

Křivkový integrál reálné funkce ve vektorovém poli

Studijní materiály

Má-li vektorová funkce $\vec{f}(x, y, z)$ popisující vektorové (silové) pole spojité všechny složky na hladké (**orientované**) křivce γ , kde

- oblouk γ je dán parametrickými rovnicemi: $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $z = \chi(t)$; $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$, což lze vyjádřit vektorově takto $\gamma : \vec{r} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \chi(t)\vec{k}$
- **TEČKA** má význam skalárního součinu dvou vektorů
- označuje-li $(\vec{r})' = \frac{d\vec{r}}{dt}$, pak $d\vec{r} = (\vec{r})' dt = (\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)) dt$

můžeme podle str. 13 dole skript¹, zavést **křivkový integrál ve vektorovém poli** jako

$$\int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{f}(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot (\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)) dt$$

nebo jinak

$$\int_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{f}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

což (po provedeném předepsaném skalárním součinu) někdy také píšeme ve tvaru

$$\int_{\alpha}^{\beta} \vec{f}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) dx + y(t) dy + z(t) dz = \int_{\alpha}^{\beta} (x(t) \cdot x'(t) + y(t) \cdot y'(t) + z(t) \cdot z'(t)) dt$$

1. Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu:

$$\int_{\gamma} (y\vec{i} - x\vec{j} + 2z\vec{k}) \cdot d\vec{r}, \quad \text{kde souřadnice bodů křivky } \gamma \text{ vyhovují vztahům:}$$

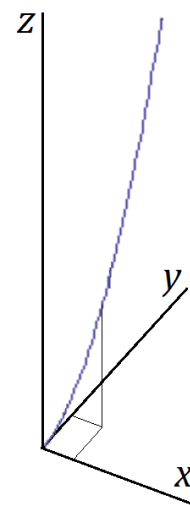
$$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$$

$$0 \leq x \leq 1; x = y; z = 2x^2 + 3y^2$$

Napišeme parametrické rovnice křivky γ ,

když za proměnnou x zvolíme parametr t .

$$\begin{aligned} x = t & & x' = 1 \\ y = t & & y' = 1 \\ z = 2t^2 + 3t^2 = 5t^2 & & z' = 10t \\ & & t \in \langle 0; 1 \rangle \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (y\vec{i} - x\vec{j} + 2z\vec{k}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 (t\vec{i} - t\vec{j} + 10t^2\vec{k}) \cdot (1\vec{i} + 1\vec{j} + 10t\vec{k}) dt = \\ &= \int_0^1 (t - t + 100t^3) dt = \int_0^1 100t^3 dt = \left[100 \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \left[25t^4 \right]_0^1 = \end{aligned}$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; 1 \rangle$, proto $= 25(1 - 0) = \underline{\underline{25}}$

¹ DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Křivkové integrály*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006, ISBN 80-7204-452-4.

2. Vypočítejte křivkový integrál druhého druhu:

$$\int_{\gamma} (z \vec{i} + xz \vec{j} + x \vec{k}) \cdot d\vec{r}, \quad \text{kde křivka } \gamma \text{ je tvořena body o souřadnicích:}$$

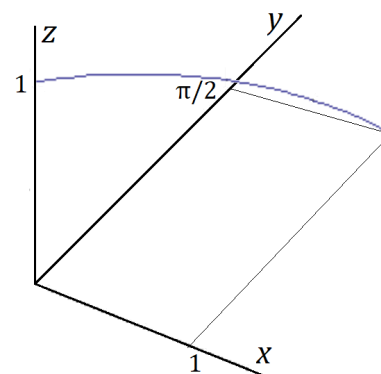
$$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$$

$$[\sin t; t; \cos t] \quad \text{a} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

K zadaným **parametrickým rovnicím křivky** γ přepíšeme derivace jednotlivých souřadnic.

$$\begin{aligned} x &= \sin t & x' &= \cos t \\ y &= t & y' &= 1 \\ z &= \cos t & z' &= -\sin t \end{aligned}$$

$$t \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$



$$\int_{\gamma} (z \vec{i} + xz \vec{j} + x \vec{k}) \cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \vec{i} + \sin t \cos t \vec{j} + \sin t \vec{k}) \cdot (\cos t \vec{i} + 1 \vec{j} - \sin t \vec{k}) dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos^2 t - \sin^2 t) + \frac{1}{2}(2 \sin t \cos t)] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) dt = \left| \begin{array}{l|l|l} 2t = u & t & u \\ 2 dt = du & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ dt = \frac{du}{2} & 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\cos u + \frac{1}{2} \sin u \right) \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \left[\sin u - \frac{1}{2} \cos u \right]_0^{\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $u \in \mathbb{R}$, tedy i pro $u \in \langle 0; \pi \rangle$, proto

$$= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\sin \pi}_0 - \frac{1}{2} \underbrace{\cos \pi}_{-1} - \left(\underbrace{\sin 0}_0 - \frac{1}{2} \underbrace{\cos 0}_1 \right) \right] = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

3. Vypočítejte cirkulaci (křivkový integrál druhého druhu přes uzavřenou křivku):

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{x+y}{x^2+y^2} \vec{i} - \frac{x-y}{x^2+y^2} \vec{j} \right) \cdot d\vec{r} \quad \text{kde uzavřená křivka } \gamma \text{ je kladně orientovaná kružnice,}$$

se středem $S=[0;0]$ a poloměrem $r = 2$.

/ $x \neq 0 \vee y \neq 0$ /

Napišeme parametrické rovnice křivky γ , včetně prvních derivací:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos t & x' &= -2 \sin t \\ y &= 2 \sin t & y' &= 2 \cos t \\ t &\in \langle 0; 2\pi \rangle \end{aligned}$$

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{x+y}{x^2+y^2} \vec{i} - \frac{x-y}{x^2+y^2} \vec{j} \right) \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2 \cos t + 2 \sin t}{(2 \cos t)^2 + (2 \sin t)^2} \vec{i} - \frac{2 \cos t - 2 \sin t}{4(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1)} \vec{j} \right] \cdot (-2 \sin t \vec{i} + 2 \cos t \vec{j}) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{(2 \cos t + 2 \sin t) \cdot (-2 \sin t)}{4} - \frac{(2 \cos t - 2 \sin t) \cdot (2 \cos t)}{4} \right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t - \sin^2 t - \cos^2 t + \sin t \cos t) dt = - \int_0^{2\pi} dt = - [t]_0^{2\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$, proto $= -(2\pi - 0) = \underline{\underline{-2\pi}}$

4. Vypočítejte křivkový integrál ve vektorovém poli:

$$J = \int_{\gamma} \left[\left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) \vec{i} + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) \vec{j} \right] \cdot d\vec{r}, \text{ kde křivka } \gamma \text{ je úsečka začínající v bodě}$$

$A = [1; \pi]$ a končící v bodě $B = [2; \pi]$.

/ $x \neq 0; y \in \mathbb{R}$ /

Napišeme parametrické rovnice úsečky γ , rovnoběžné s osou x :

$$\begin{aligned} x &= t & x' &= 1 \\ y &= \pi & y' &= 0 \\ t &\in \langle 1; 2 \rangle \end{aligned}$$

$$J = \int_1^2 \left[\left(1 - \frac{\pi^2}{t^2} \cos \frac{\pi}{t} \right) \vec{i} + \left(\sin \frac{\pi}{t} + \frac{\pi}{t} \cos \frac{\pi}{t} \right) \vec{j} \right] \cdot (1 \vec{i} + 0 \vec{j}) dt =$$

$$= \int_1^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{t^2} \cos \frac{\pi}{t} \right) dt = \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{t} = w \\ -\frac{\pi}{t^2} dt = dw \\ dt = -\frac{t^2}{\pi} dw \end{array} \right| \begin{array}{l} t \\ 2 \\ \frac{\pi}{2} \\ 1 \\ \pi \end{array} = \int_1^2 dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi^2}{t^2} \cos w \cdot \frac{-t^2}{\pi} dw =$$

$$= \int_1^2 dt + \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos w dw = [t]_1^2 + \pi [\sin w]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

primitivní funkce jsou spojitě pro $t \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}$,
tedy i pro $t \in \langle 1; 2 \rangle, w \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$ proto

$$= (2 - 1) + \pi \cdot \left(\underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 - \underbrace{\sin \pi}_0 \right) = \underline{\underline{1 + \pi}}$$

5. Vypočítejte křivkový integrál:

$$\int_{\gamma} (\vec{i} + x\vec{j}) \cdot d\vec{r}, \quad \text{kde křivka } \gamma : y = x^2 \text{ začíná v bodě } [1; ?] \text{ a končí v bodě } [2; ?].$$

$x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$

Napišeme parametrické rovnice křivky γ :

$$\begin{aligned} x &= t & x' &= 1 \\ y &= t^2 & y' &= 2t \\ t &\in (1; 2) \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma} (\vec{i} + x\vec{j}) \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (1\vec{i} + t\vec{j}) \cdot (1\vec{i} + 2t\vec{j}) dt = \int_1^2 (1 + 2t^2) dt = \left[t + 2\frac{t^3}{3} \right]_1^2 =$$

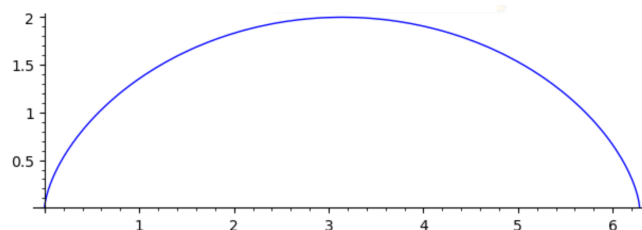
primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}, \dots$

$$= \left(2 + 2\frac{2^3}{3} \right) - \left(1 + 2\frac{1^3}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{17}{3}}}$$

6. Vypočítejte křivkový integrál:

$$\int_{\gamma} [(2-y)\vec{i} - (1-y)\vec{j}] \cdot d\vec{r}, \quad \text{kde křivka } \gamma : \begin{aligned} x &= t - \sin t & x' &= 1 - \cos t \\ y &= 1 - \cos t & y' &= \sin t \end{aligned} \quad t \in (0; 2\pi)$$

$x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$



$$\int_{\gamma} [(2-y)\vec{i} - (1-y)\vec{j}] \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \{ [2 - (1 - \cos t)]\vec{i} - [1 - (1 - \cos t)]\vec{j} \} \cdot [(1 - \cos t)\vec{i} + \sin t\vec{j}] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(1 + \cos t)\vec{i} - \cos t\vec{j}] \cdot [(1 - \cos t)\vec{i} + \sin t\vec{j}] dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t - \cos t \sin t) dt =$$

$$\frac{1 = \cos^2 t + \sin^2 t}{1 + \cos 2t = 2 \cos^2 t} \Rightarrow \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

$$\left| \begin{array}{l} 2t = w \\ 2 dt = dw \\ dt = \frac{dw}{2} \\ \hline t \mid w \\ 2\pi \mid 4\pi \\ 0 \mid 0 \end{array} \right.$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1 + \cos 2t}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cos t \sin t}{\sin 2t} \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t - \sin 2t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} (1 - \cos w - \sin w) \frac{dw}{2} = \frac{1}{4} [w - \sin w + \cos w]_0^{4\pi} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $w \in \mathbb{R}$, tedy i pro $w \in (0; 4\pi)$, proto

$$= \frac{1}{4} \left[(4\pi - \underbrace{\sin 4\pi}_0 + \underbrace{\cos 4\pi}_1) - (0 - \underbrace{\sin 0}_0 + \underbrace{\cos 0}_1) \right] = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

7. Vypočítejte křivkový integrál:

$$\int_{\gamma} (xy \vec{i} + (y - x) \vec{j}) \cdot d\vec{r}, \quad \text{kde křivka } \gamma : y = x^3 \text{ začíná v bodě } [0; ?] \text{ a končí v bodě } [1; ?].$$

$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}/$

Napišeme parametrické rovnice křivky γ :

$$\begin{aligned} x &= t & x' &= 1 \\ y &= t^3 & y' &= 3t^2 \\ & & t &\in \langle 0; 1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (xy \vec{i} + (y - x) \vec{j}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 (t \cdot t^3 \vec{i} + (t^3 - t) \vec{j}) \cdot (1 \vec{i} + 3t^2 \vec{j}) dt = \int_0^1 (t^4 + 3t^5 - 3t^3) dt = \\ &= \left[\frac{t^5}{5} + 3 \frac{t^6}{6} - 3 \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \text{primitivní funkce je spojitá pro } t \in \mathbb{R}, \dots = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) - (0) = \underline{\underline{\frac{-1}{20}}} \end{aligned}$$

8. Vypočítejte křivkový integrál:

$$\mathcal{J} = \int_{\gamma} [x \vec{i} + y \vec{j} + (x + y - 1) \vec{k}] \cdot d\vec{r}, \quad \text{kde křivka } \gamma \text{ je úsečka začínající v bodě } A = [1; 1; 1]$$

a končící v bodě $B = [2; 3; 4]$.

$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}/$

Napišeme parametrické rovnice úsečky γ :

$$\begin{aligned} x &= 1 + t & x' &= 1 \\ y &= 1 + 2t & y' &= 2 \\ z &= 1 + 3t & z' &= 3 \\ & & t &\in \langle 0; 1 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_0^1 \left\{ (1+t) \vec{i} + (1+2t) \vec{j} + [(1+t) + (1+2t) - 1] \vec{k} \right\} \cdot (1 \vec{i} + 2 \vec{j} + 3 \vec{k}) dt = \\ &= \int_0^1 [(1+t) + (2+4t) + (3+9t)] dt = \int_0^1 (6+14t) dt = \left[6t + \frac{14t^2}{2} \right]_0^1 = \end{aligned}$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; 1 \rangle$, proto

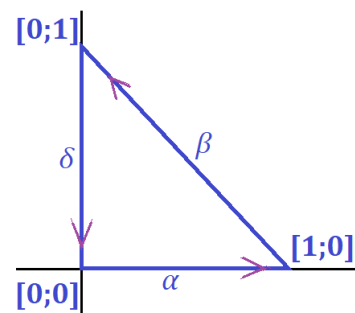
$$= \left(6 + \frac{14}{2} \right) - (0) = \underline{\underline{13}}$$

9. Vypočítejte křivkový integrál:

$$J = \oint_{\gamma} [(x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}] \cdot d\vec{r},$$

$/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}/$

kde křivka γ je **kladně** orientovaný obvod ΔABC o vrcholech $A = [0; 0]$, $B = [1; 0]$, $C = [0; 1]$.



Napišeme parametrické rovnice

tří jednoduchých oblouků (složené) křivky γ
(tedy tří stran trojúhelníka): $\gamma = \alpha \cup \beta \cup \delta$

$$\begin{array}{l} \alpha \\ x = t \quad x' = 1 \\ y = 0 \quad y' = 0 \\ t \in \langle 0; 1 \rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \beta \\ x = 1 - t \quad x' = -1 \\ y = t \quad y' = 1 \\ t \in \langle 0; 1 \rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \delta \\ x = 0 \quad x' = 0 \\ y = 1 - t \quad y' = -1 \\ t \in \langle 0; 1 \rangle \end{array}$$

$$J = \int_{\alpha} [(x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}] \cdot d\vec{r} + \int_{\beta} [(x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}] \cdot d\vec{r} + \int_{\delta} [(x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}] \cdot d\vec{r}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left\{ (t^2 + 0^2)\vec{i} + (t^2 - 0^2)\vec{j} \right\} \cdot (1\vec{i} + 0\vec{j}) dt + \\ &\quad + \int_0^1 \left\{ [(1-t)^2 + t^2]\vec{i} + [(1-t)^2 - t^2]\vec{j} \right\} \cdot (-1\vec{i} + 1\vec{j}) dt + \\ &\quad + \int_0^1 \left\{ [0^2 + (1-t)^2]\vec{i} + [0^2 - (1-t)^2]\vec{j} \right\} \cdot (0\vec{i} - 1\vec{j}) dt = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 [-(1 - 2t + t^2 + t^2) + (1 - 2t + t^2 - t^2)] dt + \int_0^1 (1 - t)^2 dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 dt - \int_0^1 2t^2 dt + \int_0^1 (1 - 2t + t^2) dt = \int_0^1 (1 - 2t) dt = \left[t - 2\frac{t^2}{2} \right]_0^1 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $t \in \mathbb{R}$, tedy i pro $t \in \langle 0; 1 \rangle$, proto

$$= (-1 + 1) - (0) = \underline{\underline{0}}$$

10. Vypočtete práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (3x^2 + 2y^2)\vec{i} + (4xy - 3y^2)\vec{j}$ při přemístění hmotného bodu po oblouku kružnice $x^2 + y^2 = 1$ z bodu $[1; ?]$ do bodu $[?; 1]$,když víte, že práce v tomto případě je určena vzorcem $A = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ / $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$ /

práce je působení síly po dráze

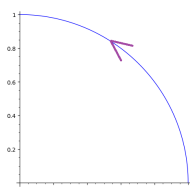
Napišeme parametrické rovnice křivky γ

kladná orientace

$$x = \cos t \quad x' = -\sin t$$

$$y = \sin t \quad y' = \cos t$$

$$t \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

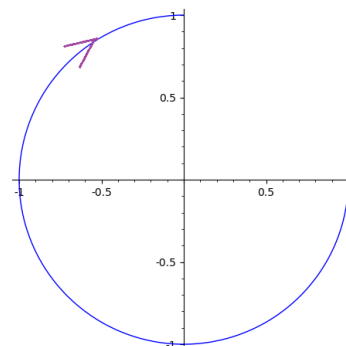


záporná orient.

$$x = \sin t \quad x' = \cos t$$

$$y = \cos t \quad y' = -\sin t$$

$$t \in \left\langle \frac{\pi}{2}; 2\pi \right\rangle$$



$$A_{\text{kl}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(3 \cos^2 t + 2 \sin^2 t) \vec{i} + (4 \cos t \sin t - 3 \sin^2 t) \vec{j} \right] \cdot \left[(-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}) \right] dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(-3 \cos^2 t \sin t - 2 \sin^3 t) + (4 \cos^2 t \sin t - 3 \sin^2 t \cos t) \right] dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t \sin t - 2 \sin^3 t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin^2 t \cos t dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos^2 t + 2(1 - \cos^2 t)] \underbrace{(-\sin t) dt}_{-\sin t dt = du} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin^2 t \cdot \underbrace{\cos t dt}_{\cos t dt = dv} =$$

$$\cos t = u$$

$$-\sin t dt = du$$

$$\sin t = v$$

$$\cos t dt = dv$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v = 1$$

$$t = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$= \int_1^0 (-u^2 + 2 - 2u^2) du - \int_0^1 3v^2 dv = \left[2u - \frac{3u^3}{3} \right]_1^0 - \left[\frac{3v^3}{3} \right]_0^1 =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$, tedy i pro $u \in \langle 0; 1 \rangle, v \in \langle 0; 1 \rangle$, proto

$$= [(0) - (2 - 1)] - [1 - 0] = \underline{\underline{-2}}$$

$$A_{\text{záp}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left[(3 \sin^2 t + 2 \cos^2 t) \vec{i} + (4 \sin t \cos t - 3 \cos^2 t) \vec{j} \right] \cdot \left[(\cos t \vec{i} - \cos t \vec{j}) \right] dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(3 \sin^2 t \cos t + 2 \cos^3 t) + (-4 \sin t \cos^2 t + 3 \cos^3 t) \right] dt = \dots = \underline{\underline{-2}}$$