

# Křivky a plochy

Pavel Strachota

FJFI ČVUT v Praze

5. března 2015

# Obsah

- 1 Parametrické křivky
- 2 Parametrické bikubické povrchy
- 3 Implicitní povrchy
- 4 Dělené křivky
- 5 Dělené povrchy

# Úvod

- potřeba popsat a generovat **hladké křivky a povrchy**
  - CAD
  - znakové fonty
  - dráha kamery a pohyb objektů
  - trajektorie v barevném prostoru atd.
  - modelování reálných objektů

# Reprezentace 3D křivek a povrchů

- polygonální síť (množina spojených polygonů)
  - zakřivené povrchy lze pouze aproximovat
  - snížení chyby aproximace  $\implies$  zjemnění sítě, zvýšení paměťových a výpočetních nároků
- implicitní povrchy:  $f(x, y, z) = 0$ 
  - snadný výpočet průsečíků s přímkou, normálových vektorů
  - nesnadné vykreslování - potřeba dodatečných podmínek (např. polokoule)
- **parametrické** křivky a povrchy:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$
- **dělené** křivky a povrchy - vyhlazování polygonálních sítí dělením

# Obsah

- 1 Parametrické křivky
- 2 Parametrické bikubické povrchy
- 3 Implicitní povrchy
- 4 Dělené křivky
- 5 Dělené povrchy

# Parametrické vyjádření

- $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  jsou zpravidla polynomy 3. stupně
  - polynomy nižšího stupně - nedostatečná hladkost a flexibilita při definici křivek a povrchů
  - polynomy vyššího stupně - vyšší výpočetní nároky, méně stabilní (viz Lagrangeova interpolace, NM)
- kubické polynomy v  $t \implies$  kubická křivka, kubika

## Parametrické kubické křivky

- $\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix}$ , kde

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \quad (1)$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z$$

- maticový zápis

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{pmatrix}$$

$\implies$  (1) lze zapsat jako

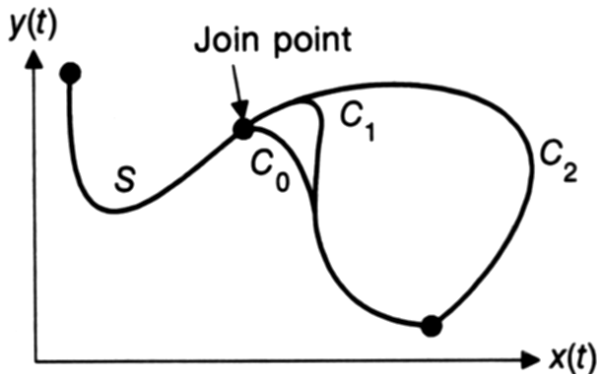
$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{TC}$$

## Hladkost parametrické křivky 1/2

- Tečný vektor parametrické křivky

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}'(t) = \left( \frac{dx(t)}{dt} \quad \frac{dy(t)}{dt} \quad \frac{dz(t)}{dt} \right)$$

- Složitější křivky - navazování segmentů (každý segment kubická křivka pro  $t \in [0, 1]$ )





## Hladkost parametrické křivky 2/2

- **geometrická** spojitost  $G^0$  ... segmenty na sebe navazují
- geometrická spojitost  $G^1$  ... shodný směr tečných vektorů v místě napojení (nikoliv orientace ani velikost)

$$\tau_1 = k\tau_2, k > 0$$

- stačí pro „hladkost“ trajektorie, nikoliv pohybu po křivce v závislosti na  $t$
- křivka má parametrickou spojitost / je třídy  $C^{(n)}$ , je-li  $\forall t, \forall k \in \mathbb{N}_{n+1}$  derivace  $\mathbf{Q}^{(k)}(t)$  spojitá
- spojení segmentů je třídy  $C^1 \Leftrightarrow$  platí  $\tau_1(1) = \tau_2(0)$
- spojení je třídy  $C^{(n)} \Leftrightarrow$  platí  $\mathbf{Q}_1^{(k)}(1) = \mathbf{Q}_2^{(k)}(0), \forall k \in \mathbb{N}_{n+1}$ .

# Potřeba vyšší regularity

- $C^1$  implikuje  $G^1$  (pokud neplatí  $\tau_1(1) = \tau_2(0) = \mathbf{0}$ )
- $\tau(t) = \mathbf{Q}'(t)$  je vektor rychlosti vzhledem k  $t$
- $\mathbf{Q}''(t)$  je vektor zrychlení
- parametrická reprezentace plynulého pohybu  $\implies$  nutné minimálně spojení třídy  $C^1$ , někdy  $C^2$
- na samotné trajektorii se vyšší regularita nepozná

## Definice konkrétní křivky

- $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{TC}$
- **segment** křivky BÚNO  $t \in [0, 1]$
- 4 podmínky ve formě vektorů v  $\mathbb{R}^3$  (např. koncové body, tečné vektory v koncových bodech)

$\implies$  (po složkách) 4 lineární rovnice pro 4 koeficienty každého polynomu  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t) =$  prvky matice  $\mathbf{C}$

## Směšovací funkce 1/2

Nechť  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ , regulární. Potom každou matici  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$  lze vyjádřit jako součin

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\mathbf{G},$$

kde matici  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$  najdeme jako

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}.$$

- $\mathbf{M}$  ... bazová matice
- $\mathbf{G}$  ... „vektor“ geometrických podmínek

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \\ g_{3x} & g_{3y} & g_{3z} \\ g_{4x} & g_{4y} & g_{4z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \\ \mathbf{G}_4 \end{pmatrix} = \left( \mathbf{G}_x \quad \mathbf{G}_y \quad \mathbf{G}_z \right)$$

## Směšovací funkce 2/2

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \\ g_{3x} & g_{3y} & g_{3z} \\ g_{4x} & g_{4y} & g_{4z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \\ \mathbf{G}_4 \end{pmatrix} = \left( \mathbf{G}_x \quad \mathbf{G}_y \quad \mathbf{G}_z \right)$$



$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} = \mathbf{TC} = \mathbf{TMG}$$



$$x(t) = \mathbf{TMG}_x \text{ atd.}$$

- $\mathbf{B} = \mathbf{TM}$  ... řádkový vektor 4 kubických polynomů, tzv. **směšovacích funkcí** (blending functions)
- $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{BG}$  ... vážený součet prvků geometrického vektoru.  
Váhy = směšovací funkce.

## Hermitovské kubiky 1/4

- definovány dvěma koncovými body  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4$  a tečnými vektory  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_4$  v těchto bodech.
- Víme, že vždy lze najít  $\mathbf{G}_H$  pro libovolnou regulární  $\mathbf{M}_H$ .
- Zde naopak napevno určíme

$$\mathbf{G}_H = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_4 \end{pmatrix}$$

a ukážeme, že existuje odpovídající regulární báze matice  $\mathbf{M}_H$ .

## Hermitovské kubiky 2/4

- provedeme dosazení pro všechny složky  $x, y, z$  najednou, BÚNO však lze např. jen pro souřadnici  $x$ :
- víme

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{T} \mathbf{M}_H \mathbf{G}_H$$

- 1 Křivka musí mít krajní body  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4$ , tj.

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{M}_H \mathbf{G}_H,$$

$$\mathbf{P}_4 = \mathbf{Q}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{M}_H \mathbf{G}_H.$$

- 2 Pro tečné vektory musí platit

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{M}_H \mathbf{G}_H,$$

$$\mathbf{R}_4 = \mathbf{Q}'(1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{M}_H \mathbf{G}_H.$$

## Hermitovské kubiky 3/4

- Celkově lze v maticové podobě zapsat

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{M}}} \mathbf{M}_H \mathbf{G}_H.$$

- Levá strana je však z definice  $\mathbf{G}_H$ .
- Rovnost bude splněna, pokud

$$\mathbf{M}_H = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



## Hermitovské kubiky 4/4

$$\mathbf{TM}_H \mathbf{G}_H = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_4 \end{pmatrix}.$$

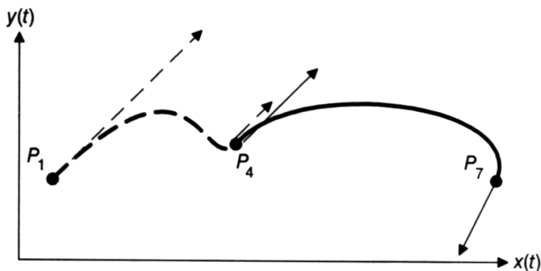
- Po dosazení

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= \mathbf{TM}_H \mathbf{G}_H = \mathbf{B}_H \mathbf{G}_H \\ &= (2t^3 - 3t^2 + 1) \mathbf{P}_1 + (-2t^3 + 3t^2) \mathbf{P}_4 \\ &+ (t^3 - 2t^2 + t) \mathbf{R}_1 + (t^3 - t^2) \mathbf{R}_4 \end{aligned}$$

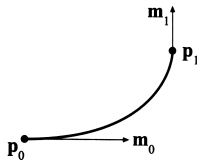
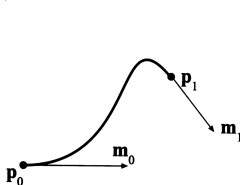
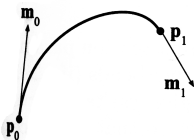
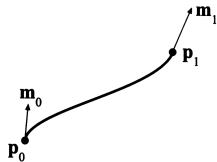
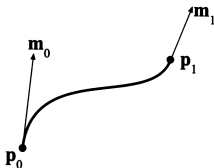
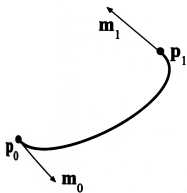
## Navazování hermitovských křivek

- Aby křivka spojená ze dvou Hermitových segmentů měla hladkost  $G^1$ , musí platit

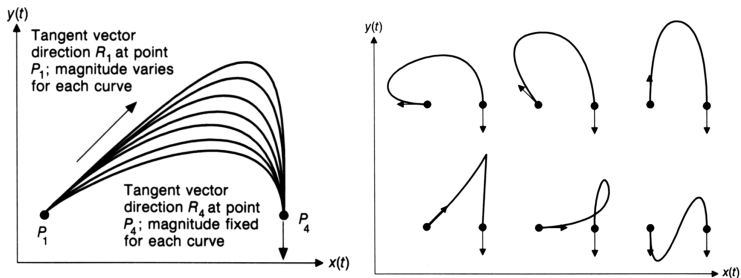
$$\mathbf{G}_H^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_H^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_4 \\ \mathbf{P}_7 \\ k\mathbf{R}_4 \\ \mathbf{R}_7 \end{pmatrix}, \quad k > 0$$



# Hermitovské kubiky - příklady 1/2



# Hermitovské kubiky - příklady 2/2



# Zobrazování křivek

- nejjednodušší algoritmus: vyhodnocujeme  $\mathbf{Q}(t)$  po pevných krocích  $t \in [0, 1]$
- rekurzivní dělení křivek (bude demonstrováno na Bézierových křivkách)
  - přidání řídicích bodů beze změny tvaru křivky
- parametrické křivky jsou invariantní vůči rotaci, škálování, posunutí: transformace nakreslené křivky a vytvoření křivky **pomocí transformovaných řídicích bodů** je ekvivalentní
- křivky **nejsou** invariantní vůči perspektivní projekci

## Hornerovo pravidlo

- nejrychlejší algoritmus pro vyhodnocení hodnoty polynomu v jednom bodě
- pomocí  $n$  násobení a  $n$  sčítání



$$P(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$$



$$P(t) = \alpha_0 + t(\alpha_1 + t(\alpha_2 + t(\alpha_3 + t(\cdots + t(\alpha_{n-1} + t\alpha_n)\cdots))))$$

- rekurzivní vztah

$$p_n = \alpha_n,$$

$$p_{n-1} = tp_n + \alpha_{n-1},$$

$$P(t) = p_0.$$

# Hornerovo pravidlo - program

```
double Horner(int n, double * alpha, double t)
{
    double p = alpha[n];
    for(int i = n-1 ; i >= 0 ; i--)
        p = t*p + alpha[i];
    return p;
}
```

## Dopředné diference

- Vyhodnocování polynomu v mnoha ekvidistantně rozmístěných bodech je neefektivní i Hornerovým pravidlem.

⇒ použití **dopředných diferencí** sníží stupeň polynomu, který je třeba vyhodnotit

$$\Delta f(t) = f(t + \delta) - f(t), \delta > 0$$

$$f(t + \delta) = f(t) + \Delta f(t)$$

- $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \implies \Delta f(t)$  je kvadratická funkce (pořád nestačí)
- lze dále zjednodušit, nakonec bez násobení: označme  $f_n = f(n\delta)$ , potom

$$f_{n+1} = f_n + \Delta f_n,$$

$$\Delta f_n = \Delta f_{n-1} + \Delta^2 f_{n-1},$$

$$\Delta^2 f_{n-1} = \Delta^2 f_{n-2} + 6a\delta.$$



# Bézierovy křivky

- nezávisle Paul de Casteljou, Pierre Bézier
- kubické Bézierovy křivky - popis pomocí bázových funkcí
- definovány 4 kontrolními body,  $\mathbf{P}_2$  a  $\mathbf{P}_3$  nahrazují tečné vektory u hermitovských kubik

$$\mathbf{G}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \end{pmatrix}, \mathbf{M}_B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

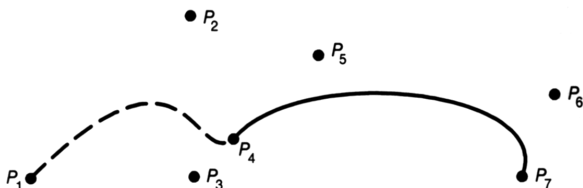
- $\mathbf{Q}(t) = (1-t)^3 \mathbf{P}_1 + 3t(1-t)^2 \mathbf{P}_2 + 3t^2(1-t) \mathbf{P}_3 + t^3 \mathbf{P}_4$

## Navazování Bézierových křivek

- jaké jsou podmínky  $G^1$  a  $C^1$  spojitosti?
- vypočítáme tečné vektory z

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{T}M_B\mathbf{G}_B.$$

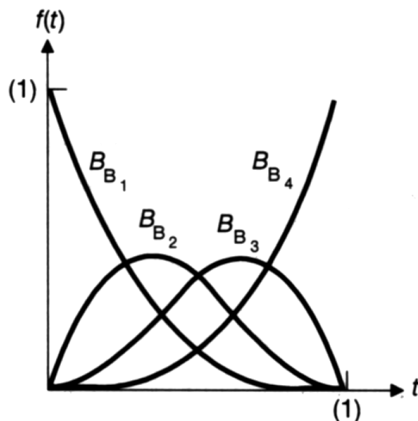
- $G^1$  spojitost pokud  $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_4 = k(\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_5)$ ,  $k > 0$ .
- $C^1$  spojitost pokud navíc  $k = 1$



# Bernsteinovy polynomy

$$Q(t) = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2(1-t) P_3 + t^3 P_4$$

- směšovací funkce u Bézierových křivek



## Bézierovy křivky vyšších stupňů

- Bézierova křivka  $n$ -tého stupně používá  $n + 1$  kontrolních bodů  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$ :

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{P}_i,$$

kde  $B_i^n$  jsou Bernsteinovy polynomy

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

- Vlastnosti  $B_i^n$ :

- $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = (t + (1-t))^n = 1$  (binomická věta)
- $B_i^n(t) \in [0, 1]$  pro  $t \in [0, 1]$  (nezáporná čísla se součtem 1)

$\implies \mathbf{Q}(t)$  leží v konvexním obalu svých řídicích bodů

# Algoritmus podle de Casteljau

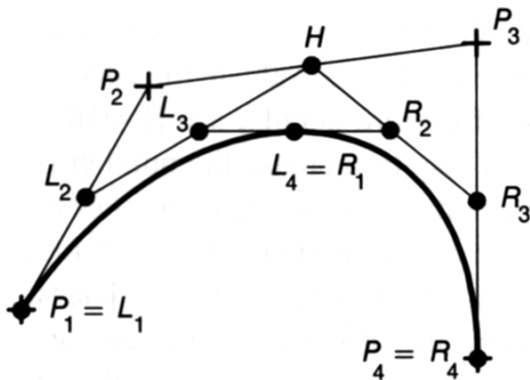
- nalézt bod  $\mathbf{Q}(t)$  na Bézierově křivce stupně  $n$ , určené body  $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$

## Algoritmus

- 1  $i = 0, (\forall k \in \mathbb{N}_{n+1}) (\mathbf{P}_k^0 = \mathbf{P}_k)$  Pozn.  $\mathbb{N}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$
- 2  $\forall k \in \mathbb{N}_n$  pomocí lineární interpolace nalézt bod  $\mathbf{P}_k^{i+1} = (1-t)\mathbf{P}_k^i + t\mathbf{P}_{k+1}^i$  ležící na úsečce  $\mathbf{P}_k^i \mathbf{P}_{k+1}^i$ .
- 3  $i = i + 1, n = n - 1$
- 4 jestliže  $n \geq 2$ , jdi na bod (2).
- 5  $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{P}_0^i$  (jediný bod v posledním průchodu)

## Dělení Bézierových křivek

- Křivku s řídicími body  $P_1, P_2, P_3, P_4$  rozdělíme na 2 křivky s řídicími body  $L_1, L_2, L_3, L_4$  a  $R_1, R_2, R_3, R_4$ .
- Použijeme algoritmus de Casteljau pro  $t = \frac{1}{2}$ :



## Uniformní neracionální B-spliny 1/3

- „**spline**“ = dlouhý tenký pružek plechu nebo dřeva
- po částech polynomiální křivky, závisující na malém počtu řídicích bodů  $\implies$  tzv. *lokální kontrola*
- **kubické B-spliny** aproximují posloupnost  $m + 1$  řídicích bodů  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m, m \geq 3$  pomocí  $m - 2$  kubických segmentů  $\mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_4, \dots, \mathbf{Q}_m$
- „**B**“ = segmenty lze vyjádřit bází směšovacích funkcí
- styčné body křivek  $\mathbf{Q}_i$  ... **uzly** (knots)
- parametr  $t$  substituován tak, aby na  $\mathbf{Q}_i$  nabýval hodnot  $t_i \leq t < t_{i+1}$  pro  $3 \leq i \leq m$
- $t_i$  ...  $i$ -tá **uzlová hodnota**
- **uniformní** = uzly rozmístěny ekvidistantě vzhledem k  $t$  (BÚNO  $t_{i+1} - t_i = 1$ ).

## Uniformní neracionální B-spliny 2/3

- Každý segment  $\mathbf{Q}_i$  je definován pomocí řídicích bodů  $\mathbf{P}_{i-3}, \mathbf{P}_{i-2}, \mathbf{P}_{i-1}, \mathbf{P}_i$ .

$$\implies \mathbf{G}_{Bs_i} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{i-3} \\ \mathbf{P}_{i-2} \\ \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \end{pmatrix}$$

- Pokud definujeme  $\mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} (t-t_i)^3 & (t-t_i)^2 & (t-t_i) & 1 \end{pmatrix}$ , potom lze zapsat

$$\mathbf{Q}_i(t) = \mathbf{T}_i \mathbf{M}_{Bs} \mathbf{G}_{Bs_i},$$

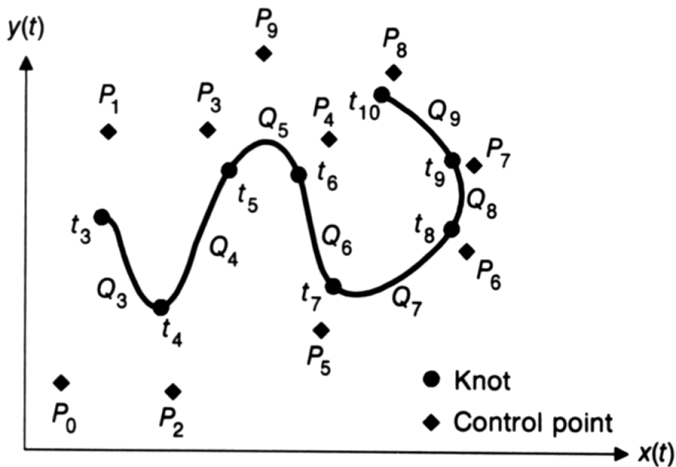
kde

$$\mathbf{M}_{Bs} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



## Uniformní neracionální B-spliny 3/3

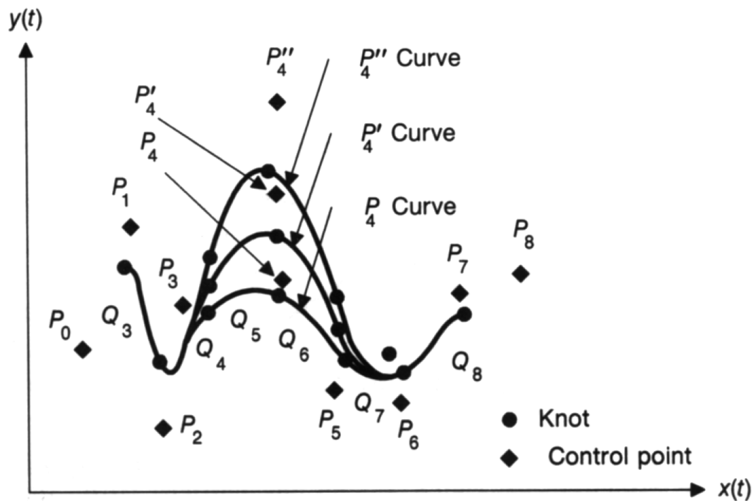
- volba  $M_{Bs}$  zaručuje, že jednotlivé segmenty na sebe navazují a mají spojení třídy  $C^2$ .



# Vlastnosti uniformních neracionálních B-splinů 1/3

- velká hladkost ( $C^2$  spojení), obtížnější kontrola pomocí řídicích bodů
- řídicí body pouze aproximuje
- zopakováním Ř.B. můžeme dosáhnout lepší přimknutí křivky ke svým Ř.B.
- zopakováním Ř.B. 3x dostaneme interpolaci, ale máme jen  $G^0$  spojitost.
- každý segment je v konvexním obalu svých Ř.B.
- každý Ř.B. ovlivňuje max. 4 segmenty - lokální kontrola

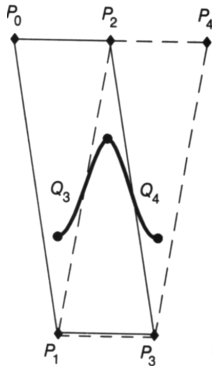
# Vlastnosti uniformních neracionálních B-splinů 2/3



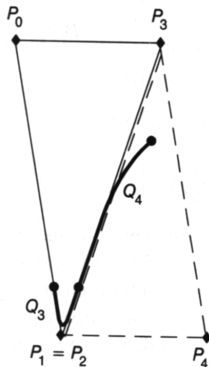
pohyb řídicího bodu

# Vlastnosti uniformních neracionálních B-splinů 3/3

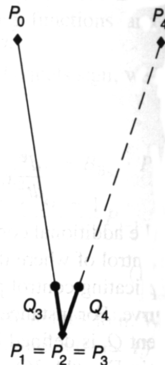
$Q_3$  Convex hull ———  
 $Q_4$  Convex hull - - - - -



(a)



(b)



(c)

násobnost řídicích bodů

# Neuniformní neracionální B-spliny 1/5

- rozdíly  $t_{i+1} - t_i$  mohou být různé
- směšovací funkce nemohou být stejné pro všechny segmenty
- spojitost ve vybraných Ř.B. může být snížena z  $C^2$  na  $C^1, C^0$  i na nespojitost.
- konečné body mohou být snadno interpolovány, nedochází k degeneraci křivky na úsečku

## Neuniformní neracionální B-spliny 2/5

- $m + 1$  řídících bodů  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_m, m \geq 3$
- neklesající posloupnost uzlových hodnot  $t_0, t_1, \dots, t_{m+4}$  (tedy minimálně 8 hodnot)
- neklesající  $\implies$  hodnoty se mohou opakovat  $\implies$  násobný uzel
- segment  $\mathbf{Q}_i$  odpovídající násobnému uzlu  $t_i = t_{i+1}$  je bod
- posloupnost uzlových hodnot např.  
(0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5)

## Neuniformní neracionální B-spliny 3/5

- $B_{i,j}(t)$  je směšovací funkce  $j$ -tého stupně pro vážení řídicího bodu  $\mathbf{P}_i$
- pro kubické B-spliny se 4 řídicími body na segment jsou  $B_{i,4}(t)$  definovány rekurentně

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t_j \leq t < t_{j+1} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases},$$

$$B_{i,2}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} B_{i,1}(t) + \frac{t_{j+2} - t}{t_{j+2} - t_{j+1}} B_{i+1,1}(t),$$

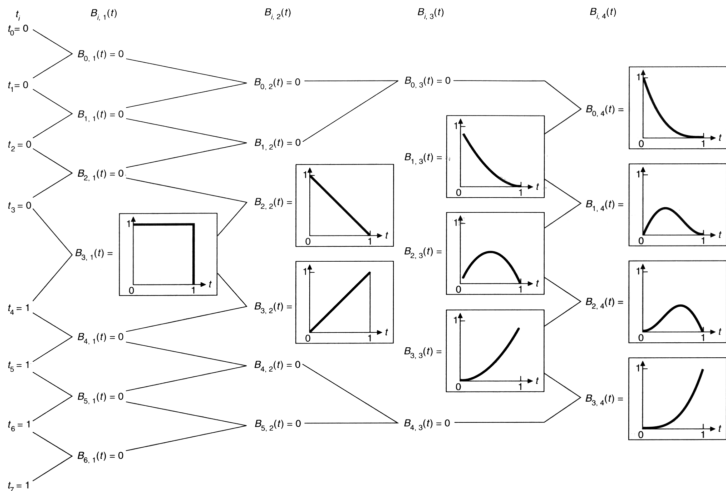
$$B_{i,3}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+2} - t_j} B_{i,2}(t) + \frac{t_{j+3} - t}{t_{j+3} - t_{j+1}} B_{i+1,2}(t),$$

$$B_{i,4}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+3} - t_j} B_{i,3}(t) + \frac{t_{j+4} - t}{t_{j+4} - t_{j+1}} B_{i+1,3}(t).$$

- pro  $3 \leq i \leq m$ ,  $t_j \leq t < t_{j+1}$  :

$$\mathbf{Q}_i(t) = \mathbf{P}_{i-3} B_{i-3,4}(t) + \mathbf{P}_{i-2} B_{i-2,4}(t) + \mathbf{P}_{i-1} B_{i-1,4}(t) + \mathbf{P}_i B_{i,4}(t)$$

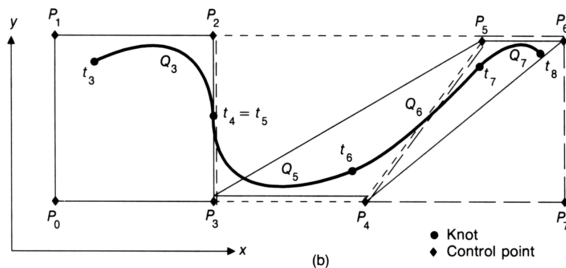
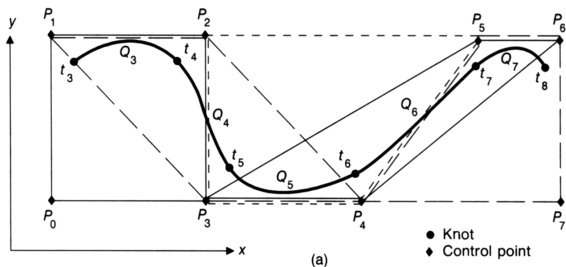
# Neuniformní neracionální B-spliny 4/5



odvození směšovacích funkcí z posloupnosti uzlových hodnot  
(0,0,0,0,1,1,1,1)

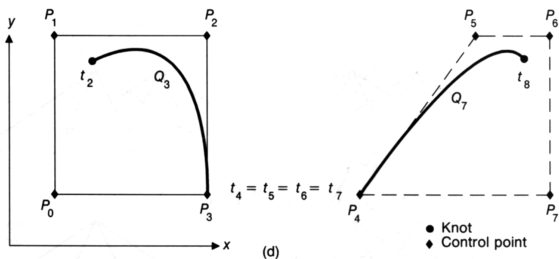
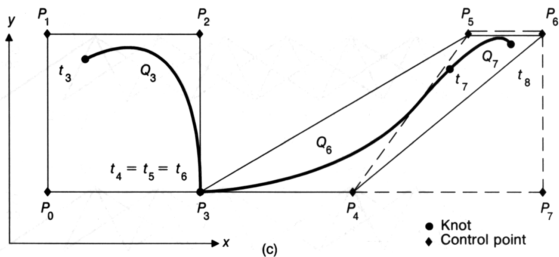


# Neuniformní neracionální B-spliny 5/5



násobnost uzlových hodnot, ztráta spojitosti

# Neuniformní neracionální B-spliny 5/5



násobnost uzlových hodnot, ztráta spojitosti

# Neuniformní racionální kubické polynomiální křivky



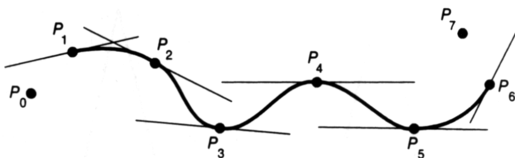
$$x(t) = \frac{X(t)}{W(t)}, y(t) = \frac{Y(t)}{W(t)}, z(t) = \frac{Z(t)}{W(t)}$$

- $X(t), Y(t), Z(t), W(t)$  jsou kubické polynomiální křivky s řídicími body definovanými v homogenních souřadnicích
- homog. souřadnice:  $[x, y, z, w] \mapsto \left[ \frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w} \right]$
- polynomy: Hermitovy, Bézierovy, B-spline ( $\implies$  NURBS)
- výhody neuniformních racionálních křivek:
  - invariance vůči translaci, rotaci, škálování a **perspektivní projekci**
  - schopnost přesně definovat kuželosečky (v CAD)

## Catmull-Rom spliny

- křivka hladce interpolující posloupnost bodů  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_{m-1}$
- definujeme  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_m$
- tečný vektor v bodě  $\mathbf{P}_i$  je rovnoběžný s přímkou  $\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_{i+1}$
- 

$$\mathbf{Q}_i(t) = \frac{1}{2} \mathbf{T} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{i-3} \\ \mathbf{P}_{i-2} \\ \mathbf{P}_{i-1} \\ \mathbf{P}_i \end{pmatrix}$$



# Obsah

- 1 Parametrické křivky
- 2 Parametrické bikubické povrchy**
- 3 Implicitní povrchy
- 4 Dělené křivky
- 5 Dělené povrchy

# Parametrické bikubické povrchy

- většinou aproximační (nikoliv interpolační)
- opět zadané pomocí řídicích bodů a bázových funkcí
- požadavky opět: invariance, konvexní obal, lokální kontrola, interpolace některých řídicích bodů, spojitost při navazování, ...

## Model bikubického povrchu 1/3

- křivka - parametr nyní označen jako  $s$

$$\mathbf{Q}(s) = \begin{bmatrix} x(s) & y(s) & z(s) \end{bmatrix} = \mathbf{SMG}$$

- necht' je geometrický vektor závislý na parametru  $t$ , resp. jeho složky - řídící body - se pohybují po křivce parametrizované pomocí  $t$

$$\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1(t) \\ \mathbf{G}_2(t) \\ \mathbf{G}_3(t) \\ \mathbf{G}_4(t) \end{pmatrix}$$

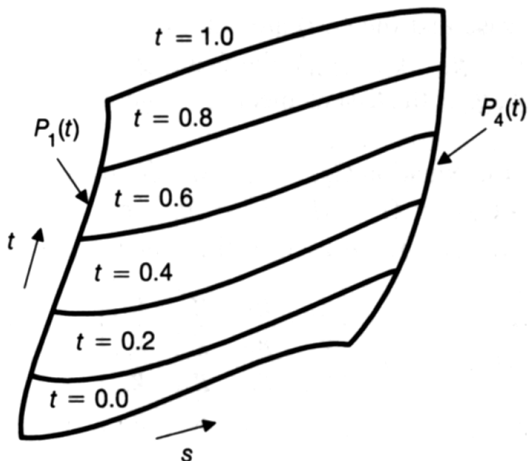
- Potom

$$\mathbf{Q}(s, t) = \mathbf{SMG}(t)$$

je povrch - kontinuum křivek závislé na  $t$ .

## Model bikubického povrchu 2/3

- $G_i(t)$  kubické křivky  $\implies \mathbf{Q}(s,t)$  je **parametrický bikubický povrch**





## Maticový zápis bikubického povrchu 1/2

- necht' prvky matice mohou být vektory  $\mathbf{v} = (v_x \quad v_y \quad v_z)$  a maticové operace provádějme po složkách  $x, y, z$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1(t) \\ \mathbf{G}_2(t) \\ \mathbf{G}_3(t) \\ \mathbf{G}_4(t) \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{G}_i(t)$  kubická křivka  $\implies \mathbf{G}_i(t) = \mathbf{T} \mathbf{M} \mathbf{G}_i$ , kde

$$\mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{i1} \\ \mathbf{g}_{i2} \\ \mathbf{g}_{i3} \\ \mathbf{g}_{i4} \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{G}_i(t)$  má maticově rozměr  $1 \times 1$  a lze tedy také napsat

$$\mathbf{G}_i(t) = \mathbf{G}_i^T \mathbf{M}^T \mathbf{T}^T$$

## Maticový zápis bikubického povrchu 2/2

- po dosazení

$$\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1(t) \\ \mathbf{G}_2(t) \\ \mathbf{G}_3(t) \\ \mathbf{G}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1^T \\ \mathbf{G}_2^T \\ \mathbf{G}_3^T \\ \mathbf{G}_4^T \end{pmatrix} \mathbf{M}^T \mathbf{T}^T$$

- celkově lze shrnout

$$\mathbf{Q}(s, t) = \mathbf{SMG}(t) = \mathbf{SMGM}^T \mathbf{T}^T,$$

kde jako  $\mathbf{G}$  jsme nově označili tzv. *geometrickou matici*

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1^T \\ \mathbf{G}_2^T \\ \mathbf{G}_3^T \\ \mathbf{G}_4^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \mathbf{g}_{13} & \mathbf{g}_{14} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{23} & \mathbf{g}_{24} \\ \mathbf{g}_{31} & \mathbf{g}_{32} & \mathbf{g}_{33} & \mathbf{g}_{34} \\ \mathbf{g}_{41} & \mathbf{g}_{42} & \mathbf{g}_{43} & \mathbf{g}_{44} \end{pmatrix}$$

## Hermitovské povrchy 1/2

- parametrizace geometrického vektoru hermitovské kubiky tak, že jednotlivé řídicí body leží rovněž na hermitovských kubikách
- $\mathbf{Q}(s, t) = \mathbf{SM}_H \mathbf{G}_H(t)$ , kde

$$\mathbf{G}_H(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1(t) \\ \mathbf{P}_4(t) \\ \mathbf{R}_1(t) \\ \mathbf{R}_4(t) \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{P}_1(t) = \mathbf{G}_{H1}^T \mathbf{M}_H^T \mathbf{T}^T,$$

$$\mathbf{P}_4(t) = \mathbf{G}_{H2}^T \mathbf{M}_H^T \mathbf{T}^T,$$

$$\mathbf{R}_1(t) = \mathbf{G}_{H3}^T \mathbf{M}_H^T \mathbf{T}^T,$$

$$\mathbf{R}_4(t) = \mathbf{G}_{H4}^T \mathbf{M}_H^T \mathbf{T}^T.$$

## Hermitovské povrchy 2/2

- celkově:  $\mathbf{Q}(s, t) = \mathbf{S}\mathbf{M}_H\mathbf{G}_H\mathbf{M}_H^T\mathbf{T}^T$ , kde

$$\mathbf{G}_H = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{H1}^T \\ \mathbf{G}_{H2}^T \\ \mathbf{G}_{H3}^T \\ \mathbf{G}_{H4}^T \end{pmatrix}$$

s významem jednotlivých řídicích bodů

$$\mathbf{G}_H = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(0,0) & \mathbf{Q}(0,1) & \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}(0,0) & \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}(0,1) \\ \mathbf{Q}(1,0) & \mathbf{Q}(1,1) & \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}(1,0) & \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}(1,1) \\ \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{Q}(0,0) & \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{Q}(0,1) & \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \mathbf{Q}(0,0) & \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \mathbf{Q}(0,1) \\ \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{Q}(1,0) & \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{Q}(1,1) & \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \mathbf{Q}(1,0) & \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \mathbf{Q}(1,1) \end{pmatrix}$$

## Navazování hermitovských plátů 1/2

- $C^1, G^1$  spojitost spojení plátů podobně jako u hermitovských kubik
- $G^0$  spojitost  $\implies$  hraniční křivky musí být stejné - např. při navazování  $\mathbf{Q}^{(1)}, \mathbf{Q}^{(2)}$  ve směru parametru  $s$ :

$$(\forall t \in [0, 1]) (\mathbf{Q}^{(1)}(1, t) = \mathbf{Q}^{(2)}(0, t))$$

- pro pevné  $t$  jde vlastně o navazování křivek  
 $\implies \mathbf{Q}^{(1)}(1, t) = \mathbf{P}_4^{(1)}(t) = \mathbf{P}_1^{(2)}(t) = \mathbf{Q}^{(2)}(0, t)$
- $G^1$  spojitost  $\implies$  navíc požadavek na tečné vektory.

## Navazování hermitovských plátů 2/2

- Vztah  $\mathbf{G}_H^{(1)}$  a  $\mathbf{G}_H^{(2)}$  pro  $G^1$  spojitost:

$$\mathbf{G}_H^{(1)} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{23} & \mathbf{g}_{24} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{g}_{41} & \mathbf{g}_{42} & \mathbf{g}_{43} & \mathbf{g}_{44} \end{pmatrix} \leftarrow \cdot \mathbf{M}_H T = \mathbf{P}_4^{(1)}(t)$$

$$\leftarrow \cdot \mathbf{M}_H T = \mathbf{R}_4^{(1)}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{G}_H^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{23} & \mathbf{g}_{24} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k\mathbf{g}_{41} & k\mathbf{g}_{42} & k\mathbf{g}_{43} & k\mathbf{g}_{44} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \leftarrow \cdot \mathbf{M}_H T = \mathbf{P}_1^{(2)}(t)$$

$$\leftarrow \cdot \mathbf{M}_H T = \mathbf{R}_1^{(2)}(t)$$

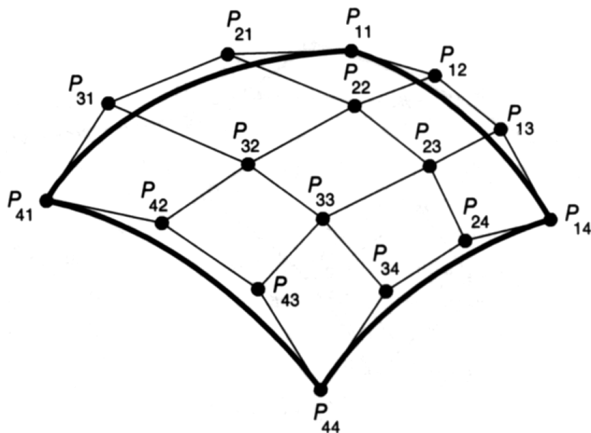
## Bézierovy pláty 1/2

- parametrizace geometrického vektoru Bézierovy křivky tak, že jednotlivé řídicí body leží rovněž na Bézierových křivkách
- $\mathbf{Q}(s, t) = \mathbf{S} \mathbf{M}_B \mathbf{G}_B \mathbf{M}_B^T \mathbf{T}^T$

$$\mathbf{G}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{14} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{24} \\ \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{34} \\ \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{44} \end{pmatrix}$$

## Bézierovy pláty 2/2

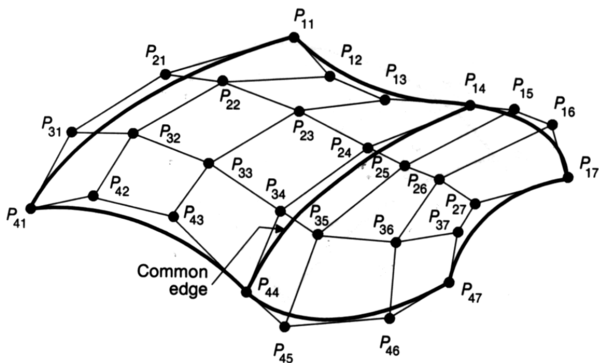
- geometrická matice  $\mathbf{G}_B$ : 16 řídicích bodů  $P_{ij}$ :



- plát leží v konvexním obalu Ř.B.
- interpoluje rohové Ř.B.



## Navazování Bézierových povrchů



- $G^0$  spojitost - čtveřice bodů odpovídající sousedícím hranám stejná (4 Ř.B. společné)
- $G^1$  spojitost - navíc body na spoji leží na úsečkách tvořených body ze sousedních čtveřic (obrázek:  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$  jsou  $P_{i3}, P_{i4}, P_{i5}$  na úsečce)

## B-spline povrchy 1/2

- síť řídicích bodů  $\mathbf{P}_{i,j}$
- jeden plát *uniformního neracionálního* B-spline povrchu je reprezentován jako

$$\mathbf{Q}_{i,j}(t) = \mathbf{S}_i \mathbf{M}_{Bs} \mathbf{G}_{Bs_{i,j}} \mathbf{M}_{Bs}^T \mathbf{T}_j^T,$$

kde

$$\mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} (s-s_i)^3 & (s-s_i)^2 & (s-s_i) & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_j = \begin{pmatrix} (t-t_j)^3 & (t-t_j)^2 & (t-t_j) & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{Bs_{i,j}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{i-3,j-3} & \mathbf{P}_{i-3,j-2} & \mathbf{P}_{i-3,j-1} & \mathbf{P}_{i-3,j} \\ \mathbf{P}_{i-2,j-3} & \mathbf{P}_{i-2,j-2} & \mathbf{P}_{i-2,j-1} & \mathbf{P}_{i-2,j} \\ \mathbf{P}_{i-1,j-3} & \mathbf{P}_{i-1,j-2} & \mathbf{P}_{i-1,j-1} & \mathbf{P}_{i-1,j} \\ \mathbf{P}_{i,j-3} & \mathbf{P}_{i,j-2} & \mathbf{P}_{i,j-1} & \mathbf{P}_{i,j} \end{pmatrix}$$

## B-spline povrchy 2/2

- ostatní typy B-spline povrchů
  - bikubické (neracionální) neuniformní
  - NURBS povrchy

⇒ odvození podobně z B-spline křivek daného typu
- $C^2$  spojitost při navazování plátů je automatická (s výjimkou vícenásobných Ř.B.)

## Výpočet normál k povrchům

- 1 výpočet tečných vektorů vzhledem k  $s, t$ :

$$\begin{aligned}\tau_s(s, t) &= \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{Q}(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{G} \mathbf{M}^T \mathbf{T}^T) = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s} \mathbf{M} \mathbf{G} \mathbf{M}^T \mathbf{T}^T \\ &= \begin{pmatrix} 3s^2 & 2s & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{M} \mathbf{G} \mathbf{M}^T \mathbf{T}^T \\ \tau_t(s, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q}(s, t) = \mathbf{S} \mathbf{M} \mathbf{G} \mathbf{M}^T \begin{pmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{pmatrix}^T\end{aligned}$$

- 2 výpočet normály  $\boldsymbol{\eta}$  pomocí vektorového součinu

$$\boldsymbol{\eta}(s, t) = \tau_s(s, t) \times \tau_t(s, t)$$

- polynom 5. stupně ve dvou proměnných  $s, t \implies$  náročné na výpočet
- existuje bikubická aproximace (vhodná jen pro dostatečně „hladké“ povrchy)

# Triangulace Bézierovy plochy

- 1 Vzorkování s pevným krokem  $s$ ,  $t \implies$  síť čtyřúhelníků  $\implies$  každý z nich na dva trojúhelníky
- 2 Dělení křivky pomocí de Casteljau podle  $s$  a poté podle  $t$ 
  - z jedné geometrické matice vzniknou  $2 \times 2$  geom. matice
  - každou z nich lze (např. podle kritéria planarity)
    - 1 dále dělit
    - 2 vzít její krajní body  $\implies$  čtyřúhelník  $\implies$  na dva trojúhelníky
  - problém: mohou vzniknout díry (zlomy v ploše). Řešení:
    - 1 přísné kritérium planarity (náročné)
    - 2 pevná hloubka dělení (neefektivní)
- **kritérium planarity:** vzdálenost všech bodů geometrické matice od roviny určené 3 ze 4 krajních bodů je  $< \varepsilon$

# Obsah

- 1 Parametrické křivky
- 2 Parametrické bikubické povrchy
- 3 Implicitní povrchy**
- 4 Dělené křivky
- 5 Dělené povrchy

# Implicitní povrchy

- izoplochy v prostoru:

$$\Gamma = \{ \mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 \mid Q(\mathbf{P}) = \textit{konst.} \}$$

- $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$

- např. kulová plocha se středem v bodě  $\mathbf{P}_0$  a poloměrem  $r$ :

$$Q(\mathbf{P}) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

- $Q$  je **skalární pole**

## Kostra, generátory pole

- složitější objekty - modelování pomocí tzv. *kostry*
- kostra (skeleton) = množina jednoduchých objektů (body, úsečky, polygony, křivky)
- objekt generuje kolem sebe pole (objekt = *generátor*)
- vliv objektu klesá se vzdáleností od něj

### Model pole

$$Q(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n c_i F_i(d_i(\mathbf{P}))$$

- $d_i(\mathbf{P})$  ... vzdálenost bodu  $\mathbf{P}$  od  $i$ -tého generátoru
- $F_i$  ... *potenciálová funkce*, závislá na vzdálenosti  $d_i$
- $c_i$  ... koeficient síly vlivu  $i$ -tého generátoru (lze i  $c_i < 0$ )



# Potenciálová funkce

- $d$  ... vzdálenost od objektu
- $F(d) = ae^{-bd^2}$  ... neomezené působení
- $F(d) = \begin{cases} F_R(d) & \text{pro } d \leq R \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$  ...  $R$  je poloměr působení
  - volba  $F_R(d)$  např.

$$F_R(d) = \left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right)$$

$$F_R(d) = -\frac{4}{9} \frac{d^6}{R^6} + \frac{17}{9} \frac{d^4}{R^4} - \frac{22}{9} \frac{d^2}{R^2}$$

# Objekty modelované pomocí kostry

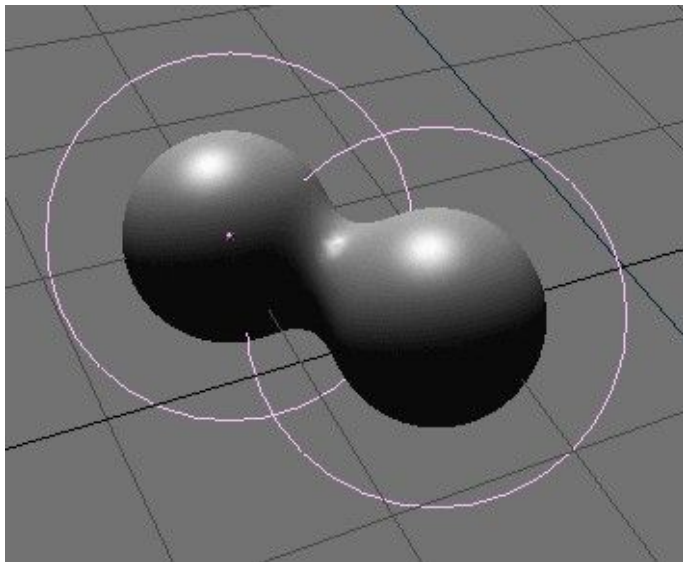
## Vlastnosti

- různé názvy: *blobby objects* (blob = kapka, kulička), *soft objects*, *metaballs*
- kolem kostry izoplocha - kostra se „nafoukne“
- kostru lze snadno zobrazit a modelovat
- nutné umět vypočítat vzdálenost bodu od bodu, přímky, úsečky (viz warping), křivky, ...
- nevhodné pro modelování ostrých hran

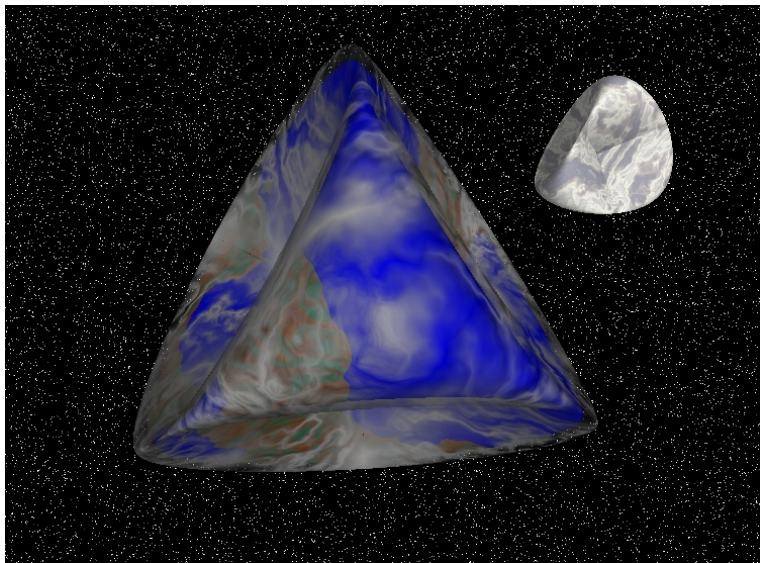
# Zobrazování implicitních ploch

- sledování paprsku:
  - parametrické vyjádření paprsku (přímky):  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$
  - numerické řešení  $Q(\mathbf{P}(t)) = konst.$
- polygonalizace implicitních ploch:
  - 1 uniformní či neuniformní rozdělení prostoru na voxely
  - 2 výpočet obsazení voxelů (určení  $Q(\mathbf{P}) \geq 0$ )
  - 3 výroba polygonové sítě: *marching cubes*, *dual contouring*  
→ viz přednáška Modelování těles
- snahy o parametrizaci implicitních ploch

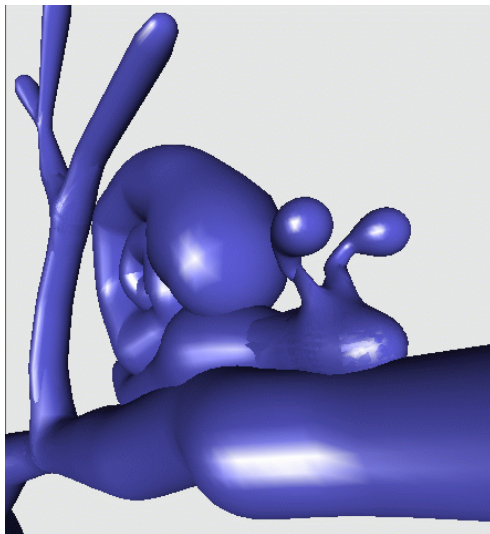
# Implicitní plochy - příklady



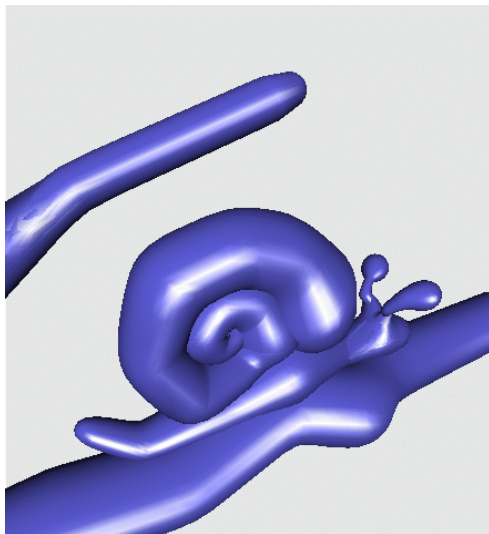
# Implicitní plochy - příklady



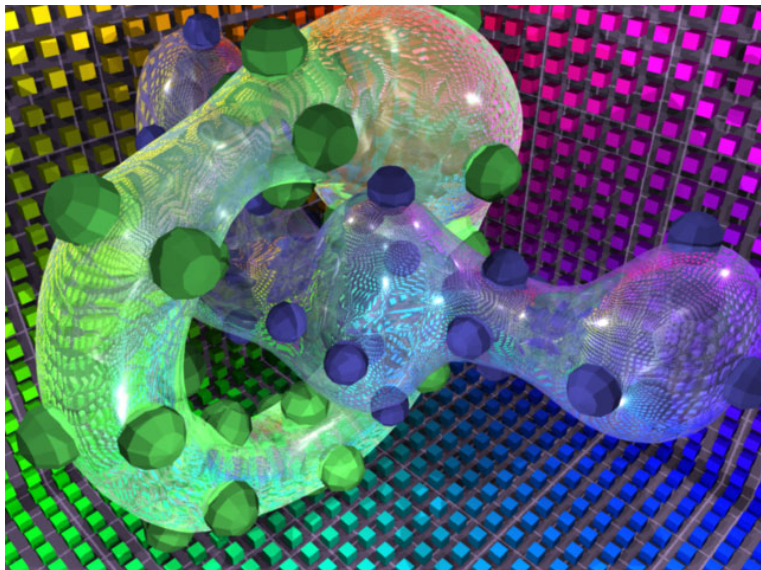
# Implicitní plochy - příklady



# Implicitní plochy - příklady

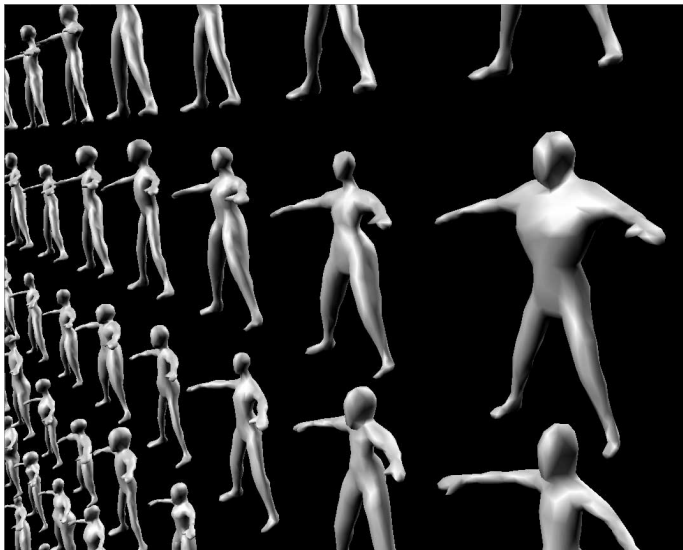


# Implicitní plochy - příklady





# Implicitní plochy - příklady



# Obsah

- 1 Parametrické křivky
- 2 Parametrické bikubické povrchy
- 3 Implicitní povrchy
- 4 Dělené křivky**
- 5 Dělené povrchy

# Dělené křivky

- dělení = *subdivision*
- výchozí útvar - polygon (nebo otevřená po částech lineární křivka)
- dělení - iterativní (rekurzivní) modifikace polygonu
  - modifikace vrcholů
  - zvýšení počtu vrcholů
- posloupnost polygonů  $P_k$  blížící se limitní křivce  $P_\infty$
- základní rozdělení **dělicích schémat**:
  - 1 **interpolující** -  $\forall k$   $P_k$  obsahuje vrcholy pův. polygonu  $P_0$
  - 2 **aproximující** -  $P_\infty$  neprochází vrcholy  $P_0$

# Vlastnosti dobrého dělicího schématu

- **efektivita** - málo operací v plovoucí desetinné čárce pro získání nových bodů
- **kompaktní nosič** - jeden bod  $P_0$  ovlivní omezenou část  $P_\infty$
- **lokální definice** - nové body  $P_{k+1}$  definovány jen pomocí několika „blízkých“ bodů  $P_k$
- **invariance** - transformace a přechod  $P_0 \mapsto P_\infty$  by měly být záměnné
- **regularita** -  $P_\infty \in G^0, G^1, C^1$ , apod.

## Chaikinovo schéma 1/3

- jeden z prvních algoritmů pro dělení křivek
- algoritmus generuje kvadratickou uniformní B-spline křivku
- na každou spojnici 2 vrcholů umístíme 2 nové v  $\frac{1}{4}$  vzdálenosti od původních, původní zahodíme
  - ⇒ aproximační schéma
  - ⇒ ořezávání rohů - limitní křivka je hladká (alg. je vlastně low pass filtr)
- lze rozšířit na otevřené po částech lineární křivky

## Chaikinovo schéma 2/3

- označme

$$P_k = \{\mathbf{p}_0^k, \mathbf{p}_1^k, \dots, \mathbf{p}_{m-1}^k\}$$

a dále definujeme (díky uzavřenosti polygonu)  $\mathbf{p}_m^k := \mathbf{p}_0^k$

- Chaikinovo dělení generuje polygon

$$P_{k+1} = \{\mathbf{p}_0^{k+1}, \mathbf{p}_1^{k+1}, \dots, \mathbf{p}_{2m-1}^{k+1}\},$$

kde  $\forall i \in \mathbb{N}_m$

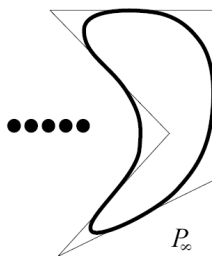
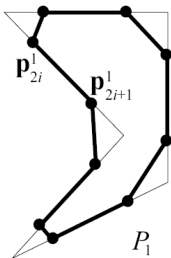
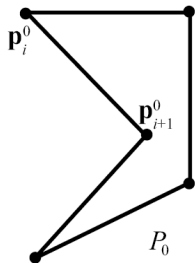
$$\mathbf{p}_{2i}^{k+1} = \frac{3}{4}\mathbf{p}_i^k + \frac{1}{4}\mathbf{p}_{i+1}^k,$$

$$\mathbf{p}_{2i+1}^{k+1} = \frac{1}{4}\mathbf{p}_i^k + \frac{3}{4}\mathbf{p}_{i+1}^k.$$

## Chaikinovo schéma 3/3

$$\mathbf{p}_{2i}^{k+1} = \frac{3}{4}\mathbf{p}_i^k + \frac{1}{4}\mathbf{p}_{i+1}^k,$$

$$\mathbf{p}_{2i+1}^{k+1} = \frac{1}{4}\mathbf{p}_i^k + \frac{3}{4}\mathbf{p}_{i+1}^k.$$



## Čtyřbodové schéma 1/2

- k vytvoření nového vrcholu používá 4 okolní vrcholy
- $\forall i \in \mathbb{N}_m$  generuje vrcholy

$$\mathbf{p}_{2i}^{k+1} = \mathbf{p}_i^k$$

$\implies P_\infty$  interpoluje  $P_0$

- $w \dots$  tzv. *parametr napětí* - pro  $w = 0$  jen lineární interpolace
- $P_\infty \in C^1$  pokud  $w \in (0, \frac{1}{8})$
- rozšíření na neuzavřené křivky:  $P_k = \{\mathbf{p}_0^k, \mathbf{p}_1^k, \dots, \mathbf{p}_{m-1}^k\} \implies$   
def.  $\mathbf{p}_m^k$  středově souměrný s  $\mathbf{p}_{m-2}^k$  podle  $\mathbf{p}_{m-1}^k$ , tj

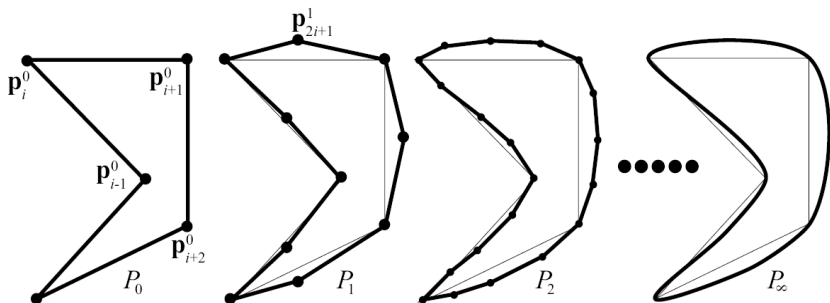
$$\mathbf{p}_m^k := 2\mathbf{p}_{m-1}^k - \mathbf{p}_{m-2}^k$$



## Čtyřbodové schéma 2/2

$$\mathbf{p}_{2i}^{k+1} = \mathbf{p}_i^k,$$

$$\mathbf{p}_{2i+1}^{k+1} = \left(\frac{1}{2} + w\right)(\mathbf{p}_i^k + \mathbf{p}_{i+1}^k) - w(\mathbf{p}_{i-1}^k + \mathbf{p}_{i+2}^k).$$



# Tříbodové schéma

- $\forall i \in \mathbb{N}_m$  generuje vrcholy

$$\mathbf{p}_{2i}^{k+1} = \frac{3}{4}\mathbf{p}_i^k + \frac{1}{8}(\mathbf{p}_{i-1}^k + \mathbf{p}_{i+1}^k),$$

$$\mathbf{p}_{2i+1}^{k+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_i^k + \mathbf{p}_{i+1}^k)$$

- $\mathbf{p}_{2i}^{k+1}$  ... vrchol nahrazující  $\mathbf{p}_i^k$
- $\mathbf{p}_{2i+1}^{k+1}$  ... vrchol ve středu původní hrany
- schéma generuje kubickou B-spline

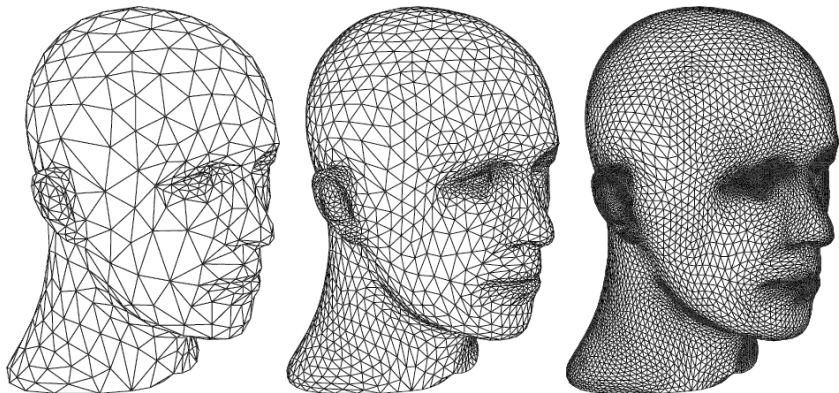
# Obsah

- 1 Parametrické křivky
- 2 Parametrické bikubické povrchy
- 3 Implicitní povrchy
- 4 Dělené křivky
- 5 Dělené povrchy**

# Dělené povrchy

- podobně jako u dělení křivek - iterativní přidávání vrcholů (a tedy i ploch) do polygonální sítě
- generování hladkých, spojitých povrchů ze sítí trojúhelníků, čtverců či s **libovolnou topologií**
- *úroveň detailů* (LOD - level of detail) ... počet iteračních kroků
  - měníme v závislosti na zvětšení (přiblížení) objektu
- dělicí schéma:
  - 1 množině vrcholů  $P_k$  přiřazuje rozsáhlejší množinu vrcholů  $P_{k+1}$  (někdy tzv. *dělicí pravidlo*)
  - 2 určuje pravidla propojení nových vrcholů do polygonální sítě
- požadované vlastnosti dělicích schémat - jako u křivek

## Dělené povrchy - příklad



## Terminologie pro dělení

- *valence* vrcholu  $\mathbf{p}$  .... počet sousedů = vrcholů spojených hranou s  $\mathbf{p}$
- *sudý vrchol* ... při iteraci  $P_k \mapsto P_{k+1}$  s použitím interpolujícího je „původní“, tj.

$$(\forall \mathbf{p} \in P_{k+1}) (\mathbf{p} \text{ je sudý} \iff \mathbf{p} \in P_k)$$

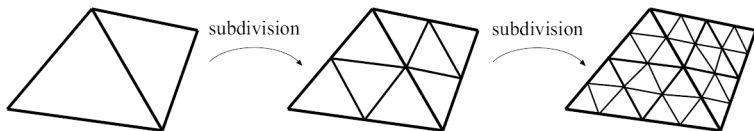
- *lichý vrchol* ... není sudý

**Zdůvodnění:** viz dělení křivek - interpolované vrcholy mají v  $P_{k+1}$  sudé indexy.

- *řádný vrchol*
  - na trojúhelníkové síti má valenci 6, resp. na hranici 4.
  - na čtvercové síti má valenci 4, resp. na hranici 3.
- *mimořádný vrchol* ... není řádný

## Loopovo schéma 1/4

- pro trojúhelníkovou síť
- aktualizuje existující vrcholy + přidá nový vrchol pro každou hranu
  - zde *sudý vrchol* = aktualizovaný původní vrchol
- jeden  $\triangle$  se rozdělí na 4 menší



## Loopovo schéma 2/4

- necht'  $\mathbf{p}^k \in P_k$  je vrchol s valencí  $n$ , mající sousedy  $\mathbf{p}_0^k, \mathbf{p}_1^k, \dots, \mathbf{p}_{n-1}^k$
- sudý vrchol  $\mathbf{p}^{k+1} \in P_{k+1}$  (tj. aktualizace vrcholů v  $P_k$ ) se najde jako

$$\mathbf{p}^{k+1} = (1 - n\beta) \mathbf{p}^k + \beta \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i^k$$

- „konstanta“  $\beta$  je funkcí valence vrcholu  $\mathbf{p}^k$ :

$$\beta(n) = \frac{1}{n} \left( \frac{5}{8} - \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^2 \right)$$

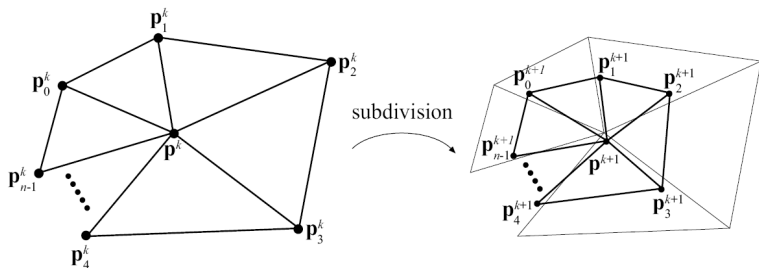
- přidají se nové (liché) vrcholy na středech hran  $\mathbf{p}^k \mathbf{p}_i^k$   
 $\forall i \in \mathbb{N}_n$ :

$$\mathbf{p}_i^{k+1} = \frac{1}{8} (3\mathbf{p}^k + 3\mathbf{p}_i^k + \mathbf{p}_{i-1}^k + \mathbf{p}_{i+1}^k)$$



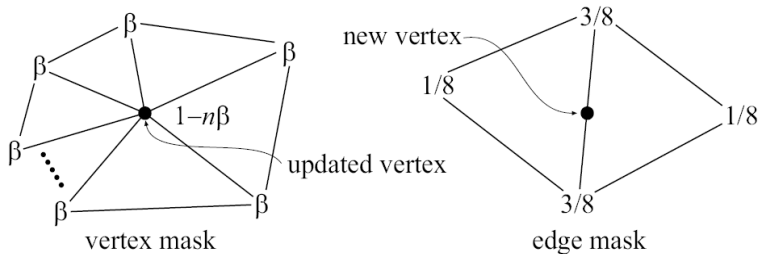
# Loopovo schéma 3/4

- znázornění iterace



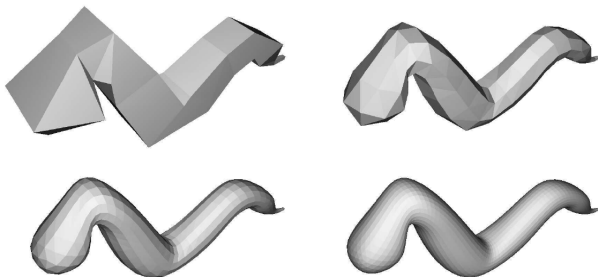
## Loopovo schéma 4/4

- schematické znázornění iteračních vztahů pomocí masek



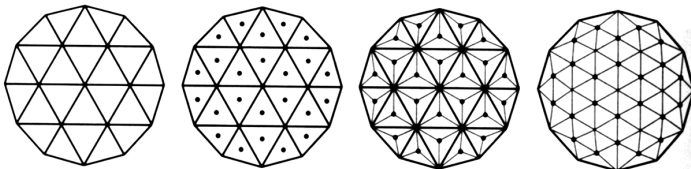
## Loopovo schéma - vlastnosti

- na hranici, resp. na hranách označených jako „záhyb“ (*crease*) uplatňována jiná pravidla dělení
- volba  $\beta(n)$  zaručuje hladkost  $C^2$  všude **až na mimořádné vrcholy** (kde je  $C^1$ )
- různé modifikace pro zlepšení hladkosti v obecnějších případech (valence  $n > 7$  apod.)



# Kobbeltovo $\sqrt{3}$ dělení 1/3

- trojúhelníková síť
- každý  $\triangle$  se rozdělí jen na 3 trojúhelníky
- nové vrcholy doprostřed  $\triangle$  , nikoliv doprostřed hrany



## Kobbeltovo $\sqrt{3}$ dělení 2/3

- opět necht'  $\mathbf{p}^k \in P_k$  je vrchol s valencí  $n$ , mající sousedy  $\mathbf{p}_0^k, \mathbf{p}_1^k, \dots, \mathbf{p}_{n-1}^k$ .
- vrchol  $\mathbf{p}^k$  aktualizován podle Loopova schématu

$$\mathbf{p}^{k+1} = (1 - n\beta) \mathbf{p}^k + \beta \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i^k$$

- navíc  $\forall \Delta$  přidán vrchol

$$\mathbf{p}_m^{k+1} = \frac{1}{3} (\mathbf{p}_a^k + \mathbf{p}_b^k + \mathbf{p}_c^k),$$

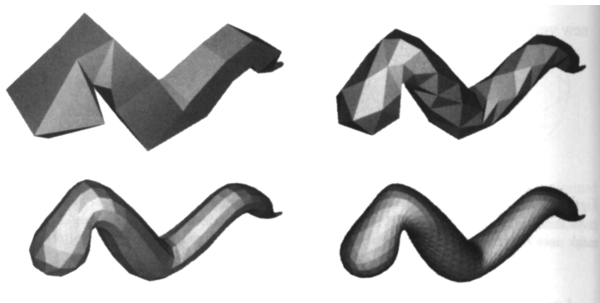
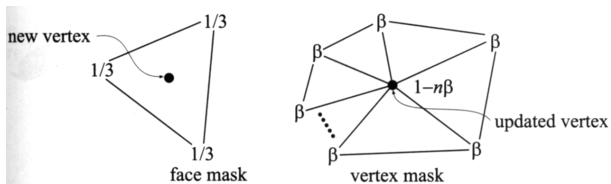
kde  $\mathbf{p}_a^k, \mathbf{p}_b^k, \mathbf{p}_c^k$  jsou vrcholy  $\Delta$

- volba

$$\beta(n) = \frac{1}{9n} \left( 4 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} \right)$$

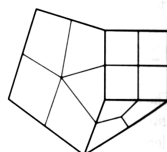
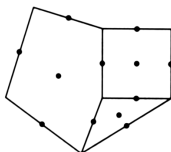
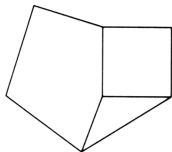
zaručuje  $C^2$  povrch v řádných vrcholech,  $C^1$  v mimořádných

# Kobbeltovo $\sqrt{3}$ dělení 2/3

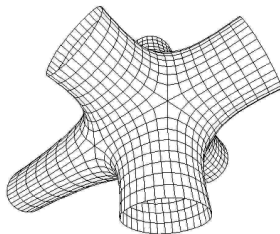
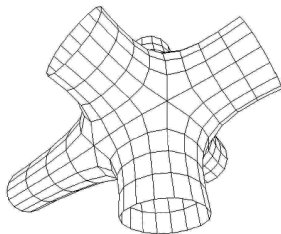
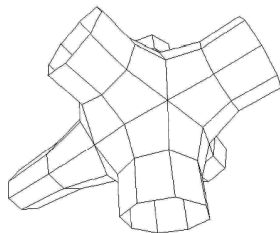
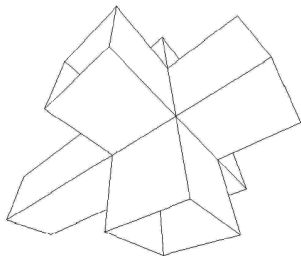


# Schéma dělení Catmull-Clark

- dělí obecné polygonální síť
- generuje čtvercové síť
- pro síť z řádných vrcholů dostaneme B-spline povrch
- $C^2$  povrch v řádných vrcholech,  $C^1$  v mimořádných

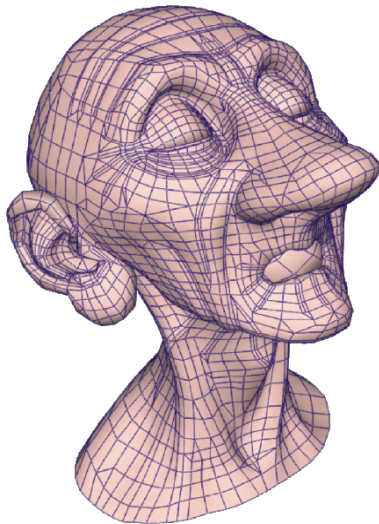


# Catmull-Clark - příklady





# Catmull-Clark - příklady



## Catmull-Clark - příklady



Geri's Game (Pixar Animation Studios, 1997)

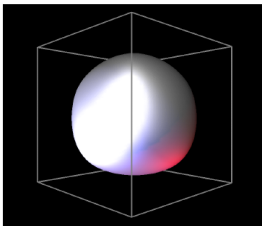
# Další schémata dělení povrchů

- Doo-Sabin
  - aproximační
  - $C^1$  spojitost (neplatí na hranici otevřené sítě)
- MidEdge
  - $G^0$  spojitost
- Butterfly
- ...

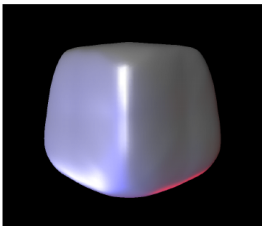
# Interpolace barev a texturových souřadnic

- každému vrcholu  $\mathbf{p}$  polygonální sítě  $P_0$  přiřazena barva, resp. texturové souřadnice
- barvy, resp. texturové souřadnice lze považovat za další složky vektoru  $\mathbf{p}$
- použití stejného dělicího schématu jako na první tři složky - tj. prostorové souřadnice

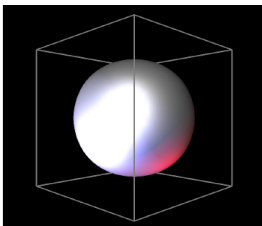
# Srovnání dělicích schémat



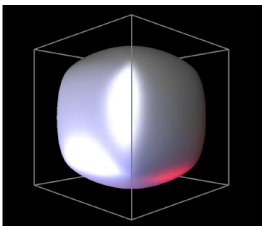
*Loop*



*Butterfly*

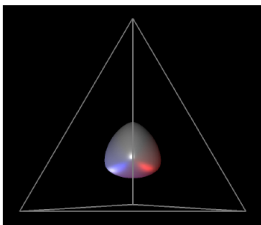


*Catmull-Clark*

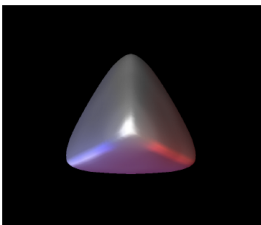


*Doo-Sabin*

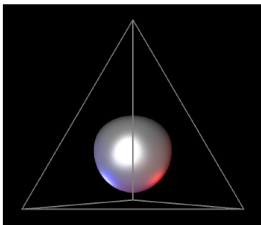
# Srovnání dělicích schémat



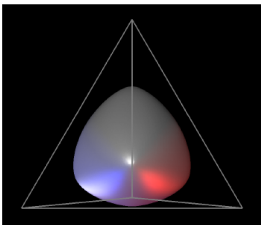
*Loop*



*Butterfly*

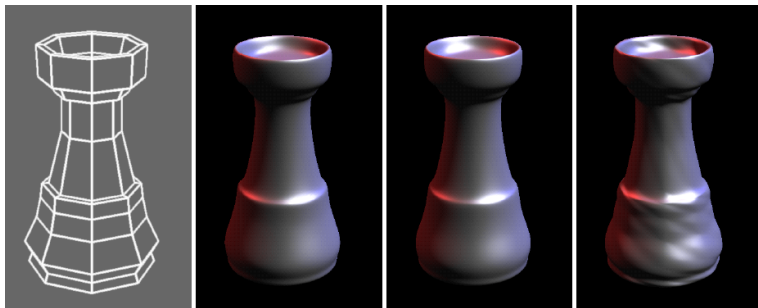


*Catmull-Clark*



*Doo-Sabin*

# Srovnání dělicích schémat



*Initial mesh*

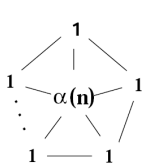
*Loop*

*Catmull-Clark*

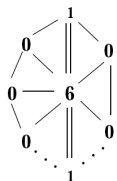
*Catmull-Clark, after  
triangulation*

## Po částech hladké dělení

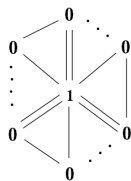
- modifikované Loopovo schéma
- identifikace vrcholů jako „hladký“, „záhyb“ (*crease*), „šipka“ (*dart*), „roh“ (*corner*)



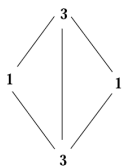
smooth or  
dart vertex



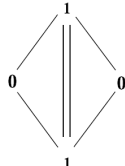
regular or non-regular  
crease vertex



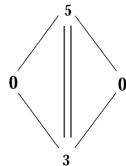
corner vertex



(1) smooth edge



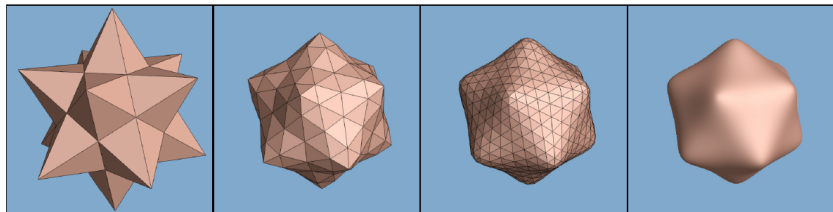
(2) regular  
crease edge



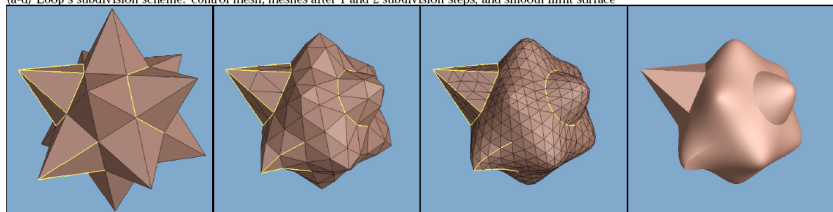
(3) non-regular  
crease edge



## Po částech hladké dělení - příklad

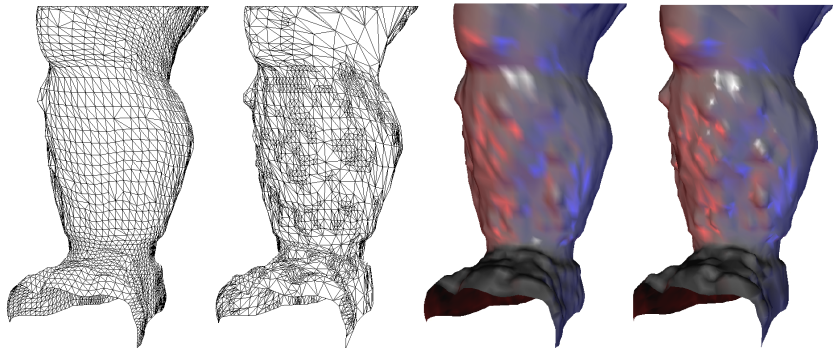


(a-d) Loop's subdivision scheme: control mesh, meshes after 1 and 2 subdivision steps, and smooth limit surface

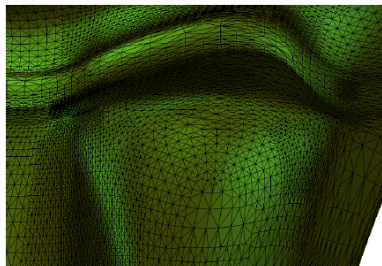
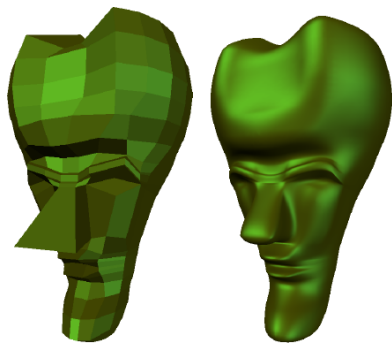


(e-h) Our piecewise smooth subdivision scheme: tagged control mesh, meshes after 1 and 2 subdivision steps, and piecewise smooth limit surface





# Adaptivní dělení



# Adaptivní dělení



# Literatura 1/2

-  J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, J. F. Hughes: *Computer Graphics: Principles and Practice*, Addison Wesley, 1997.
-  Žára, Beneš, Sochor, Felkel: *Moderní počítačová grafika*. Computer Press, 2005.
-  G. Chaikin: *An algorithm for high speed curve generation*. Computer Graphics and Image Processing 3 (1974), 346-349.
-  L. Kobbelt:  $\sqrt{3}$  *Subdivision*, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, 2000.

## Literatura 2/2



E. Catmull, J. Clark: *Recursively Generated B-Spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes*, Computer Aided Design 10, 6 (1978), 350-355.



H. Hoppe et al.: *Piecewise Smooth Surface Reconstruction*, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series (1994), 295-302.