TEMA 12. PROBABILIDAD.

1. Introducción.

En la vida cotidiana aparecen muchas situaciones en las que los resultados observados son diferentes aunque las condiciones iníciales en las que se produce la experiencia sean las mismas. Por ejemplo, al lanzar una moneda unas veces resultará cara y otras cruz.. Estos fenómenos, denominados aleatorios, se ven afectados por la incertidumbre.

En el lenguaje habitual, frases como "probablemente...", "es poco probable que...", "hay muchas posibilidades de que..." hacen referencia a esta incertidumbre. La teoría de la probabilidad pretende ser una herramienta para modelizar y tratar con situaciones de este tipo; Por otra parte, cuando aplicamos las técnicas estadísticas a la recogida, análisis e interpretación de los datos, la teoría de la probabilidad proporciona una base para evaluar la fiabilidad de las conclusiones alcanzadas y las inferencias realizadas. Debido al importante papel desempeñado por la probabilidad dentro de la estadística, es necesario familiarizarse con sus elementos básicos, lo que constituye el objetivo del presente tema.

Se introduce el sentido de la probabilidad en términos de experimentos aleatorios, espacio muestral, sucesos, etc. , llegando a la formalización axiomática de la probabilidad y sus principales propiedades, junto con la expresión de la probabilidad condicionada , la independencia de sucesos, probabilidad total y Teorema de Bayes.

2. Experimentos aleatorios. Espacio muestral.

$$\boxed{\text{Experimentos}}\begin{cases}\underline{\text{Determinista}}\text{: aquel del que se puede predecir el resultado}\\ \underline{\text{Aleatorio}}\text{: aquel del que no se puede predecir el resultado que se va a obtener.}\end{cases}$$

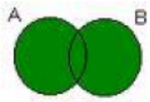
- El **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados que se pueden obtener al realizar un experimento aleatorio. Se representa con la letra E.

3. Sucesos y operaciones con sucesos.

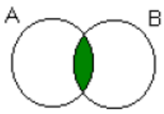
- Llamamos **Suceso** a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral. Existen diferentes **tipos de Sucesos**:

  - Suceso elemental: es aquel que está formado por un único resultado del experimento.
  - Suceso compuesto: es aquel que está formado por más de un resultado del experimento aleatorio.
  - Suceso seguro: es aquel que se verifica siempre. Es justamente el espacio muestral
  - Suceso Imposible: es aquel que no se verifica nunca. Se representa con $\varnothing$
  - Suceso contrario o complementario: dos sucesos son contrarios o complementarios si la verificación de uno implica la no verificación del otro. El contrario de A se representa con $\overline{A}$.
  - Sucesos incompatibles: son aquellos que no se pueden verificar a la vez. $A \cap B = \varnothing$

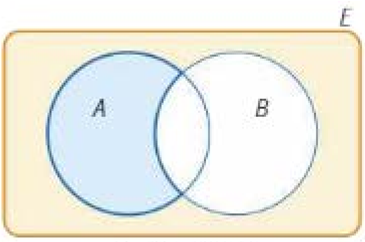
- Luego se explican algunas de las **operaciones con sucesos**:
  - Unión de Sucesos: dados dos sucesos A y B, el suceso unión, $A \cup B$, es aquel que se verifica si lo hacen al menos uno de los dos sucesos A o B.



  - Intersección de sucesos: dados dos sucesos A y B, el suceso intersección, $A \cap B$, es aquel que se verifica si lo hacen A y B al mismo tiempo.



  - Diferencia de sucesos: el suceso A – B es el conjunto de elementos que son de A y no son de B.



$A - B = A \cap \overline{B}$

OBSERVACIÓN. Para trabajar estas definiciones revisa los siguientes ejemplos:
En la página web "EJEMPLOS DE CLASE": Ej1 y Ej2.
En la página web "Ejercicios resueltos": pág 7 "Espacio muestral y sucesos" 2 y 3.

- Se dice que los sucesos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ forman un sistema completo de sucesos si verifican:
  1. Son incompatibles entre sí.
  2. Cubren el espacio muestral, es decir, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = E$

➢ Propiedades de las operaciones con sucesos:

Propiedades	Unión	Intersección
Asociativa	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
Conmutativa	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
Idempotente	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
Simplificativa	$A\cup(A\cap B)=A$	$A\cap(A\cup B)=A$
Absorción	$A\cup E=E$	$A\cap\varnothing=\varnothing$
Elemento Neutro	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
Complementación	$A\cup\overline{A}=E$	$A\cap\overline{A}=\varnothing$
Distributiva	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
LEYES DE MORGAN	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

<u>OBSERVACIÓN.</u>
Para trabajar las leyes de Morgan revisa el ejercicio2 de "Ejercicios de clase".
Ejercicios de los apartados vistos: "Ejercicios de clase" 1, 3 y 4.
"Ejercicios propuestos" 5

4. Frecuencia y probabilidad. Definición axiomática de la probabilidad.

- **<u>Definición de probabilidad:</u>** cuando repetimos un experimento aleatorio muchas veces, la frecuencia relativa $= \frac{n_A}{n}$ (donde $\begin{cases} n_A = \text{nº de veces que ocurre el suceso A} \\ n = \text{nº de veces que se hace el experimento} \end{cases}$) de un suceso A tiende a aproximarse a un valor fijo, ese valor se define como probabilidad del suceso A (P(A))

<u>OBSERVACIÓN.</u> Para trabajar esta definición revisa el siguiente ejemplo:
En la página web "EJEMPLOS DE CLASE": Ej3.

- **Definición axiomática de probabilidad**: otra forma de definir la probabilidad está basada en unos principios tan claros y evidentes que son admitidos sin necesidad de demostración, son los axiomas de probabilidad.

$\boxed{Axioma\ 1}$ $0 \leq P(A) \leq 1$ $\quad A$ es cualquier suceso.

$\boxed{Axioma\ 2}$ $P(\varnothing) = 0$ y $P(E) = 1$

$\boxed{Axioma\ 3}$ Si A y B son dos sucesos son incompatibles, es decir, $A \cap B = \varnothing$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Consecuencias

$\boxed{1}$ $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

$\boxed{2}$ (2 sucesos) $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

$\boxed{3}$ (3 sucesos) $\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$

5. Cálculo de probabilidades. Regla de Laplace.

Regla de Laplace:

Para poder aplicar esta regla, los diferentes sucesos elementales del experimento aleatorio tienen que ser equiprobables, es decir, que todos tengan la misma probabilidad.

La probabilidad de un suceso A es igual al cociente entre el número de casos favorables al suceso A y el número de casos posibles.

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables al suceso A}}{\text{Nº de casos posibles}}}$$

OBSERVACIÓN.

Para trabajar estas definiciones revisa los siguientes EJEMPLOS:

En la página web “EJEMPLOS DE CLASE”: Ej4.

En la página web “Ejercicios resueltos”:

pág 7 y 8 “Espacio muestral y sucesos”ejercicios 5 y 6.

Pág 8 “Ley de Laplace” 1 y 2.

EJERCICIOS de los apartados vistos: “Ejercicios propuestos” pág 15 ejercicios 2 y 3;
pág 16 ejercicio 6

6. Probabilidad condicionada. Propiedades de la probabilidad condicionada.

- **Tablas de contingencia.**
En ocasiones podemos organizar la información de un enunciado en una tabla, llamada tabla de contingencia y obtener información a partir de los datos. Esto ocurre cuando tenemos información de dos sucesos A y B, y de sus contrarios $\bar{A}$ y $\bar{B}$.

Ejemplo: De los 150 empleados de una empresa 42 van a trabajar en coche y el resto usa la ruta de la empresa. De los que van en coche, 20 son mujeres. En la empresa 87 empleados son hombres.

Si se elige un empleado al azar y se consideran los sucesos:
A = "utiliza la ruta" por tanto $\bar{A}$ = "no utiliza la ruta"
B = "es hombre" por tanto $\bar{B}$ = " no es hombre"

	A: Ruta	**$\bar{A}$: Coche**	**total**
B: Hombre	65	22	87
$\bar{B}$: Mujer	43	20	63
total	108	42	150

En la tabla aparecen sombreados los datos que nos dan en el enunciado y el resto se completa fácilmente. A partir de la tabla se calculan las siguientes probabilidades: "al elegir un empleado al azar"

$$a)\ \ p(elegir\ hombre) = p(B) = \frac{87}{150} = \frac{29}{50}$$

$$b)\ \ p(utiliza\ coche) = p(\bar{A}) = \frac{42}{150} = \frac{7}{25}$$

$$c)\ p(elegir\ mujer\ que\ utiliza\ la\ ruta) = p(\bar{B} \cap A) = \frac{43}{150}$$

$$d)\ p(utiliza\ la\ ruta\ sabiendo\ que\ es\ hombre) = p(A/B) = \frac{65}{87}$$

Es decir, al saber que el elegido es un hombre, esta información implica que el conjunto de resultados posibles se ha reducido a 87 elementos y de ellos 65 usan ruta. Se escribe $p(A/B)$ y se lee probabilidad de A sabiendo que ha ocurrido B o **probabilidad de A condicionada con B.**

OBSERVACIÓN.
- Otro ejemplo resuelto: libro pág 303 ejercicio 45.
- Ejercicio libro pág 307: 90 (teniendo en cuenta que el total de la tabla es 100, ya que los datos vienen expresados en porcentajes).

Solución: a) $\frac{3}{7}$ **b)** $\frac{4}{7}$ **c)** $\frac{14}{25}$

- Probabilidad condicionada

La probabilidad de que ocurra un suceso B una vez ha ocurrido el suceso A, se representa por P(B / A) y se calcula así:

$$\boxed{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}} \qquad \text{siendo} \quad P(A)>0$$

Observa: Podemos comprobar esta fórmula en el ejemplo de la tabla de contingencia:

$d)\ p(utiliza\ la\ ruta\ sabiendo\ que\ es\ hombre) =$

$$= p\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{65}{150}}{\frac{87}{150}}=\frac{65}{87}$$

De la expresión anterior se deduce que: $\boxed{P(A\cap B)=P(B/A)\cdot P(A)}$

- **Sucesos dependientes e independientes.**

Nota : *SUCESOS INDEPENDIENTES:* dos sucesos A y B son independientes cuando el resultado obtenido en el primer suceso A no influye en el resultado del segundo suceso B $\boxed{P(A/B)=P(A)}$ $\boxed{P(B/A)=P(B)}$

* Si A y B son independientes $\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$

- Pruebas compuestas

Hay experiencias en las que fácilmente podemos distinguir dos o más etapas. Se llaman pruebas compuestas. En ellas, el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos se simplifica mucho calculando las probabilidades de sus componentes-

Dos pruebas compuestas son independientes cuando el resultado de una no influye en la otra. Si no es así, se llaman dependientes.

Ejemplo:

Experiencias independientes: Tirar una moneda y un dado a la vez.

Experiencias dependientes: Sacar dos bolas de una urna sin reemplazamiento

OBSERVACIÓN.
Para trabajar estas definiciones revisa los siguientes EJEMPLOS:
- En la página web "EJEMPLOS DE CLASE": Ejemplo 5.
- En la página web "Ejercicios resueltos":
pág 9 y 10 "Independencia de sucesos" ejercicios 1 y 2 (usando diagrama de árbol).

EJERCICIOS de los apartados vistos: "Ejercicios propuestos" pág 16 ejercicios 7 y 8.

7. Probabilidad total.

- Probabildad total

Sean n sucesos A_1 , A_2 , ..., A_n incompatibles dos a dos con $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$ y un suceso cualquiera B del espacio muestral, se denomina probabilidad total del suceso B:

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B/A_1) + P(A_2)\cdot P(B/A_2) + \ldots\ldots P(A_n)\cdot P(B/A_n)$$

8. Teorema de Bayes.

- Teorema de Bayes

Sean n sucesos A_1 , A_2 , ..., A_n incompatibles dos a dos con $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$ y un suceso cualquiera B del espacio muestral. Las probabilidades a posteriori $P(A_i / B)$ se determinan mediante la expresión:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(B)} \quad \text{siendo} \quad P(B) > 0$$

OBSERVACIÓN.
Para utilizar el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes no es necesario utilizar las fórmulas. Los usaremos mediante diagrama de árbol como el los siguientes EJEMPLOS:
- En la página web "EJEMPLOS DE CLASE": Ejemplo 6.
- En la página web "Ejercicios resueltos":
pág 13 "Probabilidad total" ejercicios 1 y 2.
Pág 14 "Probabilidad total y teorema de Bayes" ejercicio 1.

EJERCICIOS de los apartados vistos: "Ejercicios propuestos" pág 16 ejercicios 10 y 11; pág 18 ejercicio 23; pág 19 ejercicio 25.