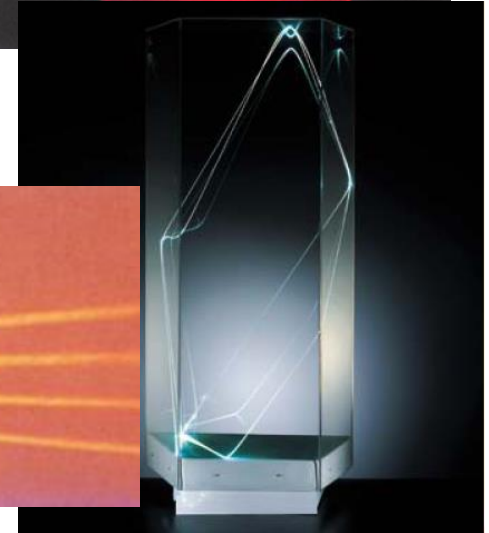
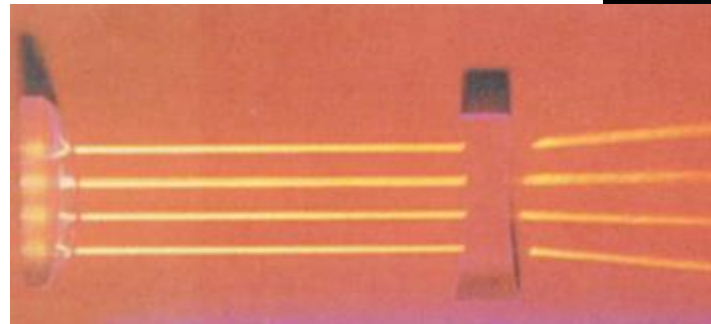
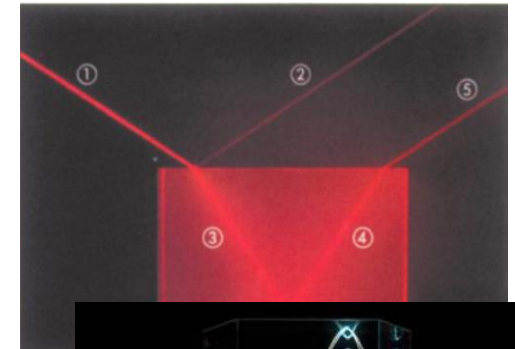


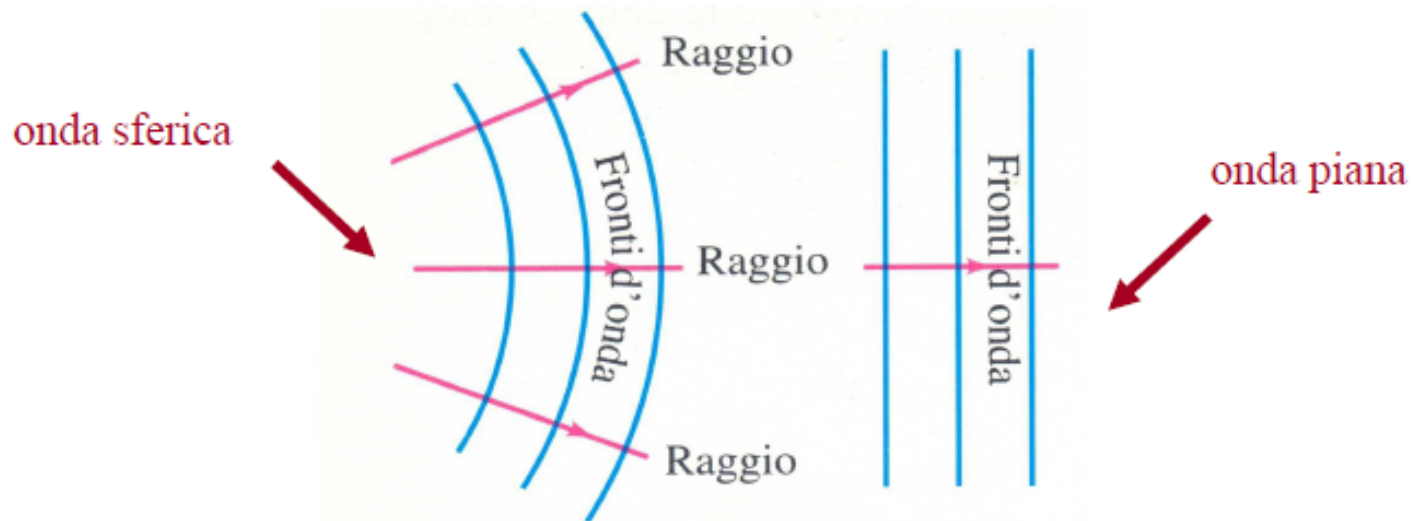
OTTICA GEOMETRICA

L'ottica geometrica definisce le leggi della riflessione e della rifrazione assumendo che la propagazione della luce in un mezzo omogeneo avvenga in linea retta.

Il centro dello studio dell'ottica geometrica è quindi il comportamento di dispositivi ottici quali specchi, diottri e lenti.



l'Ottica geometrica si basa sul concetto di **raggio luminoso e di fronte d'onda**



Grandezze topologiche fondamentali di un'onda:

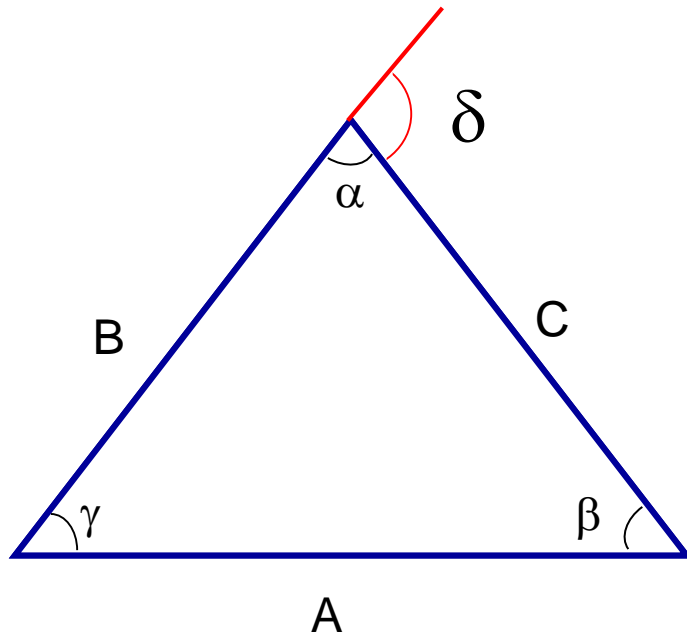
In un mezzo omogeneo la luce si propaga in maniera rettilinea

Piccolo inserto di trigonometria 1

Proprietà degli angoli di un triangolo

La somma degli angoli interni di un triangolo è pari a 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



$$\delta + \alpha = 180^\circ$$

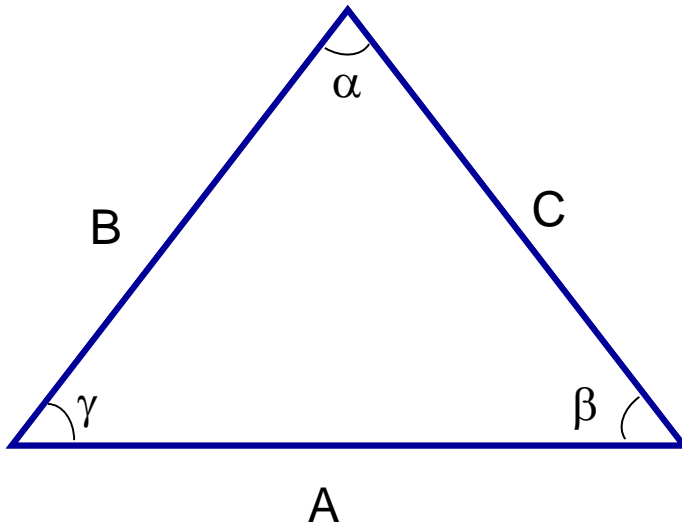
$$\alpha = 180^\circ - \delta$$

$$\beta + \gamma = \delta$$

Piccolo inserto di trigonometria 2

Teorema dei seni

Il rapporto tra il seno di un angolo ed il lato opposto è costante



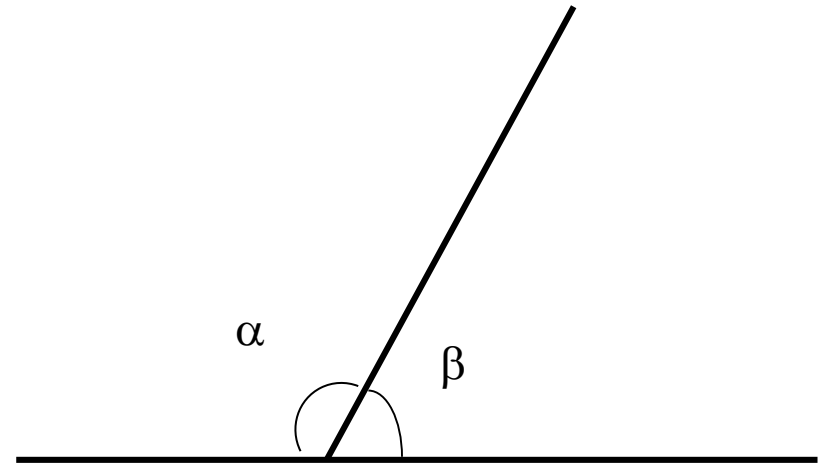
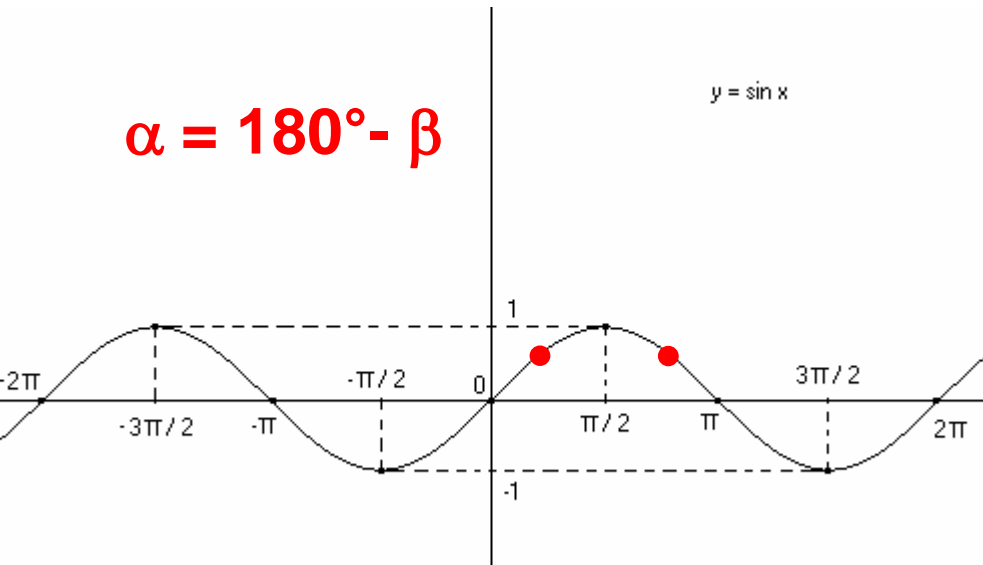
$$\frac{\text{sen}\alpha}{A} = \frac{\text{sen}\beta}{B} = \frac{\text{sen}\gamma}{C}$$

Piccolo inserto di trigonometria 3

Angoli supplementari

Se due angoli sono supplementari (la loro somma è $= 180^\circ$) i loro seni sono uguali:

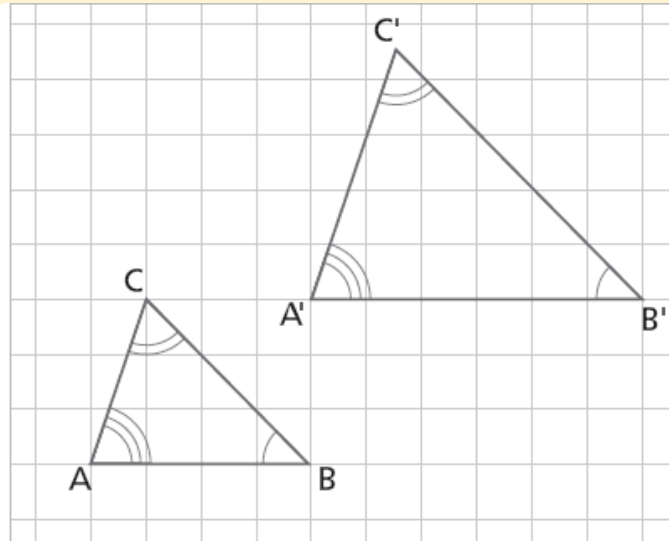
$$\sin \alpha = \sin \beta$$



I TRIANGOLI SIMILI

Per definizione

due triangoli sono simili se hanno tutti gli angoli uguali e i lati corrispondenti in proporzione.



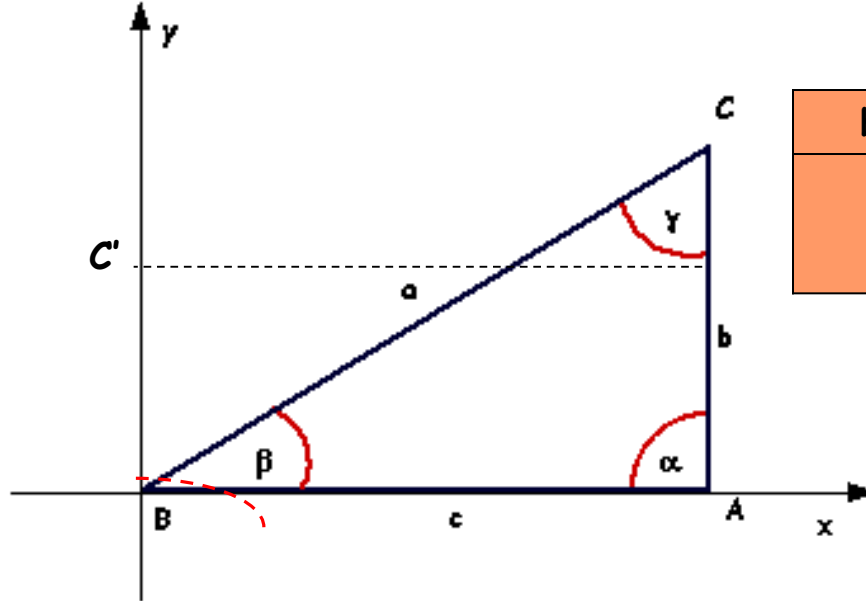
Per determinare se due triangoli sono simili si utilizzano i *criteri di similitudine*:

- **Primo criterio di similitudine.** Se due triangoli hanno due angoli uguali, allora sono simili.
- **Secondo criterio di similitudine.** Se due triangoli hanno due lati proporzionali e gli angoli tra essi compresi uguali, allora sono simili.
- **Terzo criterio di similitudine.** Se due triangoli hanno tutti e tre i lati in proporzione, allora sono simili.

$$\overline{A'C'} : \overline{AC} = \overline{A'B'} : \overline{AB}$$

$$\overline{A'C'} : \overline{AC} = \overline{C'B'} : \overline{CB}$$

Piccolo inserto di trigonometria 4



$$b = a \sin \beta$$

$$c = a \cos \beta$$

$$b = c \operatorname{tg} \beta$$

$$c = b \operatorname{ctg} \beta$$

PROPAGAZIONE RETTILINEA DELLA LUCE

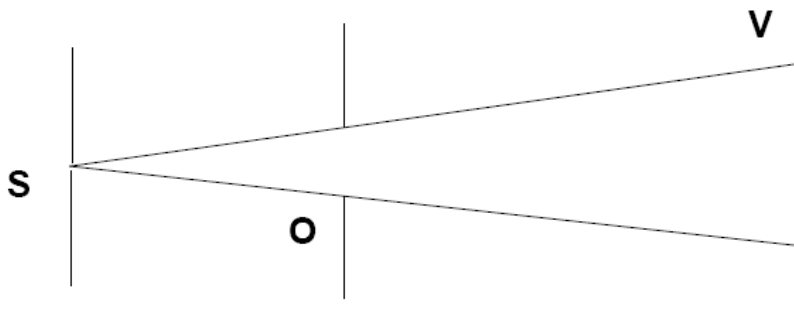


Quando del particolato (aria umida, fumo, etc. permette di visualizzare un fascio di luce, appare evidente come la luce si propaghi in modo rettilineo

La propagazione della luce

La luce si propaga in linea retta

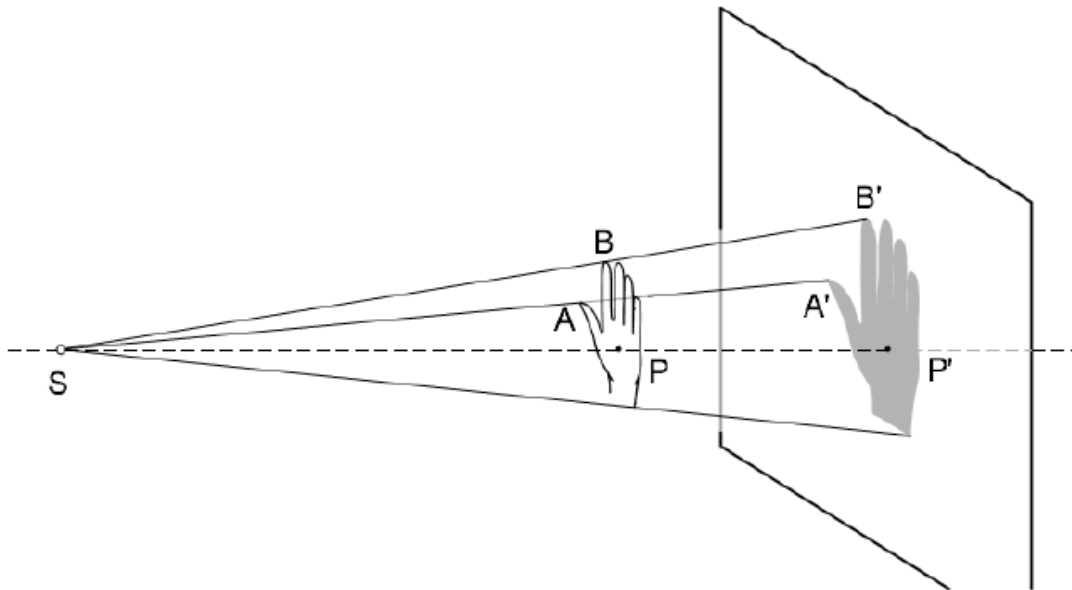
Una fonte luminosa di piccole dimensioni (sorgente puntiforme S) genera, attraverso un schermo forato circolare O, una macchia luminosa nettamente delineata su uno schermo V. La macchia corrisponde alla sezione del cono avente S per vertice e che “si appoggia” sul contorno di O.



La propagazione della luce: le ombre

La luce si propaga in linea retta

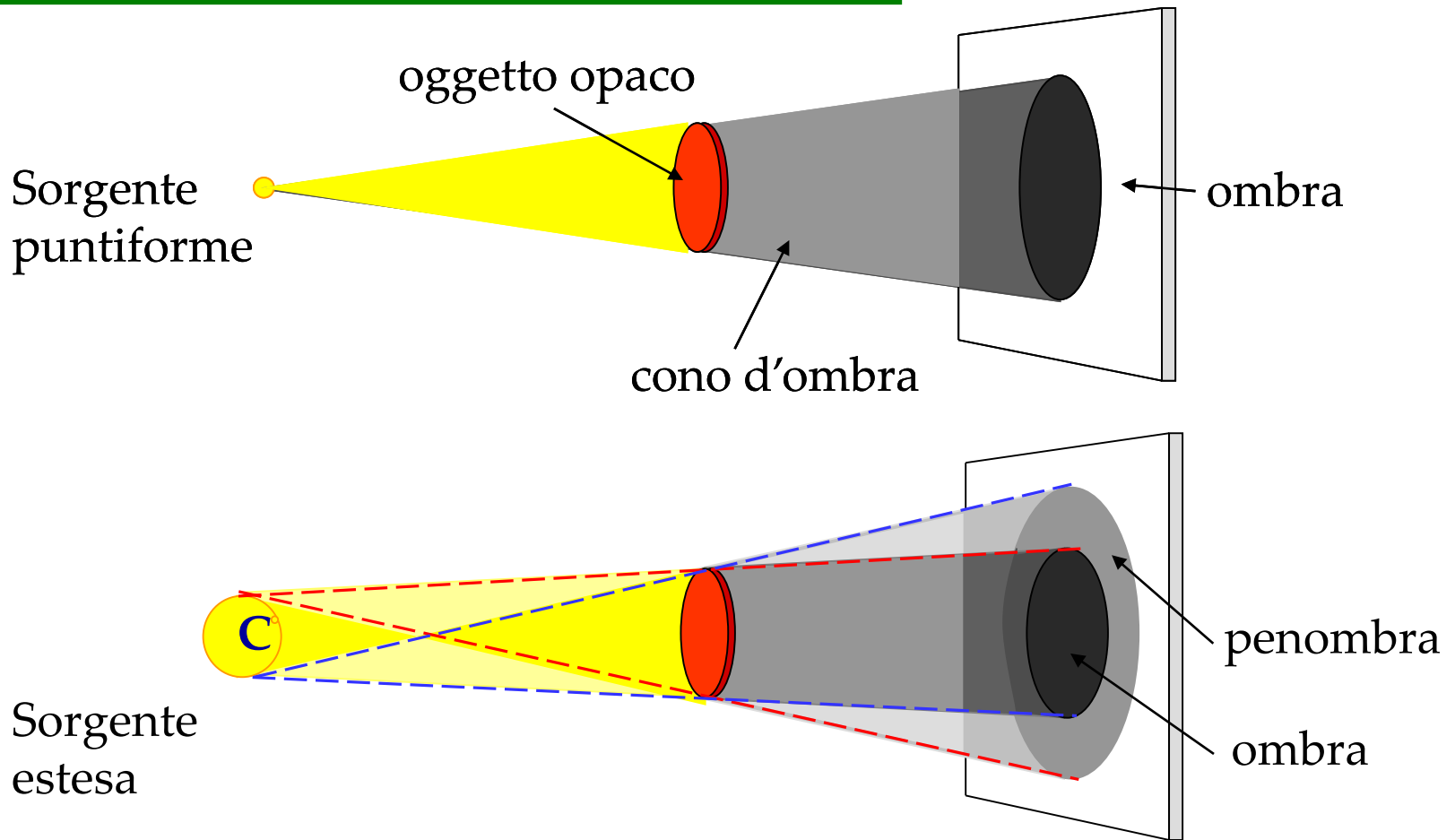
Se mettiamo un ostacolo opaco tra una sorgente puntiforme e uno schermo, otteniamo un'ombra netta.



La forma dell'ombra si ottiene disegnando i raggi rettilinei che partono dalla sorgente puntiforme e toccano i punti estremali dell'oggetto

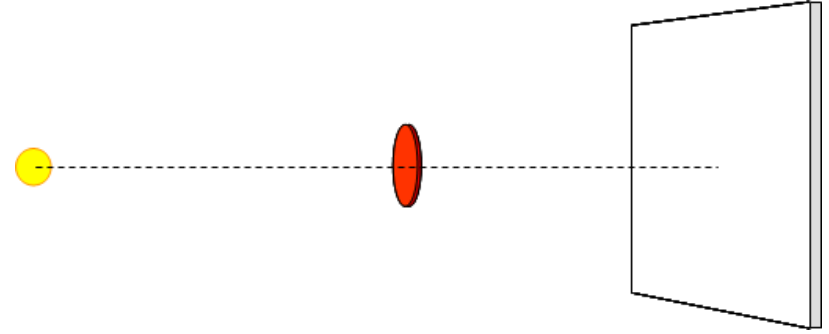
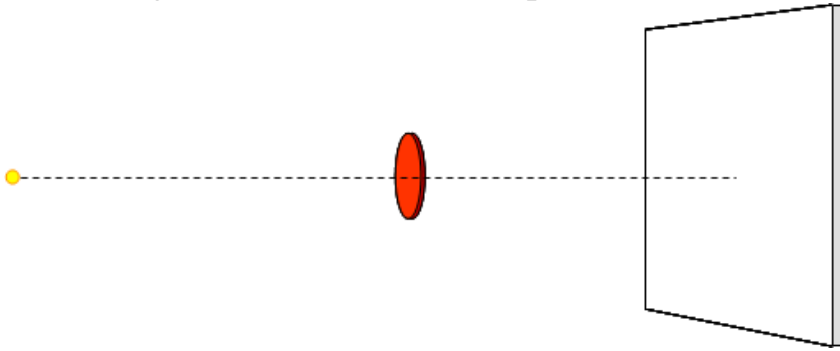
La propagazione della luce: le ombre

La luce si propaga in linea retta

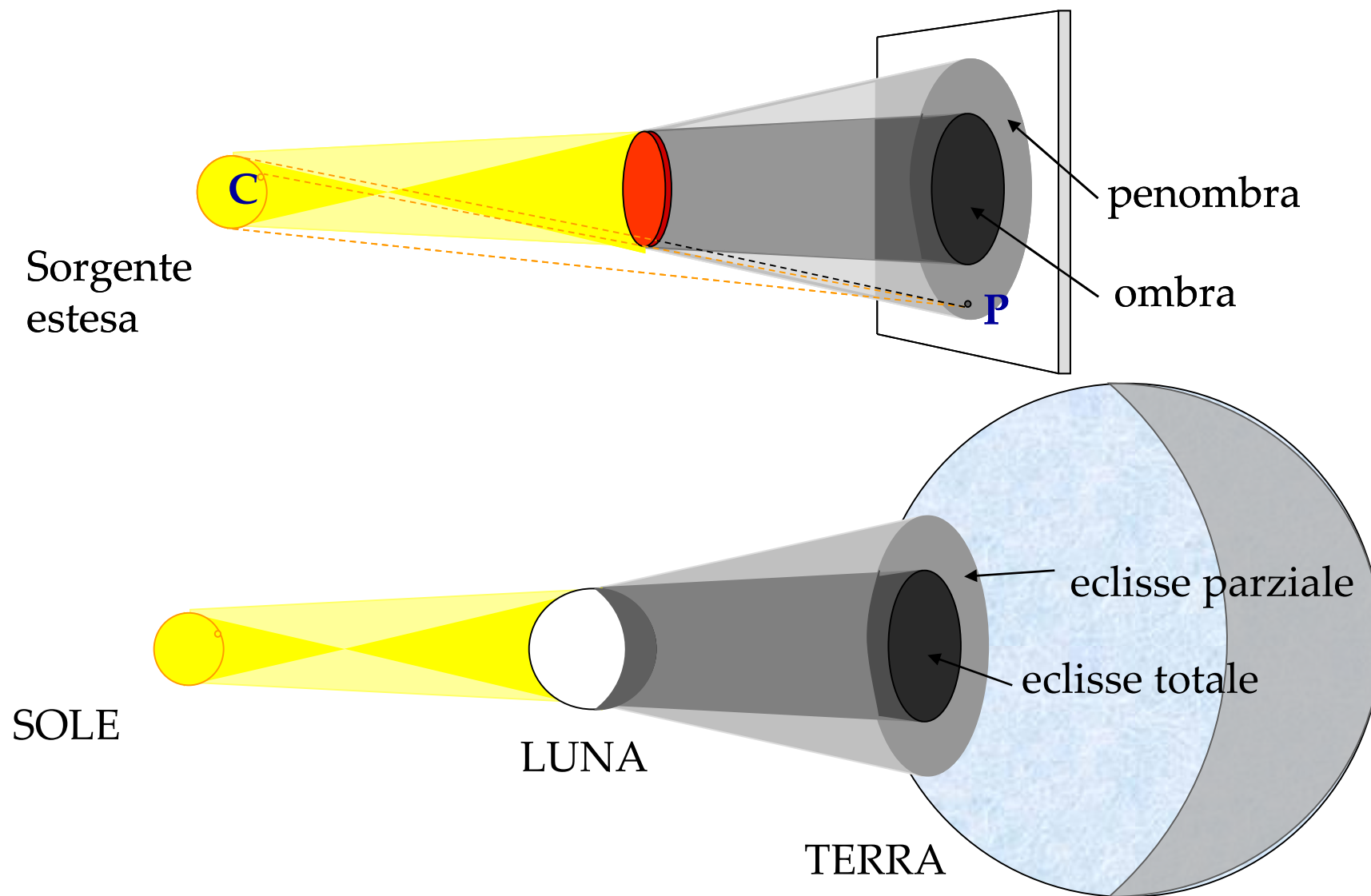


Esercizio Una sorgente puntiforme è posta a 30 cm dal centro di un cerchio opaco di diametro $D=10$ cm .

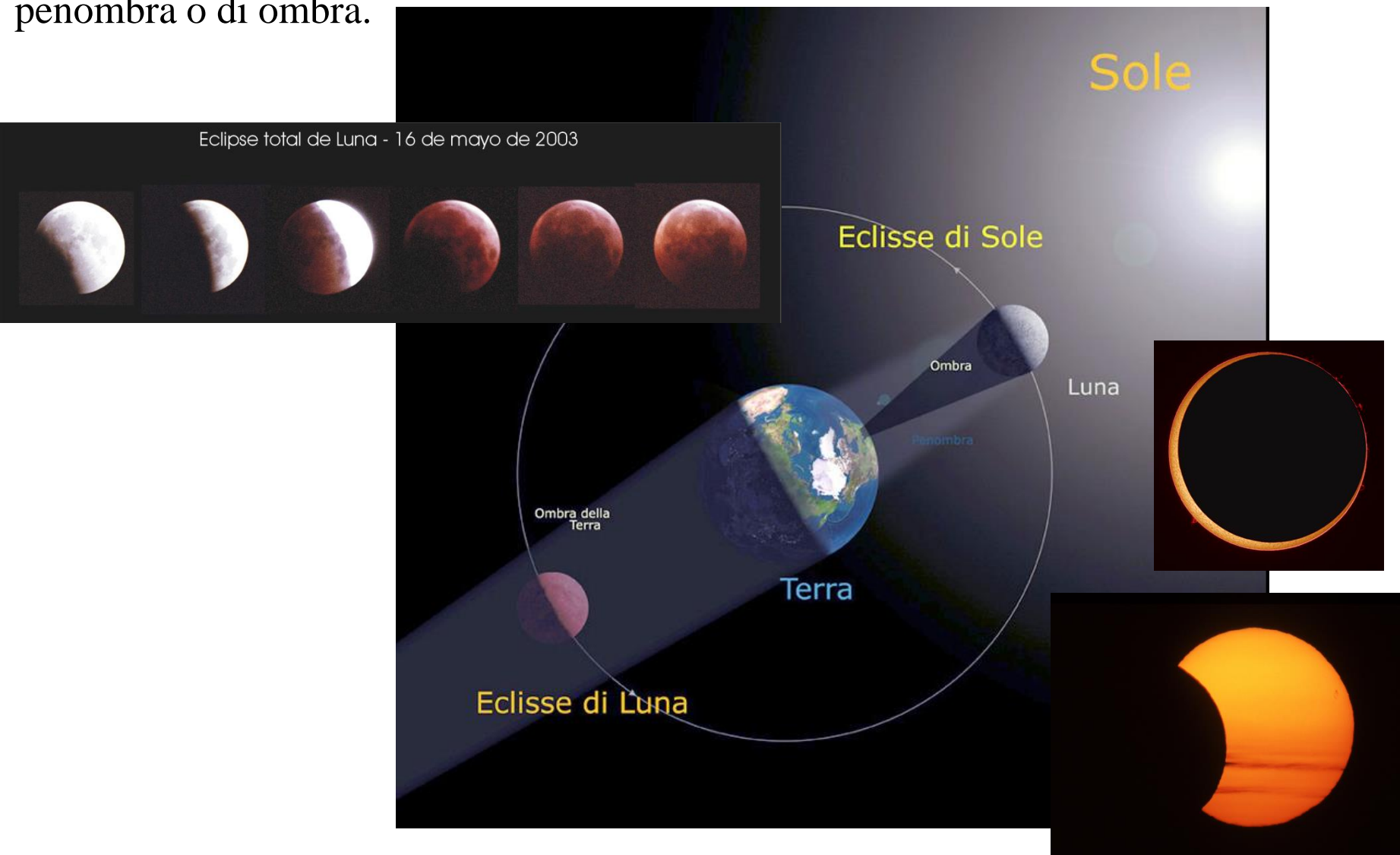
Individuare le zone di ombra che si forma su uno schermo parallelo al piano del disco e posto a una distanza di 20 cm da questo. Come cambia la distribuzione di luce sullo schermo se la sorgente è estesa con diametro pari a quello del disco opaco? Disegnare le zone di ombra e penombra



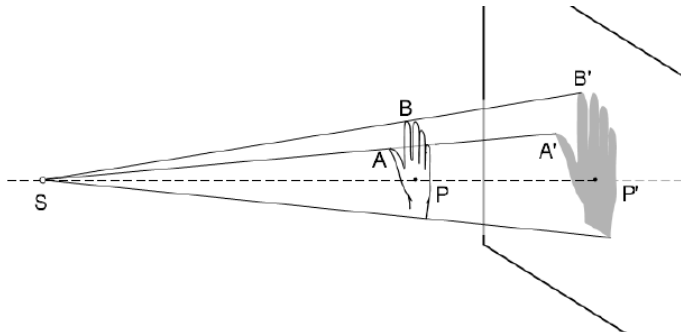
La propagazione della luce: l'eclissi



Gli effetti di penombra possono cancellare del tutto l'ombra netta quando la sorgente e' più grande dell'oggetto e questo si trova abbastanza lontano: tutti i punti dello schermo possono essere raggiunti direttamente dalla luce. Ad esempio l'osservazione dell'eclissi di sole parziale o totale dipende dalla posizione dell'osservatore: se sta in una zona di penombra o di ombra.



Propagazione rettilinea della luce



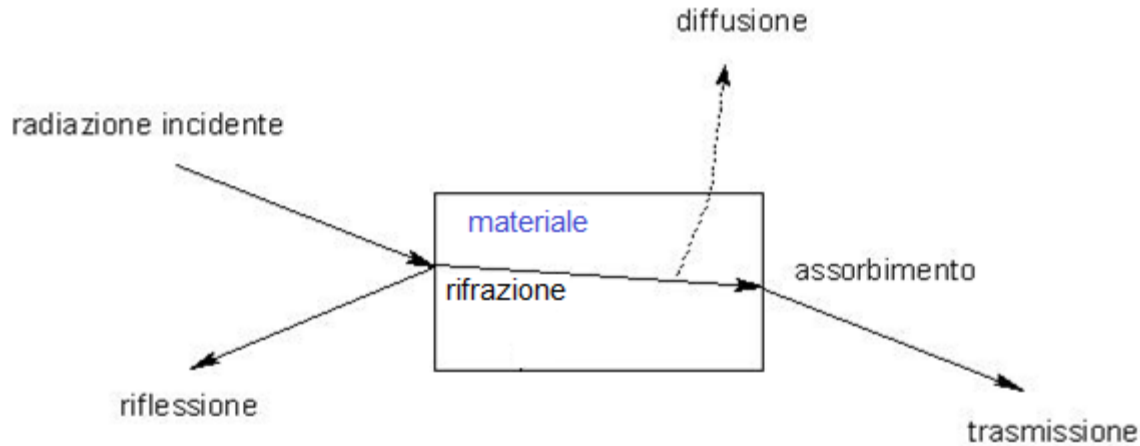
Tutte queste osservazioni, insieme con molte altre, suggeriscono che la luce si propaga, almeno in un ambiente trasparente e omogeneo seguendo rette uscenti dalla sorgente, dette raggi luminosi. L'insieme dei raggi che passano per le aperture (pupille o diaframmi) forma un fascio. Se i raggi provengono tutti da un unico punto si parla di pennello.

Modello a raggi:

la luce percorre solo linee rette → la luce si propaga secondo raggi rettilinei
il raggio ottico, perpendicolare ai fronti d'onda, sostituisce questi ultimi nella rappresentazione della propagazione della luce

Che succede se il mezzo in cui viaggia la luce non è omogeneo?

Interazione luce materia

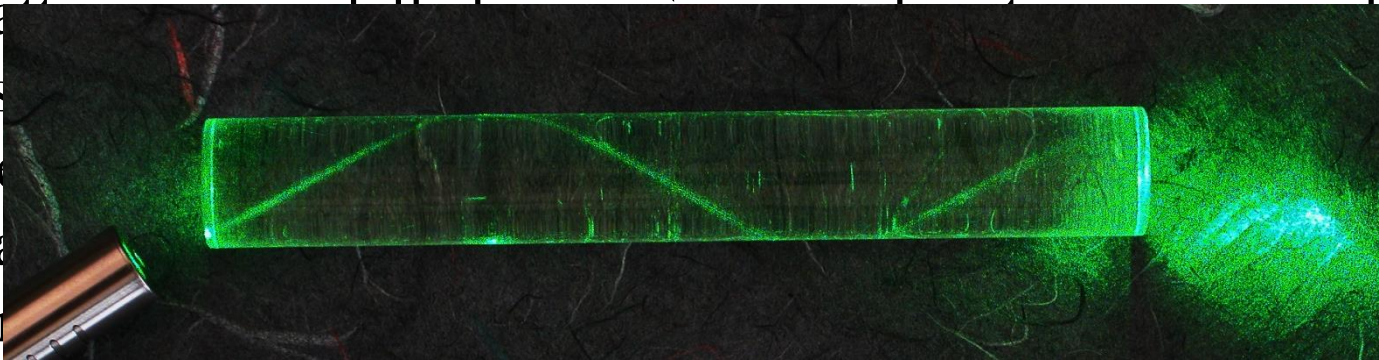


$$T(\lambda) + R(\lambda) + A(\lambda) + D(\lambda) = 1 \quad (T(\lambda) \% + R(\lambda) \% + A(\lambda) \% + D(\lambda) \% = 100\%).$$

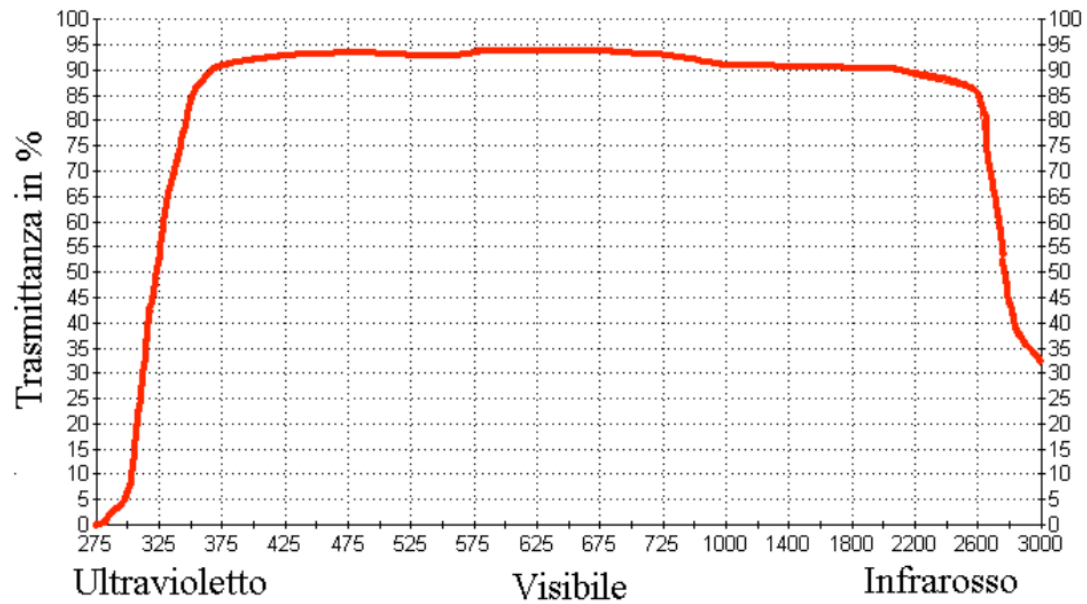
Mezzi trasparenti e opachi

Quando la luce si propaga in un mezzo materiale diverso dal vuoto subisce una diminuzione di intensità luminosa. Tale fenomeno è detto attenuazione della luce.

L'attenuazione della luce in un mezzo materiale è causata dal fatto che una parte della luce viene assorbita o diffusa dal mezzo. La sua intensità diminuisce per

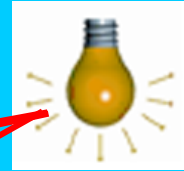


Generica lente in vetro crown



PROBLEMA

Data una sorgente luminosa ed un oggetto, quale è il percorso fatto dai raggi luminosi per andare dalla sorgente all'oggetto?



S

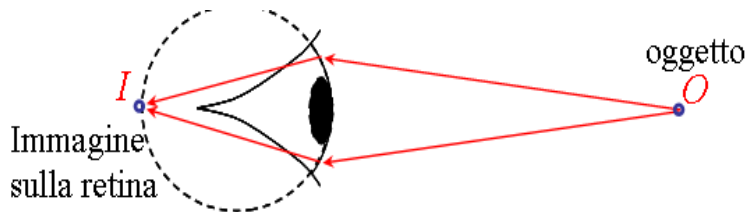
O



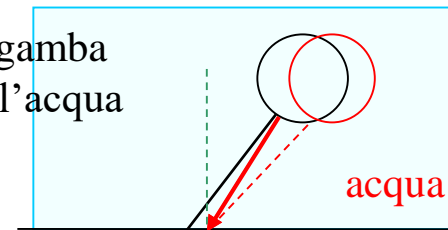
Che possiamo dedurre in base alla nostra esperienza?



Il cervello umano interpreta sempre i raggi come se si propagassero in linea retta: l'oggetto ci appare nella direzione da cui provengono i raggi che l'occhio intercetta



Parte di gamba fuori dell'acqua



acqua

Quando cambia mezzo la luce cambia direzione!

Rifrazione della luce

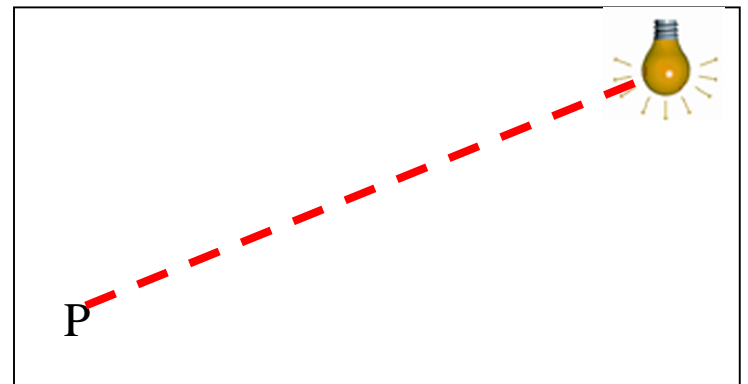


Percorso della luce in un insieme di mezzi: PRINCIPIO DI FERMAT

Il percorso seguito da un raggio di luce per andare da un punto ad un altro attraverso un qualsiasi insieme di mezzi è quello che richiede il minimo tempo

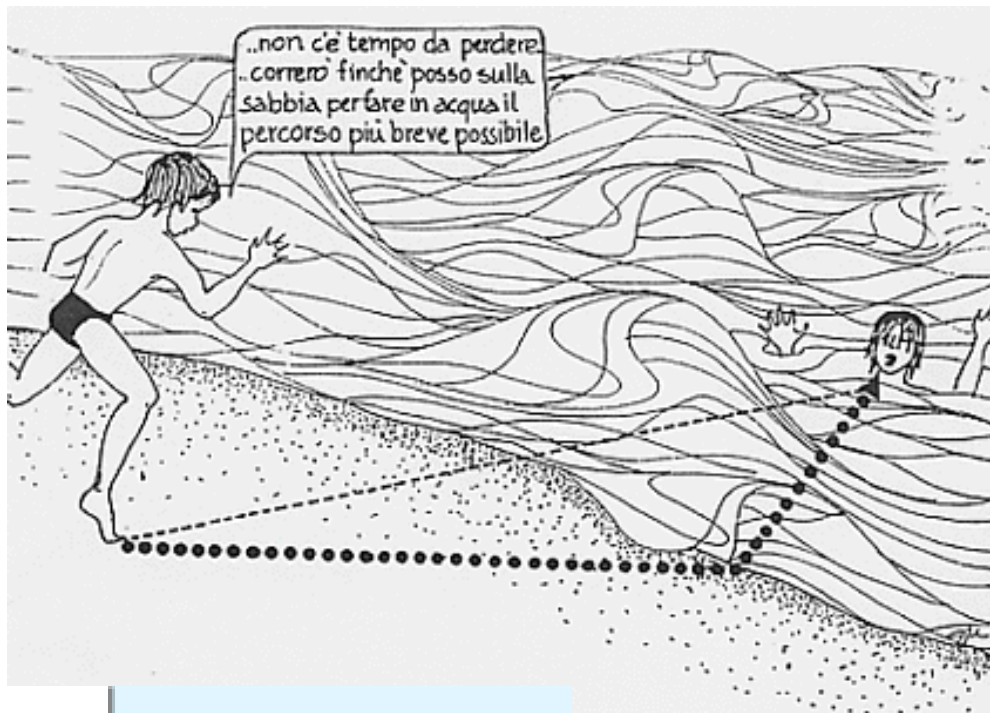


In un mezzo omogeneo, la velocità della luce è costante e il cammino più rapido è una retta.

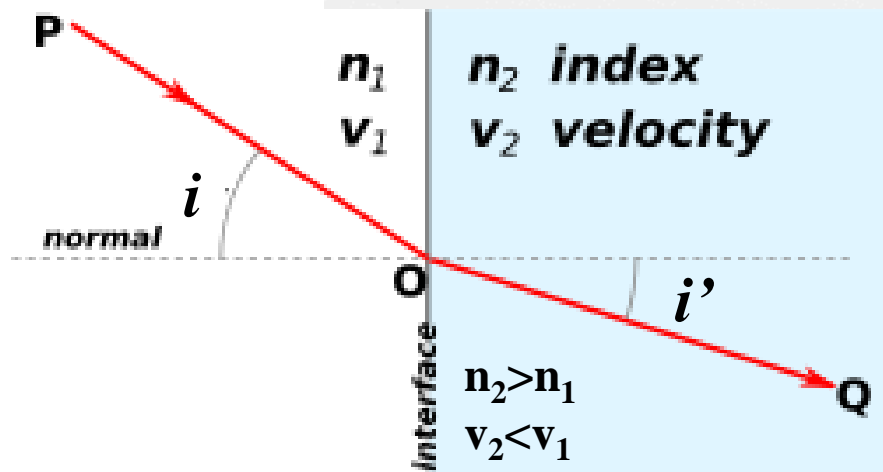


Che succede alla superficie di separazione tra due mezzi diversi?

Se la velocità della luce non è la stessa nei due mezzi il percorso rettilineo non è quello che impiega il minor tempo.



$$v = \frac{c}{n} \quad \text{dove } n \geq 1$$



La Legge di Snell della rifrazione deriva dall'applicazione del principio di Fermat: anche se il percorso del raggio di luce nei due mezzi sembra spezzato e dunque più lungo, è in realtà il più veloce possibile, dati gli indici di rifrazione diversi e la velocità diversa nei due mezzi.

Indice di rifrazione del mezzo

La velocità della luce dipende dal mezzo in cui si propaga. Cambiando mezzo solo la frequenza rimane costante, velocità di propagazione e lunghezza d'onda variano.

- velocità della luce nel vuoto: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s
- velocità della luce nell'aria: $v \cong c$

La velocità nei materiali dipende dalla lunghezza d'onda λ_0 . Si definisce, ad una lunghezza d'onda di riferimento (nella tabella quella del giallo), il valore relativo della velocità nel mezzo e nel vuoto. cioè si definisce:

- **indice di rifrazione standard: rapporto tra la velocità luce nel vuoto e la velocità della luce in una certa sostanza, riferita alla lunghezza d'onda di 589.3 nm (onda monocromatica corrispondente alla luce gialla di una lampada al sodio)**

$$n = \frac{c}{v} \quad \text{dove } n \geq 1$$

Mezzo rifrangente	$n = c/v$
Vuoto	1.0000
Aria (standard)	1.0003
Acqua	1.33
Alcol etilico	1.36
Vetro:	
Quarzo fuso	1.46
Vetro crown	1.52
Vetro flint leggero	1.58
Metacrilato (Plexiglas)	1.51
Cloruro di sodio	1.53
Diamante	2.42

[†] $\lambda = 589$ nm

CONCETTO DI CAMMINO OTTICO

La lunghezza percorsa dalla luce in un tempo t in un mezzo di indice di rifrazione n è:

$$l = v t = \frac{c}{n} t$$

Si definisce cammino ottico l_0 il prodotto dell'indice di rifrazione per la distanza percorsa

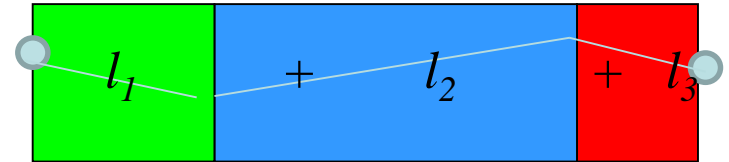
$$l_0 = n l = c t$$

Il cammino ottico corrisponde alla distanza che la luce avrebbe percorso nel vuoto nello stesso intervallo di tempo

Essendo la velocità c una costante, il cammino ottico identifica l'intervallo di tempo t in cui la luce fa un certo percorso l .

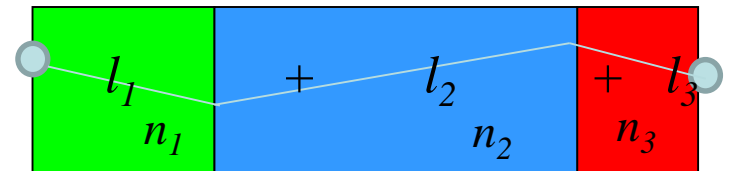
CONCETTO DI CAMMINO OTTICO

Consideriamo un raggio che si propaga in più mezzi diversi



Il cammino effettivamente percorso dal raggio è: $l = l_1 + l_2 + l_3 + \dots$

Il **cammino ottico** percorso dal raggio è:



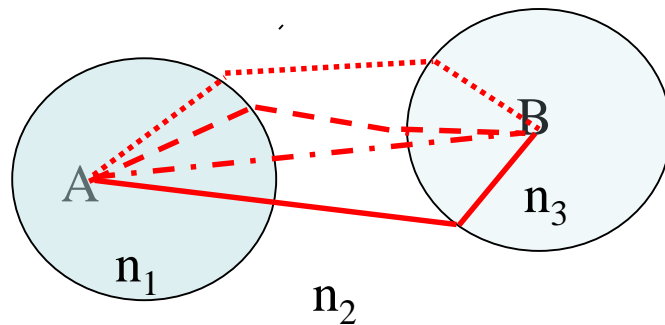
$$l_0 = l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 + \dots = c(t_1 + t_2 + t_3 \dots) = c t_{\text{tot}}$$

PRINCIPIO DI FERMAT

Il percorso seguito da un raggio di luce per andare da un punto ad un altro attraverso un qualsiasi insieme di mezzi è quello che richiede il minimo tempo ovvero il minimo cammino ottico



Dati due punti A e B calcoliamo il cammino ottico di tutti i possibili percorsi tra A e B e troviamo il minimo! Questo è il cammino ottico realmente percorso dalla luce

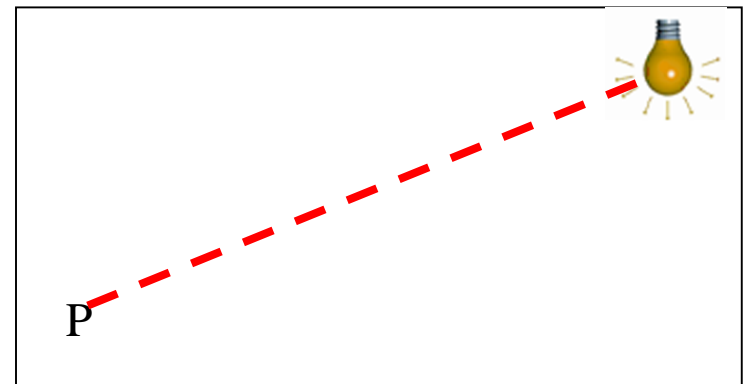


Percorso della luce in un insieme di mezzi: PRINCIPIO DI FERMAT

Il percorso seguito da un raggio di luce per andare da un punto ad un altro attraverso un qualsiasi insieme di mezzi è quello che richiede il minimo tempo ovvero il minimo cammino ottico



In un mezzo omogeneo, la velocità della luce è costante e il cammino più rapido è una retta.



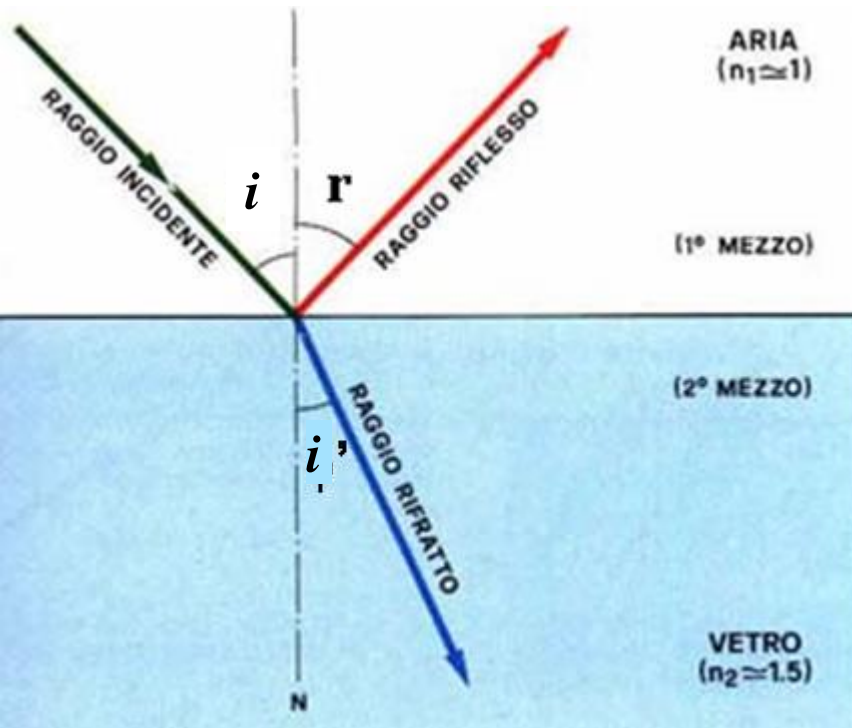
Che succede alla superficie di separazione tra due mezzi diversi?

Riflessione e rifrazione della luce alla superficie di separazione tra due mezzi



Dielettrico → rifrazione + riflessione

Leggi di Snell: quali sono le direzioni del raggio riflesso e del raggio rifratto?



Definiamo la geometria:
si chiamano:

- **angolo di incidenza i** l'angolo tra la direzione di propagazione della luce incidente e la normale alla superficie,
- **angolo di riflessione r** l'angolo tra la normale e la direzione di propagazione dell'onda riflessa,
- **angolo di rifrazione i'** l'angolo tra la normale e la direzione di propagazione dell'onda rifratta.

Il raggio incidente, quello riflesso, quello rifratto e la normale N alla superficie che separa i due mezzi giacciono sullo stesso piano.

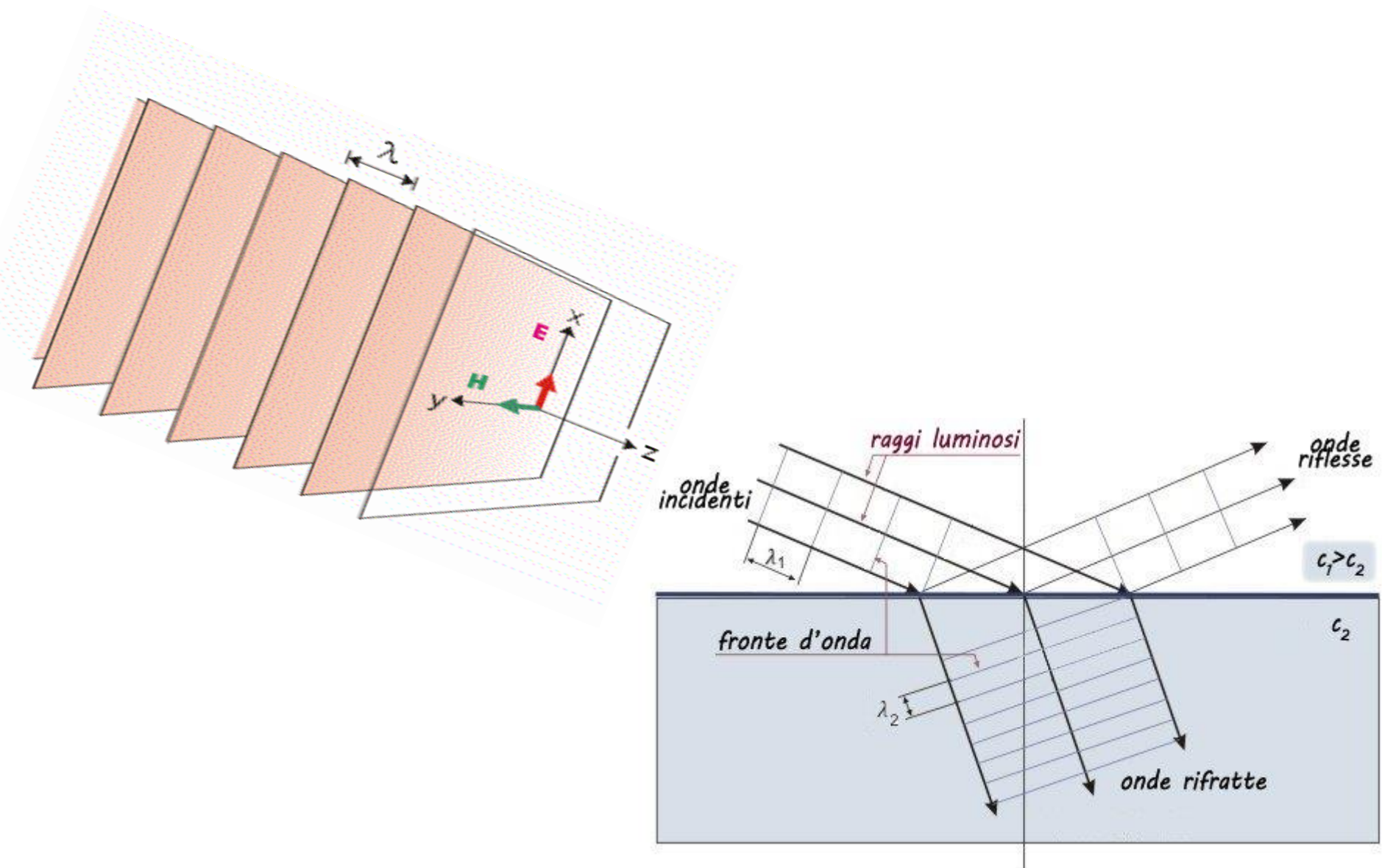
$$i = r$$

Legge di Snell della riflessione

$$n_1 \sin i = n_2 \sin i'$$

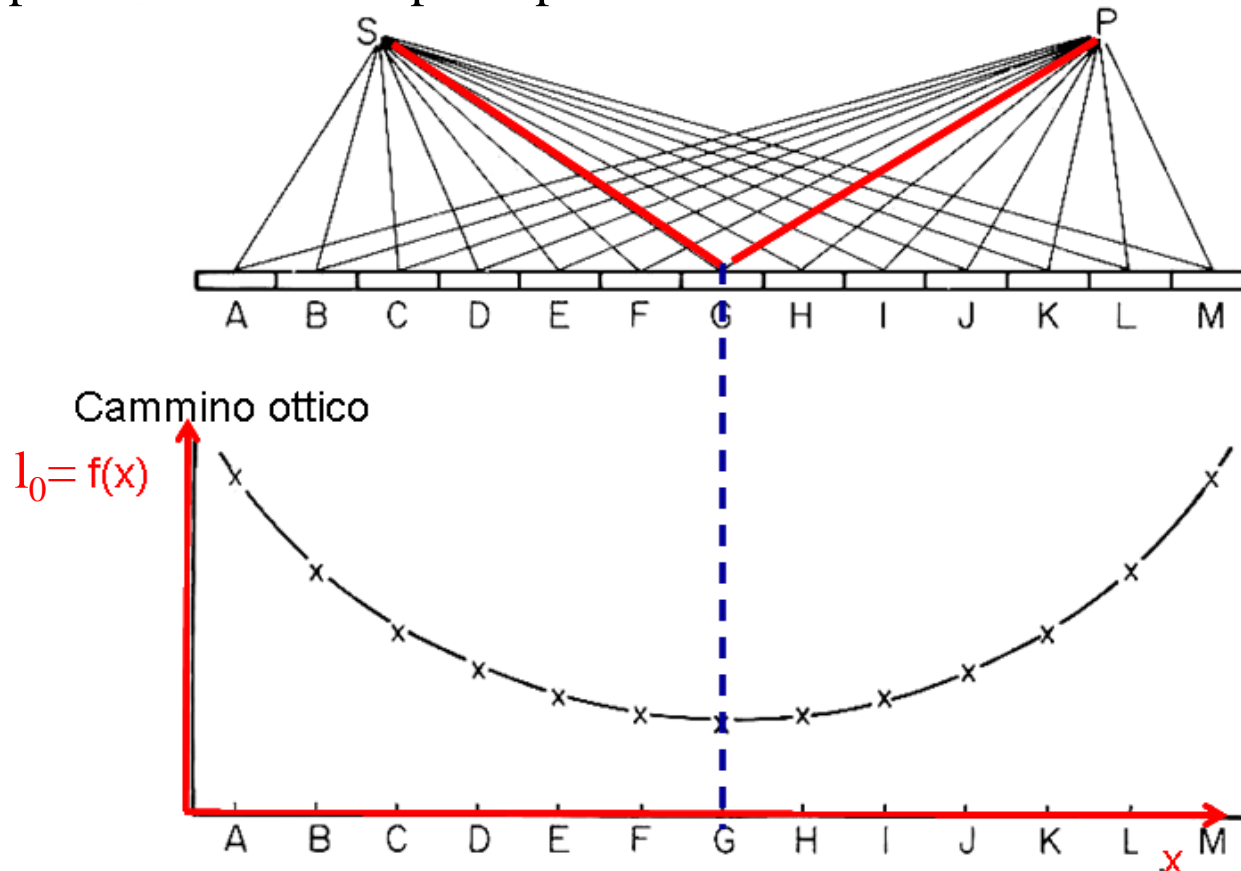
Legge di Snell della rifrazione

Leggi di Snell: variazione direzione di propagazione e dei fronti d'onda



LEGGI SNELL CON TEOREMA DI FERMAT (Riflessione)

- Disegniamo tutti i possibili percorsi tra S e P (passanti per un punto della superficie riflettente)
- misuriamo i corrispondenti cammini ottici
- troviamo il percorso corrispondente al minimo: quello è il percorso fatto dalla luce perché soddisfa il principio di Fermat



Il principio di Fermat afferma che un raggio di luce percorre sempre tra due punti il minimo cammino ottico possibile. La legge della riflessione afferma che un raggio viene riflesso in modo che valga la relazione $\theta_i = \theta_r$.

Si può facilmente dimostrare che il percorso selezionato dalla legge della riflessione corrisponde al minimo cammino ottico possibile. Il raggio 1 in figura soddisfa la relazione $\theta_i = \theta_r$:

Il cammino ottico percorso dal raggio 1 è quindi $nAMB = nAM + nMB$.

Consideriamo ora un qualsiasi raggio 2 per cui si abbia $\theta_i \neq \theta_r$: in questo caso si è assunto $\theta_i < \theta_r$, ma la dimostrazione nel caso $\theta_i > \theta_r$ è del tutto equivalente.

il cammino ottico del raggio 2 è $nACB = nAC + nCB$.

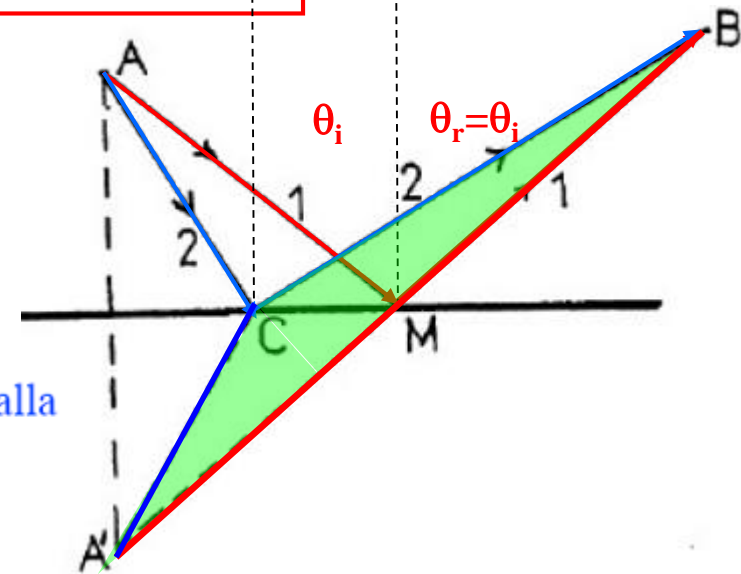
Consideriamo anche il punto A' simmetrico di A rispetto alla superficie riflettente, si ha che: $AM = A'M$ $AC = A'C$

$$l_0(1) = nA'M + nMB \quad l_0(2) = nA'C + nCB$$

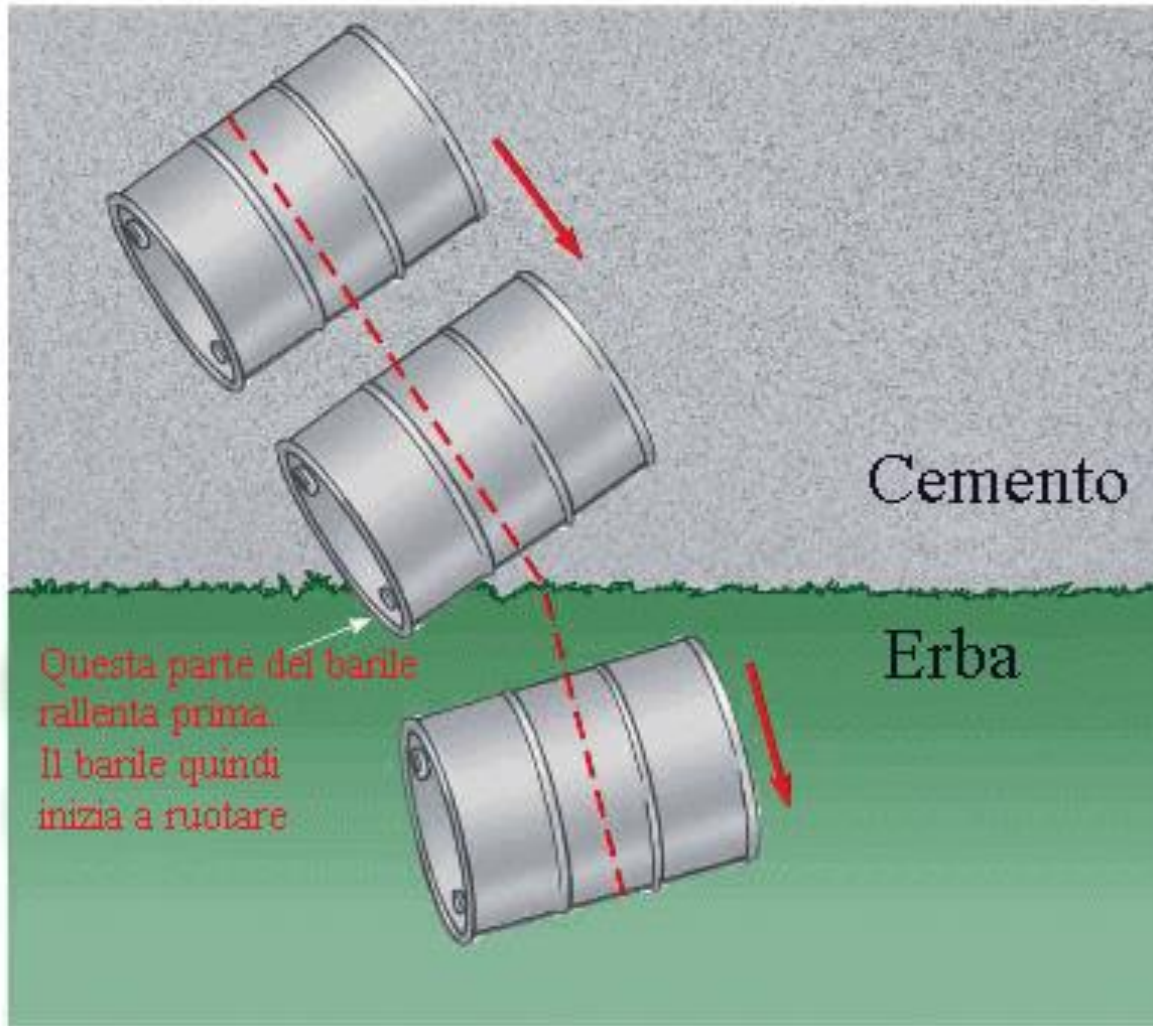
Applichiamo la disuguaglianza triangolare al triangolo A'BC; si ha $A'B < A'C + CB$; essendo $A'B = A'M + MB = AM + MB$ e $A'C = AC$ si ha $AM + MB < AC + CB$.

Moltiplicando per n si ottiene: $nAM + nMB < nAC + nCB$, $\forall n, C$

cioè il cammino ottico percorso da un raggio che soddisfa la relazione $\theta_i = \theta_r$ è il minimo possibile.

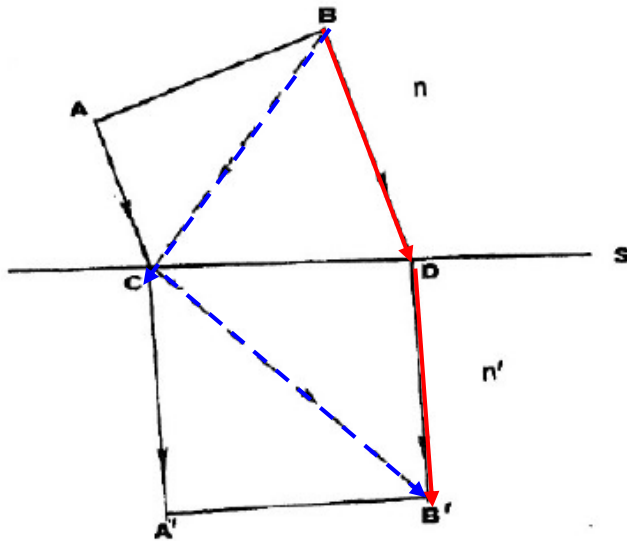


Spiegazione intuitiva della rifrazione



Possiamo dare una spiegazione più completa?

LEGGI SNELL CON TEOREMA DI FERMAT (Rifrazione)



Il teorema di Fermat è già stato applicato per dimostrare la legge della riflessione; seguendo lo stesso schema, considerando due raggi BDB' e CAC' che soddisfano la legge di Snell si deve dimostrare che il cammino ottico $nBD + n'DB'$ è il minimo possibile; essendo A e B appartenenti allo stesso fronte d'onda esattamente come A' e B' , i cammini ottici corrispondenti ad A e B sono uguali: $nAC + n'CA' = nBD + n'DB'$.

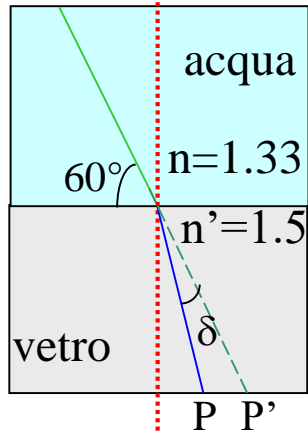
Considerando *un arbitrario percorso alternativo BCB'* , in ciascuno dei due triangoli rettangoli ABC e $A'B'C$ le due ipotenuse sono maggiori dei cateti, e quindi si ha $nBC > nAC$ e $n'CB' > n'CA'$. Sommando i vari termini delle ultime relazioni si ottiene: $nAC + n'CA' < nBC + n'CB'$.

Utilizzando l'equivalenza dei cammini ottici ACA' e BDB' sopra descritta si ottiene quindi:

$$nBD + n'DB' < nBC + n'CB' \quad , \quad \forall C$$

La legge di Snell cioè corrisponde al minimo possibile cammino ottico.

Esempio2



La luce incide su una superficie di separazione acqua vetro come mostrato in figura.

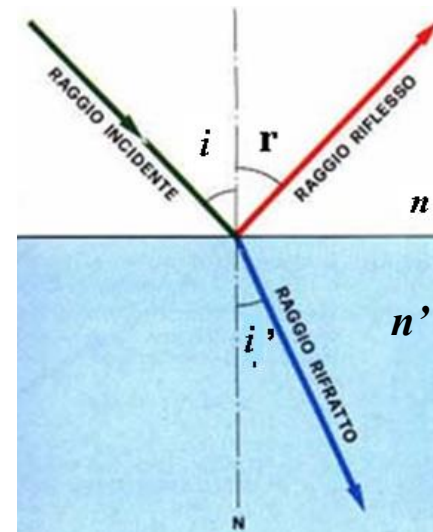
Determinare l'angolo di deviazione δ del raggio sulla superficie di separazione. Sapendo che lo spessore del vetro è 10 cm, calcolare la distanza tra il punto P in cui il raggio incide sulla superficie inferiore del vetro rispetto al punto di incidenza P' che avrebbe avuto facendo un percorso rettilineo.

Attenzione a utilizzare gli angoli giusti!!!!

$$n \sin i = n' \sin i'$$

Angolo di incidenza

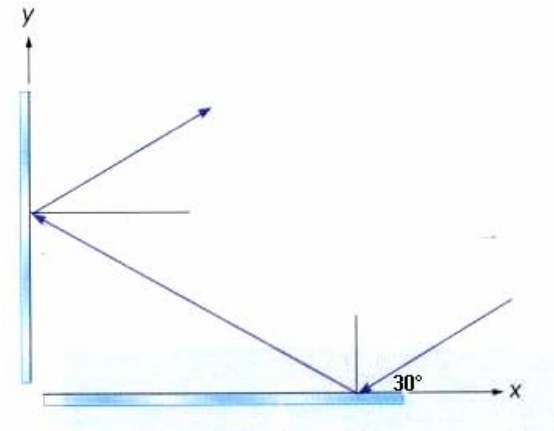
Angolo di rifrazione



Esercizio esame

Due specchi sono posti ad angolo retto, come mostrato in figura.

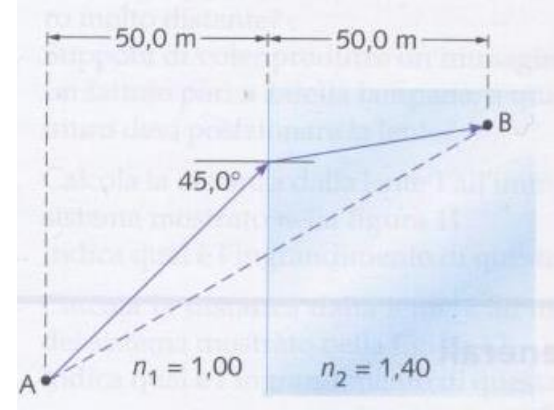
Un raggio di luce incidente forma un angolo di 30° con l'asse x e viene riflesso dallo specchio più basso. Trovare l'angolo formato dal raggio uscente con l'asse y dopo essere stato riflesso una volta da ciascun specchio.



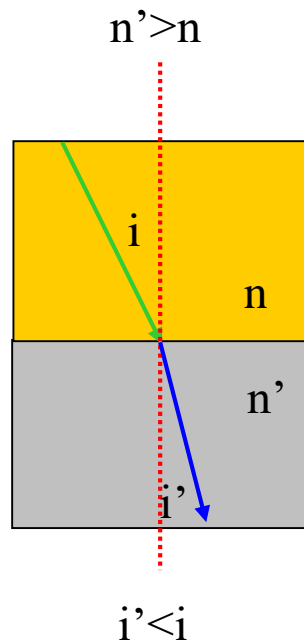
Esercizio esame

Un fascio di luce si propaga dal punto A nel mezzo 1 al punto B nel mezzo 2 secondo il percorso mostrato in figura previsto dalla legge di Snell.

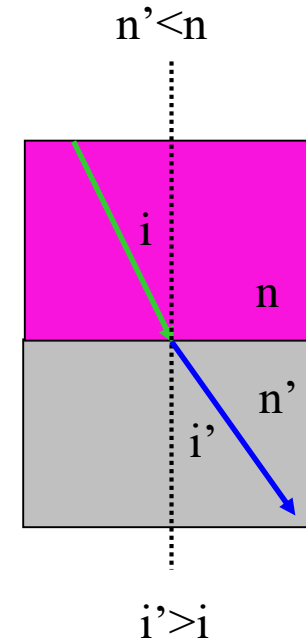
- Calcolare il tempo impiegato dalla luce a raggiungere il punto B seguendo tale cammino
- Tale tempo è maggiore o minore di quello che impiegherebbe per spostarsi da A a B lungo un percorso rettilineo? (Motivare la risposta)



CONSEGUENZE DELLA LEGGE DI SNELL DELLA RIFRAZIONE : $n \sin i = n' \sin i'$



se la luce passa da un mezzo con indice di rifrazione più **basso** a uno con indice di rifrazione più **alto**, il raggio viene deflesso **avvicinandosi** alla normale



se la luce passa da un mezzo con indice di rifrazione più **alto** a uno con indice di rifrazione più **basso**, il raggio viene deflesso **allontanandosi** dalla normale

In incidenza normale ($i=0$) il raggio non viene deviato

Quando la luce passa da un mezzo meno denso a uno più denso il raggio si avvicina alla retta normale alla superficie di separazione. $i' < i$

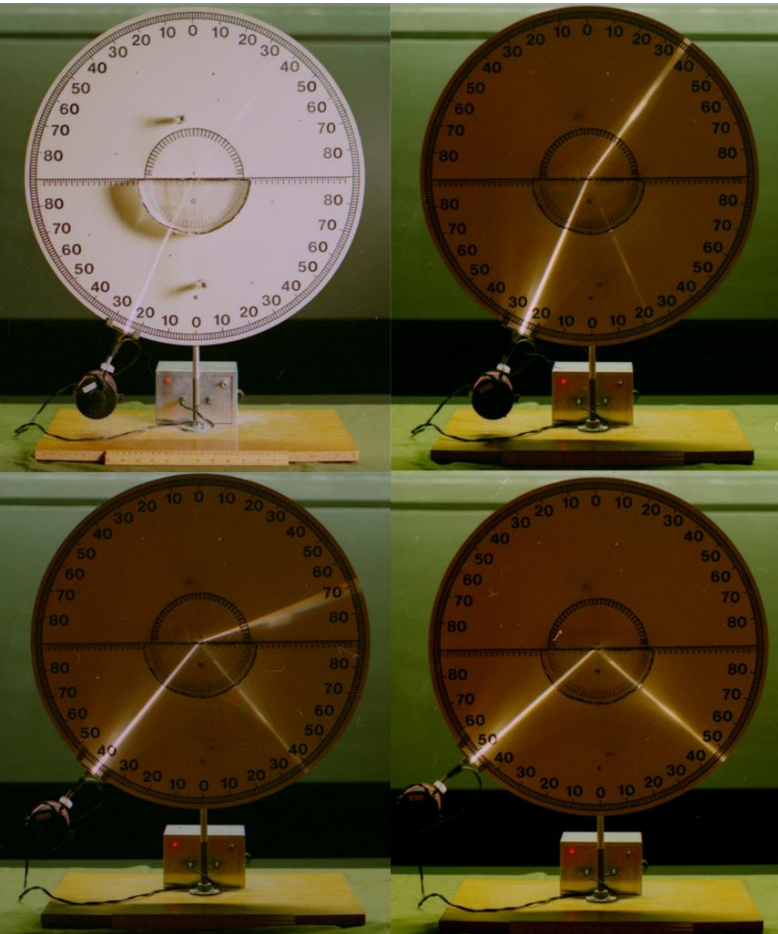


In tale situazione l'angolo di rifrazione è sempre $<$ dell'angolo limite di rifrazione i'_{lim}

Come possiamo calcolare l'angolo limite?

RIFLESSIONE TOTALE: ANGOLO CRITICO i_c

Se si invia dal mezzo con indice di rifrazione maggiore ($n > n'$) un raggio di luce con un angolo di incidenza maggiore dell'angolo critico i_c non si ha rifrazione ma tutta la radiazione viene riflessa (riflessione totale)



Come possiamo calcolare l'angolo critico per la riflessione totale?

RIFLESSIONE TOTALE: ANGOLO CRITICO i_c

Se si invia dal mezzo con indice di rifrazione maggiore ($n > n'$) un raggio di luce con

$$i > \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right) = i_c$$

non si ha rifrazione ma tutta la radiazione viene riflessa (riflessione totale)

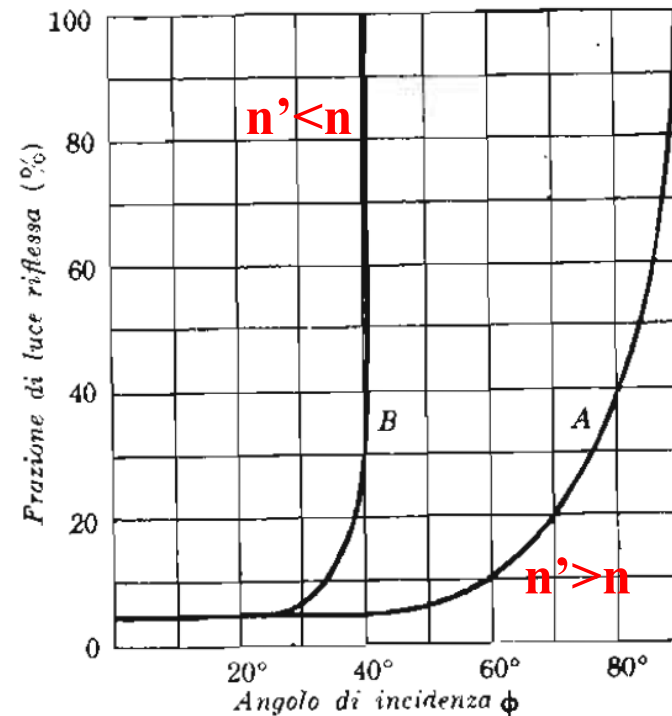
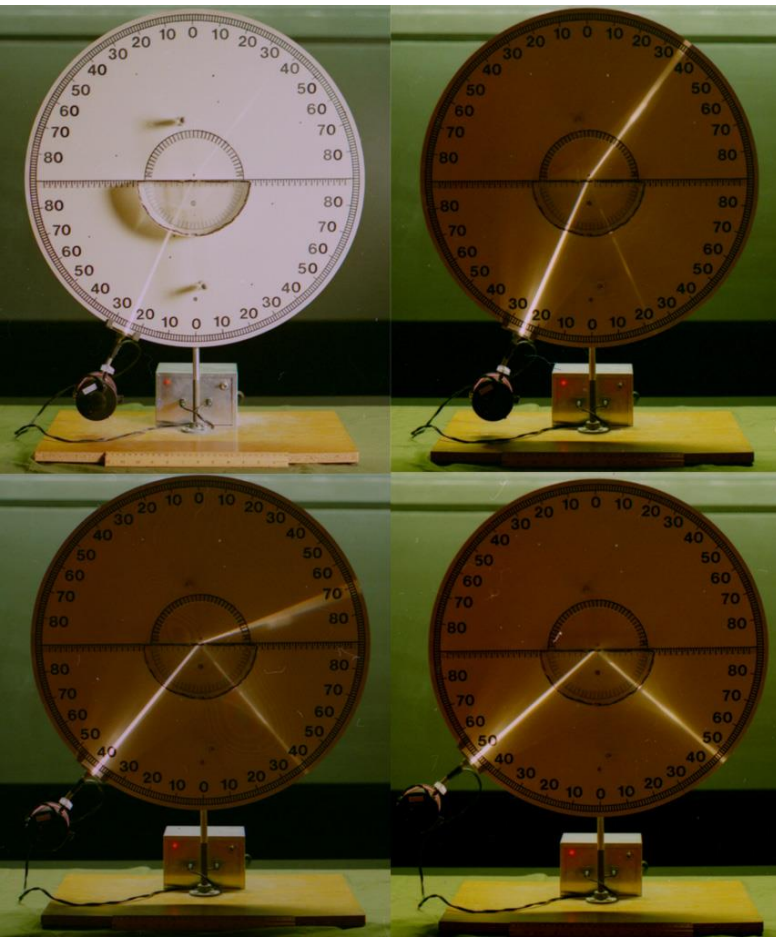
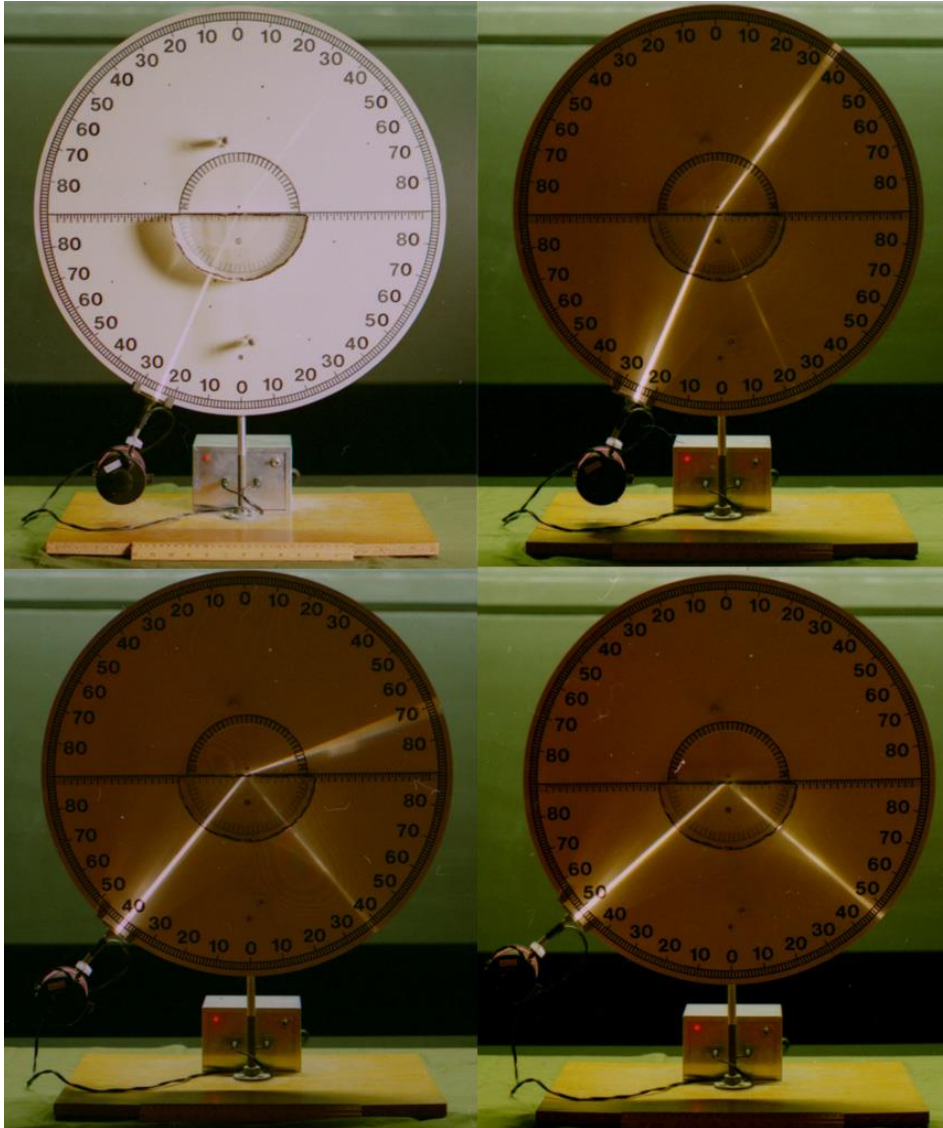


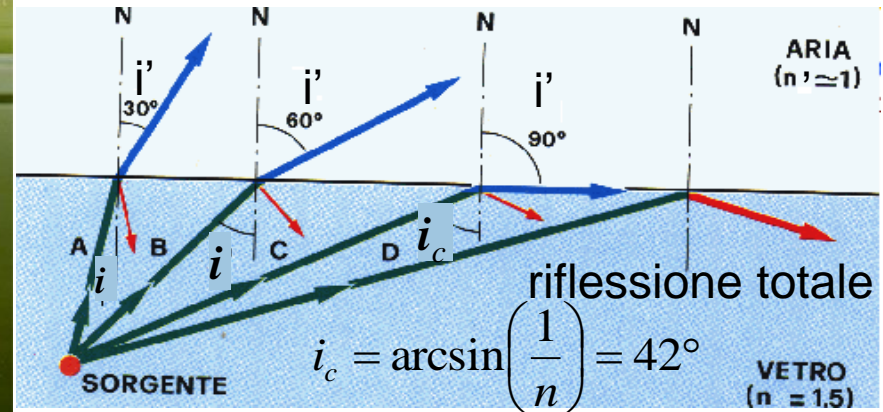
Fig. 2-4. . Frazione di luce incidente riflessa in funzione dell'angolo di incidenza. La curva A, si riferisce al caso in cui l'indice di rifrazione del secondo mezzo è maggiore di quello del primo; viceversa per la curva B.

Riflessione totale da dielettrico a aria



$$n' = 1$$

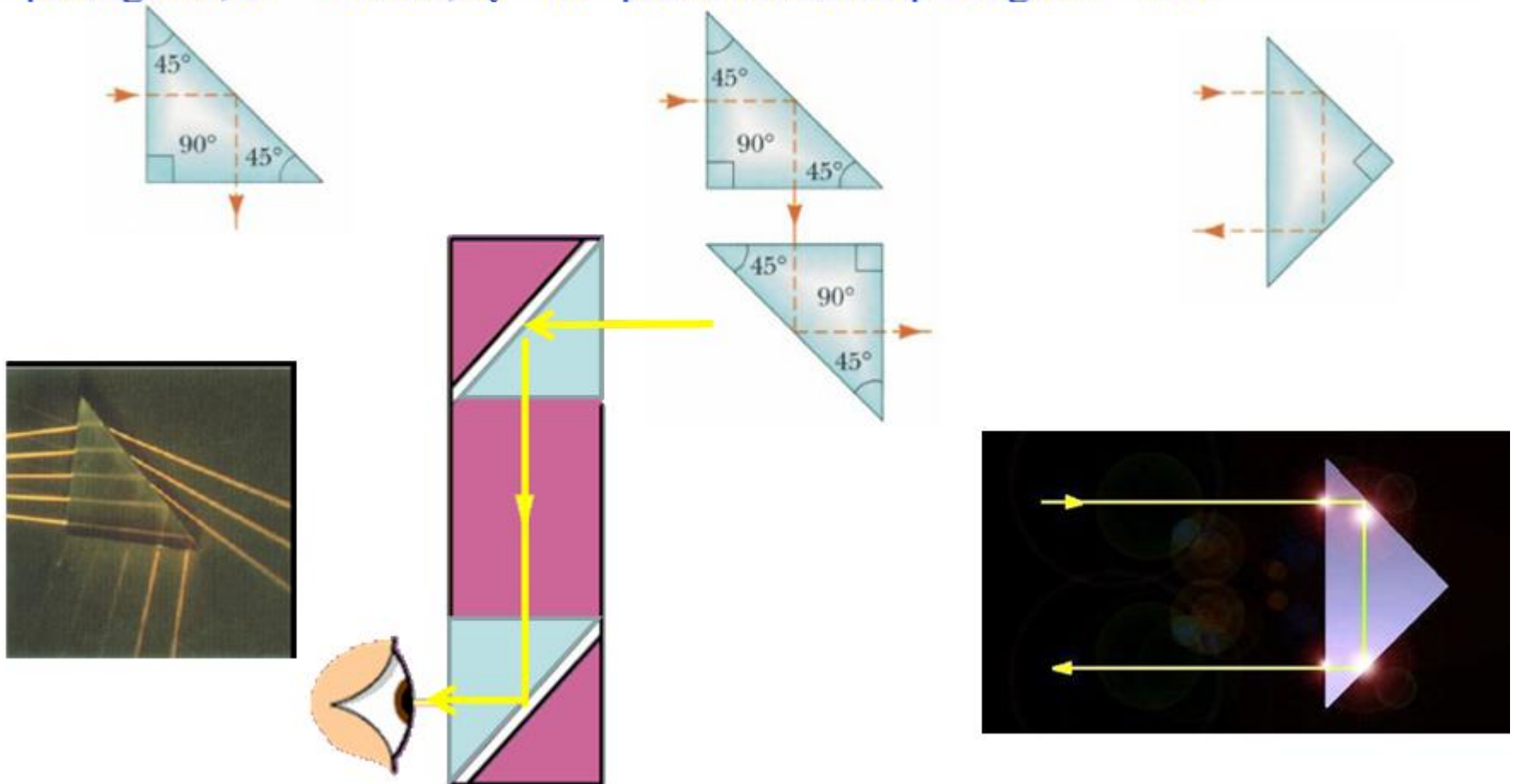
$$i_c = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$$



PRISMI A RIFLESSIONE TOTALE

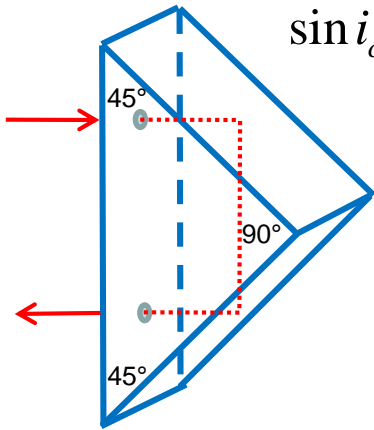
I *prismi a riflessione totale* sono utilizzati generalmente per *deviare il raggio ottico*; possono avere angoli differenti in funzione dello scopo per cui devono essere utilizzati. I materiali comunemente usati:

- vetro, $n = 1.5$, $i_c = 42^\circ$ per transizioni vetro – aria
- plexiglass, $n = 1.4999$, $i_c \simeq 42^\circ$ per transizioni plexiglass –aria

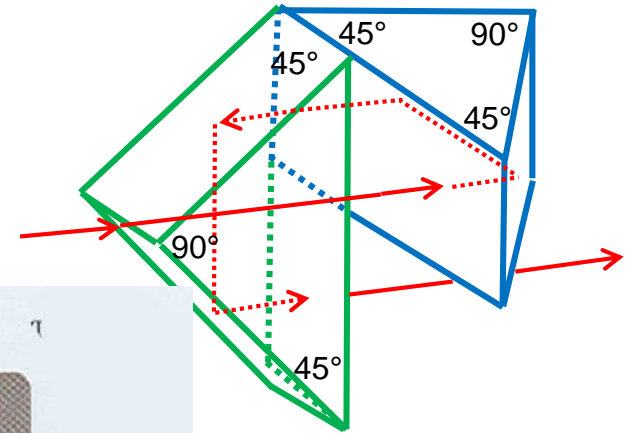
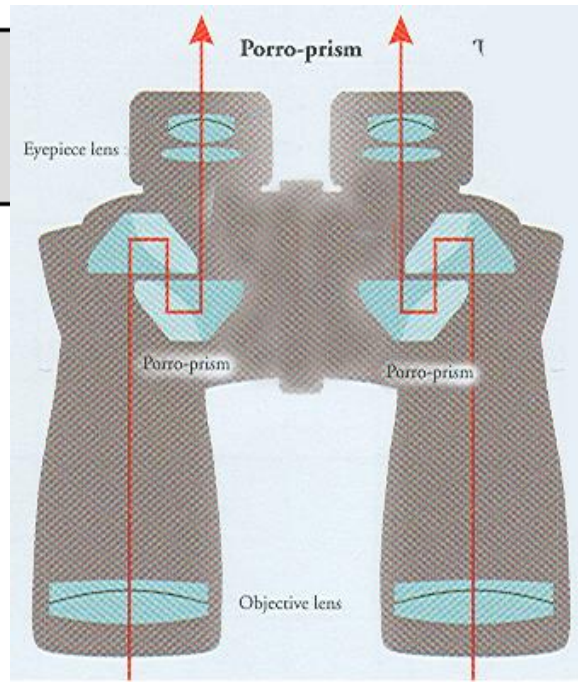
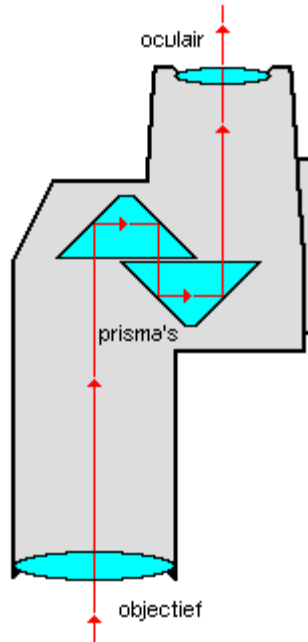


ALCUNI TIPI DI PRISMA: Prisma di Porro

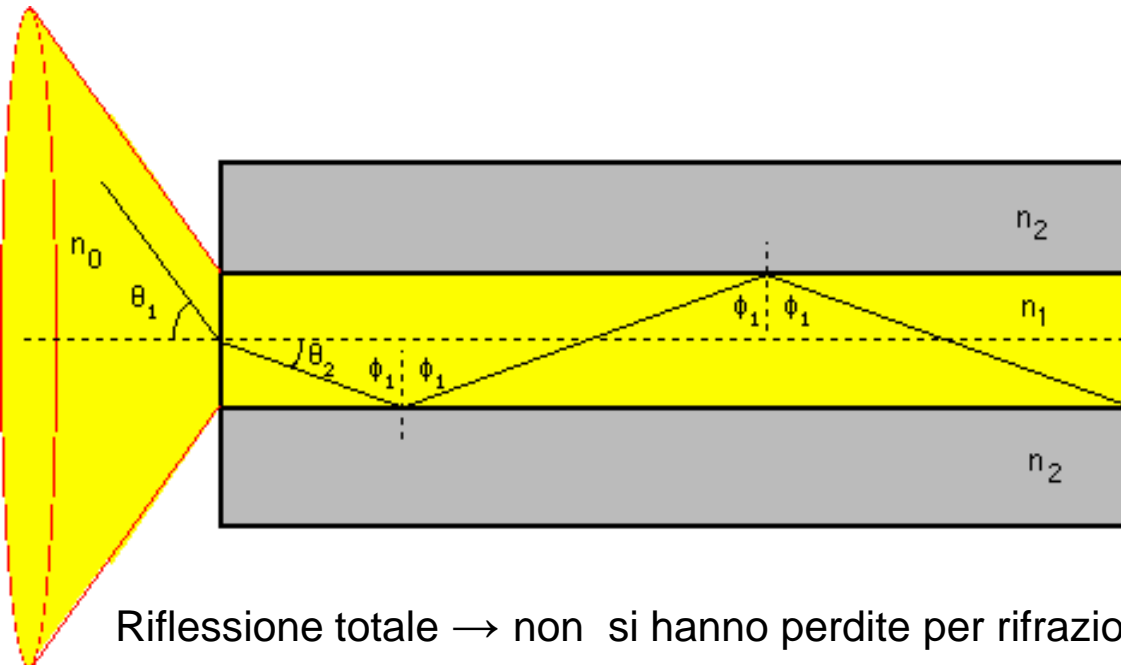
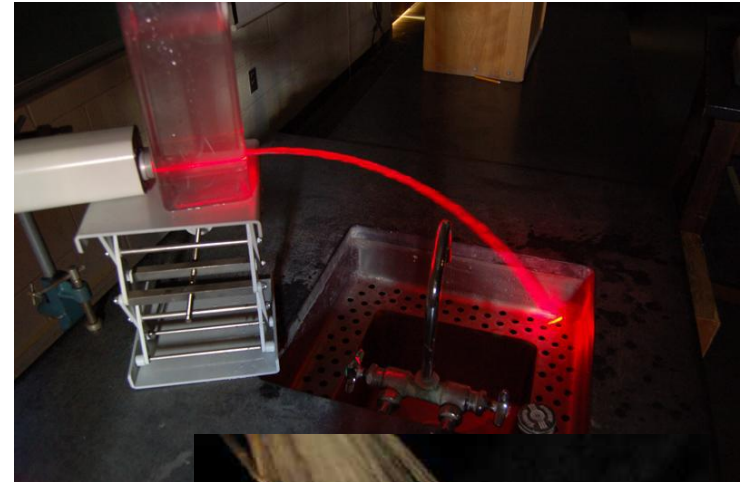
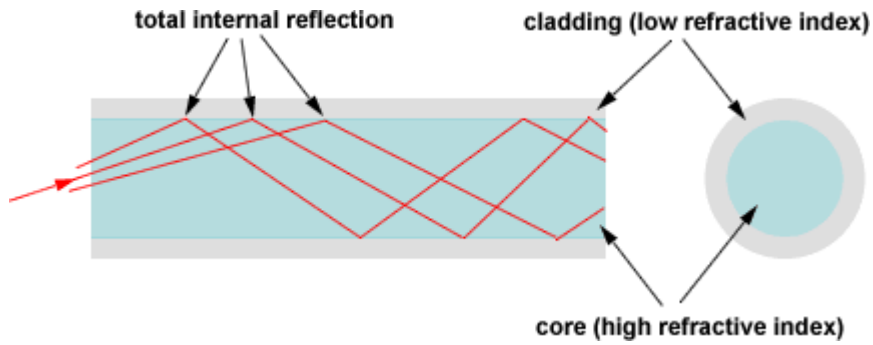
$$\sin i_c = \frac{1}{1.5} = 0.67 \rightarrow i_c = \arcsin\left(\frac{1}{1.5}\right) = \arcsin(0.67) = 42^\circ$$



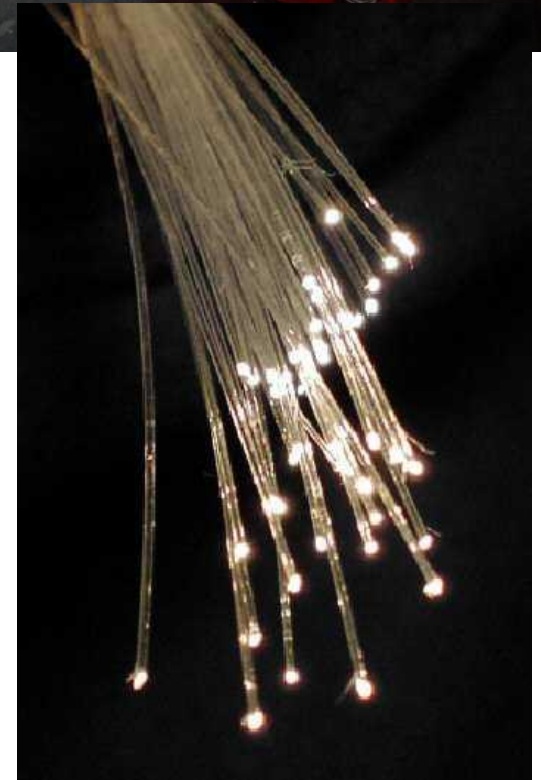
Prisma di Porro



Fibre Ottiche



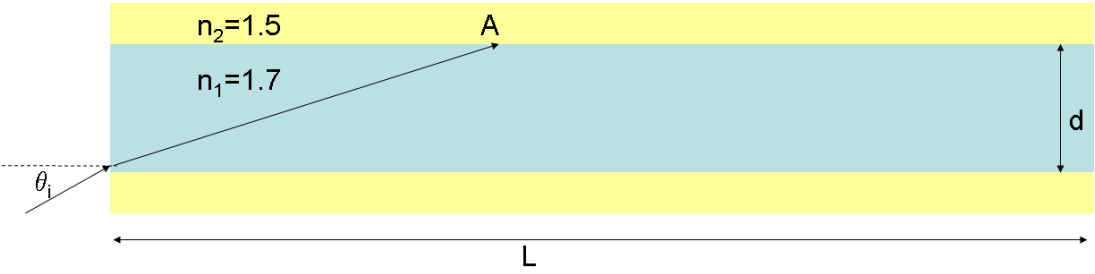
Riflessione totale \rightarrow non si hanno perdite per rifrazione \rightarrow
poca attenuazione \rightarrow trasporto radiazione su lunghe distanze



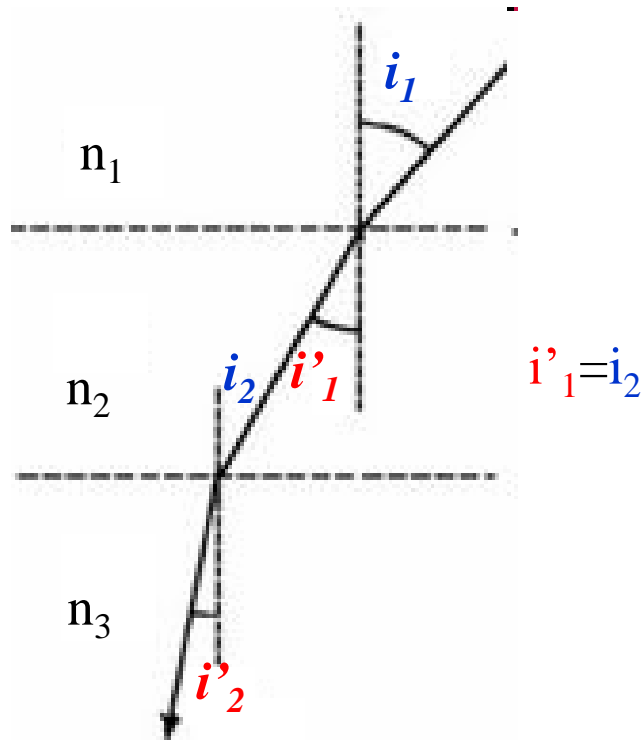
Esercizio

Una fibra ottica è costituita da due mezzi di indice di rifrazione n_1 e n_2 disposti come in figura. Un raggio di luce incide all'estremità della fibra nel mezzo 1 con un angolo θ_i e subisce una riflessione totale sulle guaine esterne.

- a) Determinare il massimo valore di θ_i per il quale si ha riflessione totale all'interfaccia tra i due mezzi.
- b) Per tale valore di θ_i quante riflessioni effettuerà il fascio (che incide sul bordo inferiore del mezzo 1, come mostrato in figura) prima di uscire dalla fibra, se il diametro del mezzo 1 è $d=0.5$ cm e la lunghezza della fibra è $L=1$ m?



Rifrazione su più superfici parallele



$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i'_1$$

$$n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i'_2$$



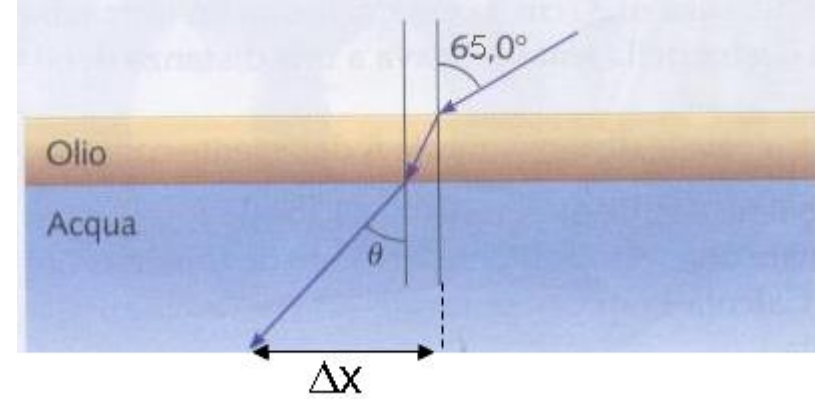
$$n_1 \sin i_1 = n_3 \sin i'_2$$

Il mezzo centrale contribuisce solo a deviare lateralmente il raggio

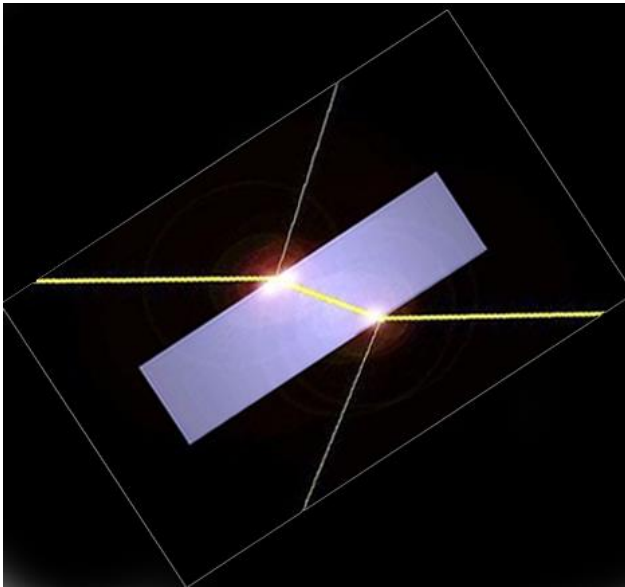
Esercizio esame

Uno strato di olio con un indice di rifrazione 1.5 e uno spessore di 2 cm galleggia in una bacinella riempita con uno strato d'acqua di indice di rifrazione 1.33 e profondità 8 cm. Un fascio di luce incide sull'olio con un angolo di 65° rispetto alla normale.

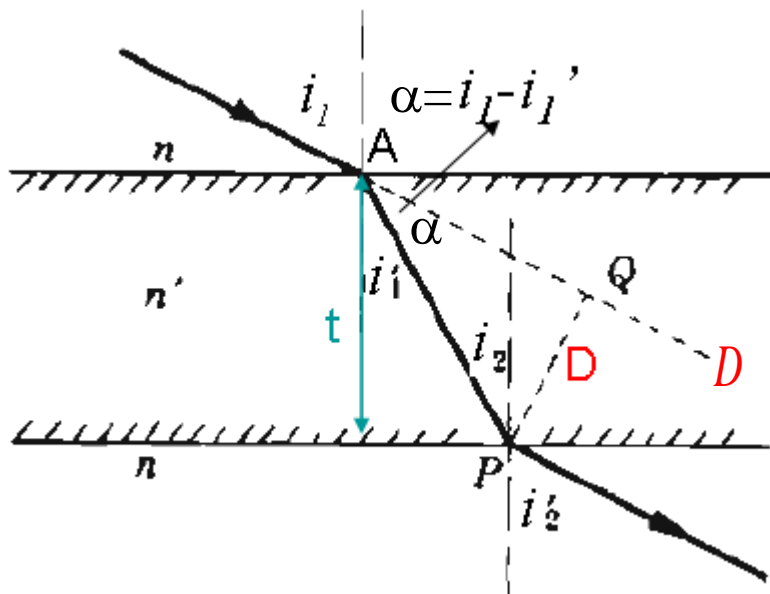
- Trovare l'angolo θ formato dal fascio di luce con la normale quando è nell'acqua
- Trovare la distanza Δx tra il punto di incidenza del fascio sull'olio e il punto in cui raggiunge il fondo della bacinella.



Rifrazione su lamina a facce piane e parallele



Si consideri un raggio luminoso incidente sulla faccia di una lamina con **indice di rifrazione** n' immersa in un mezzo di indice n : l'angolo di incidenza sia i_1 . Se si traccia il percorso del raggio nella lamina e il successivo raggio rifratto uscente, si verifica facilmente che quest'ultimo è parallelo al raggio iniziale, ma spostato di una distanza $D=PQ$.



$$n \sin i_1 = n' \sin i_1'$$

$$n' \sin i_2 = n \sin i_2'$$

$$i_1' = i_2 \quad \Rightarrow \quad i_1 = i_2'$$

Il raggio non cambia la sua direzione

Calcoliamo lo spostamento D del raggio

$$D = \overline{AP} \sin(\alpha) = \overline{AP} \sin(i_1 - i_1') = \frac{t}{\cos i_1'} \sin(i_1 - i_1')$$

$$i_1' = \text{asin} \left[\frac{n}{n'} \sin i_1 \right]$$

Esercizio 6 La luce colpisce una lastra di vetro piana con un angolo di incidenza di 60° . Se l'indice di rifrazione del vetro è $n = 1.5$, a) qual è l'angolo di rifrazione θ_A nel vetro? b) con quale angolo θ_B il raggio riemerge dal vetro?

Quanto vale tale spostamento del fascio D se la lastra è spessa 1 cm ?

Soluzione

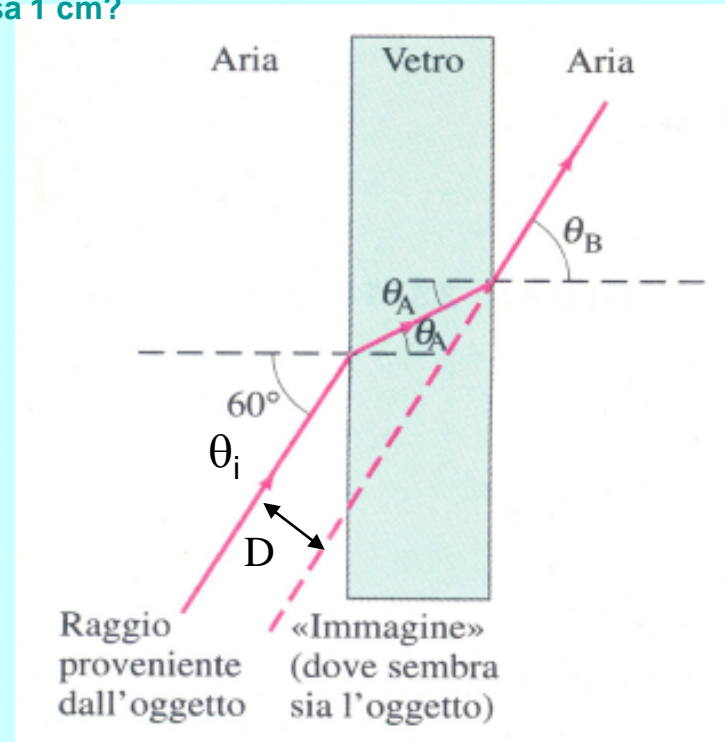
a) Il raggio incidente proviene dall'aria, quindi è $n_1 = 1$ e $n_2 = 1.5$; la legge di Snell fornisce il valore:

$$\sin \theta_A = 0.577, \text{ da cui } \theta_A = 35.2^\circ$$

b) le due facce di vetro sono parallele, e in questo caso l'angolo di incidenza è θ_A e quello di rifrazione θ_B :

$$\sin \theta_B = 0.866, \text{ da cui } \theta_B = 60^\circ$$

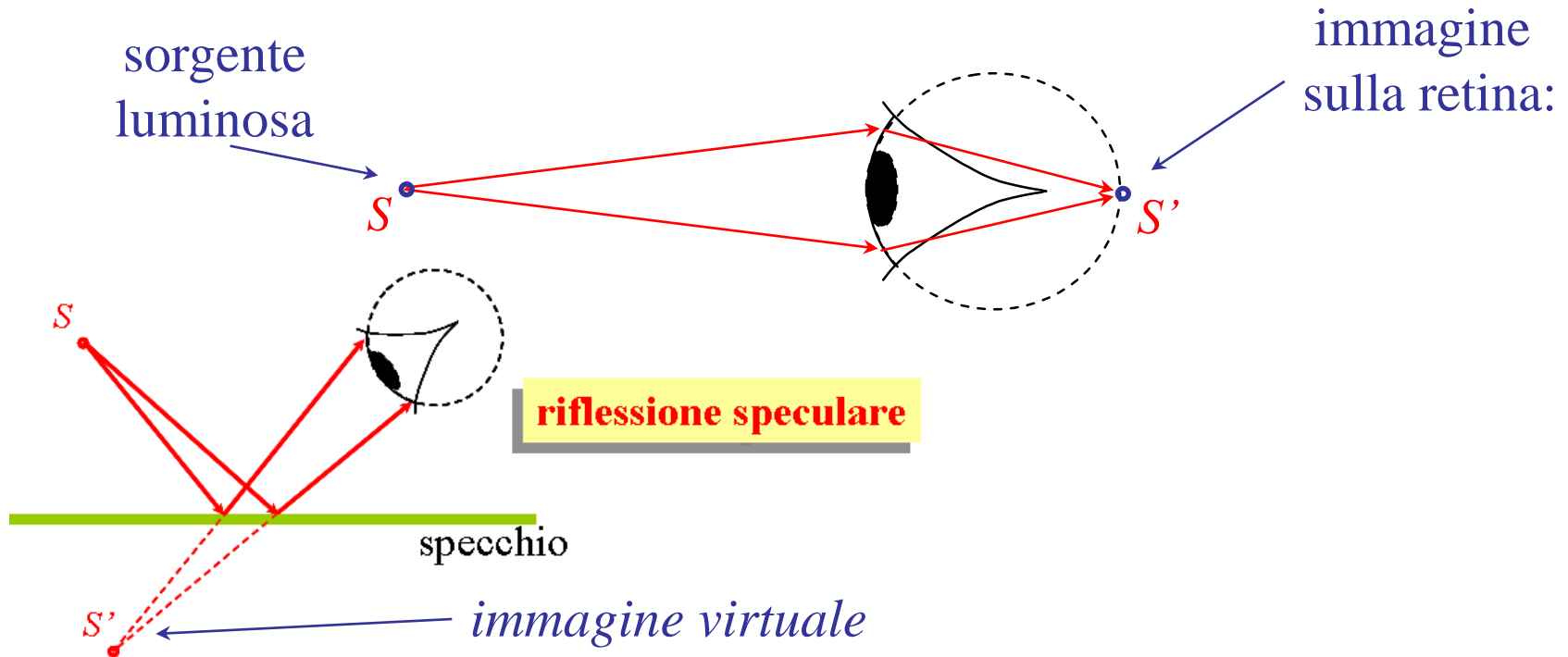
Il raggio non cambia quindi direzione nel passaggio attraverso una lastra di vetro a facce piane. Subisce però uno spostamento laterale, come è possibile verificare osservando un oggetto parzialmente coperto da una lastra di vetro osservando gli effetti di bordo.



$$D = \frac{t}{\cos \theta_A} \sin(\theta_i - \theta_A) = \frac{1}{\cos(35.2^\circ)} \sin(60^\circ - 35.2^\circ) = 0.51\text{cm}$$

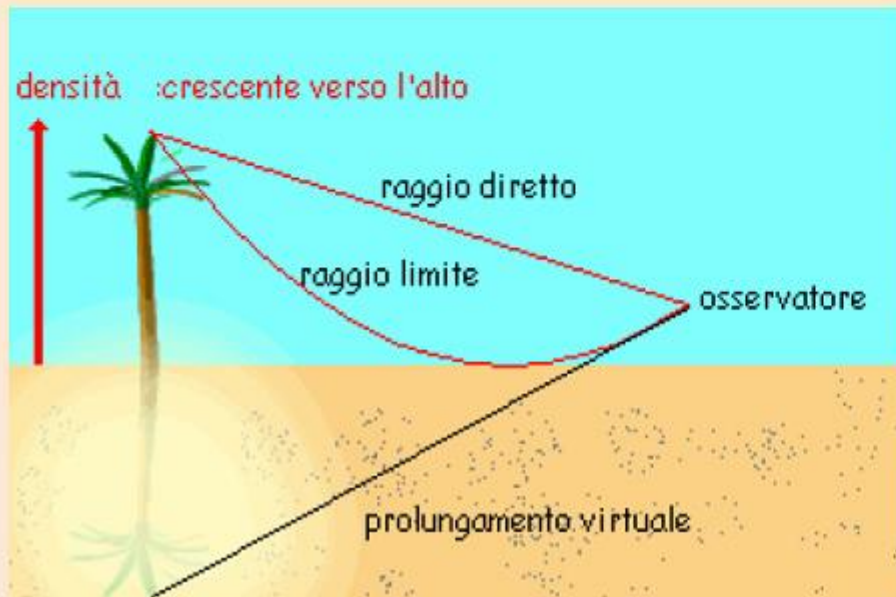
Effetto delle leggi di snell sulla percezione visiva:

Il cervello umano interpreta sempre i raggi come propagantisi in linea retta:
l'oggetto ci appare nella direzione da cui provengono i raggi che l'occhio intercetta

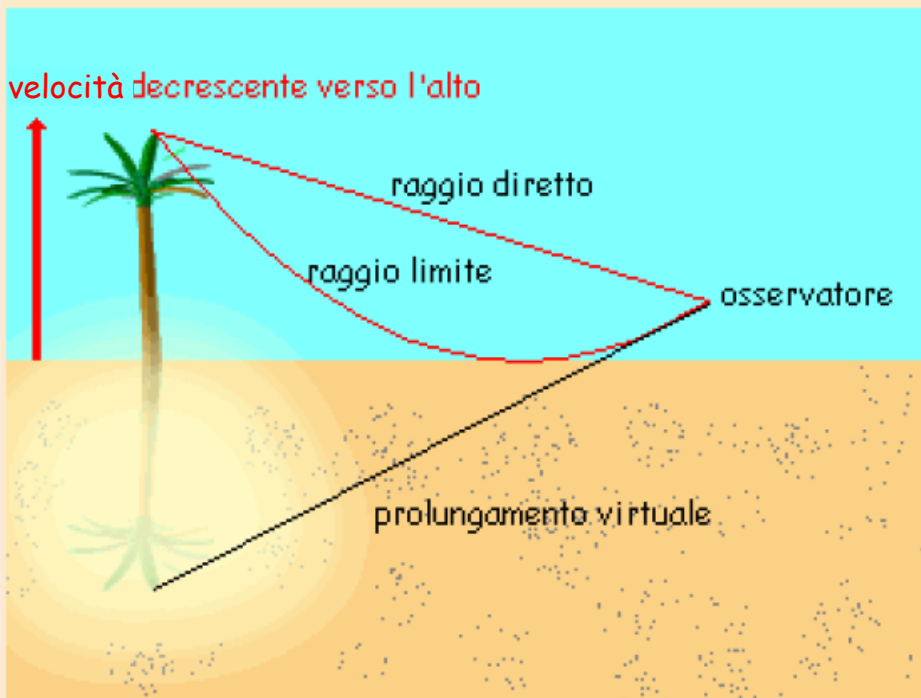


Miraggio

Quando in una giornata afosa sembra di vedere l'asfalto bagnato (quella che in realtà vediamo è la luce del cielo riflessa sulla strada), o quando nel deserto si vedono oggetti dove non sono:



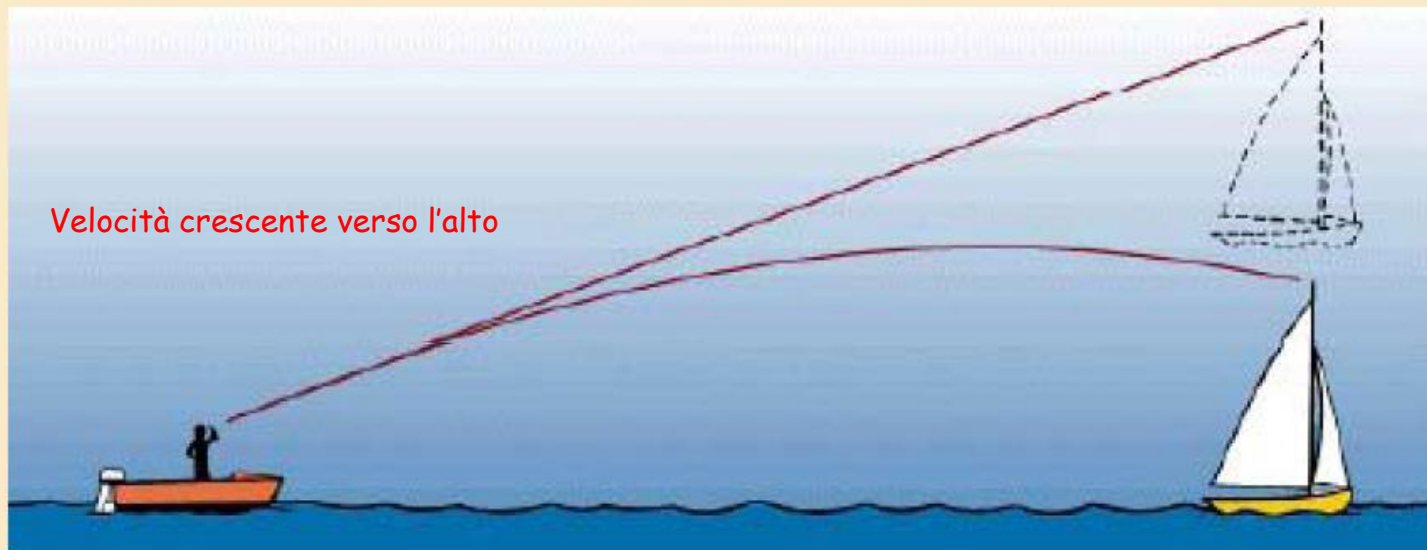
Questo accade poiché l'aria subito sopra il suolo è molto calda, mentre in alto nell'atmosfera l'aria è più fredda e più densa, e di conseguenza la velocità della luce è più elevata nella zona calda. Ad un'alta temperatura corrisponde infatti una bassa densità e un ridotto indice di rifrazione dell'aria.



La luce arriva al nostro occhio non lungo una linea retta, ma percorrendo più strada nella zona calda, dove va più veloce, e meno nella zona fredda in cui è più lenta, rispettando in tal modo il **principio del tempo minimo**.

Il fenomeno Fata Morgana

Certe volte si può assistere al fenomeno opposto, quando l'aria al terreno è più fredda di quella negli strati superiori. E' il fenomeno detto **Fata Morgana**, tipico ad esempio dello stretto di Messina, grazie a cui le navi sembrano sospese nel cielo.



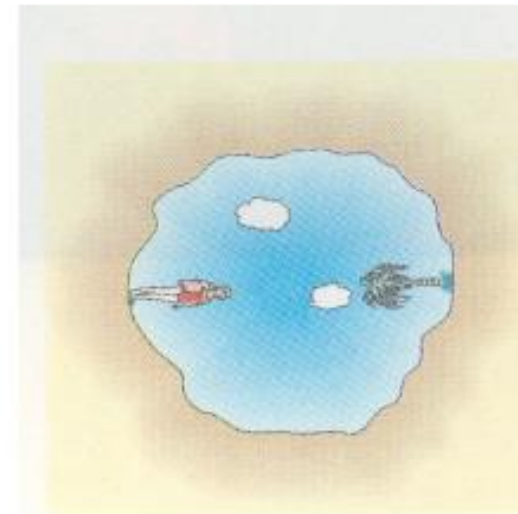
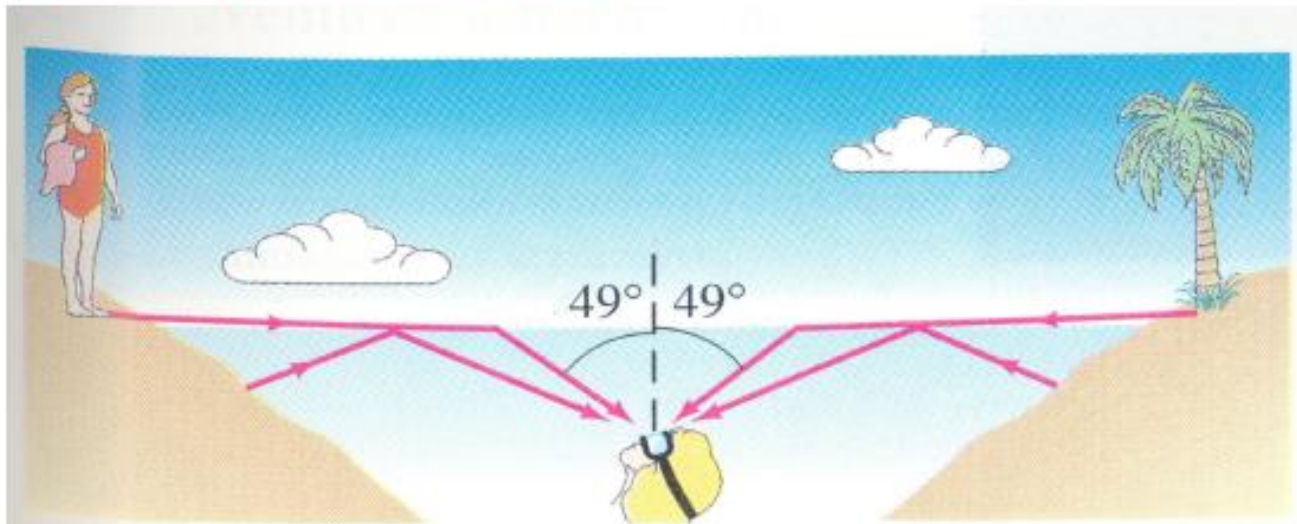
Riflessione totale: effetto fish-eye

In caso di superficie molto tranquilla, un subacqueo che osserva verso l'alto subisce il fenomeno della riflessione totale sul diottro piano costituito dalla superficie di separazione acqua-aria.

Questo è dovuto al fatto che i raggi che giungono al subacqueo subiscono una rifrazione attraverso il diottro piano in un mezzo, l'aria, di indice di rifrazione minore; si può verificare quindi il fenomeno della riflessione totale sul diottro piano, caratterizzata dal seguente angolo critico:

$$\sin \theta_c = \frac{1}{1.33} = 0.75 \quad \longrightarrow \quad \theta_c = 49^\circ$$

I raggi provenienti dal mondo esterno sono quindi compressi in un cono di 49° ; tutto quanto è esterno a questo cono nella visuale del subacqueo non può provenire dalla parte sovrastante l'acqua, ma deve essere una riflessione (totale) sulla superficie dell'immagine del bordo o del fondo della piscina o del bacino.



DISPERSIONE DELLA LUCE

L'indice di rifrazione di un mezzo materiale dipende, oltre che dal particolare mezzo considerato, dalla lunghezza d'onda della radiazione. Il primo studio dettagliato sperimentale di tale dipendenza fu compiuto da Newton nel 1672 attraverso la separazione in vari colori subita dalla luce bianca nell'attraversare un prisma di vetro.



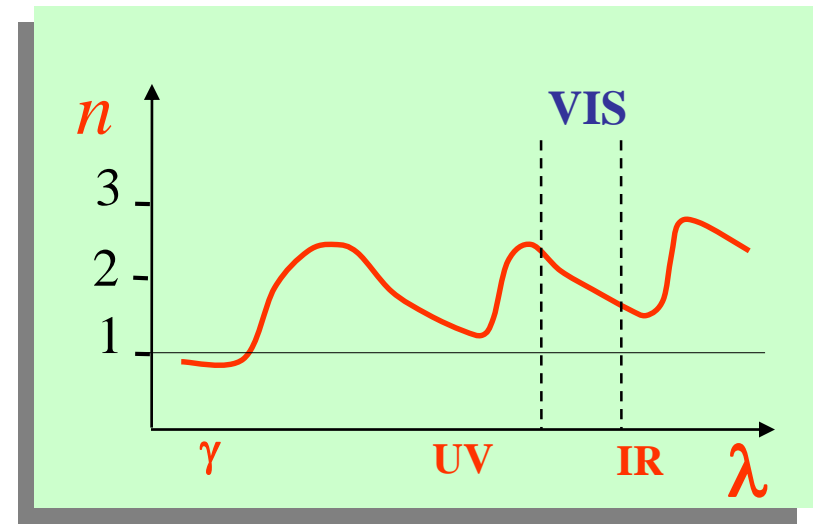
A cosa è dovuta la dispersione della luce?

L'indice di rifrazione dipende dalla frequenza della radiazione e quindi dalla lunghezza d'onda

$$n = n(\omega) \quad n \text{ dipende dalla frequenza!}$$

$$n(\omega) \rightarrow n(\lambda) \equiv \textit{dispersione}$$

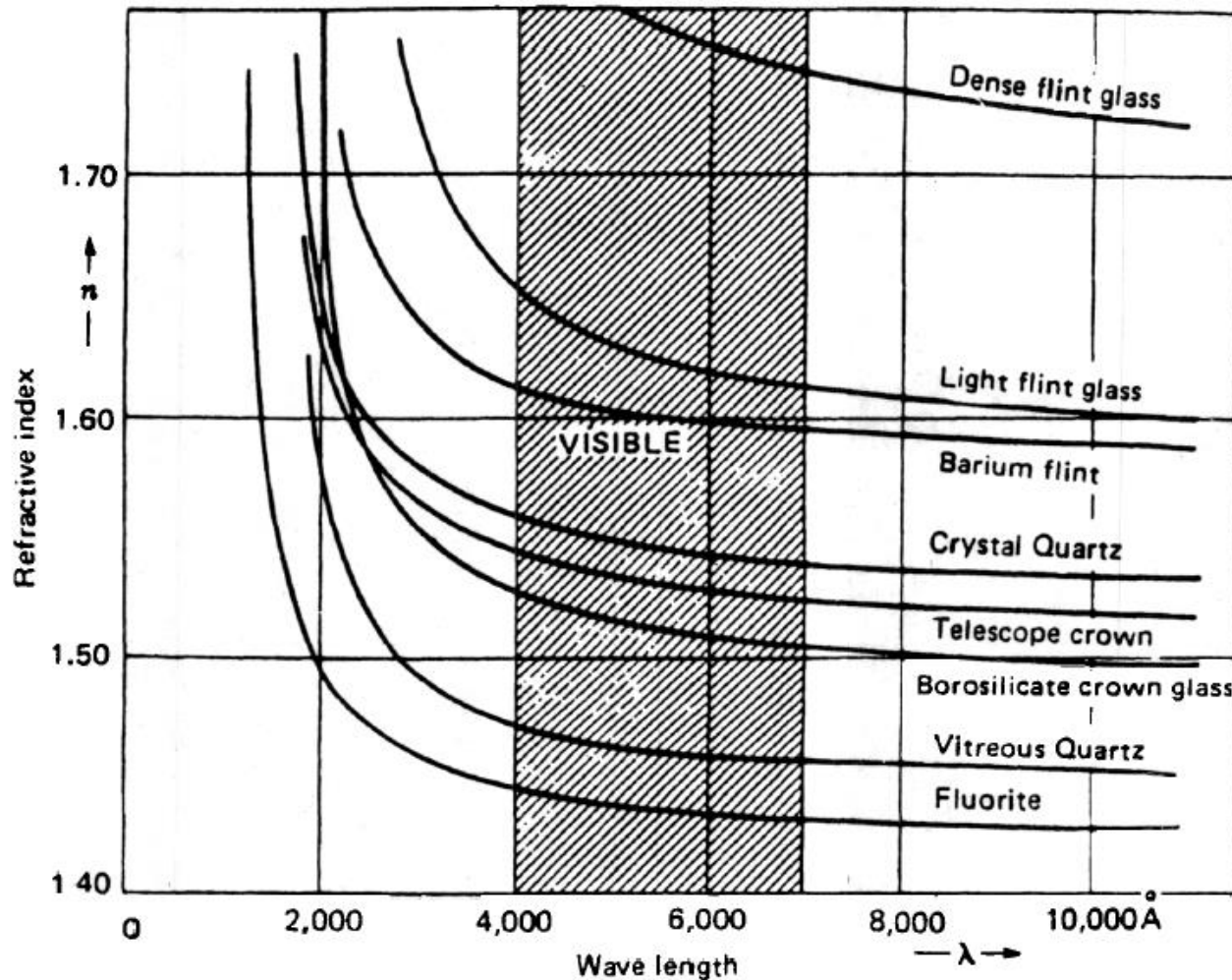
λ (nel vuoto)	0.6563 μm (rosso)	0.5890 μm (giallo)	0.4861 μm (blu)
Elio	1.000036	1.000040	1.000043
Aria	1.000293	1.0003	1.00032
Acqua	1.3312	1.3330	1.3372
Vetro crown	1.5146	1.5171	1.5233
Vetro flint	1.5764	1.5804	1.5903
Diamante	2.4215	2.4242	2.4351



tipico andamento di $n(\lambda)$

Nel visibile $n(\lambda)$ si può approssimare con la formula di Cauchy

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$



Effetti della dispersione: scomposizione della luce



DISPERSIONE DELLA LUCE

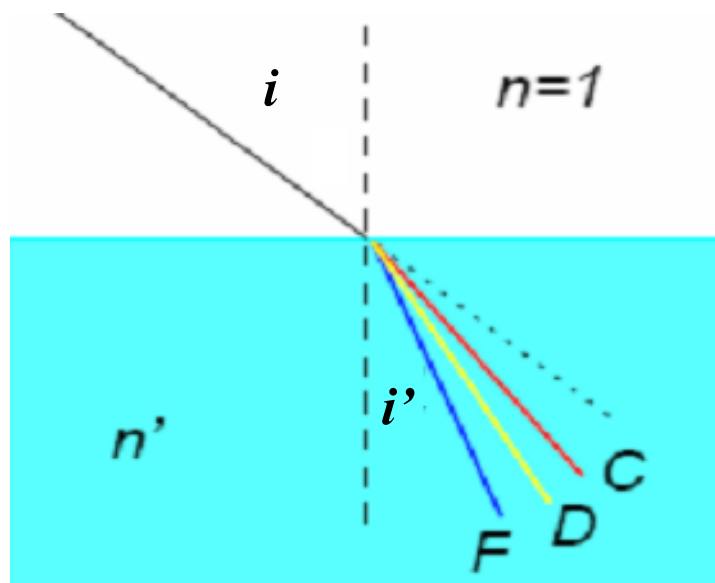
La rifrazione causa la scomposizione della luce bianca nello *spettro*, ne separa cioè i colori costituenti, ciascuno dei quali ha un diverso indice.

Per le *righe* in figura, nel caso di vetro crown,

$$n_F = 1.52933$$

$$n_D = 1.52300$$

$$n_C = 1.52042$$



- $\lambda_C = 656.3$ nm lunghezza d'onda del rosso;
- $\lambda_D = 589.3$ nm lunghezza d'onda del giallo;
- $\lambda_F = 486.1$ nm lunghezza d'onda del azzurro;

$$\sin i = n' \sin i'$$

$$n(\text{blu}) > n(\text{giallo}) > n(\text{rosso}) \rightarrow i'(\text{blu}) < i'(\text{giallo}) < i'(\text{rosso})$$

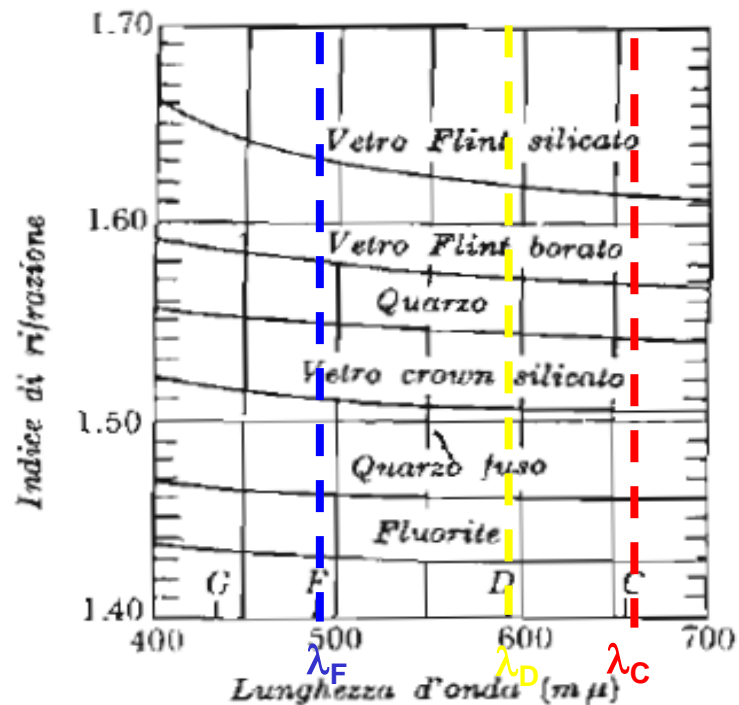
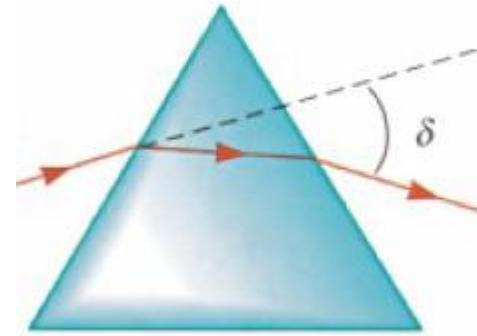
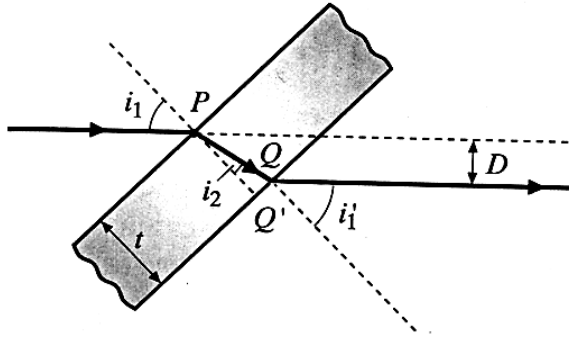


Fig. 2-27 - Variazione dell'indice di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda.

Dispersione della luce: il prisma



In una lastra a faccie piane e parallele tutti i raggi uscenti sono paralleli tra di loro pertanto i vari colori si propagano nella stessa direzione una volta attraversata la lastra. I vari colori vengono invece dispersi ad angoli diversi se le due facce non sono parallele come in una lente o in un prisma

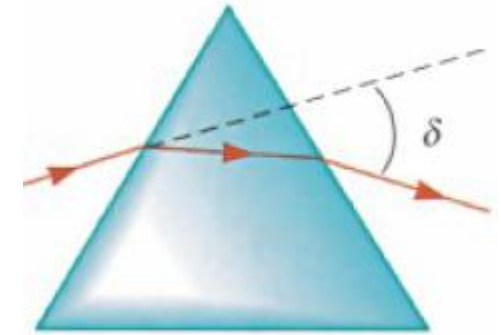
Poiché l'angolo di deviazione dipende da n che a sua volta dipende dalla lunghezza d'onda della luce, facendo passare della luce bianca in un prisma si può scomporre la luce stessa nei diversi colori che la compongono



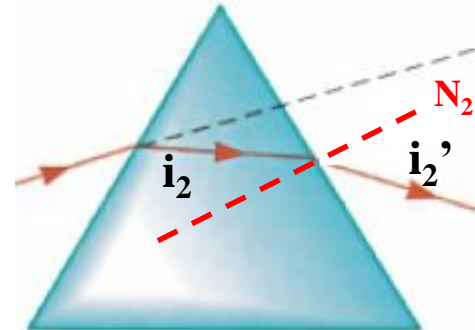
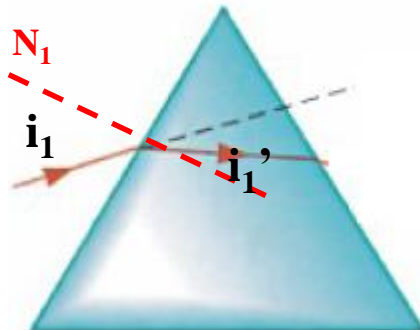
Angolo di deviazione prismatica

Angolo di deviazione prismatica: l'angolo di deviazione δ tra il raggio incidente e il raggio trasmesso, emergente dal prisma.

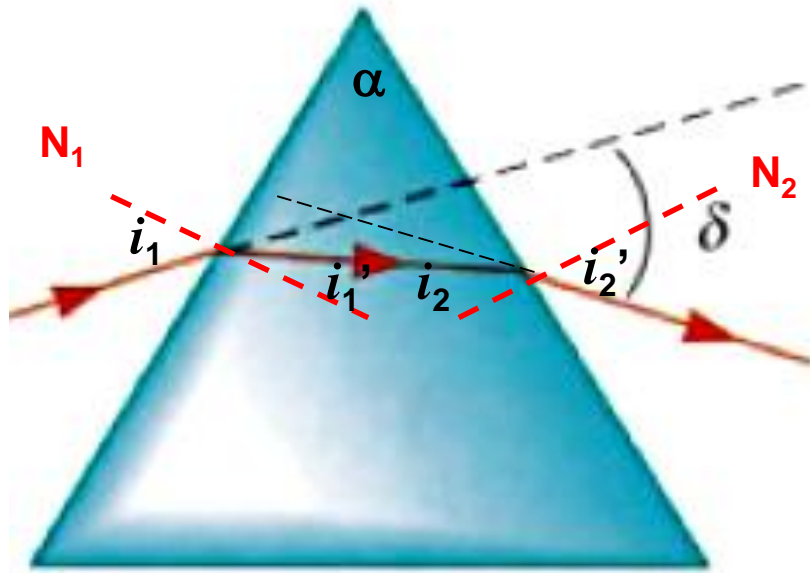
Corrisponde quindi alla deviazione *totale* introdotta dal prisma.



- Un raggio di luce viene deviato da un prisma di un angolo totale δ ; su ognuna delle due facce, il raggio subisce una rifrazione secondo la legge di Snell.
- Ciascuna delle due facce rappresenta una superficie di separazione tra due mezzi; le due superfici hanno normali diverse.

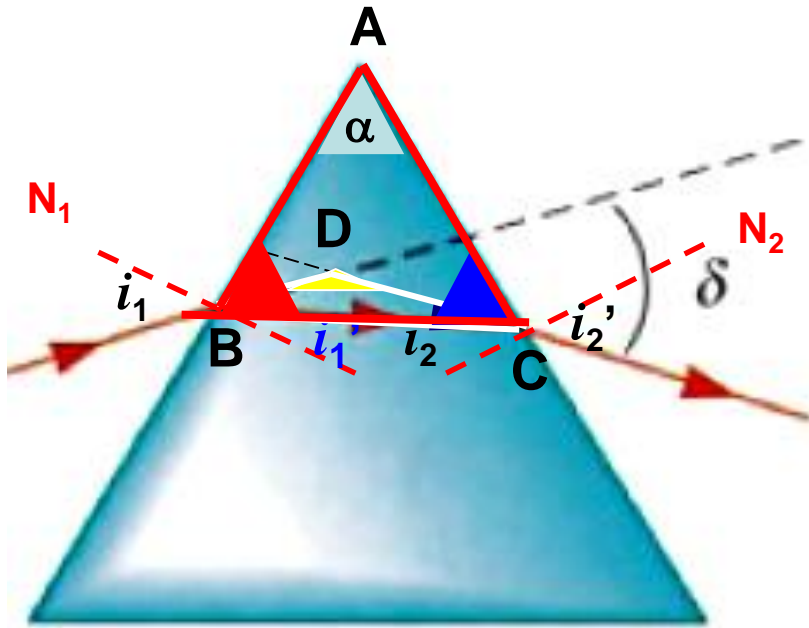


Prisma



δ è l'angolo di deviazione

Calcoliamo l'angolo di deviazione prismatica



La somma degli angoli interni di un triangolo è pari a π

Dal triangolo (BCD):

$$\pi = (\pi - \delta) + (i_1 - i_1') + (i_2' - i_2)$$

$$\rightarrow \delta = (i_1 - i_1') + (i_2' - i_2)$$

Dal triangolo (ABC):

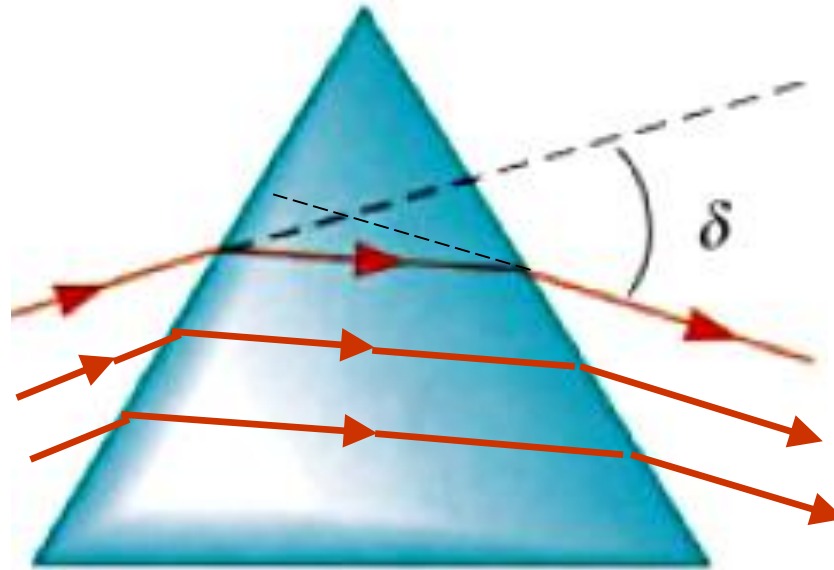
$$\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - i_1'\right) + \left(\frac{\pi}{2} - i_2\right) = \pi \Rightarrow \alpha = i_1' + i_2$$

$$\delta = i_1 + i_2' - \alpha \quad \text{dipende da } n \text{ e quindi (implicitamente) da } \lambda$$

i_1 : angolo con cui il raggio incide sul prisma (rispetto alla normale della prima faccia)

i_2' : angolo con cui emerge dal prisma (rispetto alla normale della seconda faccia)

L'angolo di deviazione non dipende dal punto in cui il raggio incide sul prisma. Di conseguenza un fascio di raggi paralleli entrante nel prisma esce sempre come un fascio di raggi paralleli



Calcoliamo l'angolo di deviazione prismatica

Supponiamo noti α e n . Per determinare δ una volta fissato l'angolo di incidenza sulla prima faccia dobbiamo trovare i_2'

Sappiamo che valgono le relazioni:

$$\delta = i_1 + i_2' - \alpha$$

$$\alpha = i_1' + i_2$$

1) Troviamo i_1'

$$\sin i_1 = n \sin i_1' \Rightarrow i_1' = \arcsin \left[\frac{1}{n} \sin i_1 \right]$$

2) Troviamo i_2

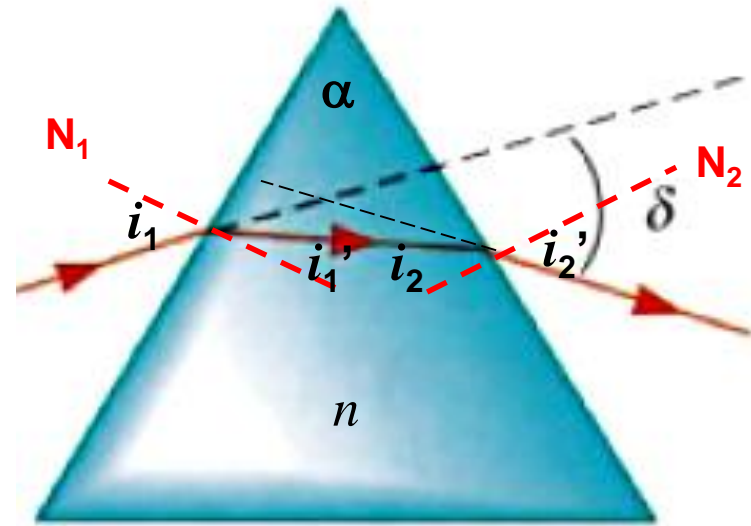
$$\alpha = i_1' + i_2 \Rightarrow i_2 = \alpha - i_1'$$

3) Troviamo i_2'

$$n \sin i_2 = \sin i_2' \Rightarrow i_2' = \arcsin [n \sin i_2]$$

4) Troviamo δ

$$\delta = i_1 + i_2' - \alpha$$

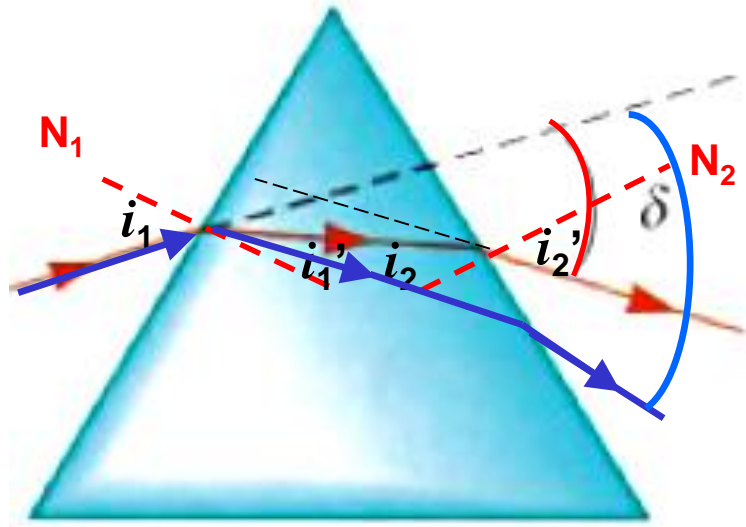


Esempio

Calcoliamo δ nel caso in cui:

$$\alpha = 60^\circ \quad i_1 = 40^\circ \quad n = 1.5$$

δ dipende dall'indice di rifrazione



$$n_{\text{rosso}} < n_{\text{blu}} \implies \delta_{\text{rosso}} < \delta_{\text{blu}}$$

Prismi sottili

Il calcolo dell'angolo di deviazione $\delta = i_1 + i_2' - \alpha$ nelle diverse situazioni sperimentali si può fare applicando la legge di Snell alle due superfici di separazione:

$$\sin i_1 = n \sin i_1' \quad \text{e} \quad n \sin i_2 = \sin i_2'$$

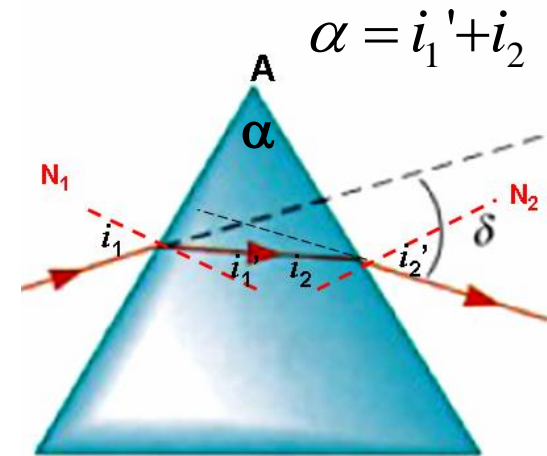
Tale calcolo si semplifica nell'approssimazione di prisma sottile in cui l'angolo al vertice e i vari angoli di incidenza e di rifrazione sono piccoli ($< \sim 10^\circ$). In tale approssimazione:

$$i_1 = n i_1' \quad n i_2 = i_2'$$

$$\delta = i_1 + i_2' - \alpha = n i_1' + n i_2 - \alpha = \underbrace{n(i_1' + i_2)}_{n\alpha} - \alpha$$

dove $\alpha = i_1' + i_2$

$$\delta = i_1 + i_2' - \alpha = n\alpha - \alpha = (n-1)\alpha$$



Nell'approssimazione di prisma sottile la deviazione prismatica è una funzione lineare dell'indice di rifrazione

Potere dispersivo prisma

Poiché l'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda, l'angolo di deviazione dipende dalla lunghezza d'onda → le diverse lunghezze d'onda della luce bianca vengono “disperse” da un prisma:

l'angolo di deviazione è tanto maggiore quanto più grande è n

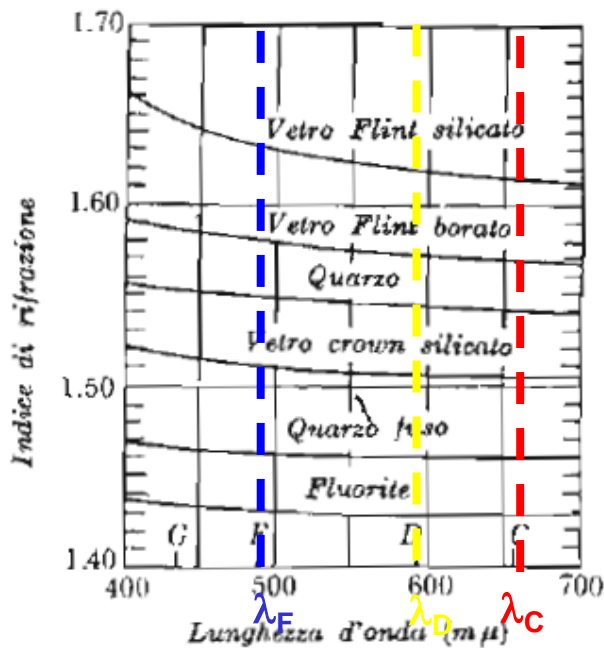
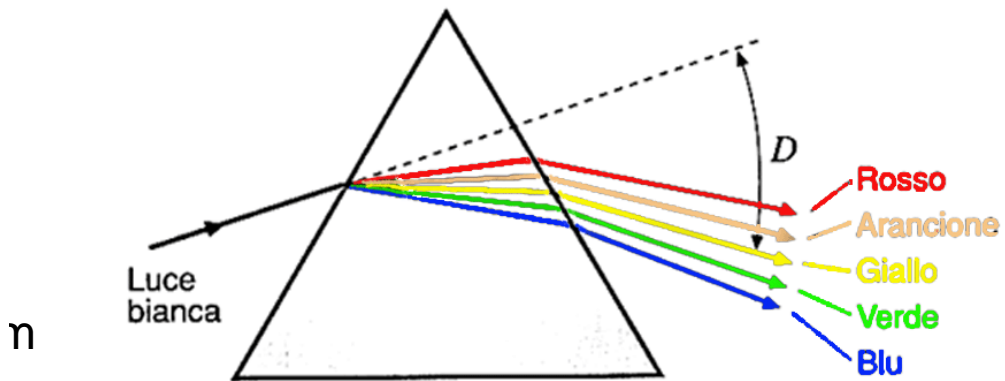


Fig. 2-27 - Variazione dell'indice di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda.



Per quantificare il potere dispersivo di un prisma vengono usate tre lunghezze d'onda di riferimento:

- $\lambda_C = 656.3$ nm lunghezza d'onda del rosso;
- $\lambda_D = 589.3$ nm lunghezza d'onda del giallo;
- $\lambda_F = 486.1$ nm lunghezza d'onda del azzurro;

In approssimazione di prisma sottile $\delta = (n-1)\alpha$

- $\lambda_C = 656.3$ nm lunghezza d'onda del rosso;
- $\lambda_D = 589.3$ nm lunghezza d'onda del giallo;
- $\lambda_F = 486.1$ nm lunghezza d'onda del azzurro;

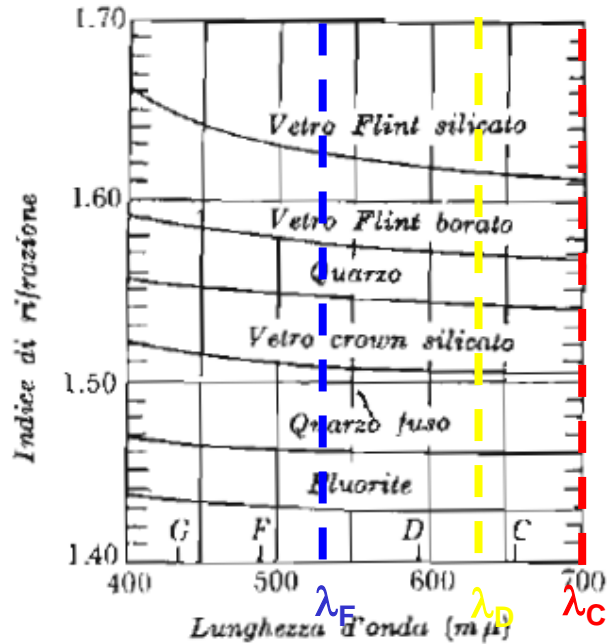
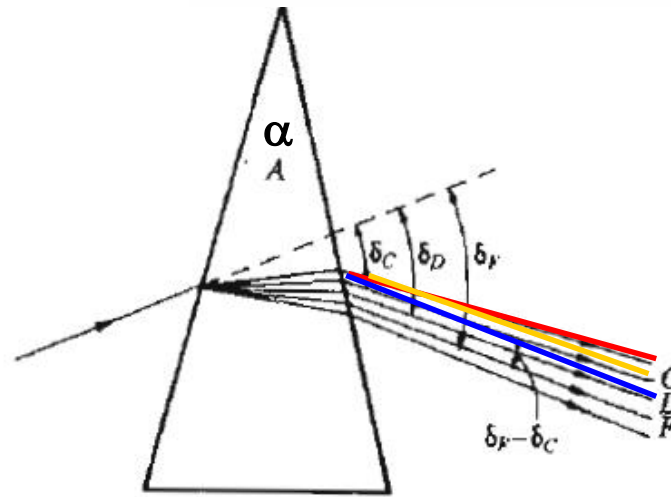


Fig. 2-27 - Variazione dell'indice di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda.



$$\begin{aligned} \delta_C &= (n_C - 1)\alpha \\ \delta_D &= (n_D - 1)\alpha \\ \delta_F &= (n_F - 1)\alpha \end{aligned}$$

$$\delta_F - \delta_C = (n_F - 1)\alpha - (n_C - 1)\alpha = (n_F - n_C)\alpha$$

$$\omega = \frac{\delta_F - \delta_C}{\delta_D} = \frac{(n_F - n_C)\alpha}{(n_D - 1)\alpha} \approx \frac{(n_F - n_C)}{(n_D - 1)}$$

Potere dispersivo del mezzo

$$V = \frac{1}{\omega} = \frac{(n_D - 1)}{(n_F - n_C)}$$

Numero di Abbe

Compreso solitamente tra 25 e 60 rappresenta la capacità di un prisma di contenere la dispersione cromatica sul materiale considerato. Più V è grande meno dispersivo è il materiale

Il vetro crown è prodotto da silicati di calcio-alkali (RCH) contenenti circa il 10% di ossido di potassio. Esso ha un basso indice di rifrazione ($\approx 1,52$) e di una bassa dispersione (con numeri di Abbe circa 60).

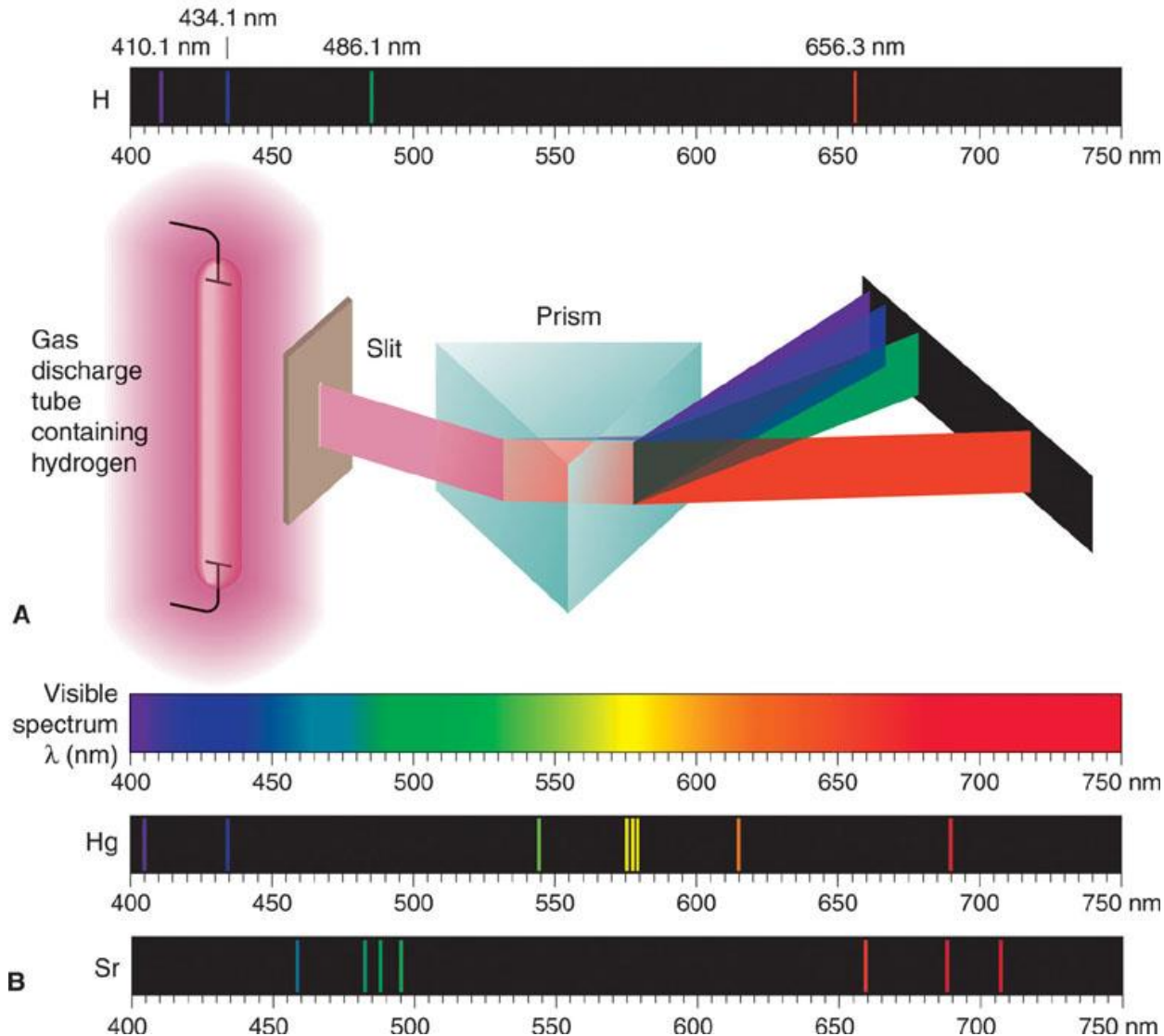
Vetro flint i ha un indice di rifrazione particolarmente alto (1,6—1,89) e numeri di Abbe più bassi

Medium	n_d	n_e	CVF	Density	UV cut-off	Abbe	$\rho(\%)$
Glasses							
White Crown	1.523	1.525	1.0	2.5	320	59	4.3
Light flint	1.600	1.604	0.87	2.6	334	42	5.3
1.7 glasses	1.700	1.705	0.75	3.2	340	35	6.7
	1.701	1.706	0.75	3.2	320	42	6.7
1.8 glasses	1.802	1.807	0.65	3.7	332	35	8.2
	1.830	1.838	0.63	3.6	340	32	8.6
1.9 glasses	1.885	1.893	0.59	4.0	340	31	9.4
Plastics							
CR39	1.498	1.500	1.0	1.3	355	58	4.0
INDO Superfin	1.523	1.525	0.95	1.3	350	48	4.3
Trivex®	1.532	1.535	0.94	1.1	380	46	4.4
Sola Spectralite	1.537	1.540	0.93	1.2	385	47	4.5
Corning SunSensors®	1.555	1.558	0.90	1.2	380	38	4.7
PPG HIP	1.560	1.563	0.89	1.2	370	38	4.8
AO Alphalite 16XT	1.582	1.585	0.86	1.3	380	34	5.1
Polycarbonate	1.586	1.589	0.85	1.2	385	30	5.2
Hoya Eyas 1.6	1.600	1.603	0.83	1.3	380	42	5.3
Polyurethanes	1.600	1.603	0.83	1.3	380	36	5.3
	1.609	1.612	0.82	1.4	380	32	5.4
	1.660	1.664	0.75	1.4	375	32	6.2
	1.670	1.674	0.74	1.4	395	32	6.3
Hoya Eyry 1.7	1.695	1.710	0.72	1.4	380	36	6.7
High index 1.71	1.710	1.715	0.70	1.4	380	36	6.9
Very high index	1.740	1.746	0.67	1.5	400	33	7.3



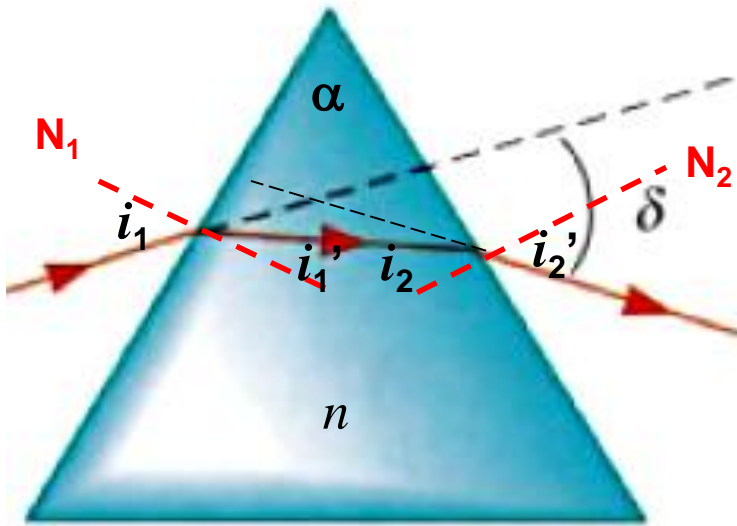
Per costruire lenti è meglio avere un materiale con numero di Abbe grande per minimizzare l'aberrazione cromatica. Se vogliamo viceversa usare un prisma in uno spettrometro cioè per separare le diverse componenti (colori) della luce, si deve usare un materiale con potere dispersivo grande e quindi numero di Abbe piccolo.

Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.

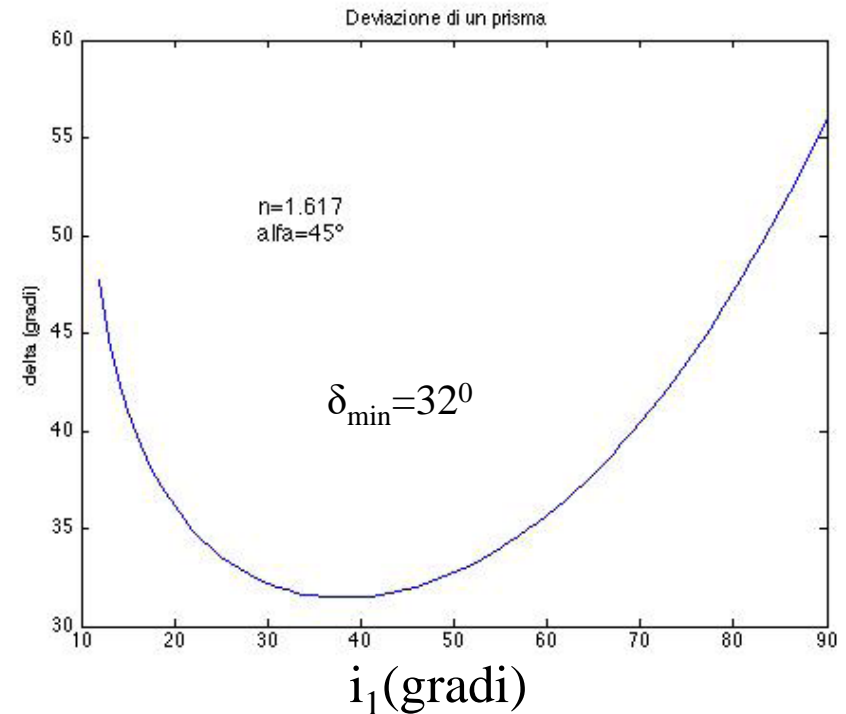


Angolo di deviazione minima (prisma isoscele)

Fissiamo una certa lunghezza d'onda λ e misuriamo $\delta = i_1 + i_2' - \alpha$ in funzione dell'angolo di incidenza, otteniamo.



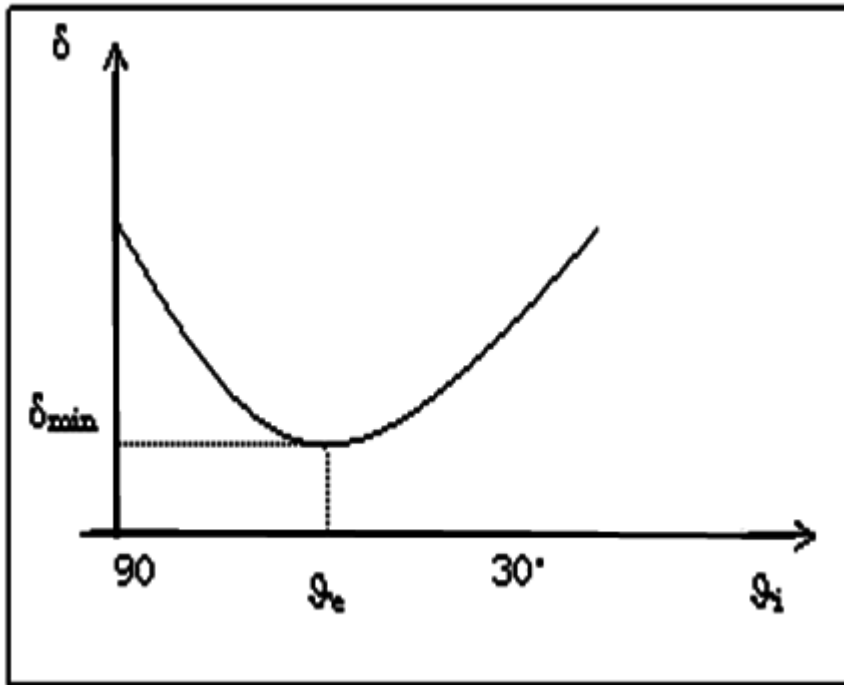
E' presente un solo minimo.



La condizione di deviazione minima corrisponde alla situazione in cui l'angolo di ingresso θ_i (o i_1) è uguale all'angolo di uscita θ_e (o i_2') ed il raggio luminoso all'interno del prisma è parallelo alla base. Infatti, se così non fosse, per il teorema della reversibilità del cammino luminoso, dovrebbero esistere almeno due angoli di deviazione minima. Trovato l'angolo di incidenza corrispondente all'angolo di deviazione minima, ponendo $i_1 = i_2'$, si ha:

$$\delta_{\min} = i_1 + i_2' - \alpha = 2i_1 - \alpha$$

- La misura della deviazione minima $\delta_{\min}(\lambda)$ è particolarmente interessante perché si può facilmente vedere che essa può essere messa in relazione con l'indice di rifrazione n del prisma tramite la formula:



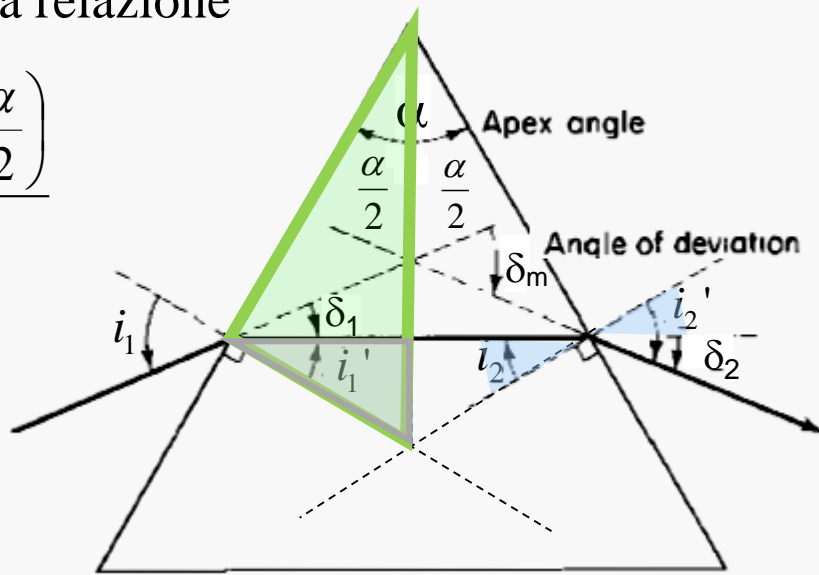
$$n(\lambda) = \frac{\text{sen} \frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}}{\text{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

dove α è l'angolo al vertice del prisma

La misura sperimentale di δ_m permette di determinare l'indice di rifrazione $n(\lambda)$ se questo non è noto

Dimostramo la relazione

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_m}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$



$$i_2' = i_1$$

$$\delta_m = 2i_2' - \alpha = 2i_1 - \alpha$$

I triangoli rettangoli verde e grigio hanno gli stessi angoli

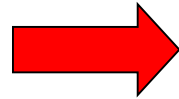
$$i_1' = \frac{\alpha}{2} = i_2 \quad \text{per simmetria}$$

Per simmetria si ha metà della deviazione su ogni faccia

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{\delta_m}{2}$$

$$\delta_2 = i_2' - i_2 \Rightarrow \frac{\delta_m}{2} = i_2' - i_2 = i_2' - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow i_2' = \frac{\delta_m}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$n \sin i_2 = \sin i_2' \Rightarrow n \sin \frac{\alpha}{2} = \sin\left(\frac{\delta_m}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$$



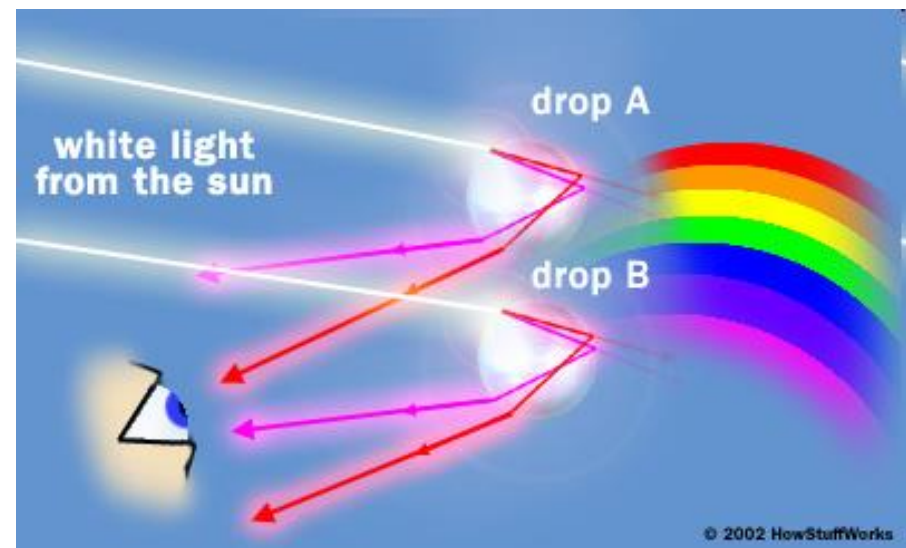
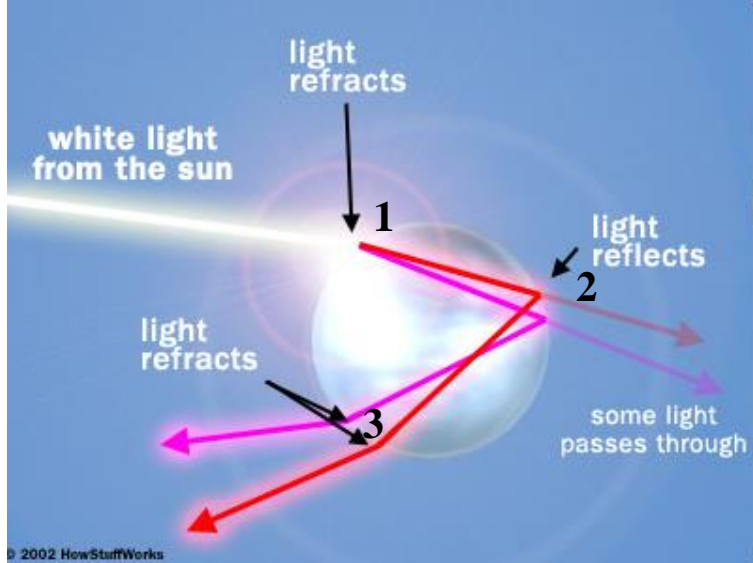
$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_m}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$n = \frac{\frac{\delta_m}{2} + \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \rightarrow \delta_m = (n - 1)\alpha$$

Prisma con angolo al vertice piccolo

Dispersione della luce: l'arcobaleno





1-La luce bianca incide in maniera radente su una goccia d'acqua e viene rifratta al suo interno

I vari colori vengono rifratti con un angolo differente

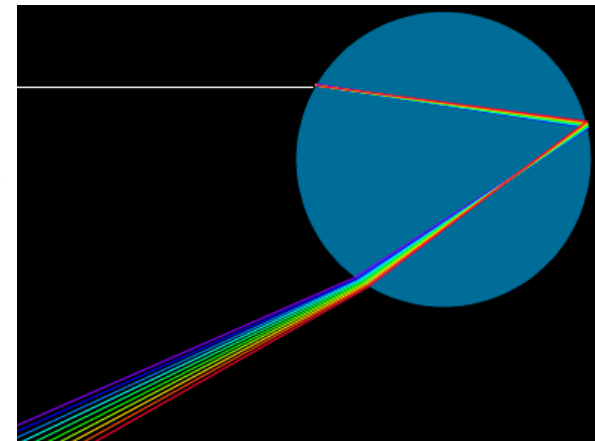
2-I raggi rifratti raggiungono la superficie acqua/aria della goccia con un angolo vicino all'angolo critico e vengono riflessi nuovamente all'interno della goccia

3-I raggi dei diversi colori raggiungono nuovamente la superficie acqua/aria con un angolo di incidenza piccolo e vengono rifratti.

Tali raggi escono dalla goccia con differenti angoli: il raggio violetto avrà l'inclinazione minore rispetto al suolo, quello rosso quella maggiore.

Agli occhi di un osservatore arrivano i raggi deviati dalle diverse goccioline di acqua: i raggi violetti (più orizzontali) arriveranno agli occhi dell'osservatore da goccioline d'acqua che stanno più in basso di quelle da cui arrivano i raggi rossi (più verticali). Gli altri colori da goccioline che stanno in posizioni intermedie tra queste

All'osservatore il violetto apparirà nella parte bassa dell'arcobaleno mentre il rosso nella parte alta.

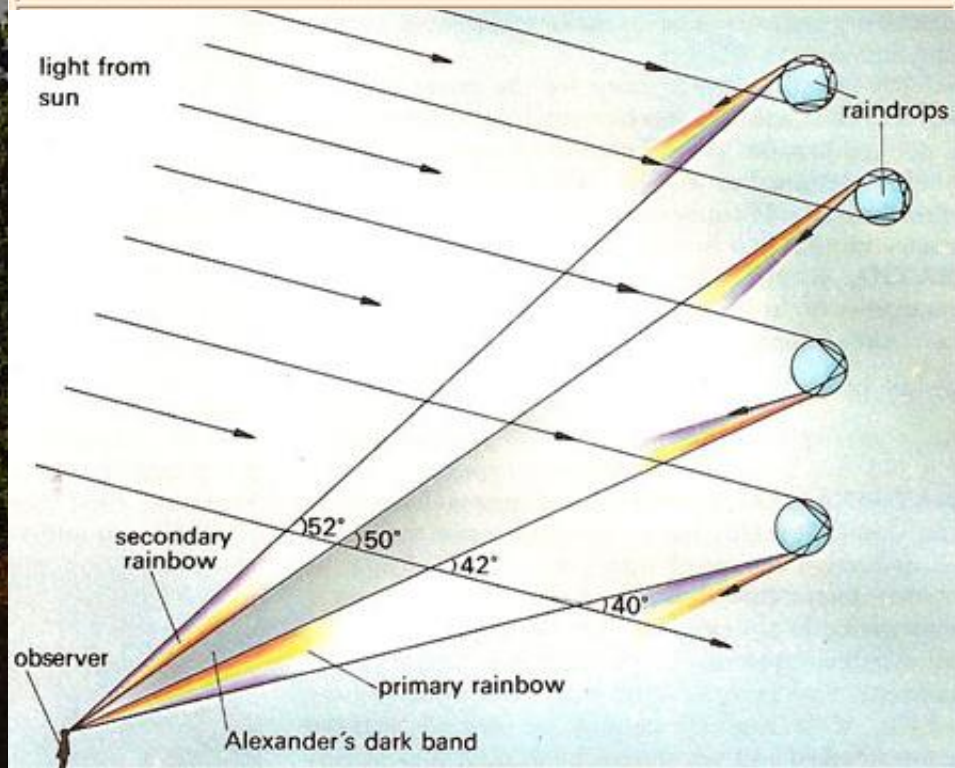
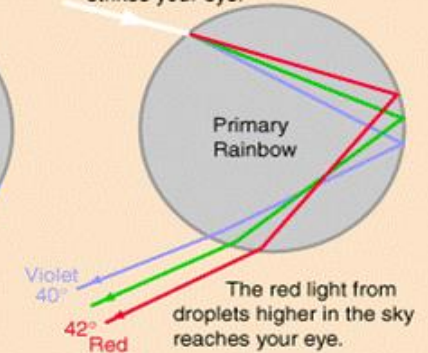
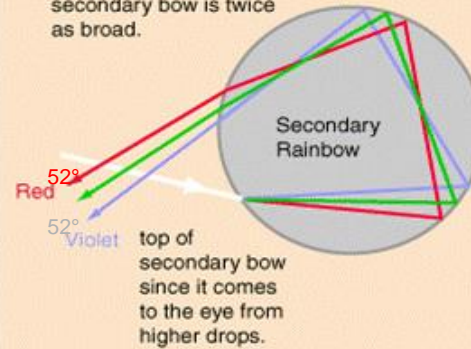




Rainbow Light Paths

The colors of the secondary rainbow are reversed from the primary bow, and the secondary bow is twice as broad.

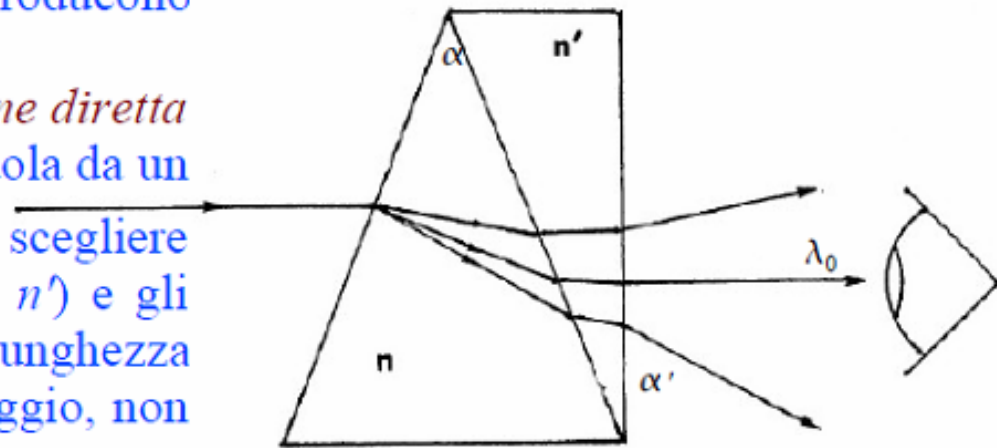
Violet light is bent more and comes out higher from the droplet. It appears at the bottom of the rainbow since violet light from lower droplets strikes your eye.



Applicazione dei prismi: prismi a visione diretta

Due prismi accoppiati come in figura introducono deviazioni di segno opposto.

Nel caso in cui si voglia effettuare la *visione diretta* della sola lunghezza d'onda λ_0 selezionandola da un fascio di luce bianca, è possibile scegliere opportunamente i materiali (e quindi n e n') e gli angoli α e α' , e fare in modo che la lunghezza d'onda λ_0 , unica tra quelle presenti nel raggio, non sia deviata.



Affinchè le due deviazioni si compensino deve essere: $\delta_0 = (n_0 - 1)\alpha = \delta'_0 = (n'_0 - 1)\alpha'$.

I due prismi da selezionare per poter avere la visione diretta devono quindi soddisfare la relazione:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{n'_0 - 1}{n_0 - 1}$$

Esempio:

L'accoppiamento di un prisma di crown ($n_D = 1.511$) con un prisma flint ($n'_D = 1.591$) corrisponde ad un rapporto angolare $\alpha/\alpha' = 1.156$; se il prisma in flint ha un'apertura $\alpha' = 10^\circ$ allora quello in crown deve avere un'apertura $\alpha = 11.56^\circ$

affinchè non venga deviata radiazione con lunghezza d'onda λ_D

Applicazione dei prismi: prisma acromatico

Due prismi possono essere accoppiati in modo da *compensare mutuamente le rispettive dispersioni, senza tuttavia compensare le rispettive deviazioni.*

Affinchè la dispersione angolare introdotta dal primo prisma sia compensata dal secondo prisma si deve avere

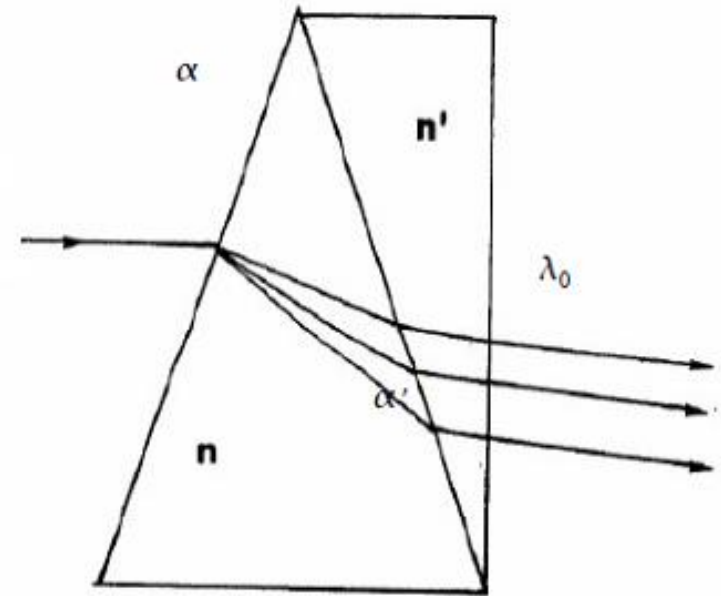
$$\delta_F - \delta_C = \delta'_F - \delta'_C$$

dove, per i prismi sottili, $\delta = (n-1)\alpha$

$$\longrightarrow (n_F - n_C)\alpha = (n'_F - n'_C)\alpha'$$

da cui segue :

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{n'_F - n'_C}{n_F - n_C}$$



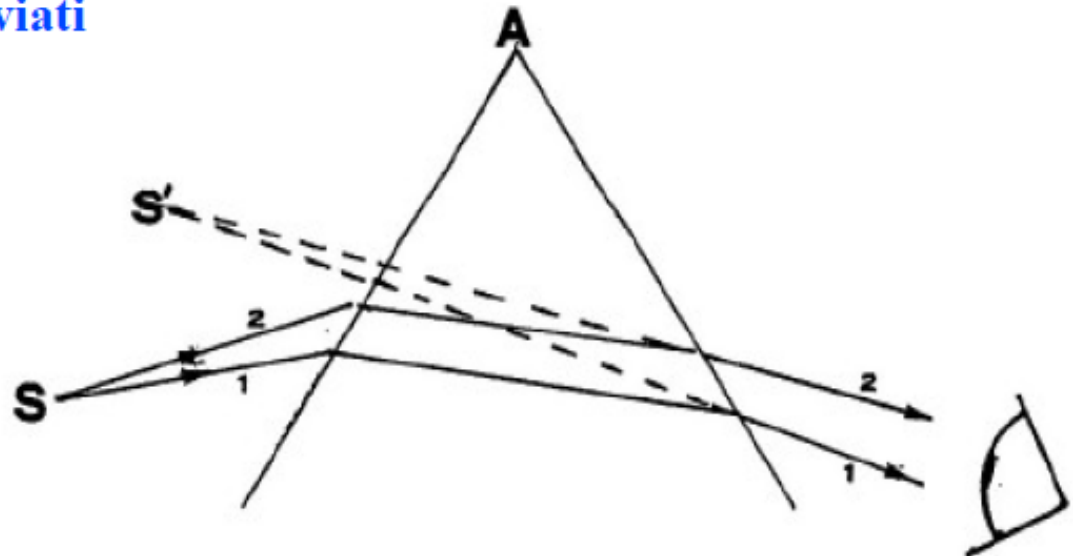
Il prisma acromatico riveste particolare importanza in tutti quegli strumenti ottici in cui è necessario deviare un fascio luminoso senza scomporr le sue componenti cromatiche.

Esercizi

- 1) Un prisma con angolo al vertice di 60° mostra un angolo di minima deviazione di 56° per una data lunghezza d'onda. Quale è l'indice di rifrazione per quella lunghezza d'onda?
- 2) Un prisma di vetro con $n=1.62$ mostra un angolo di deviazione minima di 48.2° . Quale è l'angolo al vertice del prisma?
- 3) Un prisma con angolo al vertice di 40° ha indice di rifrazione che vale 1.652 nel blu e 1.618 nel rosso. Quale è la dispersione angolare tra due raggi blu e rosso incidenti con un angolo di 25° . A che distanza incideranno tali raggi su uno schermo posto a distanza di 1 m dal prisma?
- 4) Quale è l'angolo al vertice di un prisma di vetro crown ($n=1.508$) avente potenza prismatica 5Δ ?
- 5) Si costruisca un prisma (a) a visione diretta nel giallo e (b) acromatico (blu-rosso), adoperando vetri flint e crown i cui poteri dispersivi sono $\omega^{\text{crown}}=0.018$, $\omega^{\text{flint}}=0.031$ e gli indici di rifrazione nel giallo sono $n_D^{\text{crown}} = 1.508$ e $n_D^{\text{flint}} = 1.620$. (Si assuma che gli angoli al vertice dei prismi siano piccoli)
- 6) Un fascio laser rosso penetra da uno dei due lati inclinati del prisma equilatero di vetro ($n_c=1.42$) e viene rifratto. La luce attraversa il prisma in orizzontale. Calcolare l'angolo di deviazione δ_c del raggio.

Formazione dell'immagine attraverso un prisma

- Il sistema di raggi che diverge dall'oggetto S viene deviato dal prisma in un modo che *dipende solo dall'angolo di incidenza e dall'angolo al vertice del prisma, ma non dalle dimensioni del prisma (lunghezza dei lati)*
- I diversi raggi provenienti dall'oggetto incidono con angoli differenti, e quindi vengono deviati in modo differente
- Il sistema di raggi divergente in ingresso al prisma viene trasformato in un sistema di raggi in uscita che è *ancora divergente*
- L'immagine creata da un prisma è un *immagine virtuale*, corrispondente al prolungamento dei raggi deviati



Potere prismatico (o potenza prismatica)

Potenza prismatica: la deviazione del raggio ottico, espressa in centimetri, misurata alla distanza di un metro dal prisma.

Grandezza comunemente utilizzata in ottica oftalmica per descrivere l'entità delle deviazioni di un prisma.

Diottria prismatica: l'unità di misura della potenza prismatica; si indica con Δ (o con *d.p.*).

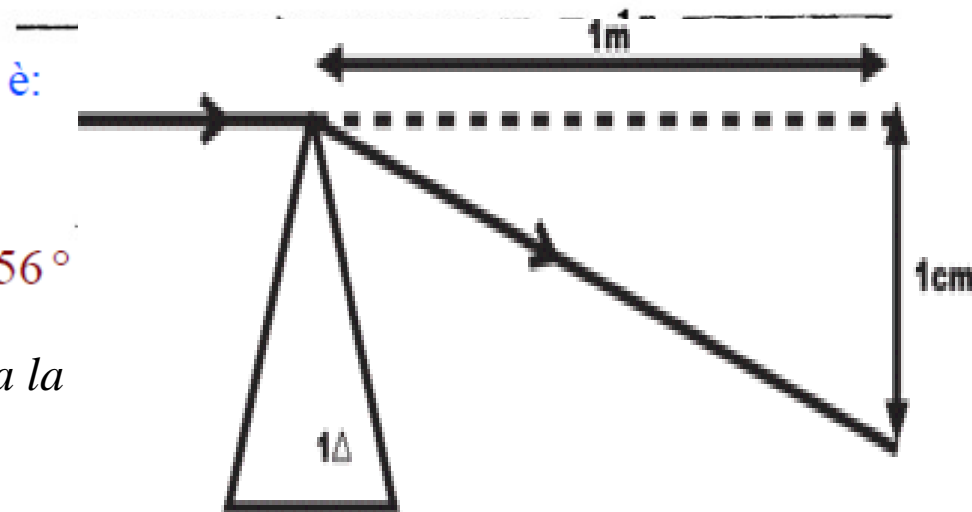
In base a questa definizione un prisma che ha una potenza prismatica di 1Δ è in grado di generare una deviazione di 1 cm, misurata ad un metro di distanza.

La deviazione angolare corrispondente ad 1Δ è:

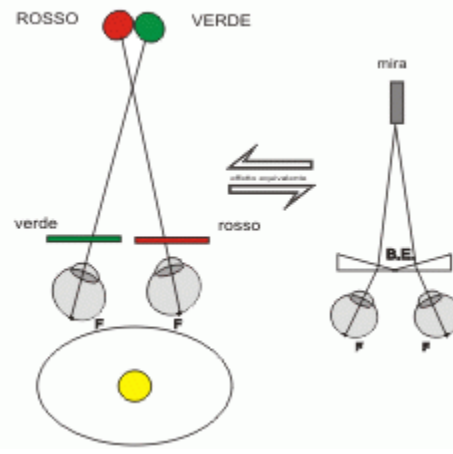
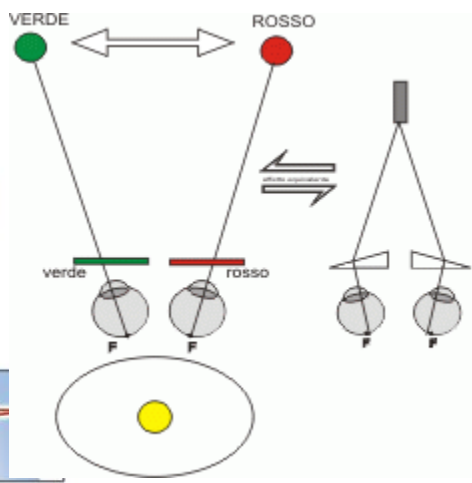
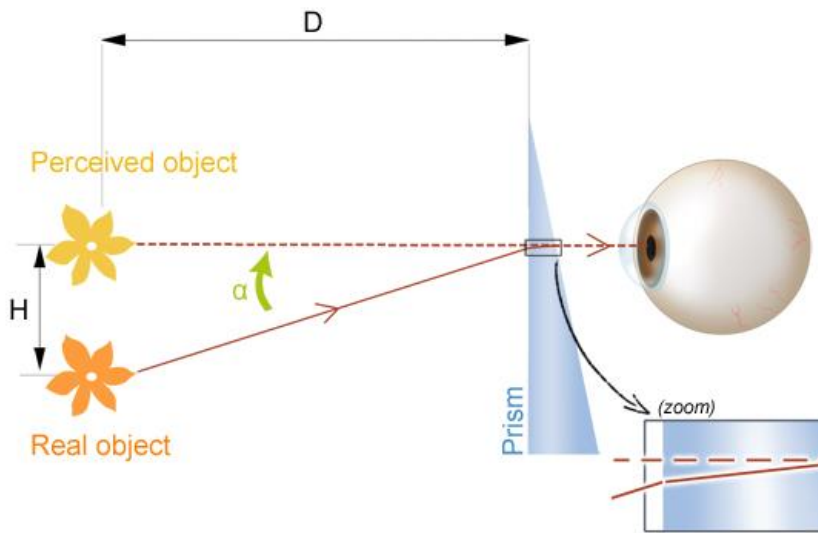
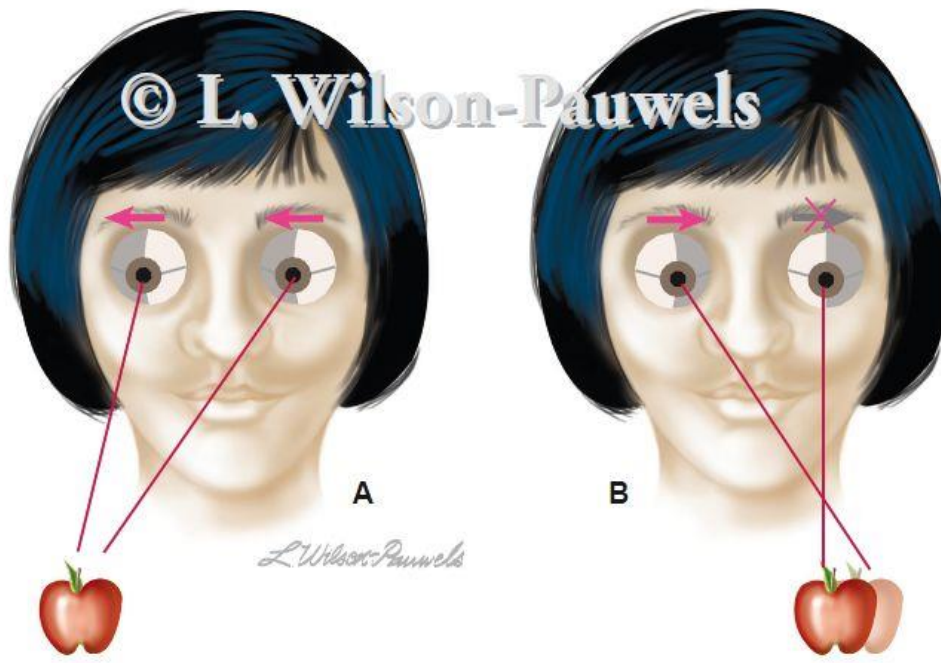
$$\tan \delta \simeq \delta = \frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 0.01 \text{ rad} = 0.56^\circ$$

$\delta = (n-1)\alpha$ la deviazione in gradi è circa la metà dell'angolo al vertice del prisma

$$\alpha(1\Delta) = 0.56^\circ / (n-1)$$



© L. Wilson-Pauwels



■ DIOPTRE