

# **B2B31ZEO - Základy elektrických obvodů**

4. přednáška, náhradní výuka, 23.března 2020

## **OBVODOVÉ ROVNICE**

– **METODA UZLOVÝCH NAPĚTÍ (MUN)**

– **METODA SMYČKOVÝCH PROUDU (MSP)**

**Roman Čmejla**

*Vážené studentky, vážení studenti,*

*při přípravě přednášky na téma „Obvodové rovnice“ určené pro distanční výuku během mimořádné situace na jaře 2020 jsem se rozhodl dát přednost písemnému popisu jednotlivých snímků. Protože téma ilustruji řadou praktických příkladů, můžete se k nim takto snadno vlastním tempem vracet. Rád od vás uvítám zpětnou vazbu na tento přístup.*

*R.Č.*

# Obvodové rovnice

## popis obvodů:

### – obecně

- časové průběhy  $u(t)$ ,  $i(t)$ , derivace, integrály
- diferenciální rovnice

### – stacionární ustálený stav (SUS)

- konstanty  $U$ ,  $I$
- algebraické rovnice

### – harmonický ustálený stav (HUS)

- fázory (komplexní čísla)  $U$ ,  $I$
- algebraické rovnice

- Shrnutí nejdůležitějších topologických pojmů, potřebných pro popis obvodů:
  - u ... uzel – místo spojení dvou a více větví (prvků)
  - d ... uzlová dvojice – dvojice libovolného uzlu a uzlu referenčního = u – 1
  - v ... větev – spojení dvou uzlů (= počet obvodových prvků)
  - s ... počet nezávislých smyček = v – d

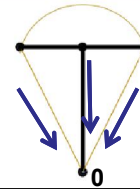
uzlové napětí – napětí na uzlové dvojici  
smyčkový proud – proud v nezávislé smyčce

- Rovnice budeme sestavovat pro obecné časové průběhy - tedy pomocí integrodiferenciálních rovnic.
- V případě stacionárního a harmonického ustáleného stavu (později) bude popis a řešení rovnic snazší.

# Metoda uzlových napětí

## popis pomocí I. Kirchhoffova zákona

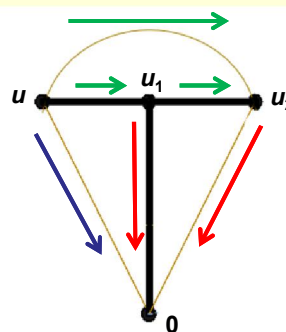
- popis všech uzlů vůči referenčnímu pomocí uzlových napětí  $d = u - 1$
- celkový počet sestavovaných rovnic  $X_{\text{MUN}} = d - Z_u$
- napětí na prvcích, které nejsou spojeny s referenčním uzlem, se vyjádří jako rozdíl uzlových napětí



- Metoda uzlových napětí (MUN) je založena na přímé aplikaci I. Kirchhoffova zákona (KZ) (sčítání proudů odtékajících z uzlu).
- Počet nezávislých rovnic vyplývá z topologie obvodu. Pro MUN je dán počtem uzlových dvojic (počet uzlů - 1 = počet větví stromu).
- Protože napětí uzlových dvojic ve větvích se zdroji napětí známe, bude počet sestavovaných rovnic nižší o počet napěťových zdrojů.
- Řešením soustavy rovnic sestavených pomocí MUN získáme neznámá uzlová napětí (napětí uzlových dvojic = napětí mezi daným uzlem a referenčním), z nichž můžeme v dalším kroku vyjádřit napětí na všech prvcích v obvodu.

## Popis obvodů pomocí MUN

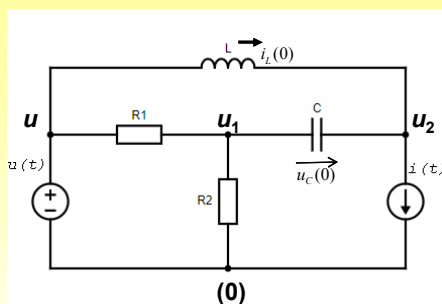
- a) zvolíme a označíme referenční uzel
- b) očíslováme všechny ostatní uzly
- c) v obvodech s plovoucími zdroji popíšeme řez (superuzel)
- d) pro zdroje napětí spojené s referenčním uzlem nesestavujeme rovnice
- e) pro uzly s neznámým napětím sestavíme obvodové rovnice (proudy vytékající z uzlu považujeme za kladné)
- f) nalezneme neznámá hledaná uzlová napětí ↓
- g) vypočteme všechna napětí ↓
- h) vypočteme všechny proudy



Postup při sestavování MUN uvedený na snímku si ukážeme prakticky v dalších příkladech.

## Př.: MUN

$u = 4$	$d = 3$	$Z_u = 1$	$X(\text{MUN}) = 2$
$v = 6$	$s = 3$	$Z_i = 1$	$X(\text{MSP}) = 2$



$$u_1: \quad \frac{u_1 - u}{R_1} + \frac{u_1}{R_2} + C \frac{d(u_1 - u_2)}{dt} = 0$$

$$u_2: \quad \frac{1}{L} \int_0^t (u_2 - u) d\tau - i_L(0) + C \frac{d(u_2 - u_1)}{dt} + i = 0$$

1) Postup při výběru metody vedoucí na menší počet rovnic (viz tabulka v pravém horním rohu snímku):

- Spočteme uzly:  $u = 4$ .  
Počet uzlových dvojic je:  $d = u - 1 = 3$   
Počet rovnic MUN je dán počtem uzlových dvojic  
mínus počet napěťových zdrojů  $X(\text{MUN}) = 3 - 1 = 2$ .
- Dále spočítáme obvodové prvky = počet větví:  $v = 6$ .  
Počet nezávislých smyček je dán rozdílem počtu větví a uzlových dvojic  
 $s = v - d = 6 - 3 = 3$  (u planárních grafů smyčky hned vidíme).  
Počet rovnic MSP je dán počtem nezávislých smyček mínus  
počet proudových zdrojů  $X(\text{MSP}) = 3 - 1 = 2$ .
- Obě metody (MUN i MSP) vedou na stejný počet rovnic.

2) Popis obvodu metodou uzlových napětí (popis obvodu MSP bude uveden později)

Postupujeme podle bodů na snímku 4:

- a) Zvolíme referenční uzel (s ostatními uzly vytváří uzlové dvojice): (0).

- b) Popíšeme všechny ostatní uzly:  $u$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ .
- c) V obvodu nejsou plovoucí zdroje (budou v příkladech na snímcích 12 a 13).
- d) Pro uzel  $u$  rovnici nesestavujeme, neboť napětí mezi tímto uzlem a referenčním uzlem známe.
- e) Pro uzly  $u_1$  a  $u_2$  sestavíme rovnice na základě I. KZ.

Uzel  $u_1$ :

- součet všech tří proudů vytékajících y uzlu  $u_1$  musí být roven nule
- $i_{r1} + i_{r2} + i_c = 0$
- $i_{r1} = u_{r1}/r_1 = (u_1 - u)/r_1$ ,  
protože  $u_{r2} - u - u_{r1} = u_1 - u - u_{r1} = 0 \rightarrow u_{r1} = u_1 - u$
- $i_{r2} = u_1/r_2$
- $i_c = C d(u_1 - u_2)/dt$

Uzel  $u_2$ :

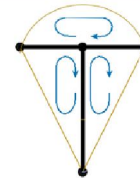
- $i_L + i_c + i = 0$
- $i_L =$  proud induktorem + počáteční podmínka  
(počáteční podmínka je záporná, neboť proud vtéká do uzlu)
- $i_c = C d(u_2 - u_1)/dt$   
(při srovnání s popisem uzlu  $u_1$  je proud kapacitorem obrácený)
- proud zdroje  $i$  vytéká z uzlu, proto ho píšeme s kladným znaménkem

- f) řešením dvou rovnic získáme neznámá uzlová napětí  $u_1$  a  $u_2$
- g) z uzlových napětí  $u_1$  a  $u_2$  snadno vyjádříme napětí na všech prvcích v obvodu
- h) z napětí snadno vypočteme proudy jednotlivých obvodových prvků

# Metoda smyčkových proudů

## popis pomocí II. Kirchhoffova zákona

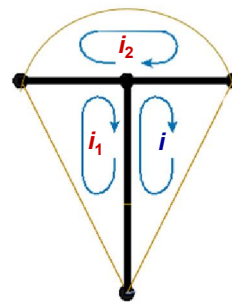
- popis všech nezávislých smyček pomocí smyčkových proudů
- celkový počet sestavovaných rovnic  $X_{\text{MSP}} = s - Z_i$
- proudy ve společných větvích jsou dány superpozicí příslušných smyčkových proudů



- Metoda smyčkových proudů (MSP) je založena na přímé aplikaci II. KZ (sčítání napětí ve smyčce).
- Počet nezávislých rovnic u MSP je dán počtem nezávislých smyček
- Počet sestavovaných rovnic bude nižší o počet proudových zdrojů.
- Řešením soustavy rovnic sestavených pomocí MSP získáme neznámé smyčkové proudy, z nichž v dalším kroku můžeme vyjádřit proudy všemi prvky v obvodu.

## Popis obvodů pomocí MSP

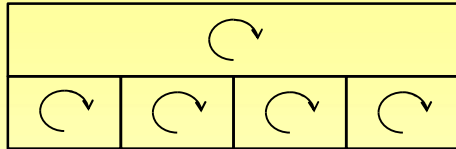
- a) zvolíme nezávislé smyčky  
a vyznačíme smyčkové proudy
  - kladné smysly proudů volíme
  - zdroje proudů musí být v nezávislé větvi
- b) pro smyčky se zdroji proudu sestavujeme rovnice
- c) sestavíme obvodové rovnice pro neznámé smyčkové proudy
- d) nalezneme neznámé hledané smyčkové proudy
- e) vypočteme všechny proudy
- f) vypočteme všechna napětí



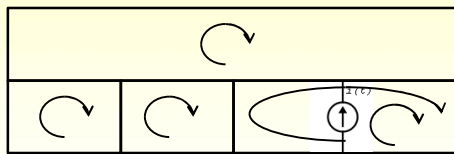
Praktické sestavování MSP podle postupu popsáném na snímku si ukážeme na příkladech později.



## MSP



- planární struktura -> není nutno kreslit graf obvodu
- soustava jednoduchých smyček = soustava nezávislých smyček

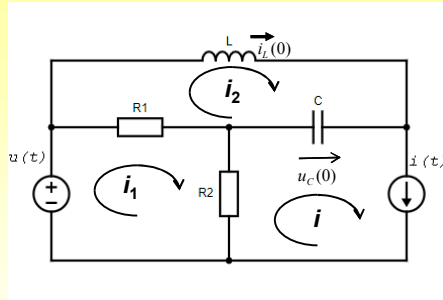


- hledaný neznámý smyčkový proud nelze vést zdrojem proudu
- **PRO SMYČKY SE ZDROJI PROUDU ROVNICI NESESTAVUJI**

- U planárních obvodů je nejjednodušší volbou soustavy nezávislých smyček volba všech jednoduchých smyček.
- Proudovými zdroji nelze nikdy vést více smyčkových proudů - proudové zdroje jsou nezávislými veličinami.
- Pro smyčky, v nichž leží zdroje proudu, nesestavujeme obvodové rovnice (napětí ideálního zdroje proudu je závislé na připojeném obvodu a nelze ho tudíž vyjádřit na základě jeho charakteristiky).

## Př.: MSP

$u = 4$	$d = 3$	$Z_u = 1$	$X(\text{MUN}) = 2$
$v = 6$	$s = 3$	$Z_i = 1$	$X(\text{MSP}) = 2$



$$i_1: \quad -u + R_1(i_1 - i_2) + R_2(i_1 - i) = 0$$

$$i_2: \quad L \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t (i_2 - i) d\tau - u_c(0) + R_1(i_2 - i_1) = 0$$

Ukázka řešení MSP stejného příkladu jako na snímku 5.

1) Výběr metody vedoucí na menší počet rovnic byl rozebrán na snímku 5.

- Obě metody (MUN i MSP) vedou na stejný počet rovnic.

2) Popis obvodu metodou smyčkových proudů podle postupu na snímku 7:

Postupujeme podle bodů na snímku 7:

- Zvolíme smyčky:  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_2$   
Kladný směr ve smyčkách se zdroji bývá určen jejich orientací ( $i$ ,  $i_1$ ), v ostatních smyčkách je libovolný ( $i_2$ ).
- Nesestavuji rovnici pro smyčku se zdrojem proudu (musí však být zakreslena a uvažována)
- Sestavení obvodových rovnic MSP

Smyčka  $i_1$

- $-u + u_{R1} + u_{R2} = 0$

- $u_{r1} = r_1(i_1 - i_2)$  (proud  $i_2$  jde proti proudu  $i_1$ , tudíž záporné znaménko)
- $u_{r2} = r_2(i_1 - i)$  (proud  $i$  teče také proti proudu  $i_1$ )

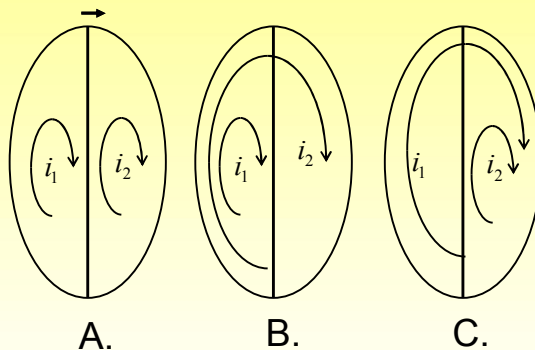
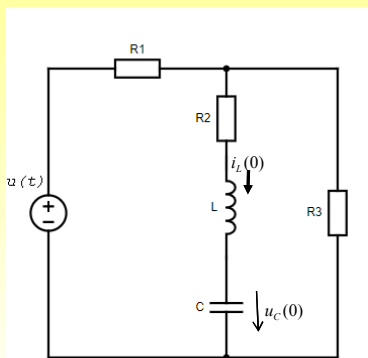
Smyčka  $i_2$ :

- $u_L + u_C + u_{r1} = 0$
- $u_L = L \frac{d(i_2)}{dt}$
- $u_C =$  napětí na kapacitoru + energetická počáteční podmínka  
(počáteční podmínka je záporná, neboť má opačnou orientaci vůči smyčkovému proudu  $i_2$ )  
nesmím vynechat smyčku zdroje proudu  $i$
- $u_{r1} = R_1 (i_2 - i_1)$

- d) Řešením dvou rovnic získáme neznámé smyčkové proudy  $i_1$  a  $i_2$
- e) Ze smyčkových proudů  $i_1$  a  $i_2$  vyjádříme proudy ve všech větvích obvodu
- f) Z proudů můžeme vypočítat napětí na obvodových prvcích

# Optimalizace MSP

$u = 5$	$d = 4$	$Z_u = 1$	$X(\text{MUN}) = 3$
$v = 6$	$s = 2$	$Z_i = 0$	$X(\text{MSP}) = 2$



graf	zdroj	R,L,C
A.	1x	2x
B.	2x	1x
C.	1x	1x

$$i_1: -u + R_1 i_1 + R_3 (i_1 + i_2) = 0$$

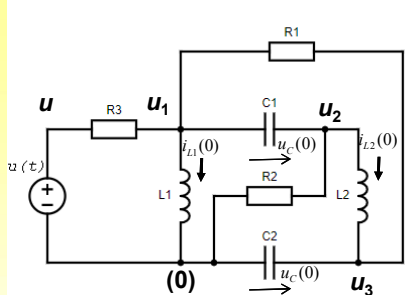
$$i_2: R_3 (i_2 + i_1) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2 d\tau - u_C(0) + L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = 0$$

Při sestavování obvodových rovnic můžeme popis obvodu optimalizovat:

- Daný obvod má dvě jednoduché (= nezávislé) smyčky.
- Soustavu smyček lze volit třemi různými způsoby: A., B., C.
- Volba smyček A.:  
nevýhodou je, že nejsložitější část obvodu (sériová kombinace RLC) leží v obou smyčkách a tedy obě rovnice obsahují po čtyřech členech
- Volba smyček B.:  
přítomnost zdroje napětí v obou smyčkách způsobuje nenulové pravé strany rovnic, což zvyšuje pracnost řešení
- Volba smyček C.:  
optimální varianta - RLC kombinací i zdrojem napětí prochází jedna smyčka

## Př.: MUN

$u = 5$	$d = 4$	$Z_u = 1$	$X(\text{MUN}) = 3$
$v = 8$	$s = 4$	$Z_i = 0$	$X(\text{MSP}) = 4$



$$u_1: \frac{u_1 - u}{R_3} + \frac{1}{L} \int_0^t u_1 d\tau + i_{L1}(0) + \frac{u_1 - u_3}{R_1} + C_1 \frac{d(u_1 - u_2)}{dt} = 0$$

$$u_2: C_1 \frac{d(u_2 - u_1)}{dt} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{1}{L} \int_0^t (u_2 - u_3) d\tau + i_{L2}(0) = 0$$

$$u_3: \frac{1}{L_2} \int_0^t (u_3 - u_2) d\tau - i_{L2}(0) + \frac{u_3 - u_1}{R_1} + C_2 \frac{du_3}{dt} = 0$$

### 1) Výběr metody:

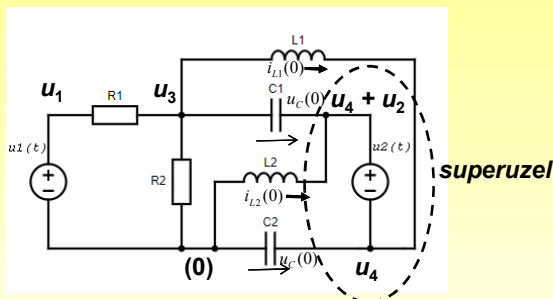
- Pro popis je vhodnější MUN (viz tabulka v pravém horním rohu snímku)

### 2) Sestavení rovnic MUN

- Popis uzlu  $u_1$ :  
 $i_{R3} + i_{L1} + i_{R1} + i_{C1} = 0$
- Popis uzlu  $u_2$ :  
 $i_{C1} + i_{R2} + i_{L2} = 0$
- Popis uzlu  $u_3$ :  
 $i_{L2} + i_{R1} + i_{C2} = 0$

## Př.: plovoucí zdroje

$u = 5$	$d = 4$	$Z_u = 2$	$X(\text{MUN}) = 2$
$v = 8$	$s = 4$	$Z_i = 0$	$X(\text{MSP}) = 4$



$$u_3: \quad \frac{u_3 - u_1}{R_1} + \frac{u_3}{R_2} + \frac{1}{L_1} \int_0^t (u_3 - u_4) d\tau + i_{L1}(0) + C_1 \frac{d(u_3 - u_4 - u_2)}{dt} = 0$$

**superuzel:**

$$C_1 \frac{d(u_4 + u_2 - u_3)}{dt} + \frac{1}{L_2} \int_0^t (u_4 + u_2) d\tau - i_{L2}(0) + \frac{1}{L_1} \int_0^t (u_4 - u_3) d\tau - i_{L1}(0) + C_2 \frac{du_4}{dt} = 0$$

### 1) Výběr metody:

- Pro popis je vhodnější MUN

### 2) Sestavení rovnic MUN (viz postup na snímku 4):

- Jedná se o obvod obsahující více napěťových zdrojů, které nemají společný uzel, tzv. plovoucí zdroje
- a) Vhodné je volit referenční uzel u zdroje, v němž se stýká co nejvíce větví, v našem případě volíme na záporné svorce  $u_1$ .
- b) Popíšeme ostatní uzly s výjimkou uzlů u napěťového zdroje  $u_2$ .
- c) Pokud uzlové napětí mezi zápornou svorkou napěťového zdroje  $u_2$  a referenčním uzlem bude  $u_4$ , pak uzlové napětí mezi kladnou svorkou a referenčním uzlem bude  $u_4 + u_2$ , neboť zdroj na svých svorkách udržuje napětí  $u_2$ .

Pro získání obvodové rovnice MUN obklopíme oba póly zdroje  $u_2$  řezem (= superuzlem), na který budeme aplikovat I. KZ.

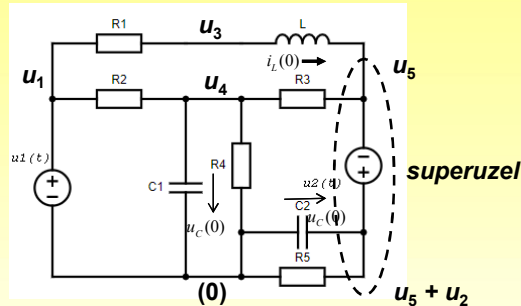
Řez obvodu (superuzel) nesmí protínat větev s dalším zdrojem napětí (neboť proud tekoucí napěťovým zdrojem nelze určit jako funkci jeho napětí a velikost záleží na připojeném obvodu).

d) Sestavení obvodových rovnic:

- Uzel u3:  
 $ir1 + ir2 + iL1 + ic1 = 0$
- Superuzel:  
 $ic1 + iL2 + iL1 + ic2 = 0$

## Př.: plovoucí zdroje

$u = 6$	$d = 5$	$Z_u = 2$	$X(\text{MUN}) = 3$
$v = 10$	$s = 5$	$Z_i = 0$	$X(\text{MSP}) = 5$



$$u_3: \quad \frac{u_3 - u_1}{R_1} + \frac{1}{L} \int_0^t (u_3 - u_5) d\tau + i_L(0) = 0$$

$$u_4: \quad \frac{u_4 - u_1}{R_2} + C_1 \frac{du_4}{dt} + \frac{u_4}{R_4} + \frac{u_4 - u_5}{R_3} = 0$$

$$\text{superuzel: } \frac{1}{L} \int_0^t (u_5 - u_3) d\tau - i_L(0) + \frac{u_5 - u_4}{R_3} + C_2 \frac{d(u_5 + u_2)}{dt} + \frac{u_5 + u_2}{R_5} = 0$$

### 1) Výběr metody:

- Pro popis je vhodnější MUN

### 2) Sestavení rovnic MUN:

- Jedná se o obvod s plovoucím zdrojem. Pro popis MUN použijeme postup popsany na předchozím snímku
- Uzel  $u_3$ :  
 $i_{R1} + i_L = 0$
- Uzel  $u_4$ :  
 $i_{R2} + i_{C1} + i_{R4} + i_{R3} = 0$
- Superuzel:  
 $i_L + i_{R3} + i_{C2} + i_{R5} = 0$



## Řízené zdroje

slouží pro modelování aktivních elektronických prvků (např. tranzistorů, OZ) nebo složitějších funkčních bloků

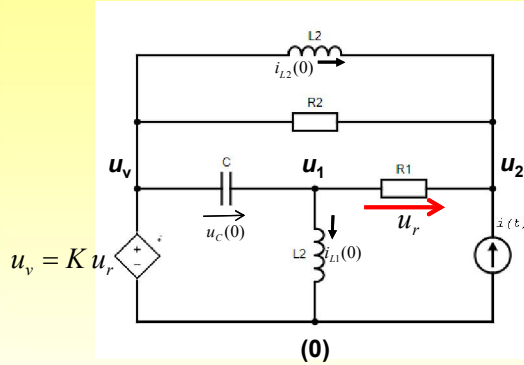
- zdroj napětí řízený napětím  $U_2 = A U_1$
- zdroj proudu řízený proudem  $I_2 = B I_1$
- zdroj proudu řízený napětím  $I_2 = S U_1$
- zdroj napětí řízený proudem  $U_2 = W I_1$

**V obvodech s řízenými zdroji je nutné vyjádřit řídicí veličinu pomocí neznámých hledaných obvodových veličin**

- Více o elektronických zařízeních s charakterem řízených zdrojů naleznete v učebnici: Havlíček, Pokorný, Zemánek: Elektrické obvody 1 na str. 59 až 62.
- Na dalších snímcích si ukážeme sestavování rovnic v obvodech s řízenými zdroji.

## Př.: ZNŘN

$u = 4$	$d = 3$	$Z_u = 1$	$X(\text{MUN}) = 2$
$v = 7$	$s = 4$	$Z_i = 1$	$X(\text{MSP}) = 3$



$$u_1: \quad C \frac{d(u_1 - u_v)}{dt} + \frac{1}{L_1} \int_0^t u_1 d\tau + i_{L1}(0) + \frac{u_1 - u_2}{R} = 0$$

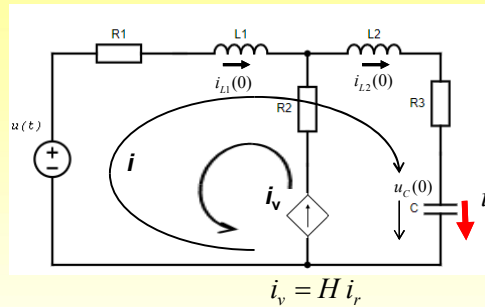
$$u_v = K u_r = K(u_1 - u_2)$$

$$u_2: \quad -i + \frac{u_2 - u_1}{R_1} + \frac{u_2 - u_v}{R_2} + \frac{1}{L_2} \int_0^t (u_2 - u_v) d\tau - i_{L2}(0) = 0$$

- Popis obvodu vede na MUN, proto řídicí napětí  $u_r$  vyjádříme jako rozdíl hledaných uzlových napětí  $u_r = u_1 - u_2$ .
- Popíšeme uzel  $u_1$ :  
 $ic + iL1 + ir = 0$  (počáteční podmínka na induktoru  $L_1$  je kladná)
- Popíšeme uzel  $u_2$ :  
 $-i + ir1 + ir2 + iL2 = 0$  (počáteční podmínka na induktoru  $L_2$  vtéká do uzlu  $u_2$ , je tedy záporná)

# Př.: ZPŘP

$u = 7$	$d = 6$	$Z_u = 1$	$X(\text{MUN}) = 5$
$v = 8$	$s = 2$	$Z_i = 1$	$X(\text{MSP}) = 1$



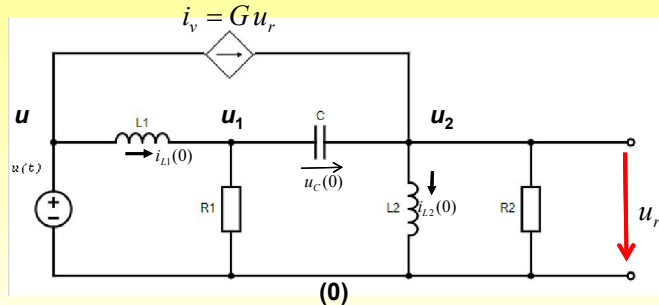
$$i_v = H i_r = H i$$

$$i: -u + R_1(i - Hi) + L_1 \frac{d(i - Hi)}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + R_3 i + \frac{1}{C} \int_0^t i d\tau + u_c(0) = 0$$

- Popis obvodu vede na MSP, řídicí proud vyjádříme pomocí smyčkových proudů.
- Je vhodné, aby řídicí ( $i_r$ ) i řízený ( $i_v$ ) proud ležely v nezávislých větvích (aby ve větvích byly jedinými smyčkovými proudy).  
Tomu odpovídá volba smyček na snímku.
- řídicí proud  $i_r = i$  a tedy  $i_v = H i$
- Popis smyčky  $i$ :  
 $-u + u_{R1} + u_{L1} + u_{L2} + u_{R3} + u_C = 0$

# Př.: ZPŘN

$u = 4$	$d = 3$	$Z_u = 1$	$X(\text{MUN}) = 2$
$v = 7$	$s = 4$	$Z_i = 1$	$X(\text{MSP}) = 3$



$$u_1: \frac{1}{L_1} \int_0^t (u_1 - u) d\tau - i_{L1}(0) + \frac{u_1}{R_1} + C \frac{d(u_1 - u_2)}{dt} = 0$$

$$i_v = Gu_r = Gu_2$$

$$u_2: -Gu_2 + C \frac{d(u_2 - u_1)}{dt} + \frac{1}{L_2} \int_0^t u_2 d\tau + i_{L2}(0) + \frac{u_2}{R_2} = 0$$

- Popis obvodu vede na MUN.
- řídicí napětí je totožné s hledaným uzlovým napětím  $u_2$ .  
 $u_r = u_2$

- Popis uzlu  $u_1$ :  
 $i_L + i_{R1} + i_C = 0$

$$i_L = (1/L) \int (u_1 - u) + \text{p.p. (která je záporná)}$$

$$i_{R1} = u_1/R_1$$

$$i_C = C d(u_1 - u_2)/dt$$

- Popis uzlu  $u_2$ :  
 $-i_v + i_C + i_L + i_{R2} = 0$

$$i_v = Gu_2$$

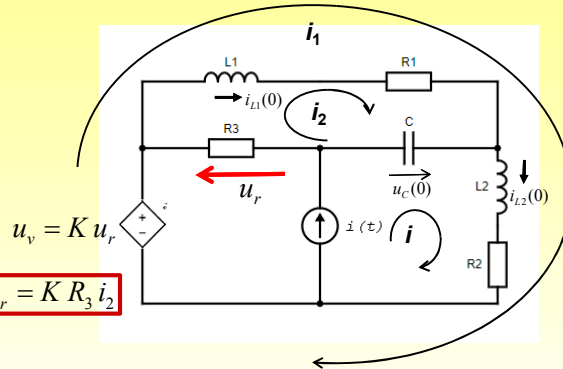
$$i_C = C d(u_C)/dt = C d(u_2 - u_1)/dt \quad (i_C \text{ vycházející z uzlu má orientaci jako napětí a platí } u_C + u_1 - u_2 = 0)$$

$$i_L = (1/L) \int (u_2) + \text{p.p.}$$

$$i_{R2} = u_2/R_2$$

## Př.: ZNŘN - MSP

$u = 6$	$d = 5$	$Z_u = 1$	$X(\text{MUN}) = 4$
$v = 8$	$s = 3$	$Z_i = 1$	$X(\text{MSP}) = 2$



$$i_1: -K R_3 i_2 + L_1 \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} + R_1(i_1 + i_2) + L_2 \frac{d(i_1 + i)}{dt} + R_2 i(i_1 + i) = 0$$

$$i_2: L_1 \frac{d(i_2 + i_1)}{dt} + R_1(i_2 + i_1) + \frac{1}{C} \int_0^t (i_2 - i) d\tau - u_c(0) + R_3 i_2 = 0$$

- Obvod vede na popis MSP, planární obvod se třemi smyčkami.
- Smyčku  $i_1$  nelze vést zdrojem proudu  $i$ , vedeme ji kolem obvodu.
- řídicí napětí  $u_r$  vyjádříme pomocí smyčkového proudu  $i_2$ , tedy  $u_r = r_3 i_2$ .
- Popis smyčky  $i_1$ :  
 $-u_v + u_{L1} + u_{R1} + u_{L2} + u_{R2} = 0$
- Popis smyčky  $i_2$ :  
 $u_{L1} + u_{R1} + u_C + u_{R3} = 0$