov constante:

$$\mathcal{G} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A_{BC} & B_{BC,r} \\ \hline C_{BC,y} & D_{BC,yr} \end{array} \right) : A_{BC} = A_{BC,0} + \sum_{i=1}^q \delta_i A_{BC,i}, B_{BC,r} = B_{BC,r,0} + \sum_{i=1}^q \delta_i B_{BC,r,i}, \right.$$

$$\left. C_{BC,y} = C_{BC,y,0} + \sum_{i=1}^q \delta_i C_{BC,y,i}, D_{BC,yr} = D_{BC,yr,0} + \sum_{i=1}^q \delta_i D_{BC,yr,i}, \delta_i^- \leq \delta_i \leq \delta_i^+ \quad \forall i \right\} \tag{F.3-2}$$

calculándose su norma infinito así:

$$\gamma^* = \min_{\gamma, P} \gamma$$

$$\begin{pmatrix} P & A_{BC}(\delta)^T P & C_{BC,y}(\delta)^T & 0 \\ PA_{BC}(\delta) & P & 0 & -PB_{BC,r}(\delta) \\ C_{BC,y}(\delta) & 0 & \gamma I & -D_{BC,yr}(\delta) \\ 0 & -B_{BC,r}^T(\delta)P & -D_{BC,yr}^T(\delta) & \gamma I \end{pmatrix} > 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v \quad (\text{F.3-3})$$

- Incertidumbre paramétrica afín real con función de Lyapunov afín:

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \min_{\gamma, P_0, \dots, P_q} \gamma \\ \begin{pmatrix} P(\delta) & A_{BC}(\delta)^T P(\delta) & C_{BC,y}(\delta)^T & 0 \\ P(\delta)A_{BC}(\delta) & P(\delta) & 0 & -P(\delta)B_{BC,r}(\delta) \\ C_{BC,y}(\delta) & 0 & \gamma I & -D_{BC,yr}(\delta) \\ 0 & -B_{BC,r}^T(\delta)P(\delta) & -D_{BC,yr}^T(\delta) & \gamma I \end{pmatrix} - \sum_i \delta_i^2 M_{ii} &> 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v \\ \begin{pmatrix} 0 & -A_{BC,i}^T P_i & 0 & 0 \\ -P_i A_{BC,i} & 0 & 0 & P_i B_{BC,r,i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{BC,r,i} P_i & 0 & 0 \end{pmatrix} + M_{ii} &\geq 0 \quad i = 1, \dots, q \\ M_{ii} &\geq 0 \quad ; \quad P(\delta) = P_0 + \sum_i \delta_i P_i \end{aligned} \quad (\text{F.3-4})$$

- Incertidumbre paramétrica afín real con función de Lyapunov cuadrática:

El modelo incierto se asume con la estructura:

$$\mathbf{x}(k+1) = (A_{BC} + \mathcal{A}_{BC}\Theta) \mathbf{x}(k) + (B_{BC} + \mathcal{B}_{BC,r}\Theta^B) \omega(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = (C_{BC,y} + \mathcal{C}_{BC,y}\Theta) \mathbf{x}(k) + (D_{BC,yr} + \mathcal{D}_{BC,yr}\Theta^B) \omega(k)$$

$C_{BC,y}, \mathcal{D}_{BC,yr} \in \mathbb{R}^{r \times p}$, r es el número de salidas

$$\mathcal{A}_{BC}, \mathcal{B}_{BC,r} \in \mathbb{B}^{n \times p}, \quad \Theta \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad \Theta^B \in \mathbb{R}^{p \times m}, \quad m \text{ es el número de entradas} \quad (\text{F.3-5})$$

las matrices de incertidumbre Θ y Θ^B dependen afínmente de los parámetros δ_i .

Con este modelo y dependencia cuadrática para la función de Lyapunov, una cota superior para la norma infinito entre ω y \mathbf{y} viene dada por:

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \min_{\gamma, P, L, M} \gamma \\ \begin{bmatrix} -P + \bar{C} & \bar{C}\bar{D} & \bar{A}^T P \\ \bar{C}\bar{D}^T & \bar{D} - \begin{pmatrix} \gamma^2 I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \bar{B}^T P \\ P\bar{A} & P\bar{B} & -P \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \Theta & -I & 0 & 0 \\ 0 & \Theta^B & -I & 0 \\ \bar{A} & \bar{B} & -I & \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \Theta & -I & 0 & 0 \\ 0 & \Theta^B & -I & 0 \\ \bar{A} & \bar{B} & -I & \end{bmatrix}^T & L^T < 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & P + M \begin{bmatrix} \Theta & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta & -I \end{bmatrix}^T M^T > 0 \quad \forall \delta \in \mathcal{V}_v \\
 & \bar{A} = \begin{pmatrix} A_{BC} & \mathcal{A}_{BC} \\ \Theta A_{BC} & \Theta \mathcal{A}_{BC} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B_{BC,r} & \mathcal{B}_{BC,r} \\ \Theta B_{BC,r} & \Theta \mathcal{B}_{BC,r} \end{pmatrix} \\
 & \overline{CD} = \begin{pmatrix} C_{BC,y}^T D_{BC,yr} & C_{BC,y}^T \mathcal{D}_{BC,yr} \\ C_{BC,y}^T D_{BC,yr} & C_{BC,y}^T \mathcal{D}_{BC,yr} \end{pmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{pmatrix} D_{BC,yr}^T D_{BC,yr} & D_{BC,yr}^T \mathcal{D}_{BC,yr} \\ D_{BC,yr}^T D_{BC,yr} & D_{BC,yr}^T \mathcal{D}_{BC,yr} \end{pmatrix} \\
 & M \in \mathbb{R}^{(n+p) \times p}, \quad L \in \mathbb{R}^{(2n+m+3p) \times (3p+n)}, \quad P = P^T \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)} \quad (\text{F.3-6})
 \end{aligned}$$

- Incertidumbre LFR con función de Lyapunov con dependencia LFR.

Hay que recordar el modelo con incertidumbre LFR (6.3-36):

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{BC} & B_{BC,r} \\ \hline C_{BC,y} & D_{BC,yr} \end{array} \right) + \begin{pmatrix} B_{BC,\Delta} \\ D_{BC,y\Delta} \end{pmatrix} \Delta (I - D_{BC,\Delta} \Delta)^{-1} \begin{pmatrix} C_{BC,\Delta} & D_{BC,\Delta r} \end{pmatrix} \quad (\text{F.3-7})$$

Para esta incertidumbre y empleando la técnica full block S-procedure se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \gamma^* = \min_{\gamma, Q, V} \gamma \\
 & \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}^T \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} -Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & Q & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\gamma^2 I_m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & V \end{array} \right) \begin{pmatrix} T_A & 0 & T_B & 0 & 0 \\ T_A A_{BC} & T_A B_{BC,r} & 0 & T_B & T_A B_{BC,\Delta} \\ \hline 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ C_{BC,y} & D_{BC,yr} & 0 & 0 & D_{BC,y\Delta} \\ \hline 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ T_C & 0 & T_D & 0 & 0 \\ T_C A_{BC} & T_C B_{BC,r} & 0 & T_D & T_C B_{BC,\Delta} \\ C_{BC,\Delta} & D_{BC,\Delta r} & 0 & 0 & D_{BC,\Delta} \end{pmatrix} < 0 \\
 & \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \\ I \end{pmatrix}^T V \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} \\ I \end{pmatrix} > 0 \quad \forall \tilde{\Delta} \in \{\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_r\}, \quad V_{11} < 0 \quad (\text{F.3-8})
 \end{aligned}$$

APÉNDICE **G**

Resultados sobre modelos LPV identificados

G.1. Existencia y cálculo del estado del proceso en equilibrio

En el capítulo 7 se ha justificado que la existencia de \mathbf{x}_p^{eq} está asociada a la resolución de la ecuación diferencial vectorial:

$$\begin{bmatrix} (I - A(\bar{y})) \\ C(\bar{y}) \end{bmatrix} \frac{d\mathbf{x}_p^{eq}(\bar{y})}{d\bar{y}} = \begin{pmatrix} B(\bar{y}) \frac{d\bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{y})}{d\bar{y}} \\ I \end{pmatrix} \quad (\text{G.1-1})$$

Como ya se comentó, se trata de un sistema de $n + r$ ecuaciones con r incógnitas. Dicho sistema tendrá solución si hay, al menos, n ecuaciones dependientes del resto, o equivalentemente:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} (I - A(\bar{y})) & B(\bar{y}) \frac{d\bar{\mathbf{u}}^{eq}(\bar{y})}{d\bar{y}} \\ C(\bar{y}) & I \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} (I - A(\bar{y})) \\ C(\bar{y}) \end{bmatrix} \quad (\text{G.1-2})$$

Para el caso de dos salidas, dada la particular estructura de las matrices $A(\bar{y})$ y $C(\bar{y})$, la cuestión reside en justificar que en la matriz siguiente hay $n = 2$ filas dependientes del resto:

$$\begin{bmatrix} (I - A(\bar{y})) & B(\bar{y}) \frac{d\bar{u}^{eq}(\bar{y})}{d\bar{y}} \\ C(\bar{y}) & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} - A_1(y_1) & \mathbf{0} & B_1(\bar{y}) \frac{\partial \bar{u}^{eq}}{\partial y_1} & B_1(\bar{y}) \frac{\partial \bar{u}^{eq}}{\partial y_2} \\ \mathbf{0} & I_{n_2} - A_2(y_2) & B_2(\bar{y}) \frac{\partial \bar{u}^{eq}}{\partial y_1} & B_2(\bar{y}) \frac{\partial \bar{u}^{eq}}{\partial y_2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{G.1-3})$$

Para el caso de que los modelos identificados no tienen integradores, entonces es fácil justificar que hay exactamente dos filas dependientes del resto si y sólo si:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \sum_{i=0}^{n_1-1} a_{i,1}(\bar{y})} \sum_{\text{filas}} B_1(\bar{y}) \\ \sum_{\text{filas}} B_2(\bar{y}) \end{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}^{eq}(\bar{y})}{\partial y_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \sum_{i=0}^{n_2-1} a_{i,2}(\bar{y})} \sum_{\text{filas}} B_2(\bar{y}) \\ \sum_{\text{filas}} B_1(\bar{y}) \end{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}^{eq}(\bar{y})}{\partial y_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{G.1-4})$$

Estas condiciones son fácilmente extensible al caso de mayor número de salidas.

Para el caso particular de que alguno de los modelos correspondientes a una salida tuviese algún integrador, por ejemplo, la número 1, entonces su correspondiente condición sería:

$$\begin{bmatrix} \sum_{\text{filas}} B_1(\bar{y}) \\ \sum_{\text{filas}} B_2(\bar{y}) \end{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}^{eq}(\bar{y})}{\partial y_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{G.1-5})$$

Posteriormente en el capítulo 7 se analiza que para que el sistema de ecuaciones en derivadas parciales tenga solución se deben de cumplir las condiciones de Cauchy-Schwarz relativas a las derivadas segundas. Una vez, que se ha justificado que la solución existe, hay que integrar dichas ecuaciones. Se va a esbozar como obtener una solución para el caso de tener sólo dos salidas, $n = 2$, aunque el método es perfectamente válido para un mayor número.

Sea el sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\frac{\partial \mathbf{x}_p^{eq}}{\partial y_1} = \begin{bmatrix} (I - A(\bar{y})) \\ C(\bar{y}) \end{bmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} B(\bar{y}) \frac{\partial \bar{u}^{eq}(\bar{y})}{\partial y_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f_1(y_1, y_2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_p^{eq}}{\partial y_2} = \begin{bmatrix} (I - A(\bar{y})) \\ C(\bar{y}) \end{bmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} B(\bar{y}) \frac{\partial \bar{u}^{eq}(\bar{y})}{\partial y_2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f_2(y_1, y_2) \quad (\text{G.1-6})$$

Es importante observar que las funciones f_1 y f_2 presentan una dependencia LFR con respecto de y_1 e y_2 .

Si se integra la primera ecuación con respecto de y_1 se obtiene que el estado en equilibrio debe tener la forma:

$$\mathbf{x}_p^{eq} = \int f_1(y_1, y_2) dy_1 + \mathbf{g}(y_2) \quad (\text{G.1-7})$$

donde \mathbf{g} puede ser cualquier función arbitraria de y_2 . Si esta fórmula se sustituye en la segunda ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial y_2} \int f_1(y_1, y_2) dy_1 + \frac{d\mathbf{g}}{dy_2} = f_2(y_1, y_2) \quad (\text{G.1-8})$$

lo cual permite obtener la función \mathbf{g} integrando con respecto de y_2 esta última ecuación:

$$\mathbf{g}(y_2) = \int f_2(y_1, y_2) dy_2 - \int \left(\frac{\partial}{\partial y_2} \int f_1(y_1, y_2) dy_1 \right) dy_2 \quad (\text{G.1-9})$$

Con lo que una solución del sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales es:

$$\mathbf{x}_p^{eq} = \int f_1(y_1, y_2) dy_1 + \int f_2(y_1, y_2) dy_2 - \int \left(\frac{\partial}{\partial y_2} \int f_1(y_1, y_2) dy_1 \right) dy_2 \quad (\text{G.1-10})$$

Es posible justificar que todas las soluciones de este sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se diferencian en una constante arbitraria. La fórmula presentada proporciona una de ellas, cualquier otra se puede obtener sumando una constante cualquiera.

De este resultado se deduce que para resolver dicho sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales basta con saber integrar y derivar funciones matriciales con dependencia LFR. La derivación es el procedimiento más sencillo, y se puede deducir la siguiente fórmula para la misma:

$$\begin{aligned} G(\Delta(z)) &= M + L\Delta(z) (I - D\Delta(z))^{-1} R \\ \frac{dG}{dz} &= L \frac{d\Delta(z)}{dz} R + \begin{bmatrix} L & L \frac{d\Delta(z)}{dz} D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & \Delta(z) \end{pmatrix} \\ &\cdot \left(I - \begin{bmatrix} D & D \frac{d\Delta(z)}{dz} D \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & \Delta(z) \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} D \frac{d\Delta(z)}{dz} R \\ R \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{G.1-11})$$

como G depende fraccionalmente con respecto de z entonces $\Delta(z)$ sólo puede depender afínmente de z , con lo cual se garantiza que la derivada vuelve a ser una representación LFR con respecto de z .

La integración resulta un tanto más compleja, y tiene como principal característica, que, en general, no conduce a una representación con dependencia LFR:

$$\int G(\Delta(z)) dz = \int \left(M + L\Delta(z) (I - D\Delta(z))^{-1} R \right) dz \quad (\text{G.1-12})$$

Si la matriz D es invertible, es decir, todos sus valores propios son distintos de cero, entonces se puede mostrar que la integral tiene la expresión:

$$\begin{aligned} \int G(\Delta(z))dz &= \int \left(M + L \left(-D^{-1} + D^{-1} (I - D\Delta(z))^{-1} \right) R \right) dz = \\ &= (M - LD^{-1}R)z + \int \left(D^{-1} (I - D\Delta(z))^{-1} R \right) dz = \\ &= (M - LD^{-1}R)z - D^{-2} \log m (I - D\Delta(z)) R \end{aligned} \quad (\text{G.1-13})$$

donde el último paso requiere conocer que la primitiva de $-D(I - D\Delta(z))^{-1}$ es la función logaritmo matricial $\log m (I - D\Delta(z))$. En todo el desarrollo se ha supuesto que $\Delta(z) = Iz$, lo cual no resta generalidad al resultado.

En el caso de que D no sea invertible, es decir, tenga algún valor propio en cero, entonces la cosa se vuelve más complicada. En primer lugar se debe calcular su descomposición de Schur real que se puede obtener con la función *schur* de Matlab, y ordenar los elementos de la matriz¹ de tal forma que ésta adopte la estructura siguiente:

$$D = T^T \begin{pmatrix} D_I & D_{1,2} \\ 0 & D_0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} T_{1c}^T & T_{1c}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_I & D_{1,2} \\ 0 & D_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1f} \\ T_{1f} \end{pmatrix} \quad (\text{G.1-14})$$

siendo D_0 una matriz que sólo tiene valores propios en cero, es decir, una matriz nilpotente, y D_I una matriz invertible. Con esta descomposición, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta(z) (I - D\Delta(z))^{-1} &= T^T z \begin{pmatrix} I - D_I z & -D_{1,2} z \\ 0 & I - D_0 z \end{pmatrix}^{-1} T = \\ &= T_{1c}^T z (I - D_I z)^{-1} T_{1f} + T_{1c}^T z (I - D_I z)^{-1} D_{1,2} z (I - D_0 z)^{-1} T_{2f} + T_{2c}^T z (I - D_0 z)^{-1} T_{2f} \end{aligned} \quad (\text{G.1-15})$$

Como la matriz D_0 es nilpotente entonces existe $k > 0$ tal que $D_0^k \neq 0$ y $D_0^{k+1} = 0$. En tal caso se tiene que:

$$(I - D_0 z)^{-1} = I + D_0 z + D_0^2 z^2 + D_0^3 z^3 + \dots + D_0^k z^k \quad (\text{G.1-16})$$

Tras todos estos cálculos se obtiene que:

$$\begin{aligned} G(z) &= M + L T_{1c}^T T_{1c}^T z (I - D_I z)^{-1} T_{1f} R + L T_{1c}^T (I - D_I z)^{-1} D_{1,2} (I z^2 + \\ &+ D_0 z^3 + \dots + D_0^k z^{k+2}) T_{2f} R + L T_{2c}^T (I z + D_0 z^2 + D_0^2 z^3 + \dots + D_0^k z^{k+1}) T_{2f} R \end{aligned} \quad (\text{G.1-17})$$

como ahora D_I es invertible se puede aplicar el método expuesto para el caso en que D es invertible. La única salvedad es que hay que tener en cuenta que:

$$z^j (I - D_I z)^{-1} = -D_I^{-1} z^{j-1} - D_I^{-2} z^{j-2} - \dots - D_I^{-j} + D_I^{-j} (I - D_I z)^{-1} \quad (\text{G.1-18})$$

¹ Con la función *orschur* sólo disponible en Matlab 7.0.1.

G.2. Existencia del estado del controlador en equilibrio

Para garantizar que el controlador global coincida al ser linealizado en cada punto de funcionamiento con el controlador local, el estado del controlador en equilibrio deberá satisfacer la ecuación diferencial vectorial:

$$\begin{bmatrix} I - AS^c(\bar{y}) \\ CS^c(\bar{y}) \end{bmatrix} \frac{d\mathbf{x}_c^{eq}(\bar{y})}{d\bar{y}} = \begin{pmatrix} BS_r^c(\bar{y}) + BS_y^c(\bar{y}) \\ \frac{d\bar{\mathbf{u}}^{eq}}{d\bar{y}} - D_r^c(\bar{y}) - D_y^c(\bar{y}) \end{pmatrix} \quad (\text{G.2-1})$$

Esta ecuación vectorial tiene r_c incógnitas, las componentes del vector \mathbf{x}_c^{eq} , mientras que hay un total de $r_c + m$ ecuaciones escalares, donde m representa el número de entradas manipulables en el proceso. Cuando se diseña el controlador GPC-LPV se garantiza que el número de integradores coincide con el número de salidas controladas n , pero de forma implícita se ha realizado la suposición de que $m \geq n$, ya que de lo contrario el GPC-LPV no podría poseer n integradores. En el resto de la sección se va a suponer que $n = m$, y sólo al final se realizará un breve comentario acerca de las diferencias que tienen lugar cuando $m > n$. Como ya se analizó en la sección anterior, para que este sistema tenga solución debe de cumplirse que:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} I - AS^c(\bar{y}) \\ CS^c(\bar{y}) \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} I - AS^c(\bar{y}) & BS_r^c(\bar{y}) + BS_y^c(\bar{y}) \\ CS^c(\bar{y}) & \frac{d\bar{\mathbf{u}}^{eq}}{d\bar{y}} - D_r^c(\bar{y}) - D_y^c(\bar{y}) \end{bmatrix} \quad (\text{G.2-2})$$

En el capítulo 7 se justificó que la matriz de estado del controlador GPC-LPV tiene la estructura:

$$AS^c(\bar{y}) = \begin{pmatrix} A^{c'}(\bar{y}) & Z(\bar{y}) \\ \mathbf{0} & I_n \end{pmatrix} \quad (\text{G.2-3})$$

y que las matrices $BS_r^c(\bar{y})$ y $BS_y^c(\bar{y})$:

$$BS_r^c(\bar{y}) = \begin{pmatrix} BS_r^{c'}(\bar{y}) \\ X(\bar{y}) \end{pmatrix} ; \quad BS_y^c(\bar{y}) = \begin{pmatrix} BS_y^{c'}(\bar{y}) \\ -X(\bar{y}) \end{pmatrix} \quad (\text{G.2-4})$$

lo cual supone que la condición anterior sea equivalente a:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} I - AS^{c'}(\bar{y}) & -Z(\bar{y}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_n \\ CS^c(\bar{y}) \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} I - AS^{c'}(\bar{y}) & -Z(\bar{y}) & \begin{pmatrix} BS_r^{c'}(\bar{y}) \\ X(\bar{y}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} BS_y^{c'}(\bar{y}) \\ -X(\bar{y}) \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_n & \frac{d\bar{\mathbf{u}}^{eq}}{d\bar{y}} - D_r^c(\bar{y}) - D_y^c(\bar{y}) \\ CS^c(\bar{y}) \end{bmatrix} \quad (\text{G.2-5})$$

Esta condición es pues equivalente a:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} I - AS^{c'}(\bar{y}) & -Z(\bar{y}) \\ CS^c(\bar{y}) & \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} I - AS^{c'}(\bar{y}) & -Z(\bar{y}) & BS_r^{c'}(\bar{y}) + BS_y^{c'}(\bar{y}) \\ CS^c(\bar{y}) & \frac{d\bar{u}^{eq}}{d\bar{y}} - D_r^c(\bar{y}) - D_y^c(\bar{y}) \end{bmatrix} \quad (\text{G.2-6})$$

Como ambas matrices tiene el mismo número de filas, y, además, la primera es cuadrada ($m = n$), basta con justificar que la primera tiene rango completo para que la condición anterior se cumpla. La matriz $AS^{c'}$ no tiene nunca valores propios en uno por construcción, por tanto $I - AS^{c'}$ tiene rango completo. Por otro lado, la matriz CS^c tiene rango completo de filas ya que cada una de ellas se corresponde a una entrada manipulable distinta, y que es lógico suponer, a priori, que cada entrada afecta de forma independiente al sistema. Finalmente, de una forma general no se puede garantizar que la matriz:

$$\begin{bmatrix} I - AS^{c'}(\bar{y}) & -Z(\bar{y}) \\ CS^c(\bar{y}) & \end{bmatrix} \quad (\text{G.2-7})$$

tenga rango completo, pero parece bastante razonable suponer que así sea. En todos los ejemplos desarrollados en esta tesis se ha comprobado que esta hipótesis es correcta. De este resultado se deduce que el sistema de ecuaciones (7.5-13) siempre tiene solución para $m = n$, y, además, esta es única y viene dada por:

$$\frac{dx_c^{eq}(\bar{y})}{d\bar{y}} = \begin{bmatrix} I - AS^{c'}(\bar{y}) & -Z(\bar{y}) \\ CS^c(\bar{y}) & \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{array}{c} BS_r^{c'}(\bar{y}) + BS_y^{c'}(\bar{y}) \\ \frac{d\bar{u}^{eq}}{d\bar{y}} - D_r^c(\bar{y}) - D_y^c(\bar{y}) \end{array} \right) \quad (\text{G.2-8})$$

El siguiente paso para garantizar la existencia de solución para este sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales es exigir el cumplimiento de las condiciones de Cauchy-Schwarz sobre las derivadas segundas:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \begin{bmatrix} I - AS^{c'}(\bar{y}) & -Z(\bar{y}) \\ CS^c(\bar{y}) & \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{array}{c} BS_r^{c'}(\bar{y})_{\text{col } j} + BS_y^{c'}(\bar{y})_{\text{col } j} \\ \frac{\partial \bar{u}^{eq}}{\partial y_j} - D_r^c(\bar{y})_{\text{col } j} - D_y^c(\bar{y})_{\text{col } j} \end{array} \right)}{\partial y_j} = \\ & = \frac{\partial \begin{bmatrix} I - AS^{c'}(\bar{y}) & -Z(\bar{y}) \\ CS^c(\bar{y}) & \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{array}{c} BS_r^{c'}(\bar{y})_{\text{col } k} + BS_y^{c'}(\bar{y})_{\text{col } k} \\ \frac{\partial \bar{u}^{eq}}{\partial y_k} - D_r^c(\bar{y})_{\text{col } k} - D_y^c(\bar{y})_{\text{col } k} \end{array} \right)}{\partial y_k} \quad i \neq k = 1, \dots, n \quad (\text{G.2-9}) \end{aligned}$$

Para poder deducir qué condiciones se han de cumplir para satisfacer esta equivalencia entre derivadas parciales segundas, va a ser necesario obtener, en primer lugar, la expresión mediante dependencia LFR de:

$$\begin{bmatrix} I - AS^{c'}(\bar{y}) & -Z(\bar{y}) \\ CS^c(\bar{y}) & \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{array}{c} BS_r^{c'}(\bar{y}) + BS_y^{c'}(\bar{y}) \\ \frac{d\bar{u}^{eq}}{d\bar{y}} - D_r^c(\bar{y}) - D_y^c(\bar{y}) \end{array} \right) \quad (\text{G.2-10})$$

Una vez disponible esta dependencia se puede aplicar la fórmula deducida antes para la derivada de una LFR, e imponer la igualdad entre derivadas. El desarrollo es bastante engorroso y presenta expresiones de gran tamaño que no han sido incluidas en el apéndice por cuestiones de simplificación. Las condiciones suficientes deducidas que se requieren para que se verifique la igualdad entre derivadas parciales son:

1. $D_{\Delta,r}^c + D_{\Delta,y}^c = 0$.
2. $CS_{\Delta}^c X^{-1} \begin{bmatrix} BS_r^{c'} + BS_y^{c'} & 0 \\ D_y^c + D_y^c & L_u \end{bmatrix} = 0$
3. $D_{\Delta}^c + CS_{\Delta}^c X^{-1} BS_{\Delta}^c = 0$.
4. $D_{\Delta}^c \frac{\partial \Delta_{eq}(\bar{y})}{\partial y_1} D_{\Delta}^c = D_{\Delta}^c \frac{\partial \Delta_{eq}(\bar{y})}{\partial y_2} D_{\Delta}^c$.

donde:

$$X = \begin{bmatrix} I - A^{c'} & -Z \\ & CS^c \end{bmatrix} \quad (\text{G.2-11})$$

$\Delta_{eq}(\bar{y})$ es la matriz delta correspondiente a los puntos de equilibrio ajustados con dependencia LFR:

$$\bar{u}^{eq}(\bar{y}) = M_u + L_u \Delta_{eq}(\bar{y}) (I - D_u \Delta_{eq}(\bar{y}))^{-1} R_u \quad (\text{G.2-12})$$

Finalmente, queda comentar que ocurre en los casos en que $m > n$. En primer lugar, en el capítulo 4 se justificó que cuando hay más acciones de control que salidas controladas, puede ocurrir que la ley de control no tenga solución única y sea necesario elegir alguna solución concreta. Este hecho puede generar dudas a la hora de obtener un GPC-LPV a partir del GPC LTI, ya que no hay forma sencilla de elegir aquella solución que pueda ser "más favorable". En lo que corresponde a la existencia de soluciones para x_c^{eq} , la condición necesaria:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} I - AS^{c'}(\bar{y}) & -Z(\bar{y}) \\ & CS^c(\bar{y}) \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} I - AS^{c'}(\bar{y}) & -Z(\bar{y}) & BS_r^{c'}(\bar{y}) + BS_y^{c'}(\bar{y}) \\ & CS^c(\bar{y}) & \frac{d\bar{u}^{eq}}{d\bar{y}} - D_r^c(\bar{y}) - D_y^c(\bar{y}) \end{bmatrix} \quad (\text{G.2-13})$$

puede ocurrir que no se cumpla, ya que ahora la primera matriz sólo tiene rango completo de columnas (r_c), puesto que el número de filas es mayor ($r_c + m - n$). Esto permite que el rango de la segunda matriz pueda ser mayor que r_c , ya que tiene un mayor número de columnas ($r_c + n$). Por tanto, de forma general y a priori no hay forma de garantizar que exista solución. Lo que si se puede hacer es tratar de imponer durante la fase de diseño que esta condición se cumpla, lo cual se conseguiría si es posible encontrar una matriz

H función de \bar{y} tal que:

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{BS}_r^{c'}(\bar{y}) + \mathbf{BS}_y^{c'}(\bar{y}) \\ \frac{d\bar{u}^{eq}}{d\bar{y}} - \mathbf{D}_r^c(\bar{y}) - \mathbf{D}_y^c(\bar{y}) \end{array} \right) = \mathbf{H}(\bar{y}) \left[\begin{array}{c} \mathbf{I} - \mathbf{AS}^{c'}(\bar{y}) \quad -\mathbf{Z}(\bar{y}) \\ \mathbf{CS}^c(\bar{y}) \end{array} \right] \quad (\text{G.2-14})$$

Esta última condición es muy compleja para ser introducida de forma sencilla en el diseño.

Bibliografía

- ABEDOR, J., K. NAGPAL, y K. POOLLA. Linear Matrix Inequality approach to peak-to-peak gain minimization. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:899-927, 1996.
- AGUADO, A. y M. MARTÍNEZ. *Identificación y Control Adaptativo* (Prentice-Hall España, 2003).
- ALBERTOS, P. y R. ORTEGA. On generalized predictive control: Two alternative formulations. *Automatica*, 25(5):753-755, 1989.
- ANGELI, D., A. CASAVOLA, y E. MOSCA. Constrained predictive control of nonlinear plants via polytopic linear system embedding. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10:1091-1103, 2000.
- ANSAY, P. y V. WERTZ. Model uncertainties in GPC: A systematic two-step design. En *Proceedings of ECC* (Bruselas (Bélgica), 1997).
- AOYAMA, A., G. BELL, y S. P. WALSH. Implementation issues in quadratic model predictive control. En *American Control Conference (ACC'97)*, págs. 3375-3379 (1997).
- APKARIAN, P., P. C. PELLANDA, y H. D. TUAN. Mixed H_2/H_∞ multichannel linear parameter-varying control in discrete time. *Systems & Control Letters*, 41:333-346, 2000.
- APKARIAN, P. y H. D. TUAN. Parametrized LMIs in Control Theory. En *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, págs. 152-157 (1998).
- ASTROM, K. J. y B. WITTENMARK. *Computer Controlled Systems. Theory and Design* (Prentice Hall Information and Systems Sciences Series, 1997).
- BADGWELL, T. Robust model predictive control of stable linear systems. *Int. Journal of Control*, 68(4):797-818, 1997.
- BALAS, G. J., J. C. DOYLE, K. GLOVER, A. PACKARD, y R. SMITH. *mu Analysis and Synthesis Toolbox*. Informe técnico, The MathWorks Inc., 1998.

- BAZARAA, M. S. y C. SHETTY. *Nonlinear Programming* (John Wiley and Sons, 1979).
- BECKER, G. y A. PACKARD. Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback. *Systems & Control Letters*, 23:205-215, 1994.
- BEMPORAD, A. y M. MORARI. Robust model predictive control: A survey. En A. Garulli, A. Tesi, y A. Vicino, (Editores) *Robustness in Identification and Control*, págs. 207-226 (Springer-Verlag, 1999).
- BERTSEKAS, D. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods* (Athena Scientific, 1996).
- BITMEAD, R., M. GEVERS, y V. WERTZ. *Adaptive Optimal Control: The Thinking Man's GPC* (Prentice Hall, 1990).
- BLASCO, F., M. MARTÍNEZ, J. SENENT, y J. SANCHIS. *Sistemas Automáticos* (Servicio de Publicaciones de la UPV, 2000).
- BLASCO, F. X. *Control predictivo basado en modelos mediante técnicas de optimización heurística. Aplicación a procesos no lineales y multivariables*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2000.
- BODENHEIMER, B. y P. BENDOTTI. Optimal Linear Parameter-Varying Control Design for a Pressurized Water Reactor. En *Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control*, págs. 182-187 (1995).
- BODENHEIMER, B., P. BENDOTTI, y M. KANTER. Linear Parameter-Varying Control of a Ducted Fan Engine. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(9-10):1023-1044, 1996.
- BOYD, S., L. EL GHAOU, E. FERON, y V. BALAKRISHNAN. *Linear Matriz Inequalities in System and Control Theory* (SIAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia, 1994), vol. 15 edición.
- BU, J. *Multi-Objective Robust Control: design of mixed l_1/H_∞ controllers*. Tesis Doctoral, College of Engineering. The Pennsylvania State University, 1997.
- CAMACHO, E. Constrained generalized predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(2):327-332, 1993.
- CAMACHO, E. y C. BORDÓNS. *Model Predictive Control in the Process Industry* (Springer, 1995).
- CAMACHO, E. y C. BORDÓNS. *Model Predictive Control* (Springer, 1999).

- CANNON, M., V. DESHMUKH, y B. KOUVARITAKIS. Nonlinear model predictive control with polytopic invariant sets. *Automatica*, 39:1487-1494, 2003.
- CHAI, T., K. MAO, y X. QIN. Decoupling design of multivariable GPC. *IEE proceedings. Control Theory and Applications*, 141(3):197-201, 1994.
- CHEN, H. y F. ALLGÖWER. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability. *Automatica*, 14(10):1205-1217, 1998.
- CHEN, S., S. BILLINGS, y P. GRANT. Non-linear system identification using neural networks. *Int. J. Control*, 51(6):1191-1214, 1990.
- CHIALI, M. y P. GAHINET. H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):358-367, 1996.
- CHISCI, L., A. LOMBARDI, E. MOSCA, y J. ROSSITER. State-space approach to stabilizing stochastic predictive control. *International Journal of Control*, 65(4):619-637, 1996.
- CHOW, C. y D. CLARKE. Actuator nonlinearities in predictive control. En D. W. C. Editor, (Editor) *Advances in Model-Based Predictive Control*, págs. 245-260 (Oxford University Press, 1994a).
- CHOW, C. y D. W. CLARKE. Actuator nonlinearities in predictive control. En D. W. C. Editor, (Editor) *Advances in Model-Based Predictive Control*, págs. 245-259 (Oxford University Press, 1994b).
- CLARKE, D. Application of generalized predictive control to industrial processes. *IEEE Control Systems Magazine*, 138:49-55, 1988.
- CLARKE, D. Adaptive generalized predictive controller. Informe Técnico OUEL 1879/91, Department of Engineering Science, 1991.
- CLARKE, D. y C. MOHTADI. Properties of generalized predictive control. *Automatica*, 25(6):859-875, 1989.
- CLARKE, D., C. MOHTADI, y P. TUFFS. Generalized predictive control-part I. *Automatica*, 23(2):137-148, 1987a.
- CLARKE, D., C. MOHTADI, y P. TUFFS. Generalized predictive control-part II. Extensions and Interpretations. *Automatica*, 23(2):149-160, 1987b.
- CLARKE, D. y R. SCATTOLINI. Constrained receding-horizon predictive control. *IEEE Proceedings-D*, 138(4):347-354, 1991.
- CLARKE, D. W. Advances in model-based predictive control. En D. W. C. Editor, (Editor) *Advances in Model-Based Predictive Control*, págs. 3-21 (Oxford University Press, 1994).

- CUTLER, C. y D. RAMAKER. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. En *Automatic Control Conference Proc.* (San Francisco, CA, 1980).
- DAHLEH, M. y J. BOYD. l_1 -optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32:314-322, 1987a.
- DAHLEH, M. y J. BOYD. \mathcal{L}_1 -optimal compensators for continuous-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32:889-895, 1987b.
- DE OLIVEIRA, M. C., J. C. GEROMEL, y J. BERNUSSOU. Extended H_2 and H_∞ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 75(9):666-679, 2002.
- DE OLIVEIRA, N. y L. BIEGLER. Constraint Handling and Stability Properties of Model-Predictive Control. *AIChE Journal*, 40(7):1138-1155, 1994.
- DE OLIVEIRA, S. L. *Model Predictive Control for Constrained Nonlinear Systems*. Tesis Doctoral, California Institute of Technology (Pasadena), 1996.
- DOYLE, J., A. PACKARD, y K. ZHOU. Review of LFTs, LMIs and μ . En *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control* (1991).
- DUSSY, S. y L. EL GHAOUÍ. *Multiobjective bounded control of uncertain nonlinear systems: an inverted pendulum example*, págs. 55-73. Control of uncertain systems with bounded inputs (Springer, Berlin, 1997).
- DUSSY, S. y L. EL GHAOUÍ. Measurement-Scheduled control for the RTAC problem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8:377-400, 1998.
- EBERT, W. Optimal filtered predictive control. A delta operator approach. *Systems & Control Letters*, 42:69-80, 2001.
- EL GAHOUI, L. y G. SCORLETTI. Control of Rational Systems using Linear-fractional Representations and Linear Matrix Inequalities. *Automatica*, 32(9):1273-1284, 1996.
- EL GHAOUÍ, L. y S. NÍCULESCU, (Editores) *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control* (SIAM. Advances in Design and Control, 2000).
- ELSHAFEI, A., G. DUMONT, y A. ELNAGGAR. Stability and convergence analyses of an adaptive GPC based on state-space modelling. *International Journal of Control*, 61(1):193-210, 1995.
- ESPINOSA, J. y J. VANDEWALLE. Constrained predictive control using fuzzy models. En *Proc. 8th. International Fuzzy Systems Association World Congress (IFSA-99)*, págs. 649-654 (Taipei, Taiwan, 1999a).

- ESPINOSA, J. y J. VANDEWALLE. The use of convex programming on fuzzy model based predictive control. En *Proc. IEEE International Symposium on Intelligent Control Intelligent Systems and Semiotics (ISIC-ISAS-1999)*, págs. 411–416 (Cambridge. UK., 1999b).
- FERON, E., P. APKARIAN, y G. P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):1041–1046, 1996.
- FROISY, J. Model predictive control: past, present and future. *ISA Transactions. Elsevier Science*, 33:235–243, 1994.
- FUKUDA, M. y M. KOJIMA. Brach-and-Cut Algorithms for the Bilinear Matrix Inequality Eigenvalue Problem. *Computational Optimization and Applications*, 19:79–105, 2001.
- GAHINET, P. y P. APKARIAN. A Linear Matrix Inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4:421–448, 1994.
- GAHINET, P., P. APKARIAN, y M. CHILALI. Affine Parameter-Dependent Lyapunov Funtions and Real Parametric Uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):436–442, 1996.
- GAHINET, P., A. NEMIROVSKI, A. J. LAUB, y M. CHILALI. LMI Control Toolbox. Informe técnico, The Mathworks Inc., 1995.
- GARCIA, C. y A. MORSHEDI. Quadratic programming solution of dynamic matrix control (qdmc). *Chemical Eng. Commun.*, 46:73–87, 1986.
- GELORMINO, M. y N. RICKER. Model Predictive Control of a combined sewer system. *International Journal of Control*, 59(3):793–816, 1994.
- GENCELI, H. y M. NIKOLAOU. Robust stability analysis of constrained l1-norm model predictive control. *AIChE Journal*, 39(12):1954–1965, 1993.
- GENCELI, H. y M. NIKOLAOU. Design of robust contstrained model-predictive controllers with volterra series. *AIChE Journal*, 41(9):2098–2107, 1995.
- GENCELI, H. y M. NIKOLAOU. New approach to constrained predictive control with simultaneous model identification. *AIChE Journal*, 42:2857–2869, 1996.
- GOH, K. C. *Robust Control Synthesis via Bilinear Matrix Inequalities*. Tesis Doctoral, University of Southern California, 1995.
- GOODWIN, G., S. GRAEBE, y M. SALGADO. *Control System Design* (Prentice Hall, 2001).
- GRANADO, E., W. COLMENARES, J. BERNUSSOU, y G. GARCÍA. Linear matrix inequality based model predictive controller. *IEE Proceedings Control Theory Applications*, 150(5):528–533, 2003.

GRIMBLE, M. State-Space Approach to LQG Multivariable Predictive and Feedforward Optimal Control. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 116:610-617, 1994.

GROSDIDIER, P., B. FROISY, y M. HAMMANN. The IDCOM-M controller. En *IFAC Workshop in Model based process control* (Atlanta, Georgia, USA, 1988).

HELMERSSON, A. *Methods for Robust Gain Scheduling*. Tesis Doctoral, Linköping University, Linköping, Suecia, 1995.

HELMERSSON, A. Parametrer Dependent Lyapunov Functions based on Linear Fractional Transformation. En *14th IFAC World Congr. Beijing (China)*, págs. 537-542 (1999).

KERRIGAN, E. y J. MACIEJOWSKI. Feedback min-max model predicitive control using a single linear program: Robust stability and the explicit solution. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14(4):395-413, 2004.

KERRIGAN, E. y D. Q. MAYNE. Optimal control of constrained, piecewise affine systems with bounded disturbances. En *Proceedings of the Conference on Decision and Control* (2002).

KERRIGAN, E. C. *Robust Constraint Satisfaction: Invariant Sets and Predictive Control*. Tesis Doctoral, Control Group. Dept. of Engineering. University of Cambridge, 2000.

KEYSER, R. D. Basic principles of model based predictive control. *1st. European Control Conference*, 1(1):1753-1758, 1991.

KINNAERT, M. Adaptive generalized predictive controller for MIMO systems. *International Journal of Control*, 50(1):161-172, 1989.

Kluwer *Encyclopedia of Optimization* (Kluwer Academic Publishers, 2001).

KOTHARE, K. V., V. BALAKRISHNAN, y M. MORARI. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(10):1361-1379, 1996.

KOUVARITAKIS, B. y M. CANNON. *Nonlinear Predictive Control: Theory and Practice*. Control Engineering Series 61 (The Institution of Electrical Engineers, 2001).

KOUVARITAKIS, B., J. ROSSITER, y J. GOSSNER. Improved algorithm for multivariable stable generalized predictive control. *IEE proceedings. Control Theory and Applications*, 144(4):309-312, 1997.

KUZNETSOV, A. y D. W. CLARKE. Application of constrained gpc for improving performance of controlled plants. En D. W. C. Editor, (Editor) *Advances in Model-Based Predictive Control*, págs. 318-329 (Oxford University Press, 1994).

- KWON, W., H. CHOI, D. BYUN, y S. NOH. Recursive Solution of Generalized Predictive Control and its Equivalence to Receding Horizon Tracking Control. *Automatica*, 28(6):1235-1238, 1992.
- LA SALLE, J. y S. LEFSCHETZ. *Stability by Lyapunov's Direct Method* (Academic Press Inc. New York, 1961).
- LEE, J. Exponential Stability of Constrained Receding-Horizon Control with Ellipsoid Constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(1):83-89, 2000.
- LEE, J., M. MORARI, y C. GARCÍA. State-Space Interpretation of Model Predictive Control. *Automatica*, 30(4):707-717, 1994.
- LEE, J. y Z. YU. Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters. *Automatica*, 33(5):763-781, 1997.
- LEMO, J. y E. MOSCA. A multipredictor based lq self-tuning controller. En *IFAC Symp. on identification and system parameter estimation* (York, UK, 1985).
- LIMÓN, D. *Control Predictivo de Sistemas No Lineales con Restricciones: Estabilidad Y Robustez*. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla, 2002.
- LIMÓN, D., T. ÁLAMO, y E. CAMACHO. Enlarging the domain of attraction of MPC controllers. *Automatica*, 41:629-635, 2005.
- LIMÓN, D., T. ÁLAMO, y E. F. CAMACHO. Stability analysis of systems with bounded additive uncertainties based on invariant sets: Stability and feasibility of MPC. En *Proceedings of the American Control Conference* (2002a).
- LIMÓN, D., T. ÁLAMO, y E. F. CAMACHO. Robust MPC control on a contractive sequence of sets. En *IEEE Conference on Decision and Control* (2003).
- LIMÓN, D., T. ÁLAMO, y E. F. CAMACHO. Robust stability of min-max MPC controllers for nonlinear systems with bounded uncertainties. En *MTNS* (2004).
- LIMÓN, D., T. ÁLAMO, y C. E. F. Input-to-state stable MPC for constrained discrete-time nonlinear systems with bounded additive uncertainties. En *Proceedings of the Conference on Decision and Control* (2002b).
- LIMÓN, D., J. M. BRAVO, T. ÁLAMO, y E. F. CAMACHO. Robust MPC of constrained discrete-time nonlinear systems based on uncertain evolution sets: Application of a CSTR model. En *Proceedings of the Conference on Control Applications* (2002c).
- LING, K. y K. LIM. A state space GPC with extensions to multirate control. *Automatica*, 32(7):1067-1071, 1996.

- LINKENS, D. y M. MAHFOUF. Generalized predictive control (gpc) in clinical anaesthesia. En D. W. C. Editor, (Editor) *Advances in Model-Based Predictive Control*, págs. 402-414 (Oxford University Press, 1994).
- LIU, G., V. KADIRKAMANATHAN, y S. BILLINGS. Predictive control for non-linear systems using neural networks. *Int. J. Control*, 71(6):1119-1132, 1998.
- LIU, R. W. Convergent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13:384-391, 1968.
- LJUNG, L. *System Identification* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987).
- LUYBEN, W. *Process Modelling, Simulation and Control for Chemical Engineers*. Chemical Eng. Series (Mc Graw-Hill, 1994).
- MAGNI, L., G. DE NICOLAO, L. MAGNANI, y R. SCATTOLINI. A stabilizing model-based predictive control algorithm for NonLinear systems. *Automatica*, 37:1351-1362, 2001.
- MANER, B., F. DOYLE, B. OGUNNAIKE, y R. PEARSON. Nonlinear model predictive control of a simulated multivariable polymerization reactor using second-order volterra models. *Automatica*, 32(9):1285-1301, 1996.
- MARLIN, T. E. *Process Control. Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance* (Mc Graw-Hill, 1995).
- MARTÍNEZ, M., J. SENENT, y X. BLASCO. Generalized predictive control using genetic algorithms (GAGPC). *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 11(3):355-367, 1998.
- MAYNE, D. Nonlinear model predictive control: An assessment. En *5th International Conference on Chemical Process Control. AIChE Symposium Series*, págs. 217-231 (1997).
- MAYNE, D. Q. Control of constrained dynamic systems. *European Journal of Control*, 7:87-99, 2001.
- MAYNE, D. Q., J. B. RAWLINGS, C. V. RAO, y P. O. M. SCOKAERT. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36:789-814, 2000.
- MEGIAS, D., J. SERRANO, y C. DE PRADA. Aspectos de robustez en el GPC. En *Workshop sobre el estado y perspectivas del control predictivo* (Valladolid, 1997a).
- MEGIAS, D., J. SERRANO, y C. DE PRADA. Uncertainty treatment in generalized predictive control. En *Proceedings of ECC* (Bruselas (Bélgica), 1997b).
- MEGIAS, D., J. SERRANO, y C. DE PRADA. Min-max constrained infinite horizon model predictive control: standard vs. feedback formulation. En *European Control Conf. (ECC-01)*, págs. 3765-3770 (Porto (Lisbon), 2001).

- MEGÍAS, D., J. SERRANO, y C. DE PRADA. Min-max constrained quasi-infinite horizon model predictive control using linear programming. *Journal of Process Control*, 12:495–505, 2002.
- MEGÍAS, D., J. SERRANO, y A. G. KUZNETSOV. A systematic method to enhance the robustness of stabilising receding-horizon predictive controllers. En *European Control Conference (ECC) (Karlsruhe (Germany), 1999)*.
- MICHALSKA, H. y D. MAYNE. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1993.
- MOHTADI, C. On the role of prefiltering in parameter estimation and control. En *Workshop on Adaptive Control Strategies for Industrial Use (Alberta, Canadá, 1988)*.
- MOHTADI, C., S. SHAH, y D. CLARKE. Generalized predictive control of multivariable systems. En *5th. Yale Workshop in Adaptive Systems Theory*, págs. 54–59 ((USA), 1987).
- MORARI, M. y J. LEE. Model predictive control: Past, present and future. *Computers and Chemical Engineering*, 23:667–682, 1999.
- MORARI, M. y J. H. LEE. Model predictive control: past, present and future. En *PSE'97-ESCAPE-7 symposium (Trondheim, Norway, 1997)*.
- MOSCA, E. *Optimal, predictive, and adaptive control*. Information and System Sciences Series (Prentice-Hall, 1995).
- MUSKE, K. y J. RAWLINGS. Model predictive control with linear models. *AIChE Journal*, 39(2):262–287, 1993.
- NAHAS, E., M. HENSON, y D. SEBORG. Nonlinear internal model control strategy for neural network models. *Comp. Chem. Eng.*, 16(12):1039–1057, 1992.
- NEVISTIĆ, V. *Constrained Control of Nonlinear Systems*. Tesis Doctoral, Swiss Federal Institute of Technology, 1997.
- NIKOLAOU, M. Model predictive controllers: A critical synthesis of theory and industrial needs. En *Advances in Chemical Engineering Series*. (Academic Press, 1998).
- OLIVEIRA, M. C., J. BERNUSSOU, y J. C. GEROMEL. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37:261–265, 1999.
- ONNEN, C., R. BABUSKA, U. KAYMAK, J. M. SOUSA, H. B. VERBRUGGEN, y R. ISERMANN. Genetic algorithms for optimization in predictive control. *Control Eng. Practice*, 5(10):1363–1372, 1997.
- ORDYS, A. W. y D. W. CLARKE. A state-space description for GPC controllers. *Int. J. Systems Sci.*, 24:1727–1744, 1993.

- O'REILLY, J. *Observers for linear systems* (Academic Press, 1983).
- PACKARD, A. Gain Scheduling via linear fractional transformations. *Systems & Control Letters*, 22:79-92, 1994.
- PEAUCELLE, D., D. ARZELIER, O. BACHELIER, y J. BERNUSSOU. A new robust \mathcal{D} -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40:21-30, 2000.
- PEREZ, M. y J. BERNÁ. Cálculo Numérico-Simbólico con Matlab. Aplicación al control de sistemas no lineales basado en métodos de geometría diferencial. En *SAAEI98* (1998).
- PÉREZ, P. *Aplicación de técnicas de programación dinámica a control predictivo basado en modelos*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Educación a Distancia. Facultad de Ciencias, 1995.
- PEREZ CARRERAS, P. *Álgebra lineal. Notas de clase* (Servicio de Publicaciones UPV. Re-proval, 1989). ISBN 84-7721-041-1.
- PHILLIPS, C. y J. PARR. *Signals, systems and transforms* (Prentice Hall, 1995).
- PRETT, C. G. D. y M. MORARI. Model predictive control: Theory and practice - a survey. *Automatica*, 25(3):355-348, 1989.
- PRETT, D. y M. MORARI. The Shell Process Control Workshop. *Process Control Research: Industrial and Academic Perspectives. Butterworths. Boston, (USA)*, págs. 355-360, 1987.
- PRIMBS, J. y V.ÑEVISTIĆ. A New Approach to Stability Analysis for Constrained Finite Receding Horizon Control Without End Constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8):1507-1512, 2000.
- PRIMBS, J. A. y V.ÑEVISTIĆ. Constrained Finite Receding Horizon Linear Quadratic Control. Informe Técnico 97-002, Control of Dynamical Systems. Institute of Technology, Pasadena (California), 1997.
- QIN, S. y T. A. BADGWELL. An overview of industrial model predictive control technology. En J. C. Kantor, C. E. Garcia, y B. Carnahan, (Editores) *5th Int. Conf. on Chemical Process Control.*, tomo 93, págs. 232-256 (AIChE Symposium Series 316, 1997).
- RAO, C. y J. RAWLINGS. Optimization strategies for linear model predictive control. En C. Georgakis, (Editor) *5th IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems (DYCOPS-5)*, págs. 41-46 (1998).
- RAWLINGS, J., E. MEADOWS, y K. MUSKE. Nonlinear model predictive control: A tutorial and survey. En *Proc. Int. Symp. Adv. Control of Chemical Processes (ADCHEM)* (Kyoto (Japan), 1994).

- RAWLINGS, J. y K. MUSKE. Stability of constrained receding horizon control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 38(10):1512-1516, 1993.
- RAWLINGS, J. B. Tutorial Overview of Model Predictive Control. *IEEE Control Systems Magazine*, 20(4):38 - 52, 2000.
- RICHALET, J. Industrial applications of model based predictive control. *Automatica*, 29(5):1251-1274, 1993.
- RICHALET, J., A. RAULT, J. L. TESTUD, y J. PAPON. Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. *Automatica*, 14:413-428, 1978.
- RICKER, N. Model Predictive Control with State Estimation. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 29:374-382, 1990.
- ROBINSON, B. y D. CLARKE. Robustness effects of a prefilter in generalised predictive control. *IEE Proceedings Part D*, 138(1):2-8, 1991.
- RODRIGUES, M. A. y D. ODLOAK. MPC for stable linear systems with model uncertainty. *Automatica*, 39:569-583, 2003.
- ROSSITER, J., B. KOUVARITAKIS, y R. DUNNETT. Application of generalized predictive control to a boiler turbine unit for electricity generation. *IEE Proceedings-D*, 138:59-67, 1991.
- ROUHANI, R. y R. MEHRA. Model algorithmic control:basic properties. *Automatica*, 18:401-414, 1982.
- RUGH, W. J. y J. S. SHAMMA. Research on gain scheduling. *Automatica*, 36:1401-1425, 2000.
- SALCEDO, J. Comparativa del diseño de GPC's MIMO E/S vs espacio de estados con restricciones optimizados con el método de rosen. Trabajo de 6 créditos, Depto. Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad Politécnica de Valencia, 1999.
- SANCHEZ PEÑA, R. S. y M. SZNAIER. *Robust Systems, Theory and Applications* (John Wiley and Sons, New York, 1998).
- SANCHIS, J. *GPC mediante Descomposición en Valores Singulares (SVD). Análisis de Componentes Principales (PCA) y Criterios de Selección*. Tesis Doctoral, 2002.
- SANTOS, L. O. y L. T. BIEGLER. A tool to analyze robust stability for model predictive controllers. *Journal of Process Control*, 9:234-246, 1999.
- SCATTOLINI, R. y N. A. SCHIAVONI. A Multirate Model-Based Predictive Controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(6):1093-1097, 1995.

SCHERER, C. y S. WEILAND. Linear Matrix Inequalities in Control, 2000. Lecture notes of DISC Course Optimization in Control -2003.

SCHERER, C. W. LPV control and full block multipliers. *Automatica*, 37:361-375, 2001.

SCOKAERT, P. O. M. Infinite horizon generalized predictive control. *Int. Journal of Control*, 66(1):161-175, 1997.

SCOKAERT, P. O. M. y D. W. CLARKE. Stability questions in predictive control. Informe Técnico OUEL 1970/93, Department of Engineering Science, 1993a.

SCOKAERT, P. O. M. y D. W. CLARKE. Stability questions in predictive control. part ii: Incorporation of hard inequality constraints. Informe Técnico OUEL 1980/93, Department of Engineering Science, 1993b.

SCOKAERT, P. O. M. y D. W. CLARKE. Stabilising properties of constrained predictive control. *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 141:295-304, 1994.

SCOKAERT, P. O. M. y D. Q. MAYNE. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(8):1136-1142, 1998.

SCOKAERT, P. O. M. y J. B. RAWLINGS. Feasibility Issues in Linear Model Predictive Control. *AIChE Journal*, 45(8):1649-1659, 1999.

SCOKAERT, P. O. M., J. B. RAWLINGS, y E. S. MEADOWS. Discrete-time stability with perturbations: Application to model predictive control. *Automatica*, 33(3):463-470, 1997.

SCORLETTI, G. y L. EL GHAOU. Improved LMI Conditions for Gain Scheduling and Related Control Problems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8:845-877, 1998.

SENENT, J. *Control predictivo no lineal con horizonte de predicción casi infinitos*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1998.

SENENT, M. M. J. y F. BLASCO. A comparative study of classical vs genetic algorithm optimization applied in gpc controller. *IFAC World congress*, 1996.

SKOGESTAD, S. y I. POSTLETHWAITE. *Multivariable feedback control. Analysis and Design* (John Wiley and Sons, 1996).

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12:625-653, 1999. Special issue on Interior Point Methods.

TOKER, O. y H. ÖZBAY. On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback. En *Proceedings of the American Control Conference* (1995).

- TROFINO, A. y C. E. DE SOUZA. Bi-quadratic stability of uncertain linear systems. En *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, págs. 5016–5021 (1999).
- TROFINO, A. y C. E. DE SOUZA. Biquadratic Stability of Uncertain Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8):1303–1307, 2001.
- TSANG, T. y D. W. CLARKE. Generalized predictive control with input constraints. *IEE Proceedings.*, 135:451–460, 1988.
- TUAN, H. y P. APKARIAN. Low Nonconvexity-Rank Bilinear Matrix Inequalities: Algorithms and Applications in Robust Controller and Structure Designs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(11):2111–2117, 2000.
- WANG, F. y V. BALAKRISHNAN. Improved Stability Analysis and Gain-Scheduled Controller Synthesis for Parameter-Dependent Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5):720–734, 2002.
- WANG, L. A Tutorial on Model Predictive Control. En *The 4th Asian Control Conference* (2002).
- WIE, B. y D. S. BERNSTEIN. Benchmark problems for robust control design. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 15:1057–1059, 1992.
- WILLEMS, J. L. *Stability Theory of Dynamical Systems* (Thomas Nelson and Sons LTD., 1970).
- WILSON, D. I., M. AGARWAL, y D. W. T. RIPPIN. Experiences implementing the extended kalman filter on an industrial batch reactor. *Computers Chemical Engineering*, 22(11):1653–1672, 1998.
- WU, S. P., L. VANDENBERGHE, y S. BOYD. MAXDET: Software for determinant maximization problem problems. Informe técnico, Stanford University, 1996. Users's Guide. Alpha version.
- XI, Y. New design method for discrete-time multi-variable predictive controllers. *International Journal of Control*, 49(1):45–56, 1989.
- YAKUBOVICH, V. S-procedure in non-linear control theory. *Vestnik Leningrad Univ. Math.*, 4:73–93, 1977. En ruso.
- YOON, T. y D. CLARKE. Observer design in receding-horizon predictive control. *International Journal of Control*, 61(1):171–191, 1995.
- YOON, T. y D. W. CLARKE. Prefiltering in receding-horizon predictive control. Informe Técnico OUEL 1995/93, Department of Engineering Science, 1993.

YOON, T. y D. W. CLARKE. Towards robust adaptive predictive control. En D. W. C. Editor, (Editor) *Advances in Model-Based Predictive Control*, págs. 402-414 (Oxford University Press, 1994).

ZAMARREÑO, J. M. *Identificación y control predictivo basado en modelos mediante red neuronal en espacio de estados*. Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid, Valladolid, 1996.

ZHENG, A. y M. MORARI. Stability of model predictive control with mixed constraints. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40(10):1818-1823, 1995.

ZHOU, K. y J. C. DOYLE. *Essentials of Robust Control* (Prentice Hall, 1998).

ZHOU, K., J. C. DOYLE, y K. GLOVER. *Robust and Optimal Control* (Prentice Hall, 1996).