

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Faculté de génie

Département de génie mécanique

**Outils de prédiction numérique pour l'optimisation des stratégies de
contrôle du bruit à la source**

Thèse de doctorat

Spécialité : génie mécanique

Olivier FOIN

Sherbrooke (Québec), CANADA

Avril 1999

Résumé

L'objet principal de ce doctorat est le développement de techniques numériques permettant la réduction des nuisances sonores dues à la vibration de structures résonantes. Pour ce faire, des formulations théoriques originales ont été développées, puis implantées dans des codes numériques. Les résultats obtenus par ces codes ont fait l'objet d'une analyse minutieuse afin de dégager les principes physiques qui permettent de diminuer le rayonnement acoustique d'une structure soumise à des vibrations stationnaires. Trois sujets sont successivement abordés, (1) l'amortissement des vibrations d'une plaque par l'ajout d'un traitement viscoélastique, total ou partiel, (2) l'isolation acoustique procurée par l'ajout d'un matériau de masquage sur une plaque immergée dans l'eau et (3) l'évaluation numérique du champ acoustique rayonné par une structure à partir de la mesure de son champ de déplacement.

Dans le cadre de l'étude de l'amortissement d'une structure par l'ajout de matériaux viscoélastiques, une formulation théorique originale a été développée : elle traite le cas d'une plaque rectangulaire, bafflée, simplement appuyée et couverte par un traitement partiel, constitué d'une couche viscoélastique et d'une couche rigide. L'équation de mouvement de la structure multicouche couplée au fluide est obtenue avec la formulation variationnelle et la méthode de Ritz. Le rayonnement de la structure bafflée est calculé à l'aide de la méthode intégrale; les impédances de rayonnement sont évaluées à l'aide d'une méthode semi-numérique qui permet une bonne convergence en hautes-fréquences, tout en évitant des instabilités numériques. L'analyse des résultats a permis de mettre en évidence les points suivants :

1. L'existence d'un module d'Young optimum de la couche viscoélastique, qui entraîne un amortissement maximum des vibrations de la structure, a été montrée. Ce module d'Young optimum est une fonction linéaire de la fréquence.
2. Dans le cas où l'on considère un traitement viscoélastique qui ne couvre qu'une partie de la plaque, on remarque que l'augmentation d'amortissement est une fonction logarithmique du pourcentage de couverture, ce qui signifie que l'amortissement augmente beaucoup entre 0 % et 25 % de couverture alors que la différence est très faible entre 75 % et 100 %.

3. Une méthode est proposée pour optimiser la position de la couverture partielle sur la plaque de base, pour les premiers modes de structure. Cette méthode consiste à rechercher les zones qui vont maximiser les déformations de cisaillement transversal dans la couche viscoélastique, car elles sont principalement responsables de la dissipation d'énergie. Pour les modes de haut-ordre, la position de la couverture importe peu, car la dimension de la couverture étant très supérieure à la longueur d'onde structurale, la même efficacité est obtenue quelle que soit la position de la couverture sur la plaque.

Afin d'étudier l'isolation acoustique procurée par l'ajout d'un matériau de masquage sur une structure immergée dans l'eau, un modèle théorique a également été développé. La structure considérée est une plaque rectangulaire, bafflée, simplement appuyée et recouverte par un matériau de masquage. Le matériau de masquage est immergé dans l'eau alors que l'autre face de la plaque est dans l'air. La plaque de base est traitée avec la théorie classique pour la flexion de Love-Kirchhoff, alors que le matériau de masquage est décrit à l'aide du modèle à réaction localisée qui définit le matériau comme une répartition uniforme de ressorts sans masse. Ce modèle ne prend en compte que la déformation du matériau dans le sens de l'épaisseur, car c'est cette déformation qui est principalement responsable de l'isolation acoustique procurée par le matériau de masquage. L'analyse des résultats montre que l'isolation obtenue par le matériau de masquage croît en fonction de la fréquence. De plus, la diminution de la rigidité du matériau de masquage améliore l'isolation acoustique de manière uniforme.

La troisième partie de ce doctorat est consacrée au développement d'une méthode qui permet l'évaluation numérique du champ acoustique rayonné par une structure, à partir de la mesure de son champ de déplacement. Cette méthode permet de localiser les sources acoustiques dans le cas d'une structure complexe, elle permet également d'évaluer la contribution due au rayonnement acoustique de la structure dans le bruit total rayonné dans un local occupé par d'autres sources de bruit. Là encore, une formulation théorique a été développée, elle considère deux hypothèses pour la structure, (1) le cas où elle est entièrement bafflée et (2) le cas où elle est entièrement non-bafflée. Ces deux cas constituent un indicateur maximum et minimum pour le cas où la structure réelle n'est ni entièrement bafflée, ni entièrement non bafflée. Cette méthode a fait l'objet de nombreuses validations qui ont permis de montrer que bien qu'elle soit définie pour des structures planes, elle donne encore des résultats précis pour des structures avec une légère courbure.

Remerciements

Au terme de ce doctorat, je tiens à remercier les personnes qui ont contribué durant ces trois ans à l'accomplissement de ce travail.

En premier lieu, je remercie le professeur Jean Nicolas pour m'avoir encouragé à me lancer dans ce doctorat et pour avoir toujours manifesté de l'intérêt pour mes travaux.

Je remercie le professeur Alain Berry pour sa très grande compétence scientifique, sa rigueur et pour la qualité de son encadrement.

Mes remerciements vont aussi à Olivier Beslin, instigateur du dernier chapitre de ce document, pour ses conseils avisés et pour sa patience infaillible.

Par ailleurs, je remercie Jean-François Bilodeau pour son aide précieuse dans le cadre de la partie expérimentale.

Merci à tous les membres du GAUS qui ont participé au bon déroulement de mon séjour au Québec.

Je remercie également mes parents pour leurs soutiens et pour la liberté qu'ils m'ont laissée dans le choix de mes études.

Enfin, je remercie ma compagne, Nathalie, pour m'avoir supporté et encouragé tout au long de ce travail, ainsi que pour sa très précieuse relecture du document.

Table des matières

1.	Introduction.....	1
1.1	Introduction générale.....	1
1.2	Objectif de l'étude.....	2
1.2.1	Objectif général.....	2
1.2.2	Amortissement des structures à l'aide de matériaux viscoélastiques.....	2
1.2.3	Isolation du rayonnement acoustique des structures immergées dans l'eau à l'aide de matériaux de masquage.....	3
1.2.4	Méthode hybride pour prédire le rayonnement acoustique d'une structure à partir de la mesure de son champ vibratoire.....	4
2.	Rayonnement acoustique d'une structure recouverte d'un traitement viscoélastique.....	5
2.1	Introduction.....	5
2.1.1	Présentation du sujet.....	5
2.1.2	Objectifs et méthodologie.....	7
2.2	État des connaissances.....	7
2.2.1	Problème mécanique.....	8
2.2.2	Matériaux viscoélastiques et mécanisme d'amortissement.....	9
2.2.3	Problème acoustique.....	10
2.2.4	Formulation variationnelle.....	11
2.2.5	Champ acoustique rayonné.....	12
2.2.6	Champs de déplacement des plaques monocouches.....	13
2.2.7	Champ de déplacement des plaques multicouches.....	15
2.2.8	Modèle à champ de déplacement global.....	16
2.2.9	Méthode des éléments finis.....	20
2.2.10	Modèles de plaques sandwichs.....	21
2.2.11	Modèles de plaques avec couverture partielle.....	22

2.2.12	Synthèse.....	22
2.3	Formulation théorique.....	23
2.3.1	Description du système.....	23
2.3.2	Hypothèse de l'étude.....	26
2.3.3	Champs des déplacements.....	28
2.3.4	Champ des déformations.....	29
2.3.5	Champ des contraintes.....	31
2.3.6	Énergie cinétique.....	32
2.3.7	Énergie de déformation.....	32
2.3.8	Travail des forces extérieures.....	34
2.3.9	Pression pariétale, méthode intégrale.....	36
2.3.10	Choix des fonctions tests, conditions aux limites.....	39
2.3.11	Extrémalisation de la fonctionnelle de Hamilton.....	45
2.3.12	Impédance de rayonnement.....	46
2.3.13	Amortissement de la plaque.....	46
2.4	Indicateurs vibro-acoustiques.....	47
2.5	Validation du modèle.....	49
2.5.1	Réponse vibratoire d'une plaque avec un traitement viscoélastique partiel.....	49
2.5.2	Réponse acoustique d'une structure bafflée.....	56
2.6	Synthèse sur la formulation théorique.....	59
3.	Étude de l'amortissement des vibrations d'une structure à l'aide de matériaux viscoélastiques.....	61
3.1	Introduction.....	61
3.1.1	Problématique industrielle.....	62
3.1.2	Dépendance en température et en fréquence des matériaux viscoélastiques.....	62
3.1.3	Amortissement dans les structures complexes.....	64
3.2	Étude phénoménologique de l'amortissement.....	65
3.2.1	Introduction.....	65
3.2.2	Influence de la température.....	67
3.2.3	Couche viscoélastique libre.....	71
3.2.4	Couche viscoélastique contrainte.....	74

3.3	Plaque avec une couverture partielle.....	84
3.3.1	Influence de la surface de la couverture partielle.....	84
3.3.2	Influence de la position de la couverture partielle	86
3.4	Optimisation d'un traitement viscoélastique à l'aide d'un algorithme génétique	94
3.4.1	Introduction	94
3.4.2	Les algorithmes génétiques	95
3.4.3	Application aux traitements viscoélastiques	95
3.5	Synthèse sur l'amortissement des structures par l'ajout de matériaux viscoélastiques	99
4.	Rayonnement acoustique d'une structure recouverte par un matériau de masquage et immergée dans un fluide lourd	102
4.1	Introduction	102
4.1.1	Problématique et objectifs.....	102
4.1.2	État des connaissances	104
4.1.3	Synthèse.....	109
4.2	Formulation théorique	110
4.2.1	Position du problème.....	110
4.2.2	Loi de comportement du matériau de masquage	111
4.2.3	Équation du mouvement de la structure	114
4.2.4	Pression acoustique dans le fluide.....	115
4.2.5	Fonctions de base du système	116
4.2.6	Équations du problème couplé	117
4.2.7	Indicateurs vibro-acoustique	119
4.2.8	Cas d'une base sinusoïdale pour la pression	120
4.2.9	Comparaison entre une base de sinus et une base de Fourier pour la pression pariétale	122
4.3	Étude phénoménologique du découplage.....	126
4.3.1	Introduction	126
4.3.2	Méthode approchée pour les forts découplages	127
4.3.3	Analogie avec un système à un degré de liberté.....	129
4.3.4	Comportement vibratoire de la plaque de base dans le cas des forts découplages	132
4.3.5	Étude du découplage en fonction de la fréquence.....	134

4.3.6	Réponse vibratoire, réponse acoustique	137
4.3.7	Rapport des vitesses quadratiques, perte par insertion.....	141
4.3.8	Étude paramétrique.....	144
4.4	Synthèse et perspectives.....	148
5.	Méthode hybride pour la prédiction du rayonnement acoustique d'une structure à partir de la mesure de son champ vibratoire.....	151
5.1	Introduction	151
5.1.1	Présentation générale et état des connaissances.....	151
5.1.2	Principe de la méthode hybride	153
5.1.3	Objectif de l'étude.....	155
5.2	Formulation théorique.....	156
5.2.1	Introduction	156
5.2.2	Méthode de collocation	156
5.2.3	Rayonnement acoustique d'une plaque bafflée.....	157
5.2.4	Rayonnement acoustique d'une plaque non-bafflée	159
5.2.5	Synthèse.....	164
5.3	Implantation numérique	164
5.3.1	Présentation générale.....	164
5.3.2	Résolution des systèmes linéaires	167
5.3.3	Cas bafflé, impédances de rayonnement	167
5.3.4	Cas non-bafflée.....	176
5.3.5	Récapitulatif sur les temps de calcul.....	180
5.4	Validations, mise en oeuvre de la méthode hybride	181
5.4.1	Introduction	181
5.4.2	Validations théoriques.....	182
5.4.3	Remarques sur les mesures.....	183
5.4.4	Validations expérimentales	187
5.4.5	Étude de convergence.....	195
5.5	Synthèse et perspectives sur la méthode hybride.....	199
	Conclusion	201

Annexe A	Vecteur des forces dans le cas d'une onde plane.....	205
Annexe B	Impédances de rayonnement d'une plaque bafflée simplement appuyée.....	208
Annexe C	Calcul de la matrice H_{mnpq} pour un matériau de masquage.....	212
Annexe D	Calcul de la matrice L_{mnpq} et des impédances de rayonnement pour la méthode hybride.....	216
Annexe E	Calcul de la matrice A pour la plaque non-bafflée	220
Annexe F	Maillage irrégulier d'une plaque	224
Bibliographie		226

Listes des figures

Figure 2.1 :	Présentation du problème traité dans ce chapitre.....	6
Figure 2.2 :	Comparaison entre la théorie de Love-Kirchhoff et celle de Reissner-Mindlin pour décrire le déplacement d'une plaque.....	15
Figure 2.3 :	Configuration de la plaque avec la couverture partielle.	24
Figure 2.4 :	Position de la couverture partielle sur la plaque de base (vue de dessus).....	25
Figure 2.5 :	Plaque insérée dans le baffle infini avec les directions de l'onde plane incidente.	25
Figure 2.6 :	Résumé des conditions aux limites de la plaque avec la couverture partielle. Les deux barres obliques (//) indiquent des déplacements interdits. La couverture partielle admet les mêmes conditions aux limites que la plaque de base avec, en plus, les déplacements C1 et C2.....	44
Figure 2.7 :	Configuration de la plaque expérimentale avec la couverture partielle et la position de la force.....	52
Figure 2.8 :	Configuration de la plaque expérimentale avec son mode de fixation sur le support.	53
Figure 2.9 :	Description du montage expérimental utilisé pour mesurer la réponse vibratoire d'une plaque.	54
Figure 2.10 :	Comparaison théorie-expérience pour une plaque de fibre de verre couverte par un traitement viscoélastique contraint (la force est au point $x_0 = 0.08$ m, $y_0 = 0.07$ m).	55
Figure 2.11 :	Comparaison théorie-expérience pour une plaque de fibre de verre couverte par un traitement viscoélastique contraint (la force est au point $x_0 = 0.4$ m, $y_0 = 0.35$ m).	55
Figure 2.12 :	Comparaison théorie-expérience pour la puissance acoustique rayonnée par une plaque bafflée, simplement appuyée en aluminium.....	59
Figure 3.1 :	Comportement du module d'Young et du coefficient d'amortissement d'un matériau viscoélastique en fonction de la température et de la fréquence.....	63
Figure 3.2 :	Module d'Young du matériau viscoélastique ISD 112 (3M) pour trois températures différentes.....	69
Figure 3.3 :	Coefficient d'amortissement du matériau viscoélastique ISD 112 (3M) pour trois températures différentes.	69

Figure 3.4 :	Réponse acoustique d'une plaque sandwich à trois températures différentes.	70
Figure 3.5 :	Facteur de perte global d'une plaque sandwich pour trois températures différentes.....	70
Figure 3.6 :	Énergies de déformation d'une plaque bicouche pour deux rigidités différentes de la couche viscoélastiques.	71
Figure 3.7 :	Puissance acoustique rayonnée par une plaque bicouche pour trois rigidités différentes de la couche viscoélastique.....	72
Figure 3.8 :	Comparaison entre deux plaques bicouches avec des rigidités d'extension de la couche viscoélastique égales, mais avec des épaisseurs différentes.	74
Figure 3.9 :	Puissance acoustique rayonnée d'une plaque sandwich pour trois rigidités différentes de la couche viscoélastique, tous les autres paramètres étant identiques.	76
Figure 3.10 :	Facteur de perte global d'une plaque sandwich en fonction du module d'Young de la couche viscoélastique.....	77
Figure 3.11 :	Module d'Young optimum de la couche viscoélastique en fonction de la fréquence, pour une plaque sandwich donnée.....	78
Figure 3.12 :	Facteur de perte global d'une plaque sandwich pour trois modules d'Young de la couche viscoélastique fixe, en fonction de la fréquence et pour le module d'Young optimum.....	79
Figure 3.13 :	Influence de l'épaisseur de la couche viscoélastique sur le module d'Young optimum. ..	80
Figure 3.14 :	Influence de la dimension de la plaque de base sur le module d'Young optimum.....	80
Figure 3.15 :	Influence de l'épaisseur de la plaque de base sur le module d'Young optimum.	80
Figure 3.16 :	Influence de la rigidité de la plaque de base sur le module d'Young optimum.	80
Figure 3.17 :	Puissance acoustique rayonnée d'une plaque sandwich pour quatre valeurs différentes de l'épaisseur de la couche viscoélastique (pour les quatre cas $E_{visco} = 10^8$ Pa).....	81
Figure 3.18 :	Influence de la couche supérieure sur l'amortissement d'une plaque sandwich.	82
Figure 3.19 :	Position de la couche viscoélastique à l'intérieur de la structure.	83
Figure 3.20 :	Influence de la position de la couche viscoélastique à l'intérieur de la structure sur la puissance acoustique rayonnée.	83
Figure 3.21 :	Position de la couverture partielle sur la plaque de base.	85
Figure 3.22 :	Influence de la surface de la couverture partielle sur la réponse acoustique d'une plaque sandwich.....	85
Figure 3.23 :	Atténuation globale obtenue en fonction du pourcentage de couverture partielle.....	86
Figure 3.24 :	Six positions de la couverture partielle sur la plaque de base.....	88

Figure 3.25 :	Puissance acoustique rayonnée par plaque sandwich pour six positions différentes de la couverture partielle.....	89
Figure 3.26 :	Même résultats que la Figure 3.25, mais présentés au-dessus de 1000 Hz et en 1/3 d'octave.	91
Figure 3.27 :	Agrandissement de la Figure 3.25 autour du premier mode.	92
Figure 3.28 :	Densité d'énergie de flexion de la couche de base à l'interface entre la plaque de base et la couche viscoélastique ($z_1 = h_1/2$) pour le mode 1,1.....	93
Figure 3.29 :	Agrandissement de la Figure 3.25 autour des deuxième et troisième modes.	93
Figure 3.30 :	Densité d'énergie de flexion de la couche de base à l'interface entre la plaque de base et la couche viscoélastique ($z_1 = h_1/2$) pour le mode 2,1.....	94
Figure 3.31 :	Densité d'énergie de flexion de la couche de base à l'interface entre la plaque de base et la couche viscoélastique ($z_1 = h_1/2$) pour le mode 1,2.....	94
Figure 3.32 :	Comparaison entre le module d'Young optimum calculé par la méthode proposée dans ce chapitre et par l'algorithme d'optimisation génétique.	98
Figure 3.33 :	Réponse acoustique d'une plaque sandwich avec le module d'Young de la couche viscoélastique obtenu par l'algorithme génétique ou par le calcul proposé à l'équation 3.3.99	
Figure 4.1 :	Mesure du coefficient de transmission et du coefficient de réflexion d'un matériau de masquage.	105
Figure 4.2 :	Mesure du coefficient de masquage.	105
Figure 4.3 :	Mesure du coefficient d'anéchoïsme d'un matériau de masquage,	106
Figure 4.4 :	Configuration du système plaque/matériau/fluide étudiée dans ce chapitre.....	110
Figure 4.5 :	Divers types de déformations supportées par un solide élastique.....	112
Figure 4.6 :	Représentation schématique du modèle à réaction localisée utilisé pour décrire le comportement du matériau de masquage.	114
Figure 4.7 :	Comparaison de la puissance rayonnée par une plaque recouverte par un matériau de masquage ($B_c = 10^6$ Pa, $\eta_c = 0$, $h_c = 10$ mm) quand on utilise soit une base de sinus, soit une décomposition en série de Fourier pour décrire la pression acoustique pariétale.....	122
Figure 4.8 :	Pression acoustique sur la surface externe du matériau de masquage pour le premier mode ($f_{sinus} = 66.8$ Hz, $f_{Fourier} = 67$ Hz, $B_c = 10^6$ Pa, $\eta_c = 0$, $h_c = 10$ mm).....	124
Figure 4.9 :	Pression acoustique sur la surface externe du matériau de masquage à la fréquence $f = 261$ Hz pour la base modale et la base de Fourier ($B_c = 10^6$ Pa, $\eta_c = 0$, $h_c = 10$ mm).124	

Figure 4.10 :	Pression acoustique sur la surface externe du matériau de masquage à la fréquence $f = 459$ Hz pour la base modale et la base de Fourier ($B_c = 10^6$ Pa, $\eta_c = 0$, $h_c = 10$ mm).	125
Figure 4.11 :	Pression acoustique sur la surface externe du matériau de masquage pour le quatrième mode ($f_{\text{sinus}} = 587.3$ Hz, $f_{\text{Fourier}} = 587.5$ Hz, $B_c = 10^6$ Pa, $\eta_c = 0$, $h_c = 10$ mm).	125
Figure 4.12 :	Système masse-ressort à un degré de liberté.	129
Figure 4.13 :	Comparaison entre le modèle de plaque couverte par un matériau de masquage, proposée dans ce chapitre, avec un système à un degré de liberté.	132
Figure 4.14 :	Comparaison entre la vitesse quadratique de la plaque de base et celle de la couche externe du matériau de masquage dans le cas où $B_c = 10^9$ Pa, $h_c = 10$ mm, $\eta_c = 0$.	133
Figure 4.15 :	Comparaison entre la puissance rayonnée d'une plaque <i>in-vacuo</i> , d'une plaque dans l'eau et d'une plaque couverte par un matériau de masquage peu rigide ($B_c = 10^4$ Pa, $h_c = 10$ mm, $\eta_c = 0$).	133
Figure 4.16 :	Termes réels de la matrice $[H_{mnpq}]^{-1}/\omega^2$.	134
Figure 4.17 :	Termes imaginaires de la matrice $[H_{mnpq}]^{-1}/\omega^2$.	135
Figure 4.18 :	Comparaison des amplitudes du déplacements plaque/matériau de masquage pour le mode (1,1).	136
Figure 4.19 :	Comparaison des amplitudes du déplacements plaque/matériau de masquage pour le mode (1,2).	136
Figure 4.20 :	Comparaison des amplitudes du déplacements plaque/matériau de masquage pour le mode (1,3).	137
Figure 4.21 :	Comparaison des amplitudes du déplacements plaque/matériau de masquage pour le mode (1,4).	137
Figure 4.22 :	Comparaison des amplitudes du déplacements plaque/matériau de masquage pour le mode (1,5).	137
Figure 4.23 :	Vitesse quadratique de la plaque de base et de la surface externe du matériau de masquage pour $B_c = 10^8$ Pa, $h_c = 10$ mm et $\eta_c = 0$.	138
Figure 4.24 :	Vitesse quadratique de la plaque de base et de la surface externe du matériau de masquage pour $B_c = 10^6$ Pa, $h_c = 10$ mm et $\eta_c = 0$. Comparaison entre le modèle rigoureux présentée dans cette étude (—) et le modèle pour les forts découplages (---).	139
Figure 4.25 :	Puissance rayonnée d'une plaque avec et sans matériau de masquage ($B_c = 10^8$ Pa, $h_c = 10$ mm, $\eta_c = 0$).	140

Figure 4.26 :	Puissance rayonnée d'une plaque avec et sans matériau de masquage ($B_c = 10^6$ Pa, $h_c = 10$ mm, $\eta_c = 0$).	140
Figure 4.27 :	Rapport des vitesses quadratiques pour une plaque de 0.6 m \times 0.6 m avec 9 mm d'épaisseur.....	142
Figure 4.28 :	Comparaison entre la perte par insertion (---) et le rapport des vitesses quadratiques (—) pour une plaque de 0.6 m \times 0.6 m avec 9 mm d'épaisseur.	144
Figure 4.29 :	Rapport des vitesses quadratiques pour quatre épaisseurs du matériau de masquage. $h_c = 1$ mm, $h_c = 5$ mm, $h_c = 10$ mm, $h_c = 50$ mm ($B_c = 10^7$ Pa, $\eta_c = 0$).	145
Figure 4.30 :	Puissance acoustique rayonnée par la surface externe du matériau de masquage pour trois valeurs différentes du facteur de perte du matériau de masquage : $\eta_c = 0$, $\eta_c = 0.5$, $\eta_c = 1$ ($B_c = 10^7$ Pa, $h_c = 10$ mm).....	146
Figure 4.31 :	Rapport des vitesses quadratiques pour quatre dimensions différentes de la plaque (tous les autres paramètres étant identiques).....	147
Figure 4.32 :	Rapport des vitesses quadratiques pour quatre épaisseurs différentes de la plaque de base (tous les autres paramètres étant identiques).	148
Figure 5.1 :	Vue en coupe de la plaque avec les normales aux deux surfaces S^+ et S^-	160
Figure 5.2 :	Organigramme du programme HYMNE.	166
Figure 5.3 :	$\text{Re}[Z_{mnpq}^H]$ en fonction de m, n, p, q à 100 Hz pour une plaque de 1.36 m \times 0.54 m.	168
Figure 5.4 :	$\text{Re}[Z_{mnpq}^H]$ en fonction de m, n, p, q à 500 Hz pour une plaque de 1.36 m \times 0.54 m.	168
Figure 5.5 :	$\text{Re}[Z_{mnpq}^H]$ en fonction de m, n, p, q à 1000 Hz pour une plaque de 1.36 m \times 0.54 m.	168
Figure 5.6 :	$\text{Re}[Z_{mnpq}^H]$ en fonction de m, n, p, q à 5000 Hz pour une plaque de 1.36 m \times 0.54 m.	168
Figure 5.7 :	Comparaison de la puissance rayonnée d'une plaque bafflée, simplement appuyée quand la matrice des impédances de rayonnement est pleine et quand elle est diagonale.	169
Figure 5.8 :	Comparaison des impédances de rayonnement d'une plaque de 1.36 m par 0.54 m avec interpolation fréquentielle (pas de 50 Hz, ----) et sans interpolation fréquentielle (—). ..	171
Figure 5.9 :	Impédance de rayonnement d'un panneau de 1.36 m par 0.54 m, en fonction de k_0/k_{mn} . ..	172
Figure 5.10 :	Facteur de rayonnement d'une partie d'un fuselage d'avion (Dash-8, Bombardier Aerospace).....	173
Figure 5.11 :	Comparaison entre la méthode hybride et l'approximation hautes fréquences pour une partie d'un fuselage d'avion (Dash-8, Bombardier Aerospace).....	173
Figure 5.12 :	Influence du nombre de points de mesure sur la convergence de l'approximation hautes fréquences pour une partie d'un fuselage d'avion (Dash-8, Bombardier Aerospace).	175

Figure 5.13:	Re[K_{1212}^A] quand on interpole après avoir divisé par ω^2 (interpolation linéaire, pas de 50 Hz, ----) et sans interpolation (—).	177
Figure 5.14 :	Re[K_{1212}^A] quand on interpole avant de diviser par ω^2 (interpolation linéaire, pas de 50 Hz, ----) et sans interpolation (—).	177
Figure 5.15 :	Im[K_{1212}^A] quand on interpole après avoir divisé par ω^2 (interpolation linéaire, pas de 50 Hz, ----) et sans interpolation (—).	178
Figure 5.16 :	Im[K_{1212}^A] quand on interpole avant de diviser par ω^2 (interpolation linéaire, pas de 50 Hz, ----) et sans interpolation (—).	178
Figure 5.17 :	Comparaison du rayonnement acoustique d'une plaque raidie (caractéristique au paragraphe 5.4.4) dans le cas bafflé et non-bafflé.	179
Figure 5.18 :	Comparaison entre ADNR et la méthode hybride pour la puissance rayonnée d'une plaque bafflée, simplement appuyée.	182
Figure 5.19 :	Comparaison entre SATURN et la méthode hybride pour la puissance rayonnée d'une plaque non-bafflée, simplement appuyée.	183
Figure 5.20 :	Montage expérimental pour la mesure du déplacement d'une structure excitée par un pot vibrant.	184
Figure 5.21 :	Fonction de base du déplacement de la structure dans la direction x , pour $m = 2$ et $a = 1$	185
Figure 5.22 :	Présentation de la manière de calculer les longueur a et b de telles sortes que les points de mesure ne passent pas par des lignes nodales des fonctions de bases $\psi_m(x,y)$	185
Figure 5.23 :	Exemple de quelques module de la vitesse au point de référence pour le fuselage du Dash-8 (ces courbes ont été enregistrées à divers moments de la journée de mesure, mais le montage expérimental n'a subi aucune modification).	187
Figure 5.24 :	Comparaison entre la méthode hybride et une mesure d'intensimétrie pour une plaque simplement appuyée.	188
Figure 5.25 :	Schéma de la plaque en aluminium avec le raidisseur en T.	189
Figure 5.26 :	Comparaison entre la méthode hybride et une mesure d'intensimétrie pour une plaque simplement appuyée avec un raidisseur.	190
Figure 5.27 :	Schéma du caisson.	191
Figure 5.28 :	Comparaison entre la méthode hybride et une mesure d'intensimétrie pour un caisson parallélépipédique.	192
Figure 5.29 :	Fuselage du Dash-8 (Bombardier Aerospace) utilisée pour tester la méthode hybride.	193

Figure 5.30 :	Schéma du fuselage du Dash-8 avec le maillage, le point d'excitation et le point de référence.....	194
Figure 5.31 :	Comparaison entre une mesure d'intensimétrie et la méthode hybride pour une partie d'un fuselage d'avion (Dash-8, Bombardier Aerospace).....	195
Figure 5.32 :	Étude de convergence de la méthode hybride en fonction du nombre de points de mesure pour une partie de fuselage d'avion (Dash-8, Bombardier Aerospace).....	197
Figure 5.33 :	Déformée du Dash-8 à 440 Hz avec 63 points de maillage.....	198
Figure 5.34 :	Déformée du Dash-8 à 440 Hz avec 126 points de maillage.....	198
Figure 5.35 :	Déformée du Dash-8 à 440 Hz avec 234 points de maillage.....	198
Figure 5.36 :	Déformée du Dash-8 à 440 Hz avec 455 points de maillage.....	198
Figure 5.37 :	Déformée mesurée du Dash-8 à 440 Hz.....	199
Figure A.1 :	Exemple de la position des angles θ et φ dans le cas d'une onde plane incidente.....	205
Figure B.1 :	Domaine d'intégration avant et après la transformation B.4.....	209
Figure C.1 :	Domaine d'intégration avant et après la transformation C.3.....	213
Figure D.1 :	Domaine d'intégration avant et après la transformation D.4.....	217
Figure F.1 :	Système de coordonnées utilisé pour le maillage de la plaque.....	224

Liste des tableaux

Tableau 2.1 :	Récapitulatif des modèles de plaques multicouches, tiré de Noor-Burton (1989) (N est le nombre de couches).....	20
Tableau 2.2 :	Caractéristiques de la plaque de base en fibre de verre.	50
Tableau 2.3 :	Caractéristiques du matériau viscoélastique ISD 112.....	50
Tableau 2.4 :	Caractéristiques du module d'Young et du coefficient d'amortissement du matériau ISD 112 en fonction de la fréquence à une température de 25 °C.	51
Tableau 2.5 :	Caractéristiques de la couche supérieure en acier.....	51
Tableau 2.6 :	Caractéristiques de la plaque en aluminium utilisés pour les validations de la réponse acoustique.....	58
Tableau 3.1 :	Caractéristiques de la plaque de base.....	67
Tableau 3.2 :	Caractéristiques du matériau viscoélastique ISD 112, le module d'Young et le facteur de perte sont représentés respectivement dans la Figure 3.2 et la Figure 3.3.....	68
Tableau 3.3 :	Caractéristiques de la couche supérieure.	68
Tableau 3.4 :	Caractéristiques de la couche viscoélastique pour les tests d'amortissement libre.	72
Tableau 3.5 :	Caractéristiques de la couche viscoélastique utilisée pour l'étude paramétrique sur la rigidité de la couche viscoélastique.	75
Tableau 3.6 :	Caractéristiques de la couche supérieure en acier.....	82
Tableau 3.7 :	Longueur d'onde structurale dans les directions x et y pour les 7 premiers modes d'une plaque de dimensions 0.48 m \times 0.42 m.....	90
Tableau 3.8 :	Caractéristiques de la plaque de base et de la couche supérieure utilisées pour le calcul d'optimisation avec l'algorithme génétique.....	97
Tableau 3.9 :	Caractéristiques de la couche viscoélastique utilisée pour le calcul d'optimisation avec l'algorithme génétique.....	97
Tableau 3.10 :	Évolution de l'amortissement global d'une structure sandwich en fonction de divers paramètres du traitement amortissant.....	101
Tableau 4.1 :	Caractéristiques de la plaque de base en acier étudiée dans le chapitre 4.	127

Tableau 5.1 :	Récapitulatif des gains sur les temps de calcul du programme HYMNE en fonction des simplifications numériques utilisées (cas bafflé). Le cas de base a été calculé avec 63 points de maillage, 30 points de Gauss pour l'intégration numérique des impédances de rayonnement (matrice Z_{mnpq} pleine).....	180
Tableau 5.2 :	Récapitulatif des gains sur les temps de calcul du programme HYMNE en fonction des simplifications numériques utilisées (cas non-bafflé). Le cas de base a été calculé avec 63 points de maillage, 30 points de Gauss pour l'intégration numérique des matrices M^A_{mnpq} et K^A_{mnpq} et 10×10 fonctions de base ont été utilisées pour le saut de pression.	181
Tableau 5.3 :	Distance entre deux points de mesures dans la direction x et y pour les quatre maillages du Dash-8.	196

1. Introduction

1.1 Introduction générale

Si les équations de base de la mécanique et de l'acoustique sont établis depuis longtemps, ce n'est qu'avec l'arrivée d'outils informatiques performants que la vibroacoustique s'est réellement développée. La recherche en vibroacoustique est étroitement liée avec des applications industrielles, car l'industrie a besoin des nouveaux outils numériques, développés dans les centres de recherche, pour concevoir de nouveaux produits silencieux. En effet, les démarches purement expérimentales sont en général longues, compliquées et coûteuses, elle peuvent être, de plus, très peu efficaces, surtout si on utilise une méthode essai-erreur. Une des préoccupations principales de ce doctorat est de faire un lien entre la modélisation numériques du comportement vibroacoustique d'une structure et l'application de ce modèle dans une optique de contrôle du bruit à la source.

1.2 Objectif de l'étude

1.2.1 Objectif général

L'objectif générale de ce doctorat est de développer des outils de prédiction numérique, basés sur des formulations théoriques originales, afin de favoriser la conception de produits silencieux. D'une manière plus spécifique, trois sujets vont être traités :

1. Le premier est l'étude de l'amortissement des vibrations et du rayonnement acoustique d'une structure par l'ajout de matériaux viscoélastiques. Une formulation théorique sera proposée, ainsi qu'une analyse détaillée du mécanisme de dissipation d'énergie dans les matériaux viscoélastiques.
2. Le deuxième sujet de ce document est l'étude de l'isolation acoustique procurée par l'ajout de matériaux de masquage sur des structures immergées dans l'eau. Là encore, un modèle sera proposé afin de calculer le rayonnement acoustique d'une telle structure.
3. Le troisième partie de ce document propose une méthode qui allie mesure et expérience afin de prédire le champ acoustique rayonnée par une structure plane. Cette méthode va permettre d'évaluer la puissance acoustique rayonnée par une structure dans des cas où il est impossible de le faire par une mesure seule ou un calcul théorique seul.

1.2.2 Amortissement des structures à l'aide de matériaux viscoélastiques

Il a été observé depuis plusieurs décennies que l'ajout de matériaux viscoélastiques (polymère) sur une structure permet une réduction notable des niveaux vibratoires, et par là même, une diminution des niveaux du bruit émis par cette structure. Ce type de matériaux a fait l'objet d'un grand nombre d'études, d'une part à cause de leurs très grand intérêt industriel, mais aussi parce qu'ils présentent plusieurs difficultés de mise en oeuvre. En particulier, leurs rigidités et leurs coefficients d'amortissement, qui sont deux paramètres directement responsables de l'amortissement obtenu, varient en fonction de la température et de la fréquence, ce qui complique beaucoup la recherche du matériau idéal.

Cette étude vibroacoustique sur le comportement des matériaux viscoélastiques est divisée entre le chapitre 2 et le chapitre 3.

Le chapitre 2 est consacré à l'élaboration d'une formulation théorique permettant d'évaluer l'équation du mouvement ainsi que le champ acoustique rayonné par une structure plane, rectangulaire, bafflée, multicouche, incluant des matériaux viscoélastiques.

L'objectif du chapitre 3 va être d'exploiter le modèle théorique du chapitre 2 afin d'analyser le mécanisme d'amortissement dans les structures multicouches. Beaucoup de paramètres entre en jeu dans l'amortissement des structures par des matériaux viscoélastiques. Une revue détaillée de l'influence de ces paramètres sur l'amortissement global obtenu est réalisée. La maximisation des dissipations d'énergie dans le matériau viscoélastique est également étudié à l'aide d'un algorithme d'optimisation génétique.

1.2.3 Isolation du rayonnement acoustique des structures immergées dans l'eau à l'aide de matériaux de masquage

La discrétion acoustique est un paramètre très important pour les navires et sous-marins militaires. C'est la raison pour laquelle beaucoup d'études vibroacoustiques ont été consacrées à l'acoustique sous-marines. Une des différences essentielles entre l'air et l'eau, réside dans le fait que l'eau a une densité environs 1000 fois supérieure à l'air. Cette différence fait que l'on peut appliquer des stratégies de contrôle du bruit différentes pour ces deux fluides. C'est en particulier le cas des matériaux de masquage qui sont utilisés en acoustique sous-marine, soit pour isoler le fluide environnant des vibrations de la coque (diminution du rayonnement acoustique de la structure), soit pour réduire les réflexions sur les parois dû à une excitation extérieure (sonar...). Les matériaux de masquage sont peu rigides et se compriment sous l'effet de la pression acoustique exercée par le fluide. Un tel type de matériau ne peut pas être utilisé dans l'air, car la charge fluide de l'air sur une structure assez dense est pratiquement négligeable.

L'objectif du chapitre 4 va être de développer un modèle théorique, capable de décrire le comportement vibroacoustique d'une plaque élastique, rectangulaire, bafflée, couverte par un matériau de masquage et immergée dans l'eau. Un travail d'analyse important sera réalisé au niveau de la compréhension du phénomène d'isolation procuré par les matériaux de masquage.

1.2.4 Méthode hybride pour prédire le rayonnement acoustique d'une structure à partir de la mesure de son champ vibratoire

La première étape dans une démarche de contrôle de bruit à la source doit consister à isoler les diverses sources de bruit qui contribuent au niveau sonore global obtenu. Cette étape est très complexe pour la plupart des structures réelles (compresseurs, ventilateurs, scies...), mais elle est fondamentale, car il est inutile d'appliquer un traitement anti-bruit quelconque sur une partie de la structure qui ne joue pratiquement pas de rôle dans le niveau de bruit total observé.

La méthode proposée au chapitre 5 est un pas en avant afin de résoudre ce type de problèmes. Cette méthode fait intervenir des mesures et des calculs afin d'évaluer le champ acoustique rayonné par une structure. Elle consiste à mesurer le champ vibratoire d'une structure, puis à utiliser ce champ vibratoire pour calculer les amplitudes du déplacement qui vont ensuite permettre de calculer le champ acoustique rayonné. Cette méthode permet, par exemple, d'isoler le bruit dû au rayonnement acoustique d'une structure, des autres types de bruit (bruit de jet, bruit de turbine...), même quand ils sont dû à la même source. Dans le cas d'une structure complexe, on peut mesurer le champ vibratoire de plusieurs sous-structures pour déterminer la contribution relative de chacune d'elle dans le bruit total rayonnée.

La plupart des structures réelles ne sont ni entièrement bafflées, ni entièrement non-bafflées. Dans la formulation théorique, nous allons considérer ces deux cas extrêmes (bafflée et non-bafflée), afin de fournir un indicateur maximum et minimum de la réponse acoustique de la structure.

2. Rayonnement acoustique d'une structure recouverte d'un traitement viscoélastique

2.1 Introduction

2.1.1 Présentation du sujet

Dans beaucoup de cas les nuisances sonores auxquelles nous sommes quotidiennement soumises sont dues à la vibration d'une structure (machine industrielle, véhicule, appareil ménager ...). Néanmoins, tous les bruits que nous percevons ne sont pas forcément dû à la vibration d'une structure, par exemple, ce n'est pas le cas pour les bruits aérodynamiques, les bruits de turbine ou les bruits de jet... Dans le cas où le bruit est dû à la vibration d'une structure, un moyen très efficace de réduire ce bruit est de diminuer les vibrations de la source. Dans ce chapitre, nous allons étudier un moyen de réduire les vibrations d'une structure, qui consiste à rajouter un matériau viscoélastique couvert par un matériau rigide sur la structure à amortir. Cette méthode a prouvé son efficacité dans le passé, mais il reste encore beaucoup de points à éclaircir aussi bien au niveau de la modélisation théorique, que de l'efficacité réelle de cette méthode.

Cette étude se veut très générale, néanmoins, dans le cadre d'une étude théorique il faut choisir un type de structure. C'est une plaque plane, rectangulaire, qui va être choisie car ce type de structure se retrouve dans beaucoup de structure industrielle et est de plus assez simple à modéliser. Pour le calcul du

rayonnement acoustique nous ferons l'hypothèse que la plaque est bafflée ce qui permet de simplifier la formulation théorique sans nuire à la généralité de la méthode, en effet, nous verrons au chapitre 5 que la différence entre une structure bafflée et non-bafflée se situe uniquement en basses fréquences et est souvent assez faible. Étant donné que pour la plupart des cas réels rencontrés dans l'industrie, le traitement viscoélastique ne peut pas recouvrir toute la structure, nous allons prendre en compte un traitement viscoélastique de dimensions quelconques (Figure 2.1).

L'excitation de la structure sera soit une force ponctuelle normale à la surface de la plaque, soit une onde plane de direction quelconque, ces deux types d'excitation représentent assez bien les deux principaux types d'excitation rencontrés dans l'industrie : excitation mécanique de la structure ou excitation acoustique, il existe d'autres types d'excitations possibles (aérodynamique...), mais elles ne seront pas prises en compte.

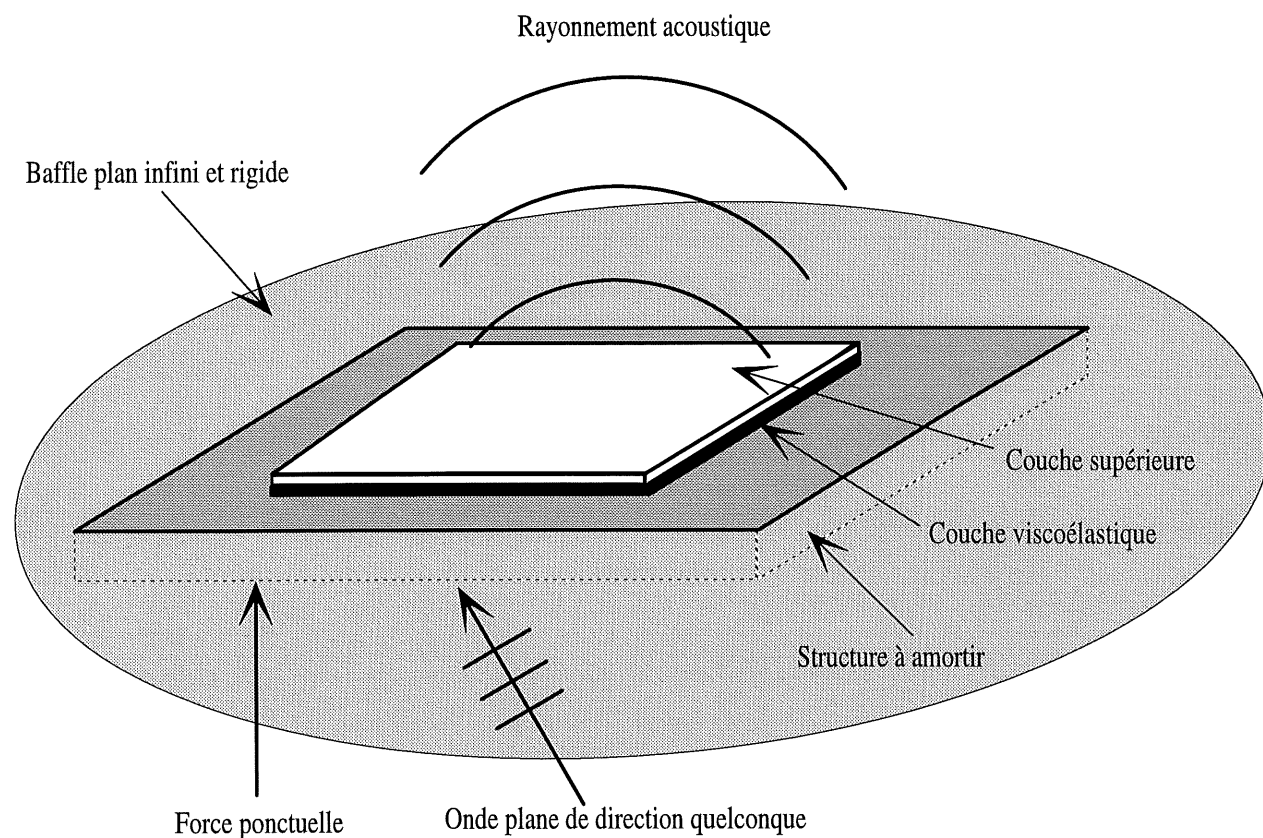


Figure 2.1 : Présentation du problème traité dans ce chapitre.

2.1.2 Objectifs et méthodologie

L'objectif de ce chapitre est de proposer un modèle théorique capable de prédire le rayonnement acoustique d'une plaque rectangulaire, bafflée, recouverte par un traitement viscoélastique partiel. Cette formulation théorique va ensuite être implantée dans un code informatique afin de pouvoir réaliser des études paramétriques sur le comportement vibro-acoustique de structures multicouches. Les résultats donnés par ce code vont être exprimés au moyen d'indicateurs vibro-acoustiques globaux, tels que la vitesse quadratique moyenne, le facteur de rayonnement ou la puissance acoustique rayonnée. La méthode qui va être utilisée pour résoudre ce problème comporte essentiellement trois étapes :

1. Calcul de l'équation de mouvement de la structure.
2. Application du principe de la continuité des vitesses mécanique et acoustique normales sur la structure.
3. Calcul de la pression acoustique rayonnée dans l'espace.

On ne peut pas appliquer ces trois étapes de manière successive, car le fluide mis en mouvement par la structure, va exercer en retour, une force de pression sur cette même structure. Ce couplage entre le mouvement du fluide et celui de la structure (couplage fluide-structure), impose de traiter conjointement le problème mécanique et le problème acoustique. La méthode pour résoudre un tel problème va être décrite dans l'étude bibliographique qui suit.

2.2 État des connaissances

Avant de commencer à formuler sous forme d'équations le problème posé dans l'introduction, il est important de faire une revue des différents travaux qui ont été menés dans ce domaine. Dans un premier temps, les équations de base de la mécanique, la loi de comportement des matériaux viscoélastiques et les équations de base de l'acoustique sont présentées. L'approche variationnelle est également introduite, car c'est la méthode la plus utilisée pour déterminer l'équation de mouvement de systèmes complexes. Le calcul du rayonnement acoustique fait également l'objet d'un paragraphe dans lequel les principales approches permettant de calculer le champ acoustique rayonné par une structure sont présentées. Par la suite cette revue de la bibliographie est consacrée à la présentation des hypothèses de base utilisées pour

décrire le comportement des plaques multicouches, beaucoup de modèles ont été proposés dans ce domaine et il est intéressant d'en faire une étude approfondie. Une attention particulière sera portée sur les modèles de plaques sandwichs (élastique-viscoélastique-élastique) utilisés pour réduire les vibrations des structures.

2.2.1 Problème mécanique

Un problème d'élasticité peut être caractérisé par trois relations : (1) l'équation de mouvement du solide, (2) la relation déformations-déplacements, et (3) la relation contraintes-déformations.

- D'une manière générale, et en considérant la convention d'indice muet, l'équation de mouvement d'un solide élastique s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \sigma_{ij,j}, \quad (2.1)$$

où ρ est la densité du solide, u est son déplacement avec pour composantes $(u_i)_{i=1,2,3}$, f_i sont les forces volumiques et σ_{ij} le tenseur des contraintes.

- dans le cas où on considère des petites déformations, la relation déformations-déplacements s'énonce :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.2)$$

où ε_{ij} est le tenseur des déformations.

- Dans le cadre de l'élasticité linéaire, la relation contraintes-déformations s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.3)$$

où C_{ijkl} , est la matrice d'élasticité.

À ces trois relations, il faut ajouter les conditions aux limites sur la surface du solide, elles peuvent être de deux types, soit des conditions de type cinématique qui imposent un déplacement, soit des conditions de type statique qui imposent une contrainte sur la surface du solide (pour plus de détails sur ce problème voir par exemple Batoz-Dhatt, 1992, ou Lesueur, 1988).

2.2.2 Matériaux viscoélastiques et mécanisme d'amortissement

Les matériaux viscoélastiques sont généralement des polymères. Dans cette étude ils ne seront abordés que d'un point de vue mécanique, pour plus de détails sur la composition chimique de ce type de matériaux, on peut se reporter aux travaux de Corsaro *et al* (1990).

Dans les solides élastiques non dissipatifs en régime linéaire, on considère la relation contrainte-déformation sous la forme :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.4)$$

où σ_{ij} est le tenseur des contraintes, ε_{kl} le tenseur des déformations et C_{ijkl} la matrice d'élasticité réelle du matériau. Dans le cas d'un régime harmonique, les contraintes sont en phase avec les déformations et il n'y a aucune perte d'énergie dans le système.

Dans les fluides visqueux la relation contrainte-déformation s'écrit (Darby, 1976) :

$$\sigma_{ij} = \eta \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}, \quad (2.5)$$

où η est la viscosité du fluide. Dans le cas d'un régime harmonique, les contraintes sont en quadrature de phase avec les déformations, ce qui se traduit par des pertes d'énergie sous forme de chaleur.

Les matériaux viscoélastiques ont un comportement mécanique intermédiaire entre les solides élastiques et les fluides visqueux, ce qui se traduit par un déphasage φ entre les contraintes et les déformations, quand on considère un régime harmonique (φ est compris entre 0 et $\pi/2$). En utilisant une notation complexe, on peut écrire la relation contraintes-déformations d'un matériau viscoélastique sous la forme :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^0 e^{j\varphi} \tilde{\varepsilon}_{kl}, \quad (2.6)$$

où $\tilde{\sigma}_{ij}$ et $\tilde{\varepsilon}_{kl}$ sont respectivement les contraintes et les déformations complexes. Généralement on écrit cette relation sous la forme :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (1 + j\eta) \tilde{\varepsilon}_{kl}, \quad (2.7)$$

où $\eta = \tan \varphi$, η est le coefficient d'amortissement (ou facteur de perte) du matériau et C_{ijkl} sa matrice d'élasticité réelle. Le facteur de perte caractérise la capacité du matériau à dissiper de l'énergie sous forme de chaleur quand il est soumis à une excitation harmonique.

2.2.3 Problème acoustique

Un problème de rayonnement acoustique des structures est caractérisé par deux types de relations : (1) l'équation de propagation dans le fluide, et (2) les conditions aux limites.

En l'absence de source acoustique, la pression dans le fluide satisfait l'équation de propagation :

$$\Delta P - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0, \quad (2.8)$$

où P est la pression acoustique dans le fluide et c_0 est la vitesse du son dans ce fluide.

On distingue en général trois types de conditions aux limites :

1. La condition de Neumann, qui stipule que l'on connaît le déplacement de la structure (on admet l'hypothèse de la continuité des vitesses mécanique et acoustique normales sur la structure). C'est à ce niveau qu'apparaît le couplage avec la structure dans la formulation du problème acoustique.
2. La condition de Diriclet, qui suppose que l'on connaisse la pression acoustique sur la surface considérée (cette hypothèse ne sera pas utilisée dans notre étude).
3. La condition de Sommerfeld, qui impose que le rayonnement acoustique soit nul à l'infini, et qui permet d'assurer l'unicité de la solution dans le cas où un espace infini est considéré.

Il n'existe pas de méthode permettant de résoudre de manière exacte un problème acoustique ainsi posé, sauf dans des cas très simples. Pour obtenir une solution générale à ce problème, il va falloir faire appel à la formulation intégrale, cette méthode sera introduite au paragraphe 2.3.9 (pour plus de détails sur le rayonnement acoustique des structures et la méthode intégrale, voir par exemple, Fahy, 1985 ou Lesueur, 1988).

2.2.4 Formulation variationnelle

Du fait de sa trop grande complexité, on ne peut pas trouver l'équation du mouvement exacte d'une plaque rectangulaire avec une couverture partielle, il va donc falloir faire appel à une méthode approchée. L'approche variationnelle (principe de Hamilton), est la méthode la plus utilisée pour trouver les équations approchées décrivant le comportement d'un système complexe. Cette formulation utilise une intégrale d'action, ou fonctionnelle, qui remplace la notion d'équilibre des forces de l'équation de Newton, par la notion de travail virtuel autour d'une position d'équilibre. La fonctionnelle est exprimée en fonction des énergies du système qui sont des quantités scalaires et qui s'additionnent facilement. On obtient l'équation du mouvement approchée de la structure, en invoquant la stationnarité de la fonctionnelle du système. Dans cette étude nous allons nous orienter vers une résolution par la méthode de Ritz, qui consiste à introduire des déplacements cinématiquement admissibles pour la structure, dans la fonctionnelle de Hamilton. La fonctionnelle de Hamilton, exprimée en fonction du déplacement inconnu du système u , a la forme suivante :

$$H(u) = \int_{t_0}^{t_1} (T - V + W) dt, \quad (2.9)$$

où T est l'énergie cinétique de la plaque, V l'énergie de déformation de la plaque et W le travail des forces extérieures. Le théorème de Hamilton s'énonce de la manière suivante :

- Si le champ de déplacement de la plaque est cinématiquement admissible, c'est à dire s'il vérifie les conditions aux limites cinématiques (déplacement de la structure sur les bords), et si ce champ de déplacement rend la fonctionnelle de Hamilton extrémale,
- alors, le champ de déplacement vérifie l'équation de mouvement du système et les conditions aux limites statiques (efforts résultants et moments résultants).

L'essentiel du travail à effectuer pour construire la fonctionnelle de Hamilton est contenu dans le calcul des énergies du système. Ce calcul va être détaillé aux paragraphes 2.3.6, 2.3.7 et 2.3.8.

Il est à noter que le couplage avec le fluide est introduit dans le problème mécanique sous la forme du travail des forces de pression acoustique (inclus dans W dans l'équation 2.9).

2.2.5 *Champ acoustique rayonné*

Le problème acoustique que nous nous proposons de résoudre est le calcul du rayonnement acoustique d'une plaque bafflée dans un espace semi-infini. Ce problème a fait l'objet de très nombreuses études et plusieurs types de solutions ont été proposés. Atalla & Nicolas (1994) font une revue détaillée des principales méthodes disponibles pour prédire le rayonnement acoustique d'une plaque bafflée.

En premier lieu on peut citer les approches non modales qui calculent le facteur de rayonnement d'une structure en se basant sur des considérations énergétiques (Ver & Holmer, 1971, Müller *et al*, 1982). Ces méthodes différencient en général quatre zones fréquentielles : (1) en dessous de la première fréquence de résonance, (2) la zone de court-circuit acoustique, (3) à la fréquence critique et (4) au-dessus de la fréquence critique. Ces méthodes sont très utilisées pour des applications industrielles, car elles sont très simples à utiliser et donnent des tendances fiables (Beranek, 1988, chapitre 11).

Maidanik (1962) a proposé une méthode analytique qui détermine la partie réelle des impédances de rayonnement modales d'une plaque simplement appuyée, cette méthode a été reprise et développée par la suite par Lesueur (1988), et Soulami (1991) (seule la partie réelle des impédances de rayonnement est requise pour le calcul de la puissance acoustique rayonnée). Ces méthodes ne calculent pas les impédances de rayonnement intermodales (couplage entre deux modes de structure), ce qui limite leur champ d'application.

Les modèles précédents font des approximations assez importantes pour simplifier la formulation, ce qui réduit leurs généralités. Trois méthodes rigoureuses sont proposées dans la littérature pour calculer le champ acoustique rayonné par une structure.

1. La méthode en champ lointain qui exprime la pression acoustique loin de la plaque au moyen d'une transformée de Fourier spatiale bidimensionnelle du déplacement de la structure (Berry, 1990, 1991). Cette méthode ne permet néanmoins pas de connaître la pression acoustique pariétale et empêche donc de prendre en compte le couplage fluide-structure dans l'équation de mouvement de la structure. Seul les méthodes présentées aux points 2 et 3 permettent le calcul de la pression pariétale.
2. Les méthodes analytiques en champ proche qui utilisent la formulation intégrale (intervention de la fonction de Green) et qui évalue la pression acoustique sur la plaque. Ces formulations nécessitent

de calculer les impédances de rayonnement de la structure. Plusieurs auteurs ont proposé des méthodes pour calculer ces termes, Davies, de manière analytique approchée (1971, uniquement valable pour l'appui simple), Berry, de manière analytique exacte (1991, 1994), Sandman (1975) ou Nelisse (1996) de manière semi-numérique.

3. La troisième méthode est la méthode des éléments finis de frontières qui consiste à discrétiser l'intégrale de Kirchhoff-Helmholtz et à l'intégrer numériquement sur de petits sous-domaines de la surface rayonnante (voir Mariem *et al.*, 1987, Atalla & Bernhard, 1994). Cette méthode est généralement couplée avec la méthode des éléments finis pour calculer l'équation de mouvement de la structure.

Dans tous les cas, le calcul rigoureux de la pression acoustique rayonnée par une structure entraîne une formulation complexe, que ce soit avec le calcul de la transformée de Fourier bidimensionnelle, avec le calcul des impédances de rayonnement ou avec le calcul direct de l'intégrale de Kirchhoff-Helmholtz.

2.2.6 Champs de déplacement des plaques monocouches

La définition du champ de déplacement de la structure est une étape fondamentale de l'approche variationnelle en élasticité, c'est elle qui conditionne la validité des résultats obtenus. La plupart des études sur les plaques multicouches se basent sur les deux principaux modèles définis pour les plaques monocouches : le modèle de Love-Kirchhoff (Batoz-Dhatt, 1992, Berry 1990) et celui de Reissner-Mindlin, (Reissner 1945, Mindlin, 1951).

- **Hypothèses de Love-Kirchhoff**

Love et Kirchhoff ont, les premiers, proposé un modèle pour décrire le champ de déplacement d'une plaque mince supportant des déformations de flexion. La première hypothèse de ce modèle suppose qu'une normale à la surface avant déformation, reste normale à la surface après déformation (Figure 2.2). La deuxième hypothèse de ce modèle suppose que la longueur du plan neutre de la plaque reste constante après déformation. La troisième hypothèse suppose que l'épaisseur de la plaque reste constante au cours de la déformation. Ce type de déplacement est appelé flexion pure. Dans ce chapitre, on note u , v , w , les déplacements de la plaque suivant x , y , z (les longueur et largeur de la plaque sont respectivement suivant x et y). Cela signifie qu'un point M , qui a pour coordonnées x , y , z quand la plaque est au repos, a pour

coordonnées $x + u, y + v, z + w$, quand la plaque est en mouvement ($z = 0$ correspond au plan neutre). Le champ de déplacement défini par Love-Kirchhoff a la forme suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (2.10)$$

Dans ce champ de déplacement, la seule inconnue est le déplacement normal de la plaque w .

- **Hypothèses de Reissner-Mindlin**

Reissner (1945) et Mindlin (1951) ont proposé une théorie plus complète que celle de Love-Kirchhoff permettant de décrire le mouvement de plaques monocouches orthotropes, minces ou épaisses. L'hypothèse principale de cette théorie suppose qu'une normale à la surface avant déformation reste sur une droite après déformation, mais non plus sur une normale à la surface déformée comme c'est le cas dans la théorie de Love-Kirchhoff (Figure 2.2). Les autres hypothèses de la théorie de Love-Kirchhoff sont conservées. Le champ de déplacement de la théorie de Reissner-Mindlin s'écrit :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = z\Psi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = z\Psi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (2.11)$$

Dans la théorie de Reissner-Mindlin les rotations ne sont pas exprimées en fonction du déplacement normal de la plaque, comme c'est le cas dans le modèle de Love-Kirchhoff. Il y a maintenant trois inconnues dans le champ de déplacement de la plaque : w le déplacement normal de la plaque, et Ψ_x et Ψ_y qui sont les rotations des normales à la surface de la plaque par rapport aux axes x et y .

La théorie de Reissner-Mindlin permet de prendre en compte les déplacements de cisaillement transversal de la plaque. Cet effet qui est négligeable pour une plaque mince élastique en basses fréquences, peut devenir important dans le cas de plaques minces en hautes fréquences, dans le cas de plaques épaisses élastiques, dans le cas de plaques viscoélastiques ou dans le cas de plaques multicouches. On peut considérer la théorie de Love-Kirchhoff comme un cas particulier de la théorie de Reissner-Mindlin.

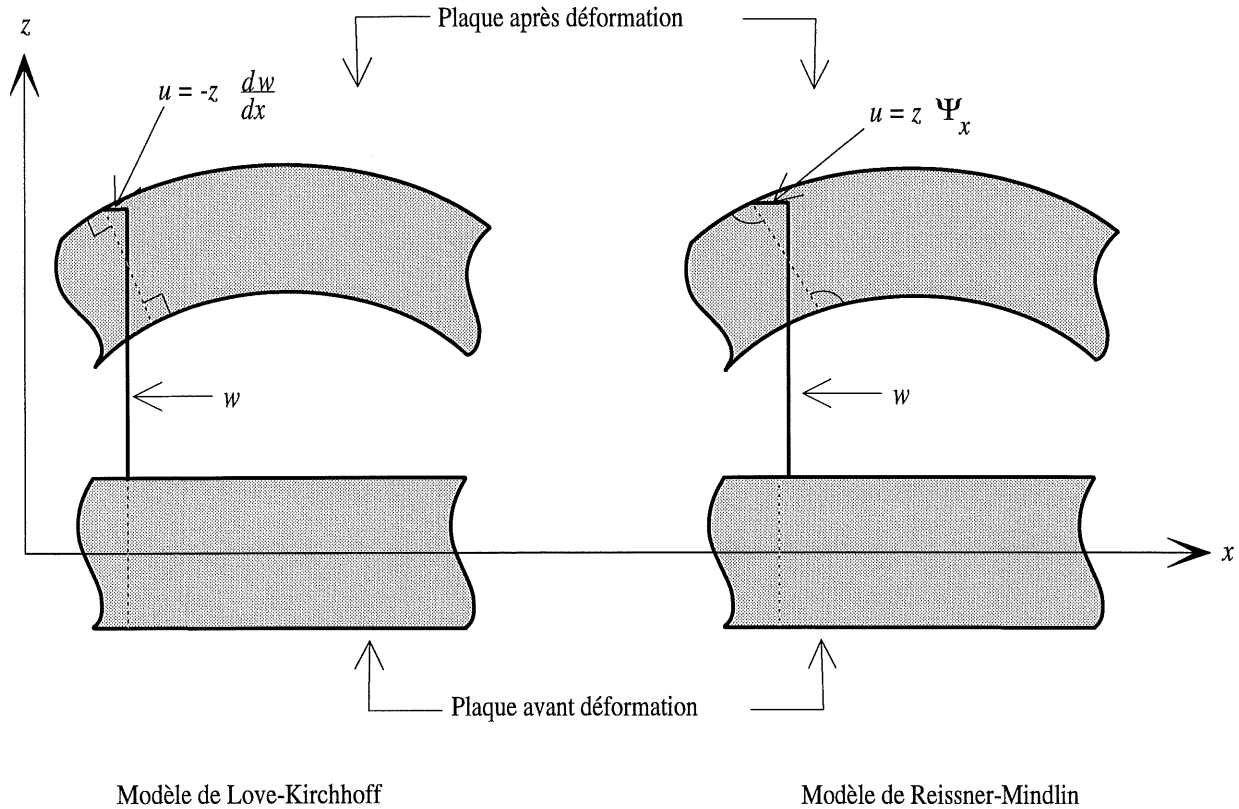


Figure 2.2 : Comparaison entre la théorie de Love-Kirchhoff et celle de Reissner-Mindlin pour décrire le déplacement d'une plaque.

2.2.7 Champ de déplacement des plaques multicouches

Un très grand nombre d'études ont été effectuées sur la modélisation de plaques multicouches. On peut définir cinq types de modèles regroupés en deux principales catégories, Noor-Burton (1989, 1992) d'une part, et Reddy (1990) d'autre part, font une revue détaillée de toutes ces méthodes. Le Tableau 2.1 présente un résumé de ces différents modèles.

La première catégorie de méthodes est constituée des modèles qui utilisent un champ de déplacement global pour toute la plaque :

1. La théorie du premier ordre (First-order shear deformation theory), qui utilise des polynômes de degré 1 en z pour définir le champ de déplacement (équivalent à la théorie de Reissner-Mindlin, Reissner *et al*, 1961, Yang *et al*, 1966, Pryor *et al*, 1971, Whitney, 1987, Noor-Burton, 1989, 1992, Batoz-Dhatt, 1992).

2. La théorie d'ordre supérieur (Whitney, 1973, Reddy, 1984, 1987, 1989, Noor-Burton, 1989, 1992, Garrison, 1992, 1994, Higher-order shear deformation theory).
3. La théorie d'ordre supérieur simplifiée (Reddy, 1984, Noor-Burton, 1989, 1992, Simplified higher-order theory).

Les modèles des alinéas 2 et 3 utilisent des polynômes d'ordre supérieur à 1 pour décrire le déplacement dans la direction z .

La deuxième catégorie comprend les modèles qui admettent un champ de déplacement indépendant pour chaque couche:

4. La théorie à champ de déplacement indépendant (Sun-Whitney, 1973, Discrete-layer theory).
5. La théorie simplifiée à champ de déplacement indépendant (Srinivas, 1973, Sun-Whitney, 1973, Guyader 1977, DiSciuva, 1985, Woodcock 1993, Simplified discrete layer theory).

2.2.8 Modèle à champ de déplacement global

Les modèles à champ de déplacement global les plus courants, utilisent des polynômes de degré 1 en z pour définir les champs de déplacement (First-order shear deformation theory). Le champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\Psi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\Psi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (2.12)$$

Dans ces équations, il y a 5 déplacements inconnus à déterminer: u_0 , v_0 , w , Ψ_x et Ψ_y . u_0 et v_0 sont les déplacements de traction-compression (encore appelés extension ou effet membrane). Ces déplacements traduisent un allongement de l'axe neutre de la plaque. Ces déplacements sont généralement négligés dans le cas de plaques minces isotropes.

Pour ce type de modèles (First order shear deformation theory), il s'est avéré nécessaire de définir un facteur de correction de cisaillement transversal k , qui modifie les contraintes de cisaillement transversal, pour que les modèles qui utilisent la théorie bidimensionnelle de l'élasticité correspondent le plus possible

avec la théorie tridimensionnelle de l'élasticité. Reissner (1945) utilise des considérations d'équilibre statique et d'équivalence énergétique et trouve $k = 5/6$ pour une plaque homogène. Mindlin (1951) se base sur des considérations dynamiques et obtient $k = \pi^2/12$, pour une plaque isotrope. D'autres auteurs utilisent des méthodes différentes et obtiennent des valeurs de k différentes (Yang-Norris-Stavsky, 1966), Whitney, 1973, Chow, 1971). Noor et Burton (1989) indiquent que le facteur de correction de cisaillement transversal a une influence importante sur la précision des résultats de ce modèle.

L'approximation d'un champ global présente l'avantage d'une formulation simple, néanmoins les approximations réalisées sont très restrictives. Dans de nombreux cas, ces types de modèles ne sont pas capables de décrire correctement les déplacements d'une plaque multicouche. En effet, les déplacements de cisaillement transversal Ψ_x et Ψ_y de ces modèles sont une moyenne des déplacements de cisaillement de chaque couche, c'est pourquoi, il est difficile de décrire l'amortissement créé par une plaque sandwich (élastique-viscoélastique-élastique) avec ce type de modèles car, dans ce cas, la couche viscoélastique a un déplacement de cisaillement très supérieur aux couches élastiques. De plus Ungar (voir Ruzicka, 1959) a montré qu'on ne peut pas définir de plan neutre dans la plupart des plaques multicouches, l'hypothèse d'un déplacement de traction-compression global n'est donc pas valide dans ce cas. À partir de ces remarques, on peut déduire que l'approximation d'un champ de déplacement global combiné avec des polynômes de degré 1, pour les champs de déplacement, ne représente pas un modèle général capable de décrire une structure multicouche quelconque.

Des modèles utilisant des polynômes de degré supérieur à 1 pour la définition des champs de déplacement ont été proposés. Le modèle le plus complet (Higher-order shear deformation theory) utilise des polynômes cubiques pour les déplacements latéraux (u et v) et un polynôme quadratique pour le déplacement normal w . Ainsi, dans ce cas, on ne fait pas l'hypothèse que l'épaisseur de la plaque reste constante au cours de la déformation. Dans ce modèle il y a 11 déplacements inconnus à déterminer. Cette méthode donne une meilleure précision que le modèle précédent mais entraîne des calculs assez lourds.

Un modèle simplifié a été déduit du modèle précédent (Noor-Burton, 1989, Reddy, 1984, Simplified higher order theory), il considère le même type de déplacements latéraux (polynômes cubiques) mais ne prend pas en compte la variation d'épaisseur de la plaque : w est constant. Dans ce cas, il y a cinq déplacements inconnus à déterminer.

Les modèles à champ de déplacement global ne sont pas bien adaptés pour décrire une plaque avec un traitement viscoélastique partiel, car ils posent beaucoup de problèmes au niveau des conditions de continuité des déplacements, des déformations et des contraintes sur les bords de la couverture.

- **Modèle à champ de déplacement indépendant pour chaque couche**

En 1973, Sun et Whitney ont permis d'améliorer les modèles des plaques multicouches orthotropes en considérant un champ de déplacement identique à l'équation 2.12, mais pour chaque couche de la plaque (Discrete-layer theory et Simplified discrete layer theory). La différence entre le modèle Discrete-layer theory et Simplified discrete layer theory se fait au niveau des conditions de continuité et sera étudié au paragraphe suivant. Srinivas (1973) utilise une formulation différente de Sun et Whitney mais considère le même type d'hypothèses et aboutit à des conclusions similaires. Ce type de formulation permet une description de la réalité physique des plaques multicouches beaucoup plus précise que la théorie du cisaillement du premier ordre.

- **Conditions de continuité**

La continuité des déplacements est prise en compte par tous les modèles (pour les modèles à champ de déplacement global la continuité des déplacements est satisfaite de manière automatique). Par contre, du fait que les couches de la plaque sont constituées de matériaux différents (matrice d'élasticité différente pour chaque couche) la continuité des contraintes est un problème plus délicat qu'aucun modèle n'est capable de satisfaire de manière exacte (sauf si on utilise la théorie tridimensionnelle de l'élasticité).

La théorie du cisaillement du premier ordre (First-order shear deformation theory) considère l'hypothèse des contraintes planes comme dans le cas d'une plaque monocouche. De plus, sa précision dépend du facteur de correction de cisaillement transversal qui est une grandeur encore controversée. Le deuxième type de modèle (Higher-order shear deformation theory) ne fait aucune hypothèse sur la continuité des contraintes, ce qui entraîne des incorrections dans la formulation (par exemple la nullité des contraintes sur les faces externes de la plaque n'est pas respectée). Néanmoins, les résultats sont plus précis que dans le cas du premier modèle, du fait d'une définition plus précise du champ des déplacements. Le troisième modèle (Simplified higher-order theory) considère les contraintes planes et admet des déformations de cisaillement nulles sur les faces externes de la plaque. Cette condition permet de réduire les déplacements inconnus de 11 à 5, ce qui simplifie les formulations mais entraîne de légères imprécisions par rapport au modèle précédent.

La première hypothèse de Sun et Whitney (1973, Discrete-layer theory) considère uniquement la continuité des déplacements tangentiels à l'interface de chaque couche. En utilisant cette hypothèse, on peut exprimer le déplacement de chaque couche de la plaque en fonction du déplacement normal de la plaque w , des déplacements de traction-compression de la première couche, ainsi que des rotations de chaque couche. Ainsi, dans ce modèle il y a $2N + 3$ déplacements inconnus à calculer où N est le nombre de couches. L'hypothèse des contraintes planes est prise en compte, ce qui satisfait la condition de la contrainte normale nulle sur les faces externes. Les contraintes de cisaillement sont constantes dans chaque couche, ce qui empêche d'en satisfaire la continuité à l'interface de chaque couche. Néanmoins, c'est ce modèle qui admet la meilleure précision pour le calcul des contraintes en comparaison de l'élasticité tridimensionnelle. C'est aussi celui qui a la formulation la plus lourde car le nombre de déplacements inconnus croît avec le nombre de couches.

Sun et Whitney définissent une seconde possibilité pour les conditions de continuité (Simplified discrete-layer theory) : ils considèrent la première hypothèse (continuité des déplacements) à laquelle ils ajoutent une condition de continuité des contraintes de cisaillement. Les contraintes de cisaillement étant constantes à l'intérieur d'une couche, la continuité de ces contraintes à l'interface de chaque couche implique que les contraintes de cisaillement sont constantes dans toute l'épaisseur de la plaque multicouches. La condition de continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement permet d'écrire le champ de déplacement de chaque couche en fonction du champ de déplacement de la première couche. Cette formulation est très intéressante car quel que soit le nombre de couches de la plaque, il n'y a toujours que cinq déplacements inconnus à calculer. Néanmoins, il reste à la valider dans le cas de plaques comportant beaucoup de couches avec des alternances matériau rigide / matériau viscoélastique. C'est cette formulation qu'utilisent Guyader (1977), Woodcock (1993), Cournoyer (1994, 1995) et Guertin (1998) dans leurs travaux.

Tableau 2.1 : Récapitulatif des modèles de plaques multicouches, tiré de Noor-Burton (1989) (N est le nombre de couches).

Numéro	Type	Hypothèses des champs de déplacement	Continuité des contraintes	Nombre de déplacements inconnus
1	First-order shear deformation theory	u, v linéaire, w constant	contraintes planes $\sigma_z = 0$	5
2	Higher-order shear deformation theory	u, v cubique, w quadratique	aucune	11
3	Simplified higher order theory	u, v cubique, w constant	$\sigma_z = 0$ partout, $\sigma_{xz} = 0$ et $\sigma_{yz} = 0$ sur les faces externes	5
4	Discrete layer theory	u, v linéaire pour chaque couche, w constant	contraintes planes $\sigma_z = 0$	$2N+3$
5	Simplified discrete layer theory	u, v linéaire pour chaque couche, w constant	contraintes planes $\sigma_z = 0$, continuité de σ_{xz} et σ_{yz}	5

2.2.9 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis se base sur l'approche variationnelle, et, bien que les modèles qui sont utilisés dans la suite de ce document ne font pas appel à cette méthode, il est important de donner un bref aperçu des nombreuses études qui ont été faites dans ce domaine (Reddy, 1989 a écrit un article de synthèse sur ce sujet). Il existe un très grand nombre de publications définissant un élément de référence afin de pouvoir traiter le cas de plaques multicouches par la méthode des éléments finis. La plupart des modèles utilisent les différentes hypothèses définies dans les paragraphes précédents. Certains modèles utilisent un champ de déplacement global pour toute la plaque en prenant en compte le cisaillement transversal tel que défini par l'équation 2.12 (Pryor *et al*, 1970, Cook, 1972). D'autres (Di Sciuva, 1984)

considèrent un champ de déplacement qui prend en compte un déplacement indépendant pour chaque couche tel que défini par Srinivas (1973). Johnson *et al* (1982) et Yiu (1993) proposent des modèles dédiés aux plaques sandwichs incluant des matériaux viscoélastiques. Cournoyer (1994, 1995) et Guertin (1998) utilisent la théorie Simplified discrete layer theory avec un élément quadrilatéral à 9 noeuds. Reddy *et al* (1989), s'appuie sur un modèle de type 3 (Simplified higher shear theory) qui satisfait de manière précise la continuité des contraintes en comparaison de la théorie tridimensionnelle de l'élasticité. La plupart des études utilisent soit un élément quadrilatéral à 4 noeuds (Pryor et Barker, Di Sciuva, Reddy), soit triangulaire à trois noeuds (Cook). Le nombre de degrés de liberté pris en compte est en général très supérieur à celui considéré pour les plaques monocouches et élastiques, ceci afin de prendre en compte les effets de cisaillement transversal.

2.2.10 Modèles de plaques sandwichs

Le problème des plaques sandwichs (plaque de base + couche viscoélastique + couche rigide) a été étudié de manière spécifique à cause de son intérêt industriel très important. Les études décrites dans ce paragraphe n'ont pas l'ambition de fournir des modèles généraux pour des plaques multicouches quelconques, mais plutôt d'être capable de décrire les phénomènes principaux qui interviennent dans l'amortissement des plaques viscoélastiques contraintes. Les premières études (Kerwin, 1959, Ungar, 1959) utilisent des méthodes analytiques, car à cette époque les modèles variationnels (Reissner *et al*, 1961, Yang *et al*, 1966), qui utilisent un champ de déplacement global pour toute la plaque, ne sont pas capables de prendre en compte la différence entre les déformations de cisaillement des couches élastiques et celles des couches viscoélastiques. Par la suite les modèles de plaques sandwichs ont utilisé des approches variationnelles en faisant des simplifications par rapport aux modèles généraux des plaques multicouches.

Kerwin (1959) a le premier calculé la rigidité complexe d'une poutre sandwich, en supposant que seules les déformations de cisaillement de la couche viscoélastique dissipent de l'énergie. Il montra également que cette rigidité dépend de la fréquence. Ce modèle a été développé par la suite (Ross, voir Ruzicka, 1959, et Ungar *et al*, 1962) pour prendre en compte certains effets négligés par Kerwin dans sa première étude (par exemple, les pertes d'énergie par traction-compression de la couche viscoélastique et de la couche supérieure). Le modèle défini par Ungar (1962) est à la fois simple et précis, et permet de calculer la rigidité complexe d'une plaque sandwich avec un minimum de calcul, il est couramment utilisé

par les ingénieurs acousticiens (Beranek, 1988, chapitre 14). Di Taranto, en 1965, est le premier à déterminer l'équation du mouvement d'une poutre sandwich en vibrations libres. Il met en évidence le fait que l'équation trouvée par Kerwin est un cas particulier de cette nouvelle équation. Par la suite Mead et Markus (1968) ont résolu l'équation de Di Taranto pour divers types de conditions aux limites.

2.2.11 Modèles de plaques avec couverture partielle

Peu d'études ont été consacrées à l'étude du comportement vibro-acoustique de plaque partiellement couvertes par un traitement viscoélastique contraint. On peut néanmoins citer l'étude de Lall *et al* (1987) qui considère le cas d'une plaque simplement appuyée avec une couverture partielle. Il utilise l'approche variationnelle et la méthode de Ritz pour résoudre le système aux valeurs propres, ce qui lui permet de déduire les fréquences propres et les amortissements modaux associés à ces fréquences. Garrison *et al* (1992, 1994) étudie la réponse vibratoire d'une plaque rectangulaire avec couverture partielle soumise à une excitation aléatoire répartie sur toute la plaque. En plus des déformations de flexion, de cisaillement transversal et de membrane, Garrison prend en compte la déformation transverse de la couche viscoélastique en décomposant le déplacement transverse de cette couche sous la forme d'un polynôme du premier ordre en z . Dans ces deux études le caractère acoustique n'est pas considéré, pas plus au niveau de l'équation de mouvement de la structure qu'au niveau du rayonnement acoustique.

2.2.12 Synthèse

À la vue de cette étude bibliographique, il apparaît que les plaques recouvertes d'un traitement viscoélastique partiel et immergées dans un fluide quelconque n'ont pas fait l'objet de beaucoup d'études. Les points suivants vont servir de base à l'élaboration du modèle proposé dans ce chapitre :

- La méthode variationnelle est très générale et peut s'adapter à toutes formes de problèmes vibro-acoustique. De plus, elle facilite l'introduction d'hypothèses simplificatrices dans la formulation.
- La méthode de Rayleigh-Ritz, bien que moins modulaire que la méthode des éléments finis, permet une bonne convergence en hautes fréquences avec des temps de calcul optimum. Cela est d'autant plus vrai si on utilise une base modale (c'est à dire une base qui coïncide avec les modes naturels de la structure).

- La théorie à champ de déplacement discret pour décrire les déplacements des plaques multicouches, présente l'avantage de pouvoir utiliser des hypothèses différentes pour chaque couche de la structure (par exemple, cisaillement transversal uniquement pris en compte dans la couche viscoélastique), cela restreint la généralité de la formulation, mais permet de diminuer le nombre de degrés de liberté du système.
- Dans la mesure où on utilise la méthode de Ritz pour résoudre le problème vibratoire, il est naturel d'utiliser une méthode analytique en champ proche pour calculer le problème acoustique si on veut prendre en compte le couplage fluide-structure dans l'équation de mouvement de la structure. Une attention particulière devra être faite pour le calcul des impédances de rayonnement afin d'obtenir une formulation précise en hautes fréquences, sans instabilités numériques.

2.3 Formulation théorique

2.3.1 Description du système

Dans cette étude nous allons considérer une plaque rectangulaire comportant trois couches. La plaque de base est rectangulaire de dimensions $a \times b$, et d'épaisseur h_1 , les deux couches supérieures sont également rectangulaires de dimensions $(l_{\max}^x - l_{\min}^x) \times (l_{\max}^y - l_{\min}^y)$ et d'épaisseur h_2 pour la couche viscoélastique et h_3 pour la couche supérieure (Figure 2.3 et Figure 2.4). D'une manière générale dans ce chapitre, les indices 1, 2, 3 sont respectivement associés à la couche de base (élastique), la couche viscoélastique et la couche supérieure (élastique). Étant donné que l'on utilise le modèle à champ de déplacement indépendant, on peut définir un repère cartésien pour chaque couche. Les axes x et y sont confondus avec les bords de la plaque de base pour les trois couches et on considère les axes z_1, z_2, z_3 positionnés au milieu de chaque couche 1, 2 et 3. Si dans le calcul de l'équation de mouvement de la structure, l'épaisseur de chaque couche est prise en compte, au niveau des équations du problème acoustique on va assimiler que la plaque a une surface sans épaisseur, et est insérée dans un baffle infini et rigide dans un plan $z = 0$ (Figure 2.5).

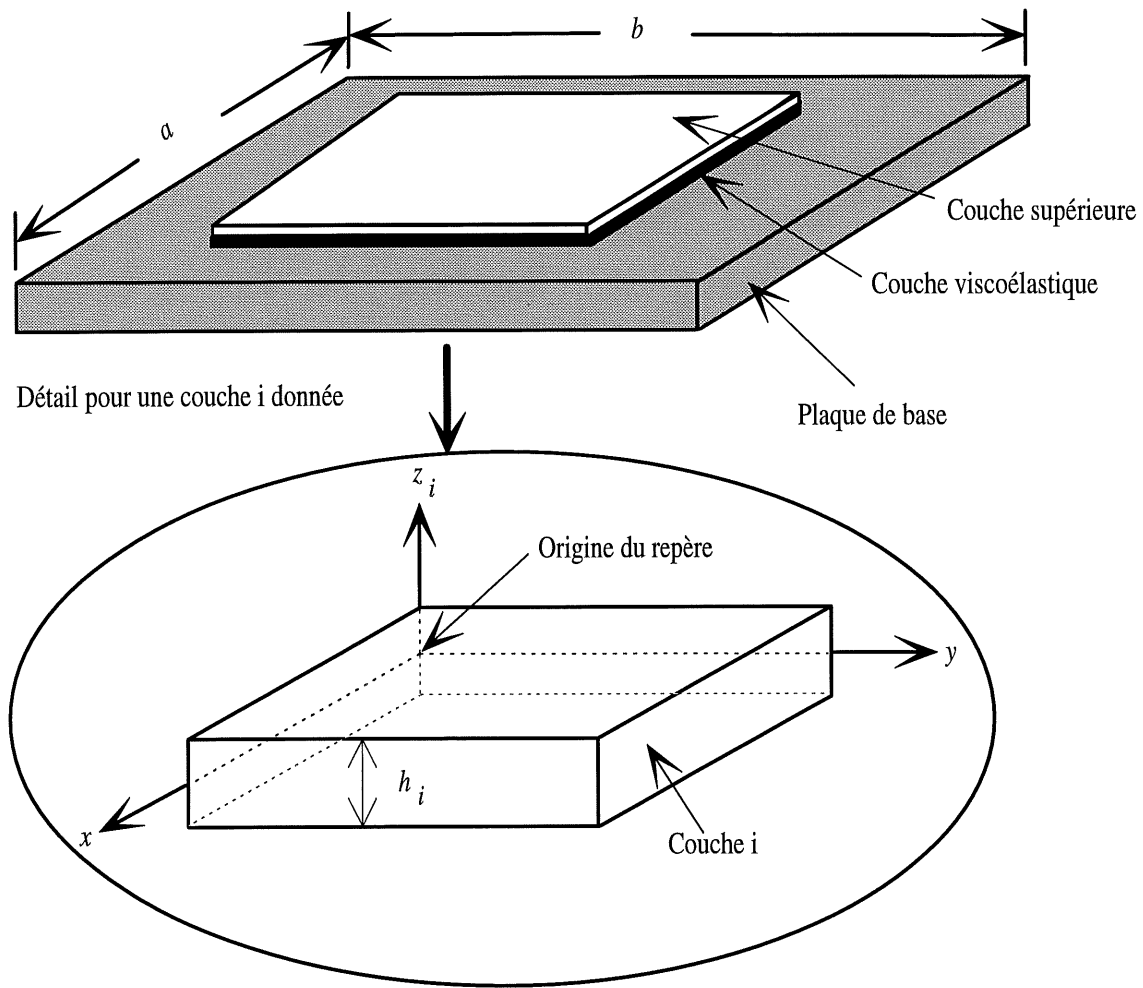


Figure 2.3 : Configuration de la plaque avec la couverture partielle.

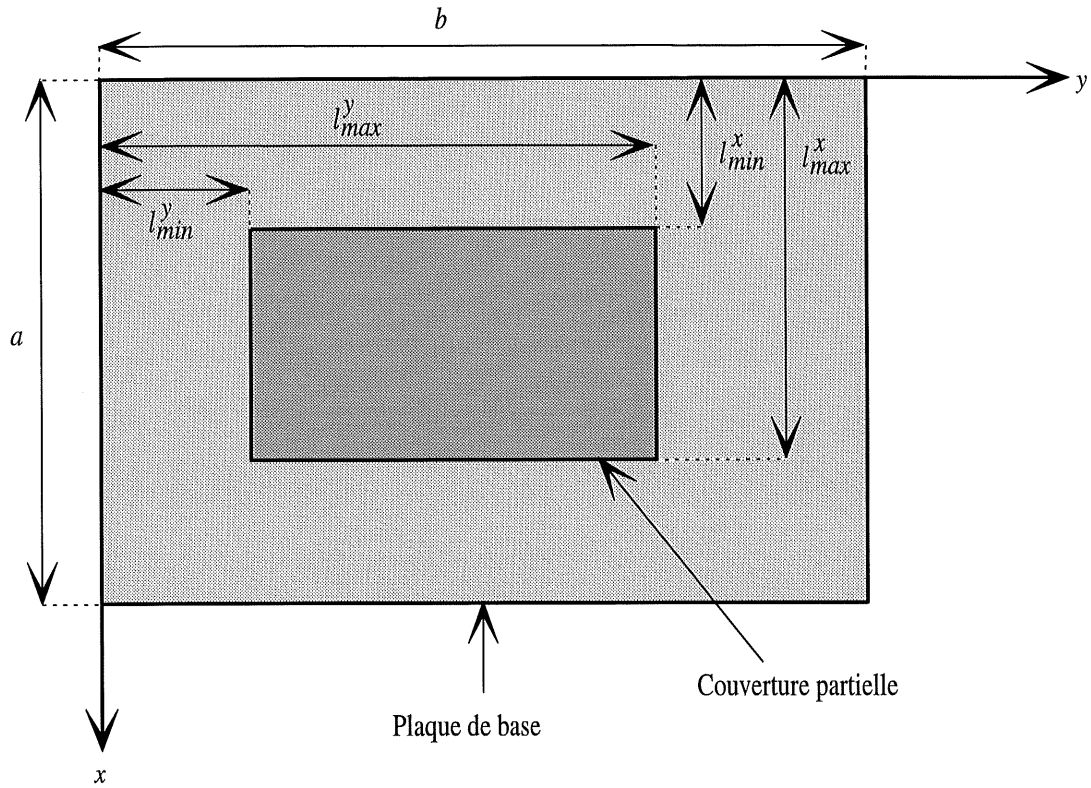


Figure 2.4 : Position de la couverture partielle sur la plaque de base (vue de dessus).

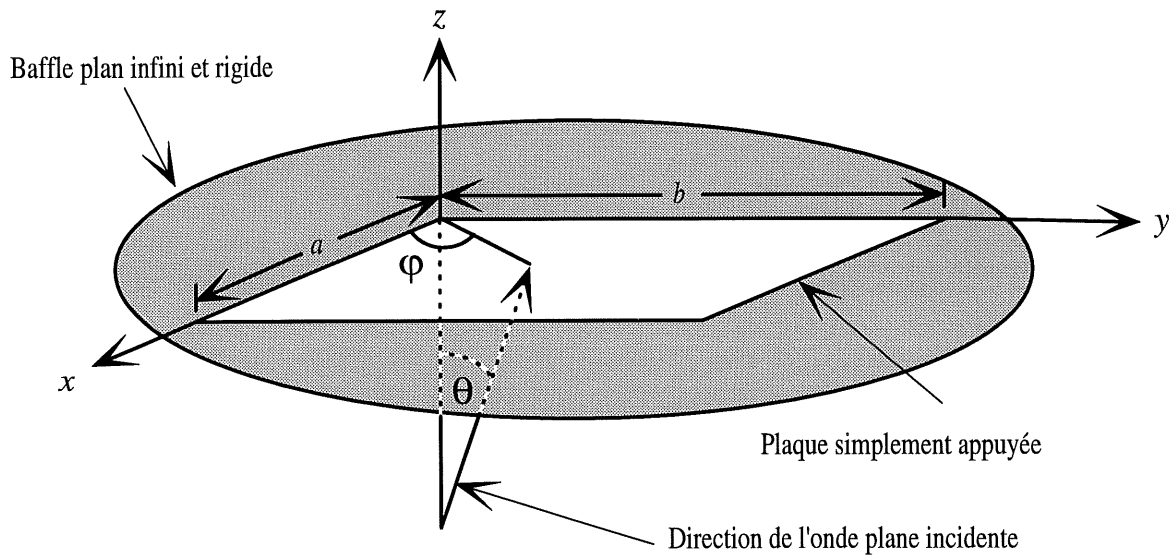


Figure 2.5 : Plaque insérée dans le baffle infini avec les directions de l'onde plane incidente.

2.3.2 Hypothèse de l'étude

Ce paragraphe présente les principales hypothèses qui ont servi de base à l'élaboration du modèle proposé dans ce chapitre.

- On considère que la liaison entre les trois couches de la plaque est parfaite, ce qui signifie qu'il ne peut y avoir aucun glissement.
- On se situe dans le domaine linéaire de l'élasticité, ce qui signifie que les contraintes sont proportionnelles aux déformations. La relation contraintes-déformations est assurée par la loi de Hooke.
- L'élasticité bidimensionnelle est considérée tout au long de cette étude, l'hypothèse des contraintes planes est admise dans toute la plaque ($\sigma_z = 0$), et on néglige également la déformation normale ($\epsilon_z = 0$).
- Étant donné que les matériaux viscoélastiques sont beaucoup moins rigides que les matériaux élastiques, les déformations de cisaillement transversal vont être prépondérantes dans la couche centrale viscoélastique. Par contre, les deux couches externes du fait de leur rigidité et de leur position dans la structure ne vont admettre pratiquement aucune déformation de cisaillement transversal. C'est pourquoi dans cette étude on néglige le cisaillement transversal dans les deux couches externes, alors qu'il est pris en compte dans la couche viscoélastique.
- Le mouvement d'extension de la structure dans le plan xy (aussi appelé traction-compression ou effet membrane) est considéré dans les trois couches de la plaque.
- Les déplacements normaux et tangentiels sont nuls sur les bords de la plaque de base. Les déplacements tangentiels sont également nuls sur les bords de la couverture partielle, mais celle-ci accepte en plus un mouvement de corps rigide dans le plan xy . Étant donné qu'on admet la continuité des déplacements à l'interface de chaque, la couche viscoélastique est contrainte à suivre les déplacements des deux couches externes.
- La prise en compte d'un phénomène de dissipation dans la structure est introduite sous la forme d'un amortissement structural. Cela consiste à remplacer le module d'Young du matériau E , par un module d'Young complexe que l'on peut noter $\tilde{E} = E(1 + j\eta)$, où η est le coefficient

d'amortissement ou facteur de perte du matériau (on peut écrire le même type de relation pour le module de cisaillement). La notion d'amortissement dans les matériaux viscoélastiques sera plus approfondie au chapitre suivant.

- La plaque est excitée soit par une force ponctuelle normale à la plaque, soit par une onde plane de direction quelconque présente dans le fluide dans la région $z < 0$ (Figure 2.5). Seul un régime stationnaire harmonique est considéré, ce qui, en utilisant une notation complexe, se traduit par une dépendance temporelle des grandeurs tel que le déplacement de la structure ou la pression acoustique en $e^{j\omega t}$.
- Le problème acoustique d'une plaque rectangulaire bafflée est résolu par la formulation intégrale, la pression acoustique sur la structure sera évaluée à l'aide de l'intégrale de Rayleigh. Les impédances de rayonnement seront calculées à l'aide d'une méthode semi-analytique proposée par Sandman (1975) et Nelisse (1995, 1996) qui permet des calculs en hautes fréquences sans problèmes d'instabilités numériques.

Dans cette section nous allons résoudre le problème vibro-acoustique d'une plaque rectangulaire, bafflée, couverte par un traitement partiel, en utilisant les hypothèses mentionnées ci-dessus. Les principales étapes du développement vont être les suivantes :

1. Définition du champ des déplacements et de la relation contraintes-déformations dans la structure.
2. Calcul des énergies du système.
3. Introduction de la formulation intégrale pour calculer le travail des forces de pression acoustique exercé sur la structure.
4. Extrémalisation de la fonctionnelle de Hamilton qui fournit l'équation de mouvement de la structure.
5. Calcul du champ acoustique rayonné par la structure.

2.3.3 Champs des déplacements

La première étape de l'approche variationnelle est la définition du champ de déplacement de la plaque. Dans cette étude on définit un champ de déplacement pour chaque couche, ces champs sont ensuite reliés en appliquant des conditions de continuité. La flexion pure (hypothèses de Love-Kirchhoff) et l'effet de traction-compression sont pris en compte dans les deux couches externes, ce qui donne un champ de déplacement du type :

$$\begin{cases} u^{(i)}(x, y, z) = u_0^{(i)}(x, y) - z_i \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ v^{(i)}(x, y, z) = v_0^{(i)}(x, y) - z_i \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ w^{(i)}(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (2.13)$$

avec $i = 1, 3$. Dans l'expression du champ de déplacement de chaque couche, l'origine de l'axe z_i est pris dans le plan médian de la couche considérée (Figure 2.3). Chaque champ de déplacement est défini dans l'épaisseur h_i de la couche i considérée.

La couche viscoélastique satisfait les hypothèses de Reissner-Mindlin, qui prennent en compte la flexion, l'effet membrane et le cisaillement transversal :

$$\begin{cases} u^{(2)}(x, y, z) = u_0^{(2)}(x, y) + z_2 \Psi_x^{(2)}(x, y) \\ v^{(2)}(x, y, z) = v_0^{(2)}(x, y) + z_2 \Psi_y^{(2)}(x, y) \\ w^{(2)}(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (2.14)$$

$u_0^{(2)}$ et $v_0^{(2)}$ sont les déplacements de traction-compression (ou membrane), et, $\Psi_x^{(2)}$ et $\Psi_y^{(2)}$ les rotations des sections droites.

- **Continuité des déplacements**

La continuité du déplacement normal w est toujours satisfaite, puisque w est constant dans toute la plaque. La continuité des déplacements latéraux (u, v) est imposée à l'interface de chaque couche. Cela permet d'exprimer les déplacements de la couche viscoélastique en fonction des déplacements des couches externes. La continuité des déplacements suivant la direction x s'exprime par :

$$\begin{cases} u^{(1)}(x, y, h_1/2) = u^{(2)}(x, y, -h_2/2) \\ u^{(2)}(x, y, h_2/2) = u^{(3)}(x, y, -h_3/2) \end{cases} \quad (2.15)$$

et la continuité des déplacements suivant l'axe y est donnée par :

$$\begin{cases} v^{(1)}(x, y, h_1/2) = v^{(2)}(x, y, -h_2/2) \\ v^{(2)}(x, y, h_2/2) = v^{(3)}(x, y, -h_3/2) \end{cases} \quad (2.16)$$

où h_1, h_2, h_3 , sont respectivement les épaisseurs des couches 1, 2, 3. En utilisant ces hypothèses de continuités on peut exprimer le champ de déplacement de la couche viscoélastique en fonction des déplacements des couches externes :

$$\begin{cases} u^{(2)}(x, y, z) = \frac{1}{h_2} \left[u_0^{(3)} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} (h_3 + h_1) - u_0^{(1)} \right] z_2 + \frac{1}{2} \left[u_0^{(3)} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} ((h_3 - h_1)) + u_0^{(1)} \right] \\ v^{(2)}(x, y, z) = \frac{1}{h_2} \left[v_0^{(3)} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} (h_3 + h_1) - v_0^{(1)} \right] z_2 + \frac{1}{2} \left[v_0^{(3)} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} ((h_3 - h_1)) + v_0^{(1)} \right] \\ w^{(2)}(x, y, z) = w(x, y) \end{cases} \quad (2.17)$$

Si on se réfère à l'équation 2.14 on remarque que le premier terme de la première ligne de l'équation 2.17 correspond à $z_2 \Psi_x^{(2)}$, que le deuxième terme de la première ligne correspond à $u_0^{(2)}$, que le premier terme de la deuxième ligne correspond à $z_2 \Psi_y^{(2)}$ et que le deuxième terme de la deuxième ligne correspond à $v_0^{(2)}$. On a ainsi exprimé le déplacement de la couche viscoélastique en fonction du déplacement des deux couches externes : $u_0^{(1)}(x, y)$, $v_0^{(1)}(x, y)$, $w(x, y)$, $u_0^{(3)}(x, y)$, $v_0^{(3)}(x, y)$. Ce qui donne en tout cinq déplacements inconnus à déterminer.

2.3.4 Champ des déformations

En élasticité linéaire, sous l'hypothèse des petites déformations, l'expression des déformations s'exprime en fonction du déplacement par la formule suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.18)$$

Pour les deux couches élastiques on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u_0^{(i)}}{\partial x} - z_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^{(i)} = \frac{\partial v_0^{(i)}}{\partial y} - z_i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_z^{(i)} = 0 \\ \gamma_{xy}^{(i)} = 2\varepsilon_{xy}^{(i)} = \frac{\partial u_0^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial v_0^{(i)}}{\partial x} - 2z_i \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz}^{(i)} = 0 \\ \gamma_{yz}^{(i)} = 0 \end{array} \right. \quad (2.19)$$

où $i = 1, 3$.

Pour la couche viscoélastique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x^{(2)} = \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} + z_3 \frac{\partial \Psi_x^{(2)}}{\partial x} \\ \varepsilon_y^{(2)} = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial y} + z_3 \frac{\partial \Psi_y^{(2)}}{\partial y} \\ \varepsilon_z^{(2)} = 0 \\ \gamma_{xy}^{(2)} = 2\varepsilon_{xy}^{(2)} = \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial x} + z_3 \left(\frac{\partial \Psi_x^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y^{(2)}}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz}^{(2)} = 2\varepsilon_{xz}^{(2)} = \Psi_x^{(2)} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz}^{(2)} = 2\varepsilon_{yz}^{(2)} = \Psi_y^{(2)} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Les déformations ε_x , ε_y et γ_{xy} sont des fonctions linéaires de z et sont continues à l'interface de chaque couche. la déformation normale ε_z est nulle dans toute la plaque. Les déformations de cisaillement transversal γ_{xz} , γ_{yz} sont constantes dans l'épaisseur de la couche viscoélastique et nulles dans les couches

élastiques. Par conséquent, il n'y a pas continuité des déformations de cisaillement transversal dans l'épaisseur de la plaque.

2.3.5 Champ des contraintes

En élasticité linéaire, on admet généralement la loi de Hooke (Jones, 1975) pour décrire le champ des contraintes en fonction du champ des déformations. Dans le cas de structures peu épaisses (plaques) on peut négliger la contrainte normale σ_z car elle est très inférieure aux autres types de contraintes (approximation des contraintes planes, Batoz-Dhatt, 1992). L'objet de ce paragraphe est d'exprimer les coefficients de la matrice d'élasticité qui relie les contraintes aux déformations. Nous allons considérer des matériaux orthotropes avec une anisotropie plane, ce qui signifie qu'ils admettent des propriétés élastiques différentes dans la direction x et dans la direction y , mais que ces propriétés élastiques ne varient pas dans l'épaisseur de la plaque (direction z). On considère également que les axes d'orthotropie du matériau sont confondus avec les axes x et y de la plaque. En considérant les hypothèses précédentes, on peut écrire la relation contraintes-déformations sous la forme découplée suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

avec $Q_{11} = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y}$, $Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} = \frac{\nu_x E_y}{1 - \nu_x \nu_y}$, $Q_{22} = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y}$, $Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G_{xy}$.

E_x , E_y sont les modules d'Young dans les directions x et y ; ν_x , ν_y sont les coefficients de Poisson dans les directions x et y . G_{xy} est le module de cisaillement, dans le cas de matériaux élastiques et orthotropes, on peut exprimer le module de cisaillement en fonction des modules d'Young E_x , E_y et des coefficients de Poisson ν_x , ν_y par la relation suivante :

$$G_{xy} = \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2(1 + \sqrt{\nu_x \nu_y})} \quad (2.23)$$

La relation $Q_{12} = Q_{21}$ implique $E_x \nu_y = E_y \nu_x$. L'équation 2.22 n'est pas définie pour les couches externes puisqu'on néglige le cisaillement transversal dans ces couches ($\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$).

2.3.6 Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un solide élastique de volume v , de densité ρ et ayant un déplacement $u(t)$ au point (x,y,z) s'écrit

$$T = \frac{1}{2} \iiint_v \rho \left(\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \right)^2 dv \quad (2.24)$$

Dans cette étude, pour le calcul de l'énergie cinétique, on ne tient compte que du déplacement normal de la plaque w . Les déplacements de membrane et les rotations sont négligés. L'énergie cinétique totale de la plaque est la somme des énergies cinétiques de chaque couche. En intégrant l'équation (3.20) sur l'épaisseur de chaque couche de la plaque, on obtient pour la plaque de base :

$$T^{(1)} = \frac{1}{2} \rho_1 h_1 \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy, \quad (2.25)$$

où a et b sont les dimensions de la plaque.

Pour la couche viscoélastique et la couche supérieure les bornes d'intégration sont définies par les limites de la couverture partielle :

$$T^{(i)} = \frac{1}{2} \rho_i h_i \int_{l_{\min}^x}^{l_{\max}^x} \int_{l_{\min}^y}^{l_{\max}^y} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy, \quad (2.26)$$

où $i = 2, 3$.

2.3.7 Énergie de déformation

L'énergie de déformation (ou énergie potentielle) d'un solide élastique est l'intégrale sur le volume du solide, du produit des déformations par les contraintes :

$$V = \frac{1}{2} \iiint_v (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz \quad (2.27)$$

Dans le cas d'une plaque multicouche, étant donné qu'on a écrit une relation contraintes-déformations pour chaque couche, on aura une énergie de déformation pour chaque couche, l'énergie de déformation totale de la structure est la somme des énergies de déformation de chaque couche.

Pour la couche de base, en intégrant l'expression 2.27 sur l'épaisseur, on obtient les expressions suivantes :

$$V_1^{(1)} = \frac{1}{2} h_1 \int_0^a \int_0^b \left[Q_{11}^{(1)} \left(\frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + Q_{22}^{(1)} \left(\frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial y} \right)^2 + 2Q_{12}^{(1)} \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial y} + Q_{44}^{(1)} \left(\frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2.28)$$

$$V_2^{(1)} = \frac{(h_1)^3}{24} \int_0^a \int_0^b \left[Q_{11}^{(1)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + Q_{22}^{(1)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2Q_{12}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4Q_{44}^{(1)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2.29)$$

où $V_1^{(1)}$ représente l'énergie de traction-compression et $V_2^{(1)}$ représente l'énergie de flexion pure. L'énergie de déformation de la couche de base est la somme de ces deux termes.

Pour la couche viscoélastique, la prise en compte du cisaillement transversal entraîne un terme de plus dans l'énergie de déformation. De plus, les bornes d'intégrations sont maintenant définies par les limites de la couverture partielle et non plus par les dimensions de la plaque de base. Une fois intégrée sur l'épaisseur, l'énergie de déformation de la couche viscoélastique s'exprime par :

$$V_1^{(2)} = \frac{1}{2} h_2 \int_{l_{\min}^x}^{l_{\max}^x} \int_{l_{\min}^y}^{l_{\max}^y} \left[Q_{11}^{(2)} \left(\frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} \right)^2 + Q_{22}^{(2)} \left(\frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial y} \right)^2 + 2Q_{12}^{(2)} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial y} + Q_{44}^{(2)} \left(\frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2.30)$$

$$V_2^{(2)} = \frac{(h_2)^3}{24} \int_{l_{\min}^x}^{l_{\max}^x} \int_{l_{\min}^y}^{l_{\max}^y} \left[Q_{11}^{(2)} \left(\frac{\partial \Psi_x^{(2)}}{\partial x} \right)^2 + Q_{22}^{(2)} \left(\frac{\partial \Psi_y^{(2)}}{\partial y} \right)^2 + 2Q_{12}^{(2)} \frac{\partial \Psi_x^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_y^{(2)}}{\partial y} + Q_{44}^{(2)} \left(\frac{\partial \Psi_x^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y^{(2)}}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2.31)$$

$$V_3^{(2)} = \frac{1}{2} h_2 \int_{l_{\min}^x}^{l_{\max}^x} \int_{l_{\min}^y}^{l_{\max}^y} \left[Q_{55}^{(2)} \left(\Psi_x^{(2)} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + Q_{66}^{(2)} \left(\Psi_y^{(2)} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2.32)$$

où $V_1^{(2)}$ représente l'énergie de traction-compression, $V_2^{(2)}$ représente l'énergie de rotation (couplage flexion-cisaillement transversal) et $V_3^{(2)}$ représente l'énergie de cisaillement transversal. L'énergie de déformation totale de la couche viscoélastique est la somme de ces trois termes.

L'énergie de déformation de la couche supérieure s'exprime de la même manière que celle de la couche de base, mais avec les bornes d'intégration définies par les limites de la couverture partielle :

$$V_1^{(3)} = \frac{1}{2} h_3 \int_{l_{\min}^x}^{l_{\max}^x} \int_{l_{\min}^y}^{l_{\max}^y} \left[Q_{11}^{(3)} \left(\frac{\partial u_0^{(3)}}{\partial x} \right)^2 + Q_{22}^{(3)} \left(\frac{\partial v_0^{(3)}}{\partial y} \right)^2 + 2Q_{12}^{(3)} \frac{\partial u_0^{(3)}}{\partial x} \frac{\partial v_0^{(3)}}{\partial y} + Q_{44}^{(3)} \left(\frac{\partial u_0^{(3)}}{\partial y} + \frac{\partial v_0^{(3)}}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2.33)$$

$$V_2^{(3)} = \frac{(h_3)^3}{24} \int_{l_{\min}^x}^{l_{\max}^x} \int_{l_{\min}^y}^{l_{\max}^y} \left[Q_{11}^{(3)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + Q_{22}^{(3)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2Q_{12}^{(3)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4Q_{44}^{(3)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2.34)$$

où $V_1^{(1)}$ représente l'énergie de traction-compression et $V_2^{(1)}$ représente l'énergie de flexion pure.

2.3.8 Travail des forces extérieures

Il existe deux types de forces agissant sur la structure : (1) les forces excitatrices (force ponctuelle et onde plane dans notre cas), et, (2) les forces de pression acoustique exercées par le fluide sur la structure quand celle-ci est mise en mouvement (charge fluide).

Le travail des forces d'excitation est exprimé par :

$$W_{excitation} = \iint_S f(x, y, 0)w(x, y)dS, \quad (2.35)$$

où S est la surface sur laquelle agit la force. Dans le cas d'une force ponctuelle d'amplitude F_0 appliquée au point de coordonnées (x_0, y_0) , on trouve :

$$W_{excitation} = F_0w(x_0, y_0). \quad (2.36)$$

Dans le cas d'une excitation par une onde plane, on considère que l'onde incidente est entièrement réfléchiée dans le milieu émetteur (hypothèse de la plaque bloquée), ce qui conduit à l'expression suivante du travail :

$$W_{excitation} = 2 \int_0^a \int_0^b P_i(x, y, 0)w(x, y)dx dy, \quad (2.37)$$

où P_i est l'onde plane incidente, qui dans le cas d'un régime harmonique s'écrit :

$$P_i(x, y, z, t) = e^{-jk_0(x \cos \varphi \sin \theta + y \sin \varphi \sin \theta - z \cos \theta)} e^{j\omega t}, \quad (2.38)$$

où k_0 est le nombre d'onde acoustique dans le fluide, $k_0 = \omega/c_0$, c_0 est la vitesse des ondes dans le fluide, θ et φ sont les angles d'incidence de l'onde plane (Figure 2.5).

- **Travail des forces de pression : discussion fluide lourd / fluide léger**

Avant de calculer la charge dû au fluide sur la plaque, il faut préciser quel type de fluide est considéré, dans la mesure où des simplifications peuvent être effectuée selon la nature du fluide. En acoustique, on considère essentiellement deux fluides dans lesquels se propagent les ondes : l'air et l'eau. Ces deux fluides sont traités comme étant adiabatiques, mais il est manifeste que l'eau (fluide lourd, masse volumique : 1000 kg/m^3) est beaucoup plus dense que l'air (fluide léger, masse volumique 1.2 kg/m^3). Cette propriété implique que le travail des forces de pression acoustique pour une structure immergée dans l'air soit beaucoup plus faible que celui de la même structure immergée dans l'eau. Ainsi, la plupart des études vibro-acoustiques qui considèrent l'air comme milieu de propagation négligent le travail des forces de pression acoustique dans le calcul de l'équation de mouvement de la structure (Lesueur, 1988,

Berry 1991). Crighton (1989) propose un critère pour savoir dans quelle mesure on peut considérer l'hypothèse des fluides légers dans le cas d'une structure plane. Soit :

$$\varepsilon = \frac{\rho_0 c_0}{\rho_s h \omega_c}, \quad (2.39)$$

où $\omega_c = c_0^2 (\rho_s h / D)^{1/2}$, ρ_0 et ρ_s sont respectivement les masses volumiques du fluide et de la structure, h est l'épaisseur de la structure et D sa rigidité de flexion. Si $\varepsilon \ll 1$, l'hypothèse des fluides légers peut être utilisée. Par exemple, pour une plaque d'acier de 1 mm d'épaisseur, dans l'air on trouve $\varepsilon = 0.0007$ et dans l'eau $\varepsilon = 0.13$.

Dans cette étude on prend en compte la charge fluide dans le domaine $z > 0$ et on néglige le travail des forces de pression acoustique pour $z < 0$. En tenant compte des hypothèses pour les fluides légers, énoncés ci-dessus, cela signifie que seul un fluide léger est admissible pour le domaine $z < 0$, alors qu'on ne fait pas d'hypothèse sur la nature du fluide dans le domaine $z > 0^*$. Le travail de la pression acoustique dans le domaine $z > 0$, s'exprime par :

$$W_{fluide} = \int_0^a \int_0^b P(x, y, 0) w(x, y) dx dy, \quad (2.40)$$

où P est la pression acoustique exercée par le fluide sur la plaque du côté $z > 0$. Le calcul de la pression pariétale P n'est pas immédiat et ne peut pas être fait de manière exacte. Pour résoudre un tel problème il faut avoir recours à la formulation intégrale, cette méthode est présentée au paragraphe suivant.

2.3.9 Pression pariétale, méthode intégrale

Dans cette section, la pression acoustique exercée par le fluide sur la plaque bafflée du côté $z > 0$, va être évaluée. On traite le cas d'une plaque rectangulaire, insérée dans un baffle infini et rigide. Cela signifie que le fluide est borné par la présence de la plaque et du baffle, mais il n'admet aucune autre frontière, on appelle souvent ce cas "espace semi-infini". Ce type de problème se rattache au cas classique du "problème extérieur" (par opposition au "problème intérieur" qui s'intéresse à la réponse

* Étant donné que dans cette étude on considère de l'air des deux côtés de la plaque, la prise en compte de la charge fluide est inutile (Valor, 1995). Néanmoins, elle est intégrée dans les équations afin d'assurer une généralité à l'étude.

acoustique dans un volume fermé). Les équations de base d'un problème vibro-acoustique sont établies dans le cas général, mais le mode de résolution est particularisé au cas traité. Un problème de rayonnement acoustique des structures est caractérisé par deux types de relations : (1) l'équation de propagation dans le fluide, et (2) les conditions aux limites.

1. Dans le cas d'un régime harmonique et en l'absence de source volumique, la pression acoustique satisfait l'équation d'Helmholtz homogène :

$$\Delta P(M) + k_0^2 P(M) = 0, \quad (2.41)$$

où $P(M)$ est la pression acoustique dans le fluide au point M de coordonnées (x,y,z) , k_0 est le nombre d'onde acoustique : $k_0 = \omega/c_0$, c_0 est la vitesse du son dans le fluide.

2. Dans cette étude on admet que la vitesse vibratoire normale de la structure est égale à la vitesse acoustique normale du fluide à l'interface plaque/fluide (condition de Neumann). Dans ce cas l'équation d'Euler peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\partial P(M)}{\partial n_M} = \rho_0 \omega^2 w(M), \quad (2.42)$$

où ρ_0 est la densité du fluide et n_M est la normale à la plaque orientée dans le sens $z > 0$.

Sur le baffle on admet également la continuité des vitesses mécanique et acoustique ce qui entraîne :

$$\left. \frac{\partial P(M)}{\partial n_M} \right|_{z=0} = 0. \quad (2.43)$$

De plus, on admet la condition de Sommerfeld, qui impose que le rayonnement acoustique soit nul à l'infini, cette condition s'écrit :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\frac{\partial P}{\partial r} - j k_0 P \right) \right] = 0. \quad (2.44)$$

où r est le rayon d'une sphère qui entoure toutes les sources.

- **Formulation intégrale**

Dans cette étude nous allons utiliser la formulation intégrale qui permet d'exprimer la pression acoustique en tout point de l'espace en fonction de la pression acoustique sur les surfaces considérées (plaque dans notre cas), de leur dérivée première et d'une fonction qui va être définie ci-dessous (la fonction de Green). Cette méthode présente l'avantage d'être très générale et de pouvoir pratiquement traiter tous les problèmes de vibro-acoustique.

La première étape de la formulation intégrale consiste à introduire une fonction G (la fonction de Green) qui satisfait l'équation d'Helmholtz et des conditions aux limites arbitraires. Il faut ensuite associer un problème esclave au problème réel, ce qui consiste à écrire l'équation d'Helmholtz en considérant une source monopolaire en un point de l'espace $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et en fonction, non plus de la pression acoustique, mais de la fonction de Green :

$$\Delta G(M) + k_0^2 G(M) = \delta(M - M_0). \quad (2.45)$$

La fonction de Green G représente la pression acoustique au point M dans le cas où il y aurait une source acoustique ponctuelle au point M_0 , dans la suite nous noterons la fonction de Green $G(M/M_0)$ pour rappeler la présence de la source au point M_0 .

Dans cette partie on ne considère pas encore le baffle autour de la plaque. On multiplie l'équation 2.41 par $G(M/M_0)$ et l'équation 2.45 par $P(M)$, puis on soustrait ces deux équations. Il faut ensuite intégrer l'expression obtenue sur un volume V décrivant une sphère centré sur la plaque. En utilisant le théorème de Green on transforme l'intégrale de volume en une intégrale de surface. Pierce (1981, p. 180 et suivantes) montre que seule l'intégrale sur la surface de la plaque est non nulle, ce qui conduit à l'intégrale de Kirchhoff-Helmholtz ou Helmholtz-Huygens :

$$P(M_0) = \iint_S \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} P(M) - \frac{\partial P(M)}{\partial n_M} G(M, M_0) dS, \quad (2.46)$$

où S est la surface de la plaque.

On introduit ici l'hypothèse du baffle. La fonction de Green doit être choisie afin de simplifier au maximum le problème, dans notre cas nous allons choisir la fonction de Green en espace semi-infini obtenue par la méthode "miroir-image" (Pierce, 1981, p. 214), qui s'écrit :

$$G(M, M_0) = \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R} + \frac{e^{-jk_0 R'}}{4\pi R'}, \quad (2.47)$$

avec $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ et $R' = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}$, cette fonction présente l'avantage d'avoir une dérivée nulle sur la structure et sur le baffle, ce qui va simplifier les équations du système :

$$\left. \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} \right|_{z=0} = 0. \quad (2.48)$$

En utilisant l'équation et 2.48, on se ramène à l'intégrale de Rayleigh (Pierce, 1981, p. 214) :

$$P(M_0) = - \iint_S \frac{\partial P(M)}{\partial n_M} G(M, M_0) dS, \quad (2.49)$$

Cette équation exprime la pression acoustique en tout point M_0 de l'espace en fonction de la dérivée première de la pression acoustique et de la fonction de Green.

Finalement, l'équation 2.42 permet d'exprimer la pression acoustique en tout point de l'espace, et donc en particulier sur la plaque, en fonction du déplacement de la structure :

$$P(M_0) = -\rho_0 \omega^2 \iint_S w(M) G(M, M_0) dS. \quad (2.50)$$

Cette dernière équation permet d'exprimer le travail des forces de pression en fonction du déplacement de la structure :

$$W_{fluide} = -\omega^2 \rho_0 \iint_S \iint_S w(M_0) G(M, M_0) w(M) dS dS. \quad (2.51)$$

2.3.10 Choix des fonctions tests, conditions aux limites

Afin de résoudre complètement le problème vibro-acoustique de ce chapitre, il faut maintenant choisir les fonctions tests utilisées par les cinq déplacements inconnus du système. Il faut que ces fonctions tests

vérifient les conditions aux limites cinématiques et qu'elles soient suffisamment régulières pour que les différentes intégrales d'énergies puissent être calculées. Les cinq déplacements sont :

- Le déplacement transverse de la plaque, w ,
- Le déplacement de traction-compression de la couche de base dans la direction x , $u_0^{(1)}$,
- Le déplacement de traction-compression de la couche de base dans la direction y , $v_0^{(1)}$,
- Le déplacement de traction-compression de la couche supérieure dans la direction x , $u_0^{(3)}$,
- Le déplacement de traction-compression de la couche supérieure dans la direction y , $v_0^{(3)}$.

Contrairement à la méthode des éléments finis qui utilise des polynômes de bas ordres pour décrire le déplacement d'une petite partie du système, la méthode de Ritz implique de prendre une base de fonctions qui décrivent le déplacement de l'ensemble de la structure. Dans cette étude deux critères ont principalement prévalu dans le choix des fonctions tests :

- Le premier était de pouvoir obtenir des résultats en hautes fréquences, ce qui signifie la prise en compte des modes de hauts ordres dans la réponse de la structure. Pour cela une base qui converge rapidement et sans instabilités numériques est requise.
- Le deuxième critère était la simplicité de la formulation obtenue, car le calcul des intégrales qui composent l'énergie de déformation peut devenir très lourd si la base n'est pas judicieusement choisie.

Les principales bases de fonctions tests proposées dans la littérature sont brièvement décrites ci-dessous. On peut dégager essentiellement deux familles de fonctions : les bases qui utilisent des fonctions trigonométriques et les bases qui utilisent des polynômes.

- **Fonctions de base polynomiales**

Berry (1991) a proposé une base polynomiale capable de prendre en compte des conditions aux limites quelconques, cette base présente l'avantage d'être très générale et de s'adapter à tous les cas de figure. Néanmoins, des problèmes de divergence dus à des instabilités numériques apparaissent en hautes fréquences.

Bardell (1989) a proposé une base polynomiale utilisant les polynômes de Rodrigue, qui sont une forme des fonctions de Legendre. Il définit une série de polynômes pour les déplacements de flexion et une autre série pour les déplacements de traction-compression. Cette base permet de prendre en compte n'importe quelle combinaison des trois conditions aux limites classiques : libre, simplement appuyée et encastrée ; et les deux conditions aux limites possibles pour les déplacements de traction-compression : libre ou bloqué. Cette base présente une bonne stabilité en hautes fréquences, malheureusement elle n'est pas orthogonale, ce qui aurait pour conséquence de compliquer beaucoup l'expression de l'énergie de déformation dans notre cas.

Un des désavantages des bases polynomiales provient du fait que la dérivée d'un polynôme de degré n donne un polynôme de degré $n-1$, ce qui signifie qu'on perd de la précision en dérivant un polynôme (au lieu d'avoir n degré de liberté on n'a en plus que $n-1$). On n'a pas ce problème avec une base trigonométrique, puisque la dérivée d'un sinus donne un cosinus (et vice versa), ce qui n'entraîne pas de perte de précision lors du passage à la dérivée.

- **Fonctions de base trigonométriques**

Beaucoup de modèles utilisent des bases trigonométriques pour décrire le déplacement des plaques multicouches (voir par exemple, Rao, 1973, Guyader, 1977, Whitney, 1987). Ces bases ne permettent en général pas de considérer des conditions aux limites quelconques. Beaucoup de ces modèles sont dédiés à des conditions aux limites d'appui simple qui considère un déplacement normal nul sur les bords. Les modèles qui prennent en compte les déplacements de traction-compression dans la plaque doivent également imposer une condition aux limites pour ces déplacements. Guyader (1977) et Whitney (1987) imposent un déplacement tangentiel nul sur les bords, ce qui permet d'utiliser une base constituée d'une alternance *cosinus / sinus* qui simplifie beaucoup le calcul de l'énergie de déformation.

Récemment, Beslin (1997) a proposé une base qui utilise des fonctions trigonométriques et permet de prendre en compte le même type de condition aux limites que la base de Bardell pour la flexion. L'avantage de cette base est d'être modulaire (plusieurs choix de conditions aux limites), tout en présentant une meilleure convergence en hautes fréquences que la base de Bardell.

- Cas d'une plaque avec couverture partielle

Les modèles présentés ci-dessus sont généraux et n'ont pas été appliqués dans le cas de structure avec une couverture partielle. Les modèles présentés ci-dessous ont été utilisés dans le cas de poutres ou de plaques surmontées d'un traitement viscoélastique avec une couverture partielle.

Lall *et al* (1987) présente un modèle pour plaques avec couverture partielle, il utilise la base classique pour l'appui simple pour le déplacement transverse de la plaque : $\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)$, et la base trigonométrique suivante pour les déplacements de traction-compression de la couche supérieure :

$$\begin{cases} u_0^{(3)} = C_1 + D_{mn} \cos\left(\frac{m\pi(x - l_{\min}^x)}{l_{\max}^x - l_{\min}^x}\right) \sin\left(\frac{m\pi(x - l_{\min}^x)}{l_{\max}^x - l_{\min}^x}\right) \\ v_0^{(3)} = C_2 + E_{mn} \sin\left(\frac{m\pi(x - l_{\min}^x)}{l_{\max}^x - l_{\min}^x}\right) \cos\left(\frac{m\pi(x - l_{\min}^x)}{l_{\max}^x - l_{\min}^x}\right) \end{cases} \quad (2.52)$$

où C_1 et C_2 représentent un déplacement de type mode rigide, D_{mn} et E_{mn} sont les amplitudes du déplacement associé au mode m,n . Ce type de base implique un déplacement tangentiel nul sur les bords de la couverture partielle. Pour simplifier sa formulation Lall n'envisage la présence que d'un seul mode m,n de structure, ce qui limite beaucoup les applications.

Garrison *et al* (1994, 1992) utilisent la même base pour décrire le mouvement de traction-compression de la couche de base et celui de la couche supérieure :

$$\begin{cases} u_0^{(3)} = \sum_{m,n} D_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ v_0^{(3)} = \sum_{m,n} E_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{cases} \quad (2.53)$$

Cette base n'impose pas le déplacement tangentiel nul sur les bords de la couverture, par contre elle complique beaucoup l'expression de l'énergie de déformation.

Foin (1995) et Marcotte (1998) ont utilisé la base définie par Bardell (1989) dans le cas d'une poutre avec une couverture partielle. Néanmoins, une telle base appliquée au cas d'une plaque avec couverture partielle entraînerait une formulation très lourde.

- **Base proposée pour cette étude**

Dans cette étude nous allons utiliser une base constituée de fonctions trigonométriques qui va permettre de calculer la réponse de la structure en hautes fréquences tout en conservant une formulation assez légère. Pour la plaque de base on utilise la condition aux limites d'appui simple* telle que définies par Whitney (1987) et Guyader (1977), et qui consiste à annuler le déplacement transverse et les déplacements tangentiels sur les bords de la structure, ce qui s'écrit :

$$\text{pour } x = 0 \text{ et } x = a : w(x, y) = v_0^{(1)}(x, y) = 0, \quad (2.54)$$

$$\text{pour } y = 0 \text{ et } y = b : w(x, y) = u_0^{(1)}(x, y) = 0. \quad (2.55)$$

Guyader (1977) montre que ces conditions géométriques assurent la nullité de la force résultante et du moment résultant dus aux contraintes normales sur les bords.

Appliquer le même type de conditions aux limites pour la couche supérieure impliquerait que l'on bloque le déplacement des quatre angles de la couverture partielle. Or, il n'y a aucune raison pour que ces quatre angles soient immobiles. Pour éviter ce problème nous allons utiliser les hypothèses de Lall *et al* qui consistent à rajouter un mouvement de corps rigide à la couverture partielle, ce qui donne les conditions aux limites suivantes :

$$\text{pour } x = l_{\min}^x \text{ et } x = l_{\max}^x : u_0^{(3)}(x, y) = C_1 \text{ et } v_0^{(3)}(x, y) = C_2, \quad (2.56)$$

$$\text{pour } y = l_{\min}^y \text{ et } y = l_{\max}^y : u_0^{(3)}(x, y) = C_1 \text{ et } v_0^{(3)}(x, y) = C_2. \quad (2.57)$$

Ces conditions assurent également la nullité de la force résultante et du moment résultant dus aux contraintes normales sur les bords de la couverture partielle. La Figure 2.6 résume les conditions aux limites utilisées dans notre modèle.

Les conditions aux limites énoncées ci-dessus conduisent (voir Guyader, 1977 et Whitney, 1987) à l'expression des cinq déplacements du système :

* En toute rigueur, ces conditions ne devraient pas être appelées appui simple, car elle font intervenir des hypothèses sur les déplacements de membrane.

$$\left\{ \begin{aligned}
 w(x, y) &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \\
 u_0^{(1)}(x, y) &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N B_{mn} \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \\
 v_0^{(1)}(x, y) &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N C_{mn} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \\
 u_0^{(3)}(x, y) &= C_1 + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N D_{mn} \cos\left(\frac{m\pi(x - l_{\min}^x)}{l_{\max}^x - l_{\min}^x}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y - l_{\min}^y)}{l_{\max}^y - l_{\min}^y}\right) \\
 v_0^{(3)}(x, y) &= C_2 + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N E_{mn} \sin\left(\frac{m\pi(x - l_{\min}^x)}{l_{\max}^x - l_{\min}^x}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y - l_{\min}^y)}{l_{\max}^y - l_{\min}^y}\right)
 \end{aligned} \right. \quad (2.58)$$

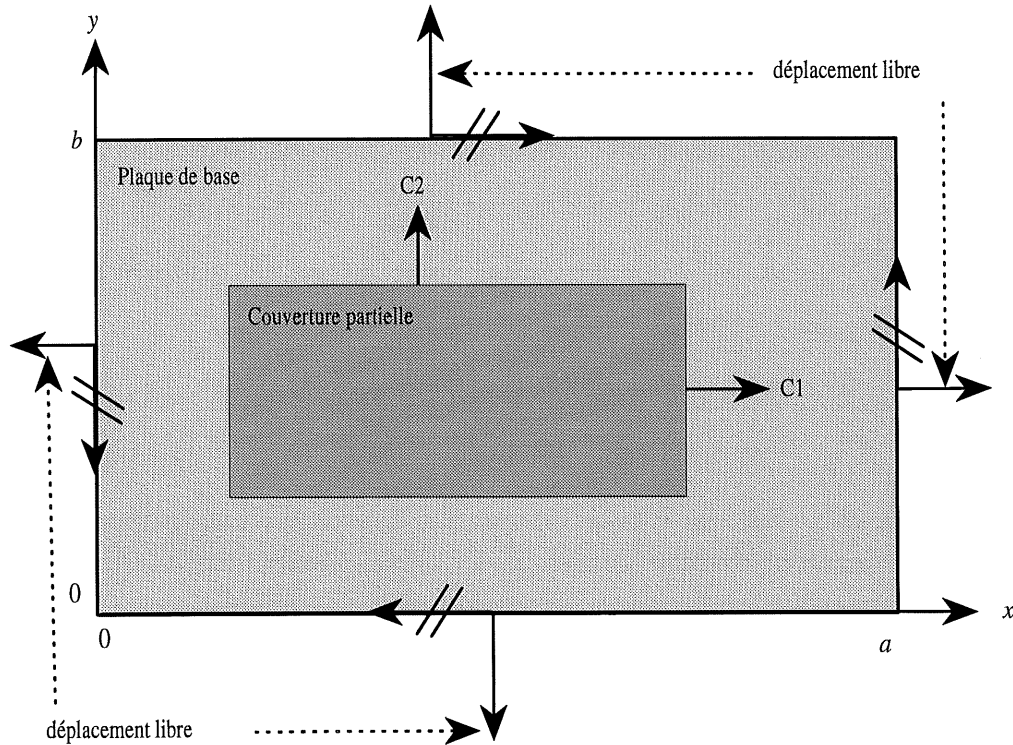


Figure 2.6 : Résumé des conditions aux limites de la plaque avec la couverture partielle. Les deux barres obliques (//) indiquent des déplacements interdits. La couverture partielle admet les mêmes conditions aux limites que la plaque de base avec, en plus, les déplacements C1 et C2.

2.3.11 Extrémalisation de la fonctionnelle de Hamilton

À partir de la définition des énergies du système on peut extrémaliser la fonctionnelle de Hamilton, ce qui s'écrit $\delta H = 0$. Cette condition s'exprime par les équations de Lagrange pour chaque coordonnée généralisée $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}, C_1, C_2$ et permet d'obtenir l'équation de mouvement de la plaque :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{A}_{mn}} + \frac{\partial V}{\partial A_{mn}} = \frac{\partial W_{excitation}}{\partial A_{mn}} + \frac{\partial W_{fluide}}{\partial A_{mn}} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{B}_{mn}} + \frac{\partial V}{\partial B_{mn}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{C}_{mn}} + \frac{\partial V}{\partial C_{mn}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{D}_{mn}} + \frac{\partial V}{\partial D_{mn}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{E}_{mn}} + \frac{\partial V}{\partial E_{mn}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{C}_1} + \frac{\partial V}{\partial C_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{C}_2} + \frac{\partial V}{\partial C_2} = 0 \end{array} \right. \quad \forall (m, n) \in [1, \dots, N]^2 \quad (2.59)$$

On peut écrire ces équations sous une forme matricielle contractée :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} - \{P\} \quad (2.60)$$

où $\langle X \rangle = \langle A_{mn} \ B_{mn} \ C_{mn} \ D_{mn} \ E_{mn} \ C_1 \ C_2 \rangle$, $[M]$ est la matrice de masse, $[K]$ est la matrice de rigidité, $\{F\}$ le vecteur des forces extérieures généralisées, et $\{P\}$ la charge fluide.

Dans le paragraphe 2.3.2, on a introduit l'hypothèse d'une dépendance temporelle harmonique de l'excitation en $e^{j\omega t}$, on peut donc réécrire l'équation de mouvement de la structure sous la forme d'un système linéaire en fonction de la fréquence :

$$(-\omega^2[M] + [K])\{X\} = \{f_{mn}\} - j\omega[Z]\{X\}, \quad (2.61)$$

où $\{f_{mn}\}$ est le vecteur des forces généralisées, il est exprimée à l'Annexe A dans le cas d'une onde plane. La matrice $[Z]$ est la matrice des impédances de rayonnement, définie au paragraphe suivant.

2.3.12 Impédance de rayonnement

Si on exprime le travail des forces extérieures en fonction de l'amplitude du déplacement transverse de la plaque A_{mn} on trouve :

$$W_{fluide} = -\omega^2 \rho_0 \iint_S \iint_S w(M_0) G(M, M_0) w(M) dS dS = j\omega \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N (A_{mn} Z_{mnpq} A_{pq}), \quad (2.62)$$

où Z_{mnpq} sont les coefficients de la matrice des impédances de rayonnement, définis par :

$$Z_{mnpq} = j\rho_0 \omega \iint_S \iint_S \sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) G(x, y / x_0, y_0) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dx dy dx_0 dy_0. \quad (2.63)$$

Ces termes présentent une singularité quand x est confondu avec x_0 , et y avec y_0 , car dans ce cas la fonction de Green n'est pas définie. Pour calculer ces termes, nous allons utiliser la méthode semi-numérique proposée par Sandman (1975) et Nelisse (1996), qui présente l'avantage d'éliminer le problème de la singularité tout en offrant une bonne stabilité numérique en hautes fréquences. Cette méthode est détaillée en Annexe B.

2.3.13 Amortissement de la plaque

L'amortissement de chaque couche de la plaque est introduit sous la forme d'un amortissement structural. Cet amortissement s'applique au niveau du module d'Young et du module de cisaillement de chaque couche i , par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{(i)} &= E^{(i)} (1 + j\eta^{(i)}) \\ \tilde{G}^{(i)} &= G^{(i)} (1 + j\eta^{(i)}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

$\tilde{E}^{(i)}$ est le module d'Young complexe et $E^{(i)}$ est sa partie réelle, $\eta^{(i)}$ est le coefficient d'amortissement ou facteur de perte de la couche i , il traduit la perte d'énergie d'une structure soumise à des déformations.

Étant donné que le coefficient d'amortissement des matériaux viscoélastiques varie en fonction de la fréquence, la matrice de rigidité sera recalculée à chaque fréquence.

2.4 Indicateurs vibro-acoustiques

La pression acoustique rayonnée par la plaque a été calculée à l'équation 2.50, mais étant donné que c 'est un paramètre qui varie beaucoup en fonction du temps et de l'espace, on s'intéresse la plupart du temps à des grandeurs intégrées sur le temps et l'espace. L'intensité acoustique est le produit de la pression acoustique et de la vitesse acoustique en un point donné de l'espace et en un instant donné. Dans le cas d'un régime harmonique, on calcule l'intensité acoustique moyennée sur une période $T = 2\pi/\omega$. Ainsi, l'intensité acoustique normale à la surface de la plaque est donnée par :

$$I_n(M_0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [P(M_0) V_n^*(M_0)], \quad (2.65)$$

où $V_n^*(M_0)$ est le conjugué de la vitesse acoustique normale.

La puissance acoustique rayonnée par une structure est la moyenne spatiale de l'intensité acoustique normale. La vitesse acoustique est nulle sur le baffle, par conséquent il en est de même pour l'intensité acoustique. Étant donné que sur la plaque les vitesses mécanique et acoustique normales sont égales $V_n^*(M_0) = -j\omega w(M_0)$, on peut écrire la puissance acoustique rayonnée en fonction du déplacement de la structure de la manière suivante :

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \operatorname{Re} [P(M_0) (-j\omega) w(M_0)] dS, \quad (2.66)$$

En utilisant l'intégrale de Rayleigh (équation 2.49), on peut exprimer la puissance rayonnée en fonction des amplitudes du déplacement normal A_{mn} et de la partie réelle des impédances de rayonnement $\operatorname{Re}[Z_{mnpq}]$:

$$W = \frac{\omega^2}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N [A_{mn} \operatorname{Re}[Z_{mnpq}] A_{pq}^*]. \quad (2.67)$$

Pour caractériser l'état vibratoire de la plaque, on peut définir la vitesse quadratique moyenne qui correspond à une moyenne spatiale et temporelle du module au carré de la vitesse vibratoire :

$$\langle V \rangle^2 = \frac{1}{T} \frac{1}{S} \int_0^T \iint_S \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right|^2 dt dS. \quad (2.68)$$

Dans le cas d'un régime harmonique, on obtient :

$$\frac{\omega^2}{2S} \iint_S |w(x, y)|^2 dS = \frac{\omega^2}{8} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |A_{mn}|^2. \quad (2.69)$$

Le facteur de rayonnement (ou efficacité de rayonnement) est un indicateur qui permet de traduire le transfert d'énergie entre les vibrations de la plaque et la puissance acoustique rayonnée par celle-ci. Une efficacité de rayonnement élevée indique qu'une part importante de l'énergie vibratoire est transformée en rayonnement acoustique, au contraire une efficacité de rayonnement faible, indique que l'énergie vibratoire n'est pas rayonnée sous forme acoustique. L'efficacité de rayonnement est définie de la manière suivante :

$$\sigma = \frac{W}{\rho_0 c_0 S \langle V \rangle^2} \quad (2.70)$$

ρ_0 est la densité du fluide, c_0 la vitesse du son dans le fluide, W la puissance acoustique rayonnée par la structure, S la surface de la plaque et $\langle V \rangle^2$ la vitesse quadratique.

Pour une structure plane le facteur de rayonnement est assez faible en dessous de la fréquence critique (zone de court-circuit acoustique), puis il passe par un maximum à la fréquence critique pour se stabiliser autour de un au-delà de cette fréquence. La fréquence critique est caractérisé par l'égalité des longueurs d'onde acoustique et mécanique. Pour une structure de dimensions finies, on définira plutôt une région critique étant donné que les longueurs d'onde mécanique sont discrètes et ne peuvent pas prendre n'importe quelle valeur (voir Atalla & Nicolas, 1994).

2.5 Validation du modèle

Le code informatique créé à partir de l'étude théorique présentée dans ce chapitre a fait l'objet de plusieurs validations expérimentales. La première va consister à mesurer la réponse vibratoire d'une plaque en fibre de verre avec couverture partielle constituée du matériau viscoélastique ISD 112 (3M) et d'une couche d'acier. La deuxième validation consiste à mesurer la puissance acoustique rayonnée par une plaque bafflée en aluminium avec une méthode d'intensimétrie et de la comparer aux résultats donnés par la formulation théorique.

2.5.1 Réponse vibratoire d'une plaque avec un traitement viscoélastique partiel

Dans ce paragraphe, on compare la vitesse quadratique moyenne calculée avec le code de calcul créé à partir de l'étude théorique de ce chapitre, avec une mesure.

On considère une plaque de base en fibre de verre (Mercier 1995 et Tableau 2.2), la couverture partielle est constituée d'une couche viscoélastique (matériau ISD 112 : Tableaux 2.3 et 2.4). Les propriétés mécaniques des matériaux viscoélastiques varient en fonction de la température et de la fréquence, c'est pourquoi nous donnons ici un tableau en fonction de la fréquence à la température de 25 °C (données 3M). La couche supérieure est en acier (Tableau 2.5). Les dimensions et la position de la couverture partielle sont présentées à la Figure 2.7. La condition d'appui simple a été obtenue en collant la plaque sur de fines lamelles de métal qui empêchent le déplacement transverse de la plaque, mais qui autorise des rotations libres (Figure 2.8). La plaque est mise en mouvement par un pot vibrant qui génère un bruit blanc dans la bande de fréquence 0-3200 Hz. Ce pot vibrant est fixé sur la plaque de base. Deux cas sont étudiés, (1) le pot vibrant est positionné au point de coordonnées $x_0 = 0.08$ m et $y_0 = 0.07$ m, et (2) le pot vibrant est positionné au point de coordonnées $x_0 = 0.4$ m et $y_0 = 0.35$ m. La réponse vibratoire de la plaque est mesurée à l'aide d'un accéléromètre en 224 points uniformément répartis sur la surface de la plaque. Le montage expérimental est décrit à la Figure 2.9. La vitesse quadratique expérimentale est exprimée de la manière suivante :

$$\langle V^2 \rangle = \frac{1}{\omega^2 N} \sum_{i=1}^N |H(x_i, y_i)|^2, \quad (2.71)$$

où $H(x_i, y_i)$ est la fonction de transfert entre l'accélération mesurée au point de coordonnées (x_i, y_i) et la force injectée au système. Ce résultat est directement comparable à celui de l'équation 2.69. Il faut néanmoins noter que l'équation 2.69 utilise une intégrale continue, alors que dans la mesure nous avons discrétisé le système. Les résultats trouvés montrent que cette approximation est satisfaisante.

Tableau 2.2 : Caractéristiques de la plaque de base en fibre de verre.

Longueur (m)	Largeur (m)	Épaisseur (mm)	Masse volumique (kg/m ³)	Module d'Young (Pa)	Coefficient d'amortissement	Coefficient de Poisson
0.48	0.42	6.44	1350	8.3×10^9	0.01	0.26

Tableau 2.3 : Caractéristiques du matériau viscoélastique ISD 112.

Épaisseur (mm)	Masse volumique (kg/m ³)	Coefficient de Poisson
0.25	1015	0.45

Tableau 2.4 : Caractéristiques du module d'Young et du coefficient d'amortissement du matériau ISD 112 en fonction de la fréquence à une température de 25 °C.

Fréquence (Hz)	Module de cisaillement (Pa)	Module d'Young (Pa)	Coefficient d'amortissement
10	2.8×10^5	8.12×10^5	0.9
100	9×10^5	2.61×10^6	1
500	2×10^6	5.8×10^6	1
1000	2.8×10^6	8.12×10^6	0.9
2000	3.8×10^6	1.1×10^7	0.8
3000	4.5×10^6	1.3×10^7	0.75
4000	5.3×10^6	1.53×10^7	0.7

Tableau 2.5 : Caractéristiques de la couche supérieure en acier.

Épaisseur (mm)	Masse volumique (kg/m ³)	Module d'Young (Pa)	Coefficient d'amortissement	Coefficient de Poisson
0.25	7900	1.9×10^{11}	0.001	0.33

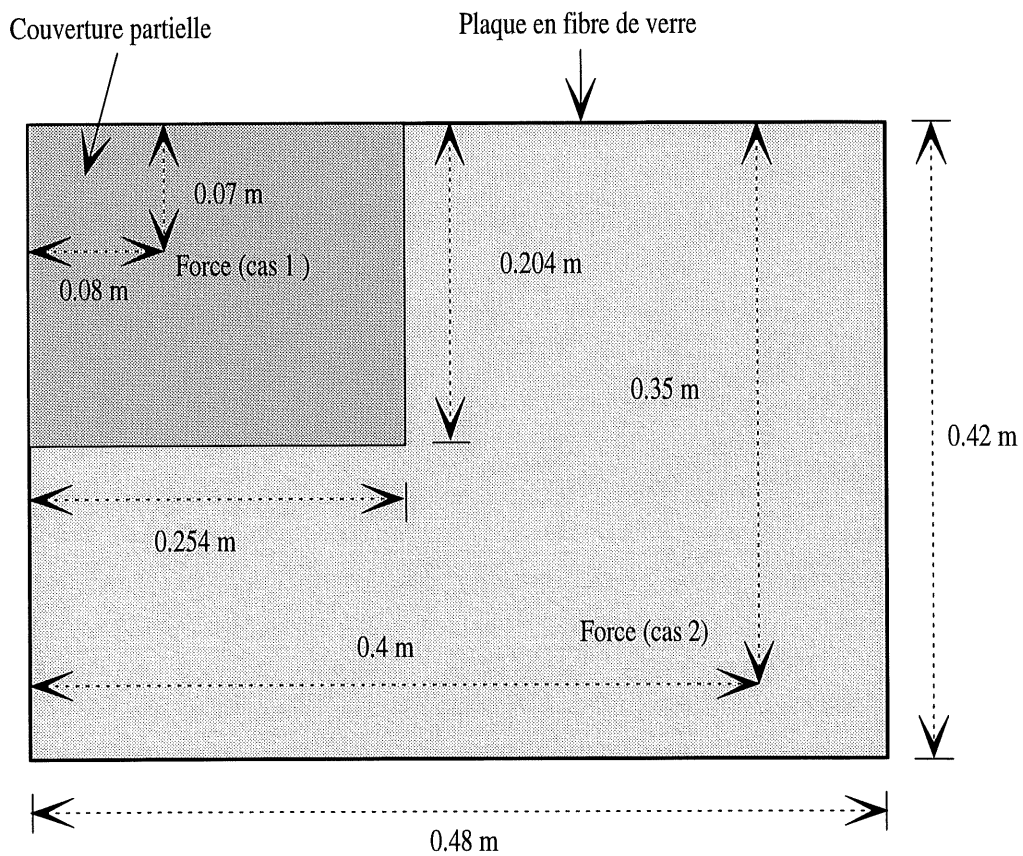


Figure 2.7 : Configuration de la plaque expérimentale avec la couverture partielle et la position de la force.

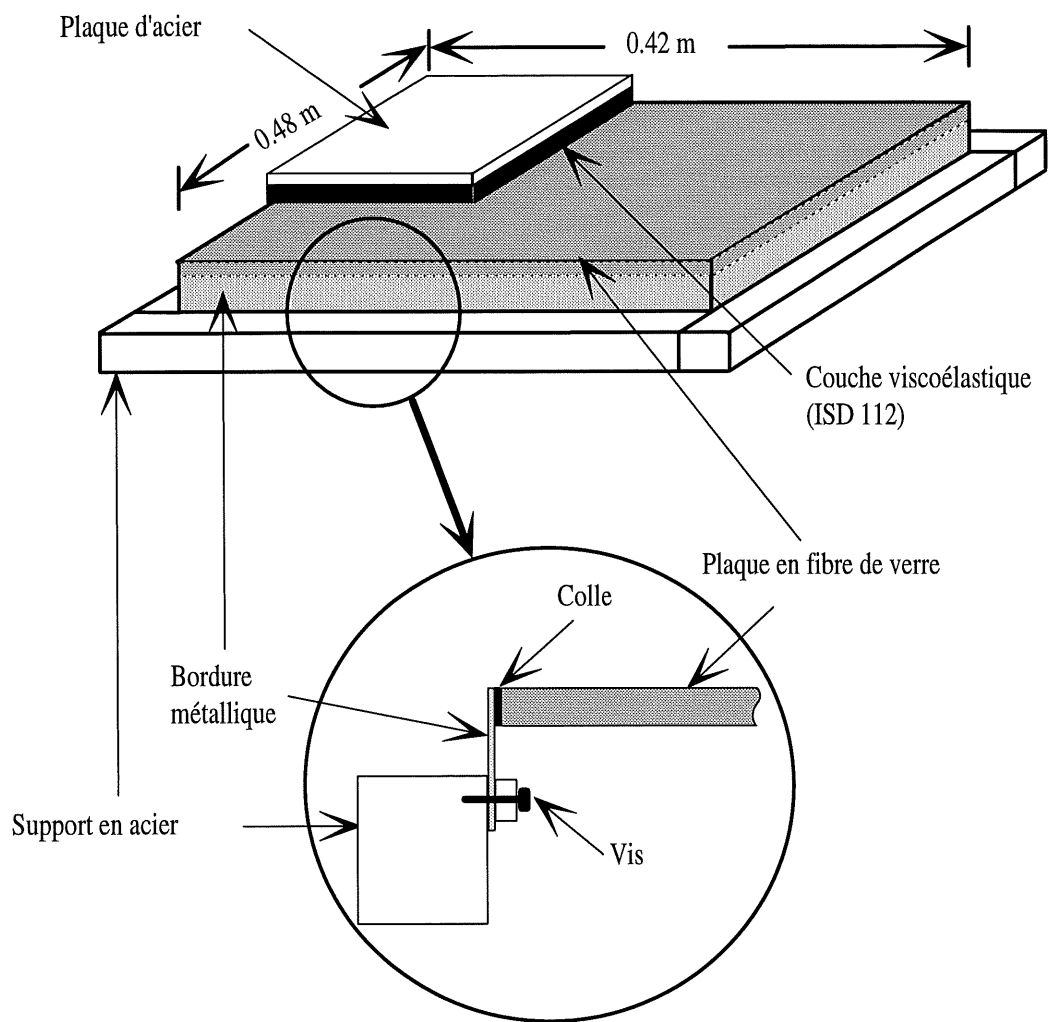


Figure 2.8 : Configuration de la plaque expérimentale avec son mode de fixation sur le support.

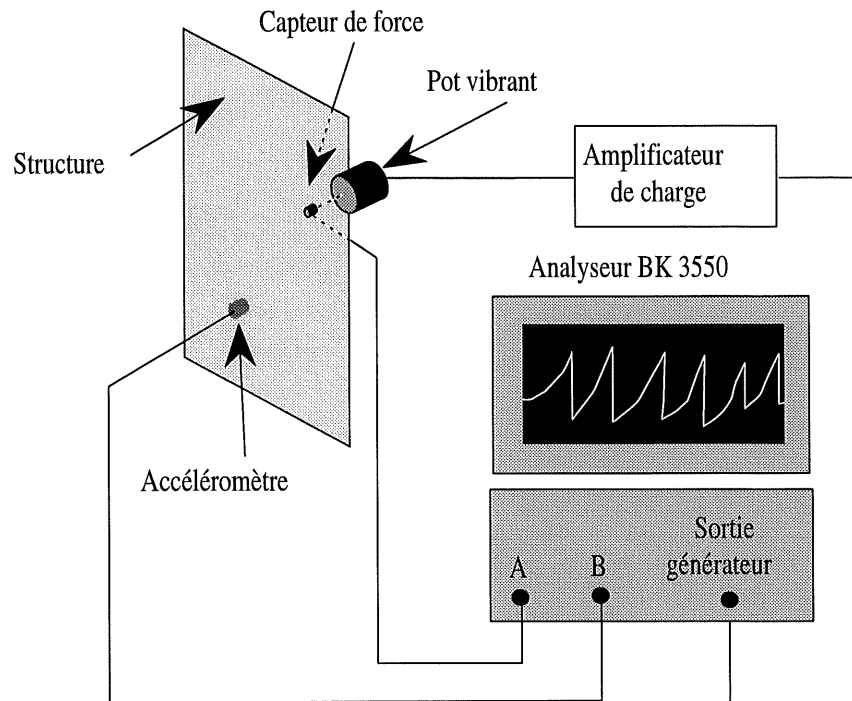


Figure 2.9 : Description du montage expérimental utilisé pour mesurer la réponse vibratoire d'une plaque.

Quand on considère le cas où la force est au-dessus de la couverture partielle (Figure 2.10), la comparaison théorie-expérience est très satisfaisante en dessous de 2000 Hz, par contre au-dessus de 2000 Hz les deux courbes divergent. La raison de cette divergence n'a pas pu être établie. Dans le cas où la force est en-dehors de la couverture (Figure 2.11), la comparaison théorie-expérience est très satisfaisante sur toute la plage fréquentielle. On remarque néanmoins des dédoublements de pics dans la courbe expérimentale qui n'apparaissent pas dans les calculs théoriques. Ces deux tests permettent de confirmer la validité du modèle théorique développé dans ce chapitre.

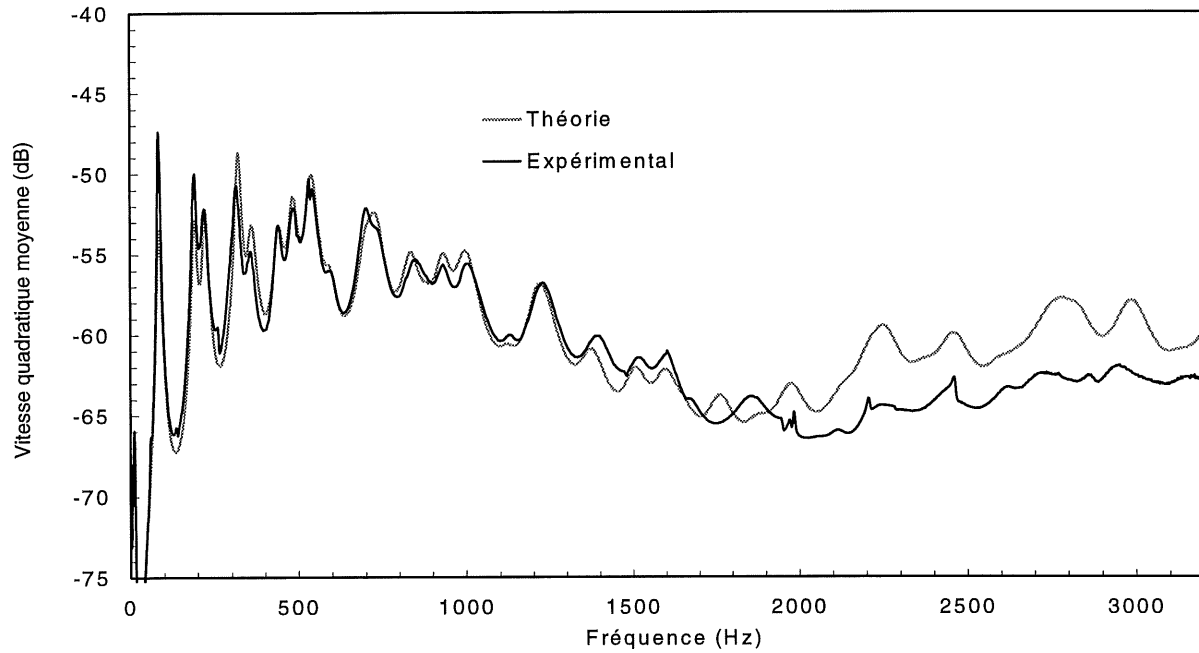


Figure 2.10 : Comparaison théorie-expérience pour une plaque de fibre de verre couverte par un traitement viscoélastique contraint (la force est au point $x_0 = 0.08$ m, $y_0 = 0.07$ m).

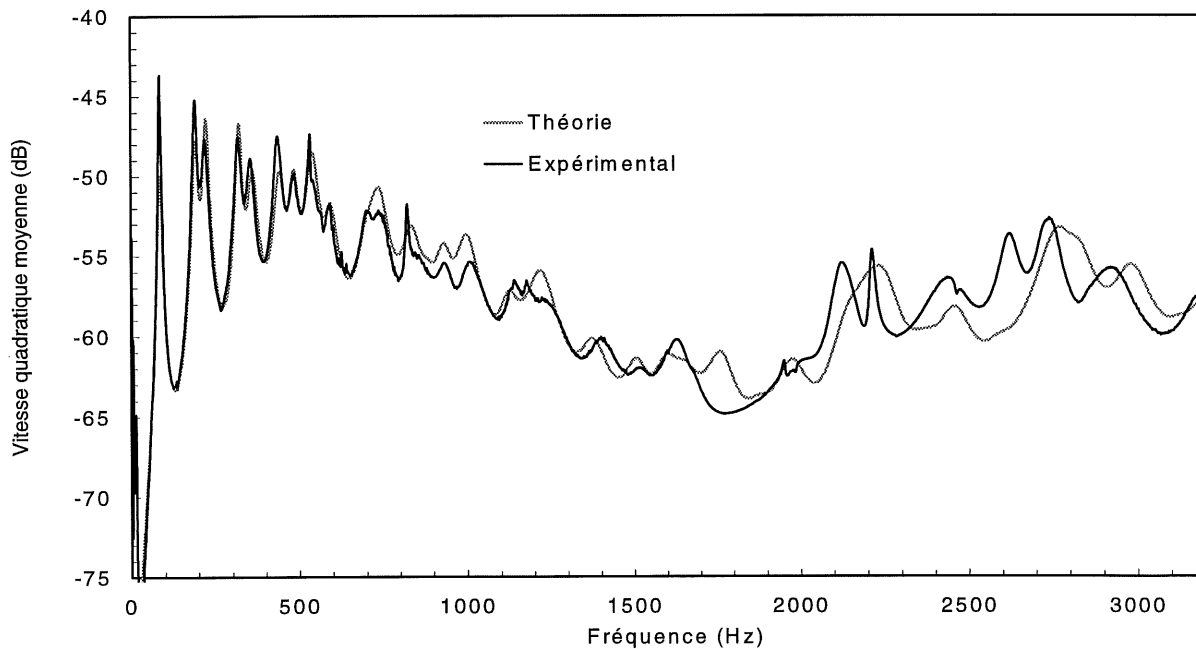


Figure 2.11 : Comparaison théorie-expérience pour une plaque de fibre de verre couverte par un traitement viscoélastique contraint (la force est au point $x_0 = 0.4$ m, $y_0 = 0.35$ m).

2.5.2 Réponse acoustique d'une structure bafflée

Afin de valider le calcul du champ acoustique rayonné proposé dans ce chapitre, nous avons eu recours à une mesure d'intensimétrie (pour plus de précision sur cette méthode : Liénard *et al*, 1987). Une plaque en aluminium, simplement appuyée sur les quatre bords a été utilisée. Le mode de fixation de la plaque sur le support est identique à celui présenté à la Figure 2.8, les caractéristiques de la plaque sont données dans le Tableau 2.6. L'excitation est assurée par un pot vibrant qui génère un bruit blanc au point de coordonnées $x_0 = 0.08$ m, $y_0 = 0.07$ m. Aucun dispositif particulier n'a été utilisé pour tenir compte du baffle car le support de la plaque est assez grand pour empêcher le court-circuit acoustique entre les deux faces de la plaques. Les résultats trouvés confirme cette hypothèse.

La puissance acoustique rayonnée par la plaque est définie par :

$$W = \iint_S I_n(M) dS, \quad (2.72)$$

où I_n est l'intensité acoustique normale active au point M . la méthode permettant de mesurer cette grandeur est détaillée dans le paragraphe qui suit.

- **Intensimétrie**

L'intensité acoustique en un point M et à un instant t donné, est définie de la manière suivante :

$$\vec{I}(M, t) = P(M, t) \vec{V}(M, t), \quad (2.73)$$

où $P(M, t)$ est la pression acoustique et $\vec{V}(M, t)$ est le vecteur vitesse acoustique. L'intensité acoustique peut être décomposée en deux termes : l'intensité active, qui se propage loin de la plaque (P et V en phase, partie réelle en notation complexe) et l'intensité réactive qui reste confinée près de la plaque sans se propager (P et V en quadrature de phase, partie imaginaire en notation complexe). Dans la plupart des cas, on s'intéresse à l'intensité active qui donne une information sur le rayonnement acoustique de la structure.

Si la pression acoustique est une grandeur facilement mesurable à l'aide d'un microphone, ce n'est pas le cas de la vitesse acoustique. La méthode couramment employée pour évaluer la vitesse acoustique dans une direction x donnée, consiste à placer deux microphones en vis à vis distants de r (ce dispositif

est appelé une sonde intensimétrique). Si le microphone 1 perçoit la pression P_1 et le microphone 2 la pression P_2 , on peut écrire l'égalité suivante entre la vitesse acoustique et les pressions P_1 et P_2 (équation d'Euler) :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho_0 \omega V \approx \frac{P_2 - P_1}{r} . \quad (2.74)$$

Cette formule donne une approximation de la vitesse acoustique dans la direction x en un point situé au milieu des microphones 1 et 2. La distance r entre les deux microphones doit être petite devant la longueur d'onde, mais assez grande pour avoir une bonne information sur la différence de phase entre les deux microphones. Dans ce test, nous avons utilisé un espace de 1.27 cm (1/2 po) entre les deux microphones. Si on admet que la distance entre les deux microphones doit être inférieure à la moitié de la longueur d'onde acoustique (critère de Shannon), la fréquence maximale mesurable précisément sera $f = c_0 / (2 \times 0.0127) = 13385$ Hz, ce qui est très supérieur à la fréquence maximale considérée dans ce test, qui est de 4500 Hz. Par contre, il se peut que cela entraîne un manque de précision en très basses fréquences.

La pression acoustique au milieu des deux microphones est donnée par :

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2} . \quad (2.75)$$

Les grandeurs mesurées sont bien sûr fonction du temps, mais à l'aide d'un analyseur nous allons accéder à une information fréquentielle directement comparable aux résultats donnés par la formulation théorique. Afin de mesurer la puissance acoustique totale rayonnée par la plaque il faut déplacer la sonde intensimétrique sur une surface fermée au-dessus de la plaque, ce qui permet d'obtenir l'intensité active moyenne sur cette surface en fonction de la fréquence :

$$\bar{I}(\omega) = \frac{1}{S} \iint_S I(\omega, M) dS . \quad (2.76)$$

La surface S est un parallélépipède rectangle délimité par la surface de la plaque. Afin de comparer les résultats donnés par la mesure avec l'équation 2.67, il faut multiplier l'équation 2.76 par la surface balayée et il faut la diviser par l'autospectre de la force injectée $F(\omega)$ (grandeur réelle, mesurée avec un capteur de force). Ce qui donne :

$$W(\omega) = \frac{S\bar{I}(\omega)}{F(\omega)}. \quad (2.77)$$

Cette formule exprime la puissance acoustique rayonnée par la plaque bafflée à une fréquence f donnée (pulsation $\omega = 2\pi f$), elle est directement comparable à l'équation 2.67. La Figure 2.12 présente la comparaison théorie-expérience pour la puissance rayonnée par la plaque d'aluminium (Tableau 2.6). On remarque que la précision du modèle théorique est bonne jusqu'en hautes fréquences.

Tableau 2.6 : Caractéristiques de la plaque en aluminium utilisés pour les validations de la réponse acoustique.

Longueur (m)	Largeur (m)	Épaisseur (mm)	Masse volumique (kg/m ³)	Module d'Young (Pa)	Coefficient d'amortissement	Coefficient de Poisson
0.48	0.42	6	2680	7.9×10^{10}	0.005*	0.33

* Cette valeur tient compte de l'amortissement dû aux conditions aux limites.

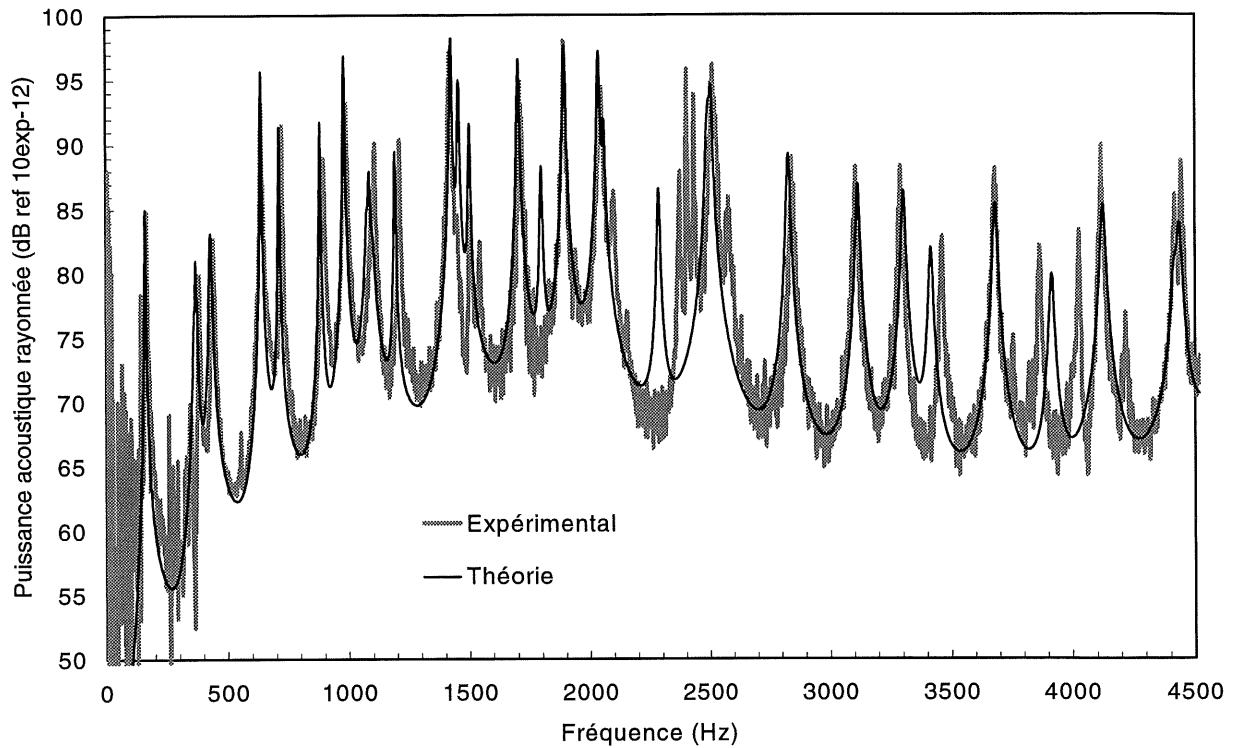


Figure 2.12 : Comparaison théorie-expérience pour la puissance acoustique rayonnée par une plaque bafflée, simplement appuyée en aluminium.

2.6 Synthèse sur la formulation théorique

Ce chapitre a proposé une formulation théorique capable de prédire la réponse vibratoire et acoustique d'une plaque rectangulaire, bafflée, simplement appuyée sur les bords et recouverte par un traitement viscoélastique partiel. Le traitement viscoélastique est composé d'une couche viscoélastique recouverte par une couche rigide.

Chaque couche de la plaque admet un champ de déplacement indépendant. La flexion et l'effet membrane sont pris en compte dans les trois couches, mais le cisaillement transversal n'est considéré que dans la couche viscoélastique. La continuité des déplacements est satisfaite à l'interface de chaque couche, ce qui permet de réduire le nombre d'inconnues modales du système à cinq.

L'approche variationnelle est combinée avec la méthode de Ritz pour calculer l'équation du mouvement couplée avec le fluide environnant. Le déplacement de la structure est décomposé sur une base trigonométrique qui assure une bonne convergence en hautes fréquences et qui permet un calcul semi-analytique des impédances de rayonnement.

La pression acoustique est évaluée à l'aide d'une méthode en champ proche (intégrale de Rayleigh), qui permet de calculer la pression sur la plaque, afin de prendre en compte le couplage fluide-structure, et qui permet également de calculer la puissance acoustique rayonnée par la structure.

La validité du modèle théorique a été confirmée par des mesures, aussi bien pour la partie vibratoire (mesure du déplacement de la structure avec des accéléromètres), que pour la partie rayonnement acoustique (mesure de la puissance acoustique rayonnée par intensimétrie).

Les résultats sont exprimés en termes d'indicateurs globaux qui donnent une indication de la réponse vibratoire (vitesse quadratique moyenne), de la réponse acoustique (puissance acoustique rayonnée) et du transfert d'énergie vibration-acoustique (efficacité de rayonnement). Ces indicateurs permettent de mieux comprendre le comportement vibroacoustique d'une structure. Ils vont être utilisés dans le chapitre suivant pour expliquer le mécanisme d'amortissement présent dans les structures multicouches incluant des matériaux viscoélastiques.

3. Étude de l'amortissement des vibrations d'une structure à l'aide de matériaux viscoélastiques

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'exploiter le modèle théorique développé au chapitre précédent, afin de comprendre le phénomène d'amortissement présent dans les structures multicouches incluant des matériaux viscoélastiques. L'objectif principal est de montrer quelles sont les conditions à remplir pour maximiser les pertes d'énergie dans la couche viscoélastique.

La dépendance des propriétés mécaniques des matériaux viscoélastiques en fonction de la température et de la fréquence est présentée. Le mécanisme d'amortissement des vibrations dans les structures bicouches et tricouches est expliqué. Une étude paramétrique est menée afin de connaître l'influence des principaux paramètres mis en jeu dans les plaques multicouches, sur l'amortissement global obtenu. En particulier, l'existence d'une rigidité optimum de la couche viscoélastique qui procure un amortissement maximum est mise en évidence. Il est montré que cette rigidité optimum est une fonction linéaire de la fréquence. L'influence de l'épaisseur de la couche viscoélastique est étudiée, ainsi que la rigidité de la couche supérieure. La position optimale de la couche viscoélastique à l'intérieur de la structure fait l'objet d'un paragraphe. Une étude est également menée sur les plaques avec couverture partielle, deux points sont abordés : (1) l'influence de la surface de la couverture partielle, et (2) l'influence de la position de la couverture partielle sur l'amortissement global de la structure. La dernière partie de ce

chapitre est consacrée à la recherche du traitement viscoélastique optimum à l'aide d'un code d'optimisation utilisant un algorithme génétique.

3.1.1 Problématique industrielle

S'il est bien connu que l'ajout de matériaux viscoélastiques est capable de réduire efficacement les vibrations libres d'une structure, il reste néanmoins un problème très important à résoudre dans ce domaine et qui consiste à choisir le traitement viscoélastique qui va procurer l'amortissement maximum, tout en satisfaisant les contraintes spécifiques imposées par le cas traité (température et fréquence d'utilisation, coût, masse ajoutée, encombrement, compatibilité chimique entre les divers matériaux, mode de fixation, résistance à la fatigue...).

Pour résoudre cette question du traitement optimum, il est impossible d'envisager uniquement une approche expérimentale, car cela impliquerait un trop grand nombre de mesures. Ce qui se traduit d'un point de vue industriel par un coût trop élevé et un temps de développement trop long. De plus, les industriels demandent en général de connaître les performances acoustiques d'un produit avant même la fabrication du premier prototype. Ces points mettent en évidence l'utilité de disposer d'un code numérique, tel que celui construit à partir de l'étude théorique présentée au chapitre précédent. Néanmoins, il n'est pas non plus envisageable actuellement de réaliser une étude de conception uniquement à partir de calcul théorique, étant donné que les codes de calcul ne sont pas encore capable de prédire de manière précise le rayonnement acoustique de structures complexes.

Ainsi, l'approche à privilégier est une méthode mixte où une étude préliminaire est menée de manière théorique à l'aide d'un code de calcul qui a pour mission d'aiguiller le concepteur vers la solution la plus prometteuse, cette solution doit ensuite être validée à l'aide de mesures. Un processus itératif, qui consiste à répéter l'alternance mesures et calculs afin de converger vers la solution optimum, pourra être mis en place, mais dans tous les cas, les mesures devront être réduites au strict minimum.

3.1.2 Dépendance en température et en fréquence des matériaux viscoélastiques

Les matériaux viscoélastiques ont des propriétés mécaniques qui varient beaucoup en fonction de la fréquence et de la température. Ces deux grandeurs ont des effets inverses : augmenter la température a

un effet analogue à diminuer la fréquence et vice versa. Pour les matériaux viscoélastiques, on peut déterminer principalement trois types de comportements différents en fonction de la température (ou de la fréquence, Figure 3.1) : en basses températures (hautes fréquences) le matériau est rigide et se comporte comme un matériau élastique, son facteur de perte est faible, en hautes températures (basses fréquences), le matériau est mou et son comportement tend à être celui d'un fluide visqueux, là encore son facteur de perte est faible. Dans les deux états cités précédemment le matériau n'a pas à proprement parler un comportement "viscoélastique", il ne peut être appelé viscoélastique que quand il est entre ces deux états, c'est à dire dans la région appelée "transition vitreuse". Dans cette région, le module d'Young du matériau varie beaucoup et son facteur de perte passe par un maximum (Figure 3.1). Il est bien évident que si on veut amortir les vibrations d'une structure, il faut utiliser les matériaux viscoélastiques dans la région de transition vitreuse, en-dehors de cette région ils n'ont aucun effet amortissant notable.

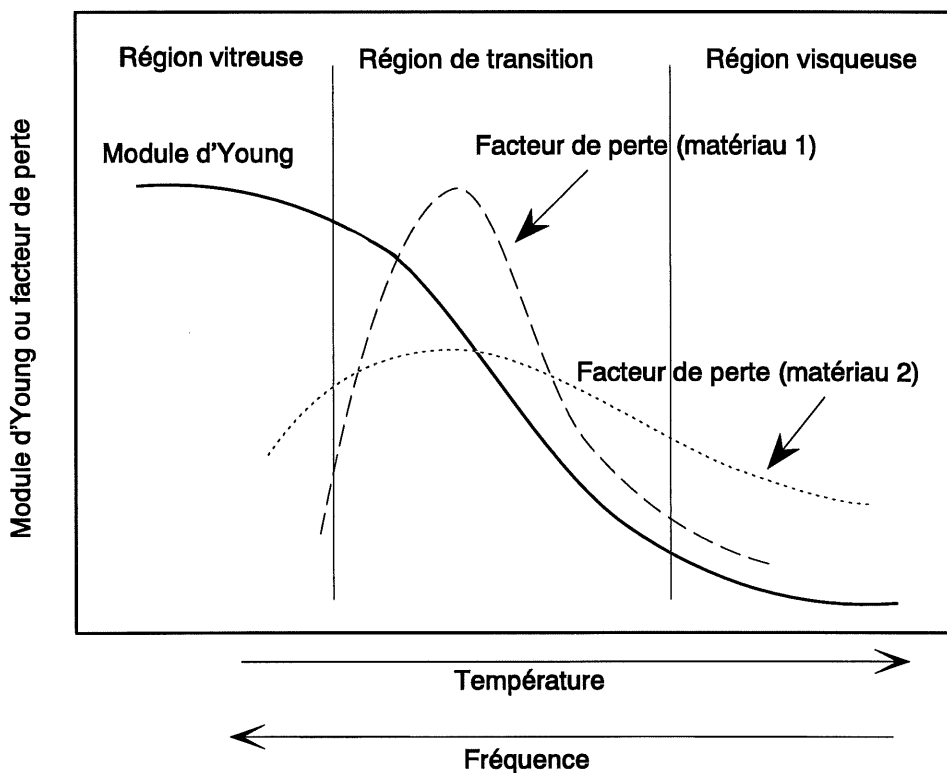


Figure 3.1 : Comportement du module d'Young et du coefficient d'amortissement d'un matériau viscoélastique en fonction de la température et de la fréquence.

Comme le montre la Figure 3.1 dans la région de transition vitreuse le facteur de perte passe par un maximum. Pour des applications pratiques on a intérêt à prendre un matériau qui a un facteur de perte le

plus élevé possible. Néanmoins, Hartman (1994) a montré que plus un matériau a un facteur de perte élevé et plus son pic est étroit (matériau 1, Figure 3.1), alors que si sa plage d'utilisation en fréquence, ou en température, est large son maximum va être moins élevé (matériau 2, Figure 3.1). Ainsi, un compromis doit être trouvé entre la hauteur du pic et sa largeur. Il est impossible qu'un matériau viscoélastique ait un bon rendement sur une très grande plage de températures et de fréquences. C'est la raison pour laquelle les manufacturiers de matériaux viscoélastiques proposent toute une gamme de matériaux, pour s'adapter aux diverses conditions de fréquences et de températures rencontrées dans l'industrie.

3.1.3 Amortissement dans les structures complexes

À partir du paragraphe précédent, on voit que pour amortir efficacement une structure à l'aide d'un traitement viscoélastique, il faut utiliser un matériau viscoélastique avec un facteur de perte maximum dans la plage de fréquences et de températures d'intérêt. Néanmoins, si cela constitue une condition nécessaire, ce n'est pas une condition suffisante pour réduire les vibrations d'une structure. En effet, en plus d'un facteur de perte élevé, il faut que le matériau viscoélastique joue un rôle important dans la déformation totale de la structure. C'est à dire que son énergie de déformation doit être comparable à l'énergie de déformation de la structure à amortir. Pour connaître la contribution du matériau viscoélastique dans l'énergie de déformation totale d'une structure complexe, on peut utiliser la définition du facteur de perte global :

$$\eta = \frac{\sum_i \eta_i V_i}{\sum_i V_i}, \quad (3.1)$$

où η_i et V_i sont respectivement le facteur de perte et l'énergie de déformation d'une sous-structure i . Ce facteur de perte global rend compte de l'énergie mécanique dissipée sous forme de chaleur dans la structure. Si on considère le matériau viscoélastique comme une sous-structure de la structure globale, on voit que pour une configuration où le matériau viscoélastique est placé de telle manière à avoir une énergie de déformation faible, même avec un facteur de perte élevé, le facteur de perte global de la structure sera faible. Par conséquent, pour amortir efficacement une structure, il faut que le matériau viscoélastique ait un facteur de perte élevé *et* qu'il soit placé de telle sorte à avoir une énergie de

déformation maximale. Un des objectifs de ce chapitre est d'étudier les configurations qui maximisent l'énergie de déformation de la couche viscoélastique.

Par exemple, quand on considère l'amortissement libre (structure de base recouverte par un matériau amortissant), le matériau amortissant supporte principalement des déformations de traction-compression, ainsi, pour maximiser l'amortissement il faut maximiser ces déformations (Beranek, 1988). Par contre, dans les plaques sandwichs (élastique-viscoélastique-élastique) la couche viscoélastique se déforme principalement en cisaillement (Kerwin, 1959). Ainsi, dans ce cas, il faut maximiser ce type de déformations pour obtenir une réduction importante des vibrations.

Dans le cas où le traitement amortissant est placé de telle sorte à maximiser ses déformations, augmenter le coefficient d'amortissement de la couche viscoélastique améliore toujours l'amortissement global. Multiplier le facteur de perte par deux diminue le niveau global de la structure (vibratoire ou acoustique) d'environ 3 dB.

3.2 Étude phénoménologique de l'amortissement

3.2.1 Introduction

Dans le paragraphe qui suit, une étude complète est menée sur l'influence des principaux paramètres mis en jeu dans l'amortissement des structures multicouches. Afin de ne pas multiplier le nombre de tests effectués, et à moins d'une indication contraire, la plaque de base utilisée sera toujours la même (caractéristiques : Tableau 3.1). Cette plaque est rectangulaire, insérée dans un baffle rigide infini et simplement supportée sur les quatre bords. Elle est immergée dans l'air (vitesse du son : $c_0 = 340$ m/s, densité : $\rho_0 = 1.225$ kg/m³). L'excitation est une force ponctuelle appliquée au point de coordonnées $x_0 = 0.08$ m, $y_0 = 0.07$ m (l'origine de la plaque est prise dans un coin).

La plupart des matériaux viscoélastiques sont isotropes et peuvent donc être caractérisés par quatre paramètres : la densité, le module d'Young (ou le module de cisaillement), le facteur de perte et le coefficient de Poisson. Pour un matériau isotrope, le module de cisaillement est relié au module d'Young par la relation suivante : $G = E/(2(1+\nu))$, on peut donc utiliser l'un ou l'autre de ces deux paramètres pour caractériser la rigidité du matériau, dans la suite de ce chapitre nous allons utiliser le module d'Young.

Dans le cas où on n'utilise pas des matériaux viscoélastiques réels, les valeurs prises sont représentatives des matériaux typiques disponibles dans le commerce. Comme le suggère Jarzinsky (1990), le coefficient de Poisson des matériaux viscoélastiques utilisés dans cette étude est pris égal à 0.45 (aucun manufacturier de matériau viscoélastique ne fournit de précision sur le coefficient de Poisson).

Tous les tests effectués sur les plaques multicouches montrent que l'ajout de matériau viscoélastique sur une structure augmente légèrement le facteur de rayonnement de la structure (Foin *et al*, 1998). Cela signifie que le gain obtenu sur la réponse vibratoire est légèrement supérieur au gain obtenu sur la réponse acoustique. Étant donné que le but de ce document est d'étudier la réponse acoustique des structures multicouches, l'étude paramétrique présentera essentiellement les résultats en terme de puissance acoustique rayonnée. La fréquence critique d'une plaque infinie constitué, du même matériau et avec la même épaisseur que la plaque de base, est de 4599 Hz. C'est à dire qu'au dessus de cette fréquence le facteur de rayonnement est proche de 1.

Pour la plupart des cas traités, l'atténuation acoustique (A_t) est notée dans les figures. Il s'agit de la différence entre le niveau de puissance rayonnée global sans traitement et celui avec le traitement viscoélastique :

$$A_t = 10 \log \left[\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} W_{\text{sans traitement}} df \right] - 10 \log \left[\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} W_{\text{avec traitement}} df \right], \quad (3.2)$$

où $W_{\text{sans traitement}}$ et $W_{\text{avec traitement}}$ sont respectivement la puissance acoustique rayonnée de la plaque de base (Tableau 3.1) et celle de la plaque avec le traitement considéré, f est la fréquence. Pour tous les cas testés, $f_{\min} = 10$ Hz et $f_{\max} = 5000$ Hz. . Ce qui signifie qu'on est à peu près toujours sous la fréquence critique.

Bien qu'une seule plaque de base soit considérée, les résultats présentés dans ce chapitre sont généraux. En effet, le fait de changer la géométrie de la structure de base, change la densité modale et les niveaux aux résonances, mais les tendances qualitatives trouvées pour une structure donnée peuvent être utilisées pour comprendre le comportement d'une autre structure. Les résultats d'un traitement optimum trouvés pour une structure ne peuvent pas être transférés à une autre structure, mais la méthode pour l'obtenir est, elle, générale.

Tableau 3.1 : Caractéristiques de la plaque de base.

Longueur (m)	Largeur (m)	Épaisseur (mm)	Masse volumique (kg/m ³)	Module d'Young (Pa)	Coefficient d'amortissement	Coefficient de Poisson
0.48	0.42	3.22	2680	6.6×10^{10}	5×10^{-3}	0.33

3.2.2 Influence de la température

Comme le montre la Figure 3.1, le module d'Young d'un matériau viscoélastique varie rapidement dans la région de transition vitreuse, ce qui modifie le comportement global de la structure et en particulier l'énergie de déformation de la couche viscoélastique. Ainsi, le changement de température entraîne une variation du facteur de perte et de l'énergie de déformation. Ces deux tendances sont découplées et peuvent avoir des effets inverses : par exemple, augmenter la température peut augmenter le facteur de perte et diminuer le module d'Young du matériau viscoélastique de sorte à diminuer l'énergie de déformation. Dans un tel cas, il sera difficile de prédire si le facteur de perte global de la structure a diminué ou augmenté sans faire un calcul rigoureux du comportement global de la structure. Ce point est illustré dans le test qui suit. On considère une plaque sandwich excitée par une force ponctuelle (plaque de base : Tableau 3.1, ISD 112 : Tableau 3.2 (données 3M), couche supérieure : Tableau 3.3). Le facteur de perte et le module d'Young du matériau viscoélastique ISD 112 sont représentés respectivement dans la Figure 3.2 et la Figure 3.3 en fonction de la fréquence pour trois températures : 0 °C, 25 °C et 60 °C (données 3M, nous ne disposons pas de valeurs au-delà de 2000 Hz pour T = 0 °C). La Figure 3.4 présente la puissance acoustique rayonnée pour la plaque sandwich précédemment décrite pour les trois températures choisies. La Figure 3.3 montre que le facteur de perte maximum est atteint pour T = 60 °C au-dessus de 1000 Hz, et pour une température de 25 °C en dessous de 1000 Hz. Or, la Figure 3.4 montre que l'amortissement maximal est atteint quand T = 25 °C sur toute la plage fréquentielle, même quand le facteur de perte est inférieur à celui obtenu pour une température de 60 °C. On note également sur la Figure 3.4 que la puissance rayonnée est maximale autour de 4500 Hz ce qui est en accord avec la valeur de 4599 Hz trouvée pour la fréquence critique d'une plaque infinie de même épaisseur que la plaque de base.

Afin de mieux comprendre ce comportement, le facteur de perte global de la plaque sandwich (équation 3.1) est représenté dans la Figure 3.5 pour les trois températures précédentes. On remarque dans cette figure que le facteur de perte global est toujours plus élevé quand $T = 25\text{ °C}$ que pour le cas $T = 60\text{ °C}$, ce qui signifie que l'énergie de déformation du cas $T = 25\text{ °C}$ est beaucoup plus grande que pour le cas $T = 60\text{ °C}$. Pour le cas $T = 0\text{ °C}$, le facteur de perte diminue rapidement en fonction de la fréquence, mais cet effet est compensé par l'augmentation du module d'Young, de sorte que le facteur de perte global reste à peu près constant en fonction de la fréquence. Ces résultats sont en accord avec les données du fabricant qui spécifie que le matériau ISD 112 est dans sa configuration optimum à la température ambiante, soit autour de 20 °C .

Cet exemple, met en évidence la difficulté de prédire l'amortissement obtenu par une structure complexe en ne considérant que le facteur de perte du matériau viscoélastique. Amortir les vibrations d'une structure ne se réduit pas à choisir un matériau viscoélastique avec un facteur de perte le plus élevé possible dans la plage de fréquence et de température d'intérêt, la contribution du matériau amortissant dans l'énergie de déformation totale de la structure doit aussi être considérée et cela est beaucoup plus difficile à évaluer dans le cas d'une structure complexe.

Tableau 3.2 : Caractéristiques du matériau viscoélastique ISD 112, le module d'Young et le facteur de perte sont représentés respectivement dans la Figure 3.2 et la Figure 3.3.

Épaisseur (mm)	Masse volumique (kg/m^3)	Coefficient de Poisson
0.25	1015	0.45

Tableau 3.3 : Caractéristiques de la couche supérieure.

Épaisseur (mm)	Masse volumique (kg/m^3)	Module d'Young (Pa)	Coefficient d'amortissement	Coefficient de Poisson
0.5	2680	6.6×10^{10}	5×10^{-3}	0.33

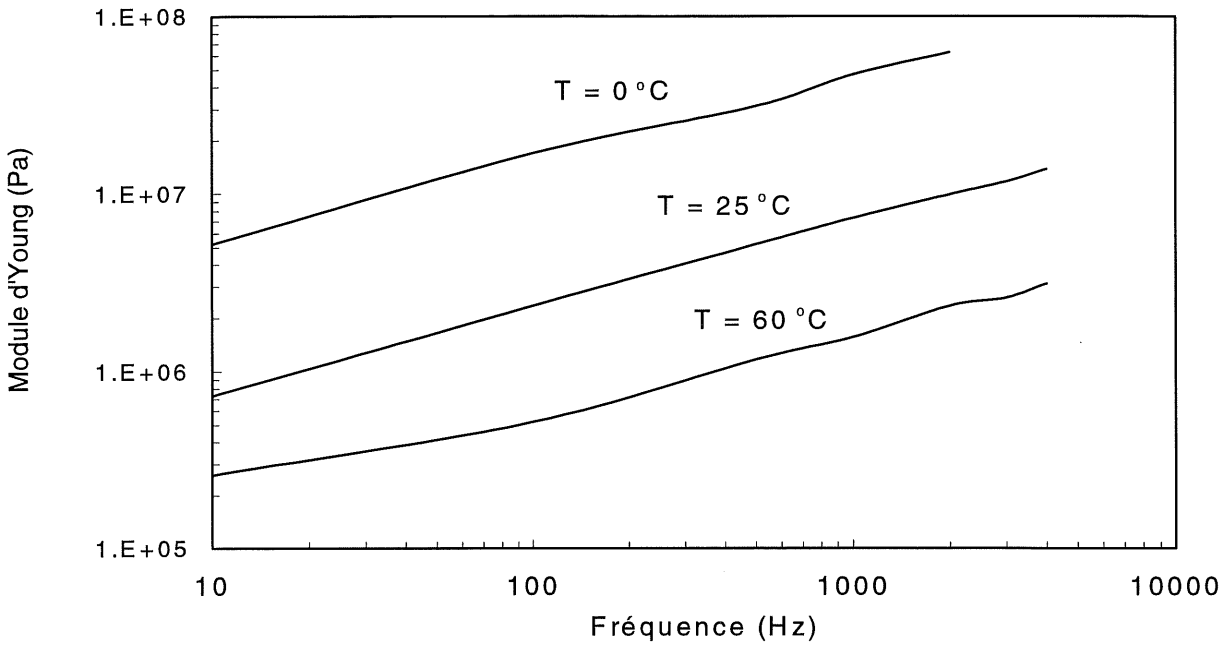


Figure 3.2 : Module d'Young du matériau viscoélastique ISD 112 (3M) pour trois températures différentes.

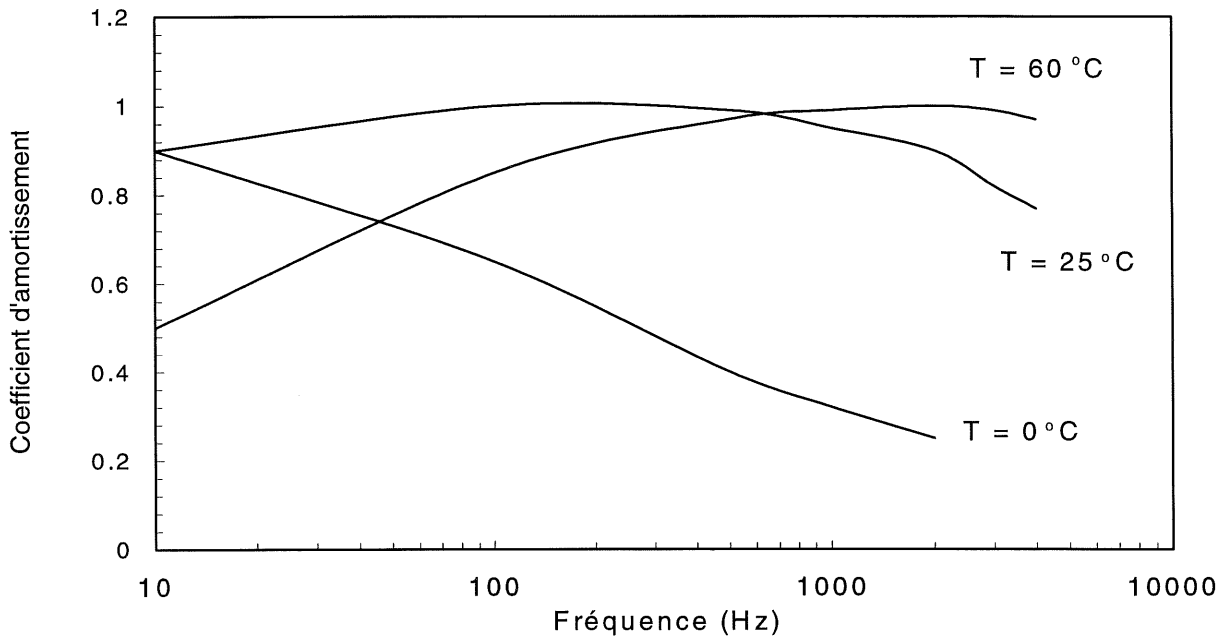


Figure 3.3 : Coefficient d'amortissement du matériau viscoélastique ISD 112 (3M) pour trois températures différentes.

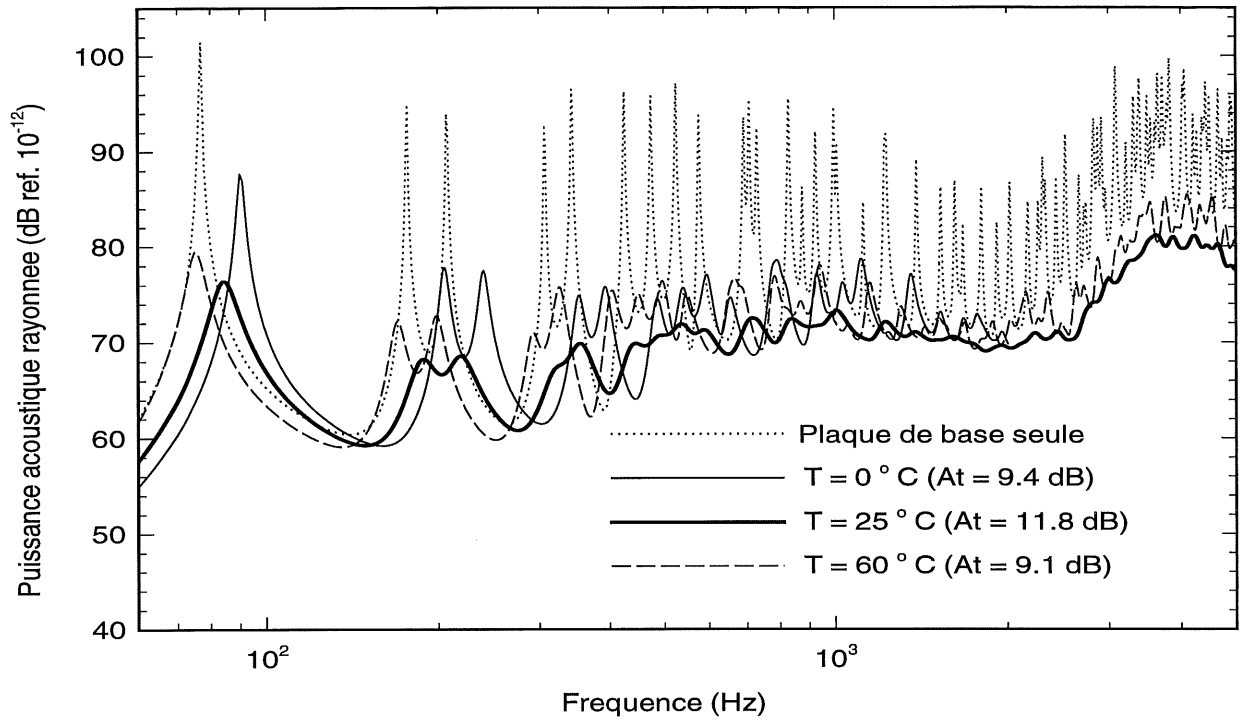


Figure 3.4 : Réponse acoustique d'une plaque sandwich à trois températures différentes.

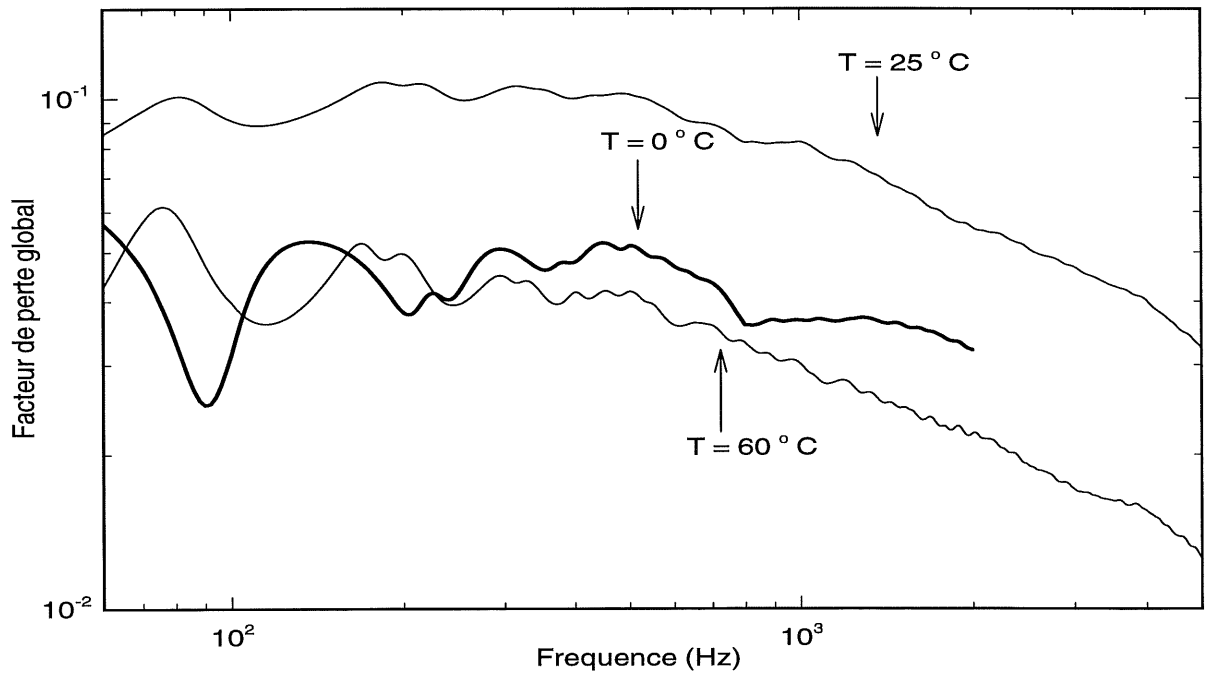


Figure 3.5 : Facteur de perte global d'une plaque sandwich pour trois températures différentes.

3.2.3 Couche viscoélastique libre

L'amortissement libre consiste à couvrir la structure à amortir par une seule couche viscoélastique non contrainte. La Figure 3.6 présente les différentes énergies de déformation présentes dans une telle structure (plaque de base : Tableau 3.1, couche amortissante : Tableau 3.4). On considère deux cas pour la rigidité de la couche viscoélastiques : $E_{visco} = 10^8$ Pa et $E_{visco} = 5 \times 10^9$ Pa. Dans cette figure, seule l'énergie de flexion de la couche de base et l'énergie d'extension de la couche viscoélastique sont représentées, car les autres type de déformations sont très mineures et ne contribuent pratiquement pas à l'énergie de déformation totale. Cela signifie que pour obtenir un amortissement important avec ce type de traitement, il faut maximiser l'énergie de traction-compression de la couche viscoélastique.

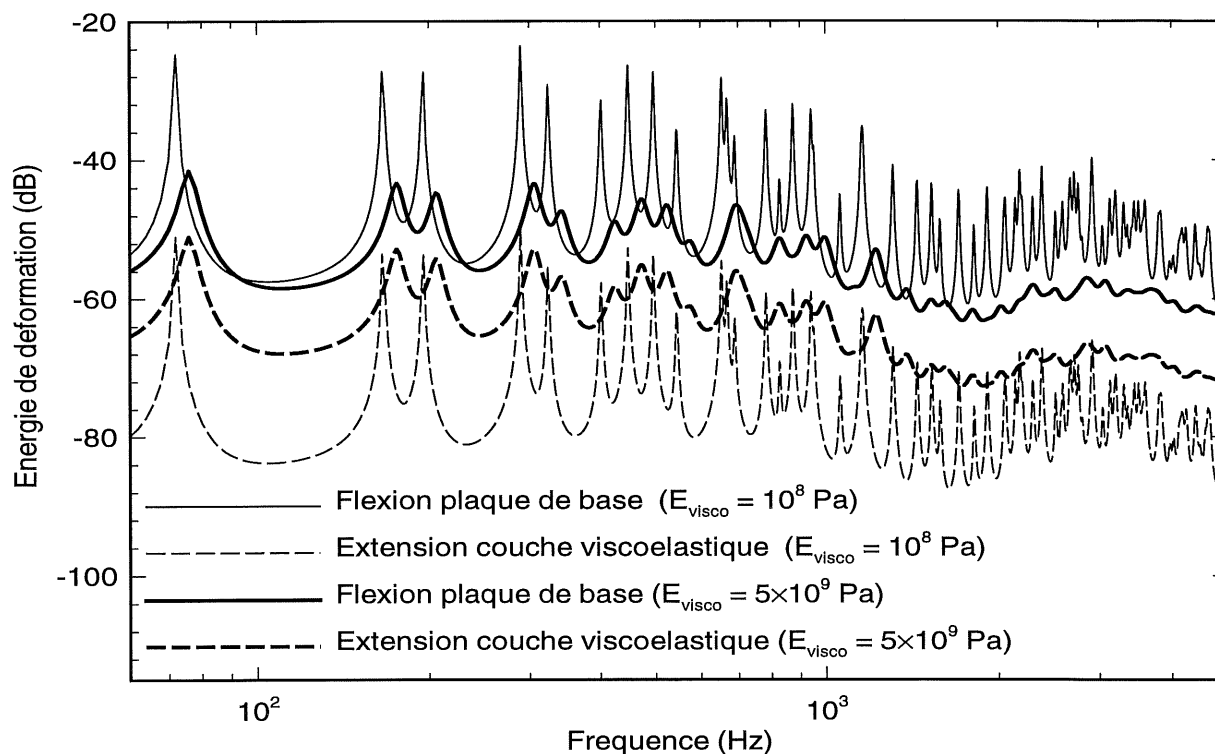


Figure 3.6 : Énergies de déformation d'une plaque bicouche pour deux rigidités différentes de la couche viscoélastiques.

L'équation 2.30 montre que l'énergie de traction-compression est proportionnelle à la rigidité d'extension de la couche considérée, $K = Eh(1+j\eta)$ où E , h et η sont respectivement le module d'Young, l'épaisseur et le facteur de perte de la couche considérée. À partir de l'équation 2.30 il est clair

qu'augmenter la rigidité d'extension de la couche amortissante augmente son énergie de déformation. Cela est confirmé dans la Figure 3.6, ainsi que dans la Figure 3.7 qui présente la puissance acoustique rayonnée pour les mêmes cas que la Figure 3.6 (le cas $E_{visco} = 5 \times 10^9$ Pa a été rajouté).

Bien qu'il n'existe pas de relation mathématique entre la rigidité et le coefficient d'amortissement, il est bien évident qu'un matériau très rigide ne pourra pas avoir un facteur de perte très élevé. C'est la raison pour laquelle le facteur de perte choisi pour les tests bicouches est seulement de 0.5, alors qu'il sera de 1 dans les tests de plaques sandwichs (ces valeurs sont représentatives des matériaux viscoélastiques couramment employés dans l'industrie). Dans le cas de l'amortissement libre, il faut trouver un compromis entre la rigidité et le facteur de perte du matériau.

Tableau 3.4 : Caractéristiques de la couche viscoélastique pour les tests d'amortissement libre.

Épaisseur (mm)	Masse volumique (kg/m ³)	Coefficient d'amortissement	Coefficient de Poisson
1	1000	0.5	0.45

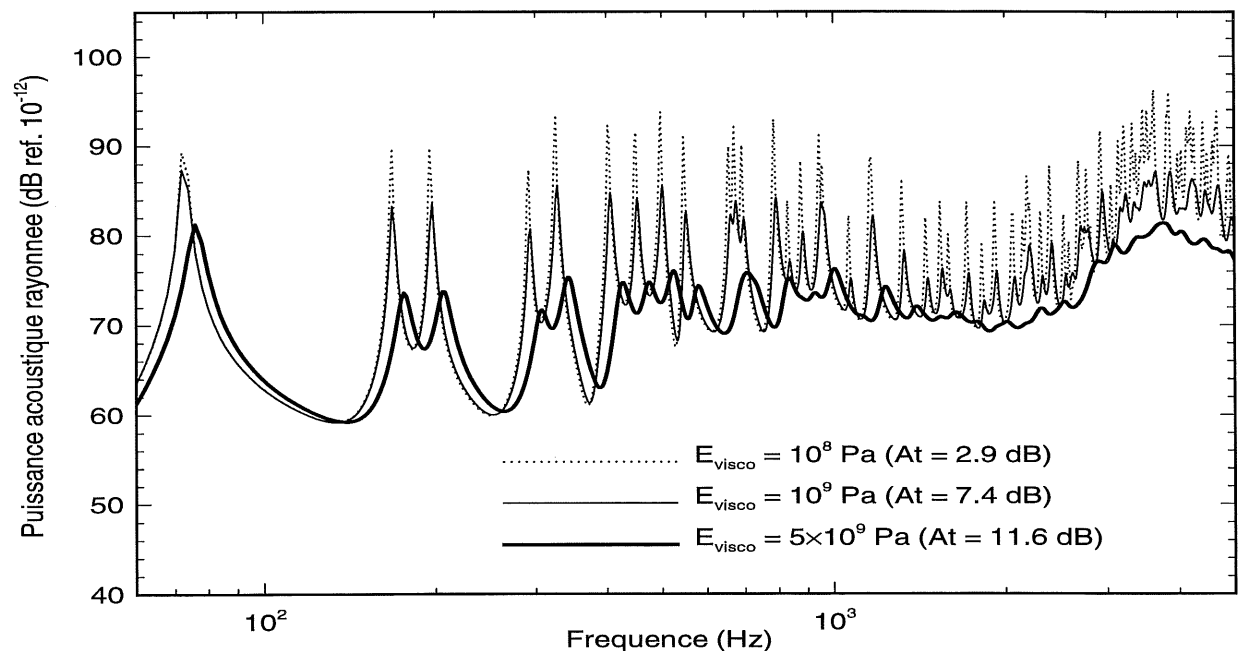


Figure 3.7 : Puissance acoustique rayonnée par une plaque bicouche pour trois rigidités différentes de la couche viscoélastique.

- **Cas des couches viscoélastiques épaisses**

L'énergie de traction-compression est proportionnelle à Eh ce qui signifie qu'augmenter le module d'Young est similaire à augmenter l'épaisseur de la couche. Par contre, l'énergie de flexion est, elle, proportionnelle à Eh^3 , si on augmente beaucoup l'épaisseur de la couche amortissante, ce type d'énergie peut devenir prépondérant. Dans ce cas, l'amortissement va augmenter car il sera dû à la fois à la déformation de traction-compression *et* à la déformation de flexion du matériau amortissant. Par exemple, la Figure 3.8 compare le cas de la plaque de base couverte par un matériau amortissant ayant pour caractéristiques, dans le premier cas : $E_{visco} = 10^8$ Pa et $h_{visco} = 10$ mm et dans le deuxième cas : $E_{visco} = 10^9$ Pa et $h_{visco} = 1$ mm (les autres caractéristiques sont dans le Tableau 3.4). Dans les deux cas, la rigidité d'extension est la même : 10^6 Pa·m, mais dans le cas où $E_{visco} = 10^8$ Pa et $h_{visco} = 10$ mm, l'énergie de flexion de la couche amortissante est beaucoup plus importante que dans le cas où $E_{visco} = 10^9$ Pa et $h_{visco} = 1$ mm, ce qui entraîne une augmentation de l'énergie de déformation de la couche viscoélastique et par conséquent un meilleur amortissement. Néanmoins, une augmentation importante de l'épaisseur entraîne une augmentation de la masse de la structure, dans le cas où $E_{visco} = 10^8$ Pa et $h_{visco} = 10$ mm, il y a une augmentation de 110 % de la masse de la structure. Cet exemple met en évidence le fait que dans le cas d'une couche amortissante épaisse, l'amortissement ne dépend pas linéairement de la rigidité d'extension de la couche amortissante et que par conséquent un calcul rigoureux doit être fait afin de trouver le traitement optimum.

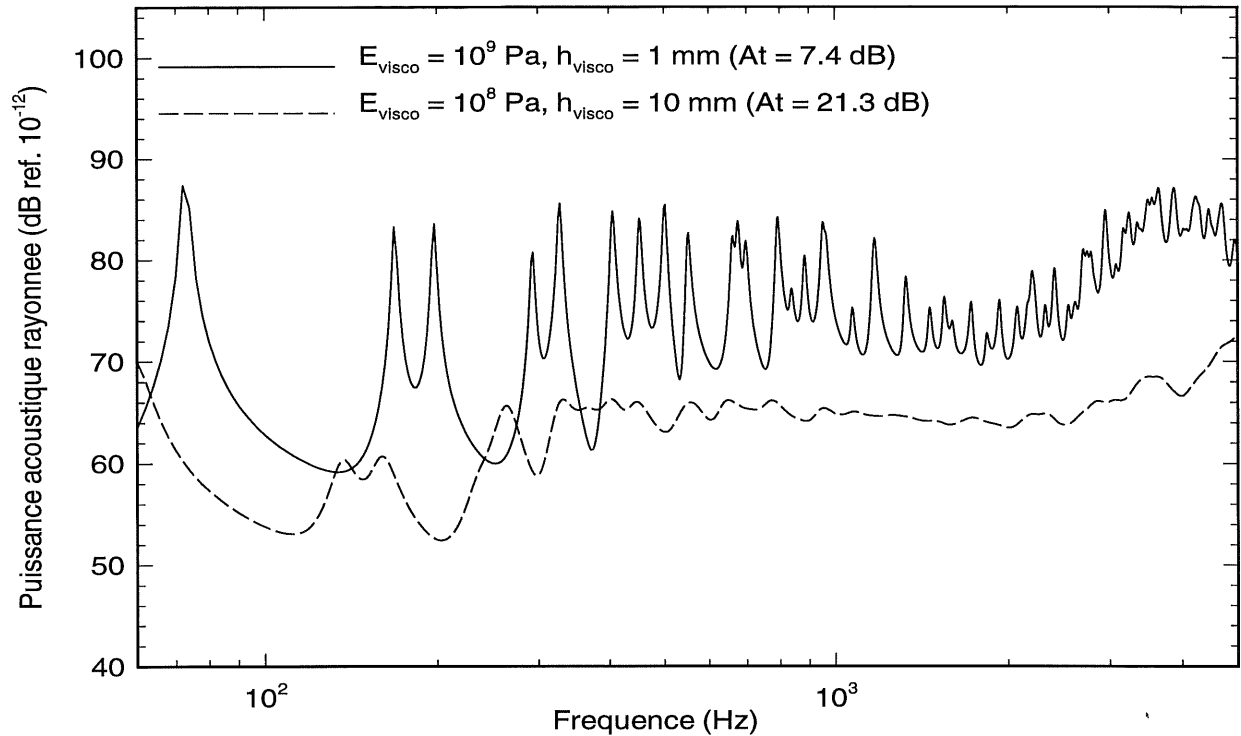


Figure 3.8 : Comparaison entre deux plaques bicouches avec des rigidités d'extension de la couche viscoélastique égales, mais avec des épaisseurs différentes.

3.2.4 Couche viscoélastique contrainte

L'amortissement viscoélastique contraint a fait l'objet de nombreux travaux depuis plusieurs décennies à cause de son efficacité. Il a été montré que cette configuration maximise les déformations de cisaillement transversal de la couche viscoélastique ce qui entraîne un amortissement très important des vibrations de la structure. Néanmoins, la recherche du traitement optimum est rendu difficile du fait du grand nombre de paramètres qui entre en jeu. Ce paragraphe a pour but de dégager les principaux phénomènes mis en jeu dans ce type de structures.

- **Influence de la rigidité de la couche viscoélastique, module d'Young optimum**

De tous les paramètres qui entrent en jeu dans l'amortissement viscoélastique contraint, la rigidité de la couche viscoélastique est certainement le plus important. Dans ce paragraphe nous allons étudier son influence sur l'amortissement total obtenu, et en particulier, il sera mis en évidence l'existence d'un

module d'Young optimum de la couche viscoélastique qui maximise les déformations de cisaillement de cette couche et entraîne un amortissement maximum.

Dans un premier temps nous allons étudier la réponse d'une plaque sandwich en considérant trois modules d'Young différents pour la couche viscoélastique : $E_{visco} = 10^6$ Pa, $E_{visco} = 10^7$ Pa et $E_{visco} = 10^8$ Pa, toutes les autres caractéristiques de la plaque étant identiques (Tableau 3.5 et Tableau 3.3). Ces trois modules d'Young couvrent la gamme de matériaux viscoélastiques couramment rencontrés dans l'industrie. La Figure 3.9 présente la puissance acoustique rayonnée pour ces trois cas. Quand $E_{visco} = 10^6$ Pa, l'amortissement est très important sur les trois premiers pics, puis il décroît rapidement. Quand $E_{visco} = 10^7$ Pa, l'amortissement est optimum en moyennes fréquences. Finalement, l'amortissement est efficace en hautes fréquences pour le cas $E_{visco} = 10^8$ Pa. Plusieurs points sont mis en évidence dans ce test : (1) la rigidité de la couche viscoélastique est un paramètre fondamental pour l'amortissement, (2) un matériau avec une rigidité constante n'est pas capable d'amortir convenablement une structure sur une grande plage fréquentielle, et (3) il semble possible de trouver un loi régissant le module d'Young de la couche viscoélastique en fonction de la fréquence, qui permettrait de procurer un amortissement maximum.

Tableau 3.5 : Caractéristiques de la couche viscoélastique utilisée pour l'étude paramétrique sur la rigidité de la couche viscoélastique.

Épaisseur (mm)	Masse volumique (kg/m ³)	Coefficient d'amortissement	Coefficient de Poisson
0.25	1000	1	0.45

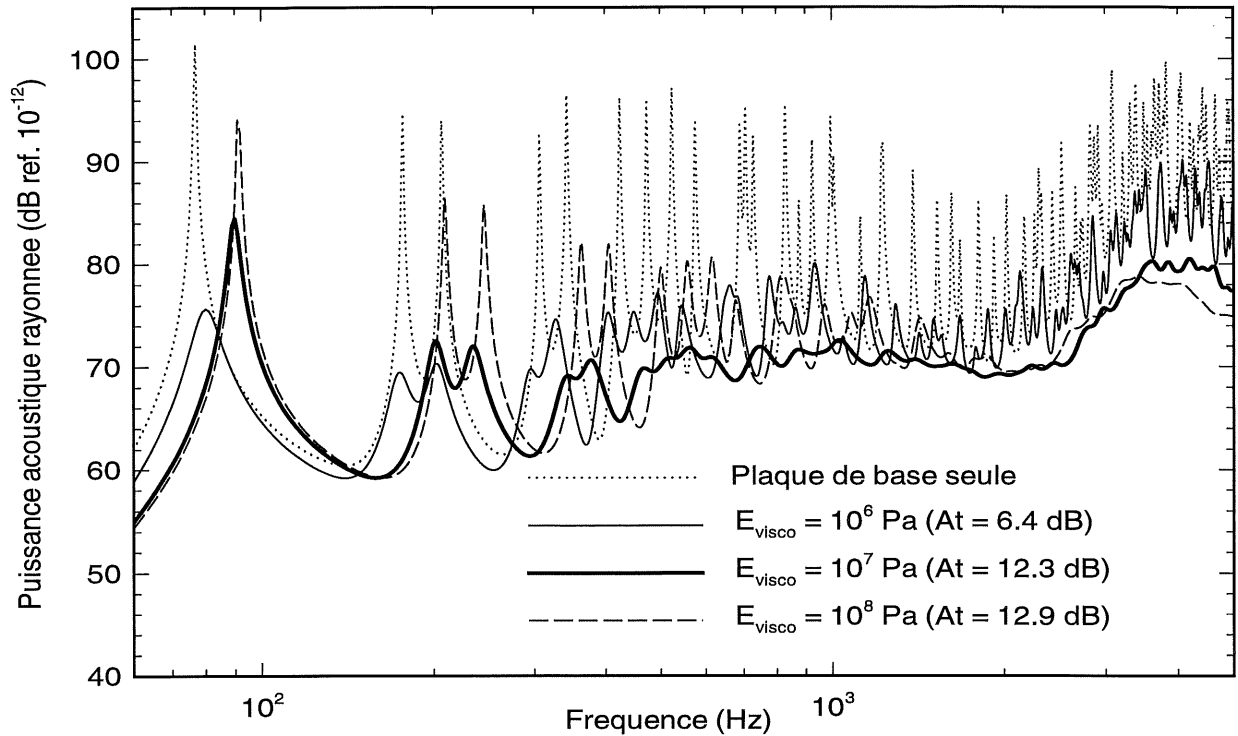


Figure 3.9 : Puissance acoustique rayonnée d'une plaque sandwich pour trois rigidités différentes de la couche viscoélastique, tous les autres paramètres étant identiques.

Le but de ce paragraphe est de calculer la rigidité optimale de la couche viscoélastique qui va assurer un amortissement maximum sur toute la plage fréquentielle. Si on se place à une fréquence f donnée, on peut calculer le facteur de perte global de la structure à l'aide de l'équation 3.1. On peut également calculer le facteur de perte global de la structure à une fréquence f donné, en fonction du module d'Young de la couche viscoélastique (Figure 3.10). On remarque que chacune des quatre courbes de la Figure 3.10 présente une allure similaire avec un maximum qui augmente en fonction de la fréquence. On peut calculer ce maximum en utilisant la relation suivante :

$$\frac{\partial \eta}{\partial E_{visco}} = 0. \quad (3.3)$$

Étant donné que le facteur de perte global η varie d'une manière complexe en fonction de E_{visco} (on résout le système linéaire 2.61) on ne peut pas utiliser de méthode analytique pour calculer l'équation 3.3, c'est pourquoi une méthode numérique par dichotomie a été utilisée.

Si on représente maintenant le module d'Young optimum calculé avec l'équation 3.3, en fonction de la fréquence, on obtient la droite présentée dans la Figure 3.11. Cela signifie qu'il y a une relation linéaire entre la fréquence et le module d'Young optimum de la couche viscoélastique. Si un matériau viscoélastique a un module d'Young en fonction de la fréquence tel que décrit dans la Figure 3.11, son amortissement sera optimum à toutes les fréquences.

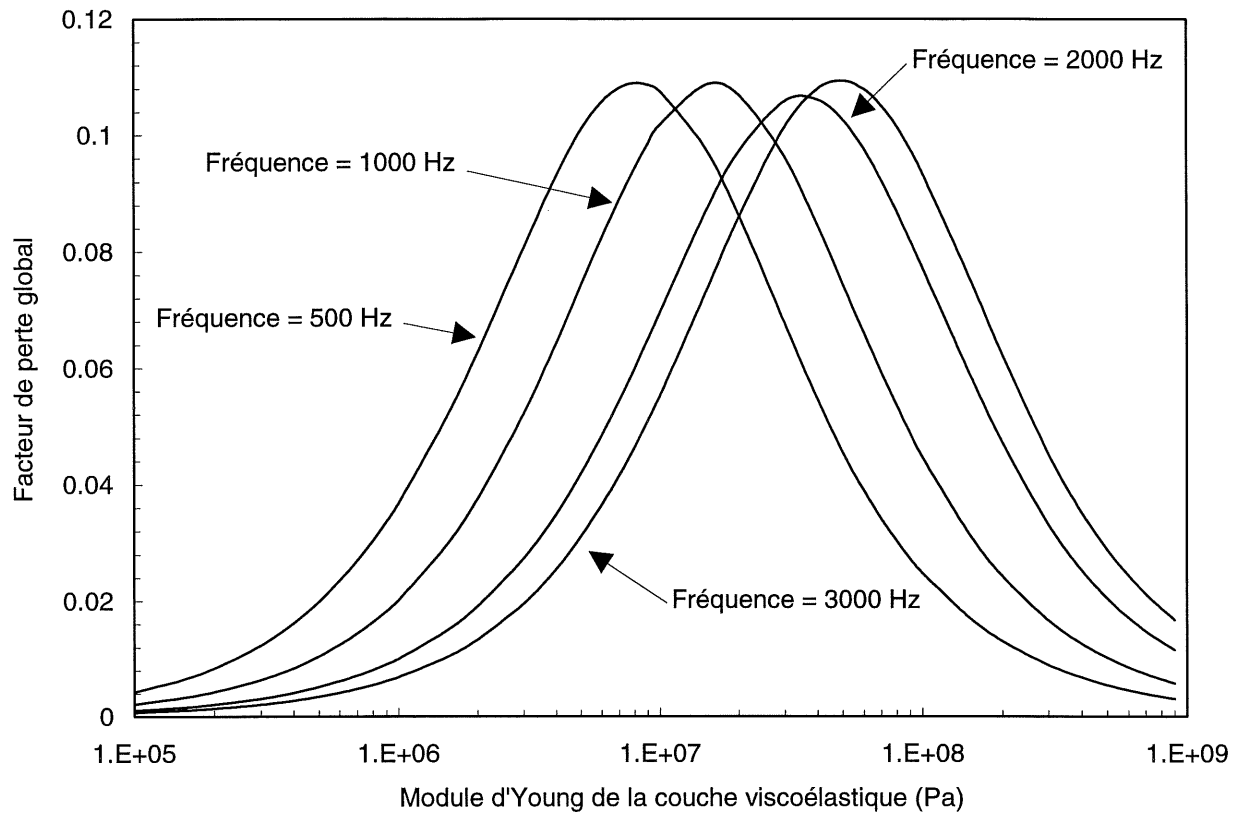


Figure 3.10 Facteur de perte global d'une plaque sandwich en fonction du module d'Young de la couche viscoélastique.

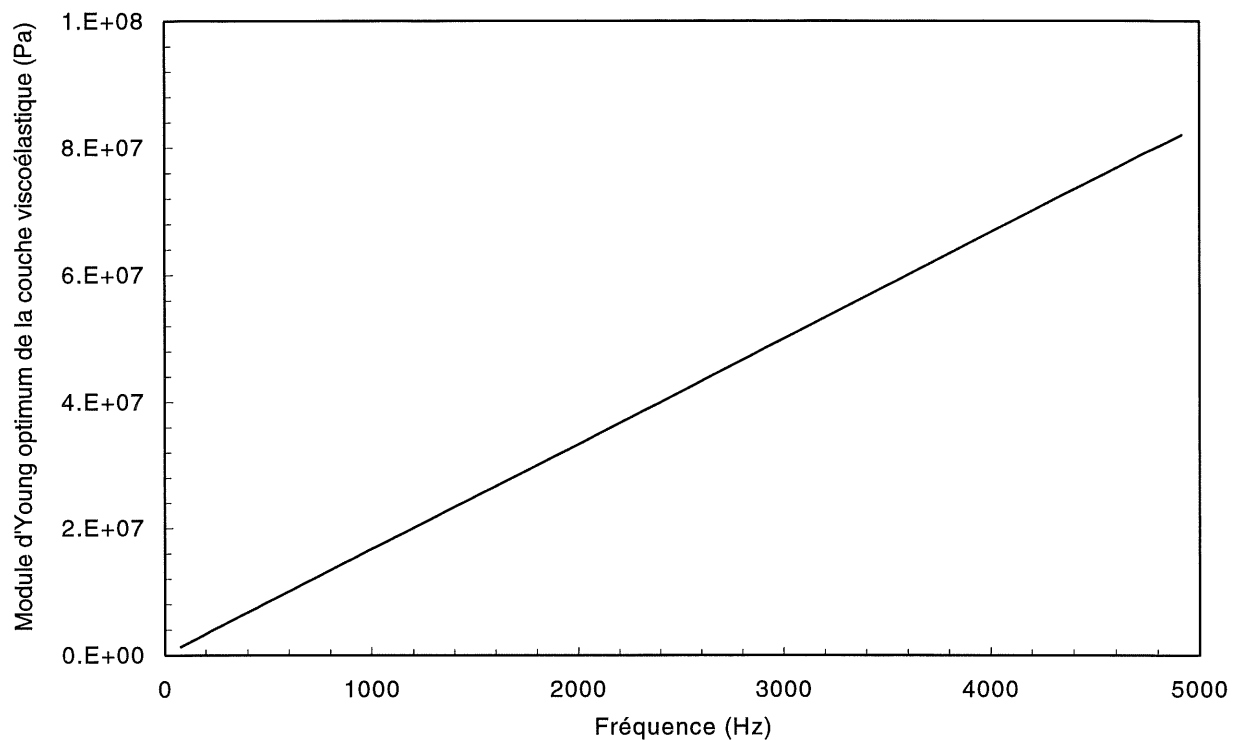


Figure 3.11 : Module d'Young optimum de la couche viscoélastique en fonction de la fréquence, pour une plaque sandwich donnée.

La Figure 3.12 représente le facteur de perte global (équation 3.1) pour les mêmes cas que la Figure 3.9, mais on a rajouté en plus le facteur de perte global obtenu dans le cas du module d'Young optimum, tel que décrit par la droite de la Figure 3.11. On observe que le facteur de perte global de la structure est plus élevé quelle que soit la fréquence, quand on utilise le module d'Young optimum.

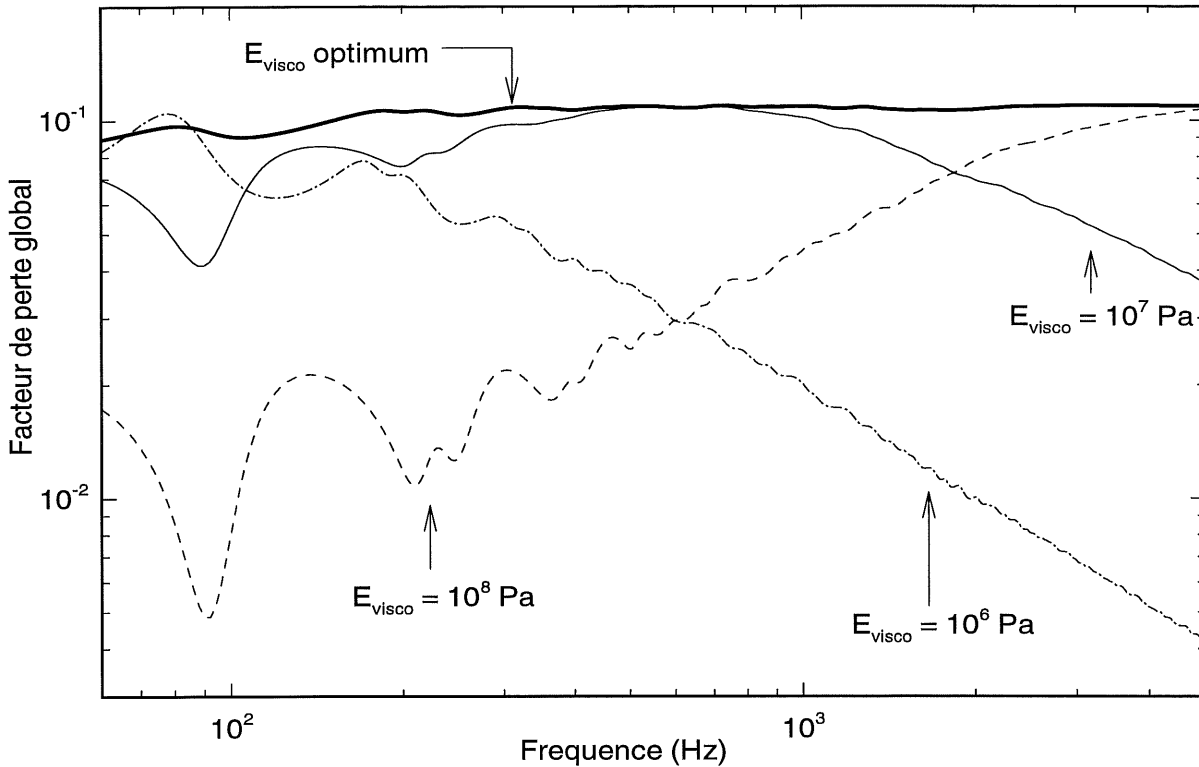


Figure 3.12 : Facteur de perte global d'une plaque sandwich pour trois modules d'Young de la couche viscoélastique fixe, en fonction de la fréquence et pour le module d'Young optimum.

Dans le suite du paragraphe nous allons étudier l'influence de divers paramètre sur le module d'Young optimum de la couche viscoélastique. L'influence de l'épaisseur de la couche viscoélastique, l'influence des dimensions, de l'épaisseur et de la rigidité de la plaque de base seront tour à tour étudiées.

On constate dans la Figure 3.13 que l'augmentation d'épaisseur de la couche viscoélastique entraîne une augmentation de la rigidité optimum de la couche viscoélastique.

La Figure 3.14 montre que le module d'Young optimum du matériau viscoélastique est indépendant des dimensions de la plaque de base. Ce résultat est important car il signifie que si on réalise une étude théorique sur une structure à une échelle réduite, on pourra transférer les valeurs du traitement optimum obtenu à une structure de plus grandes dimensions.

La Figure 3.15 montre que la pente du module d'Young optimum diminue quand on augmente l'épaisseur de la plaque de base.

On trouve également que la rigidité optimum du matériau viscoélastique diminue quand on augmente la rigidité de la plaque de base (Figure 3.16).

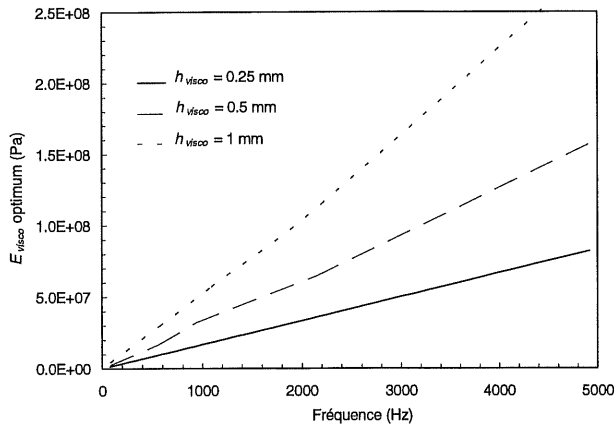


Figure 3.13 : Influence de l'épaisseur de la couche viscoélastique sur le module d'Young optimum.

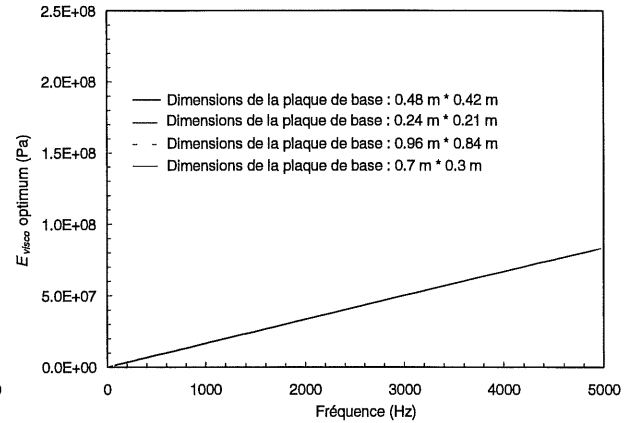


Figure 3.14 : Influence de la dimension de la plaque de base sur le module d'Young optimum.

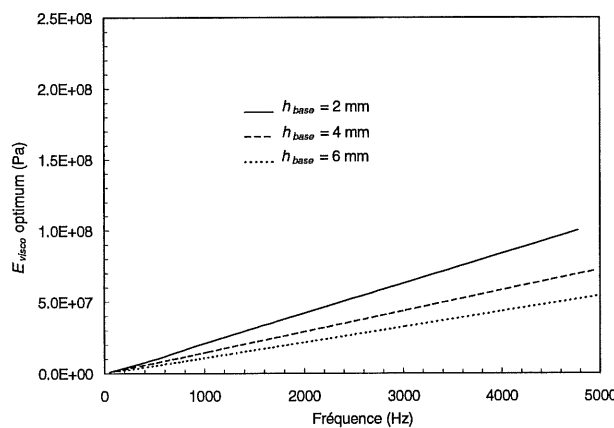


Figure 3.15 : Influence de l'épaisseur de la plaque de base sur le module d'Young optimum.

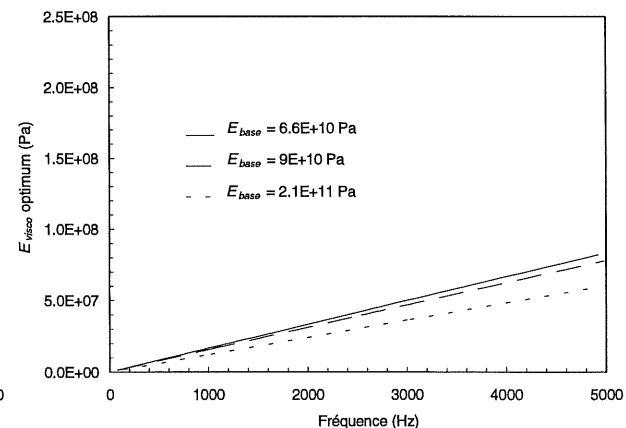


Figure 3.16 : Influence de la rigidité de la plaque de base sur le module d'Young optimum.

Il est à noter que ce paragraphe met en évidence l'existence d'un module d'Young optimum de la couche viscoélastique qui entraîne un amortissement maximum pour la configuration traitée. Néanmoins, le calcul du module d'Young optimum ne donne aucune indication sur le niveau d'amortissement obtenu.

Cela signifie que pour une configuration fixée (plaque de base, couche viscoélastique, couche supérieure, excitation...), on peut calculer le module optimum de la couche viscoélastique qui va donner l'amortissement maximum dans ce cas, il se peut néanmoins que cet amortissement soit peu élevé en raison d'un mauvais choix des autres paramètres.

- **Influence de l'épaisseur de la couche viscoélastique**

La Figure 3.17 montre qu'augmenter l'épaisseur de la couche viscoélastique améliore l'amortissement sur toute la plage fréquentielle (plaque de base : Tableau 3.1, couche viscoélastique : Tableau 3.5 avec $E_{visco} = 10^8$ Pa, couche supérieure : tableau 3.3).

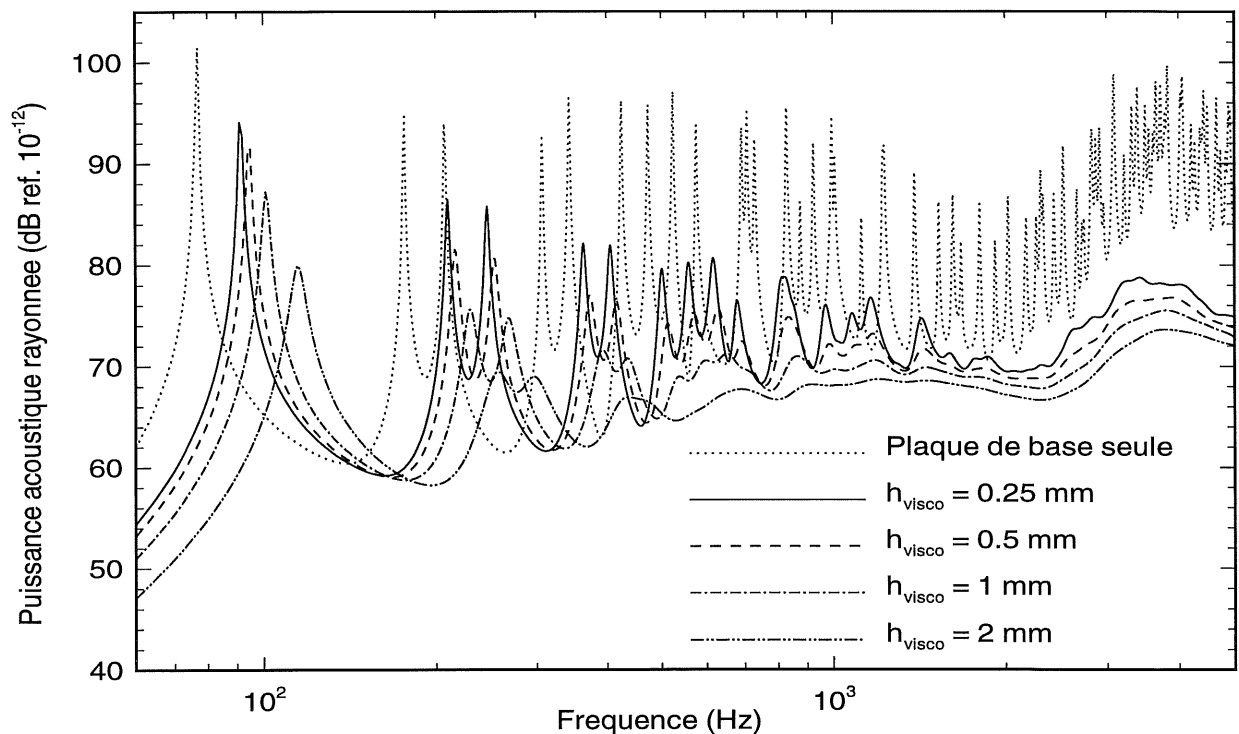


Figure 3.17 : Puissance acoustique rayonnée d'une plaque sandwich pour quatre valeurs différentes de l'épaisseur de la couche viscoélastique (pour les quatre cas $E_{visco} = 10^8$ Pa).

- **Influence de la couche supérieure**

Accroître la rigidité de la couche supérieure améliore l'amortissement car cela augmente les déformations de cisaillement transversal de la couche viscoélastique. Ce point est illustré dans la Figure

3.18 où une plaque sandwich recouverte soit d'aluminium (Tableau 3.3), soit d'acier (Tableau 3.6) est représentée (plaque de base : Tableau 3.1, couche viscoélastique : ISD 112, Tableau 3.2). Il faut néanmoins noter que la couche supérieure d'aluminium ajoute 19 % de masse à la structure ($\rho_{\text{alu}} = 2680 \text{ kg/m}^3$), alors que la même épaisseur d'acier augmente la masse de 50 % ($\rho_{\text{acier}} = 7850 \text{ kg/m}^3$).

Tableau 3.6 : Caractéristiques de la couche supérieure en acier.

Épaisseur (mm)	Masse volumique (kg/m ³)	Module d'Young (Pa)	Coefficient d'amortissement	Coefficient de Poisson
0.5	7850	2.1×10^{11}	5×10^{-3}	0.33

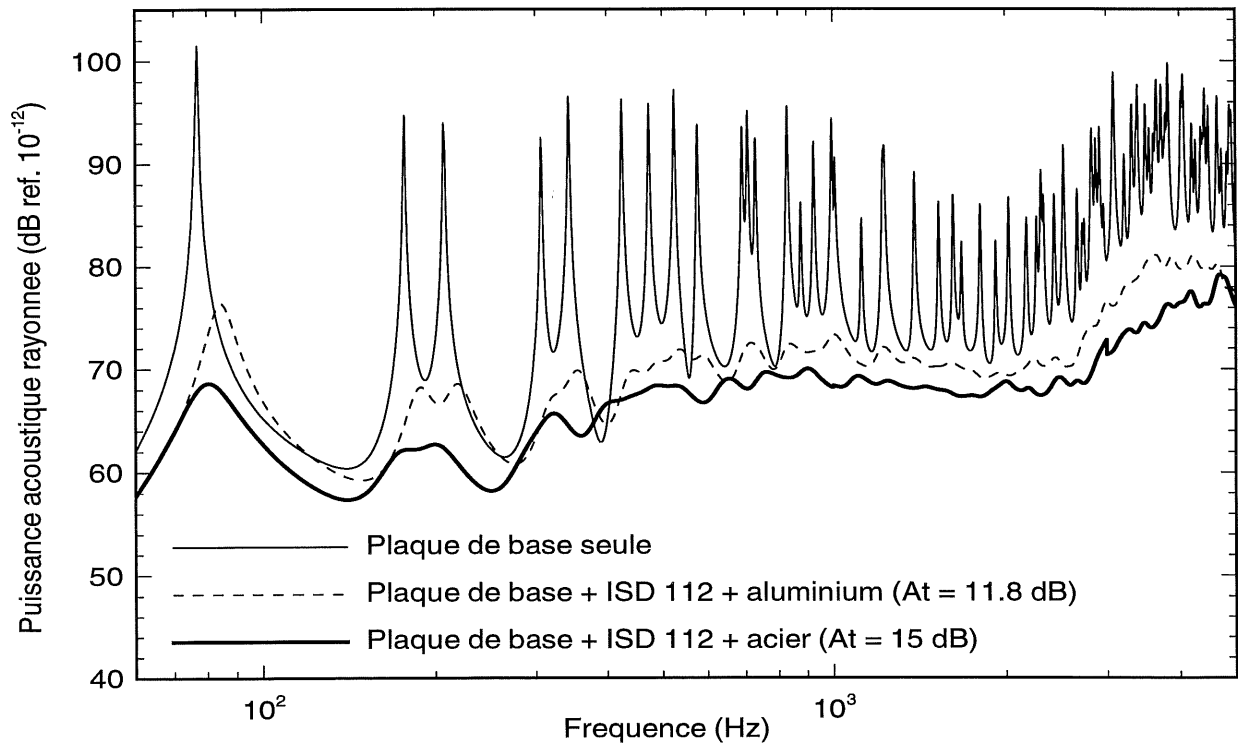


Figure 3.18 : Influence de la couche supérieure sur l'amortissement d'une plaque sandwich.

- Influence de la position de la couche viscoélastique à l'intérieur de la structure

Il est intéressant de déterminer la position optimale de la couche viscoélastique à l'intérieur de la structure. Dans ce test l'épaisseur de la plaque de base et de la couche supérieure varie, c'est l'épaisseur globale de la plaque qui reste constante et égale à 4 mm (Figure 3.19). La couche viscoélastique est constituée du matériau ISD 112 et a une épaisseur constante de 0.25 mm. La Figure 3.20 montre que la position optimum de la couche viscoélastique est au milieu de la structure. Les cas intermédiaires où $l = 6h/10$ et $l = 7h/10$ ne sont pas présentés, car ils sont très proches du cas $l = h/2$, néanmoins, quand la couche supérieure devient mince, l'amortissement est réduit de manière notable.

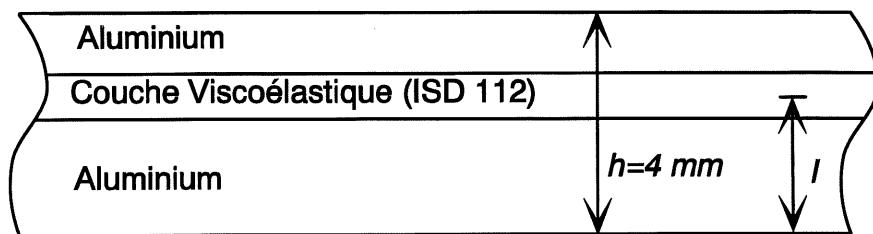


Figure 3.19 : Position de la couche viscoélastique à l'intérieur de la structure.

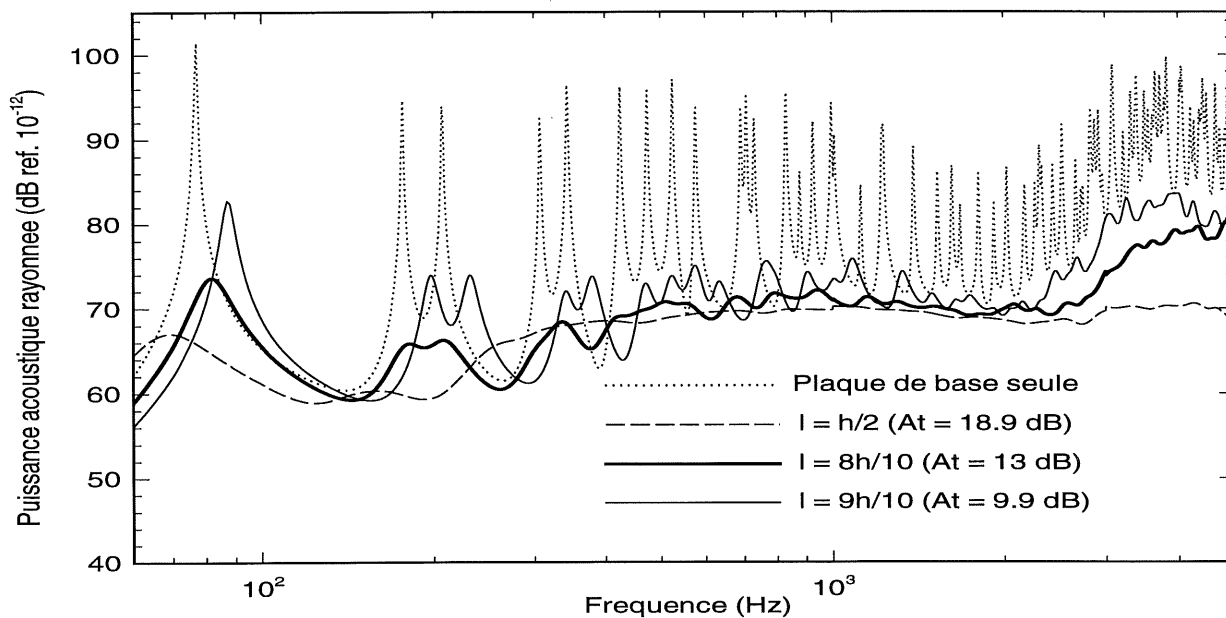


Figure 3.20 : Influence de la position de la couche viscoélastique à l'intérieur de la structure sur la puissance acoustique rayonnée.

3.3 Plaque avec une couverture partielle

Tous les résultats présentés précédemment traitaient le cas d'une plaque de base entièrement recouverte par un traitement viscoélastique, nous allons maintenant nous intéresser aux structures partiellement recouvertes par un traitement amortissant. Deux points vont être abordés dans cette étude : (1) l'influence de la surface de la couverture partielle sur l'amortissement global obtenu, et (2) l'influence de la position de la couverture partielle sur le rayonnement acoustique.

3.3.1 Influence de la surface de la couverture partielle

La Figure 3.22 compare la puissance acoustique rayonnée de la plaque de base seule (caractéristiques : Tableau 3.1) avec les cas avec 25 %, 50 % et 100 % de couverture. La position de la couverture est présentée dans la Figure 3.21, la couche viscoélastique est du ISD 112 (Tableau 3.2), et la couche supérieure est en aluminium (Tableau 3.3). Cette figure montre qu'augmenter la surface du traitement améliore l'amortissement, et cela de manière uniforme sur toute la plage fréquentielle. On remarque par contre, que le gain n'est pas linéaire en fonction de la surface couverte. La Figure 3.23 qui présente l'atténuation acoustique obtenue en fonction du pourcentage de couverture montre que le fait d'ajouter 25 % de couverture procure une atténuation intéressante ($At_{25\%} = 5.7$ dB), mais que plus on augmente la surface de couverture et plus la pente de la courbe diminue. En particulier, on remarque que la différence entre une couverture de 75 % ($At_{75\%} = 10.4$ dB) et une couverture totale ($At_{100\%} = 11.8$ dB) est presque négligeable. On peut donc déduire de cette étude qu'il n'est pas forcément nécessaire d'utiliser une couverture totale pour obtenir un amortissement important. En effet, il est beaucoup plus important d'optimiser le traitement viscoélastique lui-même qu'augmenter la surface de couverture.

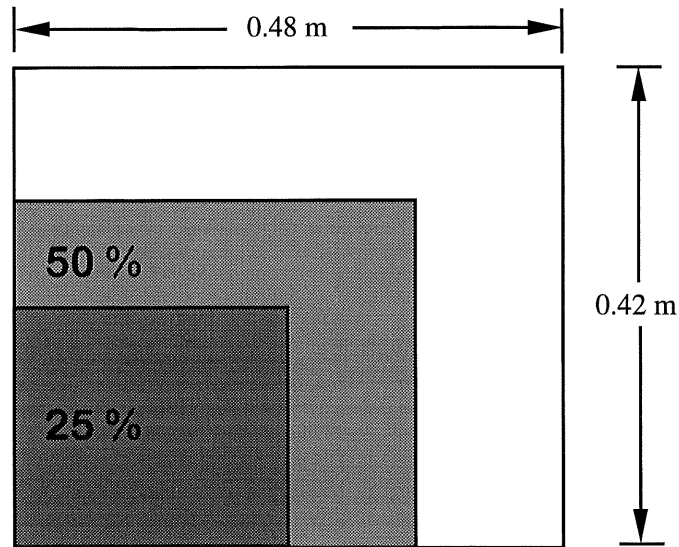


Figure 3.21 : Position de la couverture partielle sur la plaque de base.

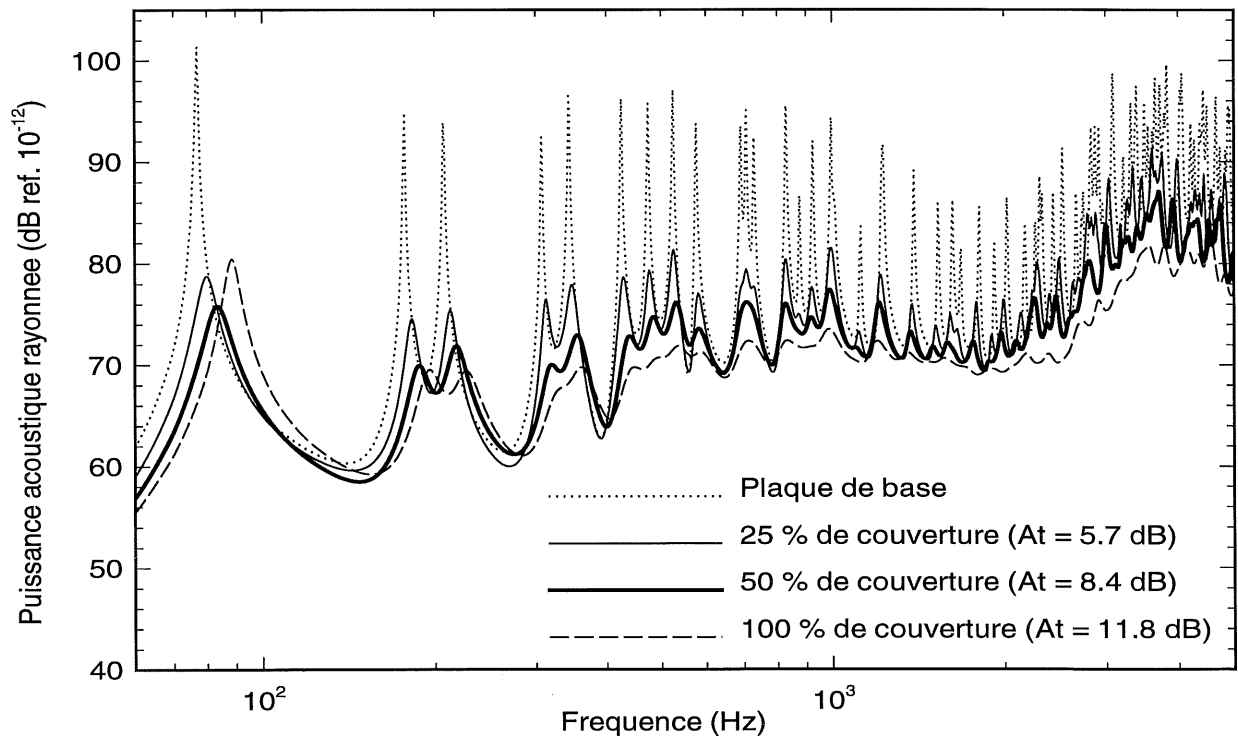


Figure 3.22 : Influence de la surface de la couverture partielle sur la réponse acoustique d'une plaque sandwich.

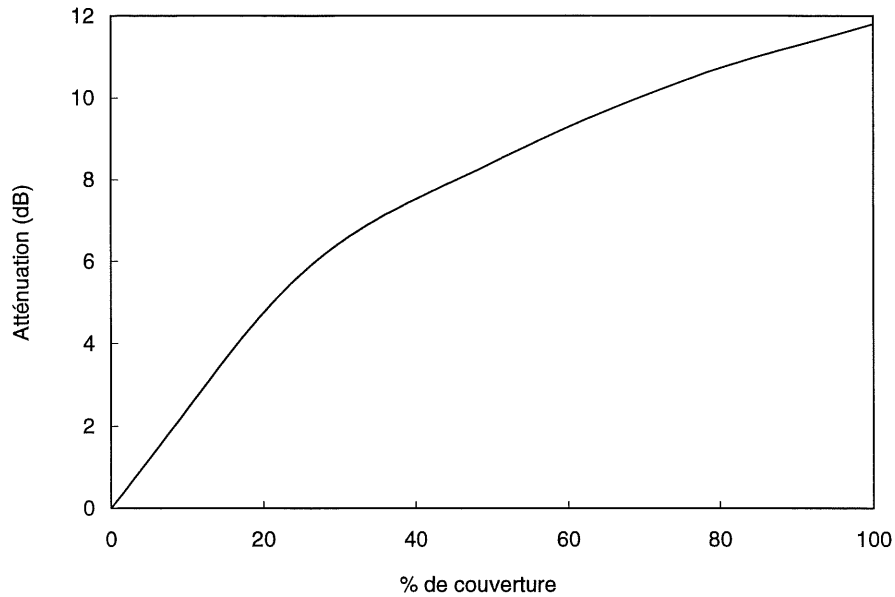


Figure 3.23 : Atténuation globale obtenue en fonction du pourcentage de couverture partielle.

3.3.2 Influence de la position de la couverture partielle

Dans ce paragraphe, on étudie l'influence de la position de la couverture partielle sur l'amortissement. L'objectif est de déterminer la position du traitement viscoélastique partiel qui va maximiser les pertes d'énergie dans la couche viscoélastique. Pour un mode de structure m,n donné, associé à une fréquence de résonance f_{mn} , trois cas peuvent être considérés :

1. Le cas où la longueur de la couverture partielle suivant x et y est moins longue que la longueur d'onde structurale du mode considéré dans les directions x et y .
2. Le cas où la longueur de la couverture partielle suivant x (ou y) est moins longue que la longueur d'onde structurale du mode considéré dans la direction x (ou y), alors qu'on a l'effet inverse dans la direction y (ou x).
3. Le cas où la longueur de la couverture partielle suivant x et y est plus longue que la longueur d'onde structurale du mode considéré dans les directions x et y .

Pour les cas 2 et 3 (hautes fréquences), la position de la couverture partielle a peu d'importance puisque sa dimension est au moins de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde structurale. Par contre,

pour le cas 1 (basses fréquences), étant donné que la couverture ne couvre pas une longueur d'onde au complet la position du traitement viscoélastique va être importante. C'est la densité d'énergie de flexion de la couche de base à l'interface entre la plaque de base et la couche viscoélastique ($z_1 = h_1/2$) qui va nous servir de critère pour déterminer l'emplacement optimum de la couverture partielle. En effet, la flexion de la plaque de base est responsable de l'étirement de la couche viscoélastique et par conséquent de sa dissipation d'énergie. Cette densité d'énergie de flexion est donnée par :

$$dV_2^{(1)}(x, y, h_1 / 2) = \frac{(h_1)^2}{4} \left[Q_{11}^{(1)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + Q_{22}^{(1)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2Q_{12}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4Q_{44}^{(1)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]. \quad (3.4)$$

Afin de maximiser la dissipation dans la couche viscoélastique, il faudra placer la couche viscoélastique aux endroits où cette densité d'énergie de flexion est maximale. Les divers points présentés dans ce paragraphe vont être illustré dans un exemple au paragraphe suivant. Cette technique est proche de la méthode "Modal Strain Energy" (MSE) utilisée en éléments finis (Johnson, 1985, Alberts, 1992, Jha 1993) qui consiste à calculer la facteur de perte global des sous-structures qui constituent la structure globale afin de déterminer les zones de déformation maximale.

- **Exemple**

Six positions différentes d'un traitement viscoélastique contraint sont considérées (Figure 3.24). La plaque de base est décrite dans leTableau 3.1, la couche viscoélastique est constituée d'ISD 112 (Tableau 3.2) et la couche supérieure est en aluminium (Tableau 3.3). La Figure 3.25 présente la puissance acoustique rayonnée pour ces six cas.

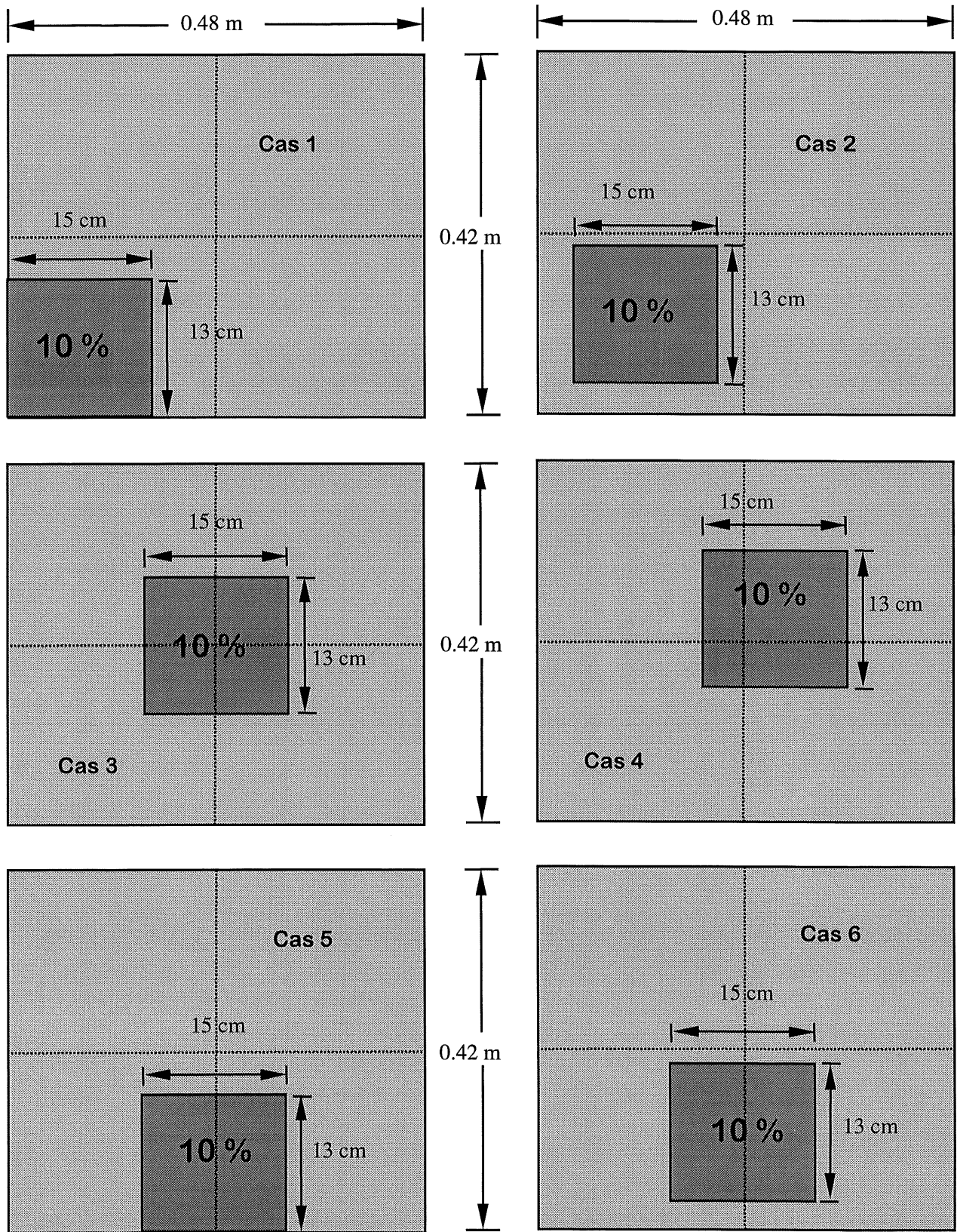


Figure 3.24 : Six positions de la couverture partielle sur la plaque de base.

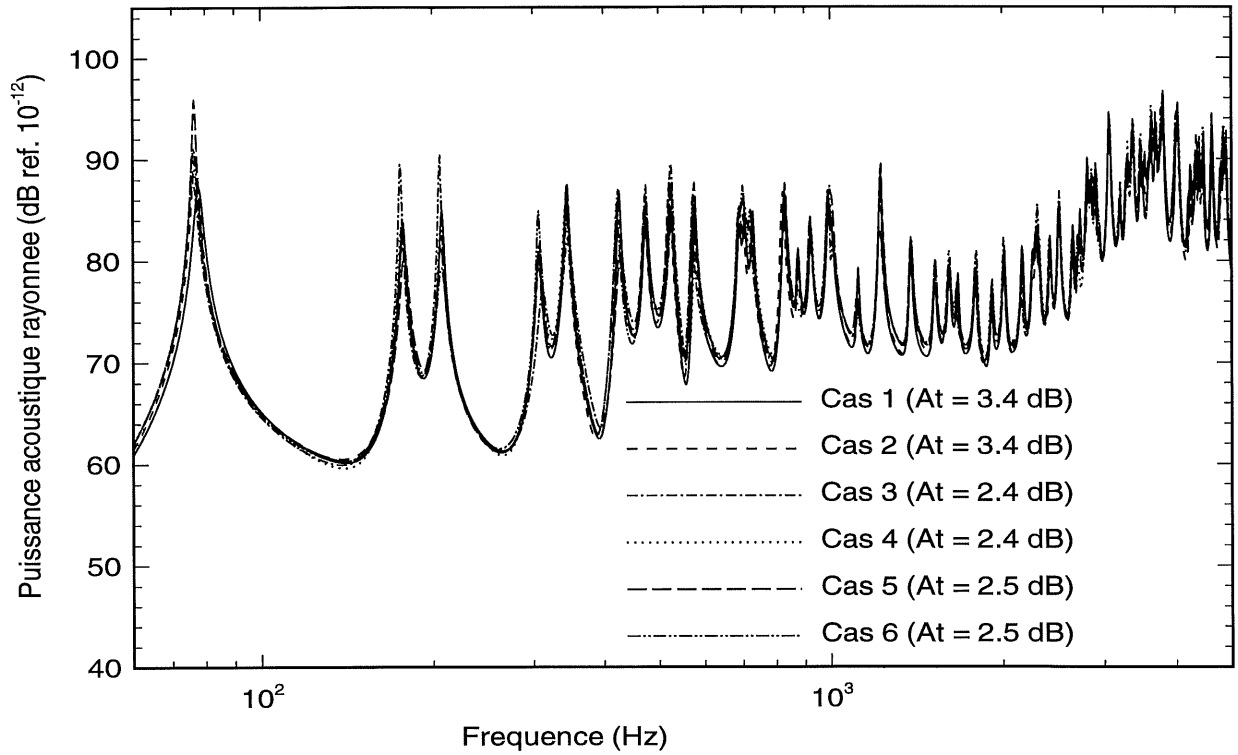


Figure 3.25 : Puissance acoustique rayonnée par plaque sandwich pour six positions différentes de la couverture partielle.

Dans l'exemple de la Figure 3.25, la longueur de la couverture partielle est de 15 cm dans la direction x et de 13 cm dans la direction y . Le Tableau 3.7 donne les longueurs d'onde structurales dans les directions x et y pour les premiers modes de la plaque. La longueur d'onde modale dans la direction x est donnée par :

$$\lambda_m = \frac{2a}{m}, \quad (3.5)$$

et la longueur d'onde modale dans la direction y est donnée par :

$$\lambda_n = \frac{2b}{n}. \quad (3.6)$$

Tableau 3.7 : Longueur d'onde structurale dans les directions x et y pour les 7 premiers modes d'une plaque de dimensions $0.48 \text{ m} \times 0.42 \text{ m}$.

m	λ_m (m)	n	λ_n (m)
1	0.96	1	0.84
2	0.43	2	0.42
3	0.32	3	0.28
4	0.24	4	0.21
5	0.19	5	0.17
6	0.16	6	0.14
7	0.14	7	0.12

- **Analyse en hautes fréquences**

Le Tableau 3.7 montre qu'à partir du mode 6,6, les dimensions x et y de la couverture deviennent plus grandes que les longueurs d'ondes modales λ_m et λ_n . Cela signifie que tous les modes d'ordre supérieur au mode 6,6 ont au moins une longueur d'onde structurale entièrement recouverte par le traitement viscoélastique. Dans ce cas, la position de la couverture partielle n'a plus beaucoup d'importance puisque quelle que soit sa position elle va toujours recouvrir au moins une longueur d'onde structurale. La Figure 3.26 qui présente la puissance acoustique rayonnée en 1/3 d'octave pour les mêmes cas que la Figure 3.25 confirme cette hypothèse, car on remarque qu'en hautes fréquences, quelle que soit la position de la couverture partielle on obtient pratiquement toujours le même niveau.

Remarque

S'il est facile de déterminer l'ordre m,n du mode associé à une fréquence de résonance pour une plaque élastique peu amortie, c'est beaucoup plus délicat dans le cas d'une plaque sandwich avec une couverture partielle et ça n'a pas été possible dans ce cas. La fréquence de résonance du mode 6,6 de la plaque de base seule est à 2765 Hz, il est donc raisonnable de penser qu'au-dessus de cette fréquence soit la condition 2 ou la condition 3, énoncées au début de ce paragraphe, sont satisfaites, c'est pourquoi la Figure 3.26 a été présentée au-delà de 1000 Hz.

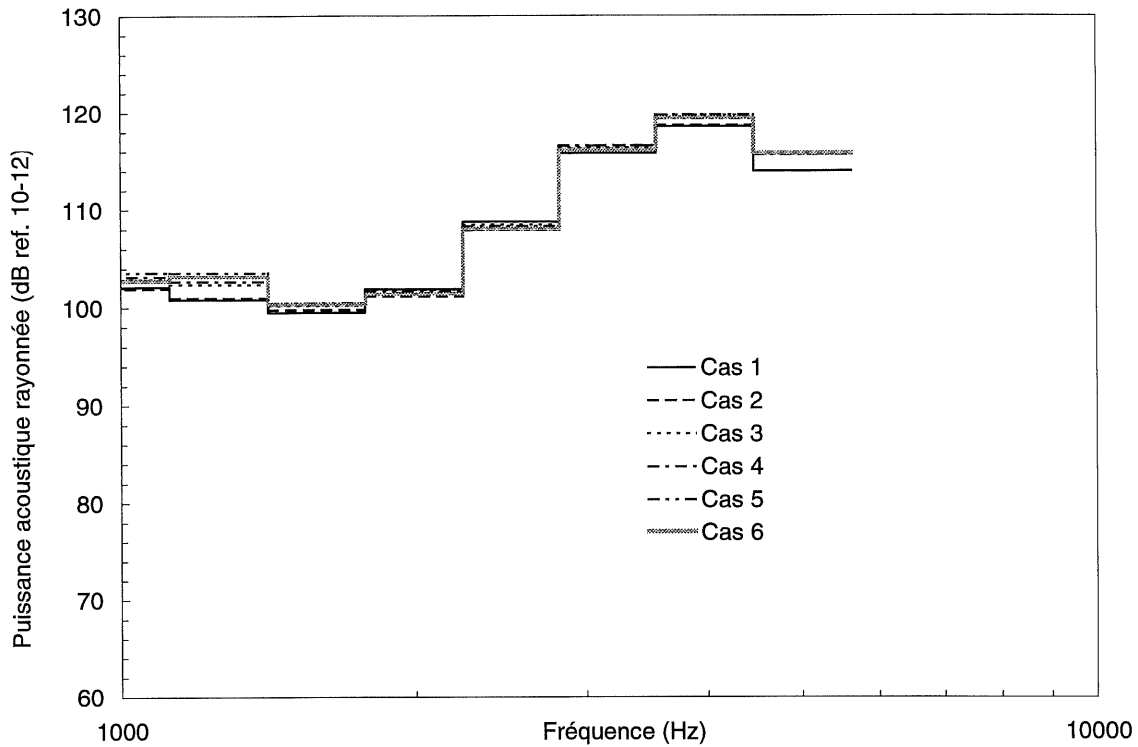


Figure 3.26 : Même résultats que la Figure 3.25, mais présentés au-dessus de 1000 Hz et en 1/3 d'octave.

- **Analyse en basses fréquences**

En basses fréquences par contre, la position de la couverture joue un rôle non négligeable sur le niveau d'amortissement. La Figure 3.27 présente un agrandissement de la Figure 3.25 autour de la première fréquence de résonance (mode 1,1). Cette figure montre que les cas 1 et 3 (voir Figure 3.24) sont les plus efficaces, alors que le cas 5 est le moins performant. La Figure 3.28 qui présente la densité d'énergie de flexion de la couche de base pour le mode 1,1 (équation 3.4), permet de voir que le cas 5 est sur une zone où l'énergie de déformation est faible, alors que les cas 1 et 3 sont sur des zones de déformation maximale.

La Figure 3.29 présente un agrandissement de la Figure 3.25 pour les modes 2,1 et 1,2. Pour le mode 2,1, c'est le cas 3 qui est le moins efficace, ce qui est en accord avec la Figure 3.30. Ce sont les cas 2 et 5 qui sont les plus efficaces pour le mode 2,1. Là encore, la densité d'énergie présentée à la Figure 3.30 confirme que les cas 2 et 5 sont sur des régions qui subissent des déformations importantes.

Pour le mode 1,2 c'est encore le cas 3 qui est le moins efficace pour la même raison que pour le mode 2,1. C'est le cas 6 qui est le plus efficace, la Figure 3.31 confirme effectivement que le cas 6 est sur une zone très déformée.

- **Récapitulatif**

À partir de l'exemple traité dans ce paragraphe, on peut conclure que la position de la couverture partielle joue un rôle important en basses fréquences (dimensions de la couverture inférieures aux longueurs d'ondes structurales), mais que cet effet diminue quand la fréquence augmente (les longueurs d'onde structurales diminuent). De sorte qu'en hautes fréquences la position de la couverture n'a pratiquement aucun effet sur l'amortissement. De plus, on a montré que la densité d'énergie de flexion de la couche de base est un bon indicateur pour optimiser la position de la couverture en basses fréquences.

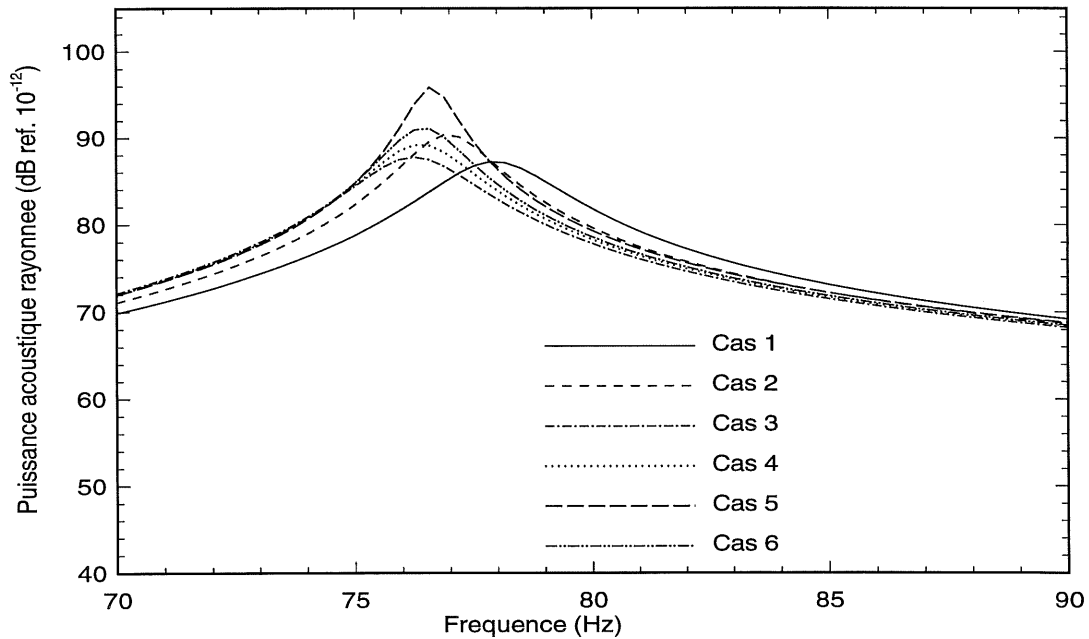


Figure 3.27 : Agrandissement de la Figure 3.25 autour du premier mode.

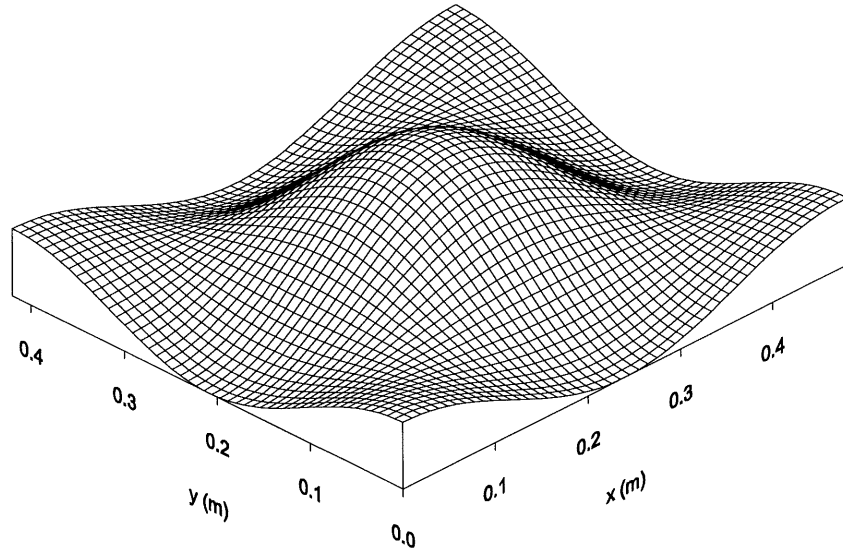


Figure 3.28 : Densité d'énergie de flexion de la couche de base à l'interface entre la plaque de base et la couche viscoélastique ($z_1 = h_1/2$) pour le mode 1,1.

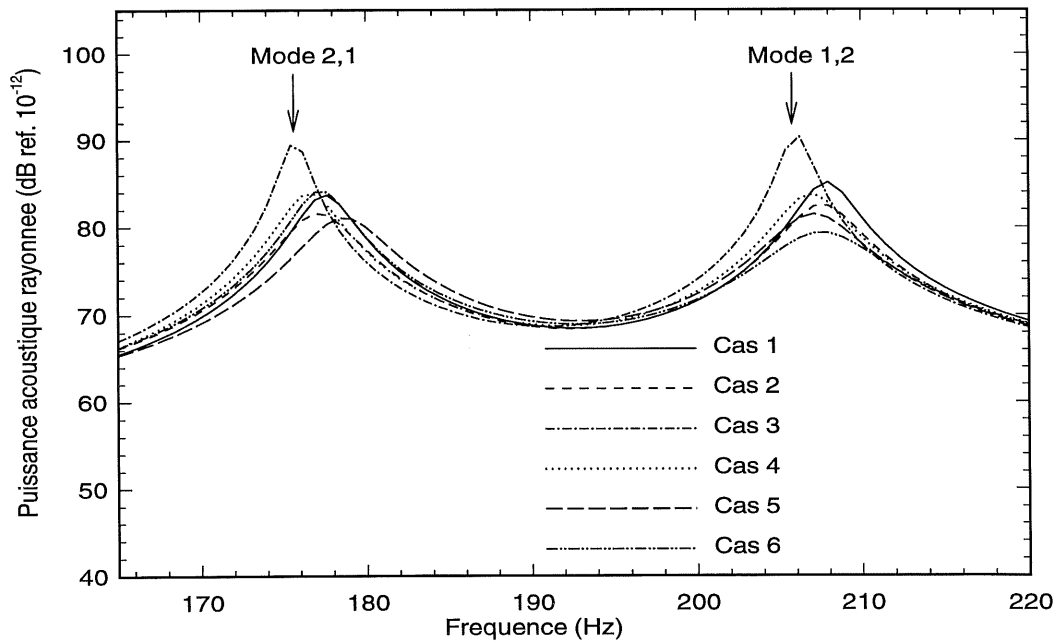


Figure 3.29 : Agrandissement de la Figure 3.25 autour des deuxième et troisième modes.

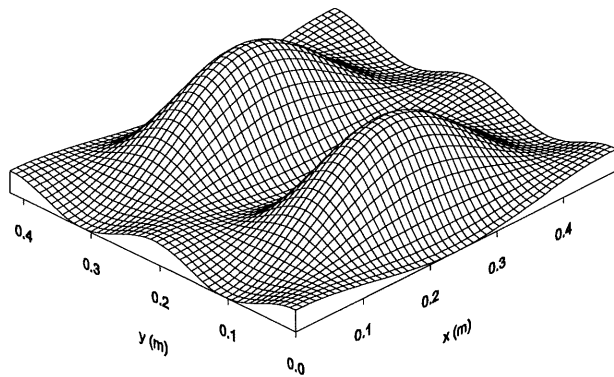


Figure 3.30 : Densité d'énergie de flexion de la couche de base à l'interface entre la plaque de base et la couche viscoélastique ($z_1 = h_1/2$) pour le mode 2,1.

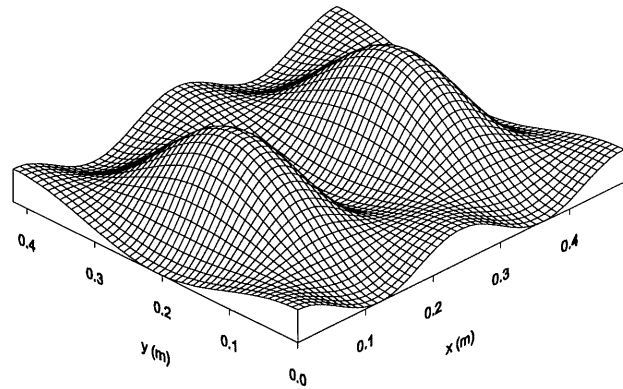


Figure 3.31 : Densité d'énergie de flexion de la couche de base à l'interface entre la plaque de base et la couche viscoélastique ($z_1 = h_1/2$) pour le mode 1,2.

3.4 Optimisation d'un traitement viscoélastique à l'aide d'un algorithme génétique

3.4.1 Introduction

Les études paramétriques présentées aux paragraphes 3.2 et 3.3 présentent les principaux paramètres à considérer afin d'amortir efficacement les vibrations et le rayonnement acoustique d'une structure à l'aide de matériaux viscoélastiques. Néanmoins, dans le cadre d'un projet industriel, il serait très intéressant de ne pas avoir à refaire tous ces calculs pour obtenir le traitement optimum. C'est dans ce but, que le programme informatique créé à partir de l'étude théorique du chapitre 2, a été combiné avec un code de calcul d'optimisation, développé par Ratle (1998) et basé sur la méthode des algorithmes génétiques. Le principe de base des algorithmes génétiques est brièvement présenté dans le paragraphe qui suit. Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter aux travaux de Michalewicz (1994).

3.4.2 Les algorithmes génétiques

Le but d'un algorithme d'optimisation est de déterminer la configuration optimale parmi toutes les configurations possibles d'un système. Cette configuration optimale est caractérisée comme étant l'extrémum d'une fonction coût arbitrairement définie par l'utilisateur. Les algorithmes génétiques sont appelés ainsi car ils utilisent le principe d'évolution des espèces naturelles (animaux, végétaux). Le principe de fonctionnement d'un tel algorithme est le suivant :

1. Sélection d'une population parents (au début de l'algorithme cette population est initialisée arbitrairement, après elle est choisie de telle sorte à favoriser les individus les plus proches de la solution optimale, roulette biaisée).
2. Croisement entre les différents membres de la population parents (création de nouveaux individus par croisement entre les individus parents).
3. Mutation (création d'individus de manière aléatoire, cette étape évite de tomber dans un minimum local).
4. Évaluation de la fonction coût.

Les étapes 1 à 4 sont répétées tant que la fonction coût n'a pas atteint le critère fixé par l'utilisateur. Ces types d'algorithme sont très robustes et permettent d'optimiser plusieurs variables à la fois.

3.4.3 Application aux traitements viscoélastiques

Marcelin *et al* (1994, 1995 (a) et (b)) a également utilisé les algorithmes génétiques dans le cas de structures multicouches incluant des matériaux viscoélastiques. Il optimise la position et la séquence des couches pour obtenir un amortissement optimum. Il utilise le facteur de perte global comme fonction coût qu'il calcule à l'aide d'un code d'élément finis couplé avec une méthode énergétique (Johnson *et al* 1982).

Dans notre cas, la fonction coût est la vitesse quadratique moyenne de la structure intégrée sur une plage fréquentielle donnée. Quatre paramètres sont simultanément optimisés, il s'agit du module d'Young et de l'épaisseur de la couche viscoélastique, et du module d'Young et de l'épaisseur de la couche supérieure. Ces paramètres ont été choisis car ce sont ceux qui ont le plus d'impact sur

l'amortissement. De plus, il est inutile d'optimiser d'autres paramètres car toutes les grandeurs ne sont pas indépendantes dans un solide élastique ou viscoélastique. Par exemple, si on trouve un module d'Young donné, on peut trouver un matériau qui se rapproche de cette valeur, mais de ce fait la densité, le facteur de perte et le coefficient de Poisson vont être fixés. Si le programme optimisait également la densité et le coefficient de Poisson on aurait beaucoup de mal à déterminer un matériau réel à partir des données du programme.

Chacun des quatre paramètres à optimiser peut être traité de deux manières différentes : soit comme une variable continue, qui peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle fixé, soit comme une variable discrète, qui ne peut prendre que certaines valeurs préalablement fixées. Le choix de paramètres continus implique qu'il n'y aura pas forcément de matériau avec les valeurs trouvées par le programme d'optimisation. Dans le cas de paramètres discrets, le programme dispose d'une banque de matériaux pour la couche viscoélastique et pour la couche supérieure et le programme d'optimisation choisit les matériaux qui minimisent la fonction coût. Cela ne correspond pas forcément à la configuration optimale, mais présente l'avantage de donner une solution réaliste au problème. Le choix de paramètres discret est certainement à privilégier dans un cadre industriel, par contre, cela suppose que le programme d'optimisation dispose d'une banque de matériaux viscoélastiques complète couvrant une grande plage de température et de fréquence.

Actuellement le programme d'optimisation calcule une valeur de module d'Young constante dans une plage fréquentielle donnée, or, le paragraphe 3.2.4 a montré que le module d'Young optimum de la couche viscoélastique est représenté par une droite croissante en fonction de la fréquence. Cela signifie que le programme d'optimisation calcule une valeur moyenne du module d'Young dans la plage fréquentielle considérée.

Le programme d'optimisation par algorithme génétique a permis de confirmer les résultats trouvés dans l'étude paramétrique du paragraphe 3.2.4. En particulier, il a été constaté que seule la rigidité de la couche viscoélastique admet un optimum, les autres paramètres ne présentent pas ce phénomène. Cela signifie qu'augmenter les épaisseurs de la couche viscoélastique, de la couche supérieure ou encore la rigidité de la couche supérieure, améliore toujours l'amortissement. De ce fait, dans tous les tests qui ont été réalisés, la valeur optimale trouvée par l'algorithme génétique pour ces trois grandeurs (E_{visco} , h_{visco} et $E_{supérieur}$) correspond toujours avec la valeurs maximale permise.

- Exemple d'application

Dans ce paragraphe les résultats donnés par l'algorithme génétique sont comparés au calcul du module d'Young optimum proposé au paragraphe 3.2.4. Les caractéristiques de la plaque de base et de la couche supérieure sont données au Tableau 3.8, celles de la couche viscoélastique au Tableau 3.9. Afin d'étudier indépendamment le comportement du module d'Young de la couche viscoélastique, les trois autres paramètres à optimiser (E_{visco} , h_{visco} et $E_{supérieure}$) sont fixés dans ce cas (Tableau 3.8 et Tableau 3.9). On considère la plage fréquentielle 0-1000 Hz. Le module d'Young optimum trouvé par l'algorithme génétique trouvé dans ce cas est : 9×10^6 Pa. La Figure 3.32 présente le module d'Young optimum calculé par la méthode proposée au paragraphe 3.2.4 et la valeur donnée par l'algorithme génétique. On remarque que la valeur calculée par l'algorithme génétique correspond à la moyenne du module d'Young optimum (valeur à 500 Hz).

Tableau 3.8 : Caractéristiques de la plaque de base et de la couche supérieure utilisées pour le calcul d'optimisation avec l'algorithme génétique.

Longueur (m)	Largeur (m)	Épaisseur (mm)	Masse volumique (kg/m ³)	Module d'Young (Pa)	Coefficient d'amortissement	Coefficient de Poisson
0.508	0.127	1.27 (base) 0.25 (sup.)	2700	7×10^{10}	5×10^{-3}	0.33

Tableau 3.9 : Caractéristiques de la couche viscoélastique utilisée pour le calcul d'optimisation avec l'algorithme génétique.

Épaisseur (mm)	Masse volumique (kg/m ³)	Coefficient d'amortissement	Coefficient de Poisson
0.25 mm	1000	1	0.45

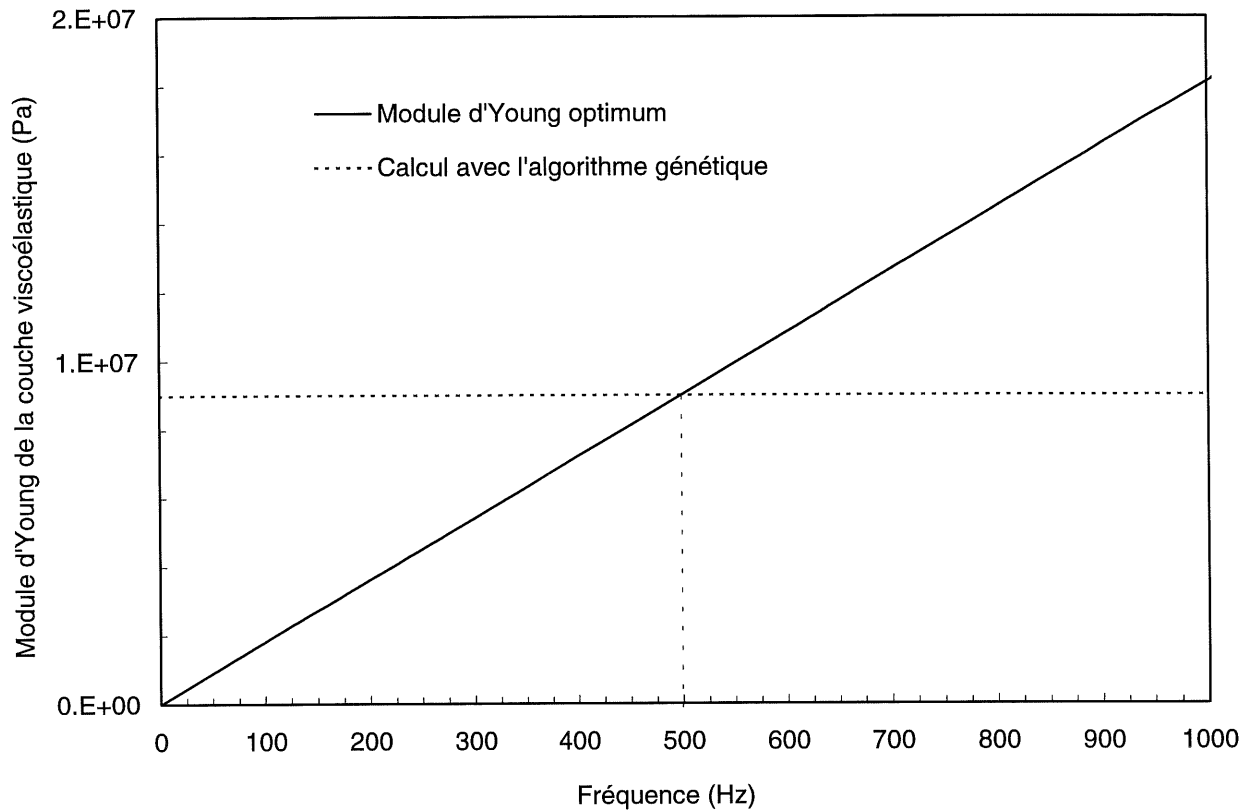


Figure 3.32 : Comparaison entre le module d'Young optimum calculé par la méthode proposée dans ce chapitre et par l'algorithme d'optimisation génétique.

La Figure 3.33 présente la puissance acoustique rayonnée en considérant les deux cas du module d'Young présentés à la Figure 3.32. Les différences sont mineures entre les deux courbes, de plus, on observe que le cas où 9×10^6 Pa est légèrement plus rigide en basses fréquences et légèrement moins rigide en hautes fréquences que le cas calculé avec le module d'Young optimum, ce qui est en accord avec la Figure 3.32. Autour de 500 Hz les deux courbes sont confondues.

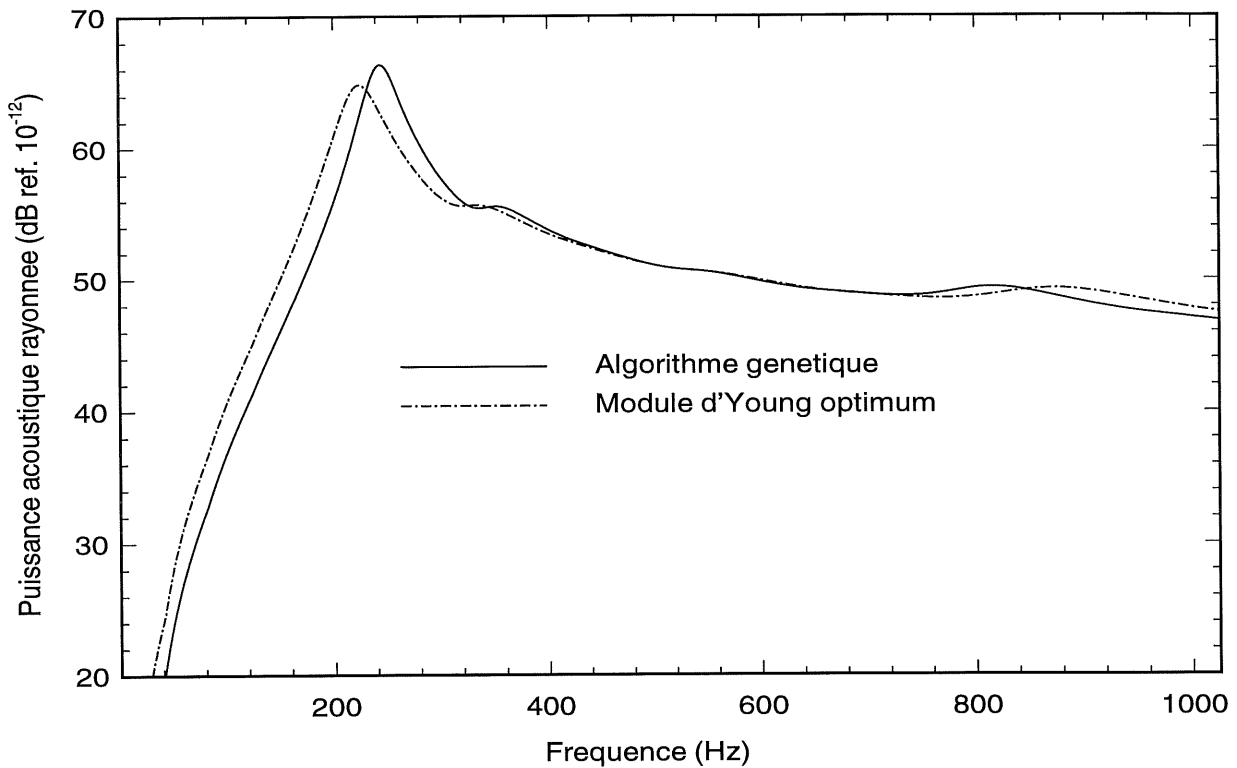


Figure 3.33 : Réponse acoustique d'une plaque sandwich avec le module d'Young de la couche viscoélastique obtenu par l'algorithme génétique ou par le calcul proposé à l'équation 3.3.

3.5 Synthèse sur l'amortissement des structures par l'ajout de matériaux viscoélastiques

Ce chapitre a présenté une étude complète sur le mécanisme d'amortissement dans les structures bicouches et tricouches incluant des matériaux viscoélastiques.

Le point principal dans l'amortissement des structures par des matériaux viscoélastiques consiste à placer le matériau amortissant de telle sorte à maximiser son énergie de déformation. En effet, plus le matériau amortissant se déforme et plus il dissipe de l'énergie. C'est la raison pour laquelle la configuration sandwich (couche viscoélastique comprise entre deux couches rigides) est très utilisée car elle maximise l'énergie de déformation de cisaillement transversal de la couche viscoélastique. Dans le cas de l'amortissement libre il n'y a pratiquement pas de cisaillement transversal et il est en général plus

difficile d'obtenir un amortissement aussi efficace que dans le cas où on rajoute une couche supérieure sur la matériau amortissant.

La rigidité de la couche viscoélastique est certainement le paramètre le plus important dans l'étude de l'amortissement des structures :

- Dans le cas de l'amortissement libre, il suffit d'augmenter cette rigidité pour augmenter l'énergie de déformation. Il ne faut pas oublier que pour la plupart des matériaux, quand la rigidité augmente le coefficient d'amortissement a tendance à diminuer ; de sorte qu'il n'existe pas de matériau très rigide avec un coefficient d'amortissement élevé. Un compromis doit donc être trouvé entre la rigidité et le coefficient d'amortissement.
- Dans le cas de l'amortissement contraint il a été montré que la rigidité optimum de la couche viscoélastique est une fonction linéaire de la fréquence.

A partir de ces deux remarques, on comprend qu'un matériau amortissant efficace dans la configuration amortissement libre ne le sera pas dans une configuration de plaque sandwich, et vice versa.

En dehors de la rigidité de la couche viscoélastique, les autres paramètres d'un traitement viscoélastique contraint (couche viscoélastique, couche supérieure) n'admettent pas de valeur optimale. Le Tableau 3.10 résume les effets observés sur l'amortissement global de la structure quand on change divers paramètres du traitement amortissant. Seuls les paramètres significatifs sont présentés dans ce tableau, le coefficient d'amortissement de la couche supérieure n'est pas considéré, puisqu'il est par définition faible devant celui de la couche viscoélastique. La densité de la couche viscoélastique n'est pas considérée non plus car c'est un paramètre qui joue peu de rôle sur l'amortissement.

Tableau 3.10 : Évolution de l'amortissement global d'une structure sandwich en fonction de divers paramètres du traitement amortissant.

Paramètres	Amplitude	Amortissement global
h_{visco}	↗	↗
η_{visco}	↗	↗
$E_{supérieur}$	↗	↗
$h_{supérieur}$	↗	↗
$\rho_{supérieur}$	↗	↗

Une étude paramétrique a été menée sur le cas spécifique des plaques avec un traitement viscoélastique partiel. Deux points ont été mis en évidence :

- Une couverture de 25 % de la surface totale de la plaque est capable de réduire notablement les vibrations de la structure, alors que le gain entre 75 % et 100 % n'est pas très important. Cette remarque est vraie quelle que soit la plage de fréquences considérée.
- La position de la couverture partielle est un paramètre qui joue un rôle important sur l'amortissement en basses fréquences, mais son effet diminue quand la fréquence augmente. Il est bien évident que plus la couverture est grande par rapport à la plaque de base et moins sa position a d'importance.

Une solution au problème du choix du traitement viscoélastique optimum a été proposée grâce à une méthode d'optimisation basée sur un algorithme génétique. Les résultats donnés par l'algorithme génétique sont en parfait accord avec l'étude paramétrique réalisée dans ce chapitre.

4. Rayonnement acoustique d'une structure recouverte par un matériau de masquage et immergée dans un fluide lourd

4.1 Introduction

4.1.1 Problématique et objectifs

C'est un projet conjoint entre le Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke (GAUS) et le Centre de Recherche pour la Défense Atlantique (CRDA/DREA) qui est à l'origine de cette étude. Le but de ce projet était d'étudier les moyens actuellement possibles pour réduire le champ acoustique rayonné dans un fluide lourd (eau), par une structure plane excitée mécaniquement ou acoustiquement. L'objectif final de ce projet était d'appliquer les résultats de cette étude, effectuée sur une structure académique de petites dimensions, au cas d'une coque de bateau. Les impératifs à prendre en compte étaient les suivants :

1. Utiliser un processus passif, les méthodes de contrôle actif demandant en général une mise en œuvre trop complexe et/ou trop coûteuse.

2. Traiter uniquement la surface extérieure de la coque du bateau, car cela permet de rajouter facilement le traitement après la construction du navire et aussi parce que l'intérieur est pratiquement inaccessible du fait du très grand nombre d'équipements installés.

Les matériaux viscoélastiques, étudiés dans les deux chapitres précédents, sont bien sûr capables de réduire le champ acoustique rayonné par une coque de bateau. Néanmoins, dans ce chapitre nous allons étudier un autre type de matériaux, spécifiques aux structures immergées dans un fluide lourd : les matériaux de masquage. Si les matériaux viscoélastiques peuvent être utilisés aussi bien en fluide lourd, qu'en fluide léger, il n'en est pas de même pour les matériaux de masquage. En effet, ces derniers utilisent la masse ajoutée par le fluide lourd, pour isoler le fluide des vibrations de la coque, et ainsi réduire le rayonnement acoustique. En fluide léger, un matériau de masquage n'a aucun effet sur la réduction du champ acoustique rayonné, car la masse ajoutée par un fluide léger est négligeable (sauf pour une structure très mince).

La principale caractéristique mécanique d'un matériau de masquage est d'être beaucoup moins rigide que les matériaux classiquement utilisés dans l'industrie (métaux, fibre de verre...). Ils sont également moins rigides que les matériaux viscoélastiques étudiés dans les chapitres précédents. Cette propriété a pour conséquence d'entraîner des déformations dans l'épaisseur du matériau, quand il est inséré entre une structure qui vibre et un fluide lourd. Contrairement aux chapitres précédents, ce n'est pas un mécanisme de dissipation d'énergie qui va être étudié, mais plutôt un mécanisme de découplage entre le mouvement de la structure de base (coque du bateau) et le fluide.

Les matériaux de masquage servent en pratique à réduire le rayonnement propre d'une structure ou la réflexion d'ondes acoustiques incidentes sur cette structure (signature sonar). Ils sont très utilisés pour diminuer la "trace" acoustique des navires et sous-marins militaires.

Les déformations dans l'épaisseur du matériau ne sont pas prises en compte dans le modèle pour les matériaux viscoélastiques décrit au chapitre 2, car ces derniers sont trop rigides et souvent trop minces pour avoir des déformations significatives dans le sens de l'épaisseur. Il va donc falloir utiliser une formulation théorique différente de celle présentée au chapitre 2.

L'objectif de ce chapitre est donc de proposer une formulation théorique pour le rayonnement acoustique d'une plaque élastique, recouverte par un matériau de masquage et immergée dans un fluide

lourd. Les critères à prendre en compte seront, (1) la généralité et la simplicité de la formulation et (2) sa capacité à donner des tendances fiables en basses, moyennes et hautes fréquences.

Une revue de la littérature est effectuée dans le paragraphe qui suit, afin de voir, (1) quel sont les travaux déjà effectués dans ce domaine, et (2) quels sont les points qui restent à étudier afin de proposer une formulation théorique originale du problème mentionné ci-dessus.

4.1.2 État des connaissances

La revue bibliographique qui suit porte essentiellement sur la modélisation du comportement vibratoire des matériaux de masquage. Le formalisme global de l'étude, ainsi que le mode de résolution, vont reprendre les bases déjà présentées au chapitre 2. Ainsi, le comportement vibratoire de la plaque de base va utiliser la théorie de Love-Kirchhoff pour les plaques minces en flexion, alors que le problème acoustique sera traité à l'aide de la formulation intégrale.

• Caractérisation expérimentale

Beaucoup d'études expérimentales ont été réalisées afin de caractériser les propriétés acoustiques des matériaux de masquage. Audoly & Giangréco (1991), et Giangréco (1990) ont effectué des mesures à l'aide d'hydrophones se déplaçant dans une cuve parallélépipédique pleine d'eau, la structure sur laquelle est posé le matériau de masquage étant une plaque rectangulaire. Dans le cas d'une excitation acoustique, ils supposent que l'on peut obtenir des ondes planes progressives, et dans le cas d'une excitation par la structure, ils supposent qu'elle peut agir comme un piston plan. Ces auteurs définissent quatre grandeurs mesurables pour déterminer les performances acoustiques des matériaux de masquage :

- Le coefficient de réflexion : rapport entre l'onde plane réfléchie et l'onde plane incidente, Figure 4.1,
- Le coefficient de transmission : rapport entre l'onde plane transmise et l'onde plane incidente, Figure 4.1),
- Le coefficient de masquage : on considère un support vibrant à la vitesse V_0 (Figure 4.2), sans matériau de masquage le support rayonne une onde plane d'amplitude P_0 , avec un matériau il

rayonne une onde plane d'amplitude P , le coefficient de masquage est défini comme le rapport P/P_0 .

- Le coefficient d'anéchoïsme : c'est le coefficient de réflexion quand la structure de base est un plan rigide de grandes dimensions par rapport au matériau de masquage (Figure 4.3).

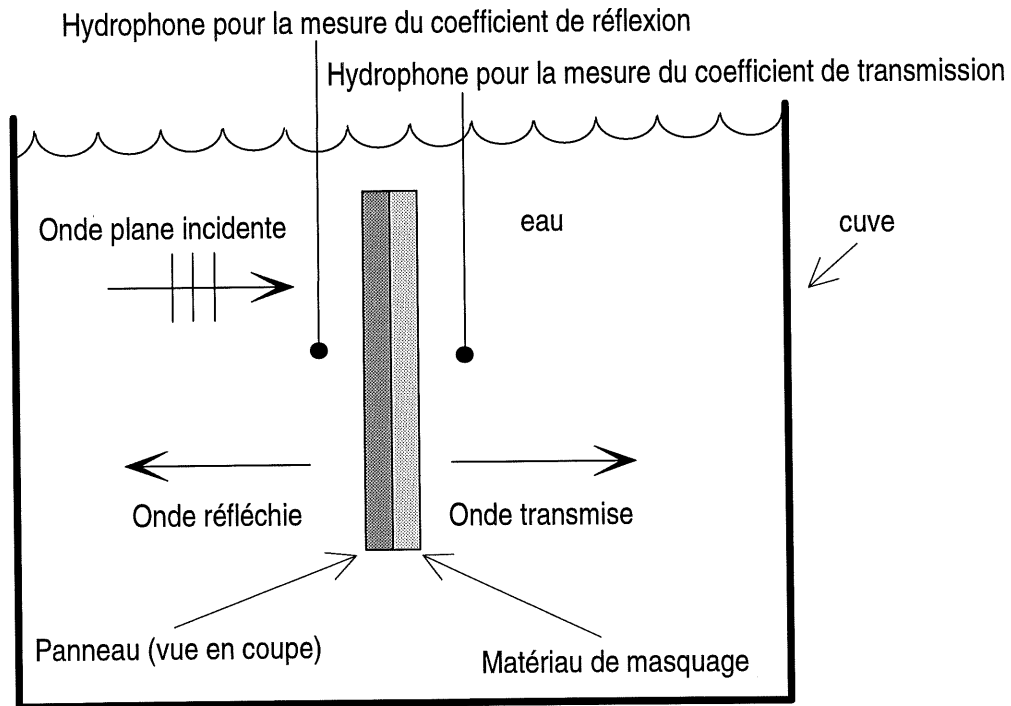


Figure 4.1 : Mesure du coefficient de transmission et du coefficient de réflexion d'un matériau de masquage.

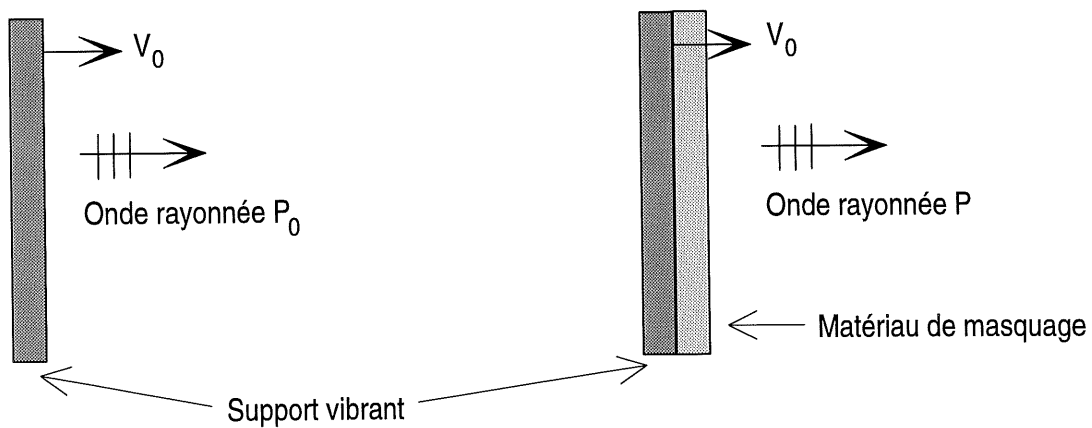


Figure 4.2 : Mesure du coefficient de masquage.

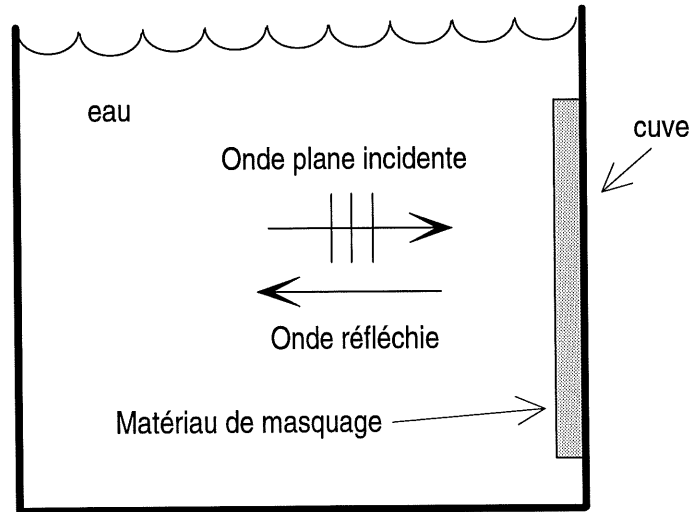


Figure 4.3 : Mesure du coefficient d'anéchoïsme d'un matériau de masquage,

La mesure de ces grandeurs est assez délicate, du fait des réflexions et de la diffraction sur les parois et sur la structure. De plus, les grandeurs que l'on mesure caractérisent le système structure de base/matériau de masquage, c'est pourquoi ces auteurs définissent une méthode par matrice de transfert, qui permet de remonter aux vrais coefficients caractéristiques du matériau de masquage. Giangréco et Audoly font cette étude dans le cas d'une onde plane d'incidence normale, Jardin (1997), la généralise dans le cas d'une onde plane de direction quelconque.

La technique présentée ci-dessus n'est valide que dans le cas des moyennes et hautes fréquences (> 1500 Hz), dans le cas des basses fréquences (< 1500 Hz), elle ne peut plus être utilisée du fait des trop grandes longueurs d'onde acoustique par rapport aux dimensions de la cuve et de la structure. Pour palier cet inconvénient, Bessard *et al* (1994), propose une méthode de mesure du coefficient de masquage en basses fréquences, à l'aide d'un tube à ondes planes progressives. L'échantillon de matériau est placé à une extrémité du tube, soumis à une excitation harmonique, l'autre extrémité étant anéchoïque. La mesure est réalisée à partir d'hydrophones qui affleurent la surface du tube.

- **Théorie de l'élasticité tridimensionnelle**

Si on s'intéresse aux modèles théoriques capables de décrire le comportement vibro-acoustique d'une structure élastique, recouverte par un matériau de masquage et immergée dans un fluide lourd, il apparaît rapidement que la seule manière rigoureuse de décrire le comportement du matériau de masquage requiert l'utilisation de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. Cette théorie prend en compte toutes les

déformations et les contraintes subis par la structure. Cela implique une matrice d'élasticité de dimensions 6×6 , qui fait intervenir le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau. La théorie de l'élasticité bidimensionnelle, présentée au chapitre 2, fait trop d'hypothèses simplificatrices quant aux contraintes et aux déformations dans le sens de l'épaisseur de la structure pour décrire correctement les matériaux des masquages* (hypothèse des contraintes planes, hypothèses des déformations planes, Batoz-Dhatt, 1992). Noor et Burton (1989, 1992), font une revue détaillée des modèles qui utilisent la théorie tridimensionnelle de l'élasticité pour des structures finies d'un point de vue dynamique, mais le caractère acoustique n'est pas considéré, pas plus que la présence d'un fluide lourd. De plus, ils remarquent que les applications numériques engendrées par la théorie tridimensionnelle de l'élasticité sont souvent lourdes en raison du grand nombre de degré de liberté requis, et permettent rarement de donner des résultats en hautes fréquences. Peu d'études utilisant la théorie de l'élasticité tridimensionnelle pour des structures finies ont été réalisées dans le cas des matériaux de masquage, on peut néanmoins citer les travaux suivants :

Laulagnet *et al* (1989, 1994), considèrent une coque cylindrique finie, bafflée, simplement appuyée et couverte par un matériau de masquage. La coque est décrite de manière classique par l'opérateur de Donnell, alors que le matériau de masquage est modélisé avec les équations de l'élasticité tridimensionnelle. Afin de résoudre ces équations en basses fréquences, Laulagnet décompose le déplacement transverse (dans l'épaisseur du matériau de masquage) en série de Taylor et va jusqu'à l'ordre 2 pour les applications numériques.

Garrison *et al* (1992, 1994), proposent un modèle de plaque sandwich, rectangulaire, bafflée, avec une couche centrale qui accepte des déformations dans l'épaisseur. Le déplacement transverse du matériau composite (couche centrale), est décrit à l'aide d'un polynôme du premier ordre. Cette étude est appliquée aux matériaux viscoélastiques et ne prend pas en compte la charge fluide.

Certains auteurs utilisent la théorie tridimensionnelle de l'élasticité en considérant des structures infinies, cela permet de tenir compte de la déformation dans l'épaisseur tout en gardant une formulation assez simple. Ko (1997), étudie un système constitué par une structure plane, infinie, couverte par un matériau de masquage. La plaque de base est excitée par une force ponctuelle et est immergée dans l'air, alors que le matériau de masquage est immergé dans l'eau. La plaque de base et le matériau de masquage

* Les déformations dans le sens de l'épaisseur doivent être prépondérantes dans les matériaux de masquage, car ce sont elles qui procurent l'isolation acoustique.

sont modélisés comme des solides élastiques qui supportent des ondes de cisaillement et des ondes de traction-compression. Keltie (1998) considère le même type de modèle, mais définit le comportement de la plaque de base à l'aide de la théorie des plaques minces au lieu de considérer les mêmes hypothèses que pour le matériau de masquage, comme c'est le cas dans les travaux de Ko.

Il apparaît donc que la théorie de l'élasticité tridimensionnelle, bien que très rigoureuse, est assez peu utilisée pour décrire le comportement de structures finies, couvertes par un matériau de masquage, en raison de la lourdeur de la formulation.

- **Modèle à réaction localisée**

Le modèle à réaction localisée suppose que le matériau de masquage se comporte comme une répartition uniforme de ressorts transversaux, sans masse. Ce modèle est très utilisé en acoustique sous-marine en raison de sa simplicité. Il prend en compte les déformations dans l'épaisseur du matériau, et il est appelé ainsi car la déformation du matériau en un point ne dépend que du déplacement de la structure de base et de la pression acoustique à la verticale de ce point. Dans ce type de modèle, le matériau est décrit uniquement par une rigidité (ce point va être plus détaillé au paragraphe 4.2.2). Dans la suite de ce paragraphe, les principaux travaux qui utilisent ce modèle sont présentés. Certains articles présentés n'utilisent pas exactement le modèle à réaction localisée, mais des modèles qui s'en approchent.

Crighthon (1979) étudie la réflexion des ondes sur une plaque élastique infinie, couverte par un matériau de masquage et immergée dans un fluide lourd. Il utilise le modèle à réaction localisée et s'intéresse au coefficient de réflexion en onde plane dans le cas d'une onde incidente rasante.

Maidanik (1968, 1974, 1984) traite le cas de structures multicouches, infinies, immergées dans un fluide. Il utilise le modèle à réaction localisée pour décrire le comportement des matériaux de masquage et développe les équations du système à partir de l'analogie mécanique/électrique.

Le comportement vibratoire d'une poutre de type Timoshenko, supportant un réseau de ressorts uniformément répartis a été étudié en détail par Chen *et al* (1993, 1994). Cet auteur fait une analyse des modes couplés du système poutre/ressorts et présente une étude sur la variation des fréquences de résonance du système en fonction de la raideur des ressorts.

House (1991) calcule la perte par transmission d'un panneau infini excité par une onde plane en incidence normale et couvert par un matériau de masquage. Les deux matériaux sont traités comme des

fluides caractérisés par une impédance. Il trouve une bonne concordance entre ce modèle et une mesure sur une maquette à l'échelle 1/10 d'une coque de bateau.

Laulagnet *et al* (1991, 1994) appliquent le modèle à réaction localisée au cas d'une coque bafflée, simplement appuyée, couverte par un matériau de masquage. Il compare cette méthode avec un modèle rigoureux qui fait appel à la théorie tridimensionnelle de l'élasticité. Il montre que le modèle à réaction localisée est une bonne approximation du comportement dynamique des matériaux de masquage.

Le cas d'un piston plan, circulaire, couvert par un matériau de masquage et immergé dans un fluide lourd est étudié par Sandman *et al* (1995). Dans le but d'obtenir un modèle très simple, il définit des cas limites pour les basses et les hautes fréquences afin d'évaluer l'impédance de rayonnement. Ce modèle lui permet de calculer la perte par insertion en fonction de la rigidité du matériau de masquage. Dans la partie résultats, le modèle de Sandman sera comparé au modèle proposé dans ce chapitre.

4.1.3 Synthèse

À la vue de cette étude bibliographique, il apparaît que les plaques élastiques finies, recouvertes par un matériau de masquage et immergée dans un fluide lourd n'ont pas fait l'objet d'études approfondies. En effet, la plupart des travaux utilisant le modèle à réaction localisée considèrent des structures infinies, avec des simplifications très importantes quand à la prise en compte de la charge fluide.

Ainsi, dans la formulation théorique proposée dans la section qui suit, nous allons considérer une plaque mince, élastique, bafflée, de dimensions finies, supportant des ondes de flexion. Le matériaux de masquage va être décrit par le modèle à réaction localisée, la charge fluide va être prise en compte dans l'équation du mouvement de la structure de manière rigoureuse. Le problème acoustique va être résolu à l'aide de la formulation intégrale (équation de Kirchhoff-Helmholtz).

4.2 Formulation théorique

4.2.1 Position du problème

Dans cette étude, on considère une plaque rectangulaire, finie, simplement appuyée sur les quatre bords, recouverte par un matériau de masquage (Figure 4.4). Cette structure est insérée dans un baffle infini et rigide, le matériau de masquage a une face immergée dans un fluide lourd ($z > 0$), alors que la plaque de base est dans le vide. La position du baffle coïncide avec la surface externe du matériau de masquage. L'excitation est stationnaire harmonique et appliquée sur la plaque de base, il peut s'agir soit d'une force ponctuelle, soit d'une onde plane de direction quelconque. Le champ de déplacement de la plaque de base satisfait les hypothèses de Love-Kirchhoff pour la flexion pure, alors que le matériau de masquage est décrit par un modèle à réaction localisée qui ne prend en compte que la déformation transverse du matériau. L'objectif de cette formulation théorique est d'évaluer le déplacement transverse de la plaque de base et de la surface externe du matériau de masquage, ainsi que le champ acoustique rayonné dans le fluide lourd.

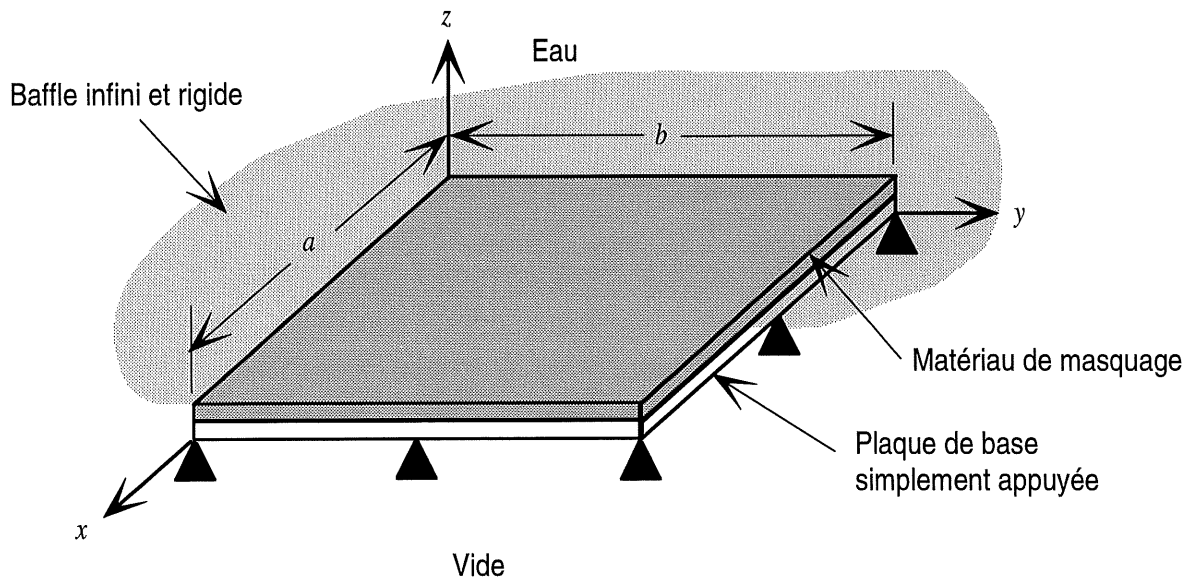


Figure 4.4 : Configuration du système plaque/matériau/fluide étudiée dans ce chapitre.

4.2.2 Loi de comportement du matériau de masquage

La propriété principale des matériaux de masquage est d'être très peu rigide et d'admettre des déformations dans l'épaisseur lorsqu'ils sont soumis à une force normale (pression acoustique dans notre cas). Comme nous avons vu dans la partie état des connaissances, nous allons décrire le comportement du matériau de masquage avec le modèle à réaction localisée. Afin de définir complètement le problème, il reste encore à choisir la grandeur physique qui va caractériser la rigidité du matériau de masquage.

Dans un solide élastique, et dans le cas des petites déformations (régime linéaire), les déformations sont proportionnelles aux contraintes. Le coefficient qui relie les contraintes et les déformations dépend de la géométrie du matériau et de la direction de la force appliquée (Snowdon, 1979).

- Dans le cas d'une déformation de cisaillement (Figure 4.5.a), le solide change de forme mais pas de volume et les contraintes sont reliées aux déformations par le module de cisaillement G_c .
- Dans le cas où une contrainte est uniformément appliquée sur le solide (Figure 4.5.b), ce dernier change de volume mais pas de forme, et la relation contraintes-déformations est assurée par le module de compression B_c .
- Si un solide est beaucoup plus allongé dans la direction z , que dans la direction x , et s'il est soumis à une force suivant z (Figure 4.5.c), la relation contraintes-déformations s'exprime au moyen du module d'Young E_c .
- Si un solide est soumis à une force transverse telle que décrite à la Figure 4.5.d, on ne peut pas utiliser le module de compression, car le matériau change de forme et de volume. Pour ce cas, Snowdon utilise la théorie de l'élasticité tridimensionnelle pour relier les contraintes aux déformations et introduit le module M_c : $M_c = B_c + 4 G_c / 3$. En reprenant ce dernier cas, mais en étirant le solide suivant la direction x (Figure 4.5.e), le solide ne change pratiquement plus de forme et on peut à nouveau utiliser le module de compression.

Le cas que nous traitons dans ce chapitre, se rapproche beaucoup du dernier cas présenté ci-dessus et qui utilise le module de compression (Figure 4.5.e). Néanmoins, dans notre cas la structure de base se déforme et la charge à laquelle est soumise le matériau de masquage (charge fluide) n'est pas uniforme. Dans la littérature, il subsiste un flou quand au coefficient à utiliser pour relier les contraintes aux déformations dans le cas d'un matériau de masquage quand on utilise le modèle à réaction localisée :

certain auteur (Sandman, 1995) ne donne pas de nom à ce coefficient, d'autres utilisent le module d'Young (Laulagnet *et al*, 1989, 1991). Les expérimentations de Szabo (1996) et Ham (1996) déconseillent l'emploi du module d'Young, car il surestime beaucoup l'isolation procuré par le matériau de masquage. Dans le reste du document nous allons admettre que les contraintes sont reliés aux déformations par le module de compression B_c , tout en sachant que des expérimentations supplémentaires devront être faites pour trancher la question de manière définitive.

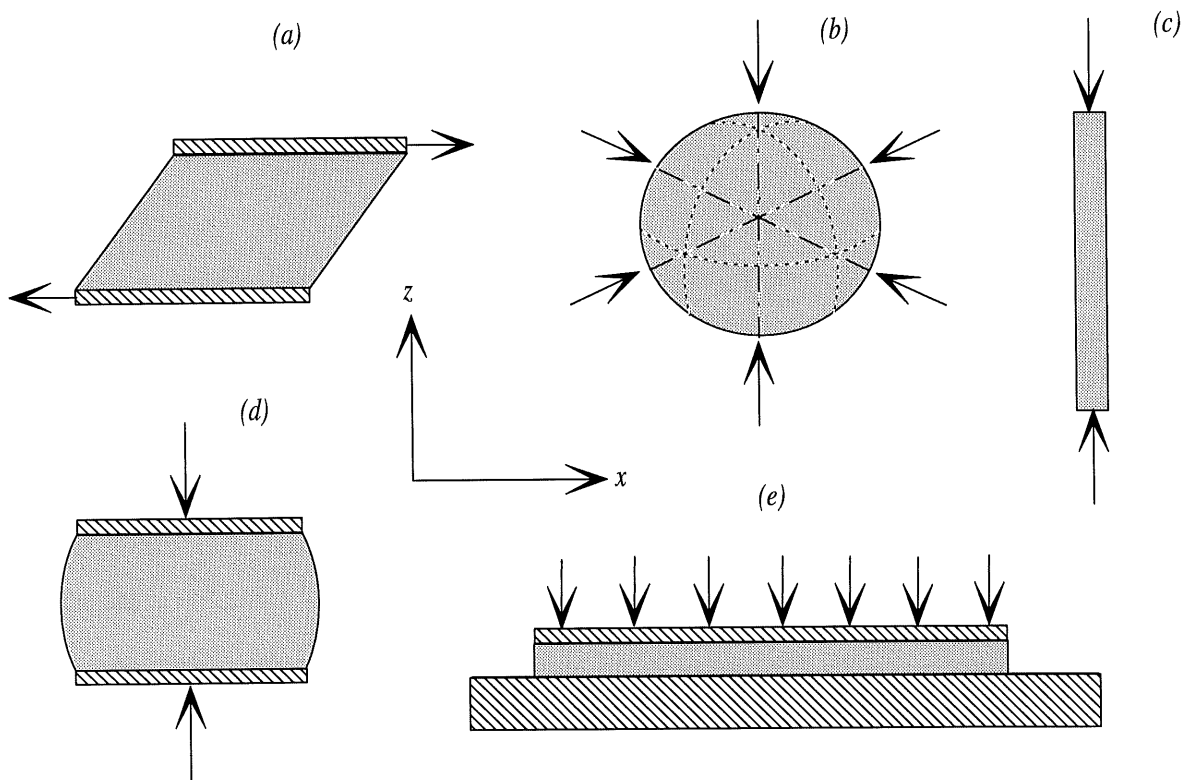


Figure 4.5 : Divers types de déformations supportées par un solide élastique.

Si on appelle $P(Q)$ la pression acoustique qui agit sur le matériau de masquage au point Q , et $w_1(Q)$ et $w_2(Q)$, les déplacements, respectivement, de la plaque de base et de la surface du matériau de masquage en contact avec le fluide (Figure 4.6), la loi de comportement du matériau de masquage s'écrit, conformément au modèle à réaction localisée :

$$P(Q) = B_c \frac{(w_2(Q) - w_1(Q))}{h_c}, \quad (4.1)$$

où h_c est l'épaisseur du matériau de masquage. Cette relation est identique à une relation contraintes-déformations, car le terme $(w_2(Q)-w_1(Q))/h_c$ est la déformations transverse totale du matériau de masquage au point Q , lorsqu'il est soumis à une pression (ou contrainte) $P(Q)$. On peut aussi voir l'équation 4.1 comme étant le déplacement d'un ressort $w_2(Q)-w_1(Q)$, soumis à une force par unité de surface $P(Q)$ et de raideur par unité de surface B_c / h_c . Cette équation suppose que la déformation du matériau de masquage au point Q ne dépend que de la pression acoustique et du déplacement de la plaque de base exercé en ce point*. Elle ne tient aucun compte du déplacement des autres points de la structure, c'est pourquoi on appelle ce type de modèle "à réaction localisée". Ceci est très différent de l'hypothèse de flexion pure, utilisée pour la plaque de base, qui suppose que tous les points de la structure sont liés. Ainsi, en utilisant le modèle à réaction localisée pour le matériau de masquage et l'hypothèse de flexion pure pour la plaque de base, il n'y a pas continuité des déplacements longitudinaux à l'interface plaque/matériau de masquage (déplacement dans les directions x et y). Cela signifie que l'on néglige les déformations de traction-compression dans le matériau de masquage, il n'y a pas d'élongation de l'axe neutre du matériau.

Pour tenir compte des pertes d'énergie dans le matériau de masquage, on va utiliser un module de compression complexe : $\tilde{B}_c = B_c(1 + j\eta_c)$, où η_c est le facteur de perte en compression du matériau. Dans le reste du document on va utiliser l'impédance mécanique du matériau notée :

$$Z_c = \frac{\tilde{B}_c}{h_c} . \quad (4.2)$$

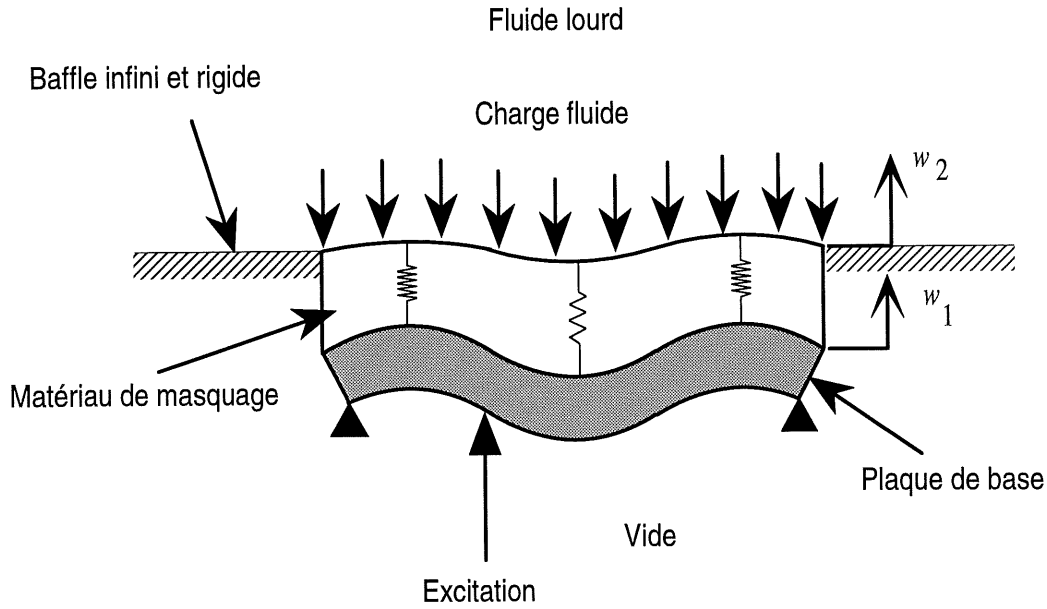


Figure 4.6 : Représentation schématique du modèle à réaction localisée utilisé pour décrire le comportement du matériau de masquage.

4.2.3 Équation du mouvement de la structure

L'équation du mouvement d'une plaque mince en flexion pure est donnée par :

$$\tilde{D}\nabla^4 w_1(Q) - \rho h \omega^2 w_1(Q) = f(Q) - P(Q), \quad (4.3)$$

où ω est la pulsation, Q est un point de la plaque, \tilde{D} est la rigidité de flexion complexe de la plaque : $\tilde{D} = \tilde{E}h^3 / 12(1 - \nu^2)$, ρ , h et ν sont respectivement, la densité, l'épaisseur et le coefficient de Poisson de la plaque, \tilde{E} est le module d'Young complexe, défini par : $\tilde{E} = E(1 + j\eta)$, E est la partie réelle du module d'Young, et η le facteur de perte, ∇^4 est un opérateur différentiel, défini par :

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad (4.4)$$

$f(Q)$ est le terme d'excitation (force ponctuelle ou onde plane) et $P(Q)$ est la pression acoustique exercée par le fluide sur la surface externe du matériau de masquage. La plaque n'est pas directement en contact avec le fluide, mais étant donné que le matériau de masquage est modélisé par un ressort, et que la force exercée sur les deux extrémités d'un ressort est la même, la pression exercée par le fluide sur la

surface externe du matériau de masquage et aussi la pression exercée par le matériau de masquage sur la plaque de base. On peut utiliser cette propriété uniquement parce qu'on a négligé la masse du matériau de masquage. Les deux inconnues de cette équation sont : le déplacement transverse de la plaque w_1 , et la pression acoustique pariétale P .

4.2.4 Pression acoustique dans le fluide

Dans la section qui suit nous reprenons la formulation intégrale déjà introduite au chapitre 2, nous nous permettrons donc de moins détailler les équations, étant donné que la démarche de base est la même. La pression acoustique dans le fluide est régie par l'équation d'Helmholtz homogène :

$$\Delta P(M) + k_0^2 P(M) = 0, \tag{4.5}$$

où M est un point de l'espace pour $z > 0$ de coordonnées x, y , k_0 est le nombre d'onde acoustique, $k_0 = \omega/c_0$, c_0 est la vitesse du son dans le fluide.

La continuité des vitesses acoustique et mécanique normales, sur la plaque, permet d'écrire l'équation d'Euler sous la forme :

$$\frac{\partial P(Q)}{\partial z} = \rho_0 \omega^2 w_2(Q), \tag{4.6}$$

où Q est un point de l'espace de coordonnées x', y' et ρ_0 est la densité du fluide.

La pression acoustique sur la surface externe du matériau de masquage est donnée par l'intégrale de Rayleigh, qui en utilisant l'équation 4.6, devient :

$$P(Q) = -\omega^2 \rho_0 \iint_S w_2(M) G(M, Q) dS, \tag{4.7}$$

où S est la surface de la plaque, les points Q et M appartiennent à la plaque, on utilise la fonction de Green en espace semi-infini :

$$G(M, Q) = \frac{e^{-jk_0 R}}{2\pi R}, \tag{4.8}$$

avec $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$.

Les équations 4.3 et 4.7 contiennent trois inconnues : $w_1(Q)$, $w_2(Q)$ et $P(Q)$, l'équation 4.1 permet d'exprimer le déplacement $w_2(Q)$ en fonction de $w_1(Q)$ et $P(Q)$, de telle sorte que l'on obtienne un système de deux équations à deux inconnues. En utilisant l'équation 4.1, l'équation 4.7 devient :

$$P(Q) = -\omega^2 \rho_0 \iint_S \left(w_1(M) + \frac{P(M)}{Z_c} \right) G(M, Q) dS. \quad (4.9)$$

4.2.5 Fonctions de base du système

Étant donné que la plaque de base est simplement appuyée (déplacement nul sur les bords), on peut décomposer son déplacement en série de sinus :

$$w_1(Q) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} w_{mn}(Q), \quad (4.10)$$

avec $w_{mn}(Q) = \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right)$.

Si le déplacement de la plaque est nul sur les bords, il n'en est pas de même pour la pression acoustique, qui ne s'annule ni sur les bords de la plaque, ni sur la baffle. Par conséquent, il semble impossible de prendre une base modale pour la pression acoustique, telle que celle utilisée pour le déplacement. Plusieurs auteurs (Lesueur, 1988, Laulagnet, 1989, 1991), utilisent quand même une base modale pour décrire la pression acoustique, sans préciser sur quels critères ils se basent pour faire ce choix.

Bien que la pression ne soit pas rigoureusement nulle sur le baffle, elle tend vers zéro quand on s'éloigne de la plaque. Ginsberg *et al* (1995, 1991) utilise cette propriété pour définir une base pour la pression. Étant donné que la pression acoustique sur le baffle diminue quand on s'éloigne de la plaque, il définit une distance $r = \sigma a/2$, au-delà de laquelle la pression est supposée s'annuler (a est une longueur caractéristique de la plaque et σ doit être grand par rapport à la longueur d'onde acoustique $\lambda = c_0/f$). Sur le domaine $[-r, r]$, il utilise une base de fonctions sinusoïdales, telle que décrite par l'équation 4.10 (en

remplaçant a et b par r) et il suppose la pression acoustique nulle en-dehors de ce domaine. Le problème de cette méthode vient du fait que σ varie en fonction de la fréquence, ce qui complique la formulation.

Dans cette étude, nous allons décomposer la pression acoustique pariétale en série de Fourier, afin d'assurer une généralité à la formulation et d'éviter d'avoir à choisir le coefficient σ en fonction de la longueur d'onde acoustique. On pose :

$$P(Q) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} b_{pq} \Psi_{pq}(Q), \quad (4.11)$$

avec $\Psi_{pq}(Q) = e^{j2\pi\left(p\frac{x}{a} + q\frac{y}{b}\right)}$.

4.2.6 Équations du problème couplé

En utilisant les fonctions de base définies aux équations 4.10 et 4.11, on peut réécrire les deux équations du système (équations 4.3 et 4.9) en fonction des inconnues modales du déplacement a_{mn} et de la pression b_{pq} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho h \frac{ab}{4} a_{mn} (\omega_{mn}^2 (1 + j\eta) - \omega^2) = f_{mn} - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{ij} S_{mnij} \end{array} \right. \quad (4.12.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ab \times b_{pq} = -\omega^2 \rho_0 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} H_{klpq} - \omega^2 \frac{\rho_0}{Z_c} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{ij} L_{ijpq} \end{array} \right. \quad (4.12.b)$$

où ω_{mn} sont les fréquences propres de la plaque dans le vide :

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}, \quad (4.13)$$

et D est la partie réelle de \tilde{D} .

Dans le cas d'une force ponctuelle, le vecteur des forces généralisées s'écrit :

$$f_{mn} = F_0 \sin\left(\frac{m\pi x_0}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right), \quad (4.14)$$

où F_0 est l'amplitude de la force et x_0 et y_0 sont les coordonnées du point d'excitation. L'Annexe A donne f_{mn} dans le cas d'une onde plane de direction quelconque.

Dans les équations 4.12.a et 4.12.b, les trois termes S_{mnij} , H_{klpq} et L_{ijpq} sont définis par les intégrales suivantes :

$$\begin{cases} S_{mnij} = \iint w_{mn}(Q)\psi_{ij}(Q)dS \\ H_{klpq} = \iint_S \iint_S w_{kl}(Q)G(Q, M)\psi_{pq}^*(M)dSdS \\ L_{ijpq} = \iint_S \iint_S \psi_{ij}(Q)G(Q, M)\psi_{pq}^*(M)dSdS \end{cases} \quad (4.15)$$

Si le calcul de S_{mnij} ne pose aucun problème, les intégrales H_{klpq} et L_{ijpq} sont singulières, et ne sont pas intégrables analytiquement. Dans cette étude nous allons utiliser une méthode similaire à celle déjà présentée au paragraphe 2.3.12 et qui consiste à transformer analytiquement les intégrales quadruples en intégrales doubles, qui sont ensuite évaluées numériquement (Annexe B et Annexe D).

Le système linéaire donné par les équations 4.12.a et 4.12.b peut être réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{mn} \\ b_{pq} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

avec

$$\begin{cases} [A] = \begin{bmatrix} \ddots & \rho \frac{ab}{4} (\omega_{mn}^2 (1 + j\eta) - \omega^2) & \ddots \end{bmatrix} \text{ (matrice diagonale),} \\ [B] = [S_{mnij}] \text{ (matrice pleine),} \\ [C] = \begin{bmatrix} \omega^2 \rho_0 H_{klpq} \end{bmatrix} \text{ (matrice pleine),} \\ [D] = \begin{bmatrix} \ddots & ab & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^2 \frac{\rho_0}{Z_c} L_{ijpq} \end{bmatrix} \text{ (matrice pleine).} \end{cases} \quad (4.17)$$

Les séries infinies sont maintenant tronquées à un ordre fini (i.e. m, n, k, l varient entre 1 et N et p, q, i, j varient entre $-N_p$ et N_p). On peut décomposer le système 4.16 de la manière suivante :

$$\{a_{mn}\} = [A]^{-1} \left(\{f_{mn}\} - [B] \{b_{pq}\} \right), \quad (4.18)$$

$$\left([D] - [C][A]^{-1}[B] \right) \{b_{pq}\} = [C][A]^{-1} \{f_{mn}\}. \quad (4.19)$$

Pour résoudre ce problème il faut d'abord résoudre le système linéaire 4.19 qui fournit les amplitudes de la pression acoustique pariétale b_{pq} . La matrice $[A]$ étant diagonale, il est très facile d'en calculer son inverse $[A]^{-1}$. Il suffit ensuite d'utiliser l'équation 4.18 pour obtenir les amplitudes du déplacement modal a_{mn} . À partir de là, le problème vibro-acoustique d'une plaque bafflée, recouverte d'un matériau de masquage et immergée dans un fluide lourd est entièrement résolu. Le paragraphe qui suit explique le calcul des indicateurs vibro-acoustiques qui vont permettre de caractériser l'efficacité des matériaux de masquage en matière de réduction du bruit rayonné dans un fluide lourd.

4.2.7 Indicateurs vibro-acoustique

Plusieurs indicateurs vibro-acoustique peuvent être calculés à partir des amplitudes du déplacement modal a_{mn} et de la pression surfacique b_{pq} . Dans ce document nous allons nous intéresser à la vitesse quadratique moyenne de la plaque de base, à la vitesse quadratique moyenne de la surface externe du matériau de masquage, au rapport de ces deux vitesses quadratiques et à la puissance acoustique rayonnée dans le fluide.

La vitesse quadratique de la plaque de base s'exprime par :

$$\langle V_1^2 \rangle = \frac{\omega^2}{2S} \iint_S w_1(Q) w_1^*(Q) dS = \frac{\omega^2}{8} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N |a_{mn}|^2, \quad (4.20)$$

où * désigne le complexe conjugué. De la même manière, et en utilisant l'orthogonalité de fonctions Ψ_{pq} , on peut calculer la vitesse quadratique de la surface externe du matériau de masquage :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle V_2^2 \rangle &= \frac{\omega^2}{2S} \iint_S w_2(Q) w_2^*(Q) dS \\ &= \frac{\omega^2}{8} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N |a_{mn}|^2 + \frac{\omega^2}{2|Z_c|^2} \sum_{p=-N_p}^{N_p} \sum_{q=-N_p}^{N_p} |b_{pq}|^2 + \frac{\omega^2}{ab} \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{i=-N_p}^{N_p} \sum_{j=-N_p}^{N_p} \frac{1}{Z_c} a_{kl}^* b_{ij} S_{klij} \right] \end{aligned} \right. \quad (4.21)$$

La puissance acoustique, rayonnée par la surface externe du matériau de masquage dans le fluide, est donnée par :

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\iint_S P(Q) (-j\omega) w_2^*(Q) dS \right], \quad (4.22)$$

tous calculs faits, on obtient :

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[(-j\omega) \left[ab \sum_{p=-N_p}^{N_p} \sum_{q=-N_p}^{N_p} \frac{|b_{pq}|^2}{Z_c^*} + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{i=-N_p}^{N_p} \sum_{j=-N_p}^{N_p} a_{mn}^* S_{mnij} b_{ij} \right] \right]. \quad (4.23)$$

4.2.8 Cas d'une base sinusoïdale pour la pression

Dans cette section nous allons développer les équations du système dans le cas où on utilise la même base pour la pression que pour le déplacement de la structure. Cette hypothèse impose que la pression acoustique soit nulle sur les bords de la plaque, ce qui n'est pas rigoureusement le cas, mais permet de simplifier beaucoup la formulation théorique du problème. Si au lieu de décomposer la pression en série de Fourier (équation 4.11), on utilise une base de sinus :

$$P(Q) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} w_{mn}(Q), \quad (4.24)$$

avec $w_{mn}(Q) = \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right)$, le système d'équations qui caractérise le problème va maintenant prendre la forme suivante (équivalent au système 4.16) :

$$\left\{ \begin{aligned} \rho h \frac{ab}{4} a_{mn} (\omega_{mn}^2 (1 + j\eta) - \omega^2) &= f_{mn} - \frac{ab}{4} d_{mn} \end{aligned} \right. \quad (4.25.a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{ab}{4} d_{rs} &= j\omega \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} Z_{klrs} + j\omega \frac{1}{Z_c} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} d_{ij} Z_{ijrs} \end{aligned} \right. \quad (4.25.b)$$

On peut l'écrire sous la forme contractée suivante :

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{mn} \\ d_{rs} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

avec

$$\begin{cases} [A] = \begin{bmatrix} \dots & \rho \frac{ab}{4} (\omega_{mn}^2 (1 + j\eta) - \omega^2) & \dots \end{bmatrix} \text{ (matrice diagonale),} \\ [B] = \begin{bmatrix} \dots & \frac{ab}{4} & \dots \end{bmatrix} \text{ (matrice diagonale),} \\ [C] = \begin{bmatrix} -j\omega Z_{klrs} \end{bmatrix} \text{ (matrice pleine),} \\ [D] = \begin{bmatrix} \dots & \frac{ab}{4} & \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -j\omega \frac{1}{Z_c} Z_{ijrs} \end{bmatrix} \text{ (matrice pleine).} \end{cases} \quad (4.27)$$

La matrice Z_{klrs} est la matrice des impédances de rayonnement, telle que défini à l'équation 2.59 et dans l'Annexe B. Le second terme du système 4.25 est identique à celui du système 4.16. Le système ainsi obtenu est beaucoup plus simple dans ce cas, puisqu'il comporte deux matrices diagonales $[A]$ et $[B]$, et qu'il requiert uniquement le calcul des termes Z_{klrs} au lieu des matrices S_{mnij} , L_{klpq} et H_{ijpq} . De plus, nous allons voir dans le paragraphe suivant que la base de sinus converge beaucoup plus rapidement que la formulation qui fait intervenir des sinus et une série de Fourier. Dans ce cas les séries infinies sur m , n , k , l , p , q , r , s , sont tronquées à un ordre maximum N_s .

La vitesse quadratique de la plaque de base reste inchangée. La vitesse quadratique de la surface externe du matériau de masquage devient :

$$\langle V_1^2 \rangle = \frac{\omega^2}{2} \sum_{m=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} \left| \frac{d_{mn}}{Z_c} + a_{mn} \right|^2. \quad (4.28)$$

La puissance acoustique rayonnée par la surface externe du matériau de masquage dans le fluide s'écrit :

$$W = \frac{ab}{8} \omega \frac{\text{Im}[Z_c]}{|Z_c|^2} \sum_{r=1}^{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} |d_{rs}|^2 + \frac{ab}{8} \text{Re} \left[j\omega \sum_{m=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} a_{mn} d_{mn}^* \right]. \quad (4.29)$$

4.2.9 Comparaison entre une base de sinus et une base de Fourier pour la pression pariétale

Dans cette section, on compare les résultats donnés dans le cas où on utilise une décomposition en série de sinus pour la pression acoustique et dans le cas où on utilise une série de Fourier (paragraphe 4.2.8). La Figure 4.7 montre la puissance acoustique rayonnée pour une plaque de base en acier (caractéristiques au Tableau 4.1), couverte par un matériau de masquage ($B_c = 10^6$ Pa, $\eta_c = 0$, $h_c = 10$ mm) et immergée dans l'eau ($\rho_0 = 1000$ kg/m³, $c_0 = 1460$ m/s). L'excitation est une force ponctuelle positionnée en $x = y = 0.06$ m d'un coin de la plaque. On constate que les résultats donnés par les deux bases sont très proches, bien qu'ils ne soient pas entièrement confondus. De plus, on retrouve ce type de résultats pour tous les cas qui ont été testés.

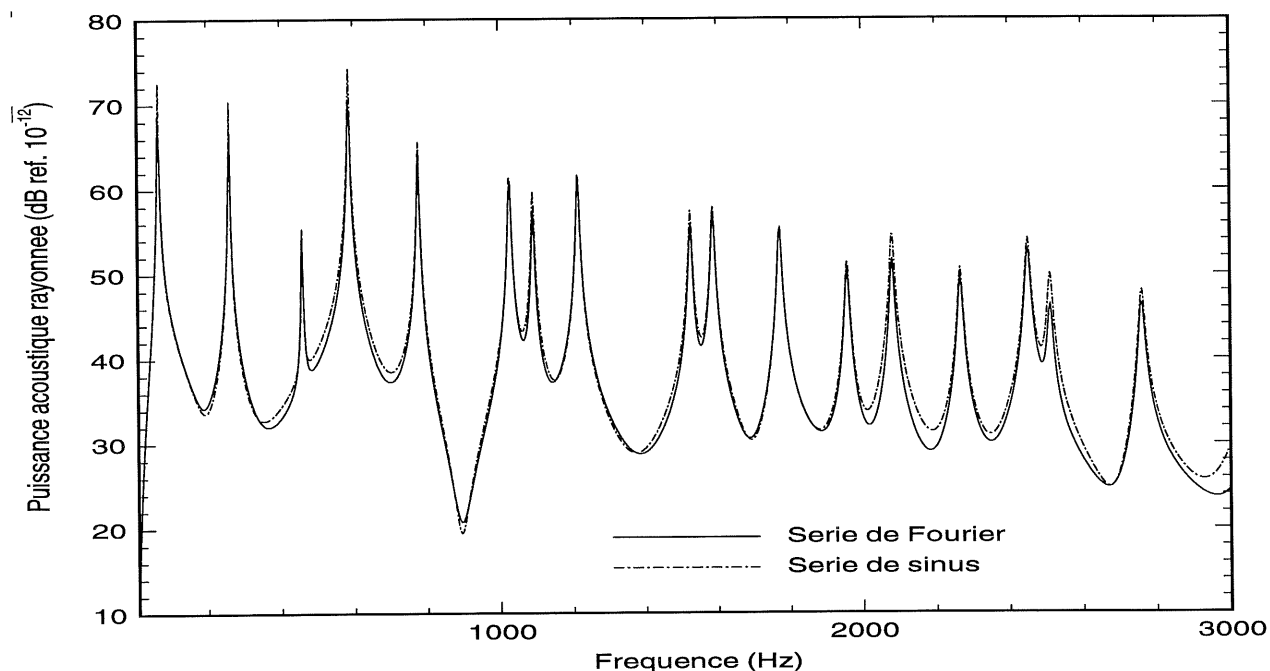


Figure 4.7 : Comparaison de la puissance rayonnée par une plaque recouverte par un matériau de masquage ($B_c = 10^6$ Pa, $\eta_c = 0$, $h_c = 10$ mm) quand on utilise soit une base de sinus, soit une décomposition en série de Fourier pour décrire la pression acoustique pariétale.

Afin de mieux comprendre les différences et les similitudes entre les deux bases, on s'intéresse à la répartition de la pression acoustique sur la surface externe du matériau de masquage. Cela nous permettra de voir comment se comporte la pression acoustique sur les bords de la structure. Les figures 4.8 à 4.11 comparent la pression acoustique pariétale pour les deux hypothèses (Fourier et sinus) et pour les quatre

premières fréquences de résonances du cas précédent (Figure 4.7). Quand la pression est décomposée en série de Fourier la pression pariétale est donné par :

$$P_{Fourier}(\omega, x, y) = Re \left[\sum_{p=-N_p}^{N_p} \sum_{q=-N_p}^{N_p} b_{pq}(\omega) \psi_{pq}(x, y) \right], \quad (4.30)$$

et quand on utilise la base de sinus on a :

$$P_{sinus}(\omega, x, y) = Re \left[\sum_{r=1}^{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} d_{rs}(\omega) w_{rs}(x, y) \right]. \quad (4.31)$$

Les fréquences de résonances de la structure peuvent varier légèrement selon que l'on utilise la base de sinus ou la base de Fourier. C'est pourquoi, dans certaines figures la pression est calculée a deux fréquences différentes qui correspondent a la fréquence de résonance de la base de sinus et a la fréquence de résonance de la base de Fourier. À partir de ces figures, il apparaît que la pression acoustique sur les bords de la structure est assez voisine de zéro pour tous les cas présentés et que par conséquent la base modale est une bonne approximation pour décrire la pression acoustique.

Il est a noter que la base de Fourier ne constitue pas une base exacte pour la pression pariétale dans la mesure où elle impose l'égalité des pressions sur deux bords opposés. Cela pourrait constituer un problème dans le cas où les conditions aux limites seraient différentes sur deux bords opposés (par exemple encastré-libre). Étant donné que l'on considère l'appui simple sur les quatre bords la base de Fourier est parfaitement acceptable pour décrire la pression pariétale.

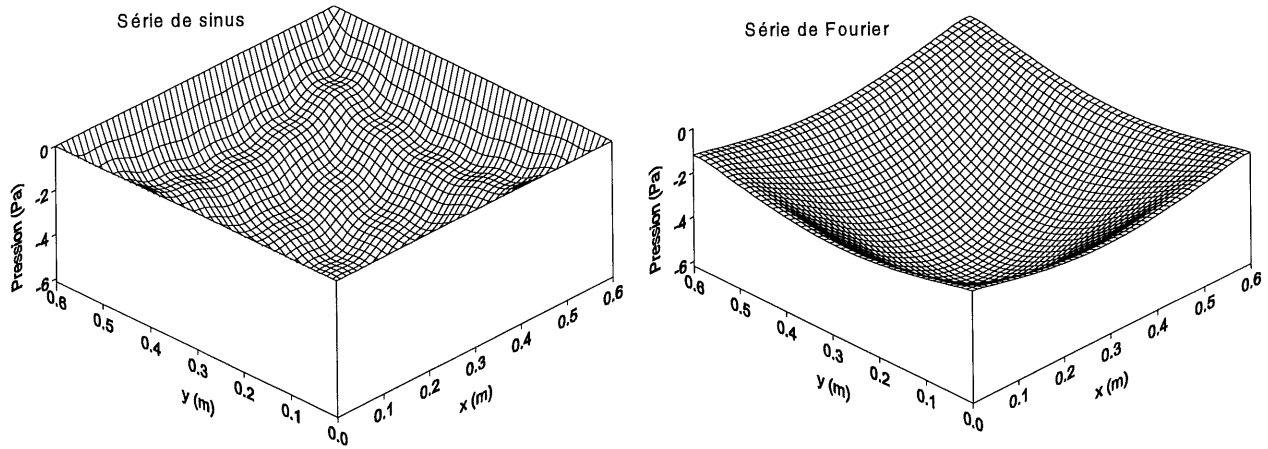


Figure 4.8 : Pression acoustique sur la surface externe du matériau de masquage pour le premier mode ($f_{\text{sinus}} = 66.8 \text{ Hz}$, $f_{\text{Fourier}} = 67 \text{ Hz}$, $B_c = 10^6 \text{ Pa}$, $\eta_c = 0$, $h_c = 10 \text{ mm}$).

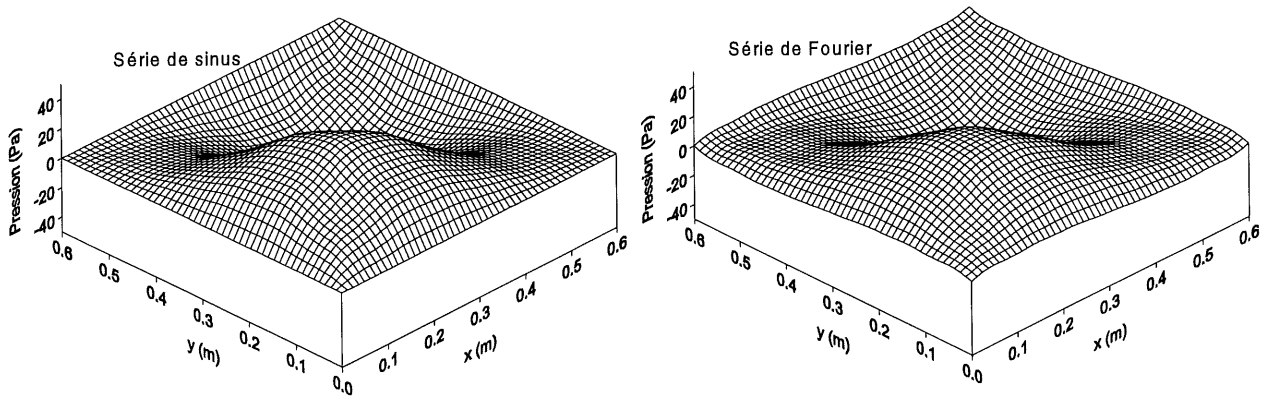


Figure 4.9 : Pression acoustique sur la surface externe du matériau de masquage à la fréquence $f = 261 \text{ Hz}$ pour la base modale et la base de Fourier ($B_c = 10^6 \text{ Pa}$, $\eta_c = 0$, $h_c = 10 \text{ mm}$).

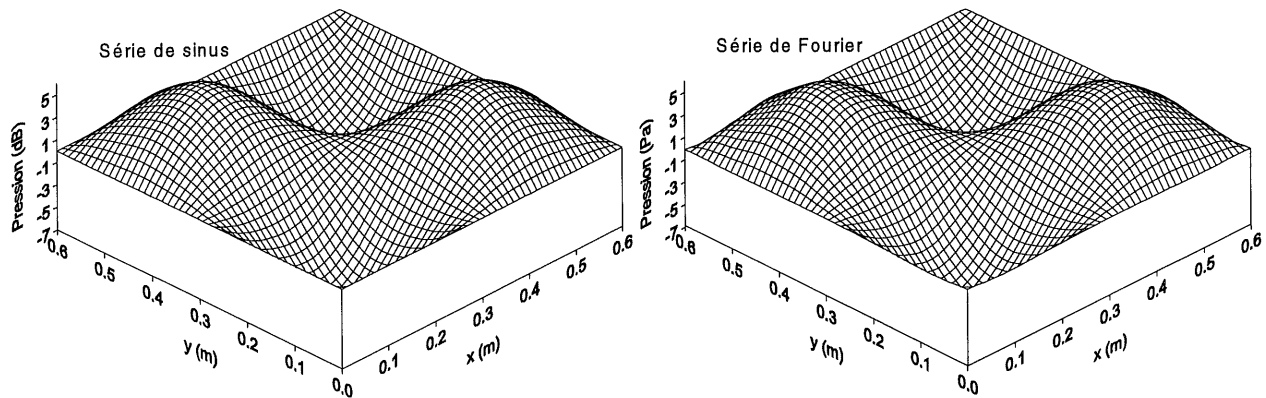


Figure 4.10 : Pression acoustique sur la surface externe du matériau de masquage à la fréquence $f = 459$ Hz pour la base modale et la base de Fourier ($B_c = 10^6$ Pa, $\eta_c = 0$, $h_c = 10$ mm).

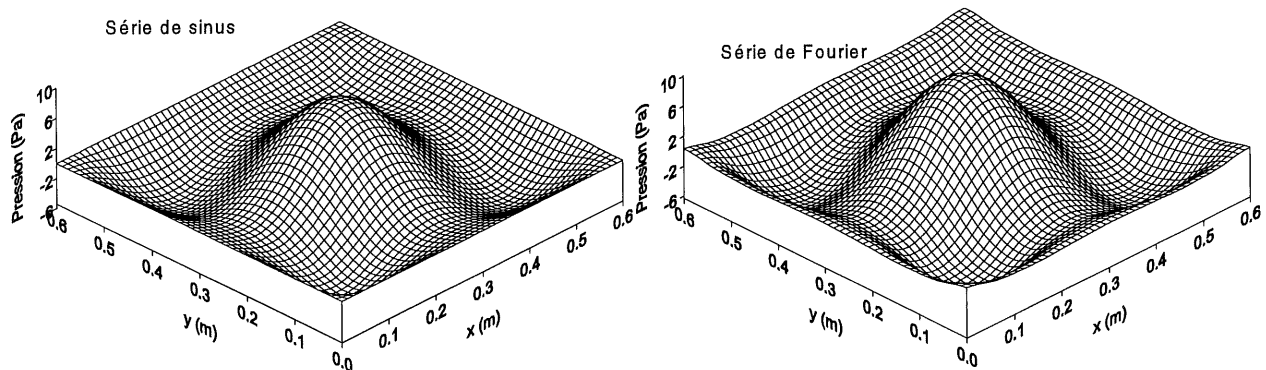


Figure 4.11 : Pression acoustique sur la surface externe du matériau de masquage pour le quatrième mode ($f_{\text{sinus}} = 587.3$ Hz, $f_{\text{Fourier}} = 587.5$ Hz, $B_c = 10^6$ Pa, $\eta_c = 0$, $h_c = 10$ mm).

- **Problème de convergence**

Si la base de Fourier est plus rigoureuse que la base modale pour décrire la pression acoustique pariétale, elle est aussi beaucoup plus lente à converger. Cela, ajouté aux calculs qui sont plus lourds, a pour conséquence d'entraîner des temps de calcul beaucoup plus long (de l'ordre de 20 à 30 fois plus long). C'est la raison pour laquelle, les résultats présentés dans la suite de ce chapitre vont utiliser une base modale et non pas une décomposition en série de Fourier.

4.3 Étude phénoménologique du découplage

4.3.1 Introduction

Le but de cette section est de mieux comprendre le mécanisme de découplage procuré par les matériaux de masquage. Les résultats numériques présentés sont calculés en utilisant le modèle théorique proposé au paragraphe précédent. Afin de pouvoir présenter des résultats en hautes fréquences, la pression acoustique pariétale est décomposée sur la base modale de la plaque (à moins d'un avis contraire). Les points suivants vont être successivement abordés :

- Une formulation simplifiée dans le cas des forts découplages va être introduite.
- Une analogie entre un système à un degré de liberté et le modèle de plaque de ce chapitre est proposé.
- La variation du découplage en fonction de la fréquence va être étudiée en détail.
- Le rapport entre la vitesse quadratique de la plaque de base et la vitesse quadratique de la couche externe du matériau de masquage (indicateur vibratoire) va être comparé à la perte par insertion, qui est un indicateur de l'isolation acoustique procuré par un traitement acoustique.
- Pour finir, une étude paramétrique qui étudie l'influence de l'épaisseur et du facteur de perte du matériau de masquage sur l'isolation acoustique est présentée. Cette étude s'intéresse également à l'effet de la variation de la dimension de la plaque de base sur l'isolation acoustique.

À moins d'un avis contraire, les résultats numériques présentés dans le paragraphe 4.3 utilisent une plaque de base en acier (Tableau 4.1). L'excitation est une force ponctuelle positionnée au point $x = y = 0.06$ m d'un coin de la plaque. La densité du fluide (eau) est $\rho_0 = 1000$ kg/m³, et la vitesse du son dans ce fluide est $c_0 = 1460$ m/s.

Le matériau de masquage est caractérisé par trois paramètres, le module de compression : B_c , le facteur de perte : η_c , et l'épaisseur : h_c , sa densité n'est pas prise en compte puisqu'il est considéré sans masse.

Tableau 4.1 : Caractéristiques de la plaque de base en acier étudiée dans le chapitre 4.

Longueur (m)	Largeur (m)	Épaisseur (mm)	Densité (kg/m ³)	Module d'Young (Pa)	Facteur de perte	Coefficient de Poisson
0.6	0.6	9	7850	2.1×10 ¹¹	5×10 ⁻³	0.3

4.3.2 Méthode approchée pour les forts découplages

Dans cette section, une approximation des équations établies au paragraphe 4.2 est proposée dans le cas des matériaux de masquage très peu rigides. Cette étude va permettre de mieux comprendre le comportement de ce type de matériaux. Quand le matériau de masquage est très peu rigide, il y a un découplage important entre le déplacement de la plaque de base et celui de la surface externe du matériau de masquage. Le matériau étant très mou, il admet d'importantes déformations dans le sens de l'épaisseur, ce qui a pour conséquence de pratiquement annuler le déplacement de la surface externe du matériau de masquage. Par contre, du fait du découplage important entre le fluide et la plaque de base, cette dernière ne ressent pratiquement plus l'effet du fluide, et ainsi, le mouvement de la plaque de base se rapproche de celui d'une plaque dans le vide.

En considérant les remarques ci-dessus, on peut réécrire les deux équations du système (équations 4.12.a et 4.12.b) sous une forme simplifiée. Dans le cas d'un matériau de masquage très peu rigide, la plaque de base est libre de vibrer sans aucune contrainte ajoutée par le matériau de masquage, cela signifie qu'on peut éliminer le terme de pression acoustique dans son équation de mouvement :

$$\rho h \frac{ab}{4} a_{mn} (\omega_{mn}^2 (1 + j\eta) - \omega^2) = f_{mn}. \quad (4.32)$$

Cette équation est tout simplement l'équation de mouvement *in-vacuo* d'une plaque simplement appuyée. On peut calculer directement les amplitudes modales :

$$a_{mn} = \frac{4f_{mn}}{\rho hab (\omega_{mn}^2 (1 + j\eta) - \omega^2)}. \quad (4.33)$$

Comme on l'a fait pour la pression acoustique, on peut décomposer le déplacement de la surface externe du matériau de masquage w_2 en série de Fourier :

$$w_2(Q) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} c_{pq} \Psi_{pq}(Q), \quad (4.34)$$

où Ψ_{pq} est défini à l'équation 4.11. Étant donné que le matériau de masquage se déforme dans l'épaisseur, on ne peut pas utiliser une base de sinus comme pour le déplacement de la plaque de base. En utilisant l'équation 4.1, l'intégrale de Rayleigh (équation 4.7) devient :

$$w_2(Q) - w_1(Q) = -\omega^2 \frac{\rho_0}{Z_c} \iint_S w_2(M) G(M, Q) dS. \quad (4.35)$$

L'hypothèse d'un fort découplage suppose que le déplacement de la surface externe du matériau de masquage peut-être négligé devant le déplacement de la plaque de base :

$$w_2(Q) \ll w_1(Q). \quad (4.36)$$

Cela permet de simplifier l'équation 4.35 :

$$w_1(Q) = \omega^2 \frac{\rho_0}{Z_c} \iint_S w_2(M) G(M, Q) dS. \quad (4.37)$$

En intégrant cette équation sur la surface de la plaque, on obtient :

$$\frac{ab}{4} a_{mn} = \frac{\omega^2 \rho_0}{Z_c} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} c_{pq} H_{mnpq} \quad (4.38)$$

La résolution du système linéaire 4.38 permet de donner une approximation des amplitudes du déplacement de la surface externe du matériau de masquage, dans le cas des forts découplages. On peut encore écrire les termes c_{pq} sous la forme suivante :

$$\{c_{pq}\} = \frac{abZ_c}{4\omega^2\rho_0} [H_{mnpq}]^{-1} \{a_{mn}\}. \quad (4.39)$$

Cette équation relie les amplitudes du déplacement de la surface externe du matériau de masquage aux amplitudes du déplacement de la plaque de base. Elle stipule que le déplacement de la surface externe du matériau de masquage est proportionnel à l'impédance du matériau Z_c . Elle est donc capable de refléter

l'effet de découplage procuré par le matériau de masquage. Ce modèle simplifié est comparé au modèle complet présenté dans ce chapitre à la Figure 4.24.

4.3.3 Analogie avec un système à un degré de liberté

On peut faire une analogie entre le système que nous traitons (plaque élastique couverte par un matériau de masquage) et un système à un degré de liberté constitué par une masse et un ressort (Figure 4.12). Pour le système masse-ressort, le déplacement u_2 de la masse m_f s'exprime en fonction du déplacement de la base u_1 , par l'équation suivante :

$$u_2 = \frac{k_r}{k_r - \omega^2 m_f} u_1. \quad (4.40)$$

Dans cette analogie, u_1 représente le déplacement de la plaque de base, u_2 le déplacement de la couche externe du matériau de masquage, k_r la rigidité du matériau de masquage et m_f la charge fluide. En hautes fréquences, quand $\omega^2 m_f \gg k_r$, le déplacement u_2 est proportionnel à k_r comme c'est le cas dans l'équation 4.39.

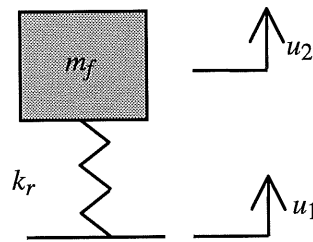


Figure 4.12 : Système masse-ressort à un degré de liberté.

La masse m_f qui représente la charge exercée par le fluide sur le ressort ne peut pas être considérée comme constante en fonction de la fréquence. Nous allons considérer la charge fluide exercée sur un piston plan circulaire et rigide, ce qui conduit à :

$$m_f = S \rho_0 c_0 \frac{Z_f}{j\omega}, \quad (4.41)$$

où S est la surface du piston de rayon r_p , et Z_f sont l'impédance de rayonnement donnée par (Pierce, 1981) :

$$Z_f = R + jX, \text{ avec } R = 1 - \frac{2J_1(kd)}{kd} \text{ et } X = \frac{2H_1(kd)}{kd}, \quad (4.42)$$

où $kd = 2\omega r_p/c_0$ et J_1 est la fonction de Bessel d'ordre un, définie par :

$$J_1(x) = \frac{(x/2)}{(1!)^2} - 2 \frac{(x/2)^3}{(2!)^2} + 3 \frac{(x/2)^5}{(3!)^2} - \dots \quad (4.43)$$

Pierce (1981) définit une approximation hautes fréquences ($kd \gg 1$) pour cette fonction :

$$J_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right). \quad (4.44)$$

H_1 est la fonction de Struve du premier ordre :

$$H_1(x) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{1^2 \cdot 3} - \frac{x^4}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{x^6}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \right). \quad (4.45)$$

Pierce (1981) donne également une approximation hautes fréquences de cette fonction :

$$H_1(x) \approx \frac{2}{\pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right). \quad (4.46)$$

D'autre part, Sandman (1995) traite aussi le cas d'un piston rigide, il propose une approximation basses fréquences et hautes fréquences de l'impédance de rayonnement du piston Z_f :

En basses fréquences, quand $f/f_0 \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} R = \frac{1}{2} \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \\ X = \frac{8}{3\pi} \frac{f}{f_0} \end{cases}$$

et en hautes fréquences, quand $f/f_0 \rightarrow \infty$:

$$\begin{cases} R = 1 \\ X = \frac{2}{\pi} \frac{f_0}{f} \end{cases}$$

où $f_0 = c_0/2\pi r_p$.

La Figure 4.13 compare le rapport des vitesses dans le cas du système à un degré de liberté, $10\log(|u_1/u_2|^2)$, et le rapport de la vitesses quadratique de la plaque de base sur la vitesse quadratique de la face externe, $10\log(\langle V_1^2 \rangle / \langle V_2^2 \rangle)$, pour le modèle de plaque proposé dans ce chapitre. Le matériau de masquage à les propriétés suivantes : $B_c = 10^6$ Pa, $h_c = 10$ mm, $\eta_c = 0$. La rigidité du ressort équivalent à ce matériau est $k_r = SB_c/h_c$. On prend un piston circulaire de telle sorte à avoir la même surface que la plaque utilisée : $S = ab = \pi(r_p)^2$. 8 termes ont été pris dans le calcul des fonctions J_1 et H_1 .

L'équation 4.40 admet une résonance quand $\omega^2 = k_r/m_f$, or, on ne retrouve pas de résonance en utilisant le calcul rigoureux de l'impédance de rayonnement du piston plan. Étant donné que m_f varie en fonction de la fréquence, il est admissible que le terme $k_r - \omega^2 m_f$ ne s'annule pour aucune fréquence. Par contre, le calcul approché de Sandman fait apparaître une résonance en basses fréquences. Cette résonance est dû à l'approximation trop sévère que fait Sandman en basses fréquences. En effet, à part le fait que le rapport des vitesses tend vers zéro quand la fréquence tend vers zéro, l'approximation basses fréquences de Sandman est très éloignée du comportement réel du piston plan. L'approximation hautes fréquences de Sandman est, quant à elle, en accord avec le calcul rigoureux de l'impédance de rayonnement, ainsi qu'avec l'approximation hautes fréquences proposée par Pierce. On remarque également qu'il n'apparaît aucune résonance dans le cas de la plaque.

C'est entre 500 Hz et 1000 Hz que l'approximation hautes fréquences, proposée par Pierce, rejoint le calcul rigoureux (à 1000 Hz, $kd = 7.2$). On remarque, de plus, que le calcul rigoureux diverge vers 2000 Hz (cela est dû au nombre limité de termes pris dans le calcul de J_1 et H_1). Entre 0 et 1000 Hz les pentes des deux courbes sont similaires, mais l'isolation procurée par le système à un degré de liberté est beaucoup plus importante (de l'ordre de 10 dB supérieur). Par contre, au-dessus de 1000 Hz il y a un changement de pente pour le système masse-ressort qu'on ne retrouve pas dans le modèle de plaque, de sorte que le système à un degré de liberté se rapproche du modèle de la plaque.

Ce test montre que l'on peut retrouver certaines tendances entre le cas très simple d'un système masse-ressort et le cas d'une plaque élastique couverte par un matériau de masquage. Néanmoins, un tel modèle ne pourra pas être utilisé pour déterminer les atténuations procurées par une plaque recouverte par un matériau de masquage, dans la mesure où les résultats trouvés par le système masse-ressort surestime beaucoup les résultats trouvés pour la plaque.

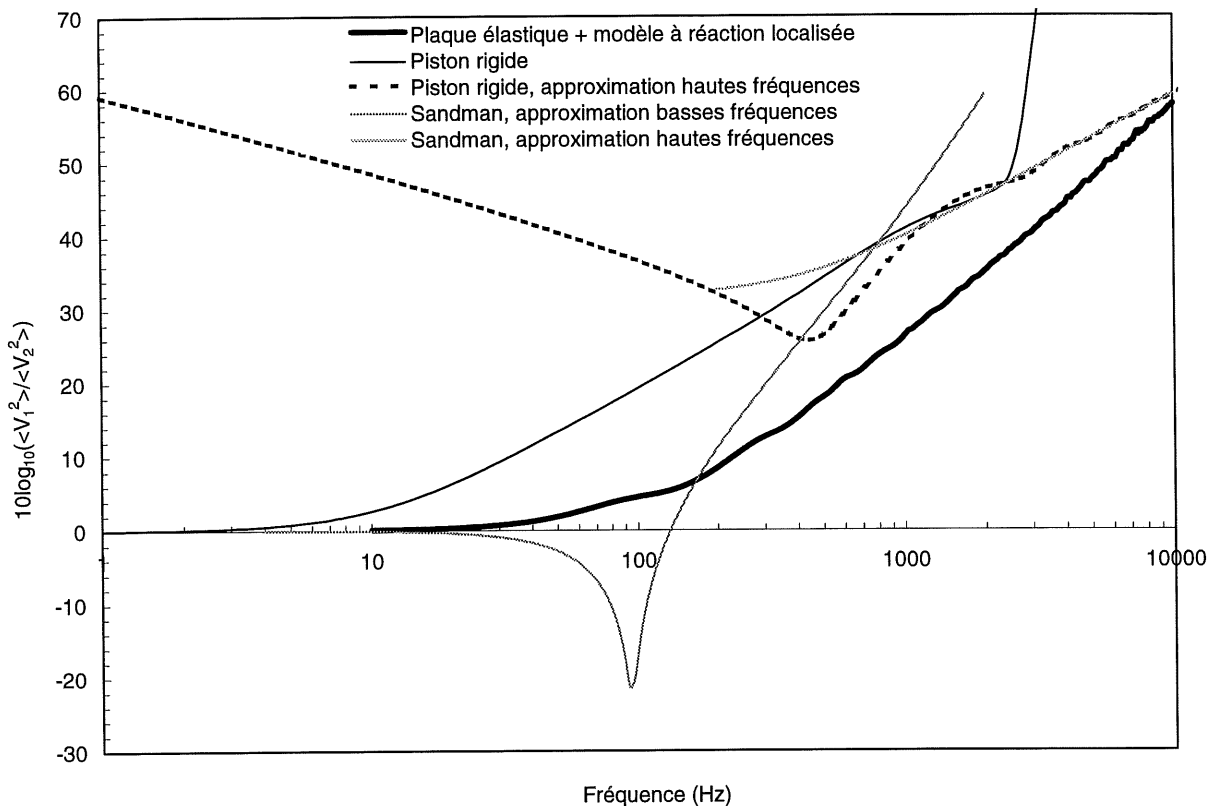


Figure 4.13 : Comparaison entre le modèle de plaque couverte par un matériau de masquage, proposée dans ce chapitre, avec un système à un degré de liberté.

4.3.4 Comportement vibratoire de la plaque de base dans le cas des forts découplages

Dans le cas d'une plaque couverte par un matériaux de masquage très rigide il n'y a aucun découplage et par conséquent la plaque de base se comporte comme une plaque immergée dans l'eau (Figure 4.14). Si au contraire on considère un matériau de masquage très peu rigide ($B_c = 10^4$ Pa, $h_c = 10$ mm, $\eta_c = 0$), étant donné que le mouvement de la plaque de base et le mouvement du fluide sont totalement découplés, la plaque de base va se comporter comme une plaque *in-vacuo* (équation 4.32, Figure 4.15). Ainsi, le fait de rajouter un matériau de masquage sur une plaque diminue l'influence du fluide sur cette plaque. Cela se traduit par deux effets : (1) un déplacement des fréquences de résonances vers les hautes fréquences (diminution de la masse ajoutée) et (2) une augmentation de la hauteur des pics aux résonances (diminution de l'amortissement par rayonnement). On voit donc que l'ajout d'un matériau de masquage sur une structure entraîne une augmentation du niveau vibratoire de cette structure.

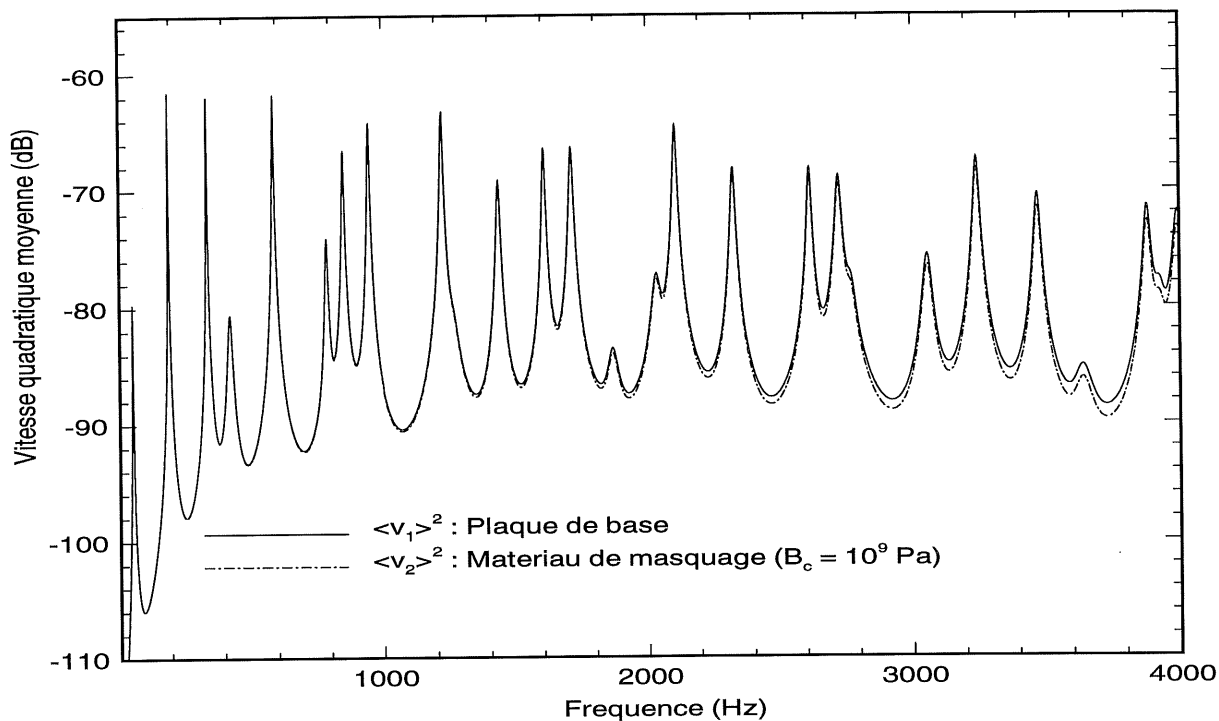


Figure 4.14 : Comparaison entre la vitesse quadratique de la plaque de base et celle de la couche externe du matériau de masquage dans le cas où $B_c = 10^9$ Pa, $h_c = 10$ mm, $\eta_c = 0$.

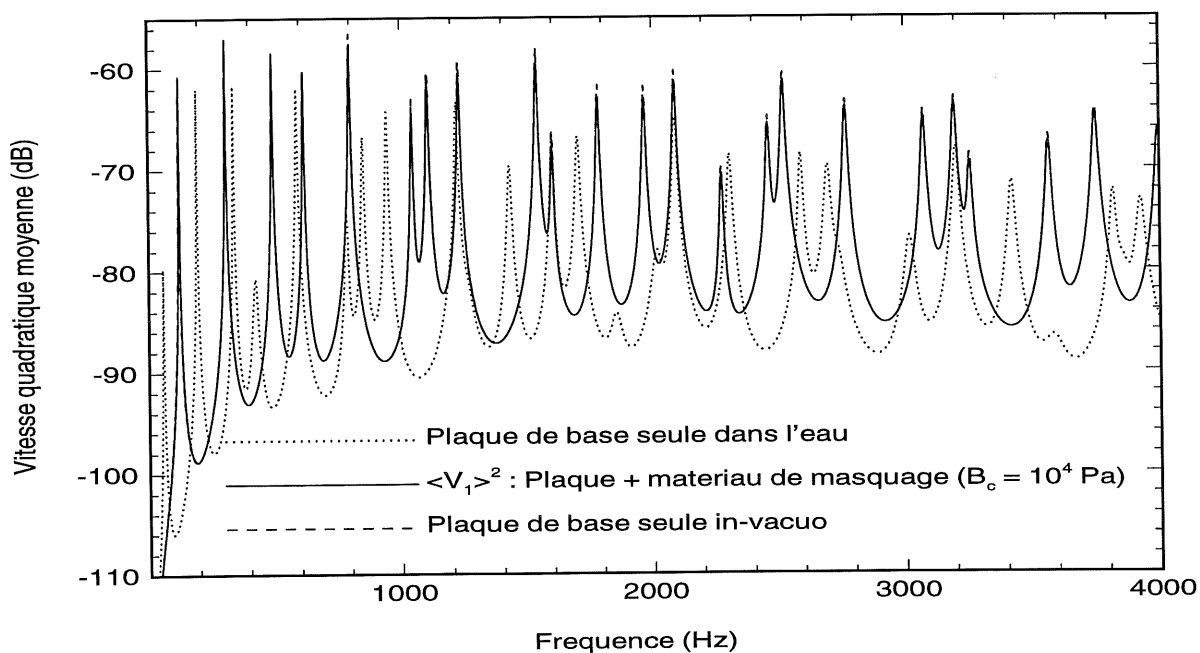


Figure 4.15 : Comparaison entre la puissance rayonnée d'une plaque *in-vacuo*, d'une plaque dans l'eau et d'une plaque couverte par un matériau de masquage peu rigide ($B_c = 10^4$ Pa, $h_c = 10$ mm, $\eta_c = 0$).

4.3.5 Étude du découplage en fonction de la fréquence

Afin d'étudier la dépendance fréquentielle de l'isolation procurée par l'ajout d'un matériau de masquage, on va utiliser le modèle pour les forts découplages, décrit au paragraphe 4.3.2. Ce modèle donne une relation simple entre les amplitudes du déplacement de la plaque de base, a_{mn} , et les amplitudes du déplacement de la couche externe du matériau de masquage, c_{pq} (équation 4.39). À partir de cette équation on voit que la dépendance fréquentielle des termes c_{pq} par rapport aux termes a_{mn} est contenue dans les termes $([H_{mnpq}]^{-1})/\omega^2$ (la matrice H_{mnpq} ne dépend que de la longueur a , de la largeur b de la plaque et de la fréquence, équation 4.15). La Figure 4.16 et la Figure 4.17 présentent quelques-uns de ces termes pour $a = b = 0.6$ m. Étant donné le grand nombre de terme de la matrice H_{mnpq} , ces deux figures n'ont pas la prétention de fournir une démonstration irréfutable pour expliquer le comportement fréquentiel de l'isolation procuré par un matériau de masquage. On remarque néanmoins que la plupart des termes présentés décroissent (linéaire en échelle log-log) avec la fréquence, ce qui doit entraîner une augmentation du découplage en fonction de la fréquence. Ce point va être confirmé dans les tests qui suivent.

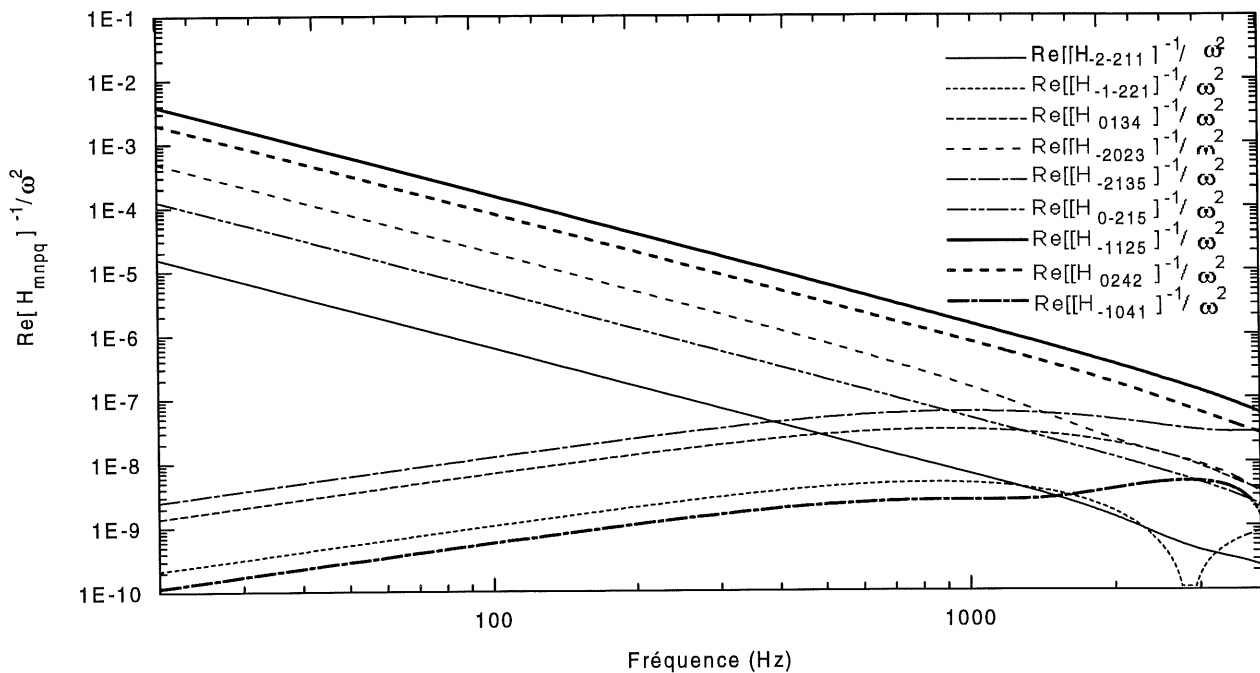


Figure 4.16 : Termes réels de la matrice $[H_{mnpq}]^{-1}/\omega^2$.

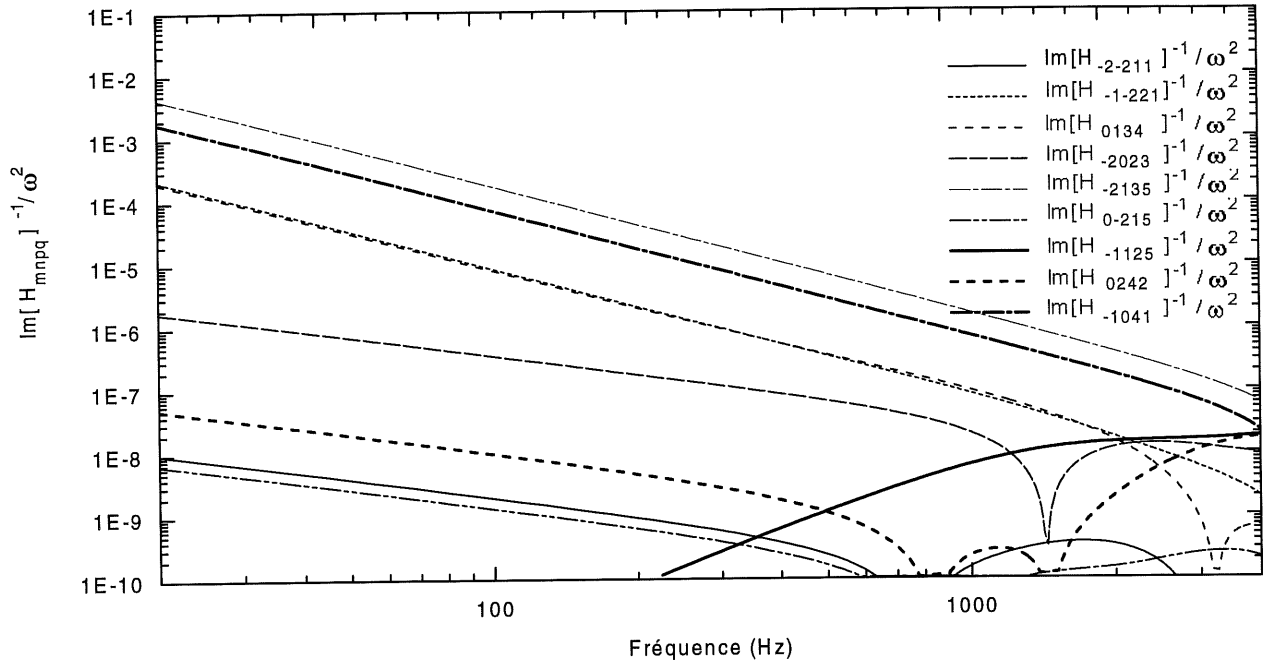


Figure 4.17 : Termes imaginaires de la matrice $[H_{mnpq}]^{-1}/\omega^2$.

Afin de mieux cerner l'influence des termes $([H_{mnpq}]^{-1})/\omega^2$ sur le comportement des matériaux de masquage, on peut comparer les termes a_{mn} et c_{mn} pour plusieurs modes m,n (figures 4.18 à 4.22, on prend la structure décrite dans l'introduction et un matériau de masquage avec $B_c = 10^6$ Pa, $h_c = 10$ mm, $\eta_c = 0$). Dans le cas où on décompose la pression pariétale en série de sinus (paragraphe 4.2.8) on peut écrire la relation :

$$c_{mn} = \frac{d_{mn}}{Z_c} + a_{mn} \quad \forall (m,n) \in [1, N]. \quad (4.47)$$

On ne peut pas écrire cette relation dans le cas où la pression et le déplacement sont exprimés dans des bases différentes. La relation 4.47 permet de comparer les amplitudes du déplacement de la plaque de base et celles du déplacement de la couche externe du matériau de masquage pour un même mode m,n . Dans le cas d'un matériau de masquage peu rigide ($B_c = 10^6$ Pa, $h_c = 10$ mm, $\eta_c = 0$) la plaque de base se comporte pratiquement comme une plaque *in-vacuo* (voir équation 4.32), par conséquent chaque terme a_{mn} ne comporte qu'une seule fréquence de résonance (on voit parfois apparaître une autre fréquence de résonance, très mineure, pour certain mode a_{mn} , cela est dû au fait que la plaque n'est pas exactement *in-vacuo*). Étant donné que l'on se situe dans un cas de forts découplages, la réponse vibratoire de la couche externe du matériau de masquage ne suit pas le comportement de la plaque de base. Les figures 4.18 à

4.22 montrent que l'amplitude du déplacement de la couche supérieure du matériau de masquage décroît plus rapidement en fonction de la fréquence que l'amplitude du déplacement de la plaque de base, et que par conséquent l'isolation augmente avec la fréquence. Le couplage intermodal est important au niveau de la réponse vibratoire de la surface externe, puisque dans chaque figure il apparaît plusieurs résonances pour c_{mn} . On remarque également que pour plusieurs de ces résonances c_{mn} est supérieur à a_{mn} , cela signifie qu'il peut y avoir une amplification des niveaux. Ce phénomène ne se retrouve pas sur la réponse globale de la structure, car la vitesse quadratique moyenne de la surface externe n'est jamais supérieure à la vitesse quadratique moyenne de la plaque de base.

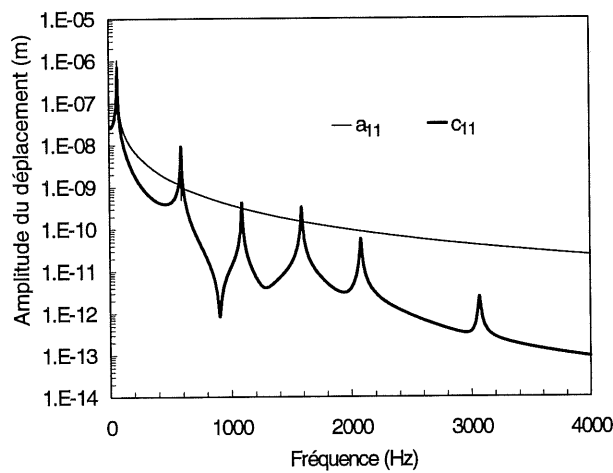


Figure 4.18 : Comparaison des amplitudes du déplacements plaque/matériau de masquage pour le mode (1,1).

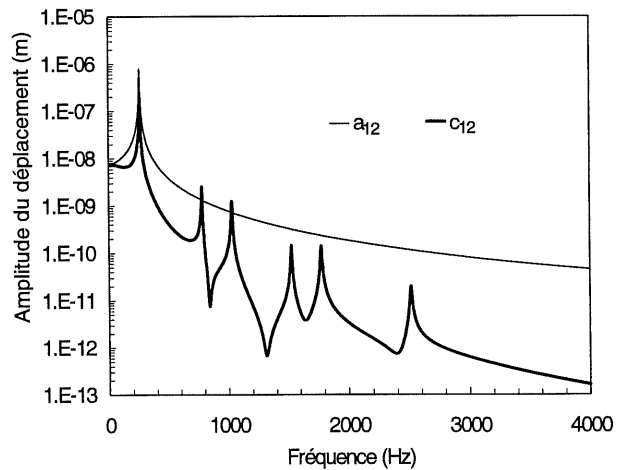


Figure 4.19 : Comparaison des amplitudes du déplacements plaque/matériau de masquage pour le mode (1,2).

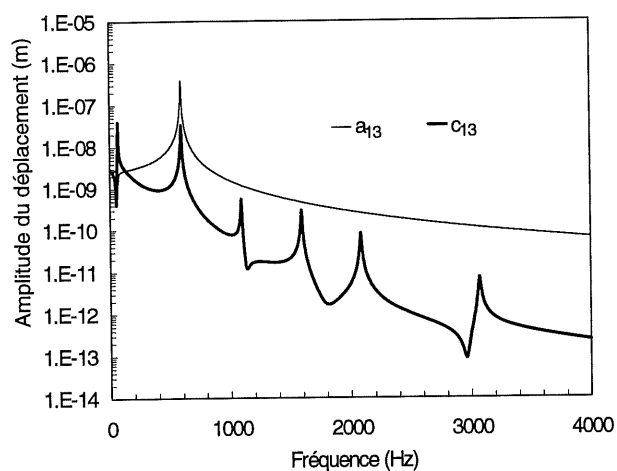


Figure 4.20 : Comparaison des amplitudes du déplacements plaque/matériau de masquage pour le mode (1,3).

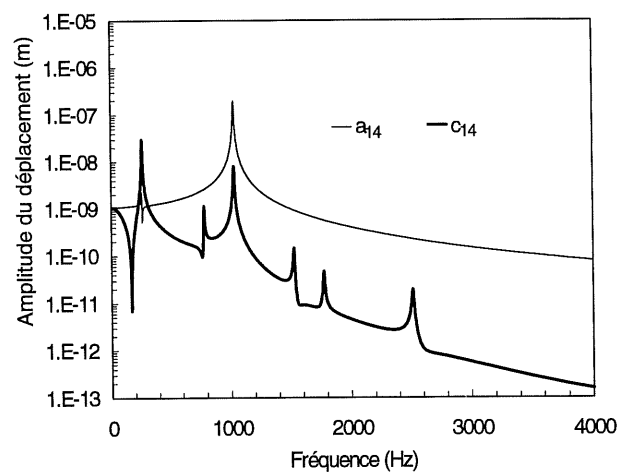


Figure 4.21 : Comparaison des amplitudes du déplacements plaque/matériau de masquage pour le mode (1,4).

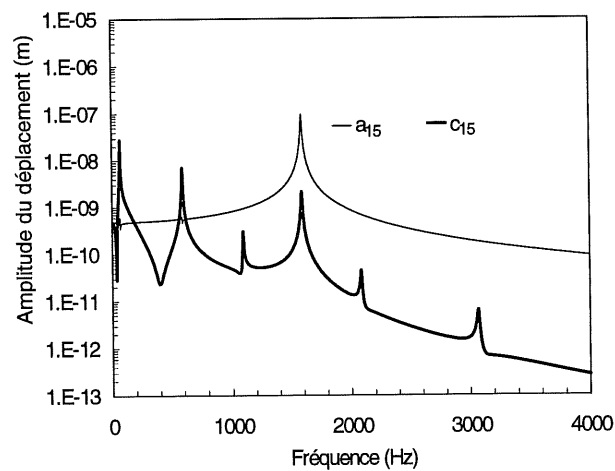


Figure 4.22 : Comparaison des amplitudes du déplacements plaque/matériau de masquage pour le mode (1,5).

4.3.6 Réponse vibratoire, réponse acoustique

Cette section étudie la vitesse quadratique moyenne et la puissance acoustique rayonnée du système plaque/matériau/fluide. La Figure 4.23 présente la vitesse quadratique de la plaque de base et la vitesse

quadratique de la surface externe du matériau de masquage, pour $B_c = 10^8$ Pa, $h_c = 10$ mm et $\eta_c = 0$. Cette figure montre que le découplage entre la plaque de base et la surface externe du matériau de masquage est nul en basses fréquences et faible en hautes fréquences. Cela nous permet d'affirmer que des matériaux ayant un module de compression de l'ordre de 10^8 Pa (et supérieur) ne sont pas capables de procurer une isolation significative pour le type de structures étudiées.

La Figure 4.24 compare la réponse vibratoire de la plaque de base avec la réponse vibratoire de la surface externe du matériau de masquage pour $B_c = 10^6$ Pa, $h_c = 10$ mm et $\eta_c = 0$. Dans ce cas l'isolation procurée est beaucoup plus importante. De plus, on retrouve bien l'augmentation de l'isolation avec la fréquence, étudiée au paragraphe précédent.

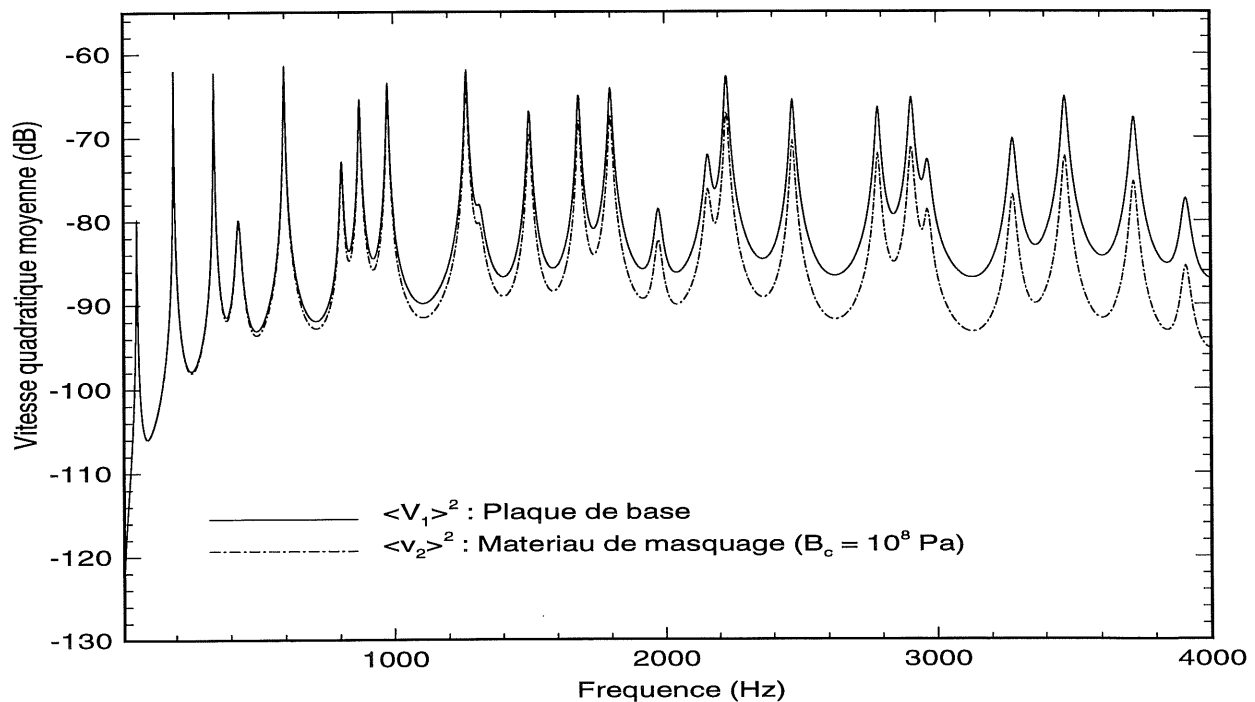


Figure 4.23 : Vitesse quadratique de la plaque de base et de la surface externe du matériau de masquage pour $B_c = 10^8$ Pa, $h_c = 10$ mm et $\eta_c = 0$.

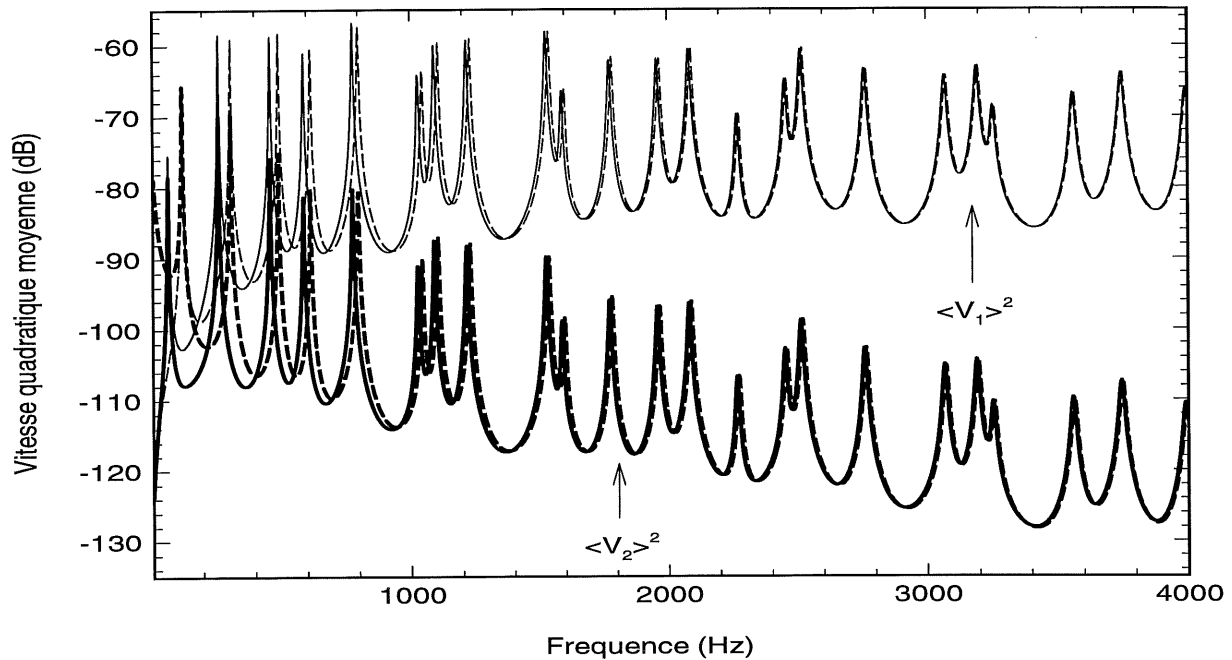


Figure 4.24 : Vitesse quadratique de la plaque de base et de la surface externe du matériau de masquage pour $B_c = 10^6$ Pa, $h_c = 10$ mm et $\eta_c = 0$. Comparaison entre le modèle rigoureux présenté dans cette étude (—) et le modèle pour les forts découplages (----).

La Figure 4.24 compare également le calcul rigoureux présenté dans la formulation théorique (paragraphe 4.2) avec la méthode approchée pour les forts découplages proposée au paragraphe 4.3.2. Le calcul approché se montre très précis sur toute la plage fréquentielle sauf en basses fréquences, ce qui est normal car à ces fréquences on ne peut pas considérer qu'il y a un fort découplage.

Si on s'intéresse à la puissance acoustique rayonnée par le matériau de masquage dans le fluide, on constate que l'on retrouve les mêmes tendances que celles déjà observées pour la réponse vibratoire. Pour le cas d'un matériau de masquage rigide ($B_c = 10^8$ Pa, $h_c = 10$ mm et $\eta_c = 0$), on constate que les niveaux de puissance rayonnée sont assez proches de ceux donnés par la plaque de base seule (Figure 4.25). Par contre, il apparaît un décalage au niveau des fréquences propres dû à la diminution de l'effet de la charge fluide sur la plaque de base (voir paragraphe 4.3.4). Dans le cas d'un matériau de masquage moins rigide ($B_c = 10^6$ Pa, $h_c = 10$ mm et $\eta_c = 0$, Figure 4.26), le découplage est beaucoup plus important. On retrouve le comportement fréquentiel déjà observé pour la réponse vibratoire : l'isolation acoustique augmente avec la fréquence. On remarque également que l'amortissement par rayonnement est très visible pour la plaque de base seule (surtout en hautes fréquences), alors qu'il n'apparaît pratiquement plus quand on rajoute un matériau de masquage.

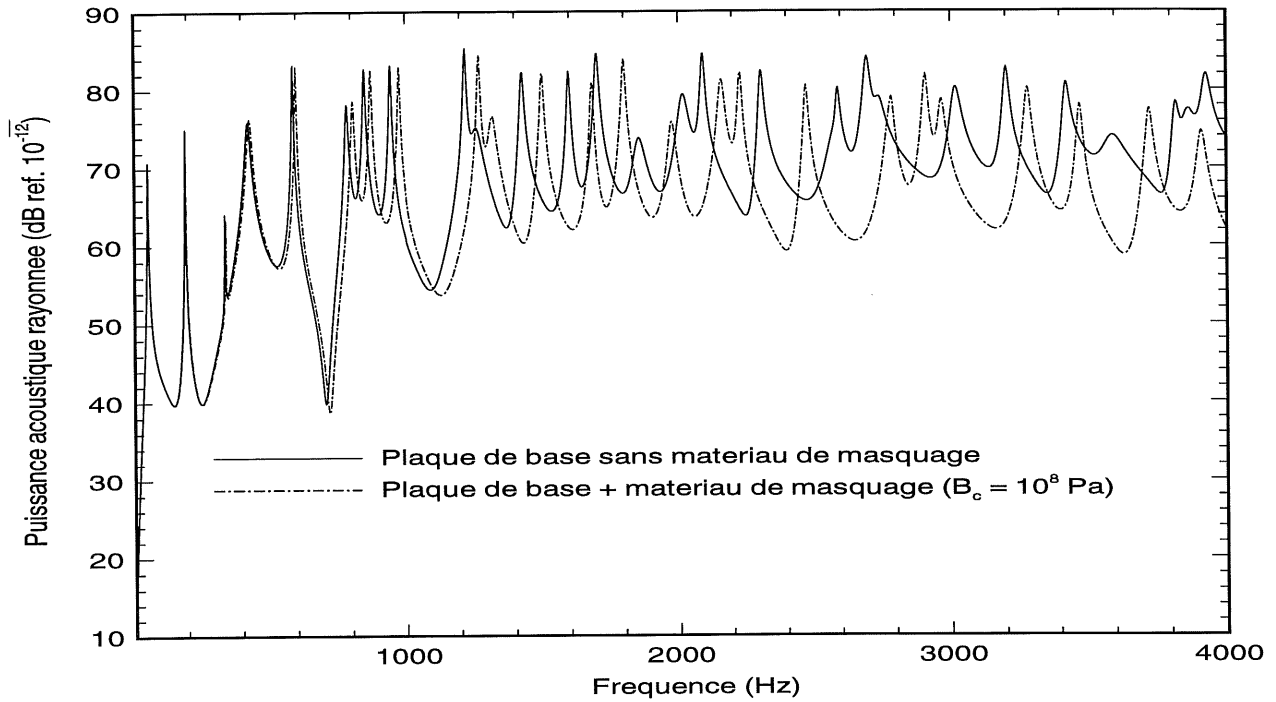


Figure 4.25 : Puissance rayonnée d'une plaque avec et sans matériau de masquage ($B_c = 10^8$ Pa, $h_c = 10$ mm, $\eta_c = 0$).

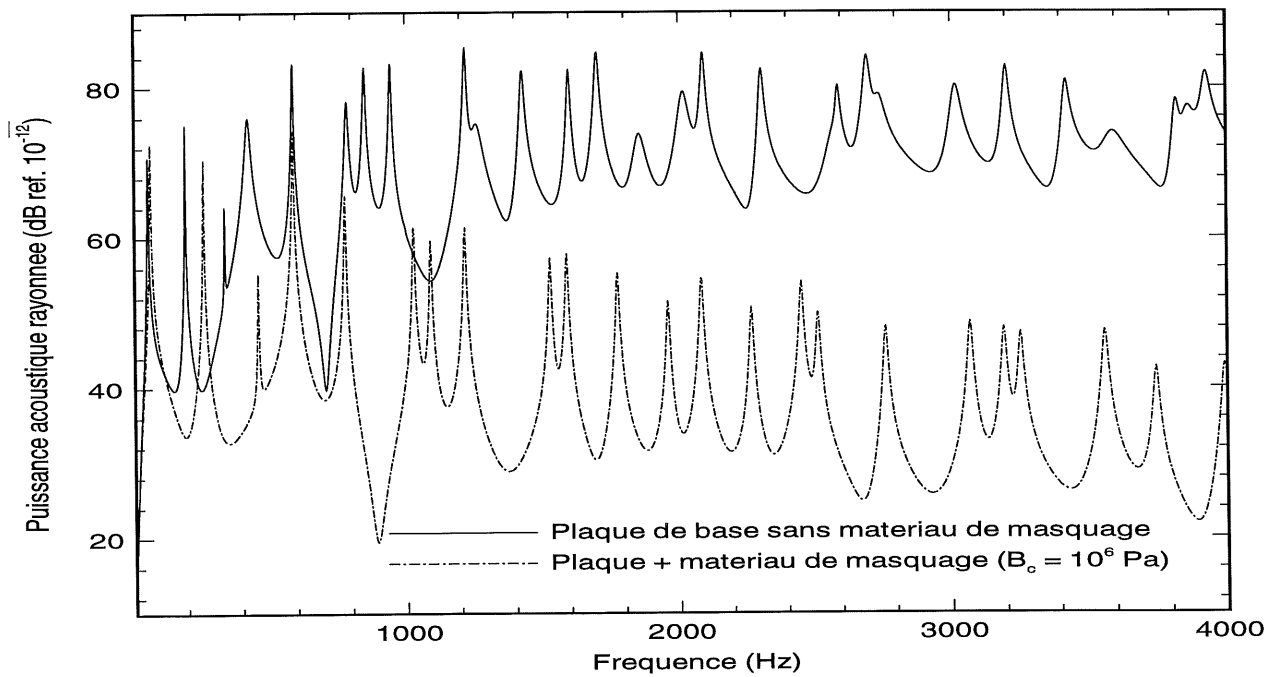


Figure 4.26 : Puissance rayonnée d'une plaque avec et sans matériau de masquage ($B_c = 10^6$ Pa, $h_c = 10$ mm, $\eta_c = 0$).

4.3.7 Rapport des vitesses quadratiques, perte par insertion

- Rapport des vitesses quadratiques

Afin de caractériser l'isolation procurée par un matériau de masquage, on va étudier un indicateur défini par le rapport entre la vitesse quadratique de la plaque de base et la vitesse quadratique de la surface externe du matériau de masquage : $10\log_{10}(\langle V_1^2 \rangle / \langle V_2^2 \rangle)$. Ce rapport est égal à zéro quand il n'y a pas de découplage, et tend vers l'infini quand le découplage devient très grand. La Figure 4.27, qui présente cet indicateur pour plusieurs rigidités du matériau de masquage (dans tous les cas $h_c = 10$ mm, $\eta_c = 0$) montre que cet indicateur ne fait pas apparaître le comportement modal de la structure. Cela signifie que les fréquences de résonances sont les mêmes pour la plaque de base et pour la surface externe du matériau de masquage (ce qui est normal puisque ce sont les fréquences de résonance du système couplé plaque/matériau/fluide), mais cela signifie également que la hauteur des pics (défini par la différence entre le haut d'un pic et sa base) est la même pour la plaque de base et pour la surface externe du matériau de masquage. Cet indicateur permet donc de montrer qu'un matériau de masquage isole le fluide de la plaque de base sans pour autant diminuer la hauteur des pics. Cela est très différent de l'effet obtenue par l'ajout d'un matériau de viscoélastique qui diminue les niveaux aux résonances, sans changer les niveaux hors résonances. On remarque qu'au dessus de 1000 Hz toutes les courbes ont une même pente. Cela prouve que l'augmentation de l'isolation en fonction de la fréquence est indépendante de la rigidité du matériau.

On remarque également que dans le cas de matériau de masquage assez peu rigide le fait de diviser par 10 la rigidité du matériau de masquage augmente l'isolation de 20 dB. Cela est en accord avec l'équation 4.39, qui exprime le déplacement de la surface externe du matériau de masquage en fonction du déplacement de la plaque de base, dans l'hypothèse des forts découplages. Cette équation est réécrite ci-dessous :

$$\{c_{pq}\} = \frac{abZ_c}{4\omega^2\rho_0} [H_{mnpq}]^{-1} \{a_{mn}\}. \quad (4.48)$$

avec $Z_c = B_c / h_c$. En remarquant que le rapport des vitesses quadratiques s'écrit :

$$10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{mn} |a_{mn}|^2}{\sum_{pq} |c_{pq}|^2} \right), \quad (4.49)$$

on voit bien que l'équation 4.39 (réécrite en 4.48), implique que le rapport des vitesses quadratiques est proportionnel à $1/(Z_c)^2$, et que par conséquent diviser par 10 la rigidité du matériau de masquage augmente l'isolation de 20 dB. Néanmoins, la relation 4.48 n'est vraie que dans les cas de forts découplages, c'est à dire qu'on ne peut pas l'appliquer en basses fréquences, où le découplage est toujours faible, ni pour des matériaux de masquages rigides ($B_c = 10^9$ Pa et $B_c = 10^8$ Pa).

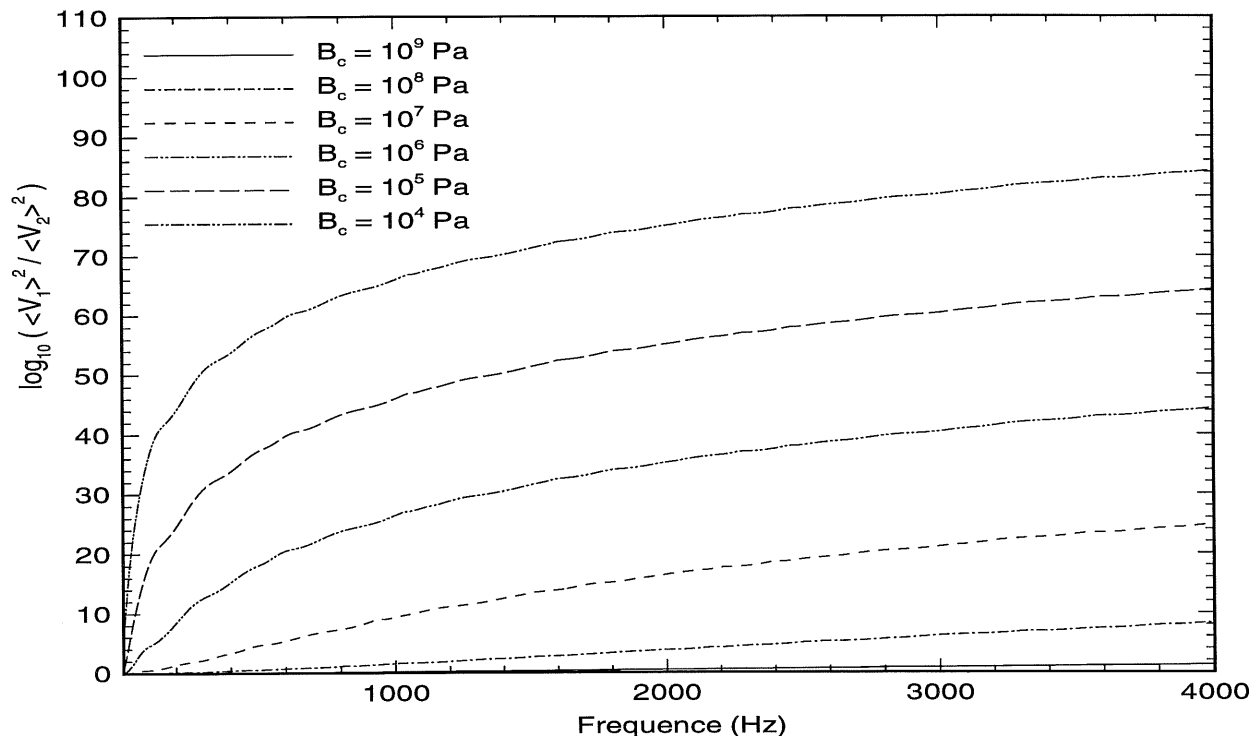


Figure 4.27 : Rapport des vitesses quadratiques pour une plaque de 0.6 m x 0.6 m avec 9 mm d'épaisseur.

- **Perte par insertion**

La perte par insertion est très utilisée en acoustique industrielle car elle permet de caractériser l'isolation acoustique procuré par l'ajout d'un traitement acoustique sur une structure. Elle est définie par :

$$R = 10 \log_{10} \left(\frac{W_0}{W} \right), \quad (4.50)$$

où W est la puissance acoustique rayonnée par la structure avec un matériau de masquage et W_0 la puissance acoustique rayonnée par la plaque seule. Dans notre cas cet indicateur n'est pas facilement utilisable car les fréquences de résonance de la plaque de base seule et celles de la plaque de base avec un matériau de masquage sont différentes (voir Figure 4.26). Tracer la perte par insertion en bandes fines donne une courbe pratiquement illisible du fait des très nombreuses résonances et anti-résonances, c'est pourquoi nous allons tracer la perte par insertion en 1/3 d'octave.

On peut comparer la perte par insertion avec le rapport des vitesses quadratiques, tout en se rappelant qu'ils sont très différents : le rapport des vitesses quadratiques est un indicateur purement vibratoire, alors que la perte par insertion fait intervenir la réponse acoustique. De plus, la perte par insertion requiert le calcul de la réponse acoustique avec et sans le matériau de masquage, alors que le rapport des vitesses quadratiques est simplement le rapport entre le déplacement de la plaque de base sur le déplacement de la couche externe. Dans la Figure 4.28 on trace la perte par insertion en 1/3 d'octave pour plusieurs matériaux de masquage (dans tous les cas $h_c = 10$ mm et $\eta_c = 0$) et on la compare avec le rapport des vitesses quadratiques. On constate que le rapport des vitesses quadratiques donne des résultats très proches de la perte par insertion, sauf en basses fréquences. Les variations importantes de la perte par insertion en basses fréquences sont dues au décalage entre les fréquences de résonances de la plaque de base seule et celles du système plaque/matériau (voir Figure 4.26). Le rapport des vitesses quadratiques est légèrement supérieur (environ 3-5 dB) à la perte par insertion, par contre les pentes des deux indicateurs sont identiques. En supposant les efficacités de rayonnement inchangées par l'ajout d'un matériau de masquage, la différence de 3 à 5 dB entre la perte par insertion et le rapport des vitesses quadratiques, est en fait la différence entre la vitesse de la plaque de base avec et sans matériau de masquage.

Ainsi, bien que le rapport des vitesses quadratiques soit un indicateur purement vibratoire, il donne des tendances très précises au sujet de l'isolation acoustique procuré par un matériau de masquage. De plus, il est beaucoup plus facile à interpréter que la perte par insertion, car il est indépendant du caractère modal de la structure.

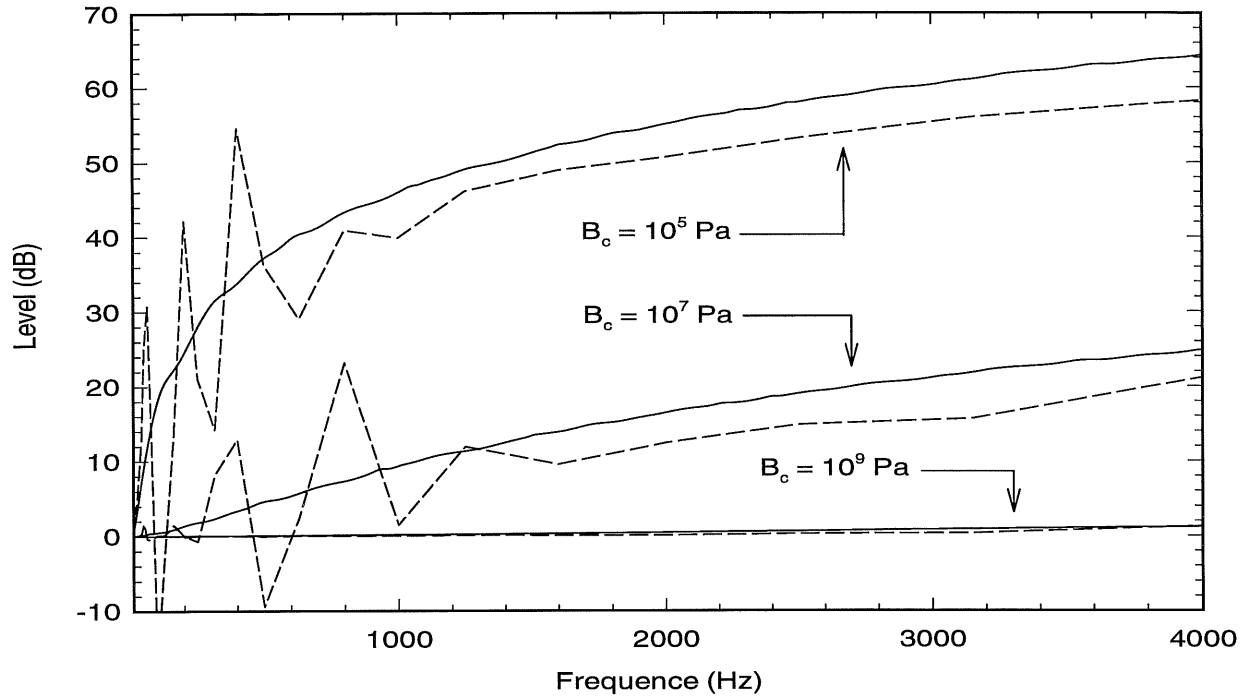


Figure 4.28 : Comparaison entre la perte par insertion (---) et le rapport des vitesses quadratiques (—) pour une plaque de 0.6 m × 0.6 m avec 9 mm d'épaisseur.

4.3.8 Étude paramétrique

- Influence de l'épaisseur du matériau de masquage

La relation 4.1 ($P = (w_2 - w_1)B_c/h_c$) montre que l'influence de l'épaisseur du matériau de masquage est inverse à celle du module de compression. Par conséquent, si diminuer la rigidité du matériau de masquage augmente le découplage, on peut s'attendre à ce qu'augmenter l'épaisseur, augmente le découplage. C'est ce que nous observons dans la Figure 4.29 qui présente le rapport des vitesses quadratiques pour une plaque de 0.6 m × 0.6 m × 0.009 m en acier, couverte par un matériau de masquage ($B_c = 10^7$ Pa, $\eta_c = 0$). Quatre valeurs différentes de l'épaisseur du matériau de masquage sont considérées : $h_c = 1$ mm, $h_c = 5$ mm, $h_c = 10$ mm, $h_c = 50$ mm. En utilisant le résultat du paragraphe 4.3.6, qui montre que le rapport des vitesses quadratiques est proportionnel à $(1/Z_c)^2$, avec $Z_c = B_c/h_c$, on constate que multiplier l'épaisseur par 10 augmente le découplage de 20 dB.

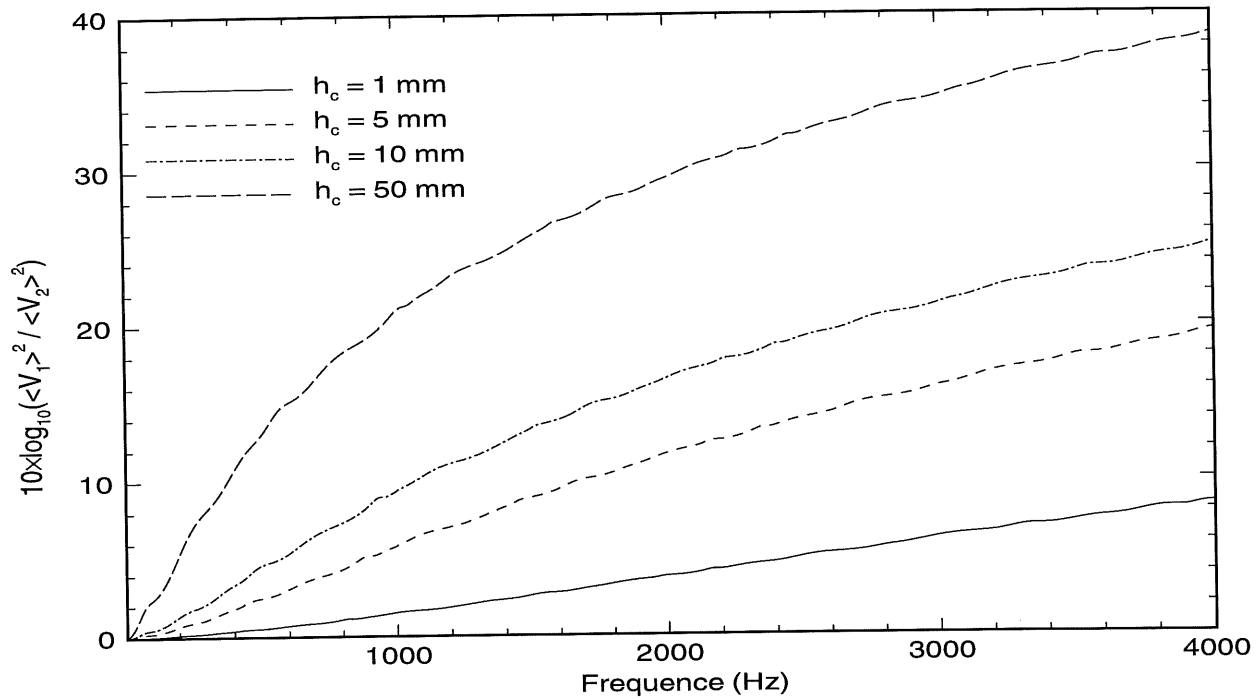


Figure 4.29 : Rapport des vitesses quadratiques pour quatre épaisseurs du matériau de masquage. $h_c = 1$ mm, $h_c = 5$ mm, $h_c = 10$ mm, $h_c = 50$ mm ($B_c = 10^7$ Pa, $\eta_c = 0$).

- **Influence de l'amortissement du matériau de masquage**

Dans tous les cas présentés précédemment le facteur de perte du matériau de masquage est nul ($\eta_c = 0$). Nous allons maintenant étudier l'influence de l'amortissement du matériau de masquage sur la réponse acoustique du système plaque/matériau/fluide. La Figure 4.30 présente la puissance acoustique rayonnée par une plaque de $0.6 \text{ m} \times 0.6 \text{ m} \times 0.009 \text{ m}$ en acier, couverte par un matériau de masquage ($B_c = 10^7$ Pa, $h_c = 10$ mm). Trois valeurs différentes du facteur de perte du matériau de masquage sont testées : $\eta_c = 0$, $\eta_c = 0.5$, $\eta_c = 1$. On voit que le fait d'augmenter l'amortissement dans le matériau de masquage diminue les niveaux aux résonances tout en augmentant légèrement les niveaux aux anti-résonances. On retrouve l'effet d'amortissement déjà observé sur les matériaux visocélastiques aux chapitres précédents.

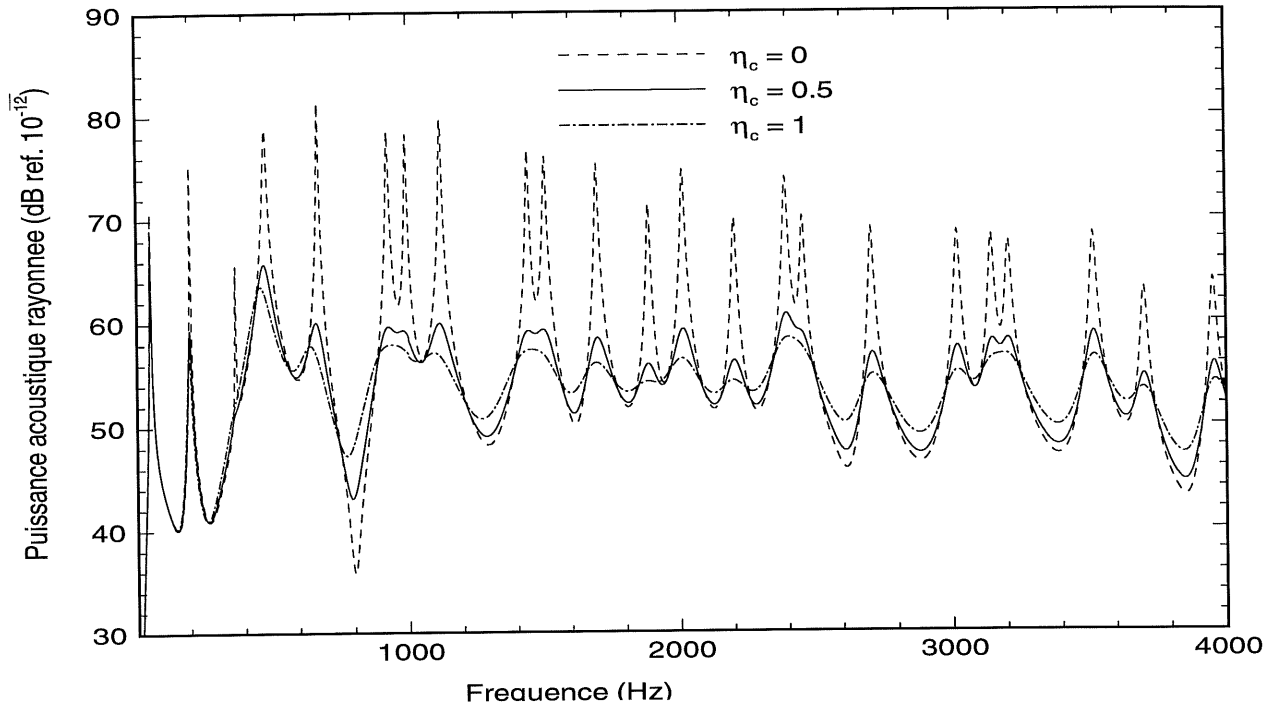


Figure 4.30 : Puissance acoustique rayonnée par la surface externe du matériau de masquage pour trois valeurs différentes du facteur de perte du matériau de masquage : $\eta_c = 0$, $\eta_c = 0.5$, $\eta_c = 1$ ($B_c = 10^7$ Pa, $h_c = 10$ mm).

- **Influence de la dimension de la structure**

Tous les résultats présentés dans cette étude utilisent la même plaque de base de $0.6 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}$. Il est important d'étudier l'influence du changement de dimensions de la structure de base sur l'isolation procuré par le matériau de masquage. Ce point est important quand on veut transférer les résultats obtenues sur une petite structure académique au cas réel qui est étudié (coque de bateau par exemple). La Figure 4.31 présente le rapport des vitesses quadratiques pour quatre dimensions de la structure, le matériau de masquage est le même pour ces quatre cas : $B_c = 10^7$ Pa, $h_c = 10$ mm, $\eta_c = 0$. Cette figure permet de constater que le découplage fourni par un matériau de masquage est approximativement indépendant des dimensions de la structure. Par contre, il ne faut pas oublier que le comportement vibro-acoustique de ces structures va être très différent (densité modale, niveaux aux résonances...).

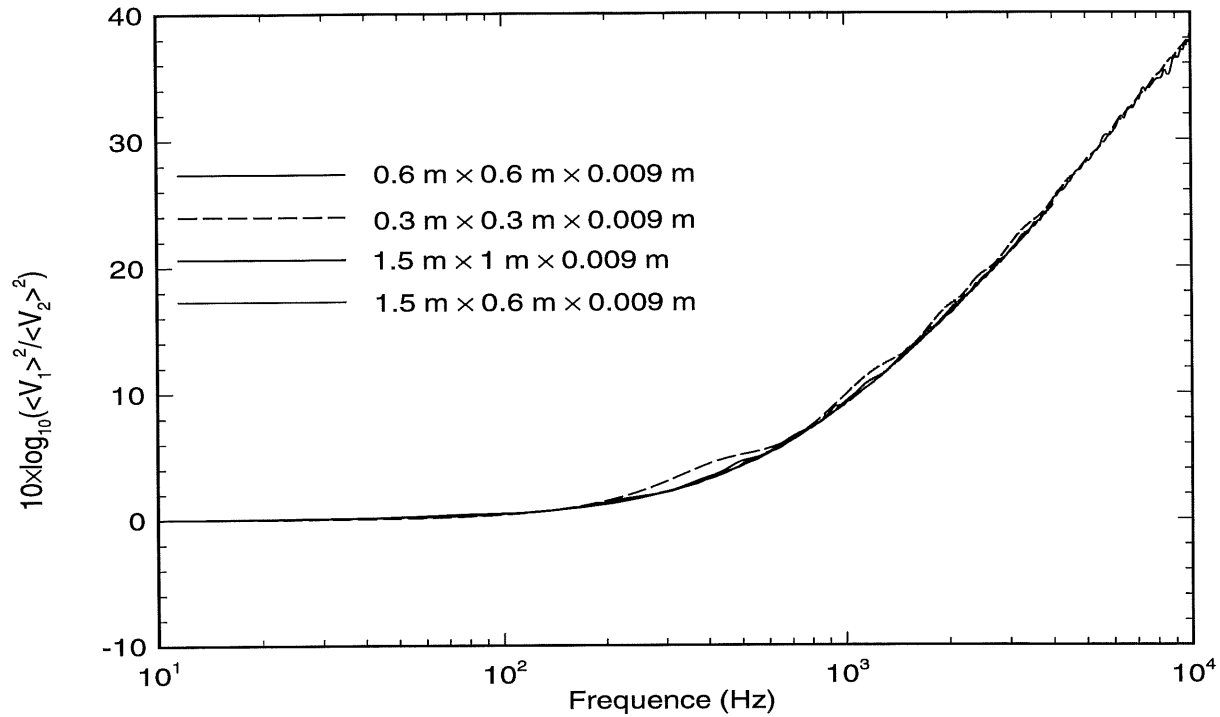


Figure 4.31 : Rapport des vitesses quadratiques pour quatre dimensions différentes de la plaque (tous les autres paramètres étant identiques).

- **Influence de l'épaisseur de la structure de base**

Dans ce paragraphe on étudie l'influence de la variation d'épaisseur de la structure de base sur l'isolation obtenue. On traite le cas d'une plaque de $0.6 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}$ en acier couverte par un matériau de masquage avec les caractéristiques suivantes : $B_c = 10^7 \text{ Pa}$, $h_c = 10 \text{ mm}$, $\eta_c = 0$. Trois épaisseurs de la plaque de base sont considérées : 9 mm, 5 mm et 3 mm. La Figure 4.32 qui présente ces cas montre que diminuer l'épaisseur de la plaque de base diminue aussi l'isolation acoustique. Cette diminution de l'isolation est néanmoins assez faible, ce qui permet d'affirmer que l'épaisseur de la structure de base est un paramètre qui a peu d'influence sur l'isolation acoustique obtenue par l'ajout d'un matériau de masquage. Ce point est confirmé par la relation 4.39. En effet, H_{mnpq} est indépendant de l'épaisseur de la plaque et on sait que diminuer l'épaisseur d'une structure augmente son niveau vibratoire, ainsi quand on augmente l'épaisseur de la plaque de base, a_{mn} augmente dans 4.39, alors que les autres termes sont inchangés, par conséquent c_{pq} augmente aussi.

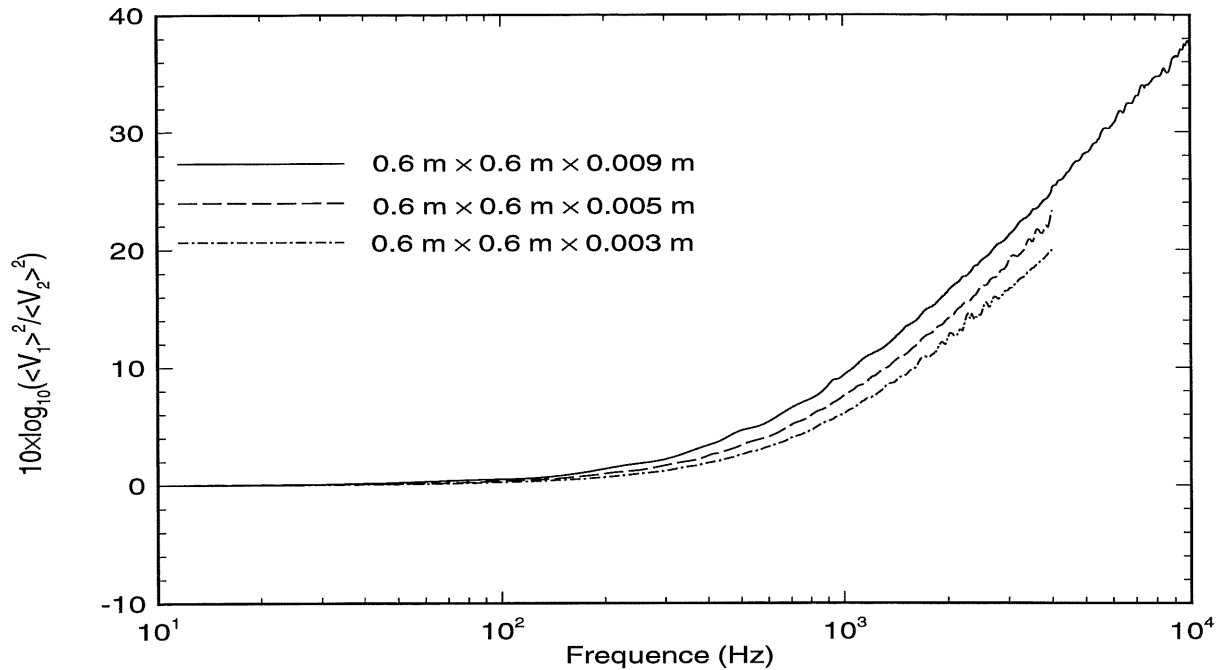


Figure 4.32 : Rapport des vitesses quadratiques pour quatre épaisseurs différentes de la plaque de base (tous les autres paramètres étant identiques).

4.4 Synthèse et perspectives

Une formulation théorique qui permet de caractériser le comportement vibro-acoustique d'une plaque rectangulaire simplement appuyée, couverte par un matériau de masquage et immergée dans l'eau a été proposée dans ce chapitre. La plaque est décrite par le modèle de Love-Kirchhoff qui prend en compte uniquement la flexion de la structure. Le modèle à réaction localisée est utilisé pour modéliser le comportement du matériau de masquage, ce modèle ne prend en compte que les déformations dans le sens de l'épaisseur de la structure en considérant que le matériau se comporte comme un réseau de ressort sans masse uniformément répartie.

Deux méthodes pour décrire la pression acoustique pariétale ont été proposées : la première consiste à décomposer la pression en série de Fourier, alors que la deuxième suppose que la pression acoustique est nulle sur les bords de la plaque, ce qui permet de décomposer la pression en série de sinus. Ces deux méthodes présentent une bonne concordance, ce qui permet d'affirmer qu'il est acceptable de développer

la pression pariétale en série de sinus. La série de sinus présente l'avantage d'une convergence très rapide contrairement à la série de Fourier.

Il a été montré que le rapport entre la vitesse quadratique de la plaque de base et la vitesse quadratique de la surface externe du matériau de masquage est un indicateur capable de caractériser l'isolation acoustique obtenu par l'ajout d'un matériau de masquage. Cet indicateur est indépendant du caractère modal de la structure, et, bien que purement vibratoire, donne des résultats très proches de la perte par insertion exprimée en 1/3 d'octave.

Il a été montré que les matériaux de masquage sont capables de procurer une isolation acoustique quand ils sont insérés entre une structure vibrante et un fluide lourd. Cette isolation, pratiquement nulle en basses fréquences, croît avec la fréquence. En hautes fréquences et dans le cas des forts découplages l'isolation croît avec une pente constante, quelque soit le matériau utilisé.

L'isolation procurée par un matériau de masquage est directement reliée aux caractéristiques de ce matériau : elle augmente quand la rigidité du matériau de masquage diminue et quand son épaisseur augmente. En hautes fréquences et dans le cas des forts découplages, une loi très simple reliant l'isolation acoustique aux caractéristiques du matériau de masquage a été observée : l'isolation acoustique est proportionnelle à $(1/Z_c)^2$ (avec $Z_c = B_c / h_c$). Ainsi, multiplier par 10 l'épaisseur ou diviser par 10 la rigidité entraîne une augmentation de 20 dB de l'isolation.

L'accroissement du facteur de perte du matériau de masquage diminue les niveaux aux résonances sans changer les niveaux hors résonances, exactement comme dans le cas d'un matériau viscoélastique.

Une étude paramétrique a permis de montrer que l'isolation procurée par un matériau de masquage est indépendante de la dimension de la structure de base, et très peu dépendante de l'épaisseur de la plaque de base.

Pour faire suite à cette étude, deux points importants pourraient être étudiés :

- Le premier est une étude expérimentale du comportement vibro-acoustique du système plaque/matériau de masquage/eau. Une telle étude permettrait de lever le doute quand au coefficient à utiliser pour relier les contraintes aux déformations quand on utilise le modèle à réaction localisée. Il permettrait également de valider les tendances trouvées par le modèle proposé dans ce chapitre. Il est bien évident que ces mesures sont beaucoup plus complexes à réaliser que

des mesures dans l'air. Afin d'évoluer dans un environnement facilement contrôlable, il faut effectuer des mesures dans une cuve, ce qui implique de revoir le modèle théorique puisque celui-ci est spécifique à une structure en milieu infini.

- Le deuxième point consiste en l'élaboration d'un modèle théorique plus complet pour décrire le comportement dynamique des matériaux de masquage (utilisant, par exemple, la théorie tridimensionnelle de l'élasticité) qui permettrait de voir dans quelles mesures les approximations du modèle à réaction localisée sont pertinentes. Cela permettrait également de connaître les limites du modèle à réaction localisée.

5. Méthode hybride pour la prédiction du rayonnement acoustique d'une structure à partir de la mesure de son champ vibratoire

5.1 Introduction

5.1.1 Présentation générale et état des connaissances

Deux problèmes couramment rencontrés dans le domaine du rayonnement acoustique des structures sont à l'origine de cette étude :

1. Actuellement aucun modèle numérique n'est capable de prédire de manière satisfaisante le rayonnement acoustique d'une structure complexe (automobile, avion, compresseur...), sur une large plage fréquentielle.

Les méthodes des éléments finis et des éléments finis de frontières se limitent aux basses fréquences et sont pénalisantes en termes de temps de calcul et de place mémoire. De plus, il est très difficile de modéliser des éléments tels que des rivets ou des vis, alors qu'on sait que ces éléments jouent un rôle important dans le bruit total rayonné. La méthode SEA (Statistical Energy

Analysis), quand à elle est dédiée aux hautes fréquences et ne fournit pas d'information sur la caractéristique modal de la structure.

2. Dans le cas d'une structure complexe, il est très difficile d'isoler les éléments principalement responsables du bruit rayonné des autres éléments qui ne jouent pas, ou peu, de rôle dans le rayonnement de la structure. Or, la connaissance des éléments responsables du bruit est fondamentale dans le contrôle du bruit à la source. En effet, il est inutile de mettre un traitement amortissant sur une partie de la structure qui n'est pas à l'origine du bruit que l'on veut éliminer. La connaissance des sous-structures qui entraînent des niveaux de bruit gênants doit être la première étape dans un processus de contrôle de bruit à la source.

Les mesures vibratoires ne permettent pas d'avoir une bonne indication du champ acoustique rayonné, ni de localiser les sources de manière certaine. En effet, le rayonnement acoustique d'une structure est relié à sa vibration par le facteur de rayonnement, or ce facteur n'est pas une constante en fonction de la fréquence (surtout en basses fréquences). Ainsi, un élément soumis à de fortes vibrations n'est pas forcément la cause de forts niveaux de bruit et vice versa.

L'intensimétrie (voir Nicolas, 1985 ou Fahy, 1995) est actuellement la méthode classique pour estimer la puissance acoustique rayonnée par une structure. Néanmoins, cette méthode a parfois du mal à isoler les sources, car il s'agit souvent de mesures globales délimitant une surface assez grande, or, à l'intérieur de cette surface il est difficile de déterminer quel élément de la structure est à l'origine du bruit obtenu. Dans le cas de structures compactes, comme un moteur de voiture monté dans la voiture, l'intensimétrie sera pratiquement incapable de prédire correctement la puissance rayonnée à cause de la géométrie compliquée de l'ensemble.

Plusieurs auteurs ont fait ce type de constatations et ont proposé des méthodes hybrides qui utilisent à la fois des mesures et des calculs afin de prédire le champ acoustique rayonné par des structures complexes. Toutes les méthodes présentées dans la suite de cette étude bibliographique mesurent le champ vibratoire de la structure et évaluent numériquement la pression rayonnée. Les différences entre ces modèles interviennent au niveau des hypothèses utilisées pour évaluer la pression rayonnée à partir du champ vibratoire.

Lovat *et al* (1996) a proposé une méthode de monopôle équivalent, qui consiste à approximer le champ de pression par une superposition de monopôle acoustique. La diffraction induite par les objets environnants et par la déformation de la structure est négligée. La surface vibrante est divisée en surfaces

élémentaires sur lesquelles on mesure la vitesse normale. Lovat définit ensuite un monopôle à l'emplacement de chaque point de mesure en y associant un poids proportionnel à la surface élémentaire et à la vitesse normale et calcule la puissance acoustique générée par l'ensemble des monopôles. Cette technique est facile à mettre en œuvre mais entraîne une surestimation de la vraie puissance acoustique rayonnée dû au fait qu'on ne considère que des monopôles. De plus, afin d'avoir une bonne estimation de la puissance rayonnée en moyennes et hautes fréquences, il faut prendre un nombre de points important.

Fahline et Koopman (1996) d'une part, et Paddock (1994) d'autre part ont proposés une méthode plus précise qui tient compte du champ diffracté par la déformation de la structure et par la présence des sources acoustiques environnantes. Cette méthode qui consiste à "mesurer" la fonction de Green du problème se divise en deux étapes. Premièrement, après avoir divisé la structure en surfaces élémentaires, on évalue les impédances de rayonnement de la structure quand celle-ci est immobile. Pour cela, une source monopolaire est placée sur une des surfaces élémentaires et la pression acoustique est mesurée sur toutes les autres surfaces élémentaires. Cette étape est répétée de sorte que la source monopolaire se déplace sur toutes les surfaces élémentaires. Deuxièmement, la structure est mise en vibration et on mesure la vitesse normale sur chaque surface élémentaire. La puissance acoustique rayonnée est alors calculée en multipliant le vecteur vitesse par les impédances de rayonnement. Cette méthode est intéressante car elle permet une évaluation précise de la puissance acoustique rayonnée qui tient compte de la géométrie de la structure. Néanmoins, l'évaluation des impédances de rayonnement entraîne des calculs lourds qui se traduisent par un temps de calcul proportionnel à N^2 , si N est le nombre de surfaces élémentaires. De plus, cette méthode implique une mise en œuvre expérimentale assez complexe.

La méthode proposée dans ce chapitre s'inscrit entre la méthode simple de Lovat et l'approche complète de Fahline et Koopman. Elle nécessite une mise en œuvre expérimentale aussi simple que la méthode de Lovat, mais permet une meilleure précision que l'approche monopolaire, tout en demandant un effort numérique moindre que l'approche de Fahline et Koopman. Le principe de cette méthode est présenté au paragraphe suivant.

5.1.2 Principe de la méthode hybride

La méthode hybride proposée dans ce chapitre consiste à mesurer le champ vibratoire de la structure et ensuite à calculer le rayonnement acoustique à partir du champ vibratoire mesuré. Elle permet de calculer

le champ acoustique, rayonné par une structure complexe sur une très grande plage fréquentielle (basses, moyennes et hautes fréquences) et avec une très bonne précision, tout en éliminant la contribution des autres sources de bruit qui serait difficilement dissociables avec une mesure d'intensimétrie.

Cette technique permet d'éliminer le problème de sources perturbatrices : il est très difficile de mesurer le niveau de bruit d'une machine dans un atelier où fonctionnent plusieurs autres machines en utilisant des mesures acoustiques. Par contre, un fort niveau de bruit environnant perturbe peu une mesure de vibration. Dans le cas d'une structure qui génère à la fois du bruit provenant de la vibration d'une structure et du bruit aérodynamique, la méthode hybride pourra très facilement donner la contribution du bruit dû à la vibration mécanique dans le rayonnement total.

La plupart des structures couramment rencontrées dans l'industrie ne sont ni entièrement bafflées, ni entièrement non-bafflées. Dans cette étude nous allons calculer le rayonnement acoustique de la structure considérée plane pour ces deux cas extrêmes (bafflé et non-bafflé), la réponse acoustique de la vraie structure doit être comprise entre ces deux cas. Les calculs bafflé et non-bafflé vont fournir une estimation maximale et minimale du bruit rayonné par la structure.

La méthode hybride se décompose en deux étapes :

1. La mesure du champ vibratoire de la structure.
2. Le calcul du rayonnement acoustique de la structure dans les cas bafflé et non-bafflé.

La mesure du champ vibratoire de la structure peut être faite avec des accéléromètres, un vibromètre laser ou tout autre appareil capable de fournir une indication sur le déplacement, la vitesse ou l'accélération de la structure. Afin d'obtenir des grandeurs en fonction de la fréquence, il faut réaliser une transformée de Fourier des grandeurs fonctions du temps, cela est réalisé à l'aide d'un analyseur. Plusieurs points de mesures sur la structure sont nécessaires pour pouvoir calculer le champ acoustique rayonné. Il faut que la mesure soit réalisée dans le cas d'une excitation stationnaire, mais il n'y a aucune contrainte sur le type d'excitation (acoustique, mécanique, aérodynamique...). Les sources acoustiques autres que le rayonnement du panneau mesuré sont éliminées, ce qui permet d'obtenir la puissance acoustique rayonnée uniquement par la surface mesurée. On peut donc calculer le rayonnement de la structure avec la vraie excitation et non plus avec des excitations académiques tel qu'une force ponctuelle

ou une onde plane, ce point est important car on sait que la réponse d'une structure dépend directement de son excitation.

Le calcul du rayonnement acoustique s'effectue en trois étapes :

1. La première étape consiste à calculer les amplitudes du déplacement de la structure à partir des mesures, cela est réalisé à l'aide d'une méthode de collocation, et entraîne la résolution d'un système linéaire de dimension égale aux nombres de points de mesure.
2. la deuxième étape consiste à calculer le rayonnement acoustique de la structure à l'aide de la formulation intégrale en considérant qu'elle est insérée dans un baffle infini et rigide. La condition de baffle infini permet d'utiliser l'intégrale de Rayleigh qui fournit une relation entre la pression acoustique dans le fluide et le déplacement de la structure. Cette étape demande le calcul des impédances de rayonnement de la structure (intégrales quadruples).
3. La troisième étape est le calcul du champ acoustique rayonné dans le cas non-bafflé. Afin d'éviter les problèmes de singularité posés par la formulation intégrale dans ce cas, nous allons utiliser une formulation variationnelle associée à la formulation intégrale, tel que définie par Hamdi (1982) et reprise par Nelisse (1995). Pour résoudre ce cas, une nouvelle inconnue est introduite dans le problème : il s'agit du saut de pression (aussi appelé potentiel de double couche) qui est la différence des pressions acoustiques de part et d'autre de la structure. Le calcul du saut de pression demande la résolution d'un système linéaire ainsi que le calcul d'intégrales quadruples.

5.1.3 Objectif de l'étude

On peut dégager trois objectifs à cette étude :

1. Définir une formulation théorique pour le calcul du rayonnement acoustique d'une plaque bafflée et non-bafflée, qui soit valide en basses, moyennes et hautes fréquences.
2. Construire un code informatique qui soit rapide, fiable et simple d'utilisation même pour une personne non experte en vibrations et acoustique.

3. Répondre au besoin de l'industrie en lui fournissant un outil capable de l'aider dans la conception de produits silencieux.

Il est donc très important dans cette étude de dépasser le stade du problème académique et de tester la méthode sur des cas réels rencontrés dans l'industrie.

5.2 Formulation théorique

5.2.1 Introduction

Trois parties composent ce paragraphe : (1) la méthode de collocation utilisée pour calculer l'amplitude du déplacement, (2) le calcul du rayonnement acoustique de la structure bafflée et (3) le calcul du rayonnement de la structure non-bafflée. La structure étudiée est rectangulaire et plane. Aucune hypothèse n'est faite au sujet du fluide dans lequel rayonne la structure, il peut donc s'agir aussi bien d'un fluide léger que d'un fluide lourd. Étant donné qu'on ne considère que le cas du régime stationnaire harmonique, toutes les grandeurs exprimées seront complexes et fonction de la fréquence sans que cela soit noté (déplacement du panneau, pression acoustique...). Tous les calculs sont donc effectués pour une fréquence donnée.

5.2.2 Méthode de collocation

Cette méthode va permettre de calculer les amplitudes du déplacement de la structure, afin d'en calculer le rayonnement. Pour cela, il faut choisir une base de fonctions admissibles pour le déplacement. Pour pouvoir traiter le cas de géométrie quelconque, il ne faut imposer aucune contrainte quand aux conditions aux limites de la structure, c'est à dire qu'elle doivent pouvoir être parfaitement quelconques. Une base polynomiale a été éliminée, parce qu'elle manque généralement de stabilité en hautes fréquences (Berry, 1991, 1994). Afin de décrire n'importe quel type de conditions aux limites, nous nous sommes orienté vers une décomposition du déplacement du panneau en série de Fourier :

$$w(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} \Psi_{mn}(x, y), \quad (5.1)$$

où les termes a_{mn} sont les amplitudes du déplacement et les termes de la série de Fourier sont donnés par :

$$\Psi_{mn}(x, y) = e^{j2\pi \left(m \frac{x}{a} + n \frac{y}{b} \right)}, \quad (5.2)$$

où a et b sont les dimensions de la plaque respectivement suivant l'axe x et l'axe y .

Ce type de base présente l'avantage d'engendrer des calculs simples (calculs des dérivées, des intégrales ...), et d'avoir une très bonne stabilité numérique à hautes fréquences.

La méthode de collocation consiste à tronquer les séries infinies sur m et n de l'équation 5.1 en des sommes finies de bornes M et N et de prendre $M \times N$ points de mesure. Il y a donc autant de points de mesure que d'inconnues. Pour chaque point de mesure i de coordonnées (x_i, y_i) , on peut écrire la relation :

$$w_i(x_i, y_i) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N a_{mn} \Psi_{mn}(x_i, y_i), \quad (5.3)$$

où $w(x_i, y_i)$ est le déplacement de la structure mesuré au point i .

En écrivant la relation précédente pour tous les points de mesure, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \cdots \Psi_{mn}(x_i, y_i) \cdots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ a_{mn} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ w(x_i, y_i) \\ \vdots \end{Bmatrix}. \quad (5.4)$$

La résolution de ce système donne les amplitudes du déplacement a_{mn} qui permettront de calculer le rayonnement acoustique de la structure. La résolution numérique de ce système ne pose aucun problème étant donné qu'on a pris soin de prendre autant de points de mesure que d'inconnues à calculer.

5.2.3 Rayonnement acoustique d'une plaque bafflée

Le calcul du rayonnement acoustique d'une plaque rectangulaire, bafflée a été présenté au paragraphe 2.3.9. Nous allons utiliser l'intégrale de Rayleigh (équation 2.50) qui donne la pression acoustique en un

point de l'espace en fonction du déplacement de la plaque, pour calculer l'intensité acoustique et la puissance acoustique rayonnée.

L'intensité acoustique est le produit de la pression acoustique et de la vitesse acoustique en un point donné de l'espace et en un instant donné. Dans le cas d'un régime harmonique, on calcule l'intensité acoustique moyennée sur une période $T = 2\pi/\omega$. Dans notre cas nous allons calculer l'intensité acoustique moyenne, normale sur la surface de la plaque, ce qui conduit à l'expression :

$$I_n(M_0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [P(M_0) V_n^*(M_0)], \quad (5.5)$$

où $V_n^*(M_0)$ est le conjugué de la vitesse acoustique normale, or sur la plaque nous avons égalité des vitesses mécanique et acoustique normale, donc : $V_n^*(M_0) = -j\omega w(M_0)$.

La puissance acoustique rayonnée par une structure est la moyenne spatiale de l'intensité acoustique normale tel que définie à l'équation 5.5, elle se définit de la manière suivante :

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \operatorname{Re} [P(M_0) V_n^*(M_0)] dS, \quad (5.6)$$

La puissance rayonnée peut s'exprimer en fonction des amplitudes du déplacement de la structure :

$$W = \frac{\omega^2}{2} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \sum_{p=-M}^M \sum_{q=-N}^N [a_{mn} \operatorname{Re} [Z_{mnpq}^H] a_{pq}^*], \quad (5.7)$$

les amplitudes du déplacement a_{mn} ont été calculées par la méthode de collocation (paragraphe 5.2.2) et les termes Z_{mnpq}^H sont les impédances de rayonnement, définies par :

$$Z_{mnpq}^H = j\rho_0\omega \iint_S \iint_S \Psi_{mn}(M) G(M, M_0) \Psi_{pq}^*(M_0) dS dS. \quad (5.8)$$

Le détails des calculs des impédances de rayonnement est présenté en Annexe D.

Afin, d'avoir une cartographie acoustique de la structure on peut également calculer l'intensité normale sur la surface de la plaque, tous calculs faits, on obtient :

$$I_n(M_0) = \frac{\omega^2}{2ab} \operatorname{Re} \left[\left(\sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \sum_{p=-M}^M \sum_{q=-N}^N a_{mnpq} Z_{mnpq}^H \Psi_{mn}(M_0) \right) \left(\sum_{k=-M}^M \sum_{l=-N}^N a_{kl}^* \Psi_{kl}^*(M_0) \right) \right] \quad (5.9)$$

5.2.4 Rayonnement acoustique d'une plaque non-bafflée

Nous reprenons le même problème qu'au paragraphe précédent, la seule différence consiste à considérer que la structure est non-bafflée alors qu'elle était bafflée précédemment. Si les équations de base du problème sont les mêmes : équation d'Helmholtz homogène (équation 2.41), condition de continuité des vitesses acoustique et mécanique normales (équation 2.42) et condition de Sommerfeld (équation 2.44), nous allons voir que le problème est maintenant plus complexe. La méthode de résolution va faire appel à une formulation variationnelle de l'équation intégrale et une nouvelle variable, le saut de pression, va être introduite afin de tenir compte du caractère non-bafflée de la structure. On peut écrire la formulation intégrale (équation de Kirchoff-Helmholtz) en tenant compte du fait que les deux cotés de la structure rayonnent dans un espace infini :

$$P(M_0) = \iint_{S^-} \left(G(M^-, M_0) \frac{\partial P(M^-)}{\partial n_{M^-}} - P(M^-) \frac{\partial G(M^-, M_0)}{\partial n_{M^-}} \right) dS + \iint_{S^+} \left(G(M^+, M_0) \frac{\partial P(M^+)}{\partial n_{M^+}} - P(M^+) \frac{\partial G(M^+, M_0)}{\partial n_{M^+}} \right) dS \quad (5.10)$$

où S^- est la surface de la plaque et M^- un point de cette surface pour $z < 0$ et S^+ est la surface de la plaque et M^+ un point de cette surface pour $z > 0$ (Figure 5.1).

Le choix de la fonction de Green en espace infini est naturel pour ce problème :

$$G(M, M_0) = \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R}, \quad (5.11)$$

avec $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z_0)^2}$, cette fonction correspond à la pression acoustique générée par un monopôle en espace infini.

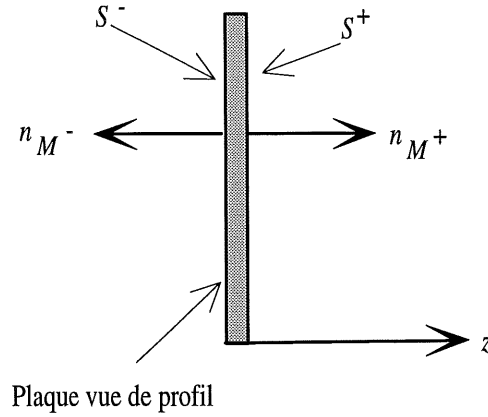


Figure 5.1 : Vue en coupe de la plaque avec les normales aux deux surfaces S^+ et S^- .

- **Saut de pression**

Nous introduisons ici une nouvelle grandeur appelée le saut de pression (ou le potentiel de double couche) qui va permettre de simplifier l'écriture de la formulation intégrale d'une plaque non-bafflée. Le saut de pression est défini comme la différence entre les pressions pariétales de part et d'autre du panneau :

$$\bar{P}(x, y, 0) = \lim_{z^+ \rightarrow 0} P(x, y, z^+) - \lim_{z^- \rightarrow 0} P(x, y, z^-). \quad (5.12)$$

Une des propriétés importantes du saut de pression est le fait qu'il s'annule partout (et en particulier sur les bords de la plaque), sauf sur la plaque, nous utiliserons plus loin cette caractéristique pour définir les fonctions de base du saut de pression.

Dans le cas d'une structure mince on a $n_{M^-} = -n_{M^+}$ et $G(M^-, M_0) = G(M^+, M_0)$, d'autre part la vitesse vibratoire est la même de part et d'autre de la plaque, ce qui implique, en utilisant l'équation 2.42, que :

$$\frac{\partial P(M^-)}{\partial n_{M^-}} = -\frac{\partial P(M^+)}{\partial n_{M^+}}. \quad (5.13)$$

Ces remarques permettent de réécrire la formulation intégrale (équation 5.10) en fonction du saut de pression de la manière suivante :

$$P(M_0) = - \iint_S \left(\bar{P}(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} \right) dS, \quad (5.14)$$

où $S \equiv S^+$ et $n_M \equiv n_{M^+}$.

En utilisant l'équation 2.42, on peut trouver une relation entre le déplacement, que l'on connaît et le saut de pression que l'on cherche :

$$w(M_0) = \frac{1}{\omega^2 \rho_0} \iint_S \bar{P}(M) \frac{\partial^2 G(M, M_0)}{\partial n_{M_0} \partial n_M} dS. \quad (5.15)$$

La fonction de Green en espace infini est proportionnelle à R^{-1} , sa dérivée seconde est donc proportionnelle à R^{-3} , cela a pour conséquence de rendre le calcul de l'intégrale pratiquement impossible.

Afin de calculer cette intégrale, il faut en extraire la valeur principale au sens d'Hadamard ce qui pose beaucoup de problèmes théoriques. Dans cette étude nous allons utiliser une formulation variationnelle de l'équation intégrale, telle que proposée par Hamdi (1982). Cette méthode permet d'éviter le calcul de la valeur principale d'Hadamard et conduit à des intégrales symétriques, qui facilitent le calcul numérique. Hamdi se sert de la méthode des éléments finis de frontière comme mode de résolution. Dans cette étude, nous allons plutôt utiliser une méthode de résolution semi-analytique, telle que définie par Nelisse (1995) dans le cas d'une plaque mince rectangulaire. Cette méthode permet d'utiliser de manière directe les amplitudes du déplacement calculées par la méthode de collocation au paragraphe 5.2.2. Dans la suite de ce paragraphe nous allons rappeler les principales étapes de cette méthode, pour les détails de la formulation, le lecteur pourra se référer aux travaux de Hamdi (1982), Mariem (1984) et Nelisse (1995).

- **Formulation variationnelle de l'équation intégrale**

L'équation de départ de cette méthode est donnée par l'équation 5.15 qu'on intègre sur la surface de la plaque et qu'on multiplie par une fonction arbitraire \bar{P}' :

$$\iint_S w(M_0) \bar{P}'(M_0) dS = \frac{1}{\omega^2 \rho_0} P.F. \left[\iint_S \iint_S \bar{P}(M) \frac{\partial^2 G(M, M_0)}{\partial n_{M_0} \partial n_M} \bar{P}'(M_0) dS dS \right], \quad (5.16)$$

où *P.F.* signifie la valeur principale au sens d'Hadamard.

Hamdi propose une méthode pour éliminer le calcul de la valeur principale d'Hadamard et Nelisse la particularise pour le cas d'une plaque mince, Nelisse obtient la relation suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} J(\bar{P}', \bar{P}) &= P.F. \left[\iint_S \iint_S \bar{P}(M) \frac{\partial^2 G(M, M_0)}{\partial n_{M_0} \partial n_M} \bar{P}'(M_0) dS dS \right] \\ &= \iint_S \iint_S \left[k_0^2 \bar{P}(M) \bar{P}'(M_0) + \frac{\partial \bar{P}(M)}{\partial x} \frac{\partial \bar{P}'(M_0)}{\partial x_0} - \frac{\partial \bar{P}(M)}{\partial y} \frac{\partial \bar{P}'(M_0)}{\partial y_0} \right] G(M, M_0) dS dS \end{aligned} \right. \quad (5.17)$$

On peut ensuite construire la fonctionnelle du système $\mathfrak{J}(\bar{P})$, en prenant $\bar{P}' = \bar{P}$, ceci implique que l'extrémalisation de la fonctionnelle doit satisfaire l'équation 5.15, qui est l'équation que l'on cherche à résoudre. La fonctionnelle du système est donnée par :

$$\mathfrak{J}(\bar{P}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} J(\bar{P}, \bar{P}) - \iint_S w(M_0) \bar{P}(M_0) dS. \quad (5.18)$$

Afin de définir une base pour le saut de pression \bar{P} , nous allons utiliser la propriété qui stipule que ce dernier s'annule sur les bords de la structure. Le choix le plus simple qui s'impose pour définir cette base est un développement en série de sinus :

$$\bar{P}(x, y) = \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{q=1}^{N_p} p_{pq} \phi_{pq}(x, y), \quad (5.19)$$

avec

$$\phi_{pq}(x, y) = \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right), \quad (5.20)$$

où a et b sont les dimensions de la structure respectivement suivant l'axe x et l'axe y .

L'extrémalisation de la fonctionnelle peut maintenant être effectuée, elle s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial \mathfrak{S}(\bar{P})}{\partial p_{pq}} = 0. \quad (5.21)$$

Tous calculs faits, on obtient le système linéaire suivant :

$$\frac{1}{\omega^2} \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{q=1}^{N_p} A_{mnpq} p_{pq} = - \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-N}^N S_{mnij} a_{ij}. \quad (5.22)$$

Ce système linéaire, symétrique, est équivalent à l'équation 5.15, sa résolution fournit les amplitudes de la pression p_{pq} ce qui permet de calculer le champ acoustique rayonné.

Les termes S_{mnpq} et A_{mnpq} s'expriment par :

$$S_{mnpq} = \iint_S \Psi_{mn}(M) \phi_{pq}(M) dS, \quad (5.23)$$

Cette intégrale ne pose aucun problème de calcul.

On note $A = -\omega^2 M^A + K^A$ où les termes M^A et K^A sont donnés par :

$$M_{mnpq}^A = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \iint_S \iint_S \phi_{mn}(M_0) G(M, M_0) \phi_{pq}(M) dS dS, \quad (5.24)$$

et

$$K_{mnpq}^A = \frac{1}{\rho_0} \iint_S \iint_S \left[\frac{\partial \phi_{mn}(M)}{\partial x} \frac{\partial \phi_{pq}(M_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial \phi_{mn}(M)}{\partial y} \frac{\partial \phi_{pq}(M_0)}{\partial y_0} \right] G(M, M_0) dS dS. \quad (5.25)$$

Ces deux termes ont une structure très comparable aux impédances de rayonnement définies dans le cas de la plaque bafflée (équation 5.8). Ils admettent également une singularité quand les points M et M_0 sont confondus. Le même type de méthode semi-analytique déjà considérée pour les impédances de rayonnement va être encore utilisée (Annexe E).

Comme pour le cas de la plaque bafflée, nous allons nous intéresser à la puissance acoustique, rayonnée par la structure non-bafflée, celle-ci s'exprime de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\iint_{S^+} P(M^+) \vec{V}^*(M^+) \vec{n}_{M^+} dS + \iint_{S^-} P(M^-) \vec{V}^*(M^-) \vec{n}_{M^-} dS \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\iint_S \bar{P}(M) (-j\omega) w(M) dS \right] \\
W &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[(-j\omega) \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{q=1}^{N_p} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N p_{pq} a_{mn}^* \iint_S \phi_{pq} \Psi_{mn}^* dS \right]
\end{aligned} \right. \quad (5.26)$$

L'intégrale est réalisée sur les deux faces S^+ et S^- de la plaque. Le calcul numérique de cette grandeur ne pose aucun problème étant donné que les grandeurs a_{mn} et p_{pq} sont maintenant connues.

5.2.5 Synthèse

Dans le paragraphe 5.1.3, la formulation théorique utilisée par la méthode hybride afin d'estimer le rayonnement acoustique d'une structure à partir de la mesure de son champ vibratoire, a été présentée. Toutes les formules nécessaires à une implantation numérique pour le rayonnement d'une plaque élastique, avec des conditions aux limites quelconques, bafflée ou non-bafflée, ont été détaillées et commentées. Dans le paragraphe suivant nous allons étudier les techniques d'optimisation mises en œuvre pour implanter cette méthode dans un programme informatique, avec comme objectif principal d'obtenir un programme rapide, fiable et facile d'utilisation même pour des personnes non expertes en acoustique.

5.3 Implantation numérique

5.3.1 Présentation générale

La formulation théorique présentée au paragraphe précédent a été implantée dans un code informatique appelé HYMNE et écrit en langage C++. Le présent paragraphe explique les diverses techniques numériques mises en œuvre pour optimiser le programme. L'objectif fixé pour cette implantation était de pouvoir utiliser le programme sur un PC du type Pentium avec au moins 16 Megaoctets de mémoire vive. Les principaux critères pris en compte pour mener à bien l'implantation

numérique sont : (1) avoir des résultats numériques précis sur une très grande plage de fréquences (basses, moyennes et hautes fréquences), (2) minimiser au maximum les temps de calcul, et (3) utiliser un espace mémoire minimum. Pour atteindre le but fixé, il a fallu faire un travail important au niveau de la compréhension du rayonnement acoustique d'une structure bafflée et non-bafflée, en effet, les hypothèses simplificatrices utilisées seront toujours basées sur la physique du problème, et non pas sur des considérations purement informatiques.

Pour d'obtenir la réponse en fréquence de la structure, il faut effectuer une boucle sur les fréquences, en effet, tous les calculs présentés dans la formulation théorique sont associés à une fréquence f donnée. Cela signifie qu'il faut effectuer tous ces calculs à chaque fréquence. Il est donc très important de minimiser la quantité de calculs dans cette boucle, c'est pourquoi toutes les grandeurs qui ne dépendent pas de la fréquence doivent être calculées à l'extérieur de cette boucle (la Figure 5.2 présente un organigramme simplifié du programme informatique).

Il y a essentiellement quatre sous-parties du programme qui sont responsables du temps de calcul total, les autres parties entraînent des temps de calcul négligeables :

1. La résolution du système linéaire, complexe, non-symétrique, pour calculer les amplitudes du déplacement (méthode de collocation, paragraphe 5.2.2).
2. Le calcul des impédances de rayonnement dans le cas de la structure bafflée (équation 5.8).
3. Le calcul de la matrice A dans le cas non-bafflé (équations 5.24 et 5.25).
4. Le calcul du système linéaire complexe dans le cas non-bafflé qui fournit les amplitudes du saut de pression (équation 5.22).

L'essentiel du travail d'optimisation va porter sur les points 2 et 3 (calcul des intégrales quadruples), la résolution des systèmes linéaires offrant peu de possibilités d'amélioration une fois que le choix de la méthode adéquate a été fait.

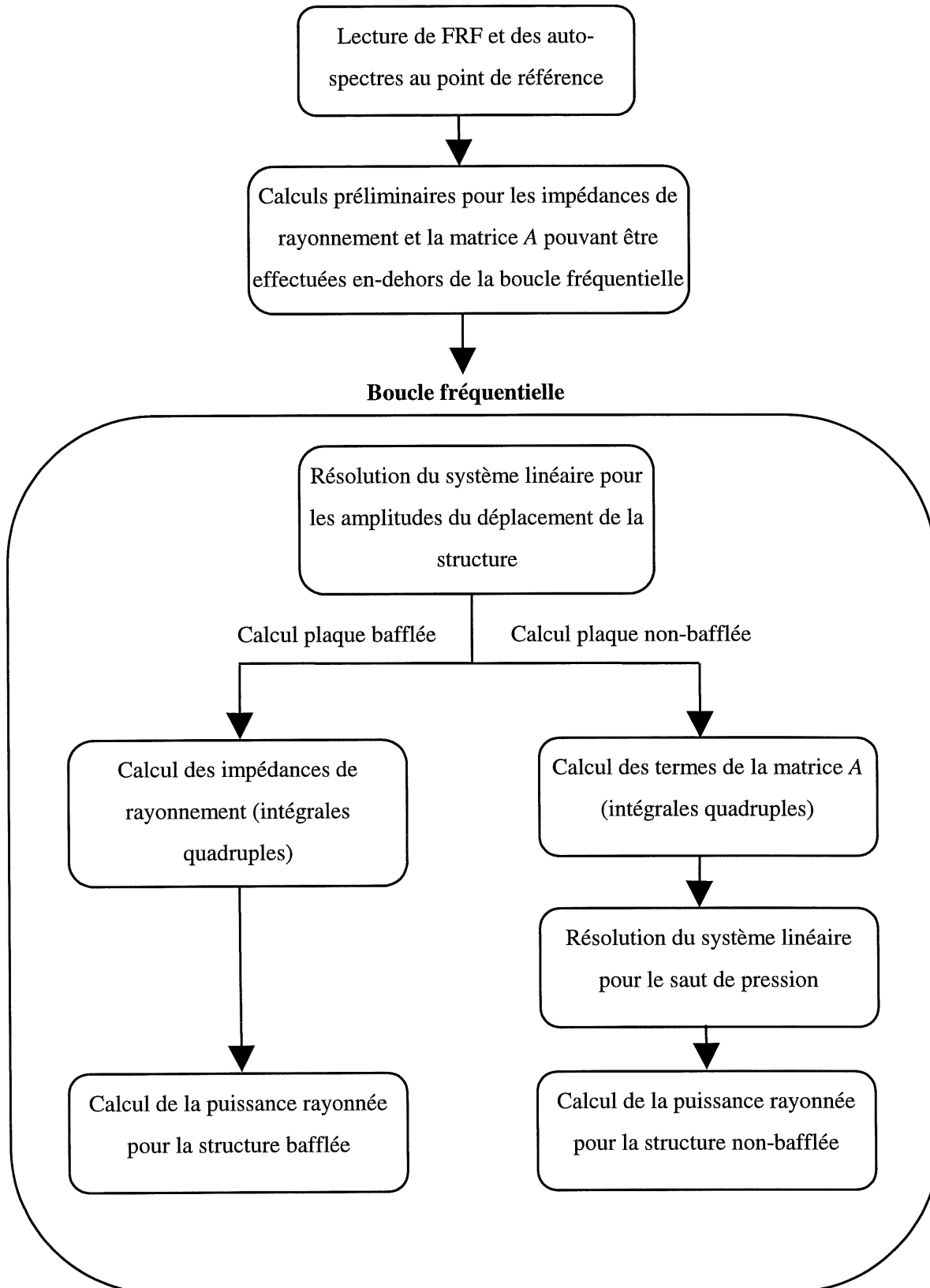


Figure 5.2 : Organigramme du programme HYMNE.

5.3.2 Résolution des systèmes linéaires

Dans le cas de la méthode de collocation (paragraphe 5.2.2) la matrice impliquée dans la résolution est indépendante de la fréquence (équation 5.4), seul le second membre, constitué des valeurs du déplacement mesuré, varie en fonction de la fréquence. On peut donc utiliser une méthode de décomposition appelée LU qui consiste à transformer la matrice de départ en une triangulaire supérieure et inférieure ce qui demande N^3 opérations mais qui peuvent être réalisées en dehors de la boucle fréquentielle. Il faut ensuite résoudre le nouveau système ainsi créé à chaque fréquence, ce qui demande N^2 opérations. Cette technique permet de gagner du temps par rapport à l'utilisation d'une méthode de Gauss classique qui demanderait N^3 opérations à chaque fréquence. Le lecteur peut se référer à Press *et al* (1992) pour plus de précisions sur la méthode de résolution LU.

La résolution du système linéaire pour calculer le saut de pression (équation 5.22) fait appel à une méthode de Gauss classique et requiert N^3 opérations (Press *et al*, 1992).

5.3.3 Cas bafflé, impédances de rayonnement

Dans ce paragraphe, les techniques utilisées pour accélérer le calcul des impédances de rayonnement sans pour autant altérer la précision des résultats, sont présentées.

- **Termes diagonaux**

Le calcul des termes de la matrice des impédances de rayonnement entraîne des calculs assez lourds (intégrales quadruples). Il a été observé que les termes extradiagonaux de cette matrice sont très faibles par rapport aux termes diagonaux. Les Figures 5.3 à 5.6 présentent la partie réelle des impédances de rayonnement ($\text{Re}[Z_{mnpq}^H]$) en fonction des termes m, n, p, q , pour une plaque de 1.36 m \times 0.54 m, à 100 Hz, 500 Hz, 1000 Hz et 5000 Hz. On voit dans ces figures que les termes diagonaux sont prépondérants par rapport aux termes non diagonaux pour les quatre fréquences considérées. L'exemple de la Figure 5.7, qui compare la puissance acoustique rayonnée par une partie d'un fuselage d'avion (dimensions 1.36 m \times 0.54 m, Dash-8, Bombardier Aerospace), avec et sans les termes extra-diagonaux, confirme le fait que l'on peut négliger les termes extra-diagonaux pour le calcul de la puissance acoustique rayonnée. En considérant cela, nous avons éliminé le calcul des termes extra-diagonaux dans le programme. Dans le

reste du document nous noterons les impédances de rayonnement Z_{mn}^H étant donné que pour les termes diagonaux $m = p$ et $n = q$.

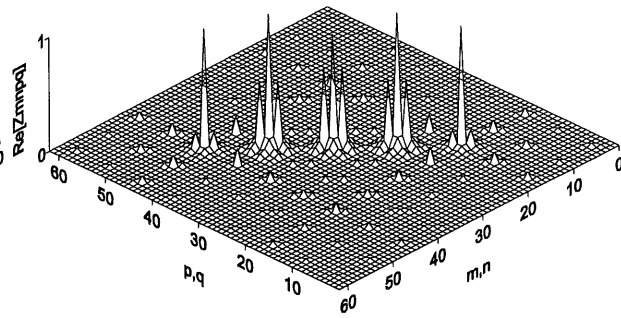
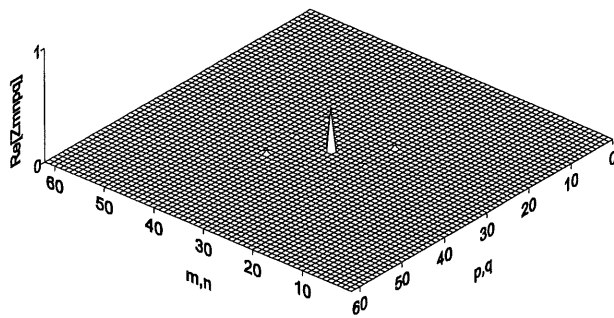


Figure 5.3 : $\text{Re}[Z_{mnpq}^H]$ en fonction de m,n,p,q à 100 Hz pour une plaque de 1.36 m \times 0.54 m.

Figure 5.4 : $\text{Re}[Z_{mnpq}^H]$ en fonction de m,n,p,q à 500 Hz pour une plaque de 1.36 m \times 0.54 m.

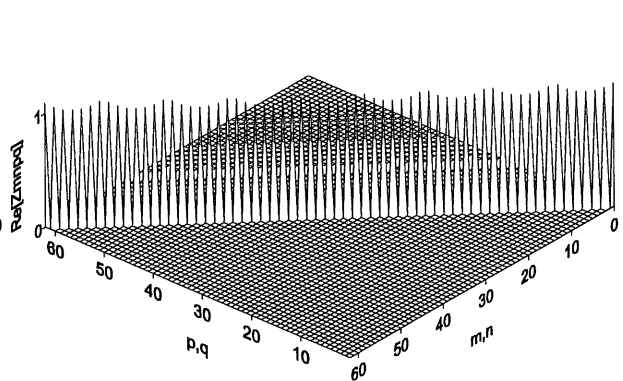
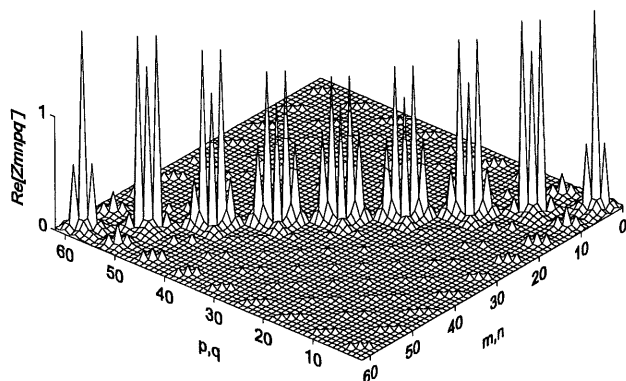


Figure 5.5 : $\text{Re}[Z_{mnpq}^H]$ en fonction de m,n,p,q à 1000 Hz pour une plaque de 1.36 m \times 0.54 m.

Figure 5.6 : $\text{Re}[Z_{mnpq}^H]$ en fonction de m,n,p,q à 5000 Hz pour une plaque de 1.36 m \times 0.54 m.

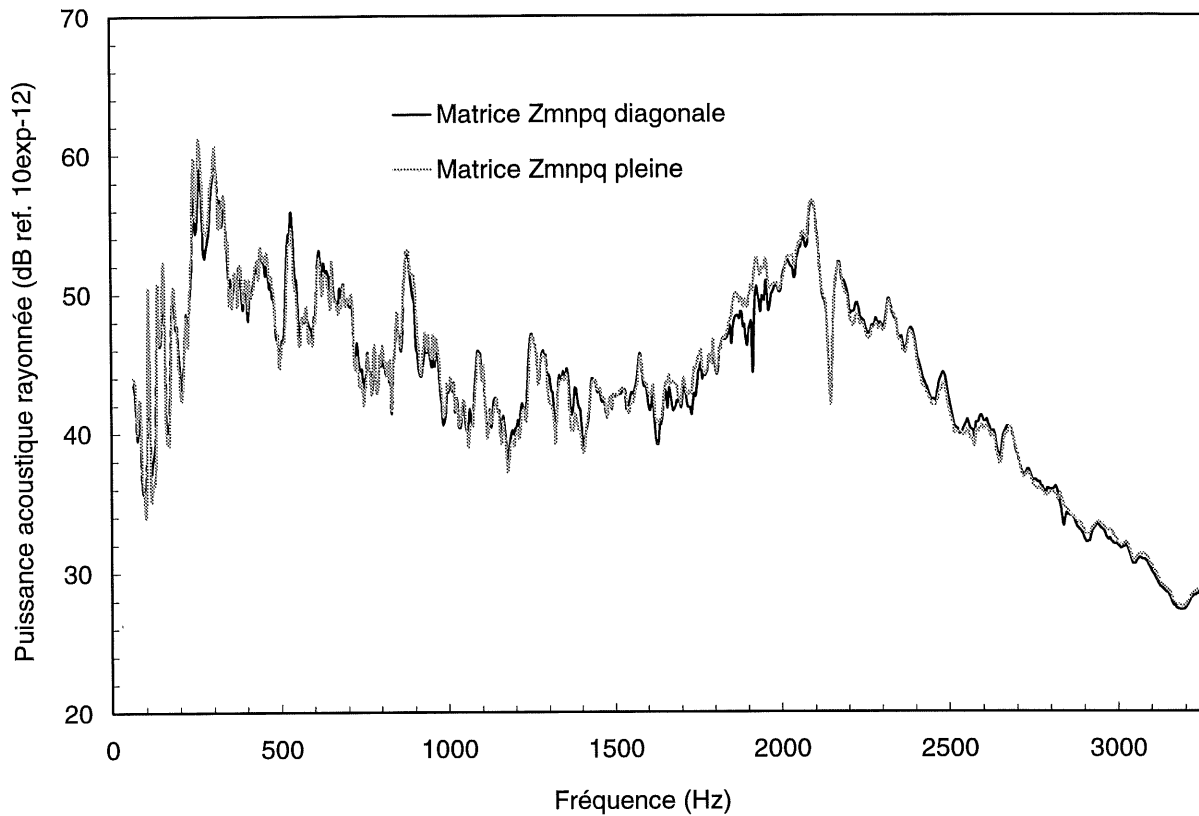


Figure 5.7 : Comparaison de la puissance rayonnée d'une plaque bafflée, simplement appuyée quand la matrice des impédances de rayonnement est pleine et quand elle est diagonale.

- **Interpolation fréquentielle des impédances de rayonnement**

Les termes diagonaux des impédances de rayonnement varient lentement en fonction de la fréquence. Afin de diminuer les temps de calcul, il est possible d'utiliser cette propriété pour réaliser des interpolations fréquentielles de ces termes. Pour cela on calcule les impédances de rayonnement pour deux fréquences assez éloignées et on interpole linéairement les valeurs entre ces deux fréquences. Si on connaît la valeur exacte des impédances de rayonnement à deux fréquences f_1 et f_2 , le résultat de l'interpolation linéaire pour une fréquence f , comprise entre f_1 et f_2 , est donné par :

$$Z_{mn}^H(f) = \left(Z_{mn}^H(f_2) - Z_{mn}^H(f_1) \right) \frac{f - f_1}{f_2 - f_1} + Z_{mn}^H(f_1), \quad (5.27)$$

Un critère simple pour choisir le pas d'interpolation fréquentiel consiste à calculer le pas fréquentiel admissible pour le terme Z_{mn}^H le plus pénalisant, c'est à dire celui qui requiert le pas fréquentiel le plus fin. Il s'agit du terme Z_{10}^H si $a > b$ (ou Z_{01}^H si $a < b$) car c'est celui qui a le pic le plus bas en fréquence. La valeur maximale de l'impédance de rayonnement Z_{mn}^H est caractérisée par l'égalité $k_0 = k_{mn}$, ce qui correspond à la fréquence f_{mnc} suivante :

$$f_{mnc} = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{2m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{b}\right)^2}. \quad (5.28)$$

Par expérience, on a remarqué que prendre 5 points d'interpolation entre 0 Hz et f_{10c} , permet une bonne précision sur Z_{10}^H . Le critère s'écrit donc :

$$\delta f = \frac{f_{10c}}{5}, \quad (5.29)$$

où δf est le pas fréquentiel que l'on cherche. Par exemple pour une structure de 1.36 m \times 0.54 m, on trouve $\delta f = 50$ Hz.

La Figure 5.8 montre l'effet de l'interpolation linéaire (avec un pas de 50 Hz) pour deux termes de la matrice des impédances de rayonnement d'une plaque de 1.36 m par 0.54 m. On constate à partir de cette figure que les termes interpolés sont précis par rapport aux termes exacts. Cette méthode est très utilisée dans les résultats numériques de ce chapitre, et aucun problème majeur ne s'est présenté pour la remettre en cause.

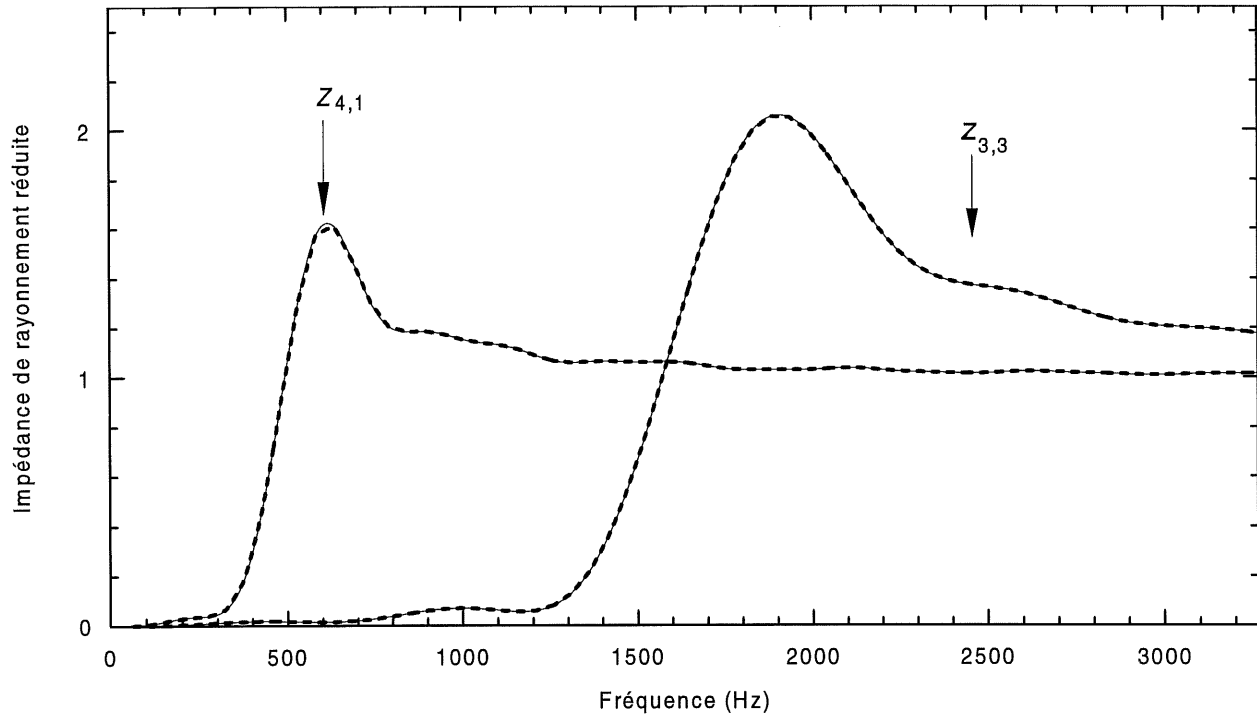


Figure 5.8 : Comparaison des impédances de rayonnement d'une plaque de 1.36 m par 0.54 m avec interpolation fréquentielle (pas de 50 Hz, ----) et sans interpolation fréquentielle (—).

- **Simplification hautes fréquences pour les impédances de rayonnement**

En hautes fréquences, quand le rapport $k_0/k_{mn} \gg 1$, avec $k_{mn} = \sqrt{(2m\pi/a)^2 + (2n\pi/b)^2}$ (nombre d'onde mécanique pour le couple m,n) et $k_0 = \omega/c_0$, les termes diagonaux de la matrice des impédances de rayonnement tendent vers $\rho_0 c_0 S$ (S surface de la structure considérée), on peut donc éviter d'effectuer le calcul des intégrales quadruples Z_{mn}^H . La Figure 5.9 montre plusieurs impédances de rayonnement réduite (c.à.d. divisées par $\rho_0 c_0 S$) en fonction de k_0/k_{mn} pour une plaque de 1.36 m par 0.54 m. On voit bien sur cette figure qu'au-dessus de $k_0/k_{mn} = 1$ toutes les impédances de rayonnement tendent vers 1. Dans le programme informatique nous avons imposé la condition $Z_{mn}^H = \rho_0 c_0 S$ quand $k_0/k_{mn} > 3$. En plus d'augmenter la rapidité de calcul, cette condition évite les problèmes de divergence qui apparaissent en hautes fréquences si le nombre de points de Gauss utilisé dans l'intégration numérique des impédances est insuffisant. À partir des cas traités dans cette étude, il s'est avéré que 30 points de Gauss étaient suffisants pour converger jusqu'à la limite $k_0/k_{mn} = 3$ (il ne faut pas oublier que cette limite varie en fonction de la fréquence pour chaque couple m,n).

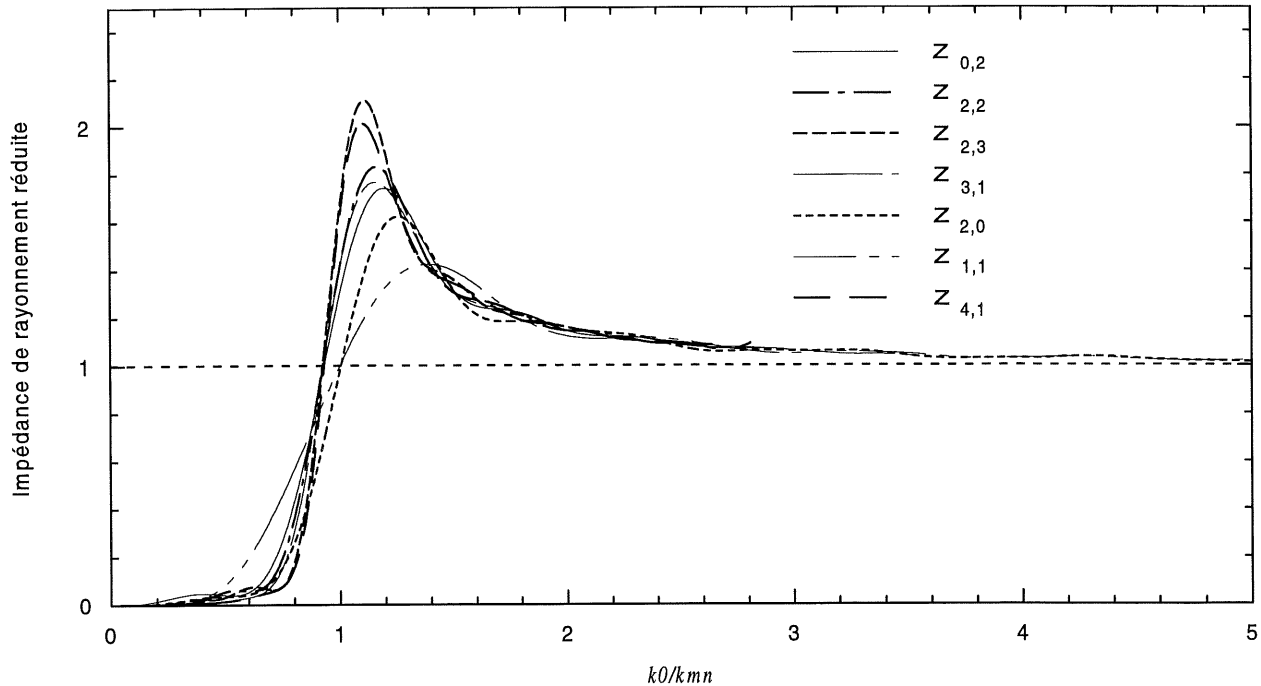


Figure 5.9 : Impédance de rayonnement d'un panneau de 1.36 m par 0.54 m, en fonction de k_0/k_{mn} .

- **Calcul direct de la puissance rayonnée au-dessus de la fréquence critique**

Toutes les structures vibrantes, rayonnant dans un fluide, admettent une fréquence critique caractérisée par l'égalité* des longueurs d'onde acoustique et mécanique. Au-dessus de la fréquence critique les longueurs d'onde acoustiques sont inférieures aux longueurs d'onde structurales et le facteur de rayonnement est voisin de 1 (Figure 5.10, fuselage d'un avion, Dash-8, Bombardier Aerospace), le facteur de rayonnement σ étant défini par :

$$\sigma = \frac{W}{\rho_0 c_0 S \langle V^2 \rangle}, \quad (5.30)$$

où W est la puissance acoustique rayonnée, et $\langle V^2 \rangle$ la vitesse quadratique moyenne de la structure.

Ainsi, au-dessus de la fréquence critique, si on admet que $\sigma = 1$, il existe une relation très simple entre la vitesse quadratique et la puissance rayonnée. Nous allons utiliser cette propriété pour calculer la puissance rayonnée en hautes fréquences. Ce qui signifie que pour calculer la puissance acoustique

* ou la quasi-égalité, quand il s'agit de structures finies ayant des longueurs d'onde de structure discrète.

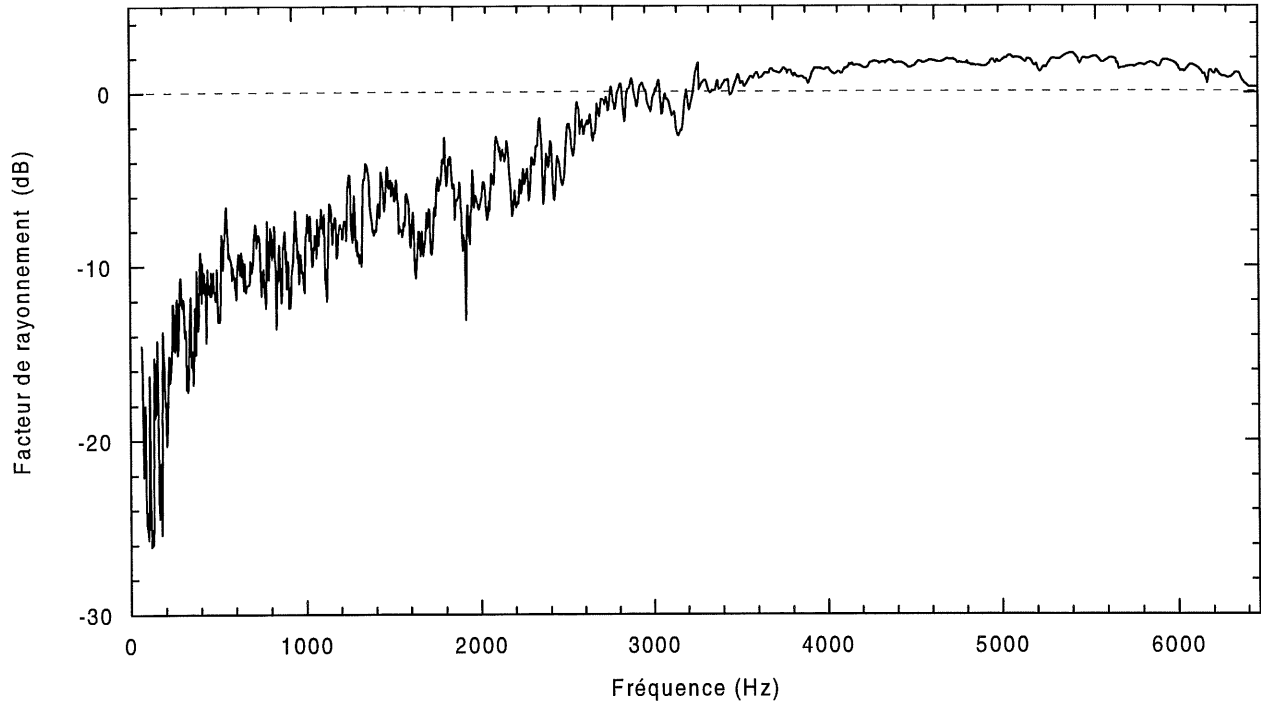


Figure 5.10 : Facteur de rayonnement d'une partie d'un fuselage d'avion (Dash-8, Bombardier Aerospace).

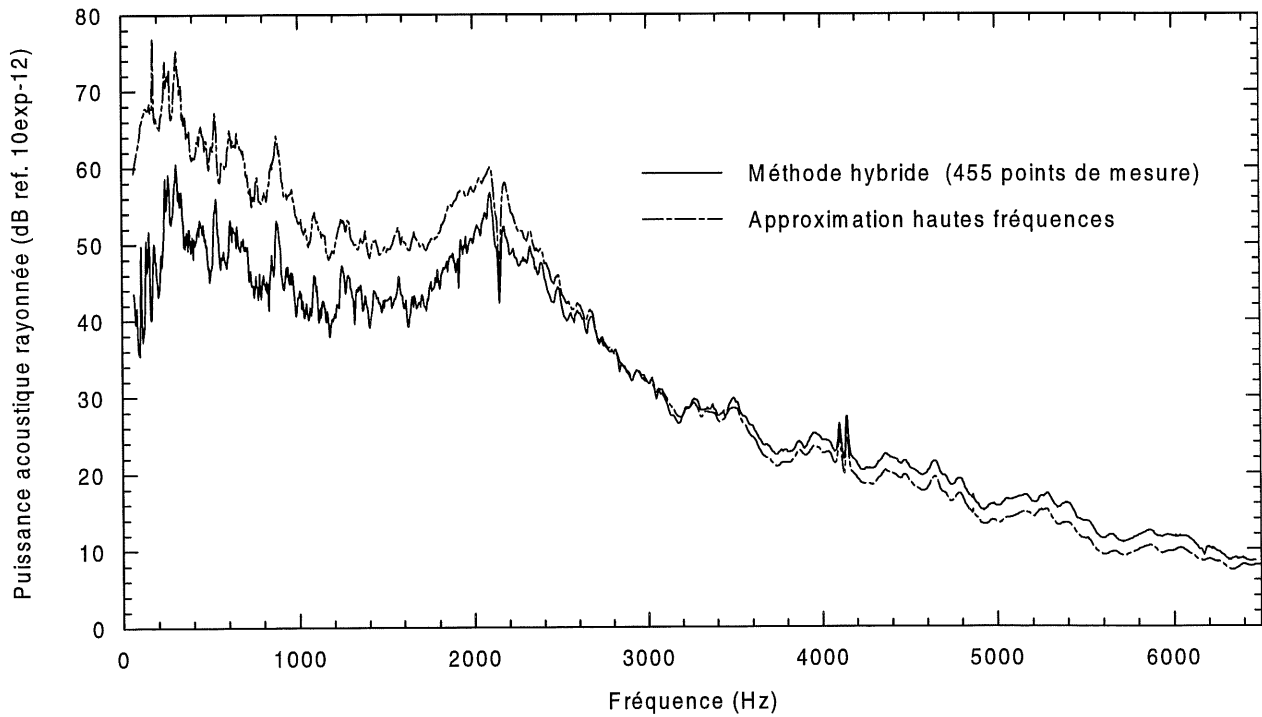


Figure 5.11 : Comparaison entre la méthode hybride et l'approximation hautes fréquences pour une partie d'un fuselage d'avion (Dash-8, Bombardier Aerospace).

rayonnée en hautes fréquences il suffit d'utiliser l'équation 5.30 en imposant $\sigma = 1$. La Figure 5.11 présente la comparaison entre la méthode hybride, telle qu'elle est définie dans la formulation théorique, et l'approximation hautes fréquences proposée dans ce paragraphe, pour la même structure que la Figure 5.10. Autour de 3000 Hz, le facteur de rayonnement devient égal à 1 (0 en échelle logarithmique, Figure 5.10), et par conséquent les deux courbes de la Figure 5.11 se confondent. Au-dessus de 4000 Hz, le facteur de rayonnement est légèrement supérieur à 1, ce qui fait que les résultats trouvés par l'approximation hautes fréquences sont légèrement sous-estimés.

L'approximation hautes fréquences évite de calculer les amplitudes du déplacement de la structure (méthode de collocation), ainsi que les impédances de rayonnement, le calcul est donc extrêmement rapide. De plus, il est aussi très précis car les problèmes de divergence des impédances de rayonnement sont éliminés et on évite également d'augmenter de manière trop importante le nombre de points de mesure. En effet, en hautes fréquences, les longueurs d'onde de structure deviennent très petites et le champ vibratoire est assez uniforme, par conséquent il faut peu de points de mesure pour obtenir une vitesse quadratique précise. Cela est vrai parce que la vitesse quadratique est une quantité énergétique, ce qui signifie que le déphasage entre le déplacement de deux points de mesure distincts n'intervient pas dans son calcul. Ce fait est confirmé dans la Figure 5.12, qui présente la puissance acoustique rayonnée par un fuselage d'avion (Dash-8, Bombardier Aerospace), calculée avec l'approximation hautes fréquences, en fonction d'un nombre différent de points de mesure. On constate que les différences entre les quatre cas présentés se situent, la plupart du temps, en dessous de 3 dB alors que le nombre de points de mesure varie beaucoup. Nous verrons au paragraphe 5.4.5 que la méthode hybride est beaucoup plus sensible au nombre de points de mesure que ne l'est l'approximation hautes fréquences.

La vitesse quadratique de la structure est fournie très simplement à partir des mesures. La définition de la vitesse quadratique est la suivante :

$$\langle V^2 \rangle = \frac{1}{2S} \iint_S |V(M)|^2 dS, \quad (5.31)$$

où $V(M)$ est la vitesse vibratoire de la plaque (grandeur complexe, pour une fréquence f donnée). Sous une forme discrète on a :

$$\langle V^2 \rangle = \frac{1}{2S} \sum_{i=1}^{N_{\max}} |V(M_i)|^2 \Delta s_i, \quad (5.32)$$

où $V(M_i)$ est la vitesse mesurée au point i , Δs_i est sa surface élémentaire associée et N_{\max} est le nombre total de points de mesure. Dans le cas où les points sont uniformément répartis sur la structure on a $N_{\max} \Delta s_i = S$, dans le cas contraire il faut tenir compte de la surface associée à chaque point de mesure dans le procédé de discrétisation.

Dans la pratique nous n'avons pas de moyen pour calculer la fréquence critique d'une structure complexe dont nous ne connaissons pas précisément la composition (matériaux, raidisseurs, rivets...). Dans le programme informatique, le facteur de rayonnement σ est calculé en permanence, quand il est proche de 1 pour plusieurs valeurs de fréquences successives, on arrête le calcul rigoureux et on utilise la formule 5.30 pour calculer la puissance acoustique rayonnée.

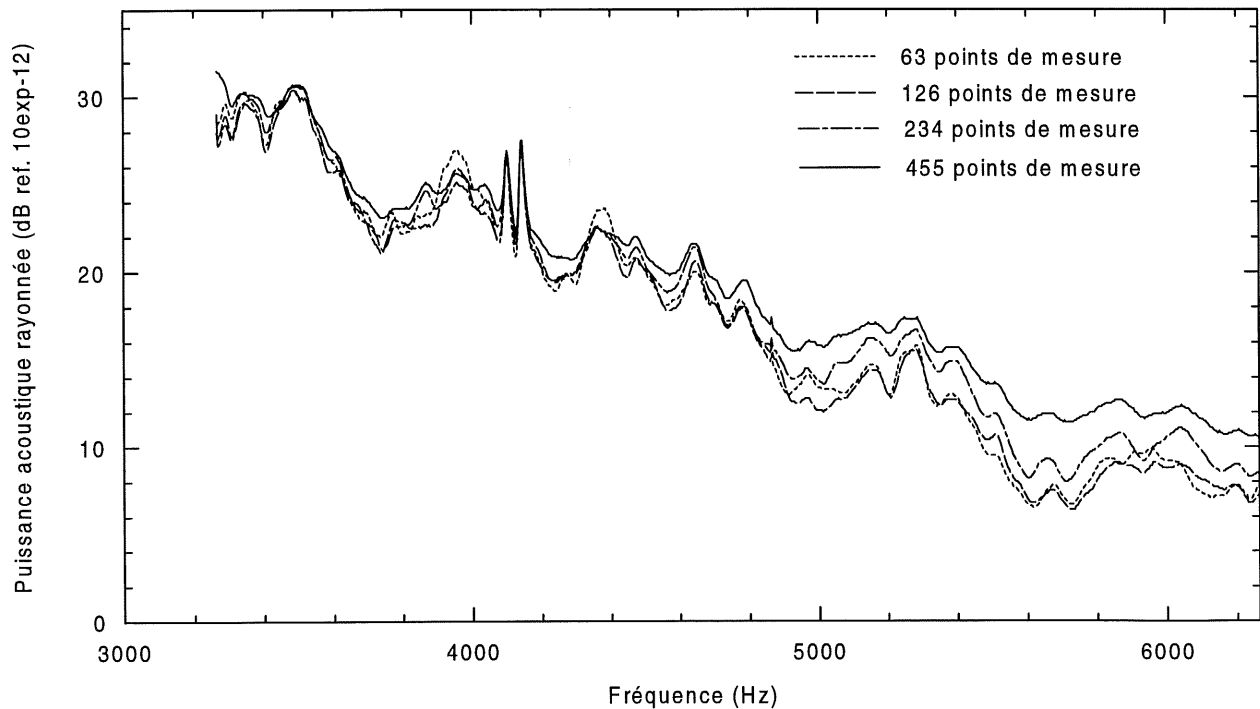


Figure 5.12 : Influence du nombre de points de mesure sur la convergence de l'approximation hautes fréquences pour une partie d'un fuselage d'avion (Dash-8, Bombardier Aerospace).

5.3.4 Cas non-bafflée

- Interpolation fréquentielle de la matrice A

À partir de l'équation 5.22 on voit que la matrice qui intervient dans le système linéaire qu'il faut résoudre, s'écrit :

$$\frac{[A]}{\omega^2} = -[M^A] + \frac{[K^A]}{\omega^2}. \quad (5.33)$$

Le problème, dans ce cas là est de savoir si l'interpolation fréquentielle doit se faire avant ou après la division par ω^2 pour le terme K^A (la question ne se pose pas pour M^A). La figure 5.14 présente la partie réelle du terme $K^A_{1,2,1,2}$ quand on interpole après avoir divisé par ω^2 , et la figure 5.15 présente le même terme quand on interpole avant de diviser par ω^2 (plaque de 1.36 m \times 0.54 m). C'est ce dernier cas qui est le plus proche du cas sans interpolation. La figure 5.16 présente la partie imaginaire du terme $K^A_{1,2,1,2}$ quand on interpole après avoir divisé par ω^2 , et la figure 5.17 présente le même terme quand on interpole avant de diviser par ω^2 (plaque de 1.36 m \times 0.54 m). Contrairement aux résultats trouvés pour la partie réelle, quand on considère la partie imaginaire, il faut mieux interpoler d'abord et diviser ensuite par ω^2 pour obtenir le résultat le plus proche du cas sans interpolation. Ces résultats, bien qu'illustrés par un exemple unique, sont généraux dans la mesure où l'allure des termes $\text{Re}[K^A_{mnpq}]$ est assez similaire au cas présenté ($\text{Re}[K^A_{1212}]$), de même que pour les termes $\text{Im}[K^A_{mnpq}]$.

On utilise la relation 5.27 pour interpoler les termes de M^A et de K^A , aussi bien pour leurs parties réelles que pour leurs parties imaginaires. La discussion précédente ne porte que sur le moment opportun d'appliquer cette interpolation (avant ou après la division par ω^2 pour la matrice K^A). Le critère d'interpolation défini pour la structure bafflée à l'équation 5.29 est réutilisé ici, car le programme informatique ne permet pas de traiter un pas d'interpolation différent pour le cas bafflé et pour le cas non-bafflée

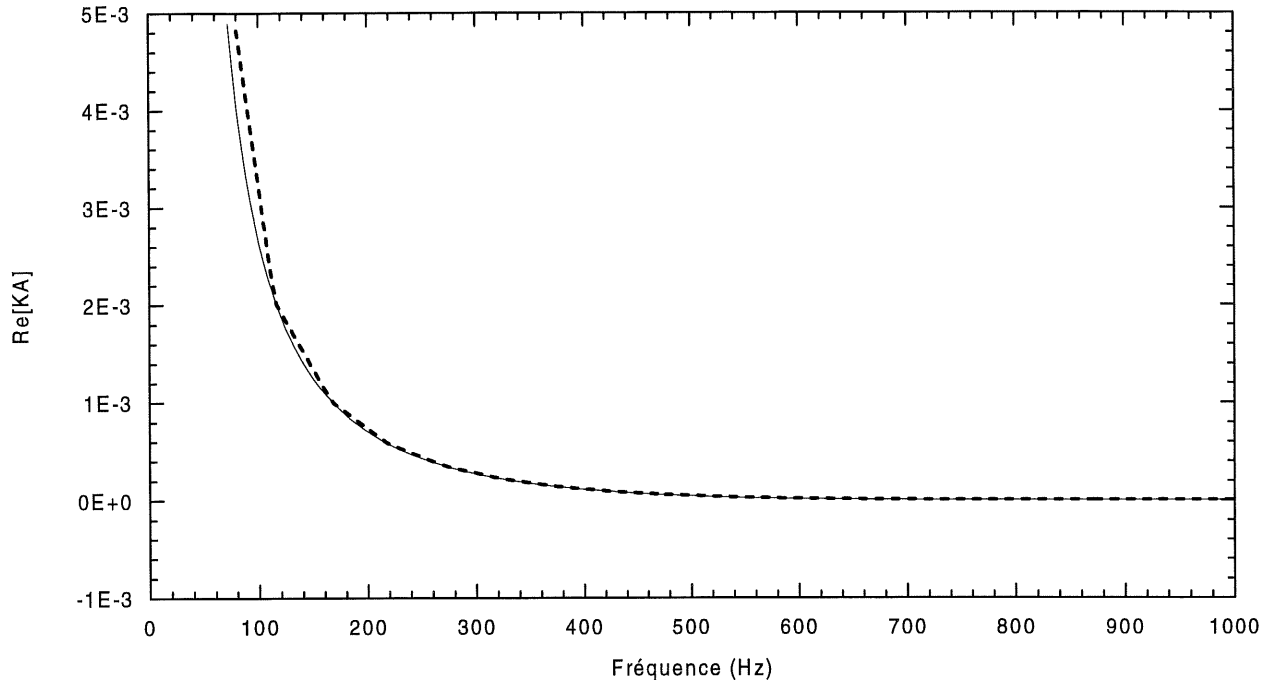


Figure 5.13: $\text{Re}[K^A_{1212}]$ quand on interpole après avoir divisé par ω^2 (interpolation linéaire, pas de 50 Hz, ----) et sans interpolation (—).

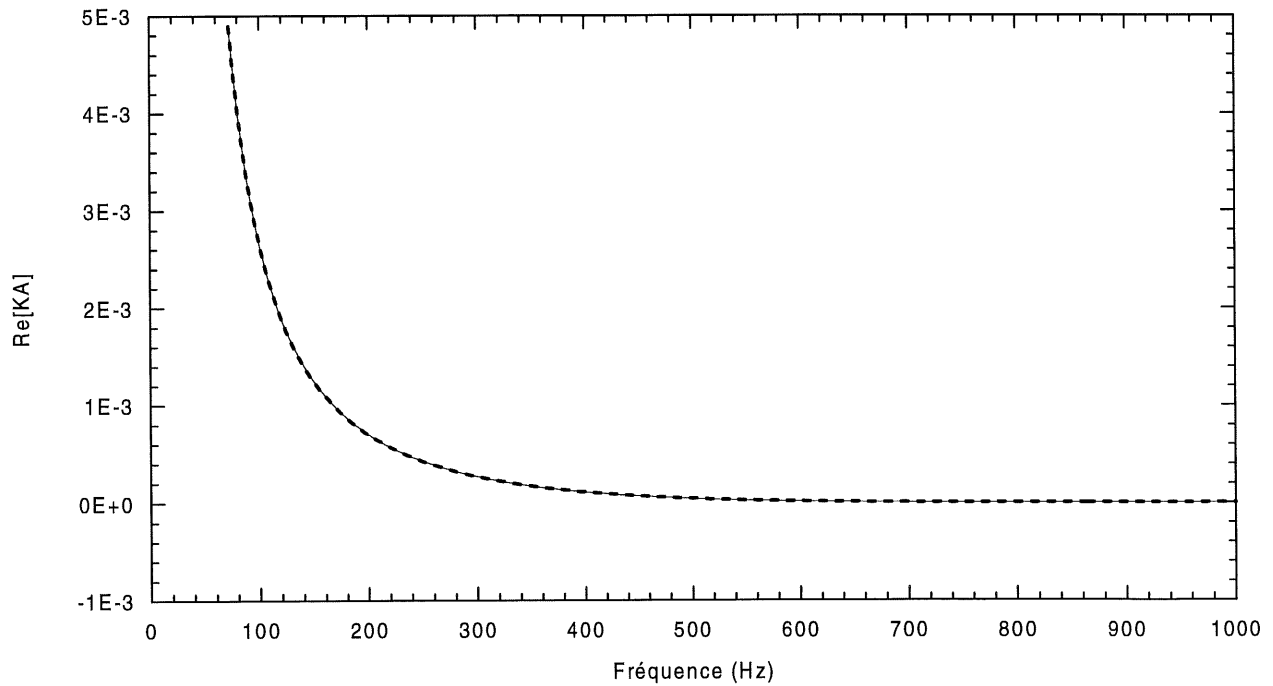


Figure 5.14 : $\text{Re}[K^A_{1212}]$ quand on interpole avant de diviser par ω^2 (interpolation linéaire, pas de 50 Hz, ----) et sans interpolation (—).

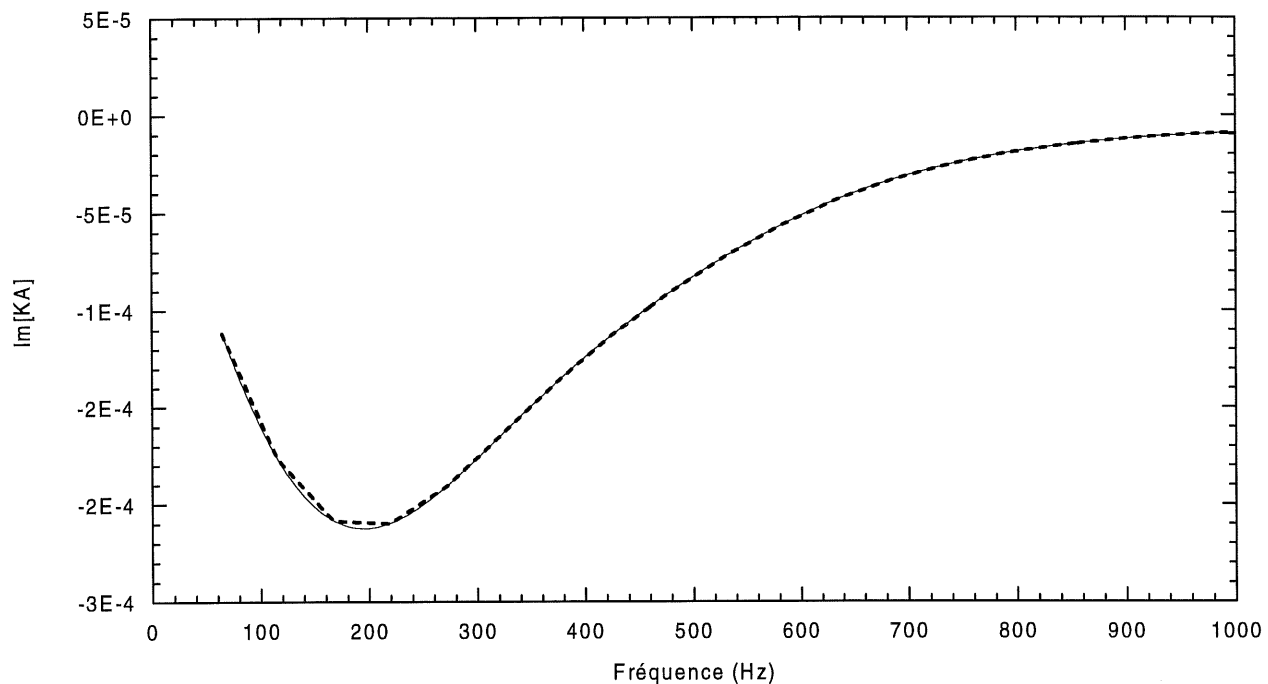


Figure 5.15 : $\text{Im}[K^A_{1212}]$ quand on interpole après avoir divisé par ω^2 (interpolation linéaire, pas de 50 Hz, ----) et sans interpolation (—).

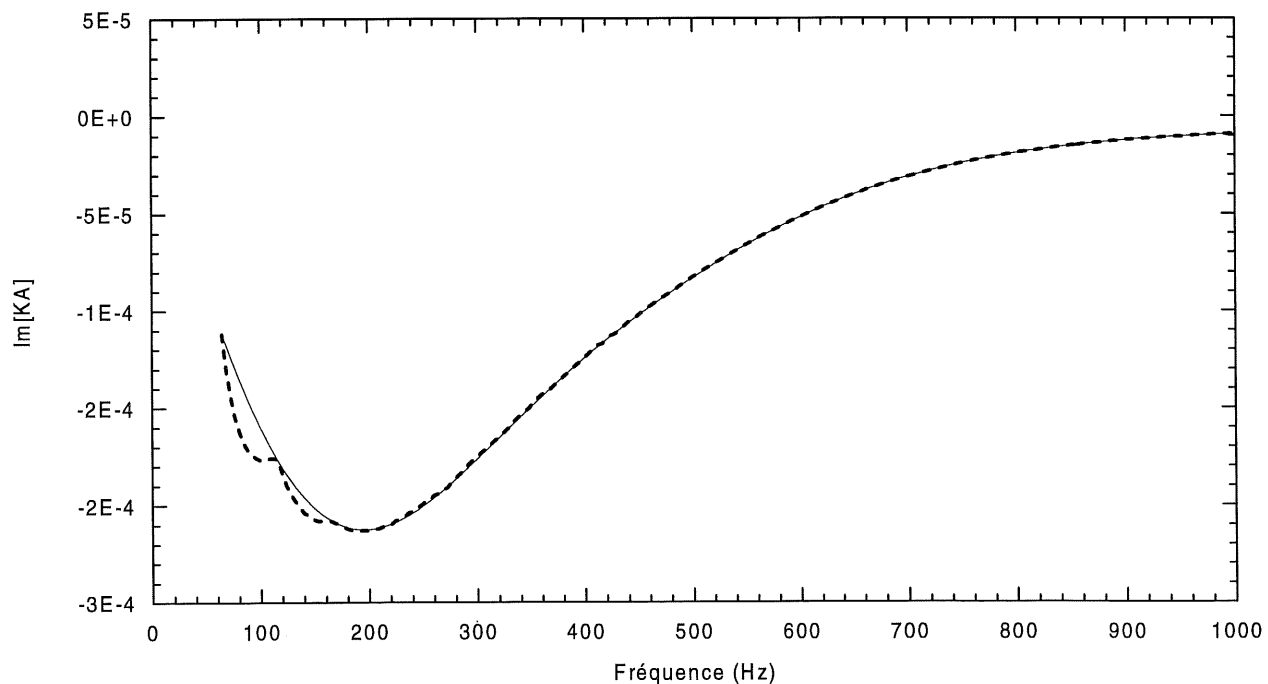


Figure 5.16 : $\text{Im}[K^A_{1212}]$ quand on interpole avant de diviser par ω^2 (interpolation linéaire, pas de 50 Hz, ----) et sans interpolation (—).

- Arrêt des calculs en hautes fréquences

La différence essentielle entre le rayonnement d'une plaque bafflée et d'une plaque non-bafflée se situe en basses fréquences (longueur d'onde grande par rapport aux dimensions de la structure). En effet, en basses fréquences, pour une plaque non-bafflée, il y a un court-circuit acoustique important (l'air poussé par la plaque d'un côté est aspiré de l'autre), ce qui a pour conséquence de diminuer l'efficacité du rayonnement. Ce phénomène ne peut pas se produire pour la plaque bafflée à cause du baffle qui interdit tout échange entre les deux faces de la plaque. Par contre, en hautes fréquences (même en dessous de la fréquence critique) les longueurs d'onde acoustique sont plus petites et l'effet de court-circuit acoustique entre les deux faces de la structure non-bafflée devient très mineur. Cela a pour conséquence d'égaliser la puissance acoustique rayonnée par la plaque bafflée et non-bafflée (Figure 5.17). Il faut tenir compte du fait que la puissance rayonnée de la plaque non-bafflée est supérieure de 3 dB à celle de la plaque bafflée, du fait qu'on calcule la puissance acoustique, rayonnée par les deux faces dans le cas non-bafflé, et par une seule face dans le cas bafflé (dans la Figure 5.17 on a enlevé 3 dB à la réponse de la plaque non-bafflée, cette convention sera utilisée dans tout le reste du document).

Ainsi, afin de diminuer le temps de calcul, le calcul du rayonnement de la plaque non-bafflée est arrêté quand il devient pratiquement égal (0.2 dB près) au calcul de la plaque bafflée pour plusieurs fréquences successives.

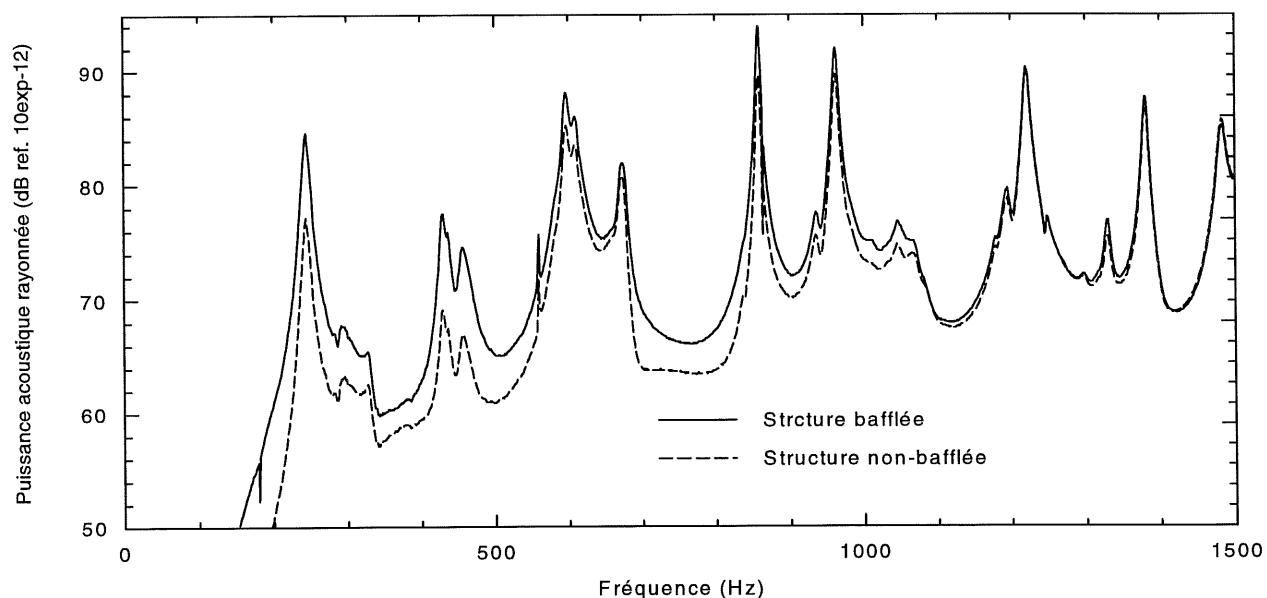


Figure 5.17 : Comparaison du rayonnement acoustique d'une plaque raidie (caractéristique au paragraphe 5.4.4) dans le cas bafflé et non-bafflé.

5.3.5 Récapitulatif sur les temps de calcul

Différentes méthodes numériques ont été expliquées dans cette section, comme il a été montré, ces méthodes ne changent pas la précision des résultats. Il reste maintenant à voir le gain en temps de calcul qui peut-être obtenu quand elles sont utilisées. Le Tableau 5.1 et le Tableau 5.2 présentent les gains obtenus par les différentes techniques présentées dans cette section respectivement pour le cas bafflé et non-bafflé. L'ordinateur utilisé pour ces tests est un pentium 120 MHz avec 16 Mégaoctets de mémoire vive.

Tableau 5.1 : Récapitulatif des gains sur les temps de calcul du programme HYMNE en fonction des simplifications numériques utilisées (cas bafflé). Le cas de base a été calculé avec 63 points de maillage, 30 points de Gauss pour l'intégration numérique des impédances de rayonnement (matrice Z_{mnpq} pleine).

	Cas de base, aucune simplification	Z_{mnpq}^H diagonal	Interpol. fréq $\delta f = 30$ Hz	Interpol. fréq $\delta f = 50$ Hz	Interpol. fréq $\delta f = 80$ Hz	$Z_{mn}^H = 1$ si $k_Q/k_{mn} > 3$	Approx hautes- fréquences
Temps de calcul	2 h 12 mn	1 mn 25 s	33mn 56 s	21 mn 9 s	13 mn 39 s	1 mn 17 s	35 s
Gain par rapport au cas de base (2 h 12 mn)	-	93	3.8	6.3	9.7	102.8	226.3

Tableau 5.2 : Récapitulatif des gains sur les temps de calcul du programme HYMNE en fonction des simplifications numériques utilisées (cas non-bafflé). Le cas de base a été calculé avec 63 points de maillage, 30 points de Gauss pour l'intégration numérique des matrices M^A_{mnpq} et K^A_{mnpq} et 10×10 fonctions de base ont été utilisées pour le saut de pression.

	Cas de base, aucune simplification	Interpol. fréq $\delta f = 30$ Hz	Interpol. fréq $\delta f = 50$ Hz	Interpol. fréq $\delta f = 80$ Hz
Temps de calcul	1 h 20 mn	30 mn 42 s	24 mn 14 s	20 mn 19 s
Gain par rapport au cas de base (1 h 20 mn)	-	2	2.5	3

5.4 Validations, mise en oeuvre de la méthode hybride

5.4.1 Introduction

L'objectif principal de cette section est de montrer la validité de la méthode hybride ainsi que son mode de fonctionnement. La première partie va être consacrée à une validation théorique, qui va consister à comparer les résultats donnés par la méthode hybride avec ceux de logiciels déjà largement validés. Cela a essentiellement pour but de valider l'implantation numérique de la méthode. La deuxième partie présente la mise en oeuvre expérimentale nécessaire à réaliser, afin d'obtenir des mesures qui pourront être utilisées par le logiciel. Plusieurs précautions à prendre au niveau de l'acquisition expérimentale seront détaillées et expliquées. La troisième partie présente des validations expérimentales de la méthode hybride. Dans ce cas la méthode hybride va être utilisée de manière complète (mesures et calculs), cela va permettre de valider le principe de la méthode dans sa globalité. Plusieurs structures seront testées : plaque, plaque avec raidisseur, caisson et pour finir une partie d'un fuselage d'avion (Dash-8, Bombardier Aerospace). Une étude de convergence de la méthode en fonction du nombre de points de mesure est présentée dans la dernière partie.

5.4.2 Validations théoriques

Le premier type de tests effectués, consiste à comparer les résultats de puissance acoustique rayonnée donnés par la méthode hybride, avec des logiciels de simulations numériques qui ont fait l'objet de nombreuses validations. Deux logiciels sont utilisés : (1) ADNR, qui calcule le rayonnement acoustique d'une plaque bafflée, simplement appuyée (Foin, 1994) et (2) SATURN, qui calcule le rayonnement acoustique d'une plaque non-bafflée avec des conditions aux limites quelconques (Nelisse, 1998). Pour pouvoir comparer la méthode hybride avec une méthode purement numérique, il faut calculer le déplacement de la structure (qui devrait normalement être mesuré). Le logiciel NINA (Beslin, 1997) va permettre de calculer ce déplacement avec le même type de conditions aux limites que SATURN et ADNR. On calcule le déplacement de la structure suivant un maillage régulier de 11×11 points en utilisant la méthode présentée à la Figure 5.22.

On traite le cas d'une plaque simplement appuyée en aluminium de 0.48 m par 0.42 m et de 3.22 mm d'épaisseur, excitée par une force ponctuelle positionnée en $x = 0.08$ m et $y = 0.07$ m d'un coin de la plaque. La Figure 5.18 présente la comparaison entre la méthode hybride pour le cas bafflé et ADNR. On voit dans cette figure qu'il y a un bon accord entre les deux méthodes. La comparaison entre SATURN et la méthode hybride pour le cas non-bafflé présente également un bon accord (Figure 5.19).

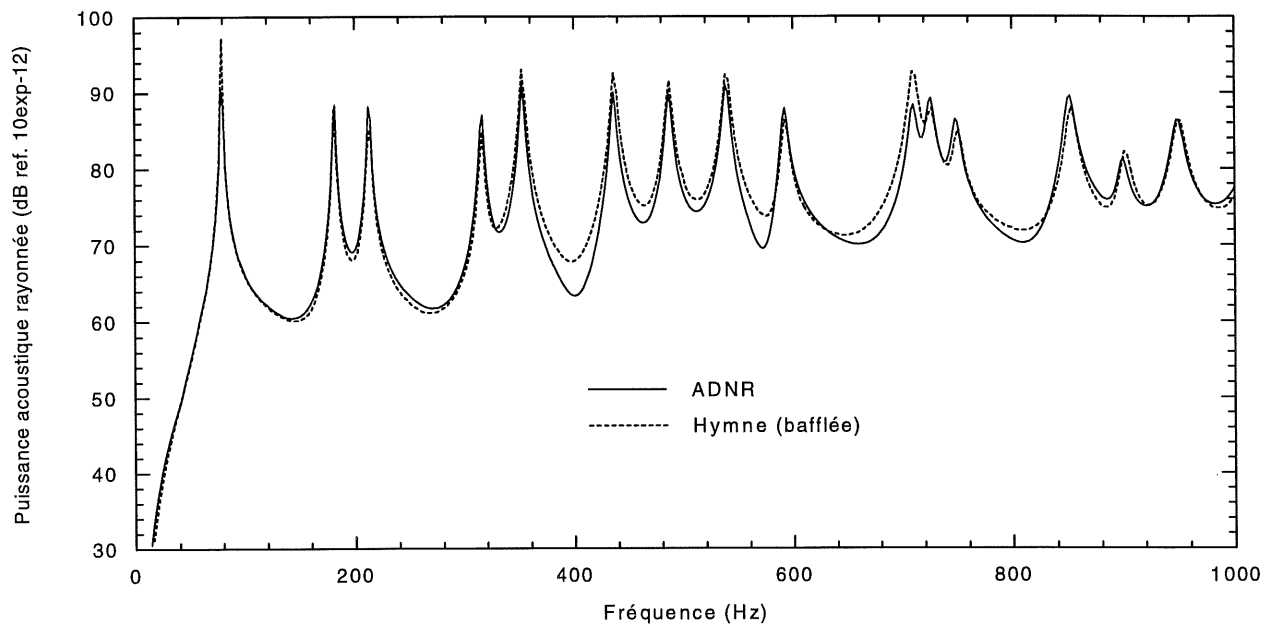


Figure 5.18 : Comparaison entre ADNR et la méthode hybride pour la puissance rayonnée d'une plaque bafflée, simplement appuyée.

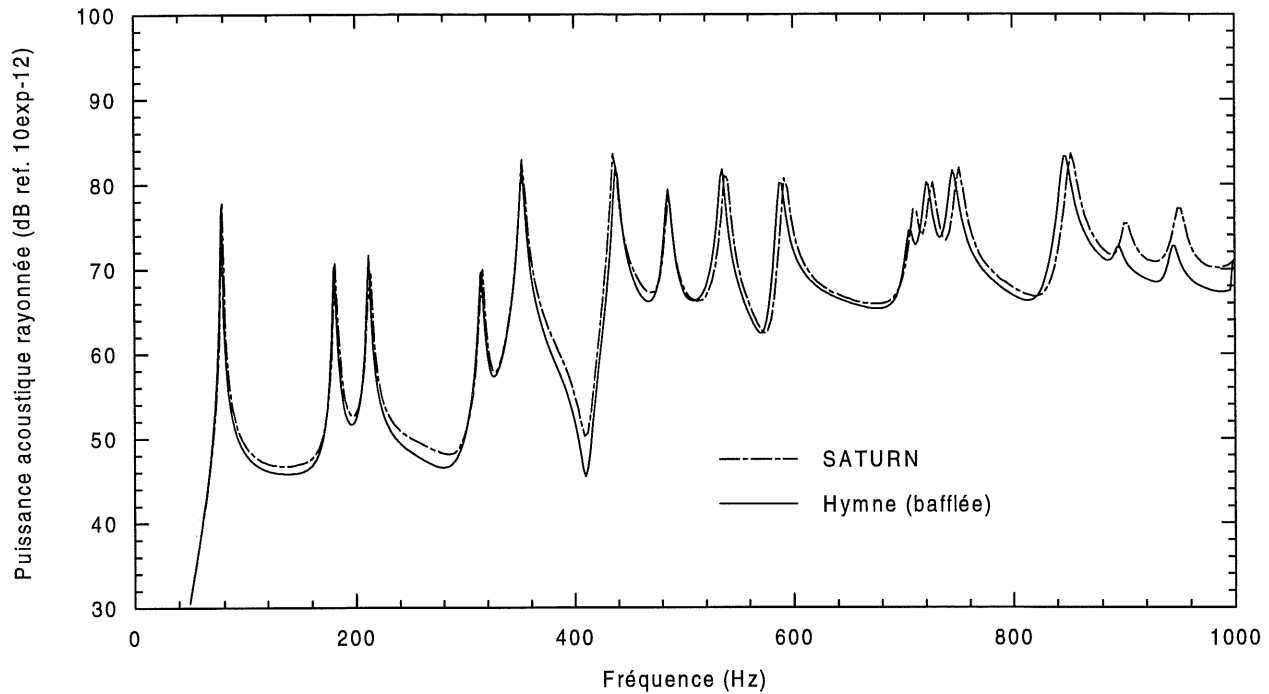


Figure 5.19 : Comparaison entre SATURN et la méthode hybride pour la puissance rayonnée d'une plaque non-bafflée, simplement appuyée.

5.4.3 Remarques sur les mesures

Dans la section qui suit, les grandes lignes de la démarche expérimentale qu'il faut mettre en œuvre pour pouvoir utiliser la méthode hybride sont expliquées. Afin d'obtenir des résultats de puissance rayonnée précis, il est important de prendre un certain nombre de précautions lors de la mesure du champ vibratoire de la structure. La première précaution consiste à prendre les points de mesures en-dehors des lignes nodales des fonctions de base du déplacement, et la deuxième consiste à prendre une mesure de l'auto-spectre au point de référence à chaque mesure d'une fonction de transfert. Ces deux points sont détaillés dans ce paragraphe.

La Figure 5.20 présente un schéma du montage de base utilisé dans les validations expérimentales, les mesures sont effectués à l'aide d'accéléromètres et l'acquisition est réalisée avec un analyseur de spectre (BK 3550).

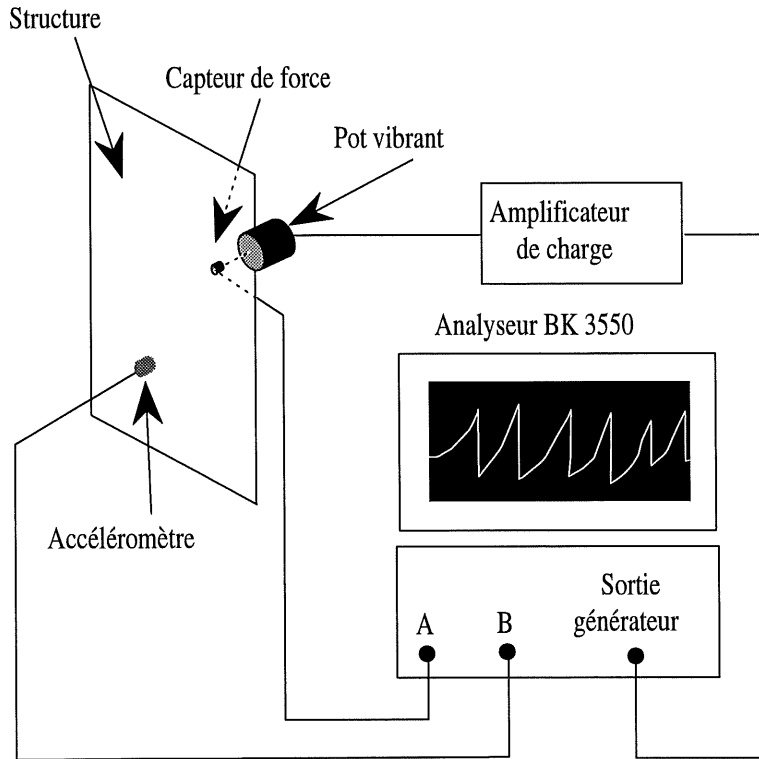


Figure 5.20 : Montage expérimental pour la mesure du déplacement d'une structure excitée par un pot vibrant.

- **Lignes nodales des fonctions de base**

Lors des mesures, il est très important de prendre des points de mesure en dehors des lignes nodales des fonctions de base utilisés pour le déplacement de la structure $\psi_{mn}(x,y)$ (équation 5.2). La Figure 5.21 représente les fonctions $\cos(2m\pi x/a)$ et $\sin(2m\pi x/a)$ pour $a = 1$ et pour $m = 2$. Si les points de mesure passent soit par les carrés (points nodaux pour le sinus), soit par les ronds (points nodaux pour le cosinus), il est impossible de calculer l'amplitude du déplacement pour ce mode étant donné qu'à tous les points de mesure le déplacement est nul (le problème est le même pour la direction y).

Afin d'éviter ce problème et dans le cas où on utilise un maillage régulier, la solution retenue consiste à prendre la distance a de telle sorte qu'elle soit toujours légèrement supérieure à la distance entre le premier et le dernier point de mesure (on fait la même chose pour b). Dans le code informatique on rajoute de part et d'autre du maillage $\delta x/3$ dans la direction x pour avoir la longueur a (on fait la même chose pour b dans la direction y , Figure 5.22). Cela signifie que l'utilisateur peut faire un maillage sans

tenir compte de ce problème, le programme informatique va automatiquement calculer a et b de manière à ce qu'aucun point de mesure ne passe par une ligne nodale des fonctions de base.

Un maillage irrégulier est aussi une solution possible pour éviter ce problème, nous présenterons un résultat avec un maillage irrégulier au paragraphe 5.4.4.

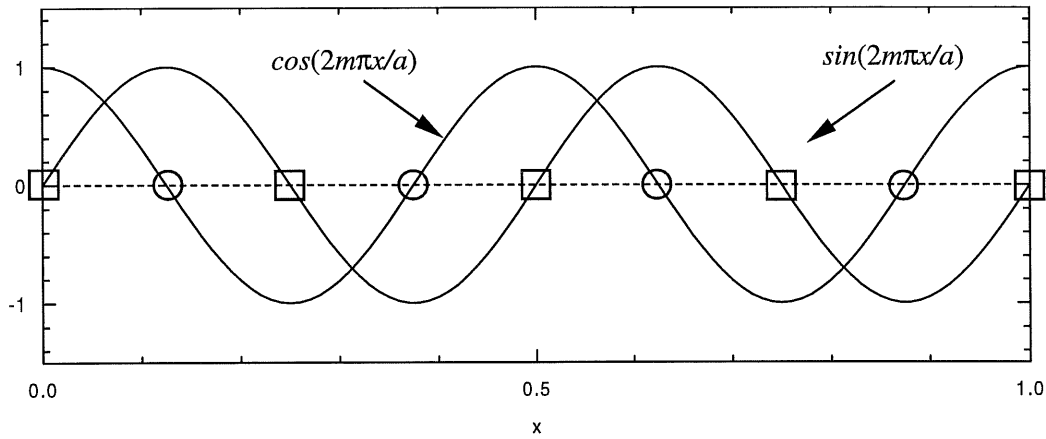


Figure 5.21 : Fonction de base du déplacement de la structure dans la direction x , pour $m = 2$ et $a = 1$.

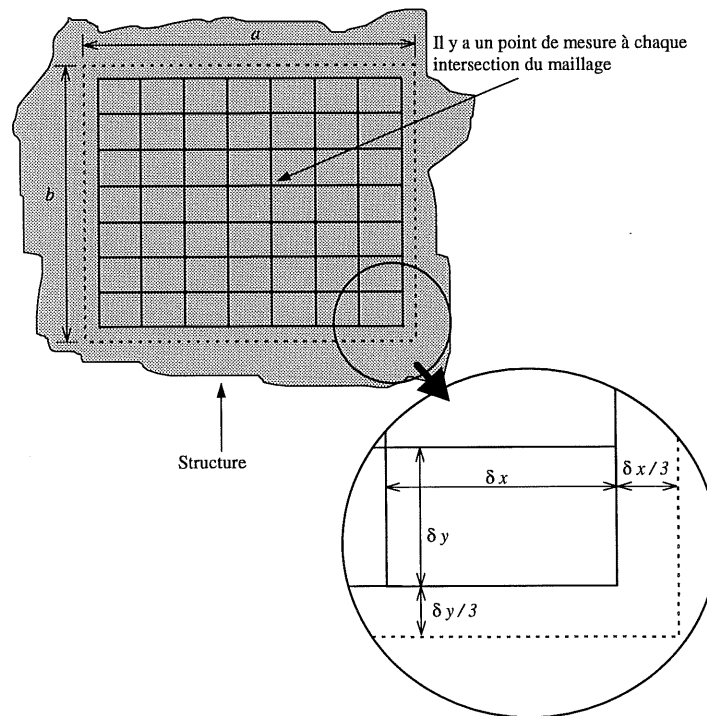


Figure 5.22 : Présentation de la manière de calculer les longueur a et b de telles sortes que les points de mesure ne passent pas par des lignes nodales des fonctions de bases $\psi_{mn}(x,y)$.

- **Mesure du module de la vitesse au point de référence**

Dans la méthode hybride, on mesure des fonctions de transfert entre le déplacement d'un point du maillage et le déplacement du point de référence. Or, pour avoir la vraie puissance rayonnée par la structure, il faut le vrai déplacement et non pas un déplacement relatif (il faut toutefois se rappeler que nous travaillons dans l'espace des fréquences et que nous obtenons donc la transformée de Fourier fréquentielle du déplacement). Pour cela, il suffit de multiplier la fonction de transfert, par le module du déplacement au point de référence. Cela permet d'écrire le vrai déplacement de la structure de la manière suivante :

$$w(x_i, y_i) = H(x_i, y_i) |w_{ref}|, \quad (5.34)$$

où $w(x_i, y_i)$ est le vrai déplacement au point i , $H(x_i, y_i)$ est la fonction de transfert mesurée entre le point i et le point de référence, et $|w_{ref}|$ est le module de la vitesse au point de référence. On pourrait penser qu'il faut mesurer le module de la vitesse au point de référence une seule fois au cours de la mesure et qu'il suffit ensuite d'appliquer la correction donnée par l'équation 5.34 à chaque point de mesure. En fait, le déplacement au point de référence est une grandeur très instable avec des pics qui peuvent varier beaucoup pour des variations très mineures de la structure mesurée (déplacement d'un accéléromètre, mouvement très léger de la structure...). Cela est mis en évidence dans la Figure 5.23 qui présente plusieurs modules de la vitesse au point de référence lors de la mesure du fuselage du Dash-8. Pour éviter ce problème, il faut mesurer le module de la vitesse au point de référence à chaque mesure d'une fonction de transfert et appliquer ensuite la relation 5.34 de la manière suivante :

$$w(x_i, y_i) = H(x_i, y_i) |w_{ref_i}|, \quad (5.35)$$

où w_{ref_i} est le module de la vitesse au point de référence mesurée en même temps que $H(x_i, y_i)$.

La position du point de référence est en théorie quelconque, mais en pratique il faut éviter de prendre un point qui passe sur une ligne nodale ou un point qui vibre peu par rapport à l'ensemble de la structure pour éviter des divisions par des nombres très petits qui entraînent des imprécisions dans les calculs numériques. Ce choix du point de référence fait appel en grande partie à l'expérience de l'expérimentateur.

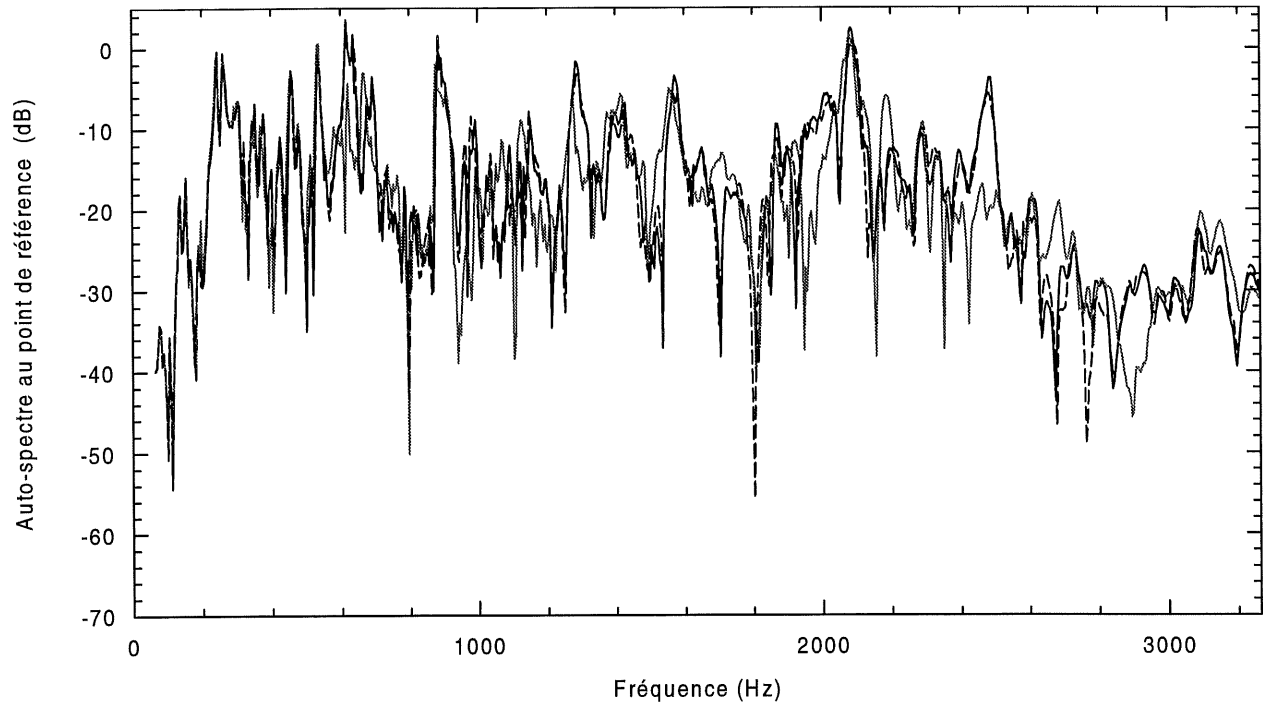


Figure 5.23 : Exemple de quelques modules de la vitesse au point de référence pour le fuselage du Dash-8 (ces courbes ont été enregistrées à divers moments de la journée de mesure, mais le montage expérimental n'a subi aucune modification).

5.4.4 *Validations expérimentales*

Quatre structures sont considérées dans l'étude expérimentale, nous allons les étudier de la plus simple à la plus complexe :

1. Une plaque rectangulaire simplement appuyée.
2. Une plaque rectangulaire simplement appuyée avec un raidisseur.
3. Un caisson parallélépipédique.
4. Une portion du fuselage d'un avion (Dash-8, Bombardier Aerospace).

Pour ces quatre cas, nous allons comparer la puissance acoustique rayonnée, mesurée par intensimétrie, avec les résultats donnés par la méthode hybride pour les cas bafflé et non-bafflé. La

méthode utilisée pour la mesure d'intensimétrie consiste à balayer une surface fermée au-dessus de la structure avec une sonde intensimétrique. L'espacement entre les deux microphones est de 12 mm.

- **Plaque rectangulaire simplement appuyée**

Il s'agit d'une plaque de 0.48 m par 0.42 m avec 6 mm d'épaisseur en aluminium et montée dans le cadre pour appui simple déjà décrit au paragraphe 2.5.1. L'excitation est assurée par un pot vibrant qui génère un bruit blanc entre 0 et 5600 Hz et positionné en $x = 8$ cm et $y = 7$ cm d'un coin de la plaque. Un maillage irrégulier de 9×9 points de mesure est utilisé (Annexe F). Les résultats donnés par la mesure d'intensimétrie se rapprochent beaucoup du cas bafflé (Figure 5.24) ; cela vient du fait que le cadre dans lequel est insérée la plaque, empêche le court-circuit acoustique entre les deux faces de la plaque.

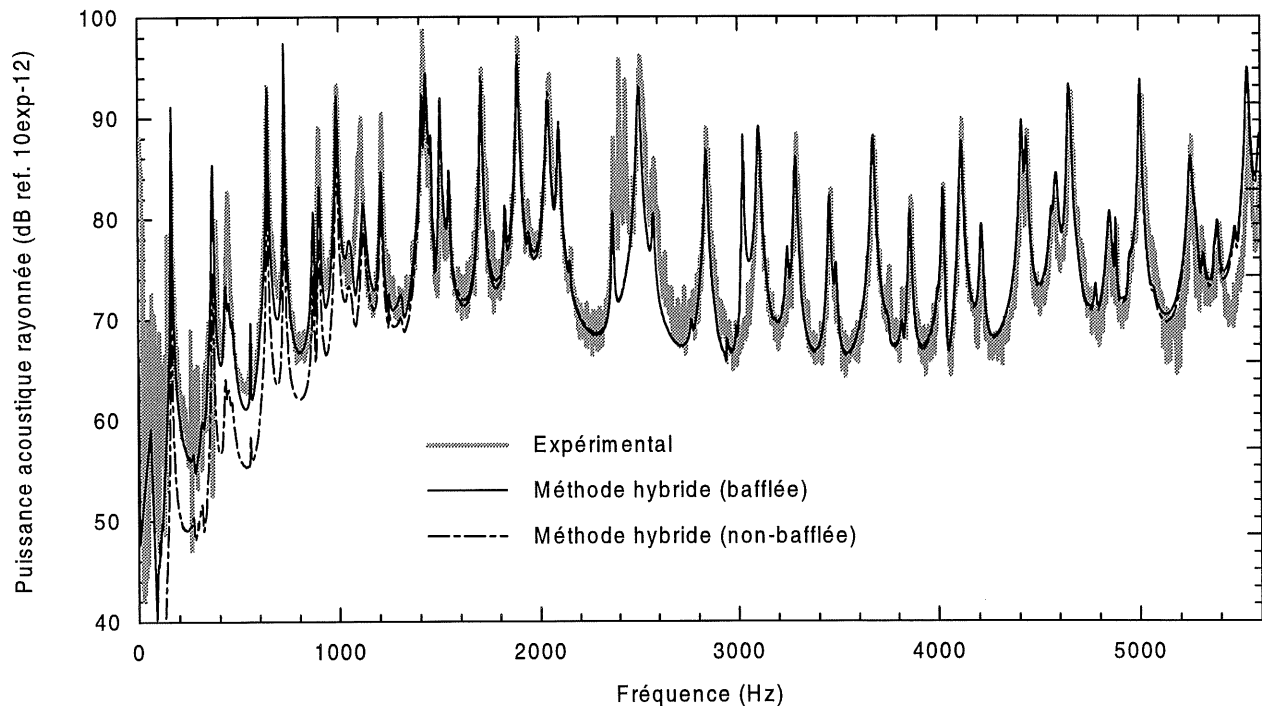


Figure 5.24 : Comparaison entre la méthode hybride et une mesure d'intensimétrie pour une plaque simplement appuyée.

- **Plaque simplement appuyée avec un raidisseur**

Afin de tester la méthode sur une structure plus complexe qu'une simple plaque, un raidisseur en aluminium a été ajouté sur la plaque précédemment testée (Figure 5.25). Dans ce cas en dessous de 3200 Hz on utilise un maillage régulier de 8×7 points, et au-dessus de 3200 Hz on utilise un maillage régulier

de 16×14 points. Ces deux maillages suivent le principe présenté dans la Figure 5.22. Bien que le comportement vibratoire d'une plaque avec un raidisseur soit plus complexe que celui d'une plaque simple, la méthode hybride donne, là encore, des résultats très précis sur toute la plage fréquentielle testée (Figure 5.26).

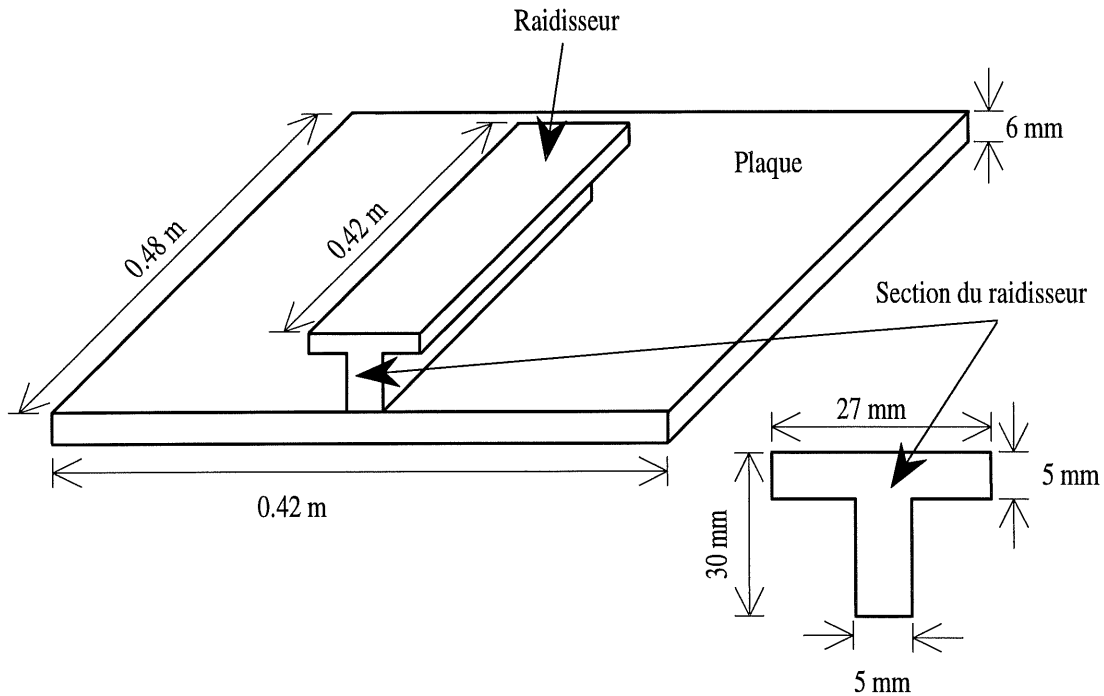


Figure 5.25 : Schéma de la plaque en aluminium avec le raidisseur en T.

Il est à noter que pour la plaque seule, aussi bien que pour la plaque avec raidisseur, la méthode hybride donne parfois des différences importantes par rapport aux mesures d'intensimétrie, sur les niveaux de puissance aux résonances. Cela est dû au fait que ces structures académiques sont très peu amorties, ce qui entraîne des pics de résonance très étroits, qui sont assez difficiles à mesurer, et qui de plus, ne sont pas toujours reproductibles d'une mesure à l'autre. Il faut aussi tenir compte du fait que la mesure par intensimétrie ne s'est pas faite en même temps que la mesure du champ vibratoire (généralement quelques heures séparaient les deux mesures). Comme nous allons le voir avec les deux prochains exemples, les structures industrielles ont des niveaux d'amortissement beaucoup plus élevés, ce qui entraîne des pics résonants moins élevés, et évite ce problème.

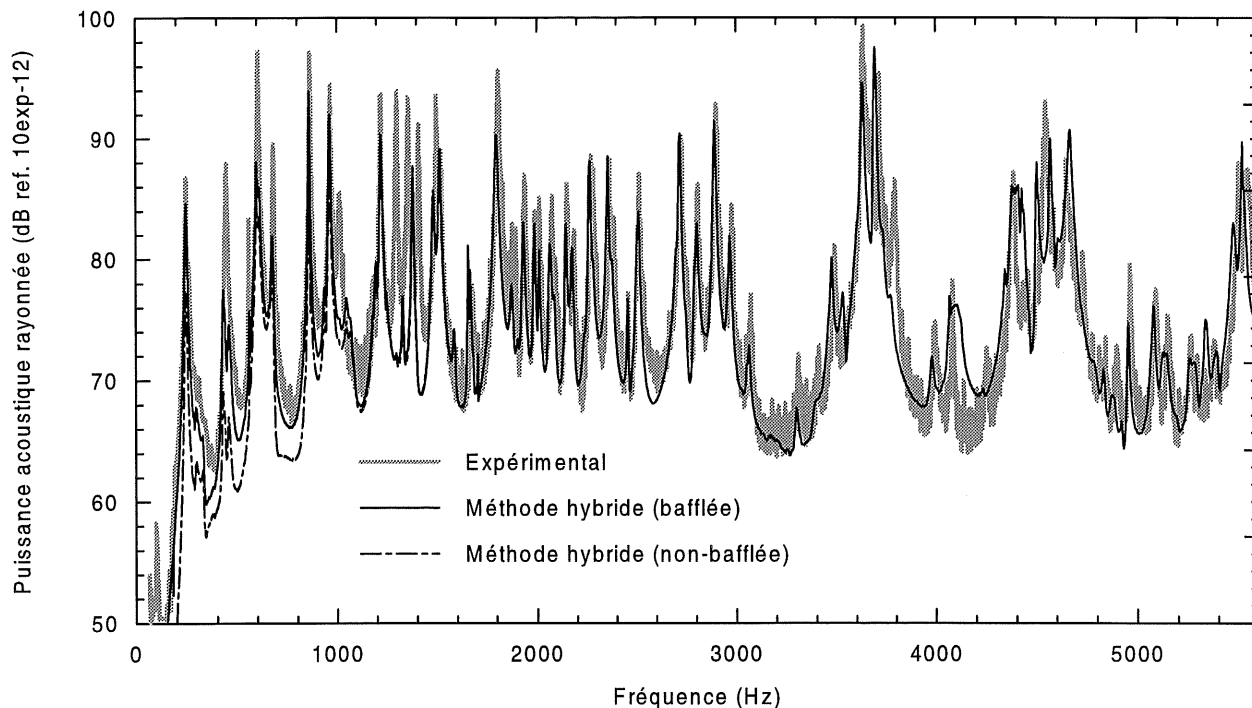


Figure 5.26 : Comparaison entre la méthode hybride et une mesure d'intensimétrie pour une plaque simplement appuyée avec un raidisseur.

- **Caisson parallélépipédique**

Un des intérêts de la méthode hybride est de pouvoir identifier les éléments responsables du bruit dans une structure complexe. Pour cela, il faut décomposer la structure en plusieurs sous-structures et mesurer le champ vibratoire de chacune d'elles. À partir de ces mesures, la méthode hybride est capable de fournir la puissance acoustique rayonnée par chaque sous-structure. En toute rigueur, on ne peut pas sommer ces puissances pour obtenir la puissance rayonnée totale de la structure, car cela revient à négliger la contribution de toutes les autres sous-structures dans le calcul de la pression pariétale d'une sous-structure. Néanmoins, nous allons quand même sommer les puissances acoustiques rayonnées des diverses sous-structures et comparer le résultats avec la mesure de la puissance rayonnée totale, afin de savoir dans quelle mesure cette approximation est acceptable.

On présente ici les mesures effectuées par De Lucas (1998), qui consiste à reconstituer la puissance acoustique totale rayonnée par un caisson parallélépipédique à partir de la mesure vibratoire de chacune des six faces. Le caisson est en aluminium avec les dimensions suivantes : 0.76 m × 0.48 m × 0.42 m, chaque panneau ayant une épaisseur de 3.17 mm. Un pot vibrant générant un bruit blanc est placé sur une

face de $0.76 \text{ m} \times 0.48 \text{ m}$ (Figure 5.27). Sur les faces de $0.76 \text{ m} \times 0.48 \text{ m}$ il y a 18×11 points de mesure, sur les faces de $0.76 \text{ m} \times 0.42 \text{ m}$ il y a 18×9 points de mesure et sur les faces de $0.48 \text{ m} \times 0.42 \text{ m}$ il y a 11×9 points de mesure. Dans tous les cas il s'agit d'un maillage régulier.

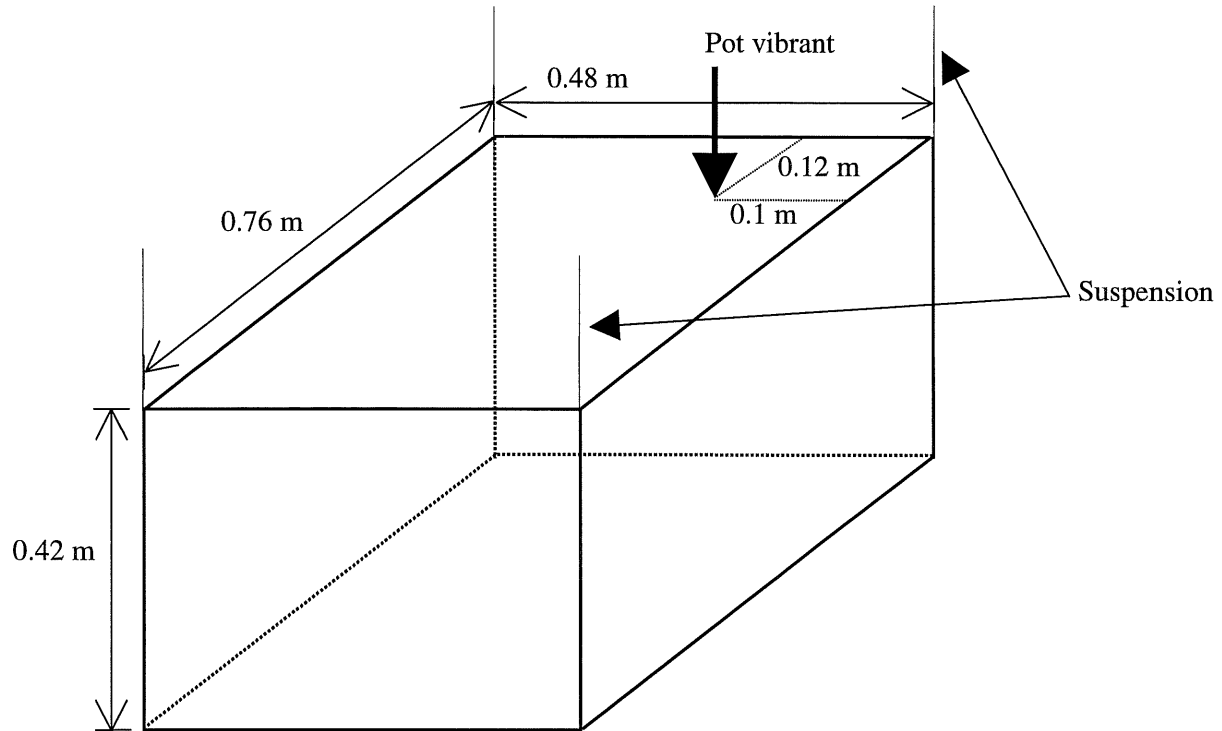


Figure 5.27 : Schéma du caisson.

La Figure 5.28 compare la somme des six puissances rayonnées calculées par la méthode hybride à partir de la mesure sur les six panneaux, avec la mesure de la puissance rayonnée totale du caisson. On constate une bonne concordance entre les deux courbes jusqu'à 800 Hz, les niveaux aux résonances ainsi que la densité modale sont respectés. Les résultats ne sont pas présentés au-delà de 800 Hz, car au-dessus de cette valeur les mesures acoustiques ne sont plus valides, car le pot vibrant génère un niveau de bruit équivalent à celui produit par le caisson. Pour ce cas on ne considère que le calcul de la structure bafflée, le caisson étant fermé, le cas non-bafflé n'a pas de sens.

Ainsi, on a montré que pour ce cas, la pression pariétale générée par une face est prépondérante devant la contribution des autres faces. Ce qui signifie que l'on peut sommer les puissances rayonnées calculées

pour chaque face pour avoir la puissance rayonnée totale. Néanmoins, cela ne constitue pas pour autant un résultat général, et chaque cas doit être traité indépendamment.

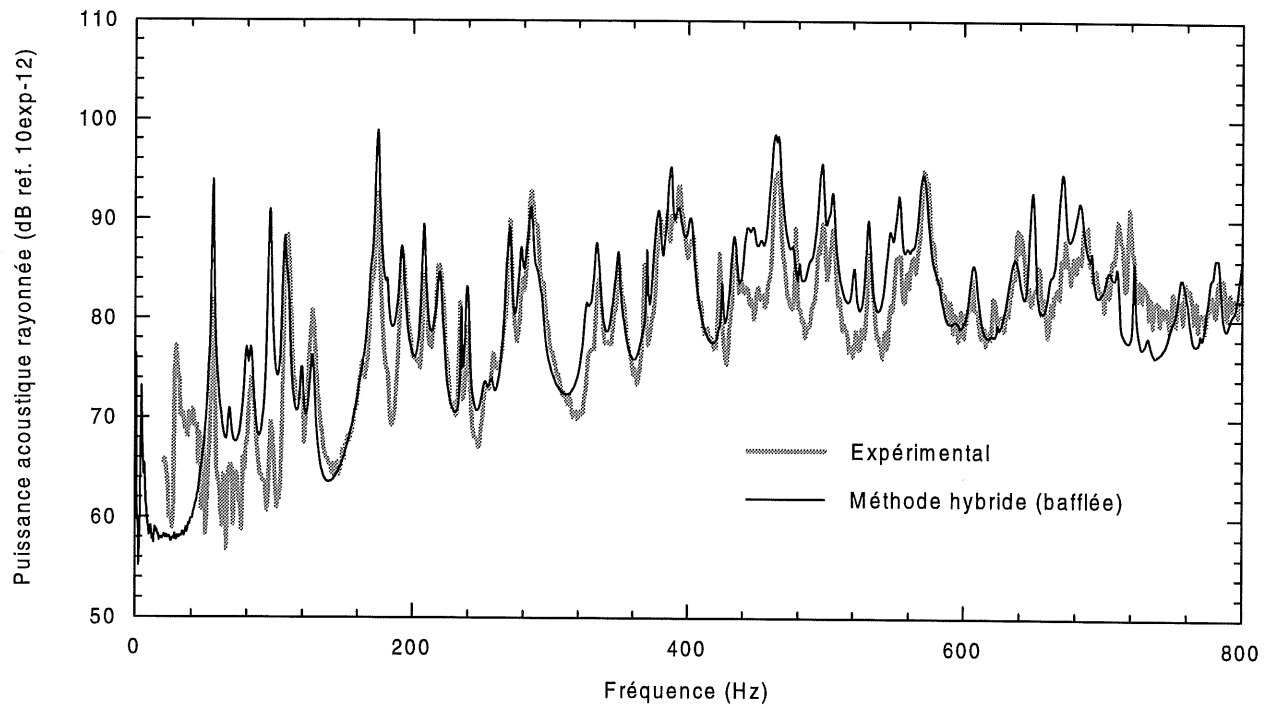


Figure 5.28 : Comparaison entre la méthode hybride et une mesure d'intensimétrie pour un caisson parallélépipédique.

- **Fuselage d'avion**

La dernière validation consiste à appliquer la méthode hybride pour une portion d'un fuselage d'avion (Dash-8, Bombardier Aerospace, Figure 5.29). Cette structure mesure 2.3 m par 1 m, elle est courbée (rayon de courbure 1.34 m), d'épaisseur variable (entre 0.8 mm et 2 mm) et comporte 5 raidisseurs transversaux et 8 raidisseurs longitudinaux assemblés avec des rivets. L'excitation est assurée par un pot vibrant générant un bruit blanc et positionné à $x = 1$ m et $y = 0.18$ m dans le système de coordonnées de la Figure 5.30. Le point de référence est placé à $x = 0$ m, $y = -0.045$ m (Figure 5.30). La méthode est testée sur une partie de la structure : on mesure le champ vibratoire sur un rectangle de 1.36 m par 0.54 m à l'aide d'un maillage régulier de 35×13 points. Cette structure est utilisée, à titre d'exemple, à plusieurs endroits dans ce chapitre, les caractéristiques décrites ci-dessus sont vraies pour tous ces cas, excepté pour le nombre de points de mesure qui peut varier.

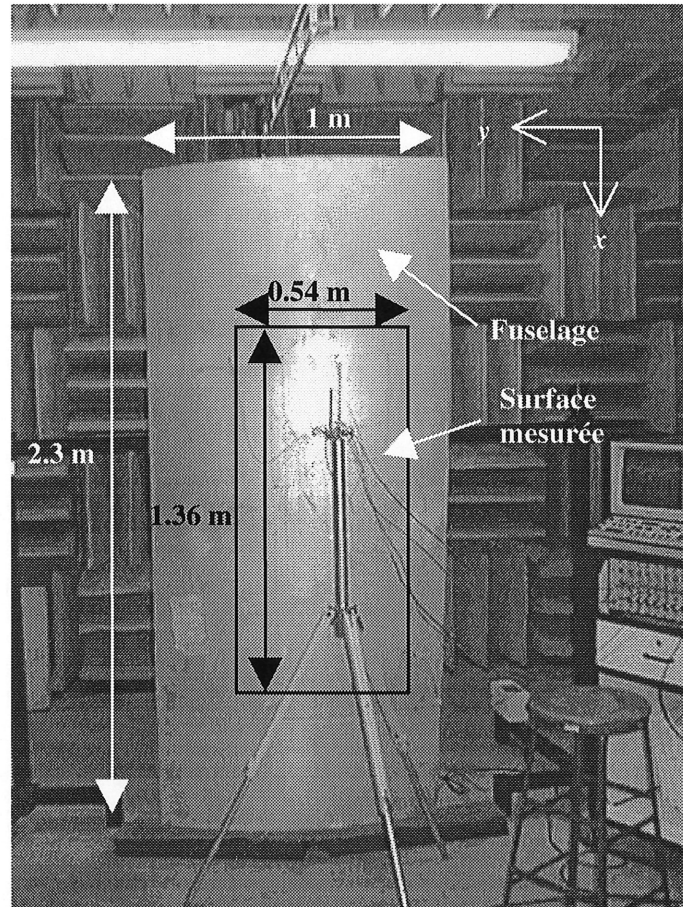


Figure 5.29 : Fuselage du Dash-8 (Bombardier Aerospace) utilisée pour tester la méthode hybride.

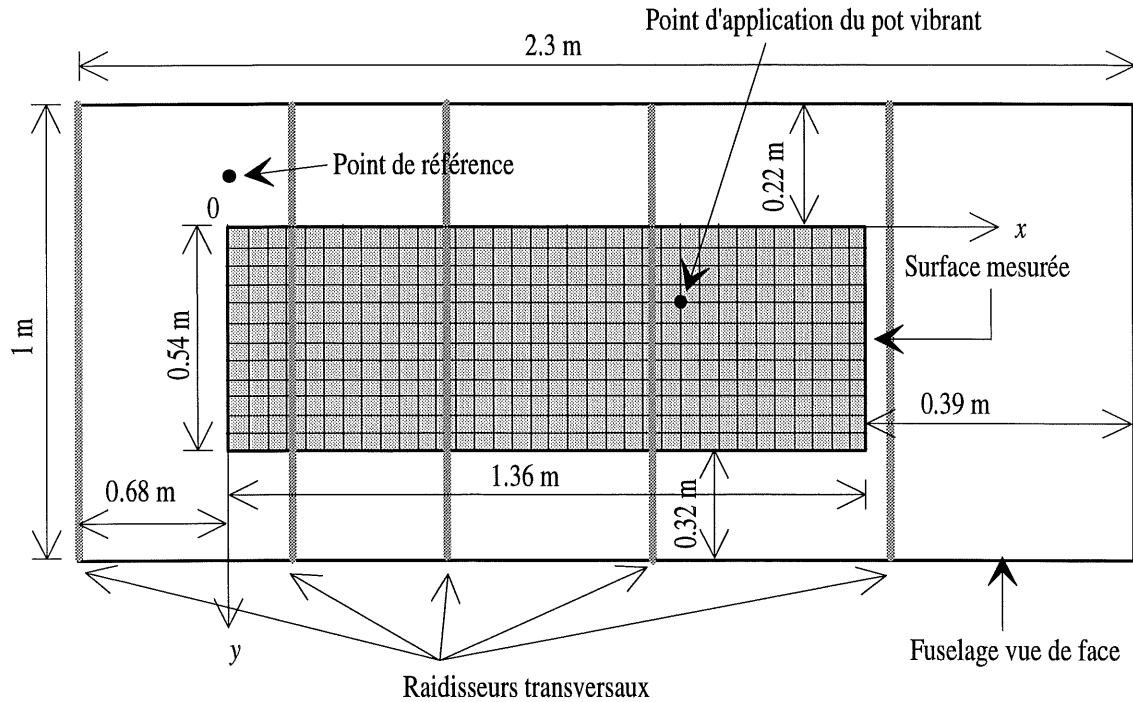


Figure 5.30 : Schéma du fuselage du Dash-8 avec le maillage, le point d'excitation et le point de référence.

La Figure 5.31, qui compare la méthode hybride avec une mesure d'intensimétrie permet de voir que la méthode hybride donne des résultats très précis sur toute la plage fréquentielle et cela pour une structure ayant un comportement modal très complexe. De plus, la formulation théorique fait l'hypothèse d'une structure plane, or, dans ce cas nous avons affaire à une structure non-plane et malgré cela les résultats sont encore très concluants. Cela ouvre beaucoup de perspectives pour les applications futures de la méthode hybride.

Dans la formulation théorique de la méthode hybride, le calcul de la puissance rayonnée pour le cas bafflé suppose qu'autour de la partie mesurée, la structure est plane et rigide. Or, pour le fuselage ce n'est pas le cas puisque on ne mesure qu'une partie du fuselage, et que par conséquent autour de la partie mesurée, le fuselage est en mouvement. Le bon accord entre le calcul par la méthode hybride et la mesure par intensimétrie montre que le mouvement de la partie non-mesurée du fuselage joue peu de rôle dans la puissance acoustique rayonnée par la partie mesurée.

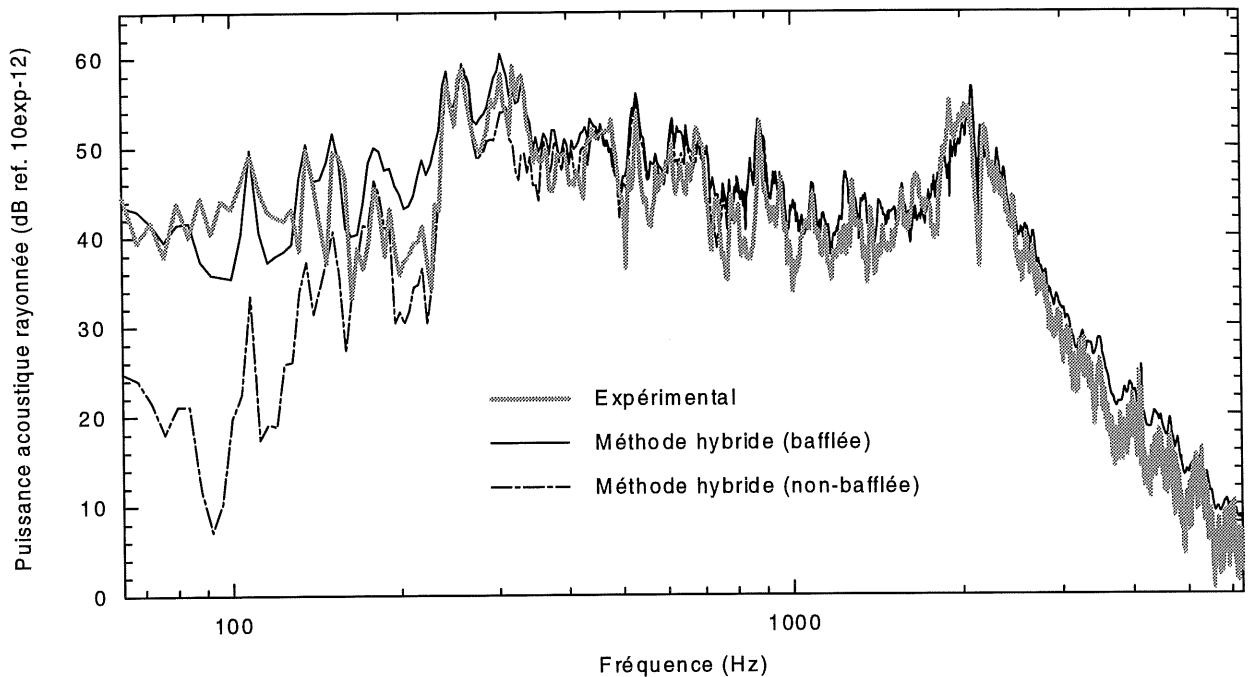


Figure 5.31 : Comparaison entre une mesure d'intensimétrie et la méthode hybride pour une partie d'un fuselage d'avion (Dash-8, Bombardier Aerospace).

5.4.5 Étude de convergence

Une des difficultés de la méthode hybride est la détermination du nombre de points de mesure pour avoir des résultats de puissance rayonnée précis jusqu'à la limite fréquentielle qu'on s'est fixée. Le critère, couramment utilisé en physique, qui stipule de prendre 6 points de mesure par longueur d'onde est difficile à satisfaire par la méthode hybride, pour deux raisons :

1. Cela demande un maillage extrêmement fin en hautes fréquences.
2. Cela suppose, qu'à chaque fréquence, on connaisse une relation entre la fréquence et la plus petite longueur d'onde présente dans la structure, ce qui n'est pas le cas pour une structure complexe.

Dans la suite de cette section, nous allons étudier la convergence de la méthode hybride en fonction du nombre de points de mesure, à partir de l'exemple du fuselage du Dash-8. La Figure 5.32 présente la puissance rayonnée d'une partie du fuselage du Dash-8, calculée dans le cas bafflé par la méthode hybride pour quatre maillages différents. On mesure toujours la même surface (1.36 m × 0.54 m, Figure 5.29), c'est le nombre de point de mesure qui change à l'intérieur de cette surface. Le tableau 5.3 décrit la

distance entre deux points de mesure dans les directions x et y pour ces quatre maillages, il s'agit à chaque fois d'un maillage régulier, tel que décrit à la Figure 5.22.

On remarque tout d'abord dans la Figure 5.32, qu'il y a convergence "par le haut", ce qui signifie que la méthode hybride surestime toujours la vraie puissance rayonnée. Une explication possible à ce phénomène consiste à dire qu'avec peu de points de mesure, on favorise les fonctions de base avec de grandes longueurs d'ondes, donc efficaces en rayonnement; au contraire, avec beaucoup de points, on introduit des faibles longueurs d'onde (voir Figures 5.33 à 5.36), moins efficaces en rayonnement.

D'autre part, force est de constater que seul le cas qui utilise 455 points de mesure a convergé vers la vraie solution (voir la Figure 5.31 pour la comparaison avec une méthode expérimentale). Si le cas avec 234 points de mesure est meilleur que le cas avec 126 points de mesure, qui lui-même est meilleur que le cas avec 63 points, il est aussi intéressant de noter que ces trois cas commencent à diverger dans la même zone fréquentielle (entre 400 Hz et 600 Hz).

On remarque également que la méthode hybride est beaucoup plus sensible au nombre de points de mesure que ne l'est l'approximation hautes fréquences, présentée à la Figure 5.12 pour le cas du fuselage du Dash-8. En effet, dans la Figure 5.12, le cas avec 63 points de maillage donne des tendances fiables en très hautes fréquences, alors qu'il commence à diverger vers 400 Hz avec la méthode hybride.

Tableau 5.3 : Distance entre deux points de mesures dans la direction x et y pour les quatre maillages du Dash-8.

Nombre de points de mesure	Nombre de points de mesure dans la direction x	Nombre de points de mesure dans la direction y	δx (m)	δy (m)
63	9	7	0.17	0.09
126	18	7	0.08	0.09
234	18	13	0.08	0.045
455	35	13	0.04	0.045

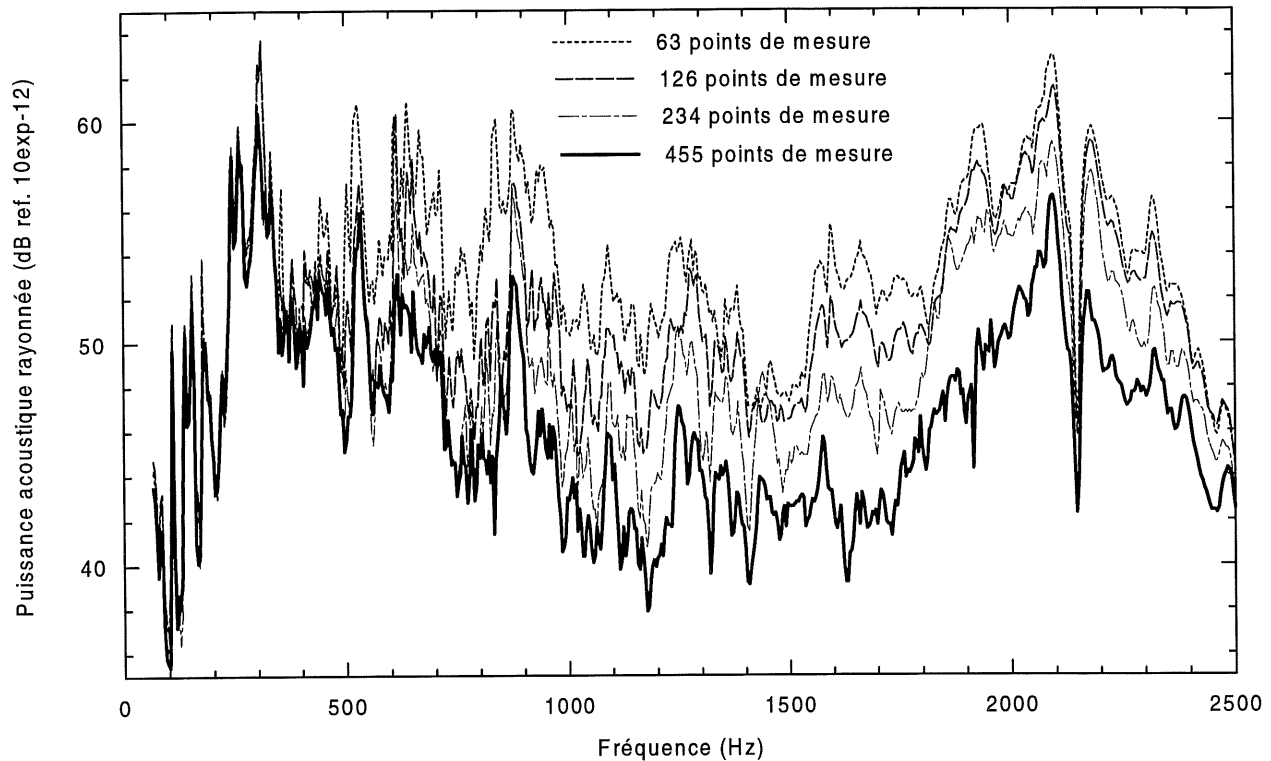


Figure 5.32 : Étude de convergence de la méthode hybride en fonction du nombre de points de mesure pour une partie de fuselage d'avion (Dash-8, Bombardier Aerospace).

Afin de mieux comprendre les problèmes de convergence de la méthode hybride, on va étudier la déformée de la structure. Une fois que les amplitudes du déplacement ont été calculées à l'aide de la méthode de colocation (paragraphe 5.2.2), on peut reconstruire la déformée de la structure à une fréquence donnée. Les figures 5.33 à 5.36, présentent la déformée de la partie mesurée du fuselage du Dash-8 à 440 Hz, calculée avec la méthode hybride, respectivement pour 63, 126, 234 et 455 points de mesure. La Figure 5.37 présente la déformée mesurée du Dash-8 à 440 Hz, avec 455 points. On remarque que même pour une fréquence assez basse, la déformée de la structure est très complexe, et seul le cas avec 455 points de mesure s'approche vraiment de la déformée mesurée. Ainsi, cette étude de la déformée montre que dans le cas d'une structure complexe, il est important de prendre un nombre de points de mesure important pour converger, même en basses fréquences. C'est ce qui explique que les maillages avec 63, 126 et 234 points de mesure divergent rapidement.

À partir de cette étude de convergence, il ne se dégage pas de loi simple pour choisir le nombre de points de mesure et une étude plus approfondie de ce problème devra être effectuée.

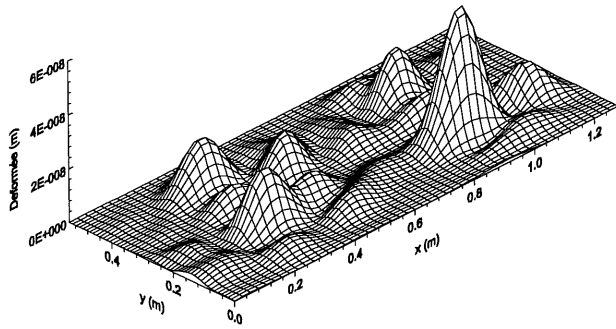


Figure 5.33 : Déformée du Dash-8 à 440 Hz avec 63 points de maillage.

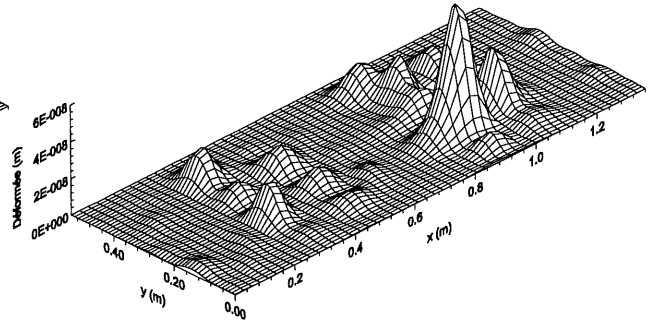


Figure 5.34 : Déformée du Dash-8 à 440 Hz avec 126 points de maillage.

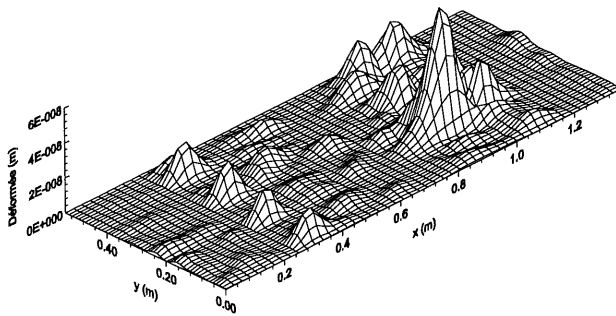


Figure 5.35 : Déformée du Dash-8 à 440 Hz avec 234 points de maillage.

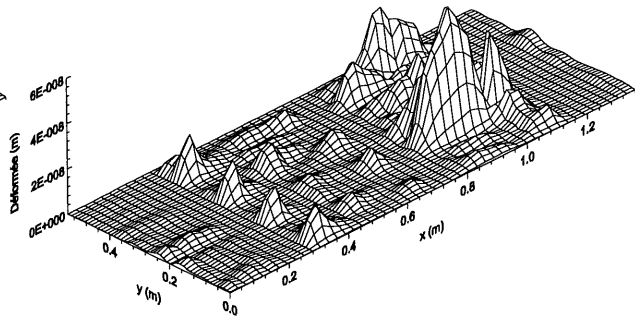


Figure 5.36 : Déformée du Dash-8 à 440 Hz avec 455 points de maillage.

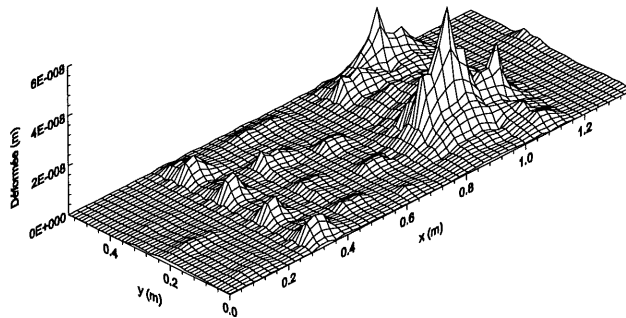


Figure 5.37 : Déformée mesurée du Dash-8 à 440 Hz.

5.5 Synthèse et perspectives sur la méthode hybride

Ce chapitre a défini une méthode qui fait intervenir à la fois des mesures et des calculs numériques afin de prédire le rayonnement acoustique d'une structure complexe. Dans la première étape de cette méthode, il faut séparer la structure en plusieurs sous-structures qui vont être analysées indépendamment. L'expérience en vibro-acoustique de l'ingénieur ou du technicien qui va utiliser la méthode, va être capitale pour cette étape. La deuxième étape consiste à mesurer le champ vibratoire de chacune des sous-structures à l'aide d'un vibromètre laser ou d'accéléromètres. À partir de ce champ vibratoire, la méthode hybride va calculer le rayonnement acoustique de chaque sous-structure en considérant la structure, (1) entièrement bafflée, et (2) entièrement non-bafflée.

L'intérêt de cette méthode est de pouvoir caractériser la contribution de chaque sous-structure dans le niveau de bruit total de la structure. Cela est très important, car une des grandes difficultés du contrôle du bruit à la source est l'identification des sources et des chemins de transmission du son (solidiens, acoustiques...). Aucun traitement acoustique sérieux ne peut être envisagé avant qu'on sache exactement quels sont les éléments qui sont responsables du bruit.

Une formulation théorique qui permet de prédire le rayonnement acoustique d'une plaque avec des conditions aux limites quelconques dans le cas bafflé et non-bafflé a été établie. Une méthode semi-analytique pour calculer les intégrales quadruples des impédances de rayonnement (plaque bafflée) et de

la matrice A (plaque non-bafflée) a été proposée. Plusieurs hypothèses, basées sur la physique du problème, ont été faites afin de diminuer les temps de calcul, tout en conservant la précision des résultats aussi bien en basses fréquences, qu'en hautes fréquences. Enfin, de nombreuses validations expérimentales ont permis de confirmer les hypothèses de base de la méthode, la formulation théorique et l'implantation numérique.

La prochaine étape qui pourrait être faite pour développer la méthode hybride, pourrait être l'application de cette méthode dans le cadre d'un projet industriel qui permettrait de mettre en évidence tous les avantages de cette méthode, mais qui très certainement, permettrait aussi de l'améliorer en la rendant plus fiable et plus performante.

Une étude complète afin de définir un critère permettant de trouver le nombre de points de maillage nécessaire pour fournir un résultat précis jusqu'à une fréquence donnée, serait également une continuité intéressante à ce travail.

Conclusion

L'objectif général de ce doctorat était de progresser dans la compréhension du phénomène d'amortissement des vibrations des structures et dans le domaine de l'isolation acoustique procurée par les matériaux de masquage pour des structures immergées dans l'eau. Cette étude a été mise en oeuvre afin d'améliorer les méthodes de contrôle de bruit à la source sur des structures résonantes soumises à une excitation mécanique ou acoustique, stationnaire. Pour ce faire, trois sujets différents ont été abordés, en respectant à chaque fois la démarche suivante :

1. En premier lieu un modèle théorique original qui permet de traiter le problème considéré est proposé.
2. Ce modèle théorique est ensuite implanté dans un code informatique dont l'objectif est de fournir une réponse précise sur une grande plage fréquentielle.
3. Les résultats obtenus par le code sont validés le plus précisément possible avec des mesures et des comparaisons avec les résultats de la littérature.
4. La dernière étape de la démarche est l'analyse des résultats en essayant de dégager les principes physiques qui permettent de réduire le bruit rayonné par une structure vibrante.

Le comportement vibroacoustique d'une plaque rectangulaire, bafflée, couverte par un traitement viscoélastique couvrant une partie de la plaque était l'objet de la première partie de ce document. Le modèle théorique se base sur la formulation variationnelle et la méthode de Ritz pour calculer l'équation du mouvement de la structure couplée avec le fluide environnant. La pression acoustique rayonnée par la plaque bafflée est évaluée à l'aide de la formulation intégrale (intégrale de Rayleigh). Cette méthode

requiert le calcul des impédances de rayonnement du système plaque-fluide qui sont des intégrales indéfinies. Une méthode semi-numérique qui autorise une bonne convergence en hautes fréquences, ainsi qu'une bonne stabilité numérique, est utilisée pour le calcul de ces termes. Les validations expérimentales de la réponse vibratoire d'une plaque avec couverture partielle ainsi que celle de la réponse acoustique d'une plaque seule, ont permis de valider le modèle théorique proposé.

L'analyse du phénomène d'amortissement dans les plaques multicouches a permis de mettre plusieurs points en évidence :

1. Que ce soit pour un traitement viscoélastique libre ou pour un traitement viscoélastique contraint, le paramètre le plus important à considérer est la rigidité de la couche amortissante. Dans le cas de l'amortissement libre, plus le matériau est rigide, meilleur est l'amortissement (il ne faut néanmoins pas oublier que plus un matériau devient rigide, plus son facteur de perte diminue; le matériau perd ses propriétés viscoélastiques et devient élastique). Par contre, dans le cas de l'amortissement contraint, il a été mis en évidence l'existence d'un module d'Young optimum qui procure un amortissement maximum. Il a été montré que ce module d'Young n'est pas constant en fonction de la fréquence, mais obéit à une loi linéaire.
2. Pour ce qui est de la couverture partielle, on constate que l'augmentation de l'amortissement est une fonction logarithmique du pourcentage de couverture. Ainsi, le gain d'amortissement est très important entre 0 % et 25 % de couverture, alors qu'il est presque négligeable entre 75 % et 100 %.
3. Une méthode permettant d'optimiser la position de la couverture partielle a été proposée, cette méthode consiste à placer la couverture partielle sur les zones où les déformations de flexion de la plaque de base sont maximales. En effet, ce sont les déformations de cisaillement transversal de la couche viscoélastique qui sont responsables des pertes d'énergie sous forme de chaleur. Or, pour maximiser ces déformations de cisaillement, il faut placer la couverture partielle sur les zones où la plaque de base se déforme le plus, c'est à dire sur les zones où la flexion est maximale. Cette méthode s'applique surtout pour les premiers modes de structures (basses fréquences), car pour les modes de haut-ordres étant donné que les dimensions de la couverture partielle sont très supérieures aux longueurs d'onde structurales, la position de la couverture partielle importe peu.

Le deuxième point abordé dans cette thèse est l'étude de l'isolation acoustique procurée par l'ajout d'un matériau de masquage sur une plaque immergée dans l'eau. Le matériau est posé sur la face de la plaque immergée dans l'eau, alors que l'excitation est appliquée sur la face de la plaque qui est dans l'air. Le modèle théorique développé utilise l'approche classique de Love-Kirchhoff pour décrire le comportement de flexion de la plaque de base, alors que le modèle à réaction localisée est utilisé pour décrire les déformations dans le sens de l'épaisseur du matériau de masquage. La pression acoustique rayonnée dans l'eau est évaluée à l'aide de la formulation intégrale et les impédances de rayonnement sont calculées avec la méthode déjà mentionnée pour les matériaux viscoélastiques. Deux bases sont proposées pour décrire la pression pariétale au niveau du matériau de masquage, (1) une décomposition en série de Fourier qui autorise une pression acoustique non nulle sur les bords de la plaque et (2) une décomposition en série de sinus qui impose la nullité de la pression acoustique sur les bords. La deuxième formulation est moins rigoureuse mais donne des résultats pratiquement identiques à la première, tout en entraînant des temps de calcul beaucoup moins longs et en convergeant plus rapidement.

L'analyse des résultats numériques a montré que l'isolation acoustique obtenue par l'ajout d'un matériau de masquage est faible en basses fréquences mais augmente avec la fréquence. Le rapport entre la vitesse quadratique de la plaque de base et la vitesse quadratique de la surface externe du matériau de masquage a été proposé comme un indicateur capable de caractériser l'isolation acoustique procurée par l'ajout d'un matériau de masquage. Il a également été montré que la diminution de la rigidité du matériau de masquage augmente l'isolation acoustique. Contrairement aux matériaux viscoélastiques qui utilisent un phénomène de dissipation d'énergie pour amortir les vibrations de la plaque de base, les matériaux de masquage utilisent un mécanisme de découplage entre le mouvement de la plaque de base et le mouvement du fluide, sans perte d'énergie.

Le troisième point de ce document est le développement d'une méthode hybride qui a pour but d'évaluer le rayonnement acoustique d'une structure ou d'une sous-structure à partir de la mesure de son champ vibratoire. Cette méthode permet de connaître de manière précise le rayonnement d'une structure en éliminant toutes les autres sources de bruit indésirables (bruit de fond, bruit aérodynamique, bruit de turbine...). Ainsi, les parties de la structure responsables du bruit peuvent être isolées. Connaissant ces éléments responsables du bruit, on pourra ensuite les traiter afin de diminuer le bruit total rayonné par la structure. Cette méthode permet de considérer des structures complexes qui ne peuvent pas être traitées avec les codes numériques actuellement disponibles (structures rivetées, collées, soudées, avec des combinaisons complexes de raidisseurs...).

Les nombreuses validations expérimentales qui ont été réalisées montrent que, bien que cette méthode soit définie pour une structure plane, elle donne des résultats très précis jusqu'en hautes fréquences, pour des structures présentant une légère courbure.

Annexe A Vecteur des forces dans le cas d'une onde plane

Dans cette annexe est présenté le calcul du vecteur des forces généralisées s'exerçant sur une plaque rectangulaire, simplement appuyée, dans le cas où l'excitation est une onde plane (Figure A.1). Ce terme s'écrit :

$$f_{mn} = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) dx dy \quad (\text{A.1})$$

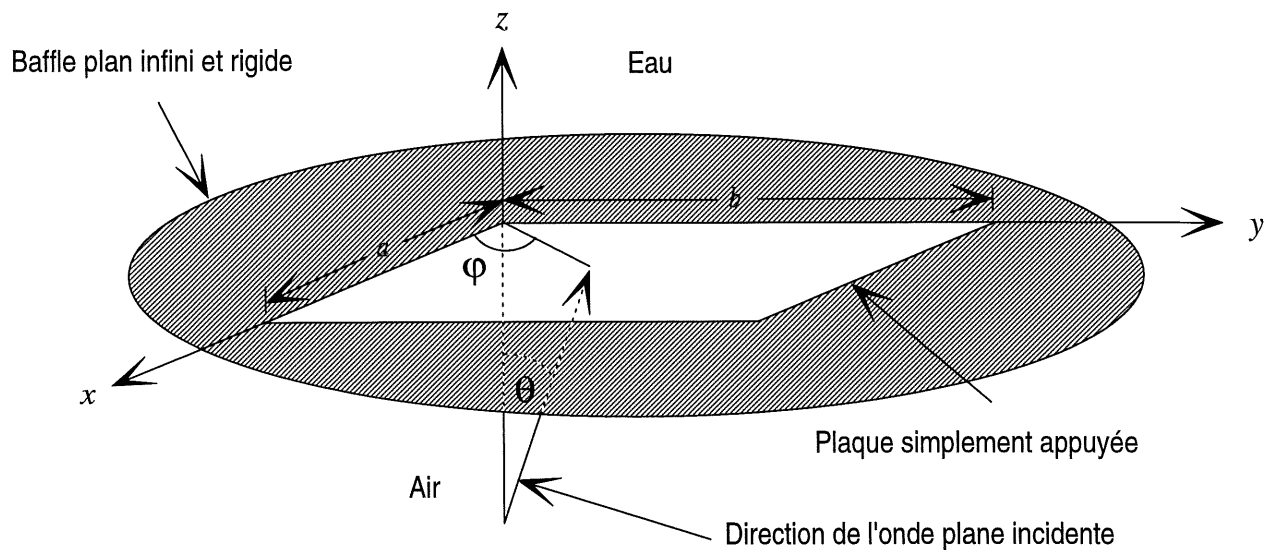


Figure A.1 : Exemple de la position des angles θ et ϕ dans le cas d'une onde plane incidente.

La pression acoustique exercé sur la plaque dû à l'onde plane incidente s'écrit :

$$P_i(x, y, z, t) = P_0 e^{-jk_0((\cos \varphi \sin \theta)x + (\sin \varphi \sin \theta)y + (\cos \theta)z)} e^{j\omega t}, \quad (\text{A.2})$$

où k_0 est le nombre d'onde acoustique dans l'air : $k_0 = \omega/c_0$, c_0 est la vitesse du son dans l'air.

Dans le cas où on considère une réflexion totale (Lesueur, 1988), la pression acoustique réfléchie dans l'air s'écrit :

$$P_r(x, y, z, t) = P_0 e^{-jk_0((\cos \varphi \sin \theta)x + (\sin \varphi \sin \theta)y - (\cos \theta)z)} e^{j\omega t}. \quad (\text{A.3})$$

La pression acoustique résultante sur la plaque est la somme des pressions incidente et réfléchie (on sous entend la dépendance temporelle en $e^{j\omega t}$) :

$$f(x, y) = P_i(x, y, 0) + P_r(x, y, 0) = 2P_0 e^{-jk_0((\cos \varphi \sin \theta)x + (\sin \varphi \sin \theta)y)}. \quad (\text{A.4})$$

En utilisant la première équation de l'annexe on peut écrire le vecteur des forces généralisées :

$$f_{mn} = f_{mn}^{1r} f_{mn}^{2r} - f_{mn}^{1i} f_{mn}^{2i} + j \left[f_{mn}^{1i} f_{mn}^{2r} + f_{mn}^{1r} f_{mn}^{2i} \right], \quad (\text{A.5})$$

avec

$$f_{mn}^{1r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{-1}{k_0 \cos \varphi \sin \theta + \frac{m\pi}{a}} (\cos(k_0 a \cos \varphi \sin \theta + m\pi) - 1) + \frac{1}{k_0 \cos \varphi \sin \theta - \frac{m\pi}{a}} (\cos(k_0 a \cos \varphi \sin \theta - m\pi) - 1) \right]$$

$$f_{mn}^{1i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{-1}{k_0 \cos \varphi \sin \theta - \frac{m\pi}{a}} \sin(k_0 a \cos \varphi \sin \theta - m\pi) + \frac{1}{k_0 \cos \varphi \sin \theta + \frac{m\pi}{a}} \sin(k_0 a \cos \varphi \sin \theta + m\pi) \right]$$

$$f_{mn}^{2r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{-1}{k_0 \sin \varphi \sin \theta + \frac{n\pi}{b}} (\cos(k_0 b \sin \varphi \sin \theta + n\pi) - 1) \right. \\ \left. + \frac{1}{k_0 \sin \varphi \sin \theta - \frac{n\pi}{b}} (\cos(k_0 b \sin \varphi \sin \theta - n\pi) - 1) \right]$$

$$f_{mn}^{2i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{-1}{k_0 \sin \varphi \sin \theta - \frac{n\pi}{b}} \sin(k_0 b \sin \varphi \sin \theta - n\pi) + \frac{1}{k_0 \sin \varphi \sin \theta + \frac{n\pi}{b}} \sin(k_0 b \sin \varphi \sin \theta + n\pi) \right]$$

Annexe B Impédances de rayonnement d'une plaque bafflée simplement appuyée

Dans cette annexe on calcule les termes de la matrice Z_{mnpq} des impédances de rayonnement d'une plaque bafflée simplement appuyée, telle que définie à l'équation 2.63. La matrice Z_{mnpq} est définie de la manière suivantes :

$$Z_{mnpq} = j\omega\rho_0 \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b \phi_m(x)\phi_n(y)G(x, y, x_0, y_0)\phi_p(x_0)\phi_q(y_0) dx dy dx_0 dy_0 , \quad (\text{B.1})$$

On utilise la fonction de Green en espace semi-infini : $G = \frac{e^{-jk_0R}}{2\pi R}$ avec $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

Les fonctions de base sont données par : $\phi_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$ et $\phi_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$.

On effectue d'abord un premier changement de variable pour adimensionnaliser les intégrales :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2x}{a} \\ \beta = \frac{2y}{b} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha_0 = \frac{2x_0}{a} \\ \beta_0 = \frac{2y_0}{b} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Ce qui donne :

$$Z_{mnpq} = j\omega\rho_0 \frac{a^2 b^2}{16} \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \sin\left(\frac{m\pi\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{p\pi\alpha_0}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{q\pi\beta_0}{2}\right) G(\alpha, \beta, \alpha_0, \beta_0) d\alpha d\beta d\alpha_0 d\beta_0 \quad (\text{B.3})$$

Puis on effectue ensuite un deuxième changement de variable afin de pouvoir calculer deux des quatre intégrales de manière analytique, on pose :

$$\begin{cases} u = \alpha - \alpha_0 \\ v = \alpha_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u' = \beta - \beta_0 \\ v' = \beta_0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Le Jacobien de ce changement de variable est égal à 1. La Figure B.1 présente le domaine d'intégration avant et après cette transformation.

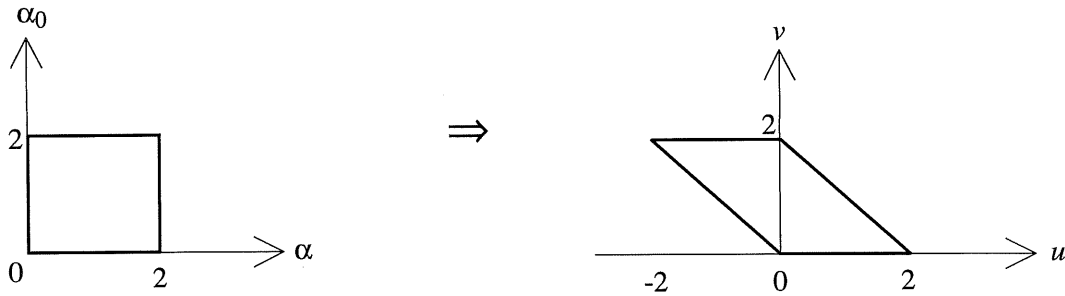


Figure B.1 : Domaine d'intégration avant et après la transformation B.4.

On va d'abord effectuer les intégrations sur u et v , celles sur u' , v' seront similaires. En tenant compte des changements de variables précédents, Z_{mnpq} , s'écrit :

$$Z_{mnpq} = j\omega\rho_0 \frac{a^2 b^2}{16} \int \int \left[\int_{-2-u}^0 \int_0^2 w_m(u, v) w_n(u', v') G(u, u') w_p(v) w_q(v') dv du \right. \\ \left. + \int_0^2 \int_0^{2-u} w_m(u, v) w_n(u', v') G(u, u') w_p(v) w_q(v') dv du \right] \quad (\text{B.5})$$

En effectuant le changement de variable : $\begin{cases} \tilde{u} = -u \\ \tilde{v} = u + v \end{cases}$ dans l'intégrale $\int_{-2}^0 \int_{-u}^2 dudv$ et en utilisant le fait que

$G(-u, u') = G(u, u')$ on peut réécrire Z_{mnpq} sous la forme :

$$Z_{mnpq} = j\rho_0\omega \frac{a^2b^2}{16} \int_{u'} \int_{v'} \int_0^2 \left[\int_0^{2-u} \phi_p(u, v)\phi_m(v)dv + \int_0^{2-u} \phi_m(u, v)\phi_p(v)dv \right] G(u, u')\phi_n(u', v')\phi_q(v')du du' dv' \quad (\text{B.6})$$

On peut calculer analytiquement les intégrales sur v :

$$F_{mp}^A(u) = \int_0^{2-u} \phi_m(u, v)\phi_p(v)dv = \int_0^{2-u} \sin\left(\frac{m\pi}{2}(u+v)\right)\sin\left(\frac{p\pi v}{2}\right)dv \quad (\text{B.7})$$

$$F_{pm}^A(u) = \int_0^{2-u} \phi_p(u, v)\phi_m(v)dv = \int_0^{2-u} \sin\left(\frac{p\pi}{2}(u+v)\right)\sin\left(\frac{m\pi v}{2}\right)dv$$

En effectuant le même type d'opérations sur les variable u' et v' et en remarquant que :

$$F_{mp}^A(u) = F_{pm}^A(u) \text{ et si } m+p \text{ pair} \quad (\text{B.8})$$

$$F_{mp}^A(u) = -F_{pm}^A(u) \text{ et si } m+p \text{ impair} \quad (\text{B.9})$$

on obtient l'expression suivante pour Z_{mnpq} :

$$\begin{cases} Z_{mnpq} = j\rho_0\omega \frac{a^2b^2}{4} \int_0^2 \int_0^2 F_{mp}^A(u)F_{nq}^A(u')G(u, u')dudu' & \text{si } m+p \text{ et } n+q \text{ pair} \\ Z_{mnpq} = 0 & \text{si } m+p \text{ ou } n+q \text{ impair} \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

$$\text{avec } G(u, u') = \frac{e^{-jk_0R}}{2\pi R}, \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2u^2 + b^2(u')^2} \text{ et}$$

$$F_{mp}^A(u) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{m-p} \cos\left(\frac{(m-p)}{2}\pi + \frac{(m+p)}{4}\pi u\right) \sin\left(\frac{(m-p)}{2}\pi - \frac{(m-p)}{4}\pi u\right) - \frac{1}{m+p} \cos\left(\frac{(m+p)}{2}\pi + \frac{(m-p)}{4}\pi u\right) \sin\left(\frac{(m+p)}{2}\pi - \frac{(m+p)}{4}\pi u\right) \right] \quad (\text{B.11})$$

Si $m = p$:

$$F_{mp}^A(u) = \left(1 - \frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{m}{2}\pi u\right) + \frac{1}{\pi m} \sin\left(\frac{m}{2}\pi u\right), \quad (\text{B.12})$$

Le cas $m + p = 0$ est impossible car m et p sont des entiers supérieurs à 1.

On va calculer les deux intégrales de l'équation C.11 par une méthode numérique (quadrature de Gauss), ce qui donne :

$$Z_{mnpq} = j\omega\rho_0 \frac{a^2 b^2}{4} \sum_{i=0}^{N_g} \sum_{j=0}^{N_g} p_i p_j F_{mp}^A(u_i) F_{nq}^A(u'_j) G(u_i, u'_j) \quad \forall (u_i, u'_j) \in]0, 2[\quad (\text{B.13})$$

où p_i et p_j sont les poids de Gauss associées respectivement au point u_i et u'_j . N_g est le nombre de point de Gauss pour l'intégration. Étant donné que zéro ne fait pas parti du domaine, le problème de la singularité de la fonction de Green quand u et u' sont égaux à zéro est automatiquement évité.

Annexe C Calcul de la matrice H_{mnpq} pour un matériau de masquage

Dans cette annexe on calcule les termes de la matrice H_{mnpq} , telle que défini dans la formulation théorique d'une plaque couverte par un matériau de masquage, à l'équation 4.15. On note :

$$H_{mnpq} = \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b w_m(x) w_n(y) G(x, y, x_0, y_0) \Psi_p^*(x_0) \Psi_q^*(y_0) dx dy dx_0 dy_0, \quad (\text{C.1})$$

où $w_m(x) = \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right)$, $w_n(y) = \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right)$, $\Psi_p^*(x_0) = e^{-j2\pi\left(\frac{px_0}{a}\right)}$ et $\Psi_q^*(y_0) = e^{-j2\pi\left(\frac{qy_0}{b}\right)}$,

$$G = \frac{e^{-jk_0 R}}{2\pi R} \text{ et } R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

On effectue d'abord un premier changement de variable pour adimensionnaliser les intégrales :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{x}{a} \\ \beta = \frac{y}{b} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \alpha_0 = \frac{x_0}{a} \\ \beta_0 = \frac{y_0}{b} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Puis on effectue ensuite un deuxième changement de variable afin de pouvoir calculer deux des quatre intégrales de manière analytique, on pose :

$$\begin{cases} u = \alpha - \alpha_0 \\ v = \alpha_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u' = \beta - \beta_0 \\ v' = \beta_0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Le Jacobien de ce changement de variable est égal à 1, la Figure C.1 présente le domaine d'intégration avant et après cette transformation.

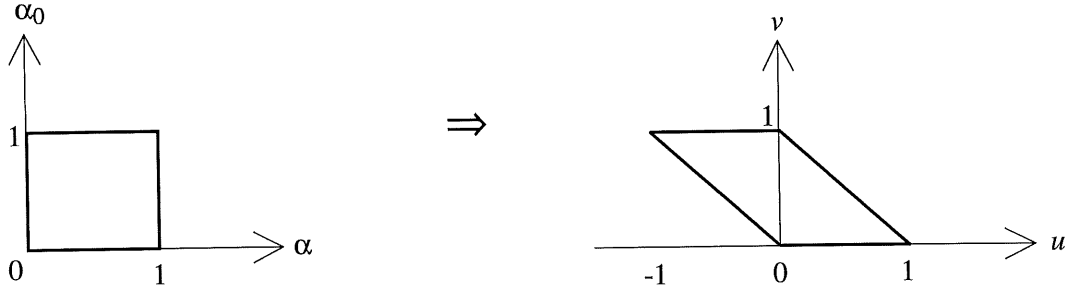


Figure C.1 : Domaine d'intégration avant et après la transformation C.3.

On va d'abord effectuer les intégrations sur u et v , celles sur u' , v' seront similaires. En tenant compte des changements de variables précédents, H_{mnpq} , s'écrit :

$$H_{mnpq} = a^2 b^2 \int \int_{u' v'} \left[\int_{-1}^0 \int_{-u}^1 w_m(u, v) w_n(u', v') G(u, u') \Psi_p^*(v) \Psi_q^*(v') dv du \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^{1-u} w_m(u, v) w_n(u', v') G(u, u') \Psi_p^*(v) \Psi_q^*(v') dv du \right] du' dv' \quad (\text{C.4})$$

En effectuant le changement de variable : $u = -\tilde{u}$ dans l'intégrale $\int_{-1}^0 du$, on obtient :

$$H_{mnpq} = a^2 b^2 \int \int_{u' v'} \int_0^1 \left(\int_{-u}^1 w_m(-u, v) \Psi_p^*(v) dv + \int_0^{1-u} w_m(u, v) \Psi_p^*(v) dv \right) G(u, u') w_n(u', v') \Psi_q^*(v') du du' dv' \quad (\text{C.5})$$

On peut l'écrire de cette façon car $G(-u, u') = G(u, u')$. On peut effectuer de manière analytique les intégrales sur v :

$$\left\{ \begin{aligned} F_{mp}^B(u) &= \int_{-u}^1 w_m(-u, v) \psi_p^*(v) dv + \int_0^{1-u} w_m(u, v) \psi_p^*(v) dv \\ &= \int_{-u}^1 \sin(\pi m(u+v)) e^{-j2\pi p v} dv + \int_0^{1-u} \sin(\pi m(u+v)) e^{-j2\pi p v} dv \end{aligned} \right. \quad (\text{C.6})$$

Dans le cas où $m \neq 2p$ et si m pair on a :

$$F_{mp}^B(u) = \frac{2j}{\pi(m^2 - 4p^2)} [2p \sin(\pi m u) - m \sin(2\pi p u)], \quad (\text{C.7})$$

si $m \neq 2p$ et si m impair :

$$F_{mp}^B(u) = \frac{2m}{\pi(m^2 - 4p^2)} [\cos(2\pi p u) + \cos(\pi m u)], \quad (\text{C.8})$$

si $m = 2p$:

$$F_{mp}^B(u) = j(u-1) \cos(\pi m u) - \frac{j}{\pi(m+2p)} [\sin(\pi m u) + \sin(2\pi p u)], \quad (\text{C.9})$$

et enfin, si $m = -2p$:

$$F_{mp}^B(u) = j(1-u) \cos(\pi m u) + \frac{j}{\pi(2p-m)} [\sin(2\pi p u) - \sin(\pi m u)]. \quad (\text{C.10})$$

En remarquant la symétrie de H_{mnpq} par rapport aux variables u, v d'une part, et u', v' d'autre part, on peut effectuer exactement le même type de calcul sur u', v' , ce qui permet d'écrire H_{mnpq} sous la forme :

$$H_{mnpq} = a^2 b^2 \int_0^1 \int_0^1 F_{mp}^B(u) F_{nq}^B(u') G(u, u') du du', \quad (\text{C.11})$$

avec $G(u, u') = \frac{e^{-jk_0 R}}{2\pi R}$ et $R = \sqrt{a^2 u^2 + b^2 (u')^2}$.

On va calculer les deux intégrales de l'équation C.11 par une méthode numérique (quadrature de Gauss), ce qui donne :

$$H_{mnpq} = a^2 b^2 \sum_{i=0}^{N_g} \sum_{j=0}^{N_g} p_i p_j F_{mp}^B(u_i) F_{nq}^B(u'_j) G(u_i, u'_j) \quad \forall (u_i, u'_j) \in]0,1[\quad (\text{C.12})$$

où p_i et p_j sont les poids de Gauss associées respectivement au point u_i et u'_j . N_g est le nombre de point de Gauss pour l'intégration. Étant donné que zéro ne fait pas parti du domaine, le problème de la singularité de la fonction de Green quand u et u' sont égaux à zéro est automatiquement évité.

Annexe D Calcul de la matrice L_{mnpq} et des impédances de rayonnement pour la méthode hybride

Dans cette annexe, on calcule les termes de la matrice L_{mnpq} , défini à l'équation 4.15, et les impédances de rayonnement d'une plaque bafflée Z_{mnpq}^H , défini à l'équation 5.8 dans le cas de la méthode hybride. Ces deux termes sont identiques au coefficient $j\rho_0\omega$ près, on a :

$$L_{mnpq} = \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b \psi_m(x)\psi_n(y)G(x, y, x_0, y_0)\psi_p^*(x_0)\psi_q^*(y_0)dx dy dx_0 dy_0, \quad (\text{D.1})$$

et

$$Z_{mnpq}^H = j\rho_0\omega \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b \psi_m(x)\psi_n(y)G(x, y, x_0, y_0)\psi_p^*(x_0)\psi_q^*(y_0)dx dy dx_0 dy_0, \quad (\text{D.2})$$

avec $\psi_m(x) = e^{j2\pi\left(\frac{mx}{a}\right)}$, $\psi_n(y) = e^{j2\pi\left(\frac{ny}{b}\right)}$, $\psi_p^*(x_0) = e^{-j2\pi\left(\frac{px_0}{a}\right)}$ et $\psi_q^*(y_0) = e^{-j2\pi\left(\frac{ny_0}{b}\right)}$,

$$G = \frac{e^{-jk_0R}}{2\pi R} \text{ et } R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

On va développer tous les calculs pour la matrice L_{mnpq} , et on notera à la fin de l'annexe la différence entre L_{mnpq} et Z_{mnpq}^H .

On effectue d'abord un premier changement de variable pour adimensionnaliser les intégrales :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{x}{a} \\ \beta = \frac{y}{b} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha_0 = \frac{x_0}{a} \\ \beta_0 = \frac{y_0}{b} \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Puis on effectue ensuite un deuxième changement de variable afin de pouvoir calculer deux des quatre intégrales de manière analytique, on pose :

$$\begin{cases} u = \alpha - \alpha_0 \\ v = \alpha_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u' = \beta - \beta_0 \\ v' = \beta_0 \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

Le Jacobien de ce changement de variable est égal à 1, la Figure D.1 présente le domaine d'intégration avant et après cette transformation.

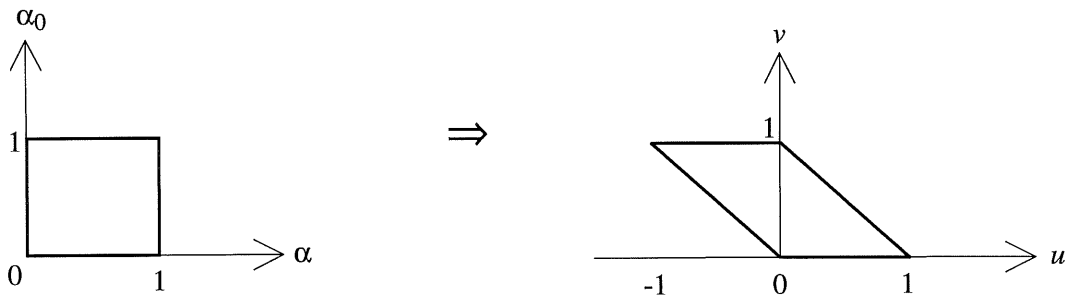


Figure D.1 : Domaine d'intégration avant et après la transformation D.4.

On va d'abord effectuer les intégrations sur u et v , celles sur u' , v' seront similaires. En tenant compte des changements de variables précédents, L_{mnpq} s'écrit :

$$L_{mnpq} = a^2 b^2 \int \int_{u' \ v'} \left[\int_{-1}^0 \int_{-u}^1 \Psi_m(u, v) \Psi_n(u', v') G(u, u') \Psi_p^*(v) \Psi_q^*(v') dv du \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^{1-u} \Psi_m(u, v) \Psi_n(u', v') G(u, u') \Psi_p^*(v) \Psi_q^*(v') dv du \right] du' dv' \quad (\text{D.5})$$

En effectuant le changement de variable : $u = -\tilde{u}$ dans l'intégrale $\int_{-1}^0 du$, on obtient :

$$L_{mnpq} = a^2 b^2 \int_{u'} \int_{v'} \int_0^1 \left(\int_{-u}^1 \Psi_m(-u, v) \Psi_p^*(v) dv + \int_0^{1-u} \Psi_m(u, v) \Psi_p^*(v) dv \right) G(u, u') \Psi_n(u', v') \Psi_q^*(v') du' du dv' \quad (D.6)$$

On peut l'écrire de cette façon car $G(-u, u') = G(u, u')$.

On peut effectuer de manière analytique les intégrales sur v :

$$\left\{ \begin{aligned} F_{mp}^C(u) &= \int_{-u}^1 \Psi_m(-u, v) \Psi_p^*(v) dv + \int_0^{1-u} \Psi_m(u, v) \Psi_p^*(v) dv \\ &= \int_{-u}^1 e^{j2\pi m(u+v)} e^{-j2\pi p v} dv + \int_0^{1-u} e^{j2\pi m(u+v)} e^{-j2\pi p v} dv \end{aligned} \right. \quad (D.7)$$

Dans le cas où $m \neq p$ on a :

$$F_{mp}^C(u) = -\frac{2}{\pi(m-p)} \cos(\pi(m+p)u) \sin(\pi(m-p)u), \quad (D.8)$$

et si $m = p$:

$$F_{mp}^C(u) = 2(1-u) \cos(2\pi m u). \quad (D.9)$$

La fonction $F_{mp}^C(u)$ admet la relation de symétrie suivante :

$$F_{mp}^C(u) = F_{pm}^C(u). \quad (D.10)$$

En remarquant la symétrie de L_{mnpq} par rapport aux variables u, v d'une part, et u', v' d'autre part, on peut effectuer exactement le même type de calcul sur u', v' , ce qui permet d'écrire L_{mnpq} sous la forme :

$$L_{mnpq} = a^2 b^2 \int_0^1 \int_0^1 F_{mp}^C(u) F_{nq}^C(u') G(u, u') du du', \quad (D.11)$$

avec $G(u, u') = \frac{e^{-jk_0 R}}{2\pi R}$ et $R = \sqrt{a^2 u^2 + b^2 (u')^2}$.

La relation D.10 permet de trouver les relations de symétrie suivantes pour L_{mnpq} :

$$L_{mnpq} = L_{pnmq} = L_{mqpn} = L_{pqmn}. \quad (\text{D.12})$$

On va calculer les deux intégrales de l'équation D.11 par une méthode numérique (quadrature de Gauss), ce qui donne :

$$L_{mnpq} = a^2 b^2 \sum_{i=0}^{N_g} \sum_{j=0}^{N_g} p_i p_j F_{mp}^C(u_i) F_{nq}^C(u'_j) G(u_i, u'_j) \quad \forall (u_i, u'_j) \in]0,1[\quad (\text{D.13})$$

où p_i et p_j sont les poids de Gauss associées respectivement au point u_i et u'_j . N_g est le nombre de point de Gauss pour l'intégration. Étant donné que zéro ne fait pas parti du domaine, le problème de la singularité de la fonction de Green quand u et u' sont égaux à zéro est automatiquement évité.

Pour la matrice Z_{mnpq}^H , étant donné qu'on a besoin uniquement de la partie réelle de la matrice, on trouve :

$$Z_{mnpq}^H = \rho_0 \omega a^2 b^2 \sum_{i=0}^{N_g} \sum_{j=0}^{N_g} p_i p_j F_{mp}^C(u_i) F_{nq}^C(u'_j) G_r(u_i, u'_j), \quad \forall (u_i, u'_j) \in]0,1[, \quad (\text{D.14})$$

avec $G_r(u, u') = \frac{\sin(k_0 R)}{2\pi R}$.

Annexe E Calcul de la matrice A pour la plaque non-bafflée

Dans cette annexe on calcule les termes de la matrice A utilisées pour le rayonnement acoustique d'une plaque non-bafflée. On va utiliser une méthode similaire à celle déjà présentée à l'Annexe B. La matrice A est définie de la manière suivantes :

$$[A] = [K^A] - \omega^2 [M^A], \quad (\text{E.1})$$

avec

$$M_{mnpq}^A = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b \phi_m(x) \phi_n(y) G(x, y, x_0, y_0) \phi_p(x_0) \phi_q(y_0) dx dy dx_0 dy_0, \quad (\text{E.2})$$

et

$$K_{mnpq}^A = \frac{1}{\rho_0} \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial \phi_m(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_p(x_0)}{\partial x_0} \phi_n(y) \phi_q(y_0) + \frac{\partial \phi_n(y)}{\partial y} \frac{\partial \phi_q(y_0)}{\partial y_0} \phi_m(x) \phi_p(x_0) \right] G(x, y, x_0, y_0) dx dy dx_0 dy_0 \quad (\text{E.3})$$

Dans ce cas on utilise la fonction de Green en espace infini : $G = \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R}$ avec

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Les fonctions de base sont données par : $\phi_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$ et $\phi_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$.

Le terme M_{mpq}^A est exactement identique à celui déjà calculé pour les impédances de rayonnement d'une plaque bafflée, simplement appuyée (Annexe B), excepté pour le coefficient qui était $j\rho_0\omega$ et qui devient $1/\rho_0c_0^2$ et pour la fonction de Green qui est maintenant $G = e^{-jk_0R}/4\pi R$ au lieu de $G = e^{-jk_0R}/2\pi R$ dans l'Annexe B.

Pour calculer le terme K_{mpq}^A on procède de la même manière que pour Z_{mpq} à l'Annexe B. On effectue d'abord un premier changement de variable pour adimensionnaliser les intégrales :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2x}{a} \\ \beta = \frac{2y}{b} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha_0 = \frac{2x_0}{a} \\ \beta_0 = \frac{2y_0}{b} \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} K_{mpq}^A = \frac{\pi^2}{16\rho_0} \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 & \left[mpa^2 \cos\left(\frac{m\pi\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{p\pi\alpha_0}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{q\pi\beta_0}{2}\right) \right. \\ & \left. + nqb^2 \cos\left(\frac{m\pi\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{p\pi\alpha_0}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{q\pi\beta_0}{2}\right) \right] G(\alpha, \beta, \alpha_0, \beta_0) d\alpha d\beta d\alpha_0 d\beta_0 \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Puis on effectue ensuite un deuxième changement de variable afin de pouvoir calculer deux des quatre intégrales de manière analytique, on pose :

$$\begin{cases} u = \alpha - \alpha_0 \\ v = \alpha_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u' = \beta - \beta_0 \\ v' = \beta_0 \end{cases} \quad (\text{E.6})$$

Le Jacobien de ce changement de variable est égal à 1.

En utilisant des considérations identiques à celles de l'Annexe B on trouve :

$$\begin{cases} K_{mpq}^A = \frac{\pi^2}{4\rho_0} \int_0^2 \int_0^2 \left[b^2 mp G_{mp}^A(u) F_{nq}^A(u') + a^2 nq F_{mp}^A(u) G_{nq}^A(u') \right] G(u, u') dud u' & \text{si } m+p \text{ et } n+q \text{ pair} \\ K_{mpq}^A = 0 & \text{si } m+p \text{ ou } n+q \text{ impair} \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

De la même manière on a :

$$\begin{cases} M_{mnpq}^A = \frac{a^2 b^2}{4\rho_0 c_0} \int_0^2 \int_0^2 F_{mp}^A(u) F_{nq}^A(u') G(u, u') du du' & \text{si } m+p \text{ et } n+q \text{ pair} \\ M_{mnpq}^A = 0 & \text{si } m+p \text{ ou } n+q \text{ impair} \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

avec $G(u, u') = \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R}$ et $R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 u^2 + b^2 (u')^2}$.

Les fonctions $F_{mp}^A(u)$ et $G_{mp}^A(u)$ sont définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} F_{mp}^A(u) = \int_0^{2-u} \sin\left(\frac{m\pi}{2}(u+v)\right) \sin\left(\frac{p\pi v}{2}\right) dv \\ G_{mp}^A(u) = \int_0^{2-u} \cos\left(\frac{m\pi}{2}(u+v)\right) \cos\left(\frac{p\pi v}{2}\right) dv \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

Elles peuvent être calculées de manière analytique. Si $m \neq p$, on obtient :

$$F_{mp}^A(u) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{m-p} \cos\left(\frac{(m-p)}{2}\pi + \frac{(m+p)}{4}\pi u\right) \sin\left(\frac{(m-p)}{2}\pi - \frac{(m-p)}{4}\pi u\right) - \frac{1}{m+p} \cos\left(\frac{(m+p)}{2}\pi + \frac{(m-p)}{4}\pi u\right) \sin\left(\frac{(m+p)}{2}\pi - \frac{(m+p)}{4}\pi u\right) \right] \quad (\text{E.10})$$

$$G_{mp}^A(u) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{m-p} \cos\left(\frac{(m-p)}{2}\pi + \frac{(m+p)}{4}\pi u\right) \sin\left(\frac{(m-p)}{2}\pi - \frac{(m-p)}{4}\pi u\right) + \frac{1}{m+p} \cos\left(\frac{(m+p)}{2}\pi + \frac{(m-p)}{4}\pi u\right) \sin\left(\frac{(m+p)}{2}\pi - \frac{(m+p)}{4}\pi u\right) \right] \quad (\text{E.11})$$

et si $m = p$:

$$F_{mp}^A(u) = \left(1 - \frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{m}{2}\pi u\right) + \frac{1}{\pi m} \sin\left(\frac{m}{2}\pi u\right), \quad (\text{E.12})$$

$$G_{mp}^A(u) = \left(1 - \frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{m}{2} \pi u\right) - \frac{1}{\pi m} \sin\left(\frac{m}{2} \pi u\right). \quad (\text{E.13})$$

Le cas $m + p = 0$ est impossible car m et p sont des entiers supérieurs à 1. Les fonctions $F_{mp}^A(u)$ et $G_{mp}^A(u)$ admettent les relations de symétrie suivantes :

$$F_{mp}^A(u) = F_{pm}^A(u) \text{ et } G_{mp}^A(u) = G_{pm}^A(u) \text{ si } m + p \text{ pair} \quad (\text{E.14})$$

$$F_{mp}^A(u) = -F_{pm}^A(u) \text{ et } G_{mp}^A(u) = -G_{pm}^A(u) \text{ si } m + p \text{ impair} \quad (\text{E.15})$$

La résolution numérique et le problème de singularité de la fonction de Green quand $R = 0$ sont traités de la même manière qu'à l'Annexe B.

Annexe F Maillage irrégulier d'une plaque

Dans cette annexe sont données les coordonnées des points de mesure pour une plaque de 0.48 m par 0.42 m dans le cas d'un maillage irrégulier de 9×9 points utilisé par la méthode hybride. La Figure F.1 montre le système de coordonnées utilisé.

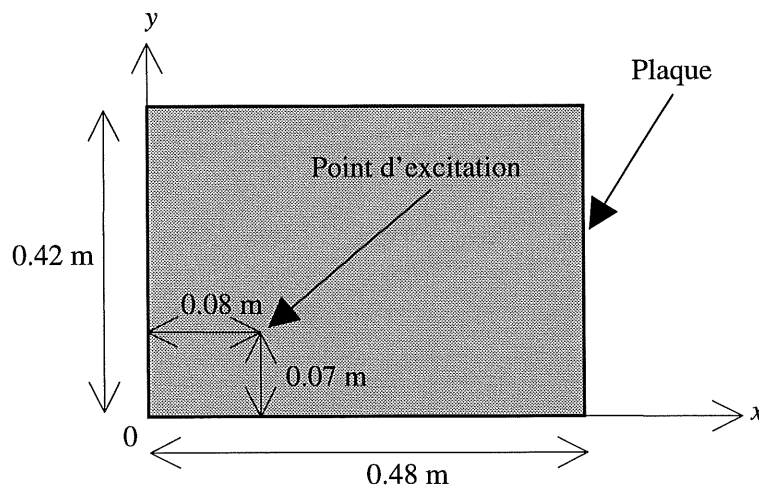


Figure F.1 : Système de coordonnées utilisé pour le maillage de la plaque.

Dans les valeurs ci-dessous, la première colonne est le numéro du point de mesure, la deuxième colonne est la coordonnée du point suivant x et la troisième colonne est la coordonnée du point suivant y .

No du point	x (m)	y (m)	No du point	x (m)	y (m)
1	0.043636364	0.038181818	43	0.330909091	0.201515152
2	0.088484848	0.038181818	44	0.383030303	0.201515152
3	0.134545455	0.038181818	45	0.436363636	0.201515152
4	0.181818182	0.038181818	46	0.043636364	0.245
5	0.23030303	0.038181818	47	0.088484848	0.245
6	0.28	0.038181818	48	0.134545455	0.245
7	0.330909091	0.038181818	49	0.181818182	0.245
8	0.383030303	0.038181818	50	0.23030303	0.245
9	0.436363636	0.038181818	51	0.28	0.245
10	0.043636364	0.077424242	52	0.330909091	0.245
11	0.088484848	0.077424242	53	0.383030303	0.245
12	0.134545455	0.077424242	54	0.436363636	0.245
13	0.181818182	0.077424242	55	0.043636364	0.289545455
14	0.23030303	0.077424242	56	0.088484848	0.289545455
15	0.28	0.077424242	57	0.134545455	0.289545455
16	0.330909091	0.077424242	58	0.181818182	0.289545455
17	0.383030303	0.077424242	59	0.23030303	0.289545455
18	0.436363636	0.077424242	60	0.28	0.289545455
19	0.043636364	0.117727273	61	0.330909091	0.289545455
20	0.088484848	0.117727273	62	0.383030303	0.289545455
21	0.134545455	0.117727273	63	0.436363636	0.289545455
22	0.181818182	0.117727273	64	0.043636364	0.335151515
23	0.23030303	0.117727273	65	0.088484848	0.335151515
24	0.28	0.117727273	66	0.134545455	0.335151515
25	0.330909091	0.117727273	67	0.181818182	0.335151515
26	0.383030303	0.117727273	68	0.23030303	0.335151515
27	0.436363636	0.117727273	69	0.28	0.335151515
28	0.043636364	0.159090909	70	0.330909091	0.335151515
29	0.088484848	0.159090909	71	0.383030303	0.335151515
30	0.134545455	0.159090909	72	0.436363636	0.335151515
31	0.181818182	0.159090909	73	0.043636364	0.381818182
32	0.23030303	0.159090909	74	0.088484848	0.381818182
33	0.28	0.159090909	75	0.134545455	0.381818182
34	0.330909091	0.159090909	76	0.181818182	0.381818182
35	0.383030303	0.159090909	77	0.23030303	0.381818182
36	0.436363636	0.159090909	78	0.28	0.381818182
37	0.043636364	0.201515152	79	0.330909091	0.381818182
38	0.088484848	0.201515152	80	0.383030303	0.381818182
39	0.134545455	0.201515152	81	0.436363636	0.381818182
40	0.181818182	0.201515152			
41	0.23030303	0.201515152			
42	0.28	0.201515152			

Bibliographie

- 3M, Noise and Vibration Control System, 3M center Bldg. 220-8E-04, St. Paul, MN 55144-1000, USA.
- Alberts, T. E., Xia, H., Chen, Y., 1992, *Dynamic analysis to evaluate viscoelastic passive damping augmentation for space shuttle remote manipulator system*, ASME Journal of Dynamic System, Measurement and Control, vol. 114, pp. 468-475.
- Atalla, N., Nicolas, J., 1994, *A new tool for predicting rapidly and rigorously the radiation efficiency of plate-like structure*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 95, No. 6, pp. 3369-3378.
- Atalla, N., Bernhard, R. J., 1994, *Review of numerical solutions for low frequency structural-acoustic problem*, Applied Acoustics, vol. 43, No. 3, pp. 271-295.
- Audoly, C., Giangréco, C., 1991, *Global Characterization of multilayered panels for underwater applications*, Journal of Wave-Material Interaction, vols. 5 & 6, No. 1, pp. 55-77.
- Bardell, N. S., 1989, *The application of symbolic computing to the hierarchical finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 28, pp. 1181-1204.
- Batoz, J. L., Dhatt, G., 1992, **Modélisation des structures par éléments finis**, volumes 1 et 2, Edition les Presses de l'Université Laval.
- Beranek L. L., 1988, **Noise and vibration control**, Leo L. Beranek Ed., revised edition.
- Berry, A., 1990, *A general formulation for the sound radiation from rectangular, baffled plates with arbitrary boundary conditions*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 88, No. 6, pp. 2792-2802.
- Berry, A., Guyader, J. L., Nicolas, J., 1991, *Vibrations et rayonnement acoustique de structures planes complexes immergées dans un fluide léger ou dans un fluide lourd*, Ph. D., Université de Sherbrooke.
- Berry, A., 1994, *A new formulation for sound radiation of fluid loaded plates*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 96, No. 2, pp. 889-901.
- Beslin, O., Nicolas, J., 1997, *A trigonometric functions set for very high-order plate bending modes with any boundary conditions*, J. Sound Vib., vol. 202, pp. 633-655.

- Bessard, G., *et al*, mai 1994, *Modélisation d'un tube à onde progressive pour la caractérisation de matériaux acoustiques de masquage*, Journal de Physique, Colloque C5, supplément au Journal de Physique III, volume 4.
- Chen, Y. H., Sheu, J. T., 1994, *Dynamic characteristics of layered beam with flexible core*, Transaction of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, vol. 116, pp. 350-356.
- Chen, Y. H., Sheu, J. T., 1993, *Axially-loaded damped Timoshenko beam on viscoelastic foudation*, Int. Jour. Num. Method Eng., vol. 36, pp. 1013-1027.
- Chow, T. S., 1971, *On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load*, J. Composite materials, vol. 5, pp. 306-319.
- Cook, R. D., 1972, *Two hybrid elements for analysis of thick, thin and sandwich plates*, Int. Jour. Num. Method Eng., vol. 5, pp. 227-288.
- Corsaro, R. D., Sperling, L. H., 1990, **Sound and vibration damping with polymers**, the American Chemical Society.
- Cournoyer, B., Atalla, N., 17-21 October 1994, *The free and forced response of a clamped multilayers annular plate*, Semaine Canadienne d'Acoustique, Ottawa.
- Cournoyer, B., 1995, *Modélisation analytique et numérique de plaques multicouches ; Application aux traitement viscoélastique des disques encastrés-libres*, Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke.
- Crigthon, D. G., 1979, *Aspects of the reflexion and free wave properties of a composite panel under fluid loading*, J. Sound Vib., vol. 64, No. 4, pp 467-474.
- Crigthon, D. G., 1989, *The 1988 Rayleigh medal lecture : fluid loading - The interaction between sound and vibration*, J. Sound Vib, vol. 133, No. 1, pp. 1-27.
- Darby, R., 1976, **Viscoelastic fluids**, Chemical Processing and Engineering ed.
- Davies, H. G., 1971, *Low frequency random excitation of water-loaded rectangular plates*, J. Sound Vib., vol. 18, No. 1, pp. 107-126.
- De Luca, R., 1998, *Étude du comportement vibro-acoustique d'un caisson en basses, moyennes et hautes fréquences*, Rapport de fin d'étude, Université de Sherbrooke.
- Di Sciuva, M., 1985, *Development of an anisotropic, multilayered, shear-deformable rectangular plate element*, Computers and Structures, vol. 21, No. 4, pp. 789-796.
- Di Taranto, R. A., 1965, *Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite-length beams*, J. Appl. Mech. vol. 32, pp. 881-886.
- Fahy, F., 1985, **Sound and structural vibrations**, Academic press.
- Fahy, F., 1995, **Sound intensity**, E & FN Spon, London.

- Fahnlne, J. B., Koopman, G. H., 1996, *A lumped parameter model for the acoustic power output from a vibrating structure*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 100, No. 6, pp. 3539-3547.
- Foin, O., 1994, *Manuel théorique d'ADNR*, Rapport interne, Université de Sherbrooke.
- Foin, O. 1995, *Poutre multicouche avec couverture partielle*, Rapport interne, Université de Sherbrooke.
- Foin, O., Atalla, N., Nicolas, J., 1999, *An efficient tool for predicting the structural acoustic and vibration response of sandwich plates in light or heavy fluid*, Applied Acoustics, No. 57, pp. 213-242.
- Garrison, M. R., Miles, R. N., Sun, J. Q., Bao, W., march 4-6 1992, *Effect of partial coverage on the effectiveness of a constrained layer damper on a plate*, Second international congress on recent developements in air- and structure-borne sound and vibration, Auburn University, USA.
- Garrison, M. R., Miles, R. N., Sun, J. Q., Bao, W., 1994, *Random response of a plate partially covered by a constrained layer damper*, J. Sound Vib., vol. 172, No. 2, pp. 231-245.
- Giangréco, C., 1990, *Caractérisation de matériaux utilisés en acoustique sous-marine à l'aide de la mesure en cuve des coefficients de réflexion et de transmission de panneaux de dimensions finies*, Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- Ginsberg, J. H., McDaniel, J. G., 1991, *An acoustic variational principle and component modes synthesis applied to the analysis of acoustic radiation from concentrically stiffened plate*, Transaction of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, vol. 113, pp. 401-408.
- Ginsberg, J. H., Cunefare, K., Pham, H., 1995, *A spectral description of inertial effects in fluid-loaded plates*, Transaction of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, vol. 117, pp. 206-212.
- Guertin, L., 1998, *Modélisation par éléments finis de plaques multicouches aux propriétés élastiques, viscoélastiques et piézoélectriques*, Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke.
- Guyader, J. L., 1977, *Transparence acoustique de plaques multicouches orthotropes, viscoélastiques finies*, Thèse de doctorat, I.N.S.A.-Lyon, France.
- Hamdi, M. A., 1982, *Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains*, Ph. D., Université Technologique de Compiègne.
- Hamm, C. A., 1996, *Evaluation of noise reduction coatings : experimental design*, DREA report CR/96/417.
- Hartman, B., Lee, J. D., Lee, J. D., 1994, *Loss factor height and width limits for polymer relaxation*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 95, No. 1, pp. 226-233.
- House, J. R. C., 1991, *Considerations for underwater decoupling treatment*, Proc. I.O.A., vol. 13, part. 3, pp. 166-173.

- Jardin, E., 1997, *Détermination des coefficients de masquage et d'anoïsoïsme des matériaux acoustiques à partir de mesure en cuve en incidence oblique*. Thèse de doctorat, Université du Maine, France.
- Jarzinsky, J., 1990, *Mechanism of Sound attenuation in materials*, chapitre 10 dans **Sound and vibration damping with polymers**, Corsaro, R. D., Sperling, L. H., the American Chemical Society.
- Jha, V., Tremblay, P., octobre 1993, *Application of passive damping material to reduce acoustically induced vibration in Radarsat*, 44th congress of the International Astronautical Federation, IAF-93-I.2.214.
- Johson, C. D., Kienholz, D. A., 1982, *Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers*, vol. 20, No. 9, pp. 1284-1290.
- Johson, C. D., Kienholz, D. A., Austin, E. M., Schneider, M. E., septembre 1985, *Design analysis of damped structures using finite element techniques*, proceedings of the ASME Design Engineering Division Conference and Exhibit on Mechanical Vibration and Noise, Cincinnati, Ohio, 85-DT-131.
- Jones, R. M., 1975, **Mechanics of composite materials**, McGraw-Hill.
- Kaffel, H., 1996, *Étude expérimentale du comportement vibratoire des structures rivetées*, Mémoire de maîtrise., Université de Sherbrooke.
- Keltie, R. F., 1998, *Signal response of elastically coated plates*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 103, No. 4, pp. 1855-1863.
- Kerwin, E. D., 1959, *Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer*, J. Acoust. Soc. Am. vol. 31, No. 7, pp. 952-962.
- Ko, S. H., 1997, *Reduction of structure-borne noise using an air-voided elastomer*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 101, No. 6, pp. 3306-3312.
- Lall, A. K., Asnani N. T., Nacra B. C., 1987, *Vibration and damping analysis of rectangular plate with partially covered constrained viscoelastic layer*, J. Vib., Acoust., Stress, and reliability in design, vol. 109, pp. 241-247.
- Laulagnet, B., 1989, *Rayonnement acoustique des coques cylindriques, finies raidies, revêtues d'un matériau de masquage*, Thèse de doctorat, INSA-Lyon, France.
- Laulagnet, B., Guyader, J. L., 1991, *Sound radiation from finite cylindrical shell covered with a compliant layer*, Transaction of the ASME, Journal of Vibrations and Acoustics, vol. 113, pp. 267-272.
- Laulagnet, B., Guyader, J. L., 1994, *Sound radiation from finite cylindrical coated shells, by means of asymptotic expansion of three-dimensional equations for coating*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 96, No. 1, pp. 277-286.

- Lesueur, C., 1988, **Rayonnement acoustique des structures**, Collection Département Etudes et Recherches EDF, Eyrolles.
- Liénard, P., Bockhoff, J. C., Pascal, J. C., Turrett, J., 1987, *L'intensimétrie acoustique*, Revue d'Acoustique No 80, pp. 3-20.
- Lovat, G., Loyau, T., Barby, J. L., 1996, *Calculation of the acoustic radiation of structure by using acceleration measurement and monopolar distribution*, Fourth international congress on sound and vibration, St-Petersbourg, Russie, 24-27 Juin, vol. 2, pp. 873-880, ed. Malcolm J. Crocker et Nicolay I. Ivanov.
- Maidanik, G., 1962, *Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 34, No.6, pp. 809-826.
- Maidanik, G., Reader W. T., 1968, *Filtering action of a blanket dome*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 44, No. 2, pp. 497-502.
- Maidanik, G., Tucker J., 1974, *Acoustic properties of coated panels immersed in fluid media*, J. Sound. Vib., vol. 34, No. 4, pp. 519-550.
- Maidanik, G., 1984, *Modification caused by compliant layers and blankets in the pressure field induced on a boundary*, Transaction of the ASME, Journal of Vibrations, Acoustics, Stress and Reliability in Design, vol. 106, pp. 369-375.
- Marcelin, J. L., Trompette, P., 1994, *Optimization location of plate damped parts by use of a genetic algorithm*, Shock and Vibration, vol. 1, No. 6, pp. 541-547.
- Marcelin, J. L., Trompette, P., Dornberger, R., 1995 (a), *Optimization of composite beam structures using a genetic algorithm*, Structural Optimization, vol. 9, pp. 236-244.
- Marcelin, J. L., Trompette, P., Dornberger, R., 1995 (b), *Optimal structural damping of skis using a genetic algorithm*, Structural Optimization, vol. 10, pp. 67-70.
- Mariem, J. B., 1984, *Étude du couplage élasto-acoustique par une méthode d'éléments finis de surface*, Ph. D., Université Technologique de Compiègne.
- Mariem, J. B., Hamdi, M.A., 1987, *A new boundary finite element method for fluid-structure interactions problems*, Int J. Num. Meth. Eng., vol. 24, pp. 1252-1267.
- Marcotte, P., 1998, *Amortissement vibratoire actif à l'aide de couches viscoélastiques et d'actionneurs piézocéramiques*, Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke.
- Mead D. J., Markus S., 1969, *The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary condition*, J. Sound. Vib. vol. 10, No. 2, pp. 163-175.
- Mercier, B., 1995, *Caractérisation expérimentale du comportement vibroacoustique de plaques en matériau composites en vue de l'insonorisation d'une motomarine*, Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke.
- Michalewicz, Z., 1994, **Genetic algorithms + data structures = evolution programs**, Springer-Verlag.

- Mindlin, R. D., 1951, *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*, J. Applied Mechanics, pp. 31-38.
- Morse, P. M., Ingard, K. U., 1968, **Theoretical acoustics**, McGraw-Hill, pp. 383-384.
- Müller, H. W., Langer, W., Richter, H.P., Storm, R., 1982, *Praxisreport mashinenakustik*, Technical report, Technische Hochschule Darmstadt.
- Nelisse, H., 1995, *Réponse dynamique d'un panneau soumis à un environnement acoustique réverbérant*, Ph. D., Université de Sherbrooke.
- Nelisse, H., Beslin, O., Nicolas, J., 1996, *Fluid-structure coupling for an unbaffled elastic panel immersed in a diffuse field*, J. Sound Vib., No. 198, vol. 4, pp. 485-506.
- Nelisse, H., Beslin, O., Nicolas, J., 1998, *A generalized approach for the acoustic radiation from a baffled or unbaffled plate with arbitrary boundary conditions, immersed in a light or heavy fluid*, J. Sound Vib., No. 211, vol. 2, pp. 207-225.
- Nicolas, J., Lemire, G., *Precision of active sound intensity measurement in a progressive and a nonprogressive field*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 78, No. 2, pp. 414-422.
- Noor, A. K., Burton, W. S., 1989, *Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates*, Appl. Mech. Rev., vol. 42, No. 1, pp. 1-13.
- Noor, A. K., 1992, *Mechanics of anisotropic plates and shells - a new look at an old subject*, Computers and Structures, vol. 44, No. 3, pp. 499-514.
- Pierce, A. D., 1981, **Acoustics, an introduction to its physical principles and applications**, McGraw-Hill.
- Pierce, A. D., 1987, *Stationary variational expressions for the radiated and scattered acoustic power and related quantities*, IEEE Jour. Oceanic Engineering., vol. OE-12, No 2, pp. 404-411.
- Press, W. H., *et al*, 1992, **Numerical Recipes in C**, Cambridge University Press.
- Pryor, C. W., Barker, R. M., 1971, *A finite-element analysis including transverse shear effects for applications to laminated plates*, AIAA Journal, vol. 9, No. 5, pp. 912-917.
- Ratle, A., Berry, A., 1998-1, *Use of genetic algorithms for vibroacoustic optimization of a plate carrying point-masses*, à paraître dans J. Acoust. Soc. Am.
- Ratle, A., 1998-2, *Accelerating the convergence of evolutionary algorithms by fitness landscape approximation*, Parallel Problem Solving from Nature, pp. 87-96, Ed. Agoston E. Eiben, Thomas Bäck, Marc Schonauer et Hans-Paul Schawefel.
- Ratle, A., Atalla, N., 1998-3, *Evolutionary optimization strategies for the combinatorial design of heterogeneous materials*, soumis à Journal of Evolutionary Optimization.
- Ruzicka, J. E., 1959, *Structural damping*, American Society of Mechanical Engineers, sec. III, p 49, Ross, Ungar, Kerwin, Damping of plate flexural vibration by means of viscoelastic laminae.

- Reddy, J. N., 1984, *A simple higher order theory for laminated composite plates*, J. Appl. Mech., vol. 51, pp. 745-752.
- Reddy, J. N., 1985, *A review of the literature on finite-element modeling of laminated composite plates*, Shock. Vib. Dig. vol. 17, No. 4, pp.3-8.
- Reddy, J. N., 1987, *A generalization of two-dimensional theory of laminated composite plates*, Comm. Appl. Num. Methods, vol. 16, pp. 173-180.
- Reddy, J. N., Barbero, E. J., Teply, J. L., 1989, *A plate bending element based on a general laminated plate theory*, Int. Jour. Num. Method Eng., vol. 28, pp. 2275-2292.
- Reddy, J. N., 1990, *A review of refined theories of laminated composite plates*, Shock and Vibration digest, vol. 22, No. 7, pp. 3-17.
- Reissner, E., 1945, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, J. Applied Mechanics, pp. A-69 to A-77.
- Reissner, E., Stavsky, Y., 1961, *Bending and stretching of certain types of heterogeneous aleotropic elastic plates*, Transaction of the ASME, J. Applied Mechanics, pp. 402-408.
- Sandman, B. E., 1975, *Motion of a three-layered elastic-viscoelastic plate under fluid loading*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 57, No. 5, pp. 1097-1107.
- Sandman, B. E., Boisvert, J. E., June 1995, *Simplified structural acoustic characterization of external compliant coatings on submerged surfaces*, NUWC Division Newport Technical Digest, pp. 65-71.
- Snowdon, J. C., 1979, *Vibration isolation :use and characterization*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 66, No. 5, pp. 1245-1274.
- Soulami, M. N., 1991, *Rayonnement acoustique pour une plaque rectangulaire simplement appuyée avec ou sans nervures*, Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke.
- Srinivas, R., 1973, *A refined analysis of composite laminates*, J. Sound Vib., vol. 30, No. 4, pp. 495-507.
- Sun, C. T., Whitney, J. M., 1973, *Theories for dynamic response of laminated plates*, AIAA Journal, pp. 178-183.
- Sylwan, O., 1987, *Shear and compression damping effects of constrained layered beams*, J. Sound Vib., vol. 118, No. 1, pp. 35-45.
- Szabo J. P., 1996, *Measurement of the acoustic behavior of decoupling materials in a water tank*, internal report.
- Ungar, E. E., 1962, *Loss factor of viscoelastically damped beam structures*, J. Acoust. Soc. Am., vol. 34, No. 8, pp. 1082-1089.
- Valor, C., 1995, *Validation des progiciels de calcul vibroacoustique SFM-SFA*, réalisé au CETIM.
- Ver, I. L., Holmer, C. I., 1988, in Noise and Vibration Control, Chapter 11, Ed L.L. Beranek.

- Whitney, J. M., 1973, *A higher order theory for extensional motion of laminated composites*, J. Sound Vib., vol. 30, No. 1, pp. 85-97.
- Whitney, J. M., 1973, *Shear correction factor for orthotropic laminates under static load*, J. Applied Mechanics, vol. 401, No. 1, pp. 402-404.
- Whitney, J. M., 1987, **Structural analysis of laminated anisotropic plates**, Technomic Publishing Company.
- Woodcock, R., 1993, *Modélisation de la transparence acoustique de structures simples et multicouches anisotropes de type composite avec conditions limites quelconques*, Ph. D., Université de Sherbrooke.
- Yang, P. C., Norris, C. H., Stavsky, Y., 1966, *Elastic wave propagation in heterogeneous plates*, Int. J. Solids Structures, vol. 2, pp. 665-684.
- Yiu, Y. C., 1993, *Finite element analysis of structures with classical viscoelastic materials*, AIAA-93-1551-CP.