FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

# Dvojný integrál

(reálné funkce 2 reálných proměnných)

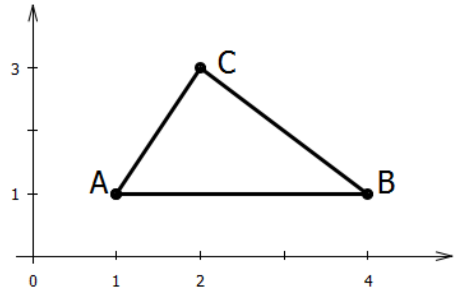
## Studijní materiály

Brno 2014

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

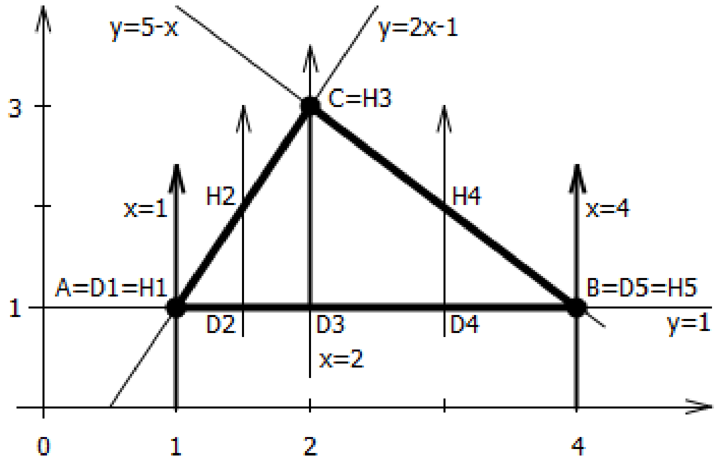
# Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint\limits_{\triangle ABC} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{kde} \qquad \begin{array}{l} A = [1;1] \\ B = [4;1] \\ C = [2;3] \\ f(x,y) = x\,y^2 \end{array} \qquad \text{tedy}$$




# Určení integračních mezí

## 1. způsob – kladně orientované rovnoběžky s osou $y$




Ze všech možných rovnoběžek si vybereme pouze ty, které mají se zadaným trojúhelníkem společný alespoň jeden bod. Všechny takové rovnoběžky leží mezi přímkami $x = 1$ a $x = 4$, tedy pro $x$ové souřadnice libovolného (vnitřního) bodu trojúhelníka musí platit:

$$1 \leq x \leq 4$$

A pokud půjdeme ve směru šipek, tak každý bod ve kterém libovolná orientovaná rovnoběžka s osou ***vstoupí DO*** trojúhelníka označíme **D** (a přidáme pořadové číslo) a každý bod ve kterém orientovaná úsečka ***vystoupí Z*** trojúhelníka označíme **H**.

Všechny takové body **D** dohromady tvoří ***dolní*** hranici ($D_1$ … $D_5$ leží na jedné úsečce) a všechny body **H** dohromady tvoří ***horní*** hranici (body $H_1$, $H_2$, $H_3$ leží na jedné úsečce a body $H_3$, $H_4$, $H_5$ leží na druhé úsečce). Z toho plyne, že dolní hranici můžeme popsat rovnicí přímky, která hranicí prochází: $y = 1$,
ale pro horní hranici budeme potřebovat takové rovnice dvě.

Proto $\triangle ABC$ rozdělíme úsečkou procházející body $\mathbf{D_3}$ a $\mathbf{C} = H_3$ na dva trojúhelníky, a to $\triangle AD_3C$ a $\triangle D_3BC$. Tedy platí: $\triangle ABC = \triangle AD_3C \cup \triangle D_3BC$
a v důsledku toho můžeme dvojný původní dvojný integrál vyjádřit jako součet příslušných dvojných integrálů takto:

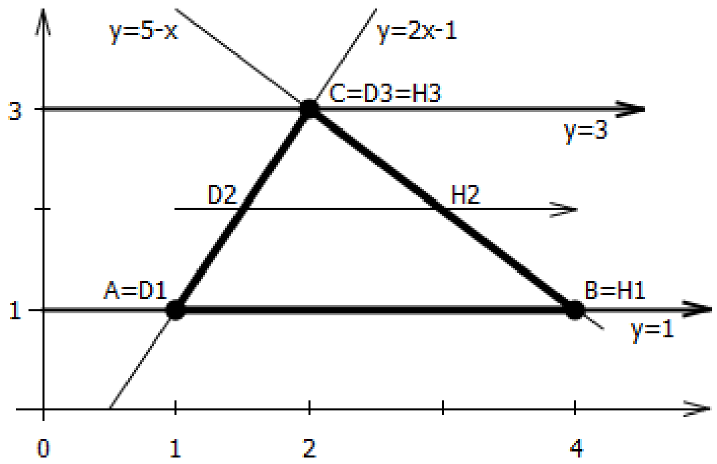
$$\iint\limits_{\triangle AD_3C\,\cup\,\triangle D_3BC} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\triangle AD_3C} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{\triangle D_3BC} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

protože průnik obou uvažovaných trojúhelníků (úsečka $D_3C$) má nulovou plochu. [1]

A protože oba zmíněné trojúhelníky $\triangle AD_3C$ i $\triangle D_3BC$ jsou ***elementárními oblastmi 1. druhu*** v rovině (viz strana 8 zmíněných skript) určíme meze pro proměnné v každém z trojúhelníků:

| $\triangle AD_3C$ | $\triangle D_3BC$ |
| --- | --- |
| $1 \leq x \leq 2$ | $2 \leq x \leq 4$ |
| $1 \leq y \leq 2x - 1$ | $1 \leq y \leq 5 - x$ |

## 2. způsob – kladně orientované rovnoběžky s osou $x$




Ze všech možných rovnoběžek si vybereme pouze ty, které mají se zadaným trojúhelníkem společný alespoň jeden bod. Všechny takové rovnoběžky leží mezi přímkami $y = 1$ a $y = 3$, tedy pro $y$ové souřadnice libovolného (vnitřního) bodu trojúhelníka musí platit:

$$1 \leq y \leq 3$$

A pokud půjdeme ve směru šipek, tak každý bod ve kterém libovolná orientovaná rovnoběžka s osou ***vstoupí DO*** trojúhelníka označíme **D** (a přidáme pořadové číslo) a každý bod ve kterém orientovaná úsečka ***vystoupí Z*** trojúhelníka označíme **H**.

Všechny takové body **D** dohromady tvoří ***dolní*** hranici ($D_1$, $D_2$, $D_3$ leží na jedné úsečce) a všechny body **H** dohromady tvoří ***horní*** hranici (body $H_1$, $H_2$, $H_3$ leží na jedné úsečce).

A protože trojúhelník $\triangle ABC$ je ***elementární oblastí 2. druhu*** v rovině (viz strana 8 zmíněných skript), určíme meze pro proměnné v tomto trojúhelníku:

$$1 \leq y \leq 3$$

$$\frac{y+1}{2} \leq x \leq 5 - y$$

[1] Plyne z **Věty 1.5.** *Základní vlastnosti dvojného integrálu* – vlastnost (f) na straně 12 ve skriptech DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Dvojný a trojný integrál*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80–7204–453–2.

# Výpočet dvojného integrálu pomocí dvojnásobného int.

## Ověření podmínek

Funkce $f(x;y) = x\,y^2$ je definována (jde o mocninnou funkci) pro každé reálné číslo $x$ a každé reálné číslo $y$, což můžeme zapsat: $D(f) = (-\infty\,;\infty) \times (-\infty\,;\infty)$ .
Dále o mocninné funkci víme, že je spojitá na celém svém definičním oboru, tedy je spojitá pro každý bod ležící uvnitř a na stranách zadaného trojúhelníka $\triangle \mathrm{ABC}$ . Navíc je na tomto trojúhelníku ještě i ohraničená (pro žádný vnitřní bod trojúhelníku „neutíká do nekonečna"). Takže jsou splněny podmínky **Věty 1.4.** (strana 10 zmíněných skript) a náš zadaný dvojný integrál existuje, ať již se na zadaný trojúhelník díváme jako na elementární oblast druhého druhu nebo na sjednocení dvou elementárních oblastí prvního druhu. Můžeme tedy využít Fubiniho věty (**Věty 1.3.** str. 9 a 10 zmíněných skript)

A pro zopakování:

- konstantu můžeme vytknout před integrál;
- integrál součtu funkcí je roven součtu integrálů z jednotlivých funkcí;
- do primitivní funkce nejprve dosadíme HORNÍ mez a potom se znaménkem MÍNUS budeme dosazovat dolní mez.

# 1. varianta převodu na dvojnásobný int. – rovnoběžky s osou $y$

***Vně dáme konstantní meze.***
Ty jsou v tomto případě pro proměnnou $x$ (uvažované rovnoběžky protínají osu ***x***), proto vnější diferenciál bude $\mathrm{d}x$ .

***Dovnitř dáme zbylé meze, které v tomto případě obsahují vnější proměnnou.***
Ty jsou pro proměnnou $y$ , proto vnitřní diferenciál bude $\mathrm{d}y$ ;

$x$ bude pro vnitřní integrál konstanta:

$$\iint\limits_{\triangle ABC} x\,y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left\{ \int_1^{2x-1} x\,y^2\,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x + \int_2^4 \left\{ \int_1^{5-x} x\,y^2\,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^2 \left\{ x \int_1^{2x-1} y^2\,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x + \int_2^4 \left\{ x \int_1^{5-x} y^2\,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_1^2 x \left[ \frac{y^3}{3} \right]_1^{2x-1} \mathrm{d}x + \int_2^4 x \left[ \frac{y^3}{3} \right]_1^{5-x} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^2 x \cdot [(2x-1)^3 - (1)^3]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3} \int_2^4 x \cdot [(5-x)^3 - (1)^3]\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^2 (8x^4 - 12x^3 + 6x^2 - x - x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3} \int_2^4 (125x - 75x^2 + 15x^3 - x^4 - x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{8 \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 - 12 \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 + 6 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2\right\} +$$

$$+ \frac{1}{3}\left\{124 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 - 75 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 + 15 \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^4 - 1 \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^4\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{8}{5} \cdot (32-1) - \frac{12}{4} \cdot (16-1) + \frac{6}{3} \cdot (8-1) - \frac{2}{2} \cdot (4-1)\right] +$$

$$+ \frac{1}{3}\left[\frac{124}{2} \cdot (16-4) - \frac{75}{3} \cdot (64-8) + \frac{15}{4} \cdot (256-16) - \frac{1}{5} \cdot (1024-32)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{248}{5} - 45 + 14 - 3 + 744 - 1\,400 + 900 - \frac{992}{5}\right) = \frac{1}{3}\left(210 - \frac{744}{5}\right) =$$

$$= \frac{1\,050 - 744}{3 \cdot 5} = \frac{306}{3 \cdot 5} = \underline{\underline{\frac{102}{5}}}$$

## 2. varianta převodu na dvojnásobný int. – rovnoběžky s osou $x$

***Vně dáme konstantní meze.***

Ty jsou v tomto případě pro proměnnou $y$ (uvažované rovnoběžky protínají osu $\boldsymbol{y}$), proto vnější diferenciál bude $\mathrm{d}y$ .

***Dovnitř dáme zbylé meze, které v tomto případě obsahují vnější proměnnou.***

Ty jsou pro proměnnou $x$ , proto vnitřní diferenciál bude $\mathrm{d}x$ ;

$y$ bude pro vnitřní integrál konstanta:

$$\iint\limits_{\triangle ABC} x y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^3 \left\{\int_{\frac{y+1}{2}}^{5-y} x y^2 \,\mathrm{d}x\right\} \mathrm{d}y = \int_1^3 \left\{y^2 \int_{\frac{y+1}{2}}^{5-y} x \,\mathrm{d}x\right\} \mathrm{d}y = \int_1^3 \left\{y^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y+1}{2}}^{5-y}\right\} \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 y^2 \left(25 - 10y + y^2 - \frac{y^2 + 2y + 1}{4}\right) \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{8}\int_1^3 (100y^2 - 40y^3 + 4y^4 - y^4 - 2y^3 - y^2) \,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{8}\left\{99 \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_1^3 - 42 \cdot \left[\frac{y^4}{4}\right]_1^3 + 3 \cdot \left[\frac{y^5}{5}\right]_1^3\right\} =$$

$$= \frac{1}{8}\left\{33\cdot(27-1)-\frac{21}{2}\cdot(81-1)+\frac{3}{5}\cdot(243-1)\right\} = \frac{1}{8}\left(858-840+\frac{3\cdot 242}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{18\cdot 5}{5}+\frac{726}{5}\right) = \frac{816}{8\cdot 5} = \underline{\underline{\frac{102}{5}}}$$

# Výsledek

Podle teorie o převodu dvojného integrálu na dvojnásobný nezáleží na tom, jestli budeme zadaný tojúhelník $\triangle ABC$ považovat za elementární oblast 1. nebo 2. druhu, a podle toho určovat integrační meze. Tak také v tomto případě obě varianty řešení vedly k jedinému výsledku:

$$\iint\limits_{\triangle ABC} x\,y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{102}{5}$$

***Vždy musí obě varianty postupu dávat stejný výsledek***, jen se může lišit obtížnost výpočtu (v té které variantě) podle konkrétně zadané funkce $f(x;y)$ a vyjádřených mezí.

/$x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}$/ 1. Vypočítejte: $\iint\limits_{\mathcal{F}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ jestliže pro souřadnice bodů oblasti $\mathcal{F}$ platí:

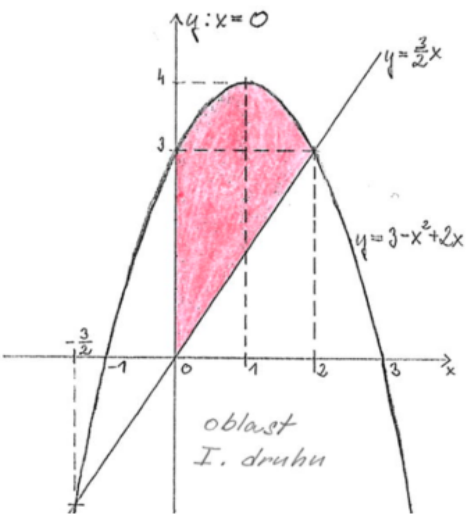
$$0 \le x \quad , \quad y \le 3 - x^2 + 2x \quad , \quad \tfrac{3}{2}x \le y$$

$$3 - x^2 + 2x = \frac{3}{2}x$$

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -\frac{3}{2}$$

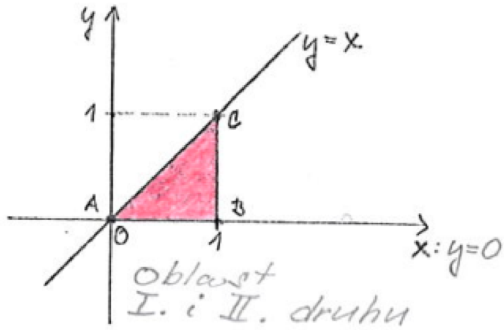



$$\iint\limits_{\mathcal{F}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left\{ \int_{\frac{3}{2}x}^{3-x^2+2x} x\,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_0^2 \Big[xy\Big]_{\frac{3}{2}x}^{3-x^2+2x} \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^2 \left[x\cdot(3-x^2+2x) - x\cdot\left(\frac{3}{2}x\right)\right] \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(3x - x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = 6 - 4 + \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}/$ 2. Vypočítejte: $\displaystyle\iint\limits_{\triangle ABC} x\,y^2\,dx\,dy$ kde: A = [0;0] , B = [1;0] , C = [1;1]




Buď $\begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{matrix}$ nebo $\begin{matrix} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{matrix}$

$$\iint\limits_{\triangle ABC} x\,y^2\,dx\,dy = \int_0^1 \left( \int_y^1 x\,y^2\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[ \frac{x^2}{2}\,y^2 \right]_y^1 dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}y^2 - \frac{y^2}{2}\,y^2 \right) dy = \frac{1}{2}\left[ \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - 0 \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{5-3}{15} = \underline{\underline{\frac{1}{15}}}$$

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}/$ 3. Vypočítejte: $\displaystyle\iint\limits_{H} e^x\,dx\,dy$ jestliže pro souřadnice bodů oblasti H platí:
$y \ge 1$ , $y \le 2$ , $x \ge 0$ , $x \le \ln y$

Meze jsou vlastně zadány, nemusíme kreslit obrázek.

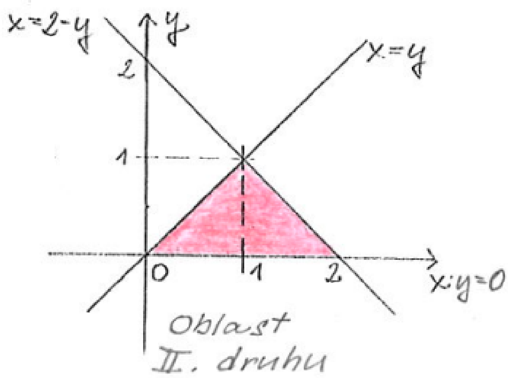
$$\iint\limits_{H} e^x\,dx\,dy = \int_1^2 \left( \int_0^{\ln y} e^x\,dx \right) dy = \int_1^2 \left[ e^x \right]_0^{\ln y} dy = \int_1^2 \left( e^{\ln y} - e^0 \right) dy = \int_1^2 (y-1)\,dy =$$

$$= \left[ \frac{1}{2}y^2 - y \right]_1^2 = (2-2) - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}/$ 4. Vypočítejte: $\displaystyle\iint\limits_{I} (x-y)\,dx\,dy$ jestliže pro souřadnice bodů oblasti I platí:
$0 \le y$ , $y \le x$ , $x + y \le 2$

$$\iint\limits_{I} (x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[ \int_y^{2-y} (x-y)\,dx \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2}x^2 - xy \right]_y^{2-y} dy =$$



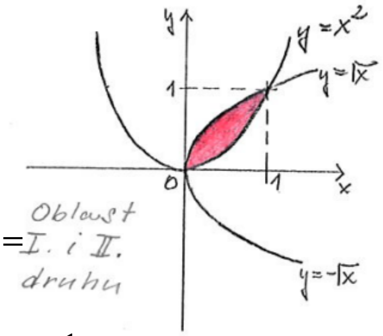

$$= \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{(2-y)^2}{2} - (2-y)\,y \right] - \left[ \frac{(y)^2}{2} - (y)\,y \right] \right\} dy = \int_0^1 \left( 2 - 4y + 2y^2 \right) dy =$$

$$= \left[ 2y - 4\frac{y^2}{2} + 2\frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \left( 2 - 2 + \frac{2}{3} \right) - 0 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}/$ 5. Vypočítejte: $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{J}} (x^2 + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ jestliže pro souřadnice bodů oblasti $\mathcal{J}$ platí:

$$y \geq x^2 \quad , \quad x \geq y^2$$

$$y = \pm\sqrt{x} \qquad \iint\limits_{\mathcal{J}} (x^2 + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x =$$



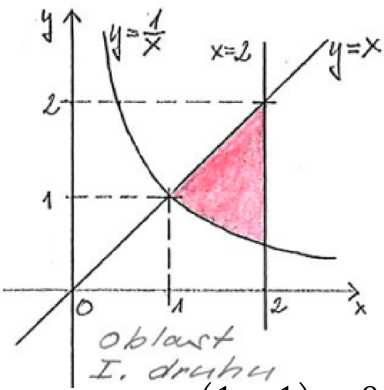

$$= \int\limits_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[\left(x^2\sqrt{x} + \frac{x}{2}\right) - \left(x^2 \cdot x^2 + \frac{(x^2)^2}{2}\right)\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^4\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \underline{\underline{\frac{33}{140}}}$$

$/x \in \mathbb{R};\ y \neq 0/$ 6. Vypočítejte: $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{K}} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ jestliže pro souřadnice bodů oblasti $\mathcal{K}$ platí:

$$x \geq 0 \quad , \quad x \leq 2 \quad , \quad x \geq y \quad , \quad xy \geq 1$$

$$x = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 1$$




$$\iint\limits_{\mathcal{K}} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} x^2 y^{-2}\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 x^2 \left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} \mathrm{d}x =$$

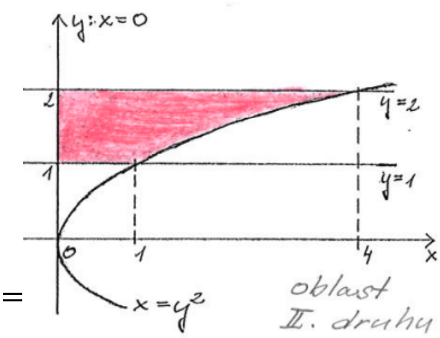
$$= \int\limits_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{x} + x\right) \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 (x^3 - x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 =$$

$$= (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$$

$/x \in \mathbb{R};\ y \neq 0/$ 7. Vypočítejte: $\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{L}} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ jestliže pro souřadnice bodů oblasti $\mathcal{L}$ platí:

$$y \geq 1 \quad , \quad y \leq 2 \quad , \quad x \geq 0 \quad , \quad x \leq y^2$$

$$\iint\limits_{\mathcal{L}} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \left[y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right]_0^{y^2} \mathrm{d}y =$$



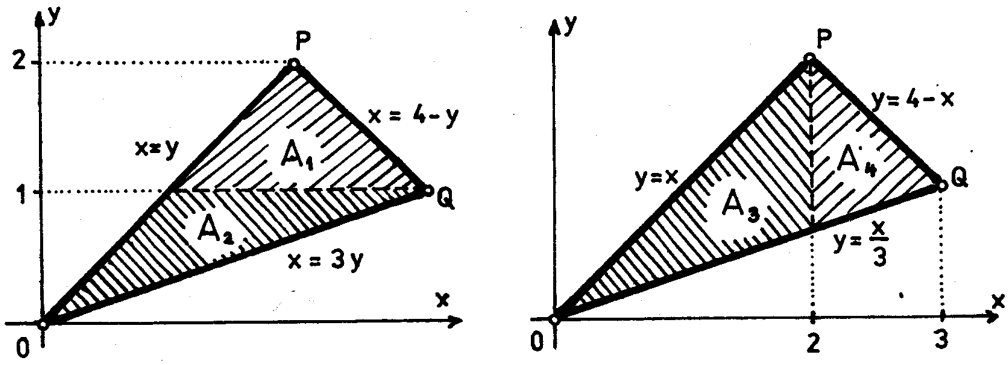

$$= \int\limits_1^2 y\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y - \int\limits_1^2 y\,\mathrm{d}y = \quad \left| \begin{matrix} u = y & v' = \mathrm{e}^y \\ u' = 1 & v = \mathrm{e}^y \end{matrix} \right| \quad =$$

$$= \left[y\mathrm{e}^y\right]_1^2 - \int\limits_1^2 \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y - \left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^2 = (2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}) - \left[\mathrm{e}^y\right]_1^2 - \left(2 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - \mathrm{e}^2 + \mathrm{e} - \frac{3}{2} = \underline{\underline{\mathrm{e}^2 - \frac{3}{2}}}$$

/$x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$/ 8. Vypočítejte: $\iint\limits_{\Omega} (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ , kde oblast $\Omega$ je vnitřek $\Delta OPQ$:

$O=[0;0]$, $P=[2;2]$, $Q=[3;1]$.




$$A_1: \begin{array}{l} 1 \le y \le 2 \\ y \le x \le 4-y \end{array} \qquad A_2: \begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 3y \end{array}$$

$$\iint\limits_{\triangle OPQ} (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{A_1} (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{A_2} (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_1^2 \left[\int_y^{4-y} (x-y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y + \int_0^1 \left[\int_y^{3y} (x-y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - y\,x\right]_y^{4-y} \mathrm{d}y + \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} - y\,x\right]_y^{3y} \mathrm{d}y =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $x \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $x \in \langle y\,;\,4-y\rangle$ nebo $x \in \langle y\,;\,3y\rangle$ , proto

$$= \int_1^2 \left\{\left[\frac{(4-y)^2}{2} - y\,(4-y)\right] - \left[\frac{(y)^2}{2} - y\,(y)\right]\right\} \mathrm{d}y + \int_0^1 \left\{\left[\frac{(3y)^2}{2} - y\,(3y)\right] - \left[\frac{(y)^2}{2} - y\,(y)\right]\right\} \mathrm{d}y =$$

$$= \int_1^2 \left(8 - 4y + \frac{y^2}{2} - 4y + y^2 - \frac{y^2}{2} + y^2\right) \mathrm{d}y + \int_0^1 \left(\frac{9y^2}{2} - 3y^2 - \frac{y^2}{2} + y^2\right) \mathrm{d}y =$$

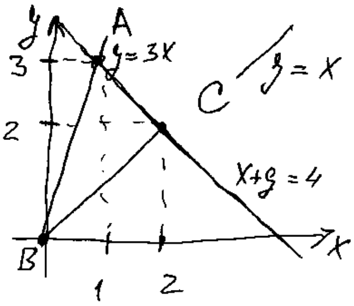
$$= \int_1^2 (2y^2 - 8y + 8)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 2y^2\,\mathrm{d}y = \left[2\frac{y^3}{3} - 8\frac{y^2}{2} + 8y\right]_1^2 + \left[2\frac{y^3}{3}\right]_0^1 =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $y \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $y \in \ldots$ , proto

$$= \left[2\frac{2^3}{3} - 8\frac{2^2}{2} + 8\cdot 2 - \left(2\frac{1^3}{3} - 8\frac{1^2}{2} + 8\cdot 1\right)\right] + \left[2\frac{1^3}{3} - 0\right] = \frac{16}{3} - 16 + 16 - \frac{2}{3} + 4 - 8 + \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

/$x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}$/ 9. Vypočítejte: $\iint\limits_{\Omega} (y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ , kde oblast $\Omega$ je vnitřek $\Delta ABC$:

$A = [1;3],\ B = [0;0],\ C = [2;2]$.




I: $\begin{matrix} 1 \le x \le 2 \\ x \le y \le 4-x \end{matrix}$ II: $\begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 3x \end{matrix}$

$$\iint\limits_{\triangle ABC} (y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{I} (y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{II} (y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_1^2 \left[\int_x^{4-x} (y-x)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x + \int_0^1 \left[\int_x^{3x} (y-x)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_1^2 \left[\frac{y^2}{2} - x\,y\right]_x^{4-x} \mathrm{d}x + \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - x\,y\right]_x^{3x} \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $y \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $y \in \langle x\,;\,4-x\rangle$ nebo $y \in \langle x\,;\,3x\rangle$ , proto

$$= \int_1^2 \left\{\left[\frac{(4-x)^2}{2} - x\,(4-x)\right] - \left[\frac{(x)^2}{2} - x\,(x)\right]\right\} \mathrm{d}x + \int_0^1 \left\{\left[\frac{(3x)^2}{2} - x\,(3x)\right] - \left[\frac{(x)^2}{2} - x\,(x)\right]\right\} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^2 \left(8 - 4x + \frac{x^2}{2} - 4x + x^2 - \frac{x^2}{2} + x^2\right) \mathrm{d}x + \int_0^1 \left(\frac{9x^2}{2} - 3x^2 - \frac{x^2}{2} + x^2\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^2 \left(2x^2 - 8x + 8\right)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x = \left[2\frac{x^3}{3} - 8\frac{x^2}{2} + 8x\right]_1^2 + \left[2\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

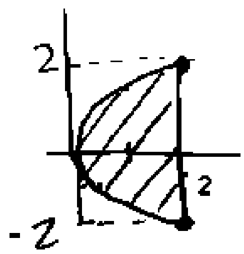
primitivní funkce jsou spojité pro $x \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $x \in \ldots$ , proto

$$= \left[2\frac{2^3}{3} - 8\frac{2^2}{2} + 8\cdot 2 - \left(2\frac{1^3}{3} - 8\frac{1^2}{2} + 8\cdot 1\right)\right] + \left[2\frac{1^3}{3} - 0\right] = \frac{16}{3} - 16 + 16 - \frac{2}{3} + 4 - 8 + \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

/$x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R}$/ 10. Vypočítejte: $\iint\limits_{\Omega} x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ , kde oblast $\Omega$ je omezena nerovnostmi:

$x \le 2\,;\ y^2 \le 2x$ .

buď: $\begin{matrix} 0 \le x \le 2 \\ -\sqrt{2x} \le y \le \sqrt{2x} \end{matrix}$ nebo: $\begin{matrix} -2 \le y \le 2 \\ \frac{y^2}{2} \le x \le 2 \end{matrix}$




$$\iint\limits_{\Omega} x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} x\,y\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_1^2 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \mathrm{d}x =$$

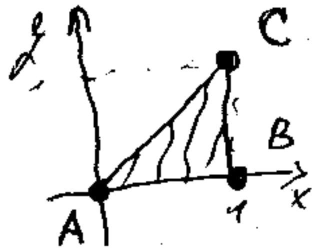
primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $y \in \left\langle -\sqrt{2x}\,;\,\sqrt{2x}\right\rangle$ , proto

$$= \int_0^2 x\left[\frac{(\sqrt{2x})^2}{2} - \frac{(-\sqrt{2x})^2}{2}\right] \mathrm{d}x = \int_0^2 x\cdot 0\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{0}}$$

$/4x^2 \geq y^2 \;\Rightarrow\; 2x \geq |y|/$ 11. Vypočítejte: $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{4x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ , kde oblast $\Omega$ je vnitřek $\Delta ABC$:

$A = [0;0]$, $B = [1;0]$, $C = [1;1]$.

buď: $\begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{matrix}$ nebo: $\begin{matrix} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 1 \end{matrix}$




$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{4x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left( \int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = 2x \sin t \\ \mathrm{d}y = 2x \cos t \,\mathrm{d}t \\ \begin{array}{c|c} y & t \\ \hline x & \frac{\pi}{6} \\ 0 & 0 \end{array} \end{array} \right|$$

$$= \int_0^1 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4x^2 \underbrace{(1 - \sin^2 t)}_{\cos^2 t}} \cdot 2x \cos t \,\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left( \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2 \cdot |x| \cdot |\cos t| \cdot 2x \cos t \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x =$$

$$= 4 \int_0^1 \left( x^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \\ \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t \\ \hline 2\cos^2 t = 1 + \cos 2t \end{array} \right| \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \left| \begin{array}{c} 2t = u \\ 2\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}t = \frac{du}{2} \\ \begin{array}{c|c} t & u \\ \hline \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} \\ 0 & 0 \end{array} \end{array} \right|$$

$$= 4 \int_0^1 \left( x^2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \cos u}{2} \cdot \frac{du}{2} \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \left[ u + \sin u \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce je spojitá pro $u \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $u \in \langle 0 ; \frac{\pi}{3} \rangle$ , proto

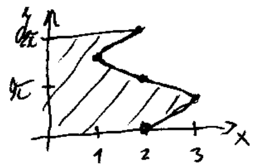
$$= \int_0^1 x^2 \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 - 0 \right) \mathrm{d}x = \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $x \in \langle 0 ; 1 \rangle$ , proto

$$= \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \left( \frac{1}{3} - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}}}$$

$/4x^2 \geq y^2 \;\Rightarrow\; 2x \geq |y|/$ 12. Vypočítejte: $\displaystyle\iint_\Omega \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ , kde oblast $\Omega$ je omezena nerovnostmi:

$$0 \leq x \leq 2 + \sin y \quad ; \quad 0 \leq y \leq 2\pi$$



$$\iint_\Omega \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2+\sin y} x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2+\sin y}\mathrm{d}y =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $x \in \langle 0\,;\,2+\sin y\rangle$ , proto

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[(2+\sin y)^2 - 0\right]\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(4 + 4\sin y + \sin^2 x\right)\mathrm{d}y =$$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$
$\cos^2 y - \sin^2 y = \cos 2y \;\; |.(-1)$

$2\sin^2 y = 1 - \cos 2y$

$\sin^2 y = \frac{1-\cos 2y}{2}$

$$= \int_0^{2\pi}\left(1 + \sin y + \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 2y}{2}\right)\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}y + \int_0^{2\pi}\sin y\,\mathrm{d}y + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}y - \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\cos\underbrace{2y}_{t}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \Big[y\Big]_0^{2\pi} + \Big[-\cos y\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{8}\Big[y\Big]_0^{2\pi} - \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\sin 2y\right]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $y \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $y \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$ , proto

$$= 2\pi - 0 + (-\underbrace{\cos 2\pi}_{1} + \underbrace{\cos 0}_{1}) + \frac{1}{8}(2\pi - 0) - \frac{1}{16}(\underbrace{\sin 2\pi}_{0} - \underbrace{\sin 0}_{0}) = \underline{\underline{\frac{9}{4}\pi}}$$