

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Faculté des sciences appliquées

Département de génie mécanique

VIBRATIONS ET RAYONNEMENT ACOUSTIQUE DE STRUCTURES PLANES
COMPLEXES IMMERGÉES DANS UN FLUIDE LÉGER OU DANS UN FLUIDE
LOURD

Thèse de doctorat (Ph.D.)

Spécialité : génie mécanique

Alain BERRY

Sherbrooke (Québec), CANADA

Juin 1991

Pour Sylvie

Résumé

Ce travail traite des vibrations et du rayonnement acoustique de structures rectangulaires complexes immergées dans un fluide compressible et sollicitées par des forces mécaniques. L'effort principal a porté

- d'une part, sur la prise en compte rigoureuse, au sein d'un même modèle, de paramètres structuraux nouveaux tels que les conditions de fixation de la structure, l'adjonction multi-ponctuelle de masse ou de raideur, l'adjonction d'éléments mécaniques raidisseurs,
- d'autre part, sur les phénomènes de couplage entre de telles structures et un milieu semi-infini de fluide dense adjacent. Ces phénomènes permettent l'accès à des quantités telles que la charge fluide exercée sur la structure, et sur son rayonnement acoustique dans le fluide.

La première partie de l'étude restreint l'analyse au cas d'un fluide léger (essentiellement l'air); le cadre théorique est mis en œuvre sur la base d'une méthode variationnelle pour les vibrations *in-vacuo* de la structure, et le rayonnement acoustique est calculé à partir du profil des vitesses vibratoires *in-vacuo*. La théorie est utilisée pour étudier l'incidence des paramètres mécaniques de la structure sur le bruit rayonné dans l'air. Cette théorie, enfin, est validée au moyen de comparaisons avec des moyens de simulation purement numériques, et avec des mesures.

La seconde partie étend l'analyse au cas d'un milieu fluide lourd (essentiellement l'eau) et examine particulièrement le couplage fluide/structure. Une nouvelle approche est proposée pour le calcul de l'impédance de rayonnement dans le cas d'une plaque rectangulaire ayant des conditions aux limites arbitraires sur le contour. La théorie étendue est utilisée pour étudier l'effet des paramètres mécaniques de la structure sur le bruit rayonné dans l'eau.

A terme, le but poursuivi est de fournir au praticien un moyen de contrôler la réponse vibratoire et acoustique de structures planes complexes par le biais d'une *action pertinente et décisive sur la structure même*. Ce travail s'inscrit donc dans le cadre du contrôle du bruit à la source, voire de la discrétion acoustique *ab initio*, dès le stade de la conception.

Remerciements

Au terme de ce travail, je veux remercier le Pr. Jean Nicolas, mon directeur de thèse, pour la grande confiance et le soutien qu'il m'a accordés en me laissant mener très librement ces recherches, pour l'énergie et le dynamisme imperturbables dont il a témoigné en en valorisant les résultats.

J'associe à ces remerciements le Pr. Jean-Louis Guyader, du Laboratoire Vibrations-Acoustique de l'INSA de Lyon (France), qui a donné l'impulsion initiale et a maintenu un intérêt constant à ces travaux, et dont les très grandes qualités de scientifique n'éclipsent pourtant pas celles de l'homme.

Il est d'autres personnes dont la contribution ne saurait être passée sous silence:
André, pour son amitié sans faille,
mes parents, pour leurs sacrifices durant de nombreuses années,
Sylvie, pour sa présence de tous les jours. Cette thèse lui est dédiée.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 2 |
| 1.1 | Problématique technique | 3 |
| 1.2 | Problématique scientifique | 7 |
| 1.3 | Objectifs de l'étude | 10 |
| 1.4 | Structure du document | 12 |
| 2 | Etat des connaissances | 14 |
| 2.1 | Introduction | 14 |
| 2.2 | Règles pratiques de conception | 15 |
| 2.3 | Méthodes prévisionnelles | 16 |
| 2.3.1 | Méthodes modales et dérivées | 16 |
| 2.3.2 | Méthodes statistiques | 17 |
| 2.3.3 | Méthodes de discrétisation | 18 |
| 2.4 | Mécanismes de rayonnement d'une plaque simple | 19 |
| 2.4.1 | Plaque simple infinie | 19 |
| 2.4.2 | Plaque simple finie bafflée | 21 |
| 2.4.3 | Modélisation de l'interaction fluide-structure. | 23 |
| 2.4.4 | Etudes portant sur les conditions aux limites de la structure | 24 |
| 2.4.5 | Etudes portant sur l'adjonction de masse | 27 |
| 2.5 | Etudes portant sur l'adjonction d'éléments raidisseurs | 28 |
| 2.6 | Conclusions | 29 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | Cadre théorique — Mise en œuvre pour un fluide léger | 33 |
| 3.1 | Introduction | 33 |
| 3.2 | Position du problème | 34 |
| 3.2.1 | Description du problème | 34 |
| 3.2.2 | Equations générales du comportement vibro acoustique | 37 |
| 3.2.3 | Formulation variationnelle | 39 |
| 3.3 | Vibrations de la structure — Formulation | 40 |
| 3.3.1 | Construction de la fonctionnelle de Hamilton | 40 |
| 3.3.2 | Energie de la plaque | 41 |
| 3.3.3 | Energie cinétique des masses ponctuelles | 42 |
| 3.3.4 | Energie de déformation des raideurs ponctuelles | 43 |
| 3.3.5 | Energie de déformation aux limites | 43 |
| 3.3.6 | Energie des raidisseurs | 45 |
| 3.3.7 | Travail des forces extérieures | 51 |
| 3.3.8 | Synthèse — expression de la fonctionnelle de Hamilton | 52 |
| 3.4 | Vibrations de la structure — Solution | 54 |
| 3.4.1 | Méthode de Rayleigh-Ritz | 54 |
| 3.4.2 | Vibrations libres | 55 |
| 3.4.3 | Vibrations forcées | 58 |
| 3.4.4 | Choix des fonctions-essai | 59 |
| 3.4.5 | Commentaires sur l'implantation numérique | 61 |
| 3.5 | Rayonnement acoustique de la structure | 63 |
| 3.5.1 | Pression acoustique rayonnée en champ lointain | 65 |
| 3.5.2 | Indicateurs vibroacoustiques | 67 |
| 3.5.3 | Commentaires sur l'implantation numérique | 68 |
| 3.6 | Conclusions | 68 |
| 4 | Résultats — Incidence des paramètres structuraux sur les vibrations et le bruit rayonné dans l'air | 70 |
| 4.1 | Introduction | 70 |
| 4.2 | Influence des conditions aux limites | 71 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.2.1 | Rayonnement modal pour différentes conditions aux limites | 71 |
| 4.2.2 | Rayonnement des modes rigides d'une plaque – Solution basses fré- quences | 78 |
| 4.2.3 | Réponse acoustique d'une plaque pour différentes conditions aux limites | 81 |
| 4.3 | Influence du rajout ponctuel de masse ou de raideur | 84 |
| 4.3.1 | Rajout ponctuel de masse | 84 |
| 4.3.2 | Rajout ponctuel de raideur | 91 |
| 4.4 | Influence du rajout de raidisseurs | 95 |
| 4.4.1 | Configuration à un raidisseur | 97 |
| 4.4.2 | Configuration à cinq raidisseurs | 102 |
| 4.5 | Conclusions | 107 |
| 5 | Validation du cadre théorique | 110 |
| 5.1 | Introduction | 110 |
| 5.2 | Comparaisons avec la méthode des éléments finis | 110 |
| 5.3 | Comparaisons avec des mesures | 117 |
| 5.3.1 | Montage expérimental | 118 |
| 5.3.2 | Résultats | 122 |
| 5.4 | Conclusions | 126 |
| 6 | L'interaction fluide – structure | 128 |
| 6.1 | introduction | 128 |
| 6.2 | Equations générales du problème couplé – impédances de rayonnement . . . | 129 |
| 6.2.1 | Charge fluide | 129 |
| 6.2.2 | Impédances de rayonnement | 131 |
| 6.3 | Revue des méthodes disponibles pour le calcul des impédances de rayonnement | 132 |
| 6.3.1 | Transformation dans l'espace des nombres d'onde | 133 |
| 6.3.2 | Résolution numérique | 134 |
| 6.4 | Méthode de calcul des impédances de rayonnement proposée dans le cas de conditions aux limites générales | 134 |
| 6.4.1 | Exposé de la méthode | 134 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6.4.2 | Remarques sur la méthode | 137 |
| 6.5 | Indicateurs vibroacoustiques en fluide lourd | 138 |
| 6.5.1 | Vitesse quadratique de la structure | 139 |
| 6.5.2 | Pression acoustique rayonnée en champ lointain | 139 |
| 6.5.3 | Puissance acoustique rayonnée | 139 |
| 6.5.4 | Efficacité de rayonnement | 142 |
| 6.5.5 | Résistances et réactances intermodales de rayonnement | 142 |
| 6.6 | Cas du piston rectangulaire | 144 |
| 6.7 | Conclusions | 147 |
| 7 | Résultats en fluide lourd — Incidence des paramètres structuraux sur les vibrations et le bruit rayonné dans l'eau | 149 |
| 7.1 | Introduction | 149 |
| 7.2 | Effets liés au fluide – Amortissement par rayonnement et masse rajoutée . . | 150 |
| 7.2.1 | Résistances et réactances modales de rayonnement, directes | 151 |
| 7.2.2 | Résistances et réactances modales de rayonnement, croisées | 152 |
| 7.3 | Influence des conditions aux limites | 157 |
| 7.3.1 | Comparaison des résultats dans l'air et dans l'eau | 158 |
| 7.3.2 | Influence des conditions aux limites dans l'eau | 160 |
| 7.4 | Influence du rajout ponctuel de masse ou de raideur | 164 |
| 7.4.1 | Rajout ponctuel de masse | 164 |
| 7.4.2 | Rajout ponctuel de raideur | 167 |
| 7.5 | Influence du rajout de raidisseurs | 169 |
| 7.6 | Conclusions | 173 |
| | Conclusions | 175 |
| A | Expressions de la matrice de masse, de la matrice de raideur, du vecteur des forces mécaniques dans la base de Taylor | 178 |
| B | Solution des intégrales $I_{mnpq}^{(k)}$ (réactances de rayonnement) | 182 |
| B.1 | Relation de récurrence sur $I_{mnpq}^{(k)}$ | 183 |

| | | |
|--------|---|-----|
| B.2 | Relation de récurrence sur $I_{npq}^{(k)}(1)$ | 183 |
| B.3 | Relation de récurrence sur $I_{pq}^{(k)}(1)$ | 184 |
| B.4 | Relation de récurrence sur $I_{mnpq}^{(0)}$ | 184 |
| B.5 | Relation de récurrence sur $I_{npq}^{(0)}(1)$ | 185 |
| B.6 | Relation de récurrence sur $I_{pq}^{(0)}(1)$ | 185 |
| B.7 | Relation de récurrence sur $I_q^{(k)}(1)$ et $I_q^{(k)}(-1)$, $k \geq 1$ | 186 |
| B.7.1 | Relation de récurrence sur $I_q^{(k)}(1)$ | 186 |
| B.7.2 | Relation de récurrence sur $I_q^{(k)}(-1)$ | 186 |
| B.8 | Résolution de $I_{0npq}^{(0)}$ | 187 |
| B.9 | Résolution de $I_{1npq}^{(0)}$ | 187 |
| B.10 | Résolution de $J_{npq}(\alpha)$ | 187 |
| B.11 | Résolution de $I_{0pq}^{(0)}(1)$ | 188 |
| B.12 | Résolution de $I_{1pq}^{(0)}(1)$ | 189 |
| B.13 | Résolution de $J_{pq}^{(\beta)}$ | 189 |
| B.14 | Résolution de $I_{0q}^{(0)}(1)$ | 190 |
| B.15 | Résolution de $I_{1q}^{(0)}(1)$ | 190 |
| B.16 | Resolution de $J_p(\beta, \beta')$ et de $I_{0q}^{(0)}(1)$ | 191 |
| B.16.1 | Relation de récurrence sur $L_{q,b}(a, x)$ | 191 |
| B.16.2 | Résolution de $L_{0,b}(a, x)$ | 192 |
| B.17 | Résolution de $J_{nq}(\alpha, \alpha')$ | 193 |
| B.17.1 | Relation de récurrence sur $L_{nq,b}(a)$ | 193 |
| B.17.2 | Résolution de $L_{n0,b}(a; x, y)$ | 194 |
| B.18 | Résolution de $I_q^{(0)}(-1)$, $L_{q,b}(a, x)$ et $L_{n0,b}(a)$ | 195 |
| B.18.1 | Relation de récurrence directe sur $M_{n,b}(a, y)$ | 195 |
| B.18.2 | Résolution de $M_{0,b}(a, y; x)$ | 196 |
| B.18.3 | Résolution de $M_{1,b}(a, y; x)$ | 196 |
| B.18.4 | Relation de récurrence inverse sur $M_{n,b}(a, y; x)$ | 197 |
| B.19 | Résolution de $L_{nq,b}(a)$ | 197 |
| B.19.1 | Relation de récurrence sur $M_{nq,b}(a)$ | 197 |
| B.19.2 | Résolution de $M_{n0,b}(a; x, y)$ | 198 |

| | | |
|--------|---|------------|
| B.19.3 | Résolution de $M_{n1,b}(a; x, y)$ | 198 |
| B.20 | Résolution de $L_{nq,b}(0)$ et $L_{q,b}(0, x)$ | 199 |
| C | Solution des intégrales $J_{mnpq}^{(k)}$ (résistances de rayonnement) | 201 |
| | bibliographie | 210 |

Liste des Figures

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Chaîne d'un problème vibro acoustique général | 9 |
| 2.1 | Rayonnement d'une plaque infinie en flexion | 19 |
| 2.2 | Rayonnement d'une plaque finie en flexion | 20 |
| 2.3 | Condition de rigidité arbitraire en déflexion-rotation sur le contour d'une plaque bafflée | 26 |
| 3.1 | Géométrie du problème et systèmes de coordonnées | 35 |
| 3.2 | Caractéristiques mécaniques de la structure | 36 |
| 3.3 | Volume élastique immergé dans un fluide infini | 37 |
| 3.4 | Profil d'un raidisseur et systèmes de coordonnées | 46 |
| 3.5 | Paramètres géométriques d'un raidisseur courant k | 51 |
| 3.6 | Plaque raidie - Paramètres géométriques relatifs aux résultats du tableau 3.4 | 64 |
| 4.1 | Efficacité de rayonnement de différents modes d'une plaque simplement supportée et d'une plaque encastree. (a) modes (1-1),(2-1),(2-2),(3-1); (b) modes (6-1),(6-2),(7-1),(7-2); (c) modes (5-5),(6-5),(6-6). | 73 |
| 4.2 | Efficacité de rayonnement de différents modes d'une plaque libre et d'une plaque guidée. (a) modes de rang 0,2,3; (b) modes de rang 4,5,8; (c) modes de rang 10,13,22. | 76 |
| 4.3 | Déformée vibratoire d'un mode de plaque libre. | 78 |
| 4.4 | Efficacité de rayonnement des modes rigides d'une plaque rectangulaire. La rotation rigide est par rapport à l'axe y | 80 |
| 4.5 | Puissance acoustique rayonnée par une plaque rectangulaire pour différentes conditions aux limites. | 82 |

| | | |
|------|--|----|
| 4.6 | Facteur de rayonnement d'une plaque rectangulaire pour différentes conditions aux limites: (a) appui simple et encastrement, (b) contour libre et contour guidé. | 83 |
| 4.7 | Puissance acoustique rayonnée par une plaque rectangulaire partiellement libre - partiellement encastree. | 85 |
| 4.8 | Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes masses ponctuelles rajoutées au point d'excitation; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. | 86 |
| 4.9 | Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes masses ponctuelles rajoutées au point d'excitation. | 87 |
| 4.10 | Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes masses ponctuelles rajoutées en $\alpha = 0.44, \beta = 0.53$; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. | 89 |
| 4.11 | Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes masses ponctuelles rajoutées en $\alpha = 0.44, \beta = 0.53$ | 90 |
| 4.12 | Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes raideurs ponctuelles rajoutées au point d'excitation; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. | 92 |
| 4.13 | Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes raideurs ponctuelles rajoutées au point d'excitation. | 93 |
| 4.14 | Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes raideurs ponctuelles rajoutées en $\alpha = 0.44, \beta = 0.53$; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. | 94 |
| 4.15 | Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes raideurs ponctuelles rajoutées en $\alpha = 0.44, \beta = 0.53$ | 95 |
| 4.16 | Profils et configurations des raidisseurs utilisés dans les calculs | 96 |
| 4.17 | Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie (configuration A), excitée en son centre; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. | 98 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.18 | Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie, (configuration A), excitée en son centre. | 99 |
| 4.19 | Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie (configuration A), excitée au point $\alpha = 0.26, \beta = 0$; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. | 100 |
| 4.20 | Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie (configuration A), excitée au point $\alpha = 0.26, \beta = 0$ | 101 |
| 4.21 | Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie (configuration B), excitée en son centre; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. | 103 |
| 4.22 | Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie (configuration B), excitée en son centre. | 104 |
| 4.23 | Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie (configuration B), excitée au point $\alpha = 0.26, \beta = 0$; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. | 105 |
| 4.24 | Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie (configuration B), excitée au point $\alpha = 0.26, \beta = 0$ | 106 |
| 5.1 | Réponse vibratoire et rayonnement dans l'air d'une plaque rectangulaire encastree, comparaison entre la méthode analytique et la méthode par éléments finis; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. . . . | 113 |
| 5.2 | Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire encastree, comparaison entre la méthode analytique et la méthode par éléments finis. | 114 |
| 5.3 | Réponse vibratoire et rayonnement dans l'air d'une plaque rectangulaire libre, comparaison entre la méthode analytique et la méthode par éléments finis; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. . . . | 115 |
| 5.4 | Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire libre, comparaison entre la méthode analytique et la méthode par éléments finis. | 116 |
| 5.5 | Schéma du montage expérimental pour la mesure du rayonnement acoustique par une plaque mince bafflée. | 119 |
| 5.6 | Montage de la structure dans la fenêtre d'essai. | 120 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.7 | Conditions de fixation (a) en appui simple; (b) en encastrement. | 121 |
| 5.8 | Comparaison théorie/expérience pour la vitesse quadratique d'une plaque mince excitée par une force ponctuelle, (a) en appui simple, (b) encastrée. . | 123 |
| 5.9 | Comparaison théorie/expérience pour la puissance acoustique rayonnée par une plaque mince excitée par une force ponctuelle, (a) en appui simple, (b) encastrée. | 124 |
| 5.10 | Comparaison théorie/expérience pour le facteur de rayonnement d'une plaque mince excitée par une force ponctuelle, (a) en appui simple, (b) encastrée. . | 125 |
| 6.1 | Rayonnement dans l'eau d'une plaque sur appui simple. Comparaison entre le calcul du rayonnement en champ lointain et en champ proche. | 143 |
| 6.2 | Résistance et réactance de rayonnement d'un piston rectangulaire dans l'air. Comparaison entre les relations (6.45), (6.46) calculées pour divers ordres de développement de G , et les données de BURNETT et SOROKA | 146 |
| 7.1 | Impédances de rayonnement directes pour les modes (1-1), (2-1), (1-2), (3-1) d'une plaque en appui simple immergée dans l'eau. (a) résistances de rayonnement; (b) réactances de rayonnement | 153 |
| 7.2 | Impédances de rayonnement directes pour les modes (2-2), (4-1), (5-1) d'une plaque en appui simple immergée dans l'eau. (a) résistances de rayonnement; (b) réactances de rayonnement | 154 |
| 7.3 | Impédances de rayonnement croisées pour les modes (1-1) et (3-1), (1-1) et (1-3), (3-1) et (1-3) d'une plaque en appui simple immergée dans l'eau. (a) résistances de rayonnement; (b) réactances de rayonnement | 155 |
| 7.4 | Impédances de rayonnement croisées pour les modes (2-1) et (4-1), (1-2) et (3-2) d'une plaque en appui simple immergée dans l'eau. (a) résistances de rayonnement; (b) réactances de rayonnement | 156 |
| 7.5 | Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire en appui simple, comparaison des résultats dans l'air et dans l'eau; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. | 159 |

| | | |
|------|--|-----|
| 7.6 | Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire en appui simple, comparaison des résultats dans l'air et dans l'eau. | 160 |
| 7.7 | Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire encastrée, comparaison des résultats dans l'air et dans l'eau; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. | 161 |
| 7.8 | Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire encastrée, comparaison des résultats dans l'air et dans l'eau. | 162 |
| 7.9 | Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire libre, comparaison des résultats dans l'air et dans l'eau; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. | 163 |
| 7.10 | Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire libre, comparaison des résultats dans l'air et dans l'eau. | 164 |
| 7.11 | Réponse vibratoire et rayonnement dans l'eau d'une plaque rectangulaire sur appui simple, pour différentes masses ponctuelles rajoutées au point d'excitation; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. | 165 |
| 7.12 | Puissance rayonnée dans l'eau par une plaque rectangulaire sur appui simple, pour différentes masses ponctuelles rajoutées au point d'excitation. | 166 |
| 7.13 | Réponse vibratoire et rayonnement dans l'eau d'une plaque rectangulaire sur appui simple, pour différentes raideurs ponctuelles rajoutées au point d'excitation; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. | 168 |
| 7.14 | Puissance rayonnée dans l'eau par une plaque rectangulaire sur appui simple, pour différentes masses ponctuelles rajoutées au point d'excitation. | 169 |
| 7.15 | Profils et configurations des raidisseurs utilisés dans les calculs (les dimensions sont en <i>mm</i>). | 170 |
| 7.16 | Réponse vibratoire et rayonnement dans l'eau d'une plaque rectangulaire sur appui simple, pour diverses implantations d'éléments raidisseurs; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement. | 171 |
| 7.17 | Puissance rayonnée dans l'eau par une plaque rectangulaire sur appui simple, pour diverses implantations d'éléments raidisseurs. | 172 |

Liste des Tableaux

| | | |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Moyens de contrôle passif du bruit et des vibrations sur une structure plane | 6 |
| 3.1 | Cas extrêmes de conditions aux limites prévus par la théorie | 45 |
| 3.2 | Paramètre $\omega a^2(\rho_s h/D)^{1/2}$ pour une plaque carrée et différentes conditions aux limites. | 62 |
| 3.3 | Première fréquence propre d'une plaque carrée SS-SS-SS-SS avec différentes masses ponctuelles rajoutées. | 63 |
| 3.4 | Premières fréquences propres d'une plaque rectangulaire SS-SS-SS-SS raidie. | 64 |
| 4.1 | Fréquences propres f_i et fréquences critiques modales f_i^c pour différents modes i d'une plaque simplement supportée et d'un plaque encastree. . . . | 74 |
| 4.2 | Fréquences propres f_i et fréquences critiques modales f_i^c pour différents modes i d'une plaque libre et d'un plaque guidée. | 75 |
| 4.3 | Incidence des paramètres structuraux sur les vibrations et le bruit rayonné dans l'air | 108 |
| 4.3 | Suite | 109 |

Chapitre 1

Introduction

Ce travail traite de la réponse vibratoire et du rayonnement acoustique de structures rectangulaires complexes immergées dans un fluide compressible et sollicitées par des forces mécaniques. L'effort principal a porté

- d'une part, sur la prise en compte rigoureuse, au sein d'un même modèle, de paramètres structuraux nouveaux tels que les conditions de fixation de la structure, l'adjonction ponctuelle de masse ou de raideur, l'adjonction d'éléments raidisseurs.
- d'autre part, sur les phénomènes d'interaction avec le fluide associés à de telles structures. Ces phénomènes sont cruciaux puisqu'ils quantifient la part d'énergie transférée au milieu fluide, et déterminent complètement le rayonnement acoustique. Ce point précis a fait l'objet d'une attention particulière; une nouvelle formulation analytique de l'interaction fluide-structure a été proposée pour des systèmes mécaniques non simples.

A terme, le but poursuivi est de fournir au praticien un moyen de contrôler la réponse vibratoire et acoustique de structures planes complexes par le biais d'une *action pertinente et décisive sur la structure même*. Ce travail s'inscrit donc dans le cadre du contrôle du bruit à la source, voire de la discrétion acoustique *ab initio*, dès le stade de la conception.

1.1 Problématique technique

Dans un grand nombre de situations, les vibrations et le bruit constituent un effet secondaire indésirable d'un outil, d'une machine, d'un procédé. Il s'agit donc de minimiser cet effet, tout en maintenant intacte la fonction primaire désirée. L'accélération des cadences, l'accroissement des performances, l'augmentation des vitesses de rotation, l'emploi de matériaux de plus en plus légers ont comme contrepartie une amplification de la nuisance vibration-bruit. Trop souvent, l'aspect acoustique est négligé au stade de la conception, au profit d'autres aspects jugés plus importants – coûts, poids, rigidité, ... Le besoin de méthodes prévisionnelles adaptées et de moyens d'action pratiques dans les bureaux d'études est aujourd'hui plus pressant que jamais. Un rapport de la Commission de la Santé et de la Sécurité du Travail résume la situation en matière de bruit au Québec en ces termes [62]:

“L'analyse des différentes sources de données au niveau des lésions professionnelles, la prévalence de l'exposition des travailleurs et la faisabilité des moyens de contrôle à la source amènent la priorisation par la Commission d'actions préventives en regard du contaminant industriel majeur qu'est le bruit.”

La lutte contre le bruit en milieu de travail utilise essentiellement des moyens correctifs ou palliatifs, que l'on peut grossièrement grouper en deux catégories — la protection auditive individuelle et l'isolation des sources. Le contrôle à la source est une alternative qui vise plutôt à la conception de produits, de machines, d'engins silencieux. C'est une option économiquement viable et généralement plus efficace que la réduction du bruit *a posteriori*, mais techniquement plus difficile, car elle passe par une bonne compréhension de la chaîne excitation mécanique — vibration — bruit.

De manière plus générale, le comportement vibro-acoustique des structures est au cœur de nombreux enjeux sociaux, industriels, économiques, commerciaux et stratégiques:

- Le contrôle du bruit en milieu de travail et le contrôle du bruit environnemental sont à la fois une nécessité réglementaire et une mission sociale.

- Le confort acoustique des produits manufacturés est de plus en plus, dans un contexte de concurrence industrielle, un critère de qualité et de fiabilité. Certains pays d'Europe se sont déjà dotés d'un système d'*étiquetage acoustique* et de *label acoustique*, notamment dans le secteur de l'automobile, des machines-outils, des appareils électriques.
- La discrétion acoustique des structures navales, qu'il s'agisse de navires de surface ou de sous-marins, est un enjeu stratégique majeur dans lequel des ressources considérables sont engagées actuellement. Il s'agit d'un problème mettant la structure vibrante en présence d'un milieu fluide dense; cette particularité rend le problème plus complexe et provoque des phénomènes spécifiques, qui altèrent de manière dramatique les tendances observées en présence d'un fluide léger.
- Le contrôle des vibrations induites par des niveaux acoustiques élevés, et les phénomènes connexes de fatigue, de rupture et de cavitation sont des problèmes actuels importants dans le domaine de l'Aéronautique et de l'Espace.
- La conception et la fabrication de transducteurs acoustiques efficaces, qu'ils soient électromécaniques, piezoélectriques, ... fait l'objet d'efforts croissants de la part des manufacturiers. L'amélioration de la qualité et des performances passe, entre autres, par la connaissance du comportement vibro-acoustique des éléments rayonnants.
- La surveillance par voie acoustique des machines, et les fonctions connexes de détection, de localisation et de diagnostic des sources constituent une alternative intéressante à la surveillance vibratoire lorsque l'implantation de capteurs de vibration est difficile, ou impossible. La surveillance acoustique définit une classe de problèmes dits *inverses* encore peu étudiés, qui exigent eux aussi un modèle approprié de la fonction de transfert vibration — bruit.

Compte tenu de sa simplicité et de son faible coût de production, la géométrie rectangulaire est d'usage courant. Elle constitue la géométrie de base pour les panneaux, cloisons, enveloppes, bâtis, caissons, capotages, carters, carrosseries, ... Cette géométrie

de base permet donc d'appréhender de manière satisfaisante l'enveloppe rayonnante de nombreuses structures industrielles. Lorsque la géométrie rectangulaire n'est plus appropriée, elle doit au moins fournir des tendances qualitatives acceptables. Cependant, pour proposer un modèle synthétique décrivant le plus grand nombre possible de situations susceptibles d'être rencontrées en pratique, il faut en plus tenir compte de certains paramètres mécaniques. Il est difficile, sinon impossible, d'en dresser un inventaire complet, mais l'on peut citer les conditions de fixation de la structure, l'ajout d'éléments raidisseurs, le cintrage, la présence de nervures, de perforations, de discontinuités, l'ajout local de masse et de raideur, les structures multicouches, et l'ajout, sous différentes formes, de matériaux amortissants. L'influence de ces paramètres sur le rayonnement acoustique de la structure n'est connue que partiellement, et surtout de manière qualitative.

Le Tableau 1.1, tiré de [61] dresse une liste des principaux moyens de contrôle passif des vibrations et du bruit, et indique les tendances obtenues de manière empirique pour une plaque rectangulaire en ce qui concerne la première fréquence propre, l'indice de bruit solidien et le facteur de rayonnement sous la fréquence critique. Ce tableau situe bien la difficulté du contrôle du bruit à la source, et indique qu'une réduction des vibrations n'est pas un gage de réduction du bruit. La fonction de transfert vibrations — bruit est régie par des opérations de filtrage complexes dans le domaine fréquentiel. Ce filtrage peut être considérablement affecté par des modifications structurales entreprises en vue de réduire le bruit rayonné; le résultat final sur le niveau de puissance acoustique rayonnée dépend donc à la fois de l'incidence des modifications structurales sur le niveau vibratoire et sur l'efficacité de rayonnement. Ces quelques remarques suffisent sans doute à expliquer les succès limités enregistrés dans le passé avec des solutions telles que l'adjonction de raidisseurs, ou encore de couches viscoélastiques. Il est donc nécessaire, avant de prendre des décisions stratégiques à l'échelle d'une production industrielle, d'aborder le problème dans son ensemble et de bien comprendre les phénomènes.

Tableau 1.1: Moyens de contrôle passif du bruit et des vibrations sur une structure plane

| | première fréquence propre | indice de bruit solidien | efficacité de rayonnement |
|---|---------------------------|--|---------------------------|
| Augmentation de la rigidité de flexion à masse surfacique constante (cintrage, nervures, raidisseurs) | ↗ | ↘ Effet en bande large | ↗ |
| Augmentation de la masse surfacique à rigidité de flexion constante (rainurage, masses ponctuelles distribuées aléatoirement) | ↘ | ↘ uniquement dans le domaine des fréquences propres Effet en moyennes/hautes fréquences | ↘ |
| Augmentation de l'impédance d'entrée: | | | |
| raidisseur | ↗ | ↘ Effet en bande large | ↗ |
| masse ponctuelle | ↘ | ↘ Effet en moyennes/hautes fréquences | → |
| Augmentation d'épaisseur | ↗ | ↘ Effet en bande large | ↗ |
| Augmentation de l'amortissement | → | ↘ uniquement dans le domaine des fréquences propres | → |

1.2 Problématique scientifique

Au sens mathématique, la vibro-acoustique est l'étude des interactions entre un continuum solide, qui est borné, et un continuum fluide (gazeux ou liquide), qui est borné ou non borné. L'hypothèse de condensation, qui s'applique aux structures minces, permet de réduire le continuum solide à une surface, ou enveloppe rayonnante, dont les propriétés effectives – masse surfacique, rigidité de flexion – sont celles du solide. Chacun des deux milieux, fluide et solide, a des propriétés de compressibilité et, de ce fait, supporte des ondes. L'absence de cisaillement rend seulement possible l'existence d'une onde de dilatation-compression dans le milieu fluide, alors que dans le milieu solide peuvent coexister des ondes de dilatation-compression, flexion, cisaillement. L'importance relative de ces trois types d'ondes dans le solide dépend de la géométrie de la structure et de la nature de l'excitation. Dans le cas de plaques minces excitées par des forces normales à la surface, on ne retient que les ondes de flexion car ce sont elles qui interagissent le plus avec le fluide. Dans le cas de coques cylindriques par contre, il est nécessaire de considérer simultanément les effets de flexion et de membrane ¹.

Les propriétés physiques très différentes d'un fluide et d'un solide rendent extrêmement complexe l'interaction entre une onde de flexion mécanique et une onde de dilatation-compression acoustique. C'est la condition de continuité de la vitesse normale à l'interface solide-fluide qui régit l'interaction et qui est à l'origine du rayonnement acoustique. La formulation générale de ce problème remonte au début du siècle dernier; elle constitue un résultat classique, connu sous le nom d'équation intégrale de Helmholtz². Il s'agit en fait d'une équation intégral-différentielle qui peut porter indifféremment sur la vitesse vibratoire du solide ou sur la pression acoustique dans le fluide. Des solutions analytiques n'ont pu être trouvées que pour un nombre très restreint de géométries — plaque infinie, coque cylindrique infinie, coque sphérique. Le cas de plaques finies rectangulaires ou circulaires a fait

¹On peut se reporter à la discussion détaillée de F. Fahy, [15, chap. 1]

²Voir, par exemple B.B. Baker et E.T. Copson, *The Mathematical Theory of Huyghens' Principle*, Clarendon, Oxford 1950, 2ème édition pp. 22-31; Lord Rayleigh, *Theory of Sound*, Dover, New York 1945, Vol. II pp. 143-144

l'objet de nombreuses recherches depuis la Deuxième Guerre Mondiale, et l'on dispose de solutions partielles pour la géométrie rectangulaire depuis une vingtaine d'années seulement. Compte tenu de la difficulté du problème au niveau théorique, ces solutions s'appuient sur des hypothèses et des approximations qui en limitent l'application pratique: structure nue et conditions aux limites particulières. En particulier, elles n'offrent aucun éclairage sur le point particulier qui nous intéresse ici, à savoir l'incidence de caractéristiques mécaniques complexes sur le comportement vibro acoustique.

Située au confluent de deux disciplines — les Vibrations et l'Acoustique, la vibro acoustique est une spécialité jeune dont les développements récents sont liés à des besoins croissants de l'industrie. Des ouvrages récents, dont ceux de JUNGER et FEIT [28], de FAHY [15] et de LESUEUR [44] tentent de faire une synthèse des acquis scientifiques dans le domaine. Ces textes de référence ouvrent de plus un accès vers de nombreuses sources bibliographiques pertinentes. On sait aujourd'hui, de manière synthétique et pour un problème général, présenter les différentes composantes d'un problème vibro acoustique. La figure 1.1 illustre ces composantes et précise les mécanismes physiques impliqués:

(i) *Excitation*

Les sources industrielles se ramènent généralement à une enveloppe sollicitée par des excitations de nature très variée — mécanique, acoustique, aéro- ou hydrodynamique, électromagnétique, ... L'étude amont des sources excitatrices primaires n'entre pas dans le cadre de cette étude; bien qu'en pratique la valeur des forces excitatrices ne soit pas accessible d'emblée et que ces forces dépendent à la fois des sources d'excitation et de la structure qui réceptionne l'énergie mécanique, il est admis ici que *l'excitation est connue*.

(ii) *Réponse mécanique*

La structure produit une réponse mécanique aux excitations. Cette réponse mécanique est représentée par un champ vibratoire réparti sur une surface finie. Pour l'étude du rayonnement acoustique de la structure, la connaissance de la vitesse vibratoire normale à la surface suffit.

(iii) *Réponse acoustique*

Le milieu fluide prélève une partie de l'énergie mécanique sous forme de rayonnement

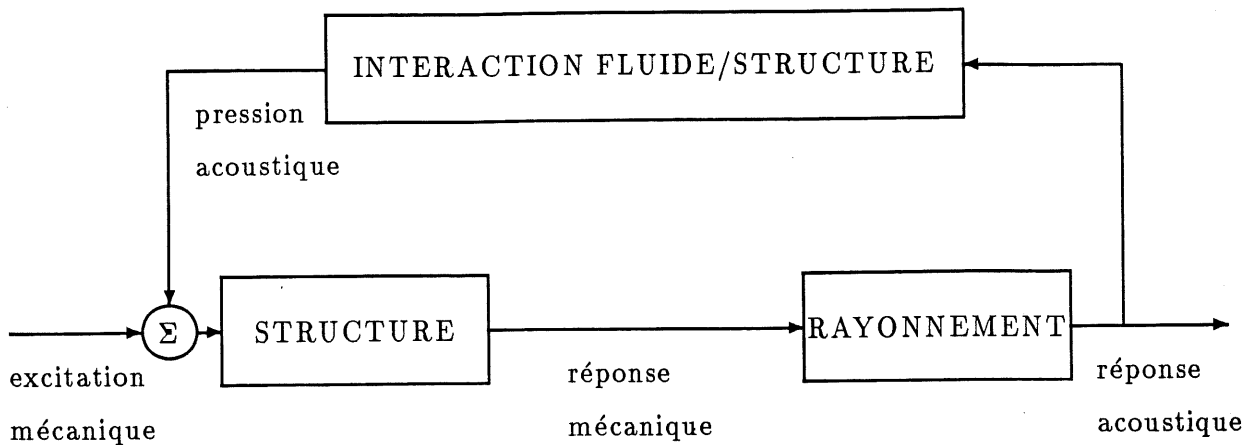


Figure 1.1: Chaîne d'un problème vibro acoustique général

acoustique. Cette transformation s'effectue avec un rendement faible, qui est chiffré par l'efficacité de rayonnement de la structure. L'efficacité de rayonnement n'est pas à proprement parler le rendement du transfert acoustique, mais indique plutôt la part respective de l'énergie totale présente dans la structure (énergie mécanique) et dans le fluide (énergie acoustique).

(iv) *Interaction fluide/structure*

La pression acoustique produite agit comme une sollicitation secondaire sur la structure (pression pariétale), et crée une boucle de retour dans la chaîne vibro acoustique. La réponse mécanique de la structure peut être notablement modifiée par cette *charge fluide*, et diffère donc de ce qu'elle serait *in-vacuo*. La présence du fluide agit, du point de vue de la structure, comme un amortissement supplémentaire (amortissement par rayonnement) et une masse rajoutée (masse du fluide entraîné). La charge fluide dépend en grande partie de la densité du fluide. Dans le cas d'immersion dans un fluide lourd (de l'eau par exemple), la charge fluide est importante, la masse du fluide entraîné pouvant être comparable à la masse de la structure (cet effet est pris en compte par les architectes navals dans l'étude des vibrations de coques de navires, [46]). Lorsque le fluide est léger (de l'air par exemple) et que la structure est suffisamment massive, la charge fluide est négligeable et

l'effet prépondérant est l'amortissement par rayonnement, qui peut être du même ordre de grandeur que l'amortissement interne de la structure. Ces deux comportements — purement réactif dans le premier cas, purement résistif dans le second cas — s'avèrent être les comportements asymptotiques de l'interaction fluide-structure. Ils correspondent respectivement aux cas limites d'un fluide incompressible, et d'un fluide compressible au sein duquel a lieu une forte propagation acoustique. Ces deux comportements sont également ceux d'un milieu fluide donné dans la limite des basses fréquences, et dans la limite des hautes fréquences, respectivement. Ces propriétés de l'interaction fluide-structure ont été bien exposées par JUNGER [27].

A la lumière de ces explications, la résolution d'un problème vibro acoustique rend nécessaire une approche intégrée, c'est-à-dire étudiant simultanément l'aspect vibratoire et l'aspect acoustique. Néanmoins, si la structure est suffisamment massive, et si le milieu fluide est peu dense et suffisamment étendu, le problème vibratoire et le problème acoustique sont découplés. C'est le cas pour la plupart des structures rayonnant dans l'air. On peut conclure en termes généraux que les difficultés pour un problème particulier se situent à deux niveaux:

- (i) la détermination de la réponse mécanique, connaissant les forces appliquées,
- (ii) la détermination de la réponse acoustique, connaissant le profil des vitesses vibratoires.

La distinction entre un problème de rayonnement en fluide lourd et un problème de rayonnement en fluide léger réside dans le fait que la charge fluide est — ou n'est pas comptabilisée au sein des forces appliquées.

1.3 Objectifs de l'étude

Il n'existe pas à l'heure actuelle d'étude complète permettant d'établir, à partir d'un cadre théorique rigoureux, des règles simples et pratiques pour la construction de structures silencieuses. Au stade industriel, la déroutante complexité des phénomènes laisse le praticien désarmé; le seul recours est souvent la méthode essai-erreur. Au niveau de la recherche,

les modèles utilisés ne permettent que de comprendre les phénomènes importants et sont encore trop peu adaptés à la réalité industrielle.

L'objectif de cette étude est de partiellement combler ce fossé et de dresser un cadre, une ossature théorique permettant l'étude du comportement vibroacoustique de structures complexes. Il s'agit en quelque sorte d'aller vers l'aval d'une réalité industrielle complexe et d'adapter les outils théoriques adéquats. Ces outils à leur tour doivent servir à guider vers des solutions pratiques de contrôle du bruit. Une caractéristique indispensable de ce cadre théorique est d'être ouvert et modulaire. Il doit s'adapter à mesure de l'évolution des besoins et pouvoir incorporer des éléments de complexité croissante (caractérisation des efforts injectés, géométrie et caractéristiques mécaniques de la structure, description du milieu fluide).

Les objectifs spécifiques sont les suivants:

- Etablir un modèle théorique rigoureux permettant, à partir d'une géométrie de base rectangulaire, de prendre en compte les paramètres structuraux suivants: conditions aux limites élastiques, adjonction multi-ponctuelle de masse ou de raideur, adjonction de raidisseurs de profil donné.
- Etablir un modèle théorique rigoureux permettant de calculer l'interaction fluide-structure pour de telles structures, et pour un milieu fluide semi-infini et de densité arbitraire. Ce modèle doit donc dépasser en généralité ceux disponibles actuellement. Il doit permettre d'évaluer la charge fluide exercée sur la structure, les champs acoustiques proche et lointain.
- Mettre en œuvre et exploiter le cadre théorique ainsi défini dans le domaine fréquentiel où la structure a un comportement modal, et évaluer de manière prédictive la pertinence de modifications structurales pour agir sur les vibrations et le bruit rayonné dans l'air et dans l'eau.
- Valider le cadre théorique au moyen de comparaisons avec des méthodes analytiques, des méthodes numériques, des mesures.

1.4 Structure du document

Le chapitre 2, qui fait suite à la présente introduction, fait le point sur l'état des connaissances et dégage précisément les axes d'investigation et les apports scientifiques escomptés. Le reste de l'étude est divisé en deux parties; la première partie (chapitres 3,4,5) aborde le rayonnement d'une structure rectangulaire complexe dans un fluide léger, et sert de support théorique aux applications de bruit rayonné dans l'air; la seconde partie (chapitres 6,7) étend l'analyse au rayonnement dans un fluide dit "lourd", c'est-à-dire de densité arbitraire, avec applications aux cas de rayonnement acoustique dans l'eau.

Le chapitre 3 expose le cadre théorique mis en place dans l'hypothèse de fluide léger; la présentation de ce cadre est faite en scindant les aspects vibratoire et acoustique, et en négligeant la boucle de retour acoustique dans les sollicitations extérieures de la structure. Dans le but de conserver au modèle son caractère modulaire, les différents paramètres structuraux sont présentés de manière séparée et indépendante.

Le chapitre 4 est une exploitation du modèle en vue d'étudier de manière systématique l'incidence des paramètres structuraux sur les vibrations et le bruit rayonné dans l'air. Cette étude est menée dans un contexte de contrôle du bruit sur la base d'indicateurs globaux - énergie vibratoire, efficacité de rayonnement, puissance acoustique rayonnée. Le recueil et l'interprétation d'un certain nombre de données permet, *in fine* de dicter certaines règles pour le contrôle du bruit à partir d'une conception mécanique optimisée de la structure.

Le chapitre 5 expose les validations du cadre théorique qui ont été faites, soit à partir de comparaisons avec des moyens de simulation purement numériques (méthode des éléments finis), soit à partir de comparaisons avec des mesures. Il s'agit de validations préliminaires, réalisées à dans une première phase autour de situations volontairement simples, et qu'il conviendrait d'étendre dans une seconde phase à des situations industrielles.

Le chapitre 6 reprend l'exploitation du cadre théorique au cas d'une structure immergée dans un fluide lourd. Ce nouveau problème diffère du précédent par la nécessité de prendre en compte la charge dynamique exercée par le fluide sur la structure. Le calcul exact des termes associés dans le modèle est présenté pour la première fois dans le cadre d'une

structure rectangulaire présentant des conditions aux limites arbitraires, des masses ou des raideurs multi-ponctuelles, des raidisseurs.

Le chapitre 7 reprend l'exploitation du cadre théorique élargi afin d'étudier l'effet des paramètres structuraux sur les vibrations et le bruit rayonné dans l'eau. Les spécificités liées à la présence d'un milieu fluide dense sont mises en évidence.

Enfin, la conclusion fait le bilan des apports scientifiques de l'étude et des contributions technologiques potentielles. Les prolongements directs de ce travail sont mentionnés, et des axes d'investigation à plus long terme sont suggérés.

Chapitre 2

Etat des connaissances

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de faire une synthèse des connaissances — méthodes et résultats — disponibles à ce jour dans le domaine de l'étude vibro acoustique des structures planes. Cette synthèse doit permettre, compte tenu des objectifs fixés, de dégager les limites des connaissances existantes, et d'énoncer précisément les axes d'investigation retenus.

Minimiser, ou de manière plus générale contrôler le rayonnement acoustique d'une structure réelle n'est pas une chose facile. L'objectif principal de ce travail est l'élaboration d'un modèle prédictif décrivant la chaîne excitation mécanique — vibrations — bruit pour une structure rectangulaire réaliste. Le résultat espéré est l'évaluation des moyens passifs de contrôler le rayonnement acoustique au stade de la conception. Les difficultés qui se posent dans l'élaboration d'un tel modèle sont liées aux paramètres additionnels nécessairement incorporés dans la description de la structure.

Ce chapitre dresse un bilan des connaissances et répertorie les principales sources bibliographiques pour l'ensemble des thèmes suivants: les règles pratiques de conception; les méthodes prévisionnelles; les mécanismes de rayonnement d'une plaque simple; la modélisation de l'interaction fluide-structure; les études portant sur les conditions aux limites de la structure; les études portant sur l'adjonction ponctuelle de masse; les études

portant sur l'adjonction d'éléments raidisseurs.

2.2 Règles pratiques de conception

Les règles pratiques de conception de structures et de machines silencieuses sont essentiellement empiriques. Elles concernent en premier lieu l'action sur les forces excitatrices: équilibrage des systèmes tournants, prévention du mouvement brusque ou du jeu libre des pièces mobiles, suppression des mécanismes de réaction, allongement des impacts, découplage entre la source excitatrice et la structure au moyen de suspensions souples.

En second lieu, lorsque l'action sur les forces excitatrices n'est pas possible, il est possible d'agir sur la structure même. Les moyens passifs d'action sur la structure consistent alors à contrôler les paramètres de géométrie, de masse, de rigidité et d'amortissement en vue de minimiser le rayonnement acoustique. Il est possible, dès le stade du dimensionnement géométrique, d'éviter les erreurs importantes en veillant à un dimensionnement qui évite les coïncidences fréquentielles gênantes. L'amortissement de la structure est un moyen efficace si le rayonnement acoustique est dû à des modes résonants, et si l'amortissement par rayonnement n'est pas trop grand. L'amortissement de la structure peut être artificiellement augmenté à l'aide de couches viscoélastiques simplement ajoutées, ou sous forme de couches "sandwich"; le recours à des matériaux présentant un fort amortissement intrinsèque (matériaux plastiques, métal avec inclusions viscoélastiques) est une alternative possible de plus en plus étudiée. L'adjonction de raidisseurs est un moyen d'accroître la rigidité de la structure sans hypothéquer un devis de masse souvent contraignant. Elle permet aussi d'élever les fréquences propres de la structure; ces fréquences propres peuvent alors être plus facilement amorties. Des solutions du type nervurations ou ondulations permettent d'obtenir le même effet sans accroissement de masse. Enfin, la concentration de masse ou de raideur aux points d'entrée de l'énergie peut être utilisée comme un moyen de diminuer la mobilité de la structure. MÜLLER, LANGER, RICHTER et STORM [61] ont compilé et évalué, sous la forme d'un rapport technique, un grand nombre de ces règles pratiques. Il s'agit certainement de la référence la plus complète dans le domaine

de l'application technique. Néanmoins, les résultats qui y sont rapportés reposent sur des méthodes théoriques très simplifiées et sur de nombreuses approximations non justifiées. Il apparaît donc pertinent de ré-examiner ces règles à la lumière de méthodes prévisionnelles mieux adaptées.

2.3 Méthodes prévisionnelles

La complexité des phénomènes et la diversité des situations susceptibles d'être rencontrées dans la réalité a résulté en une multiplicité de méthodes prévisionnelles, toutes plus ou moins exactes. Grossièrement, il est possible de répartir ces méthodes en trois catégories: les méthodes modales et dérivées, les méthodes statistiques, les méthodes de discrétisation. Une revue exhaustive de ces différentes méthodes peut être trouvée dans [43]. Il faut noter ici que l'état des connaissances au niveau expérimental est actuellement en retard sur l'état des connaissances théoriques. On ne trouve dans la littérature que peu de données expérimentales sur le rayonnement, et en particulier très peu de données en bande fine, et très peu de comparaisons systématiques théorie/expérience

2.3.1 Méthodes modales et dérivées

L'Analyse Modale Classique (CMA, "Classical Modal Analysis") consiste à décomposer les phénomènes vibratoires et acoustiques sur une base modale; dans les problèmes mettant en présence une structure finie et un milieu fluide infini ou semi-infini, cette base est généralement la base des modes mécaniques *in-vacuo* [24]. Il s'agit d'une méthode exacte dans le principe, et conceptuellement riche puisqu'elle permet une interprétation physique des phénomènes en termes des modes physiques de la structure. Elle nécessite néanmoins une connaissance *a priori* du schéma modal *in-vacuo* de la structure mécanique (modes propres et fréquences propres). Le schéma modal *in-vacuo* n'est connu que pour des géométries et des conditions aux limites particulières. Lorsque ce schéma modal n'est pas accessible, il faut recourir à une base fonctionnelle pour décomposer les phénomènes, ce qui compromet l'interprétation physique des résultats et dégrade en général les propriétés de convergence.

En pratique, les méthodes modales deviennent fastidieuses en hautes fréquences, où il devient nécessaire de résoudre des systèmes linéaires de grande taille, et où se posent des problèmes de troncature des séries modales et des problèmes de tri modal. Ces difficultés ont motivé l'émergence de techniques spécialement adaptées aux hautes fréquences, ceci au prix d'approximations supplémentaires. On peut citer:

- l'Analyse Modale Asymptotique (AMA, "Asymptotic Modal Analysis") mise au point par DOWELL [13], qui donne le comportement asymptotique de l'Analyse Modale Classique lorsque la fréquence devient élevée, en remplaçant les concepts de réponse locale et de modes discrets par les concepts de réponse moyenne et de densité modale.
- l'Approche par Valeur Moyenne (MVA, "Mean Value Approach") énoncée par SKUDRZYK [74,75], qui fournit la réponse moyenne de la structure et les bornes de la réponse (minima et maxima) à l'aide des concepts de résonance, d'antirésonance et de structure infinie.
- la Méthode d'Échantillonnage Modal proposée récemment par GUYADER [23], qui fournit une approximation des résultats de l'Analyse Modale Classique en échantillonnant le nombre de modes dans la réponse.

Ces méthodes recourent de manière plus ou moins approchée les résultats de l'Analyse Modale Classique et fournissent les tendances utiles en hautes fréquences. De plus, elles semblent bien adaptées à des structures mécaniques complexes ou même à des assemblages de structures.

L'exposé des connaissances qui suit au long de ce chapitre est basé essentiellement sur les méthodes modales et dérivées; on se contente de donner ici, pour mémoire, quelques indications sur les méthodes statistiques et sur les méthodes de discrétisation.

2.3.2 Méthodes statistiques

Les méthodes statistiques, et en particulier l'Analyse Statistique de l'Energie (SEA, "Statistical Energy Analysis") [49], sont nées dans les années 60 du besoin de prédire le cheminement de l'énergie vibratoire dans des structures assemblées de grandes dimensions

(structures aéronautiques et spatiales). La méthode SEA repose sur un certain nombre d'hypothèses de travail, dont les plus importantes sont le caractère stationnaire ergodique de l'excitation, la valeur élevée de la densité modale mécanique et l'équirépartition de l'énergie entre les modes. Il s'agit d'une approche globale, qui permet d'évaluer la répartition de l'énergie entre différents sous-systèmes d'un système complexe, ces sous-systèmes pouvant être de nature mécanique ou acoustique. La SEA constitue un outil d'analyse puissant et conceptuellement riche, bien adapté à l'ingénieur. Cependant, ses limitations sont nombreuses: elle "oublie" l'aspect modal des phénomènes; elle ne permet pas d'obtenir localement l'information vibratoire ou acoustique; certains paramètres de la méthode sont difficilement accessibles par voie directe, ce qui en fait un outil d'analyse, non de prédiction; enfin, il est difficile, sinon impossible d'estimer les approximations sur lesquelles repose la SEA. Pour ces raisons, la SEA ne se qualifie pas comme méthode prédictive fine, en particulier dans la zone de fréquences où la structure admet un comportement modal marqué.

2.3.3 Méthodes de discrétisation

L'avènement de moyens informatiques évolués a permis le développement, durant les dix dernières années, de méthodes entièrement numériques spécialement adaptées aux problèmes vibroacoustiques. Ces méthodes utilisent la technique des Eléments Finis de Frontière (BEM, "Boundary Element Method") [44, pages 355-406]. La discrétisation spatiale de l'enveloppe rayonnante, et la connaissance des équations fondamentales du couplage élasto-acoustique, permettent à l'aide de cette technique le calcul numérique du champ vibratoire et du champ acoustique résultant en un point quelconque. La méthode par éléments finis de frontière offre l'avantage de s'appliquer à des structures de nature et de forme complexes, là où les moyens analytiques traditionnels échouent. Cependant, elle présente un certain nombre de limitations pour le chercheur: comme toute approche entièrement numérique, elle n'indique pas de manière explicite comment le modèle dépend de ses paramètres, elle offre peu de possibilités d'interprétation physique, se prête mal à l'étude de cas asymptotiques, et semble donc peu appropriée dans le cadre d'un travail qui vise à comprendre les phénomènes et à dégager, à partir d'un certains nombres de situations bien choisies, des règles générales.

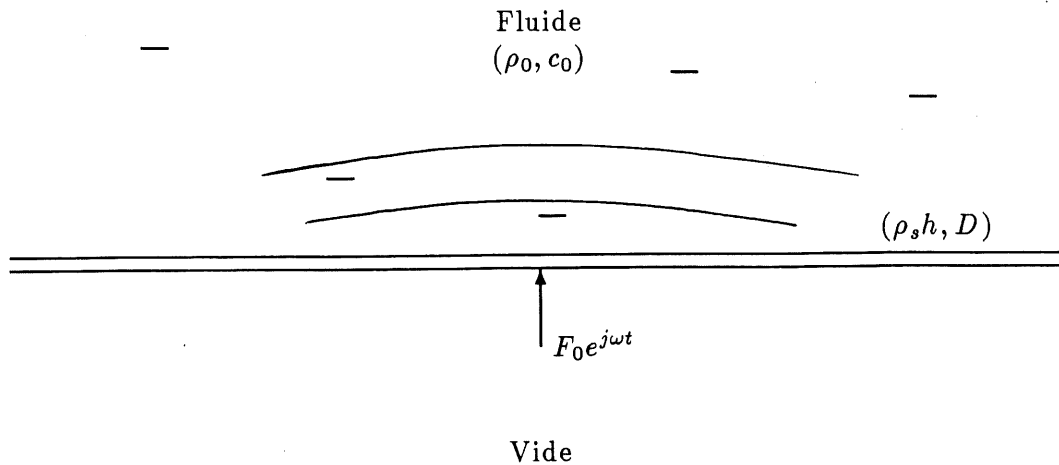


Figure 2.1: Rayonnement d'une plaque infinie en flexion

2.4 Mécanismes de rayonnement d'une plaque simple

2.4.1 Plaque simple infinie

Le cas d'un plan infini exposé à un demi-espace fluide fournit une base géométriquement simple pour l'analyse des mécanismes de rayonnement. Cette géométrie a été étudiée en détail par CRIGHTON, dans le cas d'un comportement de type membrane [7] ou d'un comportement de type plaque en flexion [8]. La discussion qui suit est restreinte au cas d'une plaque en flexion, dont $(\rho_s h)$ est la masse surfacique et D la rigidité de flexion; ρ_0 et c_0 sont respectivement la densité du fluide et la célérité des ondes acoustiques dans le fluide (figure 2.1).

Ce problème classique a été abordé dans la littérature pour diverses excitations harmoniques: ligne de force [8,81], force ponctuelle [9,56,30], ligne de moment et moment ponctuel [56], force répartie [29]. Pour chacun de ces problèmes, des expressions intégrales de la réponse vibratoire en tout point de la plaque et de la pression acoustique en tout point du fluide peuvent être données, grâce aux méthodes de transformations espace-nombre d'onde (transformée de Fourier spatiale, transformée de Hankel spatiale, décomposition en

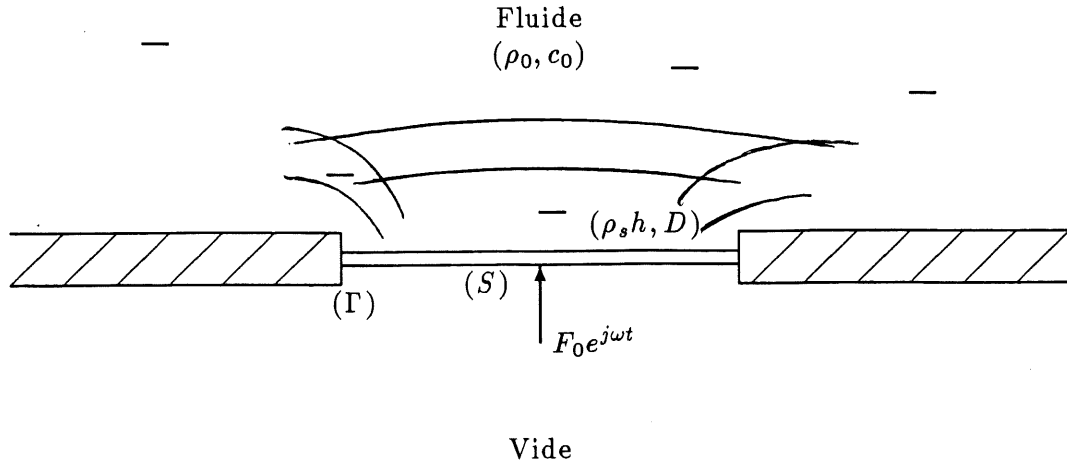


Figure 2.2: Rayonnement d'une plaque finie en flexion

ondes planes). De plus, des solutions explicites peuvent être trouvées pour la réponse de la structure au voisinage des excitations et à grande distance des excitations, ainsi que pour la pression acoustique dans le plan de la plaque ou dans le champ lointain de la plaque. Les méthodes de transformation espace–nombre d'onde sont particulièrement riches car elles permettent de préciser quelles sont les composantes du champ vibratoire qui participent efficacement à la réponse acoustique; en outre, comme l'a montré FAHY [15], ces méthodes s'appliquent intégralement à des géométries finies. Par contre, elles sont telles que la solution physique du problème, qu'il s'agisse du déplacement vibratoire en un point de la plaque ou de la pression acoustique rayonnée en un point du fluide, ne peut être recouverte qu'après transformation nombre d'onde–espace inverse. Cette transformation pose des difficultés mathématiques d'intégration dans le plan complexe, dont certaines ne sont pas résolues; à titre d'exemple, les conditions d'existence d'une onde de flexion libre dans une plaque chargée par un fluide ne sont pas encore éclaircies [81]. Il s'avère que, même dans le cas simple d'une plaque infinie excitée par une ligne de force, le champ vibratoire et le champ acoustique pariétal ont une structure extrêmement complexe. Le cas général fait apparaître un grand nombre de composantes, discutées en détail par CRIGHTON, et dont l'existence physique reste à démontrer. Ces quelques remarques suffisent sans doute

à situer le niveau de difficulté des problèmes abordés par le théoricien, et, en corollaire, le relatif dénuement du praticien face à des problèmes concrets.

Le cas particulier d'une plaque infinie immergée dans un milieu fluide léger est plus simple, et permet d'anticiper les tendances obtenues pour une plaque finie. CRIGHTON a montré que la condition de fluide léger s'applique lorsque le "paramètre adimensionnel de charge fluide" $\epsilon = \frac{\rho_0 c_0}{\rho_s h \omega_c}$ est petit devant 1; $\omega_c = c_0^2 \left(\frac{\rho_s h}{D}\right)^{1/2}$ est la pulsation dite "critique". Lorsque $\epsilon \ll 1$, les comportements simples suivants peuvent être observés:

- Il existe une onde mécanique évanescence confinée à la zone d'excitation et contribuant à créer un rayonnement acoustique dans le champ lointain.
- Il existe une onde mécanique propagative:
 - non-rayonnante si $\omega < \omega_c$
 - hyper-rayonnante si $\omega = \omega_c$
 - rayonnante si $\omega > \omega_c$

2.4.2 Plaque simple finie bafflée

Par comparaison avec le cas d'une plaque infinie le problème du rayonnement par une plaque finie bafflée introduit des conditions aux limites sur le contour (Γ) d'un domaine borné (S), et une condition de déplacement structural nul sur le baffle rigide (figure 2.2). La discontinuité plaque-baffle crée, comme c'est le cas au voisinage de l'excitation, une onde mécanique évanescence qui contribue efficacement au transfert acoustique. Un comportement semblable doit être anticipé pour toute forme d'inhomogénéité dans la structure (masse concentrée, variation d'épaisseur, raidisseur). L'aspect borné de la structure rend adéquate une description *modale* des phénomènes de rayonnement. L'existence de modes orthogonaux pour le système plaque-fluide a été discuté par JUNGER[27]; ces modes étant en général difficilement accessibles par le calcul, il est plus facile d'utiliser la base des modes *in-vacuo* de la plaque. LEPPINGTON [42] a montré que la réponse *in-vacuo* de la structure est une approximation satisfaisante de la réponse en présence du fluide si le

fluide est léger, sauf aux résonances. La réponse *in-vacuo* peut par ailleurs servir à initier une technique itérative [38], ou une technique de perturbation [16]. Dans le cas général, la présence du fluide se traduit par un couplage des modes *in-vacuo* de la plaque, c'est-à-dire un échange d'énergie entre deux modes distincts. Une description modale du rayonnement nécessite donc la connaissance des impédances modales de rayonnement, directes et croisées; physiquement, ces impédances permettent d'apprécier la capacité, pour un mode donné, d'induire via le fluide le mouvement d'un autre mode. La détermination des impédances modales de rayonnement est une des difficultés principales du problème. Ce point est plus amplement discuté au paragraphe suivant.

Si le fluide est léger, le couplage intermodal et l'effet de masse fluide entraînée sont habituellement négligés. Conséquemment, la résistance modale de rayonnement directe suffit seule à caractériser le rayonnement acoustique. On peut montrer sans difficulté que la résistance modale de rayonnement est directement proportionnelle à l'efficacité de rayonnement du mode considéré. De nombreux auteurs ont proposé des solutions plus ou moins approchées pour la résistance modale de rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appuis (déplacement et moment de flexion nuls sur le contour). MAIDANIK[55] a donné des formules simples pour différents régimes fréquentiels correspondant à une classification en modes de coins, de bords, et de surface. Ces expressions approchées, qui forment une solution globale discontinue sur l'échelle de fréquence, ont été raffinées par PRICE et CROCKER [68], puis LEPPINGTON [40]. WALLACE [87] a présenté sous forme graphique la solution exacte, évaluée numériquement des résistances modales pour un grand nombre de modes d'une plaque sur appui. Il faut noter que l'interprétation du rayonnement en modes de coins, de bords et de surface n'est en principe attachée qu'à une condition-limite particulière (appui simple); on ignore encore si cette interprétation peut être étendue à d'autres conditions aux limites.

Néanmoins à partir des résultats obtenus dans le cas d'un appui simple, il est possible, d'avancer une interprétation modale, générale et qualitative du rayonnement acoustique d'une structure finie immergée en fluide léger [42]; cette interprétation recoupe et nuance les conclusions énoncés pour une plaque infinie:

- si $\omega = \omega_c$ le rayonnement est maximal
- si $\omega < \omega_c$ le rayonnement est dû à des modes résonants-non rayonnants et à des modes non résonants-rayonnants
- si $\omega > \omega_c$ le rayonnement est dû à des modes résonants-rayonnants

2.4.3 Modélisation de l'interaction fluide-structure.

Les résultats qui précèdent ne peuvent être généralisés à une structure immergée dans un fluide lourd, pour laquelle l'effet de charge fluide doit être pris en compte. KELTIE [31] a montré que sous certaines conditions, le couplage intermodal peut être significatif et contribuer de manière sensible au bilan de puissance rayonnée. Comme l'ont noté DAVIES [10] et JUNGER [27], les effets de couplage intermodal sont paradoxalement plus complexes dans le cas d'une plaque que dans le cas d'une coque cylindrique ou sphérique. En effet, le couplage intermodal est:

- nul pour une coque sphérique ou un cylindre infini,
- nul pour les modes radiaux d'un cylindre fini,
- a priori non nul pour tous les modes d'une plaque finie.

Ces remarques semblent expliquer le faible nombre d'études consacrées au comportement vibratoire de plaques immergées dans l'eau. La détermination précise des impédances modales de rayonnement demeure l'obstacle théorique majeur au développement des connaissances, fondamentales et appliquées, dans ce domaine. LOMAS et HAYEK écrivent [47]:

“... an exact solution for the radiation impedance seems to be out of reach for some time to come.”

Le premier calcul exact des coefficients de couplage intermodal est dû à DAVIES [10]. La solution proposée par DAVIES est restreinte au cas d'une plaque sur appui simple, et ne s'applique que dans la zone fréquentielle où la longueur d'onde acoustique est supérieure ou comparable à la dimension caractéristique de la plaque. Les solutions de DAVIES ont

été utilisées par LOMAS et HAYEK pour prédire la réponse vibratoire et acoustique à une force ponctuelle d'une plaque rectangulaire encastrée ou simplement appuyée, immergée dans l'eau [47]. Les formules de DAVIES ont été raffinées par POPE et LEIBOWITZ [67], au prix de développements mathématiques extrêmement lourds. Ces difficultés sont liées à l'utilisation d'une transformation espace - nombre d'onde. Néanmoins, le recours à une telle transformation autorise une interprétation utile des résultats à partir de la classification classique en modes de coins, modes de bords, modes de surface. SANDMAN [70,71] a évalué numériquement ces coefficients de couplage intermodal et a discuté l'importance relative des termes directs et des termes croisés. Les quelques études dont il a été fait référence ici illustrent bien le caractère très fragmentaire des connaissances dans le domaine de l'interaction fluide-structure. Cette interaction est usuellement décrite par une série de coefficients exprimant le couplage des modes *in-vacuo* de la plaque. Il ne semble pas que le choix d'une base fonctionnelle autre que la base modale *in-vacuo* ait jamais été envisagé pour décrire l'interaction fluide-structure. Les solutions disponibles à ce jour sont limitées à des plaques rectangulaires uniformes présentant des conditions aux limites d'appui simple, et sont inexactes dès que la longueur d'onde acoustique devient petite.

2.4.4 Etudes portant sur les conditions aux limites de la structure

En termes mathématiques, les conditions aux limites de la structure assurent l'unicité de la solution à l'équation du mouvement vibratoire. Dans le cas d'une plaque en flexion, les conditions aux limites portent sur le déplacement et sa dérivée normale sur le contour (conditions géométriques), ainsi que sur le moment de flexion et l'effort tranchant sur le contour (conditions dynamiques), [60, pages 128-135]. Deux relations exprimées en termes de ces quatre grandeurs définissent complètement les conditions aux limites. Le cas de l'appui simple (déflexion et moment de flexion nuls sur le contour) est un cas idéal qui n'approche que très grossièrement la réalité dans la plupart des situations.

Dans la pratique les conditions aux limites sont généralement inconnues, difficilement accessibles, et très diversifiées; elles peuvent éventuellement varier d'un coté à l'autre

de manière continue ou localisée (fixations par vis, par boulons, par rivets, soudure par points,...). Il n'existe pas, à ce jour, de tentative pour qualifier, voire quantifier, des conditions aux limites réelles sur le plan vibratoire et acoustique.

L'interprétation du rayonnement en modes de coins, modes de bords, modes de surface, a montré l'importance, dans le cas d'une plaque bafflée sur appui simple, du champ vibratoire au voisinage des limites. Il apparaît raisonnable d'anticiper une grande sensibilité des phénomènes de transfert acoustique vis-à-vis des conditions aux limites. Pourtant, ce problème a été peu étudié.

Un grand nombre de travaux, par contre, ont montré que le schéma modal *in-vacuo* (fréquences propres et déformées propres) d'une plaque rectangulaire en flexion, est fortement influencé par les conditions aux limites en basses fréquences. Hormis le cas d'une plaque sur appui simple, le schéma modal n'est pas connu analytiquement, du fait de la non-séparabilité des variables d'espace. Physiquement, la non-séparabilité des variables d'espace exprime le fait que, pour des conditions aux limites quelconques, les lignes nodales ne sont en général pas parallèles aux côtés de la plaque. Une revue exhaustive des théories vibratoires disponibles avant 1970 a été faite par LEISSA [39], et des données précises y sont compilées pour des conditions aux limites simplement appuyées, encastées, libres, ou localement encastées. WARBURTON avait été le premier à proposer une méthode générale [88] pour l'étude des vibrations libres de la plaque en utilisant le produit des solutions de poutres correspondantes. Plus récemment, MUKHOPADHYAY [63], BHAT [2] et WU et LIU [91] ont résolu la réponse vibratoire d'une plaque dont le contour présente une rigidité finie en rotation à l'aide d'une méthode de Rayleigh-Ritz. GORMAN a encore étendu la généralité des conditions aux limites en prenant en considération une rigidité arbitraire des supports, à la fois en déflexion et en rotation (figure 2.3) [20,21].

L'étude de l'encastrement a initié les recherches concernant l'effet des conditions aux limites sur le rayonnement acoustique. MAIDANIK [55], puis NIKIFOROV [64] et LEPINGTON [41] ont démontré théoriquement que sous la fréquence critique, l'efficacité de rayonnement double en passant de l'appui à l'encastrement, confirmant le principe que

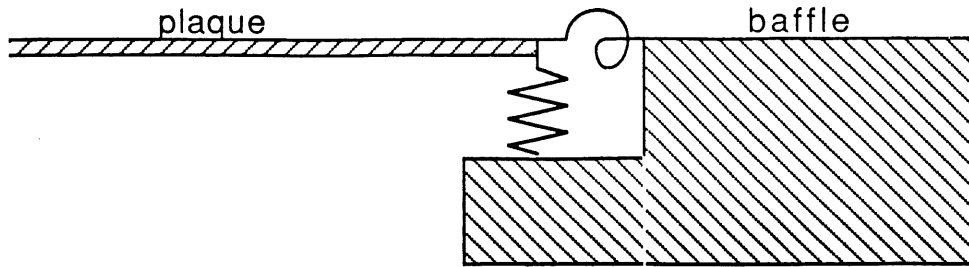


Figure 2.3: Condition de rigidité arbitraire en déflexion-rotation sur le contour d'une plaque bafflée

“plus une structure est contrainte, plus elle est efficace en rayonnement”. Cette propriété classique suppose néanmoins que la longueur d'onde acoustique est faible devant les dimensions caractéristiques de la plaque, ce qui en restreint l'application à de grandes structures et/ou des fréquences élevées. Ce résultat asymptotique a été vérifié par WALLACE [86], à l'aide de l'Analyse Modale Classique, dans le cas d'une poutre. Par ailleurs, LOMAS et HAYEK ont montré que, dans le domaine modal, l'efficacité de rayonnement est peu affectée par la rigidité du contour en rotation [47]. En termes plus simples, l'efficacité de rayonnement est sensiblement la même dans le cas de l'appui simple et dans le cas de l'encastrement. Des conditions aux limites plus générales, autorisant par exemple une déflexion sur le périmètre, ont été considérées par GOMPERTS [18,19] pour une géométrie rectangulaire, et par SUZUKI [83] pour une géométrie circulaire. Certains résultats partiels montrent la grande sensibilité du facteur de rayonnement vis-à-vis de la rigidité en déflexion du contour. La plaque libre est un cas particulier intéressant, dont le faible rayonnement acoustique a été mis en évidence expérimentalement par STRONG [82], et expliqué qualitativement par WILLIAMS [90].

Une synthèse sur l'effet des conditions aux limites reste à faire. L'examen des études entreprises jusqu'ici fait ressortir le besoin de développement nouveaux suivant les axes suivants: (i) établissement d'un modèles de conditions aux limites élastiques en deflexion et en rotation; (ii)établissement d'un modèle de conditions aux limites arbitrairement variables sur le contour; (iii)éclaircissement des résultats relatifs aux conditions encastree et libre.

2.4.5 Etudes portant sur l'adjonction de masse

L'adjonction ponctuelle de masse aux points d'entrée de l'énergie mécanique est une solution pratique potentielle pour diminuer la mobilité d'une structure vibrante. Dans de nombreuses situations, les efforts sont appliqués via des ancrages ou des paliers qui se comportent généralement comme des masses attachées. L'adjonction ponctuelle de masse sur la structure, en dehors des zones d'excitation présente également un intérêt pratique; cette situation permet de modéliser par exemple, dans le secteur aérospatial, la réponse d'équipements massiques fragiles sur une plate-forme vibrante, ou dans un contexte de métrologie, l'influence d'accéléromètres posés sur une structure légère.

Au point de vue vibratoire, la présence d'une masse discrète modifie le schéma modal de la structure. Il s'agit d'un problème classique, étudié entre autres par AMBA-RAO [1], MAGRAB [54] et SNOWDON [76]. SNOWDON s'est livré à un examen attentif des décalages induits par une masse ponctuelle sur les premières fréquences propres d'une plaque rectangulaire sur appui. Du point de vue de la réponse vibratoire, la masse opère un filtrage fréquentiel régi par les valeurs relatives de l'impédance de la masse et de la plaque. Dans les situations où la masse est interposée entre l'excitation et la structure, elle agit comme un filtre "coupe-haut", c'est-à-dire qu'elle bloque le mouvement vibratoire en hautes fréquences. SOEDEL [77] a étudié ce problème dans le contexte plus vaste de la méthode des réceptances, qui fournit un cadre conceptuel général pour l'étude de systèmes mécaniques couplés.

En termes de rayonnement acoustique, il faut anticiper deux comportements assez différents suivant que la charge massique et le point d'excitation sont confondus ou distincts. Dans le second cas, la masse crée une discontinuité locale sur la structure qui contribue efficacement au transfert acoustique; cet effet a été clairement mis en évidence par les mesures d'holographie acoustique de WATSON [89]. Dans le premier cas, les travaux de DONSKOI [12] permettent de conclure que la masse rajoutée a un effet bénéfique sur le rayonnement si sa réactance est supérieure à l'impédance mécanique de la plaque. Pour une masse donnée, cet effet est donc confiné à une région limitée de spectre fréquentiel. Ceci

recoupe les conclusions de SNOWDON [76] sur l'aspect vibratoire du problème. SANDMAN [71] a étudié le problème dans le cas d'une plaque rectangulaire en limitant l'analyse à la réponse locale de la plaque et du fluide, ce qui n'autorise pas de conclusion globale quant à l'effet d'une masse rajoutée sur le bruit rayonné.

Il s'avère donc pertinent d'estimer l'impact acoustique d'une telle solution sur la base d'indicateurs globaux - vitesse vibratoire moyenne et puissance acoustique rayonnée -, et de déterminer précisément la région fréquentielle où cette solution permet d'atteindre un gain acoustique substantiel.

2.5 Etudes portant sur l'adjonction d'éléments raidisseurs

Les raidisseurs désignent des éléments mécaniques adjoints à la structure et dont le but est d'accroître la rigidité de flexion sans augmenter considérablement la masse de la structure. Ils sont omniprésents dans les structures aéronautiques et navales, pour lesquelles le devis de masse est important. Les raidisseurs sont le plus souvent dimensionnés en fonction d'un comportement statique souhaité; de fait, la réponse dynamique des structures raidies est beaucoup moins bien connue que leur comportement statique.

Dans un grand nombre de situations, les raidisseurs définissent un réseau régulier unidimensionnel ou bidimensionnel sur la structure, et l'espacement entre deux raidisseurs consécutifs est généralement petit devant les dimensions de la structure. Pour ces raisons, l'étude dynamique de telles structures fait souvent l'hypothèse de géométrie infinie et périodique. La propagation d'ondes de flexion mécaniques dans de telles structures est bien connue [25,26], et est caractérisée dans le domaine fréquentiel par une alternance de bandes passantes et de bandes interdites. La présence d'un milieu fluide adjacent peut altérer ces phénomènes et créer des ponts d'énergie entre cellules inter-raideurs voisines [8]. Les études portant sur la propagation d'énergie vibratoire au sein de structures raidies infinies périodiques se distinguent surtout par la géométrie du réseau de raidisseurs, uni-

ou bi-dimensionnel, la prise en compte ou non de la charge fluide, et la modélisation dynamique des éléments raidisseurs. Sur ce dernier point, on peut citer l'étude de MEAD [58], dans laquelle sont introduits simultanément les effets de flexion et de torsion des raidisseurs. Les études portant sur le comportement vibratoire de structures finies raidies sont comparativement beaucoup moins nombreuses; on peut citer celles de WU et LIU [91], ou de LAURA et GUTIERREZ [37,22], la modélisation dynamique des raidisseurs utilisée dans ces travaux restant assez simple.

Les recherches sur le comportement acoustique de structure raidies sont plus récentes. Les premières études sont dues à MAIDANIK [55], et ont permis d'expliquer de manière théorique la paradoxale perte d'isolement en transmission constatée après adjonction de raidisseurs sur une cloison plane. La grande majorité des travaux entrepris depuis [14, 69,51,52,53,57] ont en commun: (i) l'hypothèse de géométrie infinie, (ii) une modélisation simple des raidisseurs avec prise en compte du seul effet de flexion (iii) l'absence de conclusions générales ou même d'information pratique quant à l'effet spécifique des raidisseurs sur les niveaux vibratoires ou acoustiques. Ces modèles peuvent donc être qualifiés de phénoménologiques. Des développements récents, dont ceux de LAULAGNET [36], ont permis, grâce à une modélisation fine des raidisseurs, de passer du stade des phénomènes à celui de la simulation.

Dans les circonstances où la structure vibrante est de dimensions restreintes, un modèle prédictif doit donc nécessairement inclure les aspects suivants: (i) la prise en compte d'une géométrie finie, (ii) une modélisation dynamique des raidisseurs permettant d'introduire les effets de flexion, de torsion, voire de gauchissement.

2.6 Conclusions

La revue des connaissances a permis de montrer que les phénomènes de rayonnement acoustique par les structures vibrantes sont bien compris pour des structures planes simples: les phénomènes vibratoires sont contrôlés par les fréquences propres de la structure, alors que les phénomènes acoustiques sont contrôlés par la fréquence critique, au delà de laquelle

l'efficacité de rayonnement est importante. L'outil privilégié pour l'étude de tels problèmes est l'approche modale, qui permet de mettre en évidence la grande sensibilité de la réponse vibratoire et acoustique vis-à-vis des caractéristiques mécaniques de la structure.

Les études qui incorporent des éléments complexes dans la description de la structure sont partielles et surtout qualitatives. Elles permettent très difficilement de guider l'ingénieur vers une solution pratique de réduction du bruit à partir des paramètres de décision qui sont les siens: dimensionnement, choix des matériaux, profil et répartition des raidisseurs, conditions de fixation... Pour tendre vers cet objectif, il est nécessaire d'étendre l'analyse dans les directions suivantes:

Conditions aux limites Etablissement d'un modèle permettant d'étudier le comportement vibroacoustique de la structure en fonction de la rigidité du contour en déflexion et en rotation. Cette rigidité pourra éventuellement varier de manière arbitraire le long du contour.

Ajout ponctuel de masse Etude de l'influence sur le comportement vibroacoustique de masses ponctuelles ajoutées aux points d'excitation de la structure ou en dehors des points d'excitation. Cette solution potentielle de réduction du bruit rayonné doit être évaluée sur la base d'indicateurs globaux, et non locaux, comme c'est le cas jusqu'à présent.

Ajout de raidisseurs Etude de l'influence sur le comportement vibroacoustique de raidisseurs ajoutés sur la structure, la modélisation devant tenir compte des données réelles accessibles au praticien: matériaux, dimensions, répartition des raidisseurs, forme des profils.

Interaction fluide-structure Extension des solutions simples disponibles à ce jour à des structures planes complexes présentant des conditions aux limites générales. Ce développement constituerait un progrès important dans la connaissance des mécanismes de rayonnement en fluide lourd par une structure complexe.

L'ensemble de ces développements, intégrés pour la première fois au sein d'un même modèle, doit en dernière analyse permettre de mieux appréhender la réalité. Naturellement, un cer-

tain nombre d'aspects importants ne sont pas abordés dans le cadre de cette étude: il convient de mentionner l'influence de l'amortissement de la structure, la loi de comportement élastique des matériaux, les structures composites ou multicouches, les structures perforées, les structures ondulées ou nervurées.

Première Partie

Fluide léger

Chapitre 3

Cadre théorique — Mise en œuvre pour un fluide léger

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est la mise en place des éléments théoriques qui décrivent la chaîne excitation mécanique — vibrations — bruit pour une plaque complexe. L'ensemble de ces éléments fournit le cadre théorique sur lequel s'appuie le reste de l'étude. Dans une première étape, ce cadre théorique est mis en œuvre dans le cas d'une structure rayonnant dans un fluide léger. Ce cas particulier est important puisqu'il décrit adéquatement le rayonnement dans l'air par la plupart des structures vibrantes; de plus, il fournit la base nécessaire à l'étude du rayonnement dans un fluide lourd, qui sera abordée dans la deuxième partie de ce travail.

Dans un premier temps, ce chapitre décrit précisément le problème envisagé, pose les hypothèses, et formule les équations générales qui régissent le comportement vibro-acoustique d'une structure plane en présence d'un fluide infini. Dans un second temps, ces équations sont solutionnées pour le problème particulier étudié, ceci en deux étapes: (i) réponse mécanique de la structure, (ii) rayonnement acoustique. L'hypothèse de fluide léger permet de découpler le problème vibratoire et le problème de rayonnement, ce qui revient à ignorer la présence du fluide dans le calcul de la réponse mécanique. Pour le problème

envisagé, le schéma modal de la structure *in-vacuo* n'est pas disponible; ceci rend difficilement applicables les techniques de l'Analyse Modale Classique. Dans ces conditions, la réponse mécanique de la structure est plutôt formulée à partir d'une approche variationnelle, et solutionnée à l'aide d'une méthode de Rayleigh-Ritz. La réponse acoustique de la structure est calculée dans une deuxième étape, à partir du profil des vitesses vibratoires sur la surface rayonnante.

Le recours à une base fonctionnelle non-modale pour décomposer les phénomènes vibratoires et acoustiques a les implications suivantes:

- (i) la mise en œuvre de la méthode n'est pas simple; l'interprétation physique des résultats ainsi que l'analyse en termes de modes, des phénomènes de rayonnement n'est pas directe.
- (ii) la généralité du problème étudié est beaucoup plus grande; de plus, le choix d'une base fonctionnelle simple permet de faire émerger des expressions analytiques originales qui rendent l'approche performante, compte tenu de la complexité de la structure.

3.2 Position du problème

3.2.1 Description du problème

Soit une plaque mince rectangulaire occupant le domaine $-\frac{a}{2} \leq x \leq +\frac{a}{2}$; $-\frac{b}{2} \leq y \leq +\frac{b}{2}$; $-\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}$ dans le repère cartésien (x, y, z) , et insérée dans un baffle plan, infini, rigide (figure 3.1). Le système plaque-baffle sépare un milieu fluide infini ($z > +\frac{h}{2}$) du vide ($z < -\frac{h}{2}$). L'hypothèse de condensation conduit à assimiler la plaque à une surface contenue dans le plan $z = 0$, notée (S) , de contour noté (Γ) . Par extension, on admettra que le milieu fluide occupe le domaine $z > 0$.

A chaque point P du contour (Γ) est associé un repère local $(\vec{n}_e, \vec{\Gamma}, \vec{z})$. \vec{n}_e est le vecteur unitaire normal à (Γ) , extérieur à (S) ; $\vec{\Gamma}$ est le vecteur unitaire tangent à (Γ) , et formant un angle $+\frac{\pi}{2}$ avec \vec{n}_e , et \vec{z} est le vecteur unitaire normal à la plaque et pointant dans le fluide. La structure est schématisée à la figure 3.2. Les hypothèses mécaniques sont les suivantes:

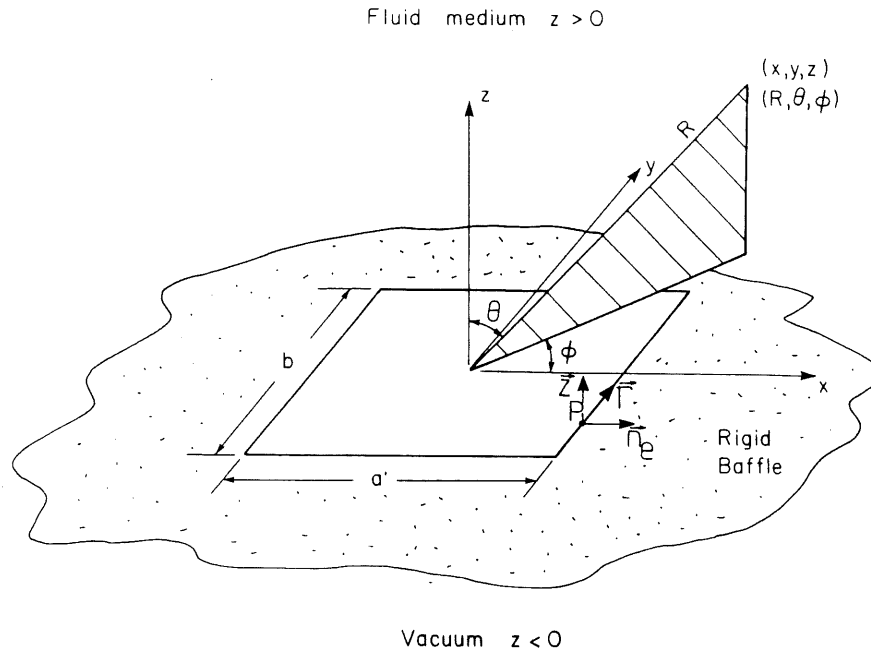


Figure 3.1: Géométrie du problème et systèmes de coordonnées

- L'excitation est une force mécanique normale à la plaque, dont la distribution spatiale et la dépendance temporelle ne font l'objet d'aucune hypothèse pour l'instant; la force mécanique par unité de surface est connue, et notée $f(x, y, t)$. Dans la suite de ce travail, lorsque les phénomènes ont une dépendance temporelle sinusoïdale, la convention $e^{+j\omega t}$ est sous-entendue.
- Le contour (Γ) est supporté de manière élastique en déflexion et en rotation. $K(P)$ (Nm^{-2}) et $C(P)$ (N) sont respectivement la rigidité en déflexion et la rigidité en rotation des supports, par unité de longueur, en un point courant P du contour.
- La surface (S) est une plaque mince homogène qui supporte:
 - N_S raidisseurs $(S_k)_{k=1, N_S}$ dont l'orientation et la position ne sont pas particularisées pour le moment.
 - N_m masses ponctuelles $(m_i)_{i=1, N_m}$ arbitrairement réparties.
 - N_k raideurs ponctuelles $(k_j)_{j=1, N_k}$ arbitrairement réparties.

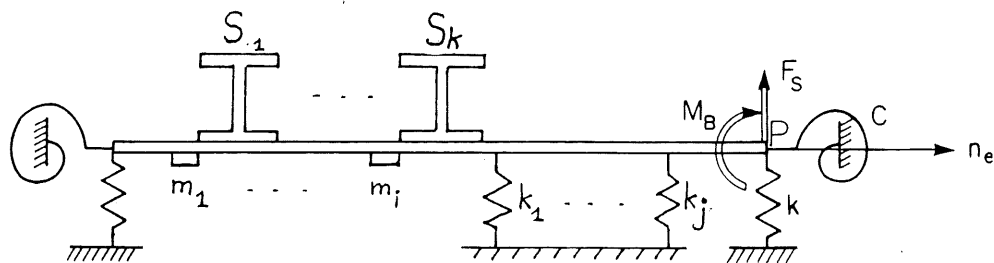


Figure 3.2: Caractéristiques mécaniques de la structure

L'analyse théorique est basée sur un certain nombre d'hypothèses dont on rappelle les plus importantes:

- L'ensemble des phénomènes dynamiques – déplacement vibratoire, pression acoustique – ont une amplitude faible autour des valeurs à l'équilibre, de sorte que le comportement du système est linéaire.
- La structure vibrante est bafflée, et le rayonnement acoustique est confiné à un demi-espace fluide. Cet artifice théorique permet d'obtenir une condition de vitesse nulle dans le plan $z = 0$, ailleurs que sur S . Certains résultats antérieurs [8] montrent que la condition bafflée modifie sensiblement le rayonnement acoustique de la plaque sous la fréquence critique; il s'agit d'un problème encore ouvert au niveau de la recherche.
- Le milieu fluide est sans pertes et immobile; la présence d'un mouvement d'ensemble du fluide par rapport à la structure modifie notablement certains phénomènes, comme l'ont montré CHANG et LEEHEY [5].

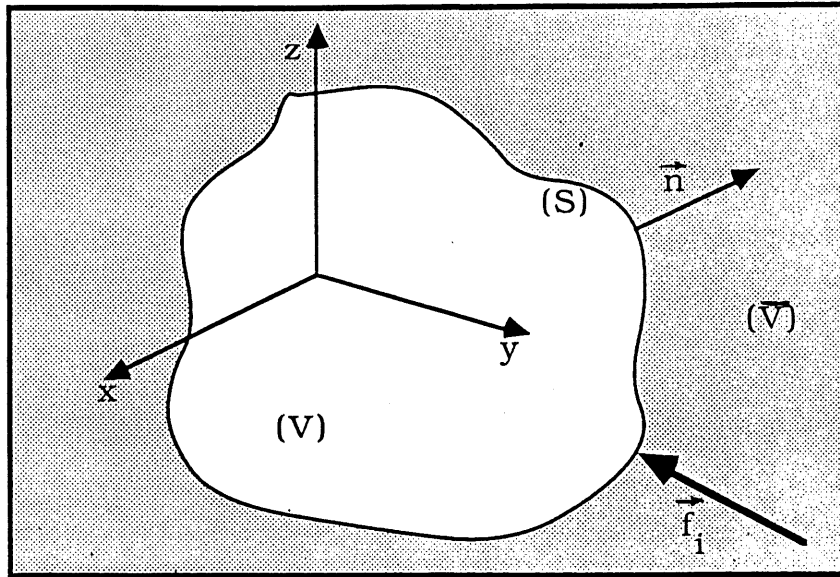


Figure 3.3: Volume élastique immergé dans un fluide infini

3.2.2 Equations générales du comportement vibro acoustique

Les équations de base sont présentées ici pour un problème général de rayonnement extérieur; elles seront par la suite particularisées et solutionnées pour le problème particulier qui vient d'être décrit.

Soit un volume solide élastique (V) limité par une frontière (S) de normale extérieure \vec{n} , et immergé dans un milieu fluide infini (\bar{V}) dans lequel la densité est ρ_0 et la célérité des ondes acoustiques est c_0 (figure 3.3). On note $(u_i)_{i=1,2,3}$ les trois composantes du déplacement \vec{u} au sein du volume (V), repérées dans le système d'axes cartésien (x, y, z) . Par ailleurs, p est la pression acoustique au sein du volume (\bar{V}). Les équations générales se répartissent en trois groupes: celles portant sur le volume solide (V), celles portant sur le volume fluide (\bar{V}) et celles portant sur la frontière (S).

Dans (V), les relations qui s'appliquent sont l'équation du mouvement, la loi de comportement du matériau, et la relation contrainte-déformation. Elles font intervenir les forces de volume f_i , le tenseur des contraintes σ_{ij} , le tenseur des déformations ϵ_{kl} et les

coefficients élastiques C_{ijkl} . Ces relations s'écrivent, avec la convention d'indice muet:

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_i(M, t)}{\partial t^2} = f_i(M, t) + \sigma_{ij,j}(M, t) \quad \text{dans } (V) \quad (3.1)$$

$$\sigma_{ij,j}(M, t) = C_{ijkl}(M) \epsilon_{kl}(M, t) \quad \text{dans } (V) \quad (3.2)$$

$$\epsilon_{kl} = 1/2 (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad \text{dans } (V) \quad (3.3)$$

où ρ_s est la masse volumique du solide.

Dans (\bar{V}) , la relation portant sur la pression acoustique est l'équation d'onde. En l'absence de source acoustique,

$$\nabla^2 p(M', t) - 1/c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(M', t) = 0 \quad \text{dans } (\bar{V}) \quad (3.4)$$

Pour assurer l'unicité de la solution de pression acoustique, il faut adjoindre à l'équation d'onde une condition limite de rayonnement à grande distance du volume (V) , dite condition de Sommerfeld.

Sur (S) , on dispose en toute généralité soit de conditions cinématiques imposant une valeur au déplacement u_i , soit de conditions dynamiques imposant une valeur à la contrainte normale à la surface (S) . Les conditions dynamiques s'écrivent

$$\sigma_{ij}(P, t) n_j(P, t) = \bar{f}_i(P, t) \quad \text{sur } (S) \quad (3.5)$$

$(n_j)_{j=1,2,3}$ sont les composantes de \vec{n} et \bar{f}_i représente les forces de surface, qui comprennent les forces mécaniques appliquées et les pressions acoustiques pariétales. Une troisième condition exprime la continuité des vitesses normales mécanique et acoustique à l'interface solide-fluide,

$$-\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(P, t) = \vec{\nabla} p(P, t) \vec{n}(P, t) \quad \text{sur } (S) \quad (3.6)$$

L'ensemble des relations (3.1) à (3.6), muni des conditions cinématiques sur la surface (S) et de la condition de Sommerfeld dans (\bar{V}) constitue le système d'équations régissant

le comportement vibro acoustique du volume (V) soumis à des forces de volume ou de surface. La résolution d'un tel système pour un problème général présente des difficultés considérables, et l'on n'accède le plus souvent qu'à des solutions approchées. Les méthodes de résolution approchées utilisent rarement les équations du mouvement du solide élastique sous la forme qui vient d'être présentée — équations (3.1),(3.2),(3.3) et (3.5) —, mais plutôt sous une forme variationnelle qui est exposée ci-après.

3.2.3 Formulation variationnelle

L'approche variationnelle est une formulation intégrale du mouvement d'un système ¹. Son application aux problèmes d'élasticité a connu de nombreux succès car elle constitue un moyen général et systématique de fournir les équations du mouvement et le nombre nécessaire et suffisant de conditions aux limites qui doivent physiquement être vérifiées par le milieu élastique [60,35]. Son attrait est de raisonner en termes de quantités énergétiques et scalaires — travail, énergie cinétique, énergie de déformation — et il est plus facile, pour des systèmes complexes, de calculer ces quantités et de suggérer des approximations physiques pour ces quantités, que pour des quantités vectorielles — forces, moments — comme c'est le cas dans l'approche newtonienne.

L'approche variationnelle introduit une intégrale d'action, ou fonctionnelle. Le mouvement du système est caractérisé par une condition de stationnarité de cette fonctionnelle. La fonctionnelle de Hamilton, qui est l'intégrale entre deux instants arbitraires t_0 et t_1 du Lagrangien du système, a l'expression suivante,

$$\mathcal{H}(\vec{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{(V)} \left(\frac{1}{2} \rho_s \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} C_{ijkl} \epsilon_{kl} + f_i u_i \right) dv + \int_{(S)} \bar{f}_i u_i ds \right] dt \quad (3.7)$$

Les termes qui apparaissent sous l'intégrale temporelle sont respectivement l'énergie cinétique du système, l'énergie de déformation du système, le travail des forces de volume et le

¹Pour une discussion générale des principes, voir par exemple R.P. Feynman, R.B. Leighton et M. Sands, "The Feynman Lectures on Physics," Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1964, Vol.II, chap. 19.

travail des forces de surface. Le théorème de Hamilton appliqué aux problèmes d'élasticité s'énonce comme suit:

Si la fonction \vec{u} , définie sur (V) , rend \mathcal{H} extrême, et si \vec{u} vérifie les conditions aux limites cinématiques sur (S) , alors \vec{u} vérifie:

- l'équation du mouvement

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \sigma_{ij,j} \quad \text{dans } (V), \forall t \in]t_0, t_1[$$

- les conditions aux limites dynamiques

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{f}_i \quad \text{sur } (S), \forall t \in]t_0, t_1[$$

Le problème d'élasticité se ramène donc à la recherche des extremums de \mathcal{H} , \vec{u} décrivant le sous-espace des fonctions de déplacement compatibles avec les conditions aux limites géométriques sur la surface (S) . La résolution du problème vibratoire est, dès lors, une démarche en trois étapes: (i) construction de la fonctionnelle de Hamilton; (ii) choix du sous-espace fonctionnel sur lequel s'effectue la recherche des extremums; (iii) recherche des extremums.

3.3 Vibrations de la structure — Formulation

3.3.1 Construction de la fonctionnelle de Hamilton

La fonctionnelle de Hamilton, pour la structure considérée en 3.2.1, a l'expression suivante:

$$\mathcal{H}(\vec{u}) = \int_{t_0}^{t_1} (T - V + W) dt \quad (3.8)$$

avec:

$$T = T^{(plaque)} + \sum_{k=1}^{N_s} T_k^{(raidisseur)} + \sum_{i=1}^{N_m} T_i^{(masse)} \quad (3.9)$$

$$V = V^{(plaque)} + \sum_{k=1}^{N_s} V_k^{(raidisseur)} + \sum_{j=1}^{N_m} V_j^{(raideur)} + V^{(contour)} \quad (3.10)$$

T est l'énergie cinétique totale. La propriété d'additivité des énergies permet de décomposer T en énergie cinétique propre de la plaque $T^{(plaque)}$, des raidisseurs $T_k^{(raidisseur)}$, et des masses ponctuelles $T_i^{(masse)}$. V est l'énergie de déformation totale, formée de l'énergie de déformation de la plaque $V^{(plaque)}$, des raidisseurs $V_k^{(raidisseur)}$, des raideurs ponctuelles $V_j^{(raideur)}$, et des ressorts de contour $V^{(contour)}$. W est le travail de toutes les forces extérieures appliquées à la structure. Ces forces extérieures comprennent les forces mécaniques appliquées et la pression acoustique pariétale; les forces de volume ne seront pas considérées dans la suite de ce travail. Avant de procéder à l'évaluation des différents termes du Hamiltonien, il est bon de faire deux remarques:

- Jusqu'ici, aucun phénomène de dissipation au sein de la structure n'a été considéré; habituellement, l'amortissement structural est introduit *a posteriori* dans la fonctionnelle de Hamilton, sous la forme de coefficients élastiques complexes. Ceci n'est valable que pour des mouvements dynamiques dont la dépendance temporelle est une fonction sinusoïdale [44, page 21].
- L'additivité des énergies et des travaux rend l'approche variationnelle particulièrement bien adaptée à des structures complexes, pour lesquelles la fonctionnelle peut être décomposée sur les différentes composantes mécaniques; dans ce sens, il est possible d'élaborer un modèle évolutif, incorporant pas à pas des éléments de complexité croissante.

3.3.2 Energie de la plaque

Le calcul de l'énergie cinétique et de l'énergie de déformation de la plaque passe tout d'abord par le choix d'un champ de déplacement qui décrit correctement le mouvement de la structure. Ce choix est effectué compte tenu de la géométrie de la structure et de la nature de l'excitation. On supposera la plaque suffisamment mince, de sorte que les contraintes et les déformations ont lieu dans le plan de la plaque; de plus, les excitations sont telles que l'effet prépondérant est la flexion, normale au plan de la plaque. Le champ de déplacement retenu correspond aux hypothèses classiques de Love-Kirchhoff; en notant

u_1, u_2, u_3 les composantes du vecteur déplacement \vec{u} dans le repère (x, y, z) ,

$$\begin{cases} u_1(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial x} \\ u_2(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial y} \\ u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (3.11)$$

Physiquement, les déformations sont telles que toute section droite déformée reste normale au plan moyen déformé de la plaque. Le champ de déplacement (3.11) indique que la seule variable cinématique indépendante est $w(x, y, t)$, déplacement vertical du feuillet moyen ($z = 0$) de la plaque. Compte tenu de ces hypothèses cinématiques, l'énergie cinétique de la plaque est

$$T^{(plaque)} = \int_{(S)} \frac{1}{2} \rho_s h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (3.12)$$

Dans cette expression, l'inertie rotationnelle des sections droites de la plaque n'apparaît pas. Ce terme, proportionnel à h^3 , peut être négligé pour des plaques minces. En utilisant les variables d'espace adimensionnelles $\alpha = \frac{2}{a}x$, $\beta = \frac{2}{b}y$ et en définissant par $r = \frac{a}{b}$ l'allongement de la plaque,

$$T^{(plaque)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{8} \rho_s h \frac{a^2}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 d\alpha d\beta \quad (3.13)$$

A partir du champ de déplacement (3.11), de la relation déformation-déplacement (3.3) et de la relation contrainte-déformation (3.2) appliquée à un matériau isotrope, l'énergie élastique de la plaque mince est

$$\begin{aligned} V^{(plaque)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} 2 \frac{D}{a^2 r} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right)^2 + r^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right)^2 + 2\nu r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \right. \\ \left. 2(1 - \nu) r^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 \right] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (3.14)$$

où D est la rigidité de flexion de la plaque et ν le coefficient de Poisson du matériau.

3.3.3 Energie cinétique des masses ponctuelles

Soit x_i, y_i les coordonnées de la $i^{\text{ème}}$ masse ponctuelle m_i , et $\alpha_i = \frac{2}{a}x_i$, $\beta_i = \frac{2}{b}y_i$ les coordonnées adimensionnelles associées. L'énergie cinétique T_i^{masse} de cette masse est

$$T_i^{masse} = \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial w(\alpha_i, \beta_i, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (3.15)$$

Cette expression suppose implicitement que la masse m_i ne présente pas d'inertie rotationnelle et que sa présence laisse localement inchangée l'hypothèse cinématique (3.11). En pratique, ces approximations conviennent à des masses rajoutées faibles et dont les dimensions sont petites vis-à-vis de la longueur d'onde de flexion [74]. En référant la masse rajoutée m_i à la masse de la plaque seule, il est possible d'écrire

$$m_i = \mu_i \rho_s h \frac{a^2}{r} \quad (3.16)$$

où μ_i est un taux de masse rajoutée. Reportant (3.16) dans (3.15)

$$T_i^{masse} = \frac{1}{2} \mu_i \rho_s h \frac{a^2}{r} \left(\frac{\partial w(\alpha_i, \beta_i, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (3.17)$$

3.3.4 Energie de déformation des raideurs ponctuelles

Soit x_j, y_j les coordonnées de la $j^{\text{ème}}$ raideur ponctuelle k_j ($N m^{-1}$) et $\alpha_j = \frac{z}{a} x_j, \beta_j = \frac{z}{b} y_j$ les coordonnées adimensionnelles associées. L'énergie de déformation du ressort est

$$V_j^{(raideur)} = \frac{1}{2} k_j w^2(\alpha_j, \beta_j, t) \quad (3.18)$$

Il est possible de référencer la raideur ponctuelle k_j à la rigidité de flexion de la plaque seule en définissant le paramètre sans dimension κ_j tel que

$$k_j = \kappa_j \frac{D}{a^2} \quad (3.19)$$

Reportant (3.19) dans (3.18),

$$V_j^{(raideur)} = \frac{1}{2} \kappa_j \frac{D}{a^2} w^2(\alpha_j, \beta_j, t) \quad (3.20)$$

3.3.5 Energie de déformation aux limites

L'énergie de déformation aux limites est l'énergie élastique emmagasinée dans les ressorts de translation et de rotation distribués le long du contour (Γ) de la plaque (figure 3.2). Ces ressorts exercent sur la plaque, en tout point P de (Γ), une force de cisaillement $\vec{F}_S(P, t)$ et un moment de flexion $\vec{M}_B(P, t)$ donnés par

$$\vec{F}_S(P, t) = -K(P)w(P, t)\vec{z} \quad (3.21)$$

$$\vec{M}_B(P, t) = +C(P) \frac{\partial w}{\partial n_e}(P, t) \vec{\Gamma} \quad (3.22)$$

Il est possible d'obtenir une expression adimensionnelle des rigidités aux limites en définissant en tout point du contour les paramètres $k(P)$ et $c(P)$ tels que

$$K(P) = k(P) \frac{D}{a^3} \quad (3.23)$$

$$C(P) = c(P) \frac{D}{a} \quad (3.24)$$

où $k(P)$ et $c(P)$ sont deux paramètres sans dimension caractérisant la rigidité des supports par rapport à la rigidité de flexion de la plaque. L'énergie de déformation aux limites est l'énergie potentielle des forces et moments conservatifs $\vec{F}_S(P, t)$ et $\vec{M}_B(P, t)$, sommée le long du contour,

$$V^{(contour)} = \int_{(\Gamma)} \left[\frac{1}{2} K(P, t) w^2(P, t) + \frac{1}{2} C(P, t) \left(\frac{\partial w}{\partial n_e}(P, t) \right)^2 \right] d\Gamma \quad (3.25)$$

où, de manière équivalente,

$$\begin{aligned} V^{(contour)} = & \frac{D}{a^2} \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{k}{4} [w^2(\alpha, 1) + w^2(\alpha, -1)] d\alpha + \right. \\ & \int_{-1}^{+1} \frac{k}{4r} [w^2(1, \beta) + w^2(-1, \beta)] d\beta + \\ & \int_{-1}^{+1} cr^2 \left[\left(\frac{\partial w(\alpha, 1)}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(\alpha, -1)}{\partial \beta} \right)^2 \right] d\alpha + \\ & \left. \int_{-1}^{+1} \frac{c}{r} \left[\left(\frac{\partial w(1, \beta)}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(-1, \beta)}{\partial \alpha} \right)^2 \right] d\beta \right\} \quad (3.26) \end{aligned}$$

Dans l'équation (3.26), la sommation a été décomposée en quatre contributions représentant chacune un côté de la plaque. L'expression obtenue fournit donc le terme général qui traduit l'existence de conditions aux limites élastiques en déflexion-rotation pour une plaque mince. Ce terme apparaît sous une forme partielle dans des travaux antérieurs, notamment ceux de WU et LIU [91] et BHAT [2]. Dans ces derniers travaux, la raideur de translation aux limites est prise infinie, de sorte que seule la gamme de conditions située entre l'appui simple et l'encastrement peut être explorée. L'expression (3.26) constitue la forme générale qui inclut les effets de déflexion et de rotation du contour. En particulier, les relations développées ne contiennent pas d'hypothèses sur les variations des paramètres de rigidité k et c le long du contour; la formulation proposée inclut donc de manière implicite les situations où k et c varient d'un côté à l'autre du contour, ou varient le long d'un côté, que

Tableau 3.1: Cas extrêmes de conditions aux limites prévus par la théorie

| k | c | condition aux limites |
|----------|----------|-----------------------|
| 0 | 0 | libre |
| 0 | ∞ | guidé |
| ∞ | 0 | simplement supporté |
| ∞ | ∞ | encastré |

ce soit de manière continue ou discrète. L'approche proposée dépasse donc en généralité l'analyse de GOMPERTS [19], où deux côtés de la plaque sont nécessairement guidés ou simplement supportés, et également les méthodes de solution de poutre [88,11] et de LEVY [20,21], qui contiennent implicitement l'hypothèse d'uniformité de la condition aux limites le long d'un côté donné de la plaque.

Le tableau 3.1 fournit les cas extrêmes de conditions aux limites prévus par la théorie, correspondant à des valeurs nulle ou infinie des paramètres de rigidité k et c . Ces cas extrêmes sont importants car ils doivent fournir des bornes du comportement vibratoire et acoustique d'une structure réelle présentant des conditions aux limites élastiques.

3.3.6 Energie des raidisseurs

Hypothèses cinématiques et champ de déplacement

Au sens de l'approche variationnelle, l'adjonction d'éléments mécaniques raidisseurs crée deux termes d'énergie supplémentaires — l'énergie de déformation des raidisseurs, qui traduit l'accroissement de rigidité, et l'énergie cinétique des raidisseurs, qui traduit l'accroissement de masse. L'accroissement de masse, qui est généralement important pour des structures aéronautiques, n'est pas pris en compte par des méthodes simples qui assimilent les raidisseurs à des ressorts de traction-compression, ou de torsion.

Le calcul de ces termes d'énergie nécessite préalablement le choix d'un champ de

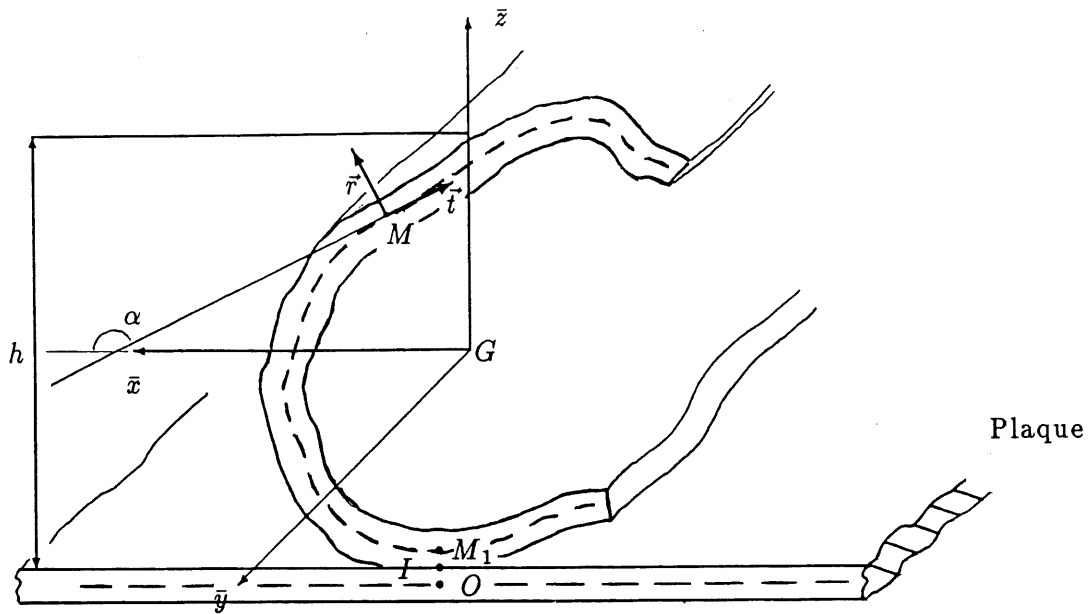


Figure 3.4: Profil d'un raidisseur et systèmes de coordonnées

déplacement qui représente adéquatement les mouvements possibles d'un raidisseur couplé à un plaque mince en flexion. La plupart des études orientées vers le calcul du rayonnement acoustique [14,53,57] ne tiennent compte que de la seule flexion des raidisseurs. La modélisation dynamique qui suit introduit simultanément les effets de flexion et de torsion des raidisseurs; cette modélisation utilise la théorie des poutres longues en voile mince, due à VLASSOV [84], et reprend en partie les développements de LAULAGNET [36]. Les relations obtenues sont générales, et ne particularisent ni la forme des raidisseurs, ni la géométrie des jonctions plaque-raidisseurs.

Soit une section droite de raidisseur, repérée par le référentiel $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ d'origine prise au centre de gravité G du profil (figure 3.4). La théorie des poutres longues en voile mince postule que l'épaisseur e du profil reste faible devant une dimension caractéristique h du profil. Cette hypothèse conduit à définir une ligne moyenne du profil, qui est orientée et munie en un point courant M d'un repère local (\vec{t}, \vec{r}) ; \vec{t} et \vec{r} sont les vecteurs unitaires respectivement tangent et normal à la ligne moyenne en M .

Le champ de déplacement de la section droite est dès lors représenté par le déplacement

$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ repéré dans $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ d'un point courant M sur la ligne moyenne. De plus, la jonction plaque-raisseur est supposée linéique. I est le point d'attache pour la section droite considérée et M_1 et O sont respectivement les points de la ligne moyenne du raidisseur et du feuillet moyen de la plaque situés au droit du point d'attache. Les autres hypothèses de la théorie des poutres longues en voile mince sont les suivantes:

- (i) absence de déformation dans le plan de la section droite.
- (ii) absence de distorsion de la surface moyenne du raidisseur.

L'hypothèse (i) indique l'indéformabilité du profil vis-à-vis des mouvements dans son plan. Il est possible de montrer qu'en effet les phénomènes de flexion et de déversement du profil n'apparaissent qu'à fréquence élevée. En conséquence, les déplacements d'un point courant M dans le plan (\bar{x}, \bar{z}) sont donnés par:

$$\bar{u}(M) = \bar{u}(A) - [\bar{z}(M) - \bar{z}(A)]\bar{\theta} \quad (3.27)$$

$$\bar{w}(M) = \bar{w}(A) + [\bar{x}(M) - \bar{x}(A)]\bar{\theta} \quad (3.28)$$

où A est un point arbitraire du plan (\bar{x}, \bar{z}) , solidaire de la section droite et $\bar{\theta}$ est la rotation rigide du profil, constante pour chaque section droite.

L'hypothèse (ii) traduit la nullité du cisaillement dans le plan (\bar{y}, t) ; dans ce plan, les droites $\bar{y} = cste$ et $t = cste$ restent perpendiculaires après déformation. Cette hypothèse conduit donc à la relation:

$$\frac{\partial \bar{u}_t(M)}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}(M)}{\partial t} = 0 \quad (3.29)$$

où $\bar{u}_t(M)$ est le déplacement de M projeté sur l'axe orienté t ; en notant α l'angle formé par les axes \bar{x} et t :

$$\bar{u}_t(M) = \bar{u}(M) \cos \alpha + \bar{w}(M) \sin \alpha \quad (3.30)$$

Compte tenu de (3.27) et (3.28)

$$\begin{aligned} \bar{u}_t(M) = & \bar{u}(A') \cos \alpha + \bar{w}(A') \sin \alpha - \\ & [\bar{z}(M) - \bar{z}(A')]\bar{\theta} \cos \alpha + [\bar{x}(M) - \bar{x}(A')]\bar{\theta} \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.31)$$

A' désigne un point arbitraire du plan (\bar{x}, \bar{z}) , solidaire de la section droite. La relation (3.29) permet de calculer le déplacement axial $\bar{v}(M)$ du raidisseur, qui, adjoint aux déplacements

$\bar{u}(M), \bar{w}(M)$ définit complètement le champ de déplacement du raidisseur. Intégrant (3.29) par rapport à t entre les points M_1 et M :

$$\begin{aligned} \bar{v}(M) = & \bar{v}(M_1) - \int_{M_1}^M \left[\frac{\partial \bar{u}(A')}{\partial \bar{y}} - (\bar{z}(M') - \bar{z}(A')) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{y}} \right] \cos \alpha dt \\ & - \int_{M_1}^M \left[\frac{\partial \bar{w}(A')}{\partial \bar{y}} + (\bar{x}(M') - \bar{x}(A')) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{y}} \right] \sin \alpha dt \end{aligned} \quad (3.32)$$

Comme $\cos \alpha dt = d\bar{x}$ et $\sin \alpha dt = d\bar{z}$, il vient:

$$\begin{aligned} \bar{v}(M) = & \bar{v}(M_1) - \frac{\partial \bar{u}(A')}{\partial \bar{y}} [\bar{x}(M) - \bar{x}(M_1)] - \frac{\partial \bar{w}(A')}{\partial \bar{y}} [\bar{z}(M) - \bar{z}(M_1)] \\ & + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{y}} \left[\int_{M_1}^M [\bar{z}(M') - \bar{z}(A')] d\bar{x} - \int_{M_1}^M [(\bar{x}(M') - \bar{x}(A'))] d\bar{z} \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

La relation (3.33) complète et termine la détermination du champ de déplacement du raidisseur. Cette relation fait apparaitre, en plus des rotations de la section droite autour de l'axe \bar{x} et de l'axe \bar{z} , un déplacement longitudinal dit "complémentaire", proportionnel à $\partial \bar{\theta} / \partial \bar{y}$, et qui indique le gauchissement de la section droite. Le terme

$$\int_{M_1}^M [\bar{z}(M') - \bar{z}(A')] d\bar{x} - \int_{M_1}^M [(\bar{x}(M') - \bar{x}(A'))] d\bar{z}$$

qui ne dépend que de la géométrie de la section droite, est appelé "aire sectorielle" de pôle A' . Pour des profils pleins ou fermés, l'aire sectorielle est nulle quelque soit le point M , et la relation (3.33) est alors connue sous le nom de loi des sections planes. Exception faite des situations où la section droite est de grande dimension et est non symétrique par rapport à l'axe ($G\bar{z}$), le gauchissement est un effet secondaire dont l'influence est faible. Par la suite, le phénomène de gauchissement est négligé, de sorte que le champ de déplacement retenu est conforme à la loi des sections planes:

$$\begin{cases} \bar{u}(M) = \bar{u}(A) - [\bar{z}(M) - \bar{z}(A)] \bar{\theta} \\ \bar{v}(M) = \bar{v}(M_1) - \frac{\partial \bar{u}(A')}{\partial \bar{y}} [\bar{x}(M) - \bar{x}(M_1)] - \frac{\partial \bar{w}(A')}{\partial \bar{y}} [\bar{z}(M) - \bar{z}(M_1)] \\ \bar{w}(M) = \bar{w}(A) + [\bar{x}(M) - \bar{x}(A)] \bar{\theta} \end{cases} \quad (3.34)$$

En positionnant M_1, A et A' en I (il s'agit d'un abus pour M_1 qui doit en principe appartenir à la ligne moyenne du profil):

$$\begin{cases} \bar{u}(M) = \bar{u}(I) - [\bar{z}(M) - \bar{z}(I)] \bar{\theta} \\ \bar{v}(M) = \bar{v}(I) - \frac{\partial \bar{u}(I)}{\partial \bar{y}} [\bar{x}(M) - \bar{x}(I)] - \frac{\partial \bar{w}(I)}{\partial \bar{y}} [\bar{z}(M) - \bar{z}(I)] \\ \bar{w}(M) = \bar{w}(I) + [\bar{x}(M) - \bar{x}(I)] \bar{\theta} \end{cases} \quad (3.35)$$

Le couplage plaque-raidisieur est introduit en exprimant la continuité des déplacements et de la rotation au point d'attache I . Les conditions de continuité sont les suivantes:

$$\begin{cases} \bar{u}(I) = \bar{u}_p(I) \\ \bar{v}(I) = \bar{v}_p(I) \\ \bar{w}(I) = \bar{w}_p(I) \\ \bar{\theta} = \frac{\partial w(O)}{\partial \bar{x}} \end{cases} \quad (3.36)$$

$\bar{u}_p(I)$, $\bar{v}_p(I)$ et $\bar{w}_p(I)$ désignent les déplacements de plaque au point I suivant \bar{x} , \bar{y} et \bar{z} respectivement.

Compte tenu du champ de déplacement (3.11) de la plaque mince:

$$\begin{cases} \bar{u}_p(I) = -(\bar{z}(I) - \bar{z}(O)) \frac{\partial w(O)}{\partial \bar{x}} \\ \bar{v}_p(I) = -(\bar{z}(I) - \bar{z}(O)) \frac{\partial w(O)}{\partial \bar{y}} \\ \bar{w}_p(I) = w(O) \end{cases} \quad (3.37)$$

Les relations (3.35), (3.36) et (3.37) permettent finalement d'obtenir le champ de déplacement du raidisseur dans le repère $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, entièrement exprimé à partir du déplacement au point O appartenant au plan moyen de la plaque:

$$\begin{cases} \bar{u}(M) = -(\bar{z}(M) - \bar{z}(O)) \frac{\partial w(O)}{\partial \bar{x}} \\ \bar{v}(M) = -(\bar{z}(M) - \bar{z}(O)) \frac{\partial w(O)}{\partial \bar{y}} \\ \bar{w}(M) = w(O) + (\bar{x}(M) - \bar{x}(O)) \frac{\partial w(O)}{\partial \bar{x}} \end{cases} \quad (3.38)$$

Energie cinétique et énergie de déformation

Le calcul de l'énergie d'un raidisseur quelconque k , ($1 \leq k \leq N_S$) est mené dans le seul cas d'application pratique où la jonction plaque-raidisieur est rectiligne et occupe un segment noté $[\bar{y}_{min}, \bar{y}_{max}]$, où le matériau du raidisseur est isotrope et où la forme du profil reste inchangée le long du raidisseur.

Par définition, l'énergie cinétique est:

$$T_k^{(raidisseur)} = \int_{V_k} \frac{1}{2} \rho_k^{(r)} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)^2 \right] dV_k \quad (3.39)$$

où $\rho_k^{(r)}$ est la masse volumique du k^{ieme} raidisseur, et la sommation est effectuée sur le

volume V_k du raidisseur. Compte tenu du champ de déplacement (3.38), et après calculs:

$$\begin{aligned}
T_k^{(raidisseur)} &= \int_{\bar{y}_{min}}^{\bar{y}_{max}} \frac{1}{2} \rho_k^{(r)} S_k \left[\bar{z}^2(O_k) \left[\left(\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{x} \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{y} \partial t} \right)^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial w(O_k)}{\partial t} \right)^2 + \bar{x}^2(O_k) \left(\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{x} \partial t} \right)^2 - 2 \bar{x}(O_k) \frac{\partial w(O_k)}{\partial t} \frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{x} \partial t} \right] d\bar{y} + \\
&\quad \int_{\bar{y}_{min}}^{\bar{y}_{max}} \frac{1}{2} \rho_k^{(r)} I_{\bar{x}\bar{x},k} \left[\left(\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{x} \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{y} \partial t} \right)^2 \right] d\bar{y} \\
&\quad \int_{\bar{y}_{min}}^{\bar{y}_{max}} \frac{1}{2} \rho_k^{(r)} I_{\bar{z}\bar{z},k} \left[\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{x} \partial t} \right]^2 d\bar{y} \tag{3.40}
\end{aligned}$$

S_k est l'aire de la section droite, $\bar{x}(O_k)$ et $\bar{z}(O_k)$ sont les coordonnées dans le repère $(G\bar{x}\bar{z})$, du point O_k appartenant au feuillet moyen de la plaque et situé au droit du point d'attache I_k . $I_{\bar{x}\bar{x},k}$ et $I_{\bar{z}\bar{z},k}$ sont les moments d'inertie surfacique de la section droite par rapport aux axes $G\bar{x}$ et $G\bar{z}$, respectivement.

$$I_{\bar{x}\bar{x},k} = \int_{(S_k)} \bar{z}^2(M) dM \tag{3.41}$$

$$I_{\bar{z}\bar{z},k} = \int_{(S_k)} \bar{x}^2(M) dM \tag{3.42}$$

Les paramètres géométriques de la section droite sont illustrés à la figure 3.5 pour un profil donné.

L'énergie de déformation s'obtient à partir du champ de déplacement (3.38) et de la loi de comportement élastique du matériau isotrope constituant le raidisseur. En notant $E_k^{(r)}$ le module d'Young et $G_k^{(r)}$ le module de Coulomb du matériau,

$$\begin{aligned}
V_k^{(raidisseur)} &= \int_{\bar{y}_{min}}^{\bar{y}_{max}} \frac{1}{2} E_k^{(r)} \left[\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{y}^2} \right]^2 \left[I_{\bar{x}\bar{x},k} + S_k \bar{z}^2(O_k) \right] d\bar{y} + \\
&\quad \int_{\bar{y}_{min}}^{\bar{y}_{max}} \frac{1}{2} G_k^{(r)} \left[\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right]^2 \left[4I_{\bar{x}\bar{x},k} + I_{\bar{z}\bar{z},k} + S_k \left(4\bar{z}^2(O_k) + \bar{x}^2(O_k) \right) \right] d\bar{y} \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Le premier terme représente la déformation du raidisseur par traction-compression, induite par le mouvement de flexion de la plaque; pour des voiles suffisamment minces, il s'agit de la déformation prépondérante. Le second terme traduit la déformation par torsion du raidisseur, induite par la rotation relative de deux sections droites distinctes. Il n'y a pas

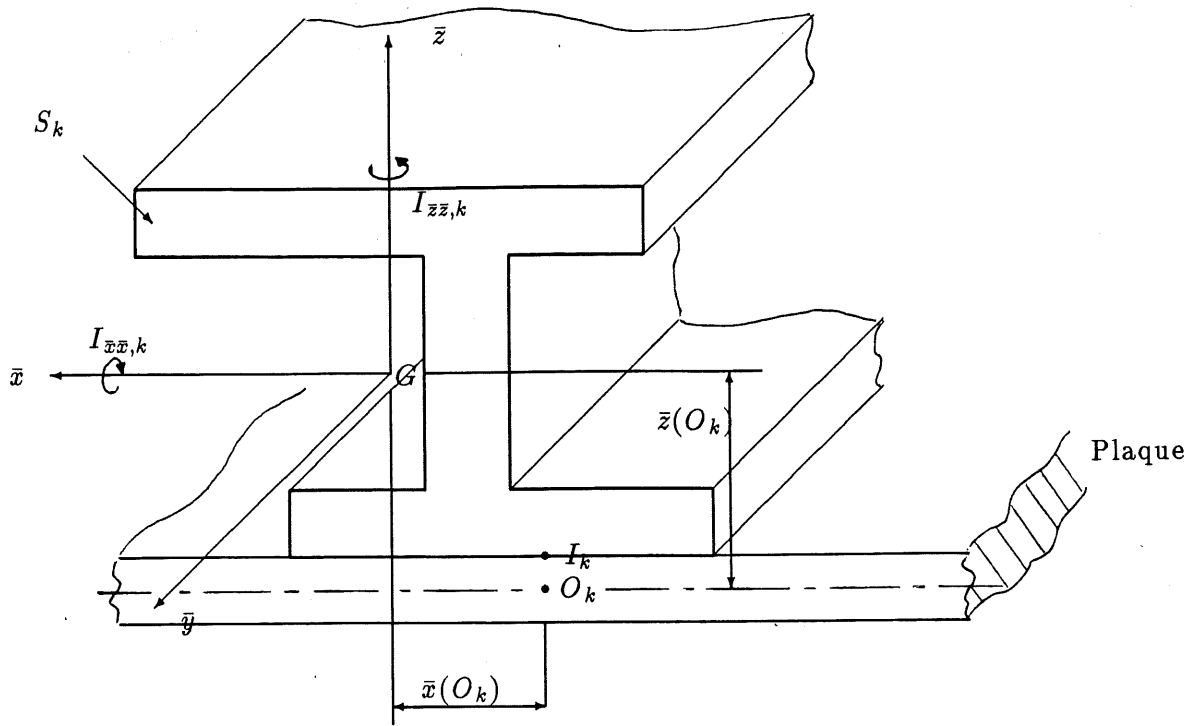


Figure 3.5: Paramètres géométriques d'un raidisseur courant k

de déformation dans le plan des sections droites puisque celles-ci sont supposées rigides vis-à-vis des mouvements dans leur plan.

Les expressions (3.40) et (3.43) ne font intervenir que les paramètres géométriques et structuraux des raidisseurs et la seule variable cinématique $w(O_k)$, qui est la déformation de la plaque au droit des raidisseurs. Ces expressions peuvent être intégrées dans la fonctionnelle de Hamilton; la fonction de déplacement dont dépend cette fonctionnelle se réduit à la seule variable w .

3.3.7 Travail des forces extérieures

Les forces extérieures appliquées à la structure comprennent les forces mécaniques excitatrices $f(x, y, z, t)$ et la pression acoustique pariétale, normale à la paroi. Compte tenu des hypothèses faites sur les forces mécaniques, toutes les forces extérieures agissent donc normalement à la surface de la plaque. Ces forces exercent un travail

$$W = W_{\text{mécanique}} + W_{\text{acoustique}} \quad (3.44)$$

$W_{m\acute{e}canique}$ est la contribution due aux efforts m\acute{e}caniques, $W_{acoustique}$ est la contribution due \u00e0 la pression acoustique pari\^etale. Le travail des forces m\acute{e}caniques est

$$W_{m\acute{e}canique} = \frac{a^2}{4r} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta, t) w(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta \quad (3.45)$$

La relation (3.45) utilise les coordonn\^ees adimensionnelles $\alpha = \frac{2}{a}x$, $\beta = \frac{2}{b}y$, et la variable cin\^ematique de plaque $w(\alpha, \beta, t)$. Cette relation est rigoureuse lorsque la force m\acute{e}canique est directement appliqu\^ee sur la plaque; si la force est appliqu\^ee sur un raidisseur, il est n\^ecessaire de consid\^erer dans l'expression (3.45) la variable cin\^ematique \bar{w} du raidisseur plut\^ot que w . Le d\^eplacement \bar{w} , qui est donn\^ee en (3.38) tient compte \u00e0 la fois de la flexion w de la plaque au droit du raidisseur, et de la rotation de la section droite du raidisseur. L'expression (3.45) est toutefois correcte si la force m\acute{e}canique est exerc\^ee ponctuellement sur le raidisseur au droit du point d'attache I , et suffisamment juste si l'effet de rotation rigide des sections droites est faible devant l'effet de flexion de la plaque.

Le travail de la pression acoustique pari\^etale est:

$$W_{acoustique} = - \int_{(S)} p(x, y, 0^+, t) w(x, y, t) dx dy \quad (3.46)$$

o\`u $p(x, y, z, t)$ d\^esigne la pression acoustique rayonn\^ee en tout point (x, y, z) du milieu fluide $z > 0$. *L'hypoth\^ese de fluide l\^eger, retenue tout au long de la premi\^ere partie de cette \u00e9tude, consiste \u00e0 n\^egliger pour l'approche variationnelle, le travail exerc\^e sur la structure par la pression pari\^etale.* Cette hypoth\^ese de fluide l\^eger doit tenir compte \u00e0 la fois de la structure et de la nature du fluide (densit\^e ρ_0 , c\^el\^erit\^e des ondes acoustiques c_0). Un crit\^ere \u00e9nonc\^e par CRIGHTON [8] sugg\^ere que pour une plaque infinie, cette hypoth\^ese s'applique lorsque le param\^etre de charge fluide $\epsilon = \frac{\rho_0 c_0}{\rho_s h \omega_c}$, o\`u $\omega_c = c_0^2 (\frac{\rho_s h}{D})^{1/2}$ est petit devant 1. A titre d'exemple, pour une plaque en acier d'\u00e9paisseur $1mm$, $\epsilon = 0.0007$ dans l'air, $\epsilon = 0.13$ dans l'eau.

3.3.8 Synth\^ese – expression de la fonctionnelle de Hamilton

Pour la structure consid\^eree en 3.2.1 et d\^ecrite \u00e0 la figure 3.2, immerg\^ee dans un fluide l\^eger et sollicit\^ee par des forces m\acute{e}caniques normales au plan (x, y) , la fonctionnelle de

Hamilton prend la forme suivante:

$$\mathcal{H}(w) = \int_{t_0}^{t_1} (T - V + W) dt$$

avec

$$\begin{aligned}
T = & \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{8} \rho_s h \frac{a^2}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 d\alpha d\beta \\
& + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \rho_s h \frac{a^2}{r} \sum_{i=1}^{N_m} \mu_i \delta(\alpha - \alpha_i) \delta(\beta - \beta_i) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 d\alpha d\beta \\
& + \sum_{k=1}^{N_s} \int_{\bar{y}_{min}}^{\bar{y}_{max}} ch \frac{1}{2} \rho_k^{(r)} S_k \left[\bar{z}^2(O_k) \left[\left(\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{x} \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{y} \partial t} \right)^2 \right] \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial w(O_k)}{\partial t} \right)^2 + \bar{x}^2(O_k) \left(\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{x} \partial t} \right)^2 - 2\bar{x}(O_k) \frac{\partial w(O_k)}{\partial t} \frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{x} \partial t} \right] d\bar{y} \\
& + \sum_{k=1}^{N_s} \int_{\bar{y}_{min}}^{\bar{y}_{max}} \frac{1}{2} \rho_k^{(r)} I_{\bar{x}\bar{x},k} \left[\left(\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{x} \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{y} \partial t} \right)^2 \right] d\bar{y} \\
& + \sum_{k=1}^{N_s} \int_{\bar{y}_{min}}^{\bar{y}_{max}} \frac{1}{2} \rho_k^{(r)} I_{\bar{z}\bar{z},k} \left[\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{x} \partial t} \right]^2 d\bar{y} \tag{3.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V = & \frac{D}{a^2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{2}{r} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right)^2 + r^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right)^2 + 2\nu r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \right. \\
& \left. 2(1 - \nu) r^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 \right] d\alpha d\beta \\
& + \frac{D}{a^2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_k} \kappa_j \delta(\alpha - \alpha_j) \delta(\beta - \beta_j) w^2(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta \\
& + \frac{D}{a^2} \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{k}{4} [w^2(\alpha, 1) + w^2(\alpha, -1)] d\alpha + \right. \\
& \int_{-1}^{+1} \frac{k}{4r} [w^2(1, \beta) + w^2(-1, \beta)] d\beta + \\
& \int_{-1}^{+1} cr^2 \left[\left(\frac{\partial w(\alpha, 1)}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(\alpha, -1)}{\partial \beta} \right)^2 \right] d\alpha + \\
& \left. \int_{-1}^{+1} \frac{c}{r} \left[\left(\frac{\partial w(1, \beta)}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(-1, \beta)}{\partial \alpha} \right)^2 \right] d\beta \right\} \\
& + \sum_{k=1}^{N_s} \int_{\bar{y}_{min}}^{\bar{y}_{max}} \frac{1}{2} E_k^{(r)} \left[\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{y}^2} \right]^2 [I_{\bar{x}\bar{x},k} + S_k \bar{z}^2(O_k)] d\bar{y}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_s} \int_{\bar{y}_{\min}}^{\bar{y}_{\max}} \frac{1}{2} G_k^{(r)} \left[\frac{\partial^2 w(O_k)}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right]^2 \left[4I_{\bar{x}\bar{x},k} + I_{\bar{z}\bar{z},k} + S_k \left(4\bar{z}^2(O_k) + \bar{x}^2(O_k) \right) \right] d\bar{y} \quad (3.48)$$

$$W_{\text{mécannique}} = \frac{a^2}{4r} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta, t) w(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta \quad (3.49)$$

T , V et W sont respectivement l'énergie cinétique totale, l'énergie de déformation totale et le travail des forces mécaniques appliquées.

La formulation variationnelle permet aussi d'étudier les vibrations libres de la structure en supposant l'absence de forces mécaniques appliquées, c'est-à-dire en imposant $W = 0$, auquel cas,

$$\mathcal{H}(w) = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt \quad (3.50)$$

Le problème particulier ainsi défini permet d'accéder au schéma modal *in-vacuo* de la structure, et d'analyser les phénomènes de rayonnement en termes de modes de la structure.

3.4 Vibrations de la structure — Solution

La solution du problème vibratoire consiste à rechercher les extremums de la fonctionnelle de Hamilton \mathcal{H} satisfaisant les conditions aux limites géométriques sur le contour (Γ). Compte tenu de l'expression de \mathcal{H} , cette recherche ne peut se faire par voie analytique. En conséquence, des solutions approchées doivent être trouvées; la recherche de ces solutions approchées utilise la méthode de Rayleigh-Ritz.

3.4.1 Méthode de Rayleigh-Ritz

La méthode de Rayleigh-Ritz consiste à sélectionner une famille de fonctions-essai respectant les conditions aux limites géométriques sur (Γ), et à former une combinaison linéaire:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}(t) \Phi_m(x) \Psi_n(y) = \{a_{mn}(t)\}^T \{\Phi_m(x) \Psi_n(y)\} \quad (3.51)$$

$\Phi_m(x)$ et $\Psi_n(y)$ sont les fonctions choisies des variables d'espace x et y . Ces fonctions sont linéairement indépendantes et cinématiquement admissibles. Le choix de $\Phi_m(x)$ et $\Psi_n(y)$

doit donc tenir compte de la déflexion et de la rotation rendues possibles sur (Γ) par les conditions aux limites élastiques. Ce choix, crucial puisqu'il détermine l'espace fonctionnel décrit par la solution présumée, est discuté à la section 3.4.4. On notera simplement ici que la généralité du problème en ce qui a trait aux conditions aux limites interdit par exemple la décomposition sur la base modale de la structure nue simplement supportée, qui est utilisée dans de nombreuses études [47,70,71,55,10]. Dans l'équation (3.51), $\{a_{mn}(t)\}$ est le vecteur des coefficients d'amplitude inconnus. $\{a_{mn}(t)\}^T$ désigne le vecteur transposé de $\{a_{mn}(t)\}$. En pratique, la sommation sur m et n doit être tronquée à un ordre fini N qui détermine la précision de la solution approchée. La structure est donc approchée par un système à $(N + 1)^2$ degrés de liberté et les coefficients $a_{mn}(t)$ sont les $(N + 1)^2$ coordonnées généralisées. Le choix des fonctions-essai est détaillé à la section 3.4.4, et les critères de troncature sont discutés à la section 3.4.5, et au chapitre 5. Préalablement, les équations du mouvement sont obtenues formellement dans le cas de vibrations libres et de vibrations forcées de la structure.

3.4.2 Vibrations libres

Substituant (3.51) dans (3.50),

$$\mathcal{H}(w) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}(\{a_{mn}\}, \{\dot{a}_{mn}\}) dt \quad (3.52)$$

\mathcal{F} est une fonction du temps seulement; \dot{a}_{mn} est la dérivée par rapport au temps de a_{mn} . la fonction \mathcal{F} n'est autre que le Lagrangien du système conservatif discrétisé formé par la structure *in-vacuo*:

$$\mathcal{F}(\{a_{mn}\}, \{\dot{a}_{mn}\}) = T(\{\dot{a}_{mn}\}) - V(\{a_{mn}\}) \quad (3.53)$$

La condition de stationnarité de \mathcal{H} peut alors être exprimée par les équations de Lagrange pour chaque coordonnée généralisée indépendante a_{mn} :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_{mn}} \right) + \frac{\partial V}{\partial a_{mn}} = 0 \quad \forall (m, n) \in \{0, 1, \dots, N\}^2 \quad (3.54)$$

En utilisant (3.47), (3.48) et (3.51), l'ensemble des conditions (3.54) prend la forme matricielle

$$[M_{mnpq}] \{\ddot{a}_{mn}\} + [K_{mnpq}] \{a_{mn}\} = 0 \quad (3.55)$$

La relation (3.55) est l'équation générale du mouvement libre d'un système conservatif à $(N + 1)^2$ degrés de liberté. Les coefficients des matrices de masse $[M_{mnpq}]$ et de raideur $[K_{mnpq}]$ de la structure sont, pour la structure étudiée:

$$M_{mnpq} = M_{mnpq}^{(plaque)} + \sum_{i=1}^{N_m} M_{mnpq,i}^{(masse)} + \sum_{k=1}^{N_s} M_{mnpq,k}^{(raidisseur)} \quad (3.56)$$

$$K_{mnpq} = K_{mnpq}^{(plaque)} + \sum_{j=1}^{N_k} K_{mnpq,j}^{(raideur)} + \sum_{k=1}^{N_s} K_{mnpq,k}^{(raidisseur)} + K_{mnpq}^{(contour)} \quad (3.57)$$

avec

$$M_{mnpq}^{(plaque)} = \frac{a^2}{4r} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho_s h \Phi_m(\alpha) \Psi_n(\beta) \Phi_p(\alpha) \Psi_q(\beta) d\alpha d\beta \quad (3.58)$$

$$M_{mnpq,i}^{(masse)} = \frac{a^2}{r} \mu_i \rho_s h \Phi_m(\alpha_i) \Psi_n(\beta_i) \Phi_p(\alpha_i) \Psi_q(\beta_i) \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} K_{mnpq}^{(plaque)} = & \frac{D}{a^2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial \alpha^2} \Psi_n \frac{\partial^2 \Phi_p}{\partial \alpha^2} \Psi_q + r^4 \Phi_m \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \beta^2} \Phi_p \frac{\partial^2 \Psi_q}{\partial \beta^2} + \right. \\ & \left. \nu r^2 \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial \alpha^2} \Psi_n \Phi_p \frac{\partial^2 \Psi_q}{\partial \beta^2} + \nu r^2 \Phi_m \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 \Phi_p}{\partial \alpha^2} \Psi_q + \right. \\ & \left. 2(1 - \nu) r^2 \frac{\partial \Phi_m}{\partial \alpha} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi_p}{\partial \alpha} \frac{\partial \Psi_q}{\partial \beta} \right] d\alpha d\beta \quad (3.60) \end{aligned}$$

$$K_{mnpq,j}^{(raideur)} = \frac{D}{a^2} \kappa_j \Phi_m(\alpha_j) \Psi_n(\beta_j) \Phi_p(\alpha_j) \Psi_q(\beta_j) \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} K_{mnpq}^{(contour)} = & \frac{D}{a^2} \int_{-1}^{+1} \frac{k}{2} [\Phi_m(\alpha) \Psi_n(1) \Phi_p(\alpha) \Psi_q(1) + \Phi_m(\alpha) \Psi_n(-1) \Phi_p(\alpha) \Psi_q(-1)] d\alpha + \\ & \frac{D}{a^2} \int_{-1}^{+1} \frac{k}{2r} [\Phi_m(1) \Psi_n(\beta) \Phi_p(1) \Psi_q(\beta) + \Phi_m(-1) \Psi_n(\beta) \Phi_p(-1) \Psi_q(\beta)] d\beta + \\ & \frac{D}{a^2} \int_{-1}^{+1} 2cr^2 \left[\Phi_m(\alpha) \frac{\partial \Psi_n}{\partial \beta}(1) \Phi_p(\alpha) \frac{\partial \Psi_q}{\partial \beta}(1) + \Phi_m(\alpha) \frac{\partial \Psi_n}{\partial \beta}(-1) \Phi_p(\alpha) \frac{\partial \Psi_q}{\partial \beta}(-1) \right] d\alpha + \\ & \frac{D}{a^2} \int_{-1}^{+1} 2\frac{c}{r} \left[\frac{\partial \Phi_m}{\partial \alpha}(1) \Psi_n(\beta) \frac{\partial \Phi_p}{\partial \alpha}(1) \Psi_q(\beta) + \frac{\partial \Phi_m}{\partial \alpha}(-1) \Psi_n(\beta) \frac{\partial \Phi_p}{\partial \alpha}(-1) \Psi_q(\beta) \right] d\beta \quad (3.62) \end{aligned}$$

Les termes $M_{mnpq,k}^{(raidisseur)}$ et $K_{mnpq,k}^{(raidisseur)}$ sont présentés ici pour le cas particulier de raidisseurs droits parallèles aux côtés de la plaque. La formulation développée permet donc d'envisager un réseau de raidisseurs orthogonal, régulier ou non régulier. L'extension au cas de raidisseurs droits de direction quelconque ne pose pas de difficulté particulière. Dans le cas d'un raidisseur parallèle à l'axe y , situé à l'abscisse $x_k^{(r)}$ et s'étendant de $y = -b/2$

à $y = +b/2$, les expressions sont les suivantes, en notant $\alpha_k^{(r)} = \frac{2}{a}x_k^{(r)}$,

$$\begin{aligned}
M_{mnpq,k}^{(raidisseur)} = & \\
& \frac{2}{ar}\rho_k(r)\frac{\partial\Phi_m}{\partial\alpha}(\alpha_k^{(r)})\frac{\partial\Phi_p}{\partial\alpha}(\alpha_k^{(r)})\int_{-1}^{+1}\{S_k[\bar{x}^2(O_k) + \bar{z}^2(O_k)] + I_{\bar{x}\bar{x},k} + I_{\bar{z}\bar{z},k}\}\Psi_n(\beta)\Psi_q(\beta)d\beta \\
& + \frac{2r}{a}\rho_k(r)\Phi_m(\alpha_k^{(r)})\Phi_p(\alpha_k^{(r)})\int_{-1}^{+1}[S_k\bar{z}^2(O_k) + I_{\bar{x}\bar{x},k}]\frac{\partial\Psi_n}{\partial\beta}\frac{\partial\Psi_q}{\partial\beta}d\beta \\
& + \frac{a}{2r}\rho_k(r)\Phi_m(\alpha_k^{(r)})\Phi_p(\alpha_k^{(r)})\int_{-1}^{+1}S_k\Psi_n(\beta)\Psi_q(\beta)d\beta \\
& - \frac{1}{r}\rho_k^{(r)}\left[\Phi_m(\alpha_k^{(r)})\frac{\partial\Phi_p}{\partial\alpha}(\alpha_k^{(r)}) + \frac{\partial\Phi_m}{\partial\alpha}(\alpha_k^{(r)})\Phi_p(\alpha_k^{(r)})\right]\int_{-1}^{+1}S_k\bar{x}(O_k)\Psi_n(\beta)\Psi_q(\beta)d\beta \quad (3.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{mnpq,k}^{(raidisseur)} = & \\
& \frac{8r^3}{a^3}E_k^{(r)}\Phi_m(\alpha_k^{(r)})\Phi_p(\alpha_k^{(r)})\int_{-1}^{+1}[I_{\bar{x}\bar{x},k} + S_k\bar{z}^2(O_k)]\frac{\partial^2\Psi_n}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2\Psi_q}{\partial\beta^2}d\beta \\
& + \frac{8r}{a^3}G_k^{(r)}\frac{\partial\Phi_m}{\partial\alpha}(\alpha_k^{(r)})\frac{\partial\Phi_p}{\partial\alpha}(\alpha_k^{(r)})\int_{-1}^{+1}\{4I_{\bar{x}\bar{x},k} + I_{\bar{z}\bar{z},k} + S_k[4\bar{z}^2(O_k) + \bar{x}^2(O_k)]\}\frac{\partial\Psi_n}{\partial\beta}\frac{\partial\Psi_q}{\partial\beta}d\beta \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Dans le cas d'un raidisseur parallèle à l'axe x , situé à l'ordonnée $y_k^{(r)}$ et s'étendant de $x = -b/2$ à $x = +b/2$, les expressions suivantes s'appliquent, en posant $\beta_k^{(r)} = \frac{2y_k^{(r)}}{b}$,

$$\begin{aligned}
M_{mnpq,k}^{(raidisseur)} = & \\
& \frac{2r^2}{a}\rho_k(r)\frac{\partial\Psi_n}{\partial\beta}(\beta_k^{(r)})\frac{\partial\Psi_q}{\partial\beta}(\beta_k^{(r)})\int_{-1}^{+1}\{S_k[\bar{x}^2(O_k) + \bar{z}^2(O_k)] + I_{\bar{x}\bar{x},k} + I_{\bar{z}\bar{z},k}\}\Phi_m(\alpha)\Phi_p(\alpha)d\alpha \\
& + \frac{2}{a}\rho_k(r)\Psi_n(\beta_k^{(r)})\Psi_q(\beta_k^{(r)})\int_{-1}^{+1}[S_k\bar{z}^2(O_k) + I_{\bar{x}\bar{x},k}]\frac{\partial\Phi_m}{\partial\alpha}\frac{\partial\Phi_p}{\partial\alpha}d\alpha \\
& + \frac{a}{2}\rho_k(r)\Psi_n(\beta_k^{(r)})\Psi_q(\beta_k^{(r)})\int_{-1}^{+1}S_k\Phi_m(\alpha)\Phi_p(\alpha)d\alpha \\
& - r\rho_k^{(r)}\left[\Psi_n(\beta_k^{(r)})\frac{\partial\Psi_q}{\partial\beta}(\beta_k^{(r)}) + \frac{\partial\Psi_n}{\partial\beta}(\beta_k^{(r)})\Psi_q(\beta_k^{(r)})\right]\int_{-1}^{+1}S_k\bar{x}(O_k)\Phi_m(\alpha)\Phi_p(\alpha)d\alpha \quad (3.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{mnpq,k}^{(raidisseur)} = & \\
& \frac{8}{a^3}E_k^{(r)}\Psi_n(\beta_k^{(r)})\Psi_q(\beta_k^{(r)})\int_{-1}^{+1}[I_{\bar{x}\bar{x},k} + S_k\bar{z}^2(O_k)]\frac{\partial^2\Phi_m}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2\Phi_p}{\partial\alpha^2}d\alpha \\
& + \frac{8r^2}{a^3}G_k^{(r)}\frac{\partial\Psi_n}{\partial\beta}(\beta_k^{(r)})\frac{\partial\Psi_q}{\partial\beta}(\beta_k^{(r)})\int_{-1}^{+1}\{4I_{\bar{x}\bar{x},k} + I_{\bar{z}\bar{z},k} + S_k[4\bar{z}^2(O_k) + \bar{x}^2(O_k)]\}\frac{\partial\Phi_m}{\partial\alpha}\frac{\partial\Phi_p}{\partial\alpha}d\alpha \quad (3.66)
\end{aligned}$$

Les matrices globales de masse $[M_{mnpq}]$ et de raideur $[K_{mnpq}]$ sont réelles, symétriques, et en général pleines. L'hypothèse, pour (3.55) d'une solution générale de la forme

$$\{a_{mn}(t)\} = \{a_{mn}\}e^{j\omega t} \quad (3.67)$$

conduit au problème aux valeurs propres généralisé

$$\left(-\omega^2 [M_{mnpq}] + [K_{mnpq}]\right) \{a_{mn}\} = 0 \quad (3.68)$$

Les valeurs propres ω_i^2 fournissent les fréquences propres de la structure *in-vacuo*. Les vecteurs propres associés $\{a_{mn}^i\}$ donnent la projection des fonctions propres de la structure *in-vacuo* sur la base fonctionnelle choisie. Comme $[M_{mnpq}]$ et $[K_{mnpq}]$ sont des matrices réelles, symétriques, avec $[M_{mnpq}]$ définie positive, toutes les valeurs propres sont réelles.

3.4.3 Vibrations forcées

Substituant (3.51) dans (3.8),

$$\mathcal{H}(w) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{G}(\{a_{mn}\}, \{\dot{a}_{mn}\}) dt \quad (3.69)$$

où

$$\mathcal{G}(\{a_{mn}\}, \{\dot{a}_{mn}\}) = T(\{\dot{a}_{mn}\}) - V(\{a_{mn}\}) + W(\{a_{mn}\}) \quad (3.70)$$

La condition de stationnarité de \mathcal{H} est équivalente à

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_{mn}} \right) + \frac{\partial V}{\partial a_{mn}} = \frac{\partial W}{\partial a_{mn}} \quad \forall (m, n) \in \{0, 1, \dots, N\}^2 \quad (3.71)$$

En utilisant (3.47), (3.48), (3.49) et (3.51), l'ensemble des conditions (3.71) prend la forme matricielle

$$[M_{mnpq}] \{\ddot{a}_{mn}\} + [K_{mnpq}] \{a_{mn}\} = \{f_{mn}(t)\} \quad (3.72)$$

où $[M_{mnpq}]$ et $[K_{mnpq}]$ sont données en (3.56), (3.57) respectivement, et

$$f_{mn}(t) = \frac{a^2}{4r} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta, t) \Phi_m(\alpha) \Psi_n(\beta) d\alpha d\beta \quad (3.73)$$

Dans l'hypothèse d'une force mécanique excitatrice sinusoïdale de pulsation Ω , $f(\alpha, \beta, t) = f(\alpha, \beta) e^{j\Omega t}$, la réponse de la structure est la solution du système linéaire

$$\left(-\Omega^2 [M_{mnpq}] + [\tilde{K}_{mnpq}]\right) \{a_{mn}\} = \{f_{mn}\} \quad (3.74)$$

où

$$f_{mn} = \frac{a^2}{4r} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\alpha, \beta) \Phi_m(\alpha) \Psi_n(\beta) d\alpha d\beta \quad (3.75)$$

Dans l'équation (3.74), les phénomènes de dissipation, jusqu'alors négligés, sont introduits dans la matrice de rigidité $[\tilde{K}_{mnpq}]$ de la structure par l'intermédiaire d'une rigidité de flexion \tilde{D} de la plaque, d'une rigidité de déflexion \tilde{k} et d'une rigidité de rotation \tilde{c} des ressorts de contour, telles que

$$\begin{aligned}\tilde{D} &= D(1 + j\eta_p) \\ \tilde{k} &= k(1 + j\eta_k) \\ \tilde{c} &= c(1 + j\eta_c)\end{aligned}\tag{3.76}$$

Les coefficients η_p, η_k, η_c sont des facteurs de perte associés à la dissipation interne pour la flexion de la plaque, la déflexion du contour et la rotation du contour, respectivement. Une telle représentation des phénomènes d'amortissement convient à une excitation sinusoïdale seulement. Par la suite, on fait l'hypothèse d'une excitation sinusoïdale, la dépendance temporelle $e^{j\Omega t}$ est sous-entendue, et les facteurs η_p, η_k, η_c sont supposés indépendants de la fréquence excitatrice.

3.4.4 Choix des fonctions-essai

Une attention particulière doit être apportée au choix des fonctions-essai $\Phi_m(x)\Psi_n(y)$. Ces fonctions doivent remplir les conditions suivantes:

- Indépendance linéaire,
- Régularité suffisante pour que les diverses intégrales existent,
- Compatibilité avec les conditions aux limites géométriques.

Cette dernière condition indique que la base choisie doit générer le sous-espace fonctionnel de toutes les fonctions de déplacement admissibles; elle doit en particulier permettre la reconstruction de toute déflexion ou rotation permise sur le contour par les conditions aux limites élastiques. Par la suite, deux options sont successivement examinées: une base de fonctions trigonométriques et une base de fonctions polynômiales.

Fonctions trigonométriques

Une idée simple pour générer une base admissible est de développer le déplacement vibratoire $w(x, y)$ en série de Fourier sur le domaine $[-a/2, +a/2] \times [-b/2, +b/2]$. Ceci conduit

à

$$\{\Phi_m(x)\Psi_n(y)\} = \left\{ \begin{array}{ll} \cos \frac{2m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b}, & m = 0, 1, \dots, N; \quad n = 0, 1, \dots, N \\ \cos \frac{2m\pi x}{a} \sin \frac{2n\pi y}{b}, & m = 0, 1, \dots, N; \quad n = 1, \dots, N \\ \sin \frac{2m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b}, & m = 1, \dots, N; \quad n = 0, 1, \dots, N \\ \sin \frac{2m\pi x}{a} \sin \frac{2n\pi y}{b}, & m = 1, \dots, N; \quad n = 1, \dots, N \end{array} \right\} \quad (3.77)$$

Le développement en série de Fourier peut être plus simplement écrit comme

$$w(x, y) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N a_{mn} e^{j(2m\pi x/a + 2n\pi y/b)} \quad (3.78)$$

Toutefois, l'équation (3.78) ne constitue qu'une approximation de $w(x, y)$ au sens des moindres carrés. Si une déflexion arbitraire est autorisée le long du contour (Γ), alors tout point de (Γ) forme en général un saut de discontinuité pour la fonction périodisée $w(x, y)$. Compte tenu des propriétés de convergence des séries de Fourier, l'expression (3.78) tend vers la demi-somme des limites à gauche et à droite de la discontinuité. Nécessairement, les déplacements reconstruits en deux points situés en vis-à-vis sur deux côtés de la plaque, seront égaux. Une telle conséquence est incompatible avec la condition d'un déplacement arbitraire le long du contour. En conclusion, l'option des fonctions de base trigonométriques ne répond pas au critère de compatibilité avec les conditions aux limites géométriques.

Fonctions polynômiales

La base polynômiale suivante est suggérée:

$$\{\Phi_m(x)\Psi_n(y)\} = \left\{ \left(\frac{2}{a}x\right)^m \left(\frac{2}{b}y\right)^n, \quad m = 0, 1, \dots, N; \quad n = 0, 1, \dots, N \right\} \quad (3.79)$$

Le recours à une telle base est formellement équivalent à un développement en série de Taylor du déplacement $w(x, y)$ par rapport à x et y . Ce choix satisfait toutes les conditions de régularité et de convergence requises. On peut noter que $\Phi_0(x)\Psi_0(y)$ représente le mouvement de piston de la structure, $\Phi_1(x)\Psi_0(y)$ et $\Phi_0(x)\Psi_1(y)$ sont les rotations rigides autour des axes y et x , respectivement. Ces mouvements s'avèrent être les modes rigides réels d'une plaque libre. Par la suite, il est fait référence à la base (3.79) sous le nom de "base de Taylor". Les expressions correspondantes de M_{mnpq} , K_{mnpq} et f_{mn} sont données à l'annexe A.

A ce stade, il est bon de faire deux remarques:

- Il est possible d'établir un lien assez direct entre la méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode des éléments finis: au sens de la méthode de Rayleigh-Ritz, les éléments finis utilisent des fonctions-essai polynômiales simples par morceaux, comme des fonctions affines par morceaux; ces fonctions offrent des avantages sur le plan du calcul et de la précision. Ce lien a été plus amplement discuté par STRANG [80].
- Bien que le problème abordé soit celui d'une structure de forme rectangulaire, tous les développements entrepris dans ce chapitre peuvent être, au moins en principe, étendus à des structures planes de forme quelconque (cette extension est d'autant plus facile que la géométrie en question se prête à un choix de coordonnées cartésiennes).

3.4.5 Commentaires sur l'implantation numérique

La méthode exposée permet d'accéder, pour la structure étudiée, au schéma modal *in-vacuo* ou à la réponse forcée à une excitation sinusoïdale. Le schéma modal (fréquences propres et déformées propres) est solution du problème aux valeurs propres généralisé, réel, symétrique (3.68), et la réponse forcée est la solution du système linéaire (3.74).

Dans cette étude, l'équation (3.74) a été résolue numériquement par une méthode d'élimination de Gauss, puis résolution d'un système triangulaire. Le problème aux valeurs propres (3.68) a été résolu après une factorisation de Cholesky de la matrice $[M_{mnpq}]$, ce qui produit un problème plus simple de mêmes valeurs propres que le problème initial. La troncature du développement sur la base fonctionnelle a été faite à l'ordre $N = 13$, compte tenu des capacités de stockage de l'ordinateur utilisé. Un tel ordre de développement produit 169 coefficients inconnus. A moins de mention contraire, tous les résultats numériques qui suivent ont été obtenus avec l'ordre maximal $N = 13$. On estime habituellement qu'une telle valeur permet de modéliser correctement les modes structuraux dont l'ordre suivant x et suivant y est inférieur ou égal à $N - 5$, soit 8.

Les tableaux 3.2, 3.3 et 3.4 illustrent dans diverses situations le calcul des fréquences propres grâce à la méthode exposée, et présentent des comparaisons avec des données

Tableau 3.2: Paramètre $\omega a^2(\rho_s h/D)^{1/2}$ pour une plaque carrée et différentes conditions aux limites.

| mode no. | SS-C-SS-C | | SS-F-SS-F | | C-C-C-C | | C-F-F-F | | F-F-F-F | |
|----------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|---------|----------------------|---------|----------------------|---------|----------------------|
| | [39] | présente approche | [39] | présente approche | [39] | présente approche | [39] | présente approche | [39] | présente approche |
| 1 | 28.946 | 28.951 | 9.87 | 9.63 | 35.999 | 35.985 | 3.472 | 3.471 | 14.920 | 14.591 |
| 2 | 54.743 | 54.743 | 16.13 | 16.13 | 73.405 | 73.393 | 8.55 | 8.51 | 22.373 | 22.24 |
| 3 | 69.320 | 69.327 | 36.71 | 36.73 | 108.327 | 108.215 | 21.29 | 21.29 | 37.284 | 36.79 |
| 4 | 94.584 | 94.584 | 39.48 | 38.94 | 131.902 | 131.891 | 27.2 | 27.2 | 61.673 | 61.52 |
| 5 | 102.213 | 102.215 | 46.73 | 46.73 | 165.023 | 164.997 | 31.0 | 31.1 | 67.591 | 67.03 |
| 6 | 129.086 | 129.094 | 70.73 | 70.74 | 210.526 | 210.540 | 54.3 | 54.2 | 75.948 | 75.44 |
| 7 | 140.189 | 140.202 | 75.72 | 75.28 | 220.06 | 220.03 | 61.3 | 61.3 | 110.599 | 109.90 |
| 8 | 154.765 | 154.773 | 88.83 | 87.99 | 242.66 | 242.66 | 64.2 | 64.1 | 120.903 | 120.60 |
| 9 | 199.797 | 199.806 | 96.29 | 96.04 | 296.35 | 296.31 | 71.1 | 71.0 | 134.107 | 133.74 |
| 10 | 208.373 | 208.412 | 111.02 | 111.02 | 309.38 | 309.17 | | | 159.324 | 158.64 |
| 11 | 234.578 | 234.598 | 122.04 | 122.04 | 340.59 | 340.78 | | | 169.998 | 169.49 |
| 12 | 279.627 | 279.656 | 133.69 | 133.70 | 371.38 | 371.36 | | | 199.860 | 199.50 |

SS : simplement supporté
 C : encastré
 F : libre

disponibles dans la littérature. Le tableau 3.2 donne la liste des douze premières fréquences propres d'une plaque carrée pour différentes conditions aux limites; le paramètre adimensionnel reporté est

$$\omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_s h}{D}},$$

ω étant la pulsation propre de la plaque. Tous les résultats ont été obtenus pour un coefficient de Poisson $\nu = 0.30$, sauf le cas "F-F-F-F", pour lequel $\nu = 0.16$. Pour l'approche proposée, les valeurs numériques des paramètres de contour k et c empêchant la déflexion et la rotation du contour sont

$$k_\infty = 5 \times 10^7$$

$$c_\infty = 2.5 \times 10^6$$

La comparaison entre les fréquences propres calculées et les valeurs fournies par LEISSA [39] est concluante.

Tableau 3.3: Première fréquence propre d'une plaque carrée SS-SS-SS-SS avec différentes masses ponctuelles rajoutées.

| taux de masse ponctuelle rajoutée, μ | première fréquence propre, Hz | |
|--|----------------------------------|-------------------|
| | [39] | présente approche |
| 0.565 | 23.5 | 23.7 |
| 1.130 | 18.0 | 18.0 |
| 1.695 | 15.1 | 15.1 |
| 2.260 | 13.2 | 13.2 |
| 2.285 | 11.9 | 11.9 |
| 3.390 | 11.0 | 11.0 |

Le tableau 3.3 donne la fréquence fondamentale d'une plaque carrée simplement appuyée, supportant en son centre des masses ponctuelles croissantes. Là encore, pour toutes les valeurs de masse rajoutée, l'accord avec les valeurs fournies par LEISSA [39] est excellent.

Le tableau 3.4 liste les six premières fréquences propres d'une plaque rectangulaire simplement appuyée et raidie par une série de cinq nervures parallèles identiques régulièrement espacées. Les résultats présentés supposent que la plaque et les raidisseurs sont en acier; les paramètres géométriques sont indiqués à la figure 3.6. Les valeurs numériques obtenues ont fait l'objet de comparaisons avec des calculs effectués par SOULAMI [78] à partir d'un modèle d'orthotropie équivalente énoncé par BLEVINS [3]. L'accord obtenu est satisfaisant.

3.5 Rayonnement acoustique de la structure

Cette section s'intéresse au rayonnement acoustique de la structure étudiée dans un demi-espace fluide. Compte tenu de l'hypothèse de fluide léger, la réponse acoustique est calculée

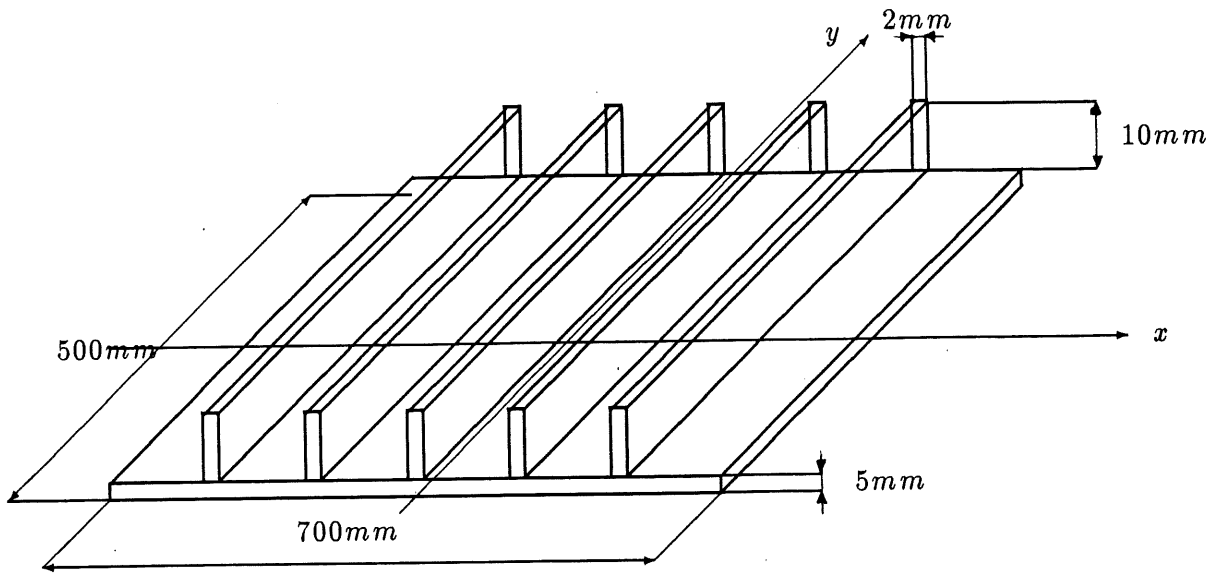


Figure 3.6: Plaque raidie – Paramètres géométriques relatifs aux résultats du tableau 3.4

Tableau 3.4: Premières fréquences propres d'une plaque rectangulaire SS-SS-SS-SS raidie.

| mode no. | fréquence propre, Hz | |
|----------|----------------------|-------------------|
| | [74] | présente approche |
| 1 | 83 | 88 |
| 2 | 145 | 155 |
| 3 | 260 | 269 |
| 4 | 281 | 283 |
| 5 | 330 | 308 |
| 6 | 426 | 453 |

à partir du profil de vitesses vibratoires *in-vacuo* sur la surface rayonnante. On supposera que l'excitation est une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation Ω . Les indicateurs acoustiques auxquels on s'intéresse plus particulièrement sont la pression acoustique rayonnée dans le champ lointain, la puissance acoustique rayonnée et l'efficacité de rayonnement de la structure.

3.5.1 Pression acoustique rayonnée en champ lointain

Les équations gouvernant la pression acoustique en $z > 0$ sont l'équation de Helmholtz et la condition de continuité des vitesses normales mécanique et acoustique à l'interface solide-fluide. Ces équations ont déjà été présentées pour un problème général de rayonnement; particularisées à une géométrie plane bafflée, elles s'écrivent

$$\nabla^2 p(x, y, z) + k_0^2 p(x, y, z) = 0 \text{ pour } z > 0 \quad (3.80)$$

où $k_0 = \Omega/c_0$ est le nombre d'onde acoustique,

$$\frac{\partial p}{\partial z}(0, y, z) = \begin{cases} \rho_0 \Omega^2 w(x, y) & \text{sur } (S) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.81)$$

A ces deux équations doit être adjointe la condition limite de rayonnement à grande distance, dite condition de Sommerfeld. La solution de pression satisfaisant simultanément (3.80), (3.81) et la condition de Sommerfeld peut être mise sous une forme classique connue sous le nom d'intégrale de Rayleigh [28,44]. Cette forme particularisée au champ lointain prend l'expression suivante:

$$p(R, \theta, \varphi) = -\rho_0 \Omega^2 \frac{e^{-jk_0 R}}{2\pi R} \tilde{w}(\lambda, \mu) \quad (3.82)$$

où R, θ, φ sont les coordonnées polaires (figure 3.1) d'un point courant du champ lointain ($R \rightarrow \infty$). Le terme $\tilde{w}(\lambda, \mu)$ est la transformée de Fourier spatiale bidimensionnelle du déplacement vibratoire $w(x, y)$ de la structure,

$$\tilde{w}(\lambda, \mu) = \frac{a^2}{4r} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} w(\alpha, \beta) e^{-j(\frac{a}{2}\lambda\alpha + \frac{b}{2}\mu\beta)} d\alpha d\beta \quad (3.83)$$

avec $\lambda = k_0 \sin \theta \cos \varphi$; $\mu = k_0 \sin \theta \sin \varphi$. Le passage du champ proche au champ lointain par une telle transformation intégrale est une propriété générale de la physique ondulatoire, bien connue non seulement en acoustique, mais également en optique, par exemple.

Le champ de déplacement $w(\alpha, \beta)$ est connu par son développement sur la base de Taylor,

$$w(\alpha, \beta) = \{a_{mn}\}^T \{\alpha^m \beta^n\} \quad (3.84)$$

Donc

$$\tilde{w}(\lambda, \mu) = \frac{a^2}{4r} \{a_{mn}\}^T \left\{ \tilde{g}_m\left(\lambda \frac{a}{2}\right) \tilde{g}_n\left(\mu \frac{b}{2}\right) \right\} \quad (3.85)$$

Les fonctions \tilde{g}_m et \tilde{g}_n sont les transformées de Fourier unidimensionnelles de α^m et β^n respectivement,

$$\tilde{g}_p(\kappa) = \int_{-1}^{+1} u^p e^{ju\kappa} du \quad (3.86)$$

Ces fonctions peuvent être évaluées numériquement, pour tout argument réel κ , à l'aide de la relation de récurrence suivante, établie sans difficulté à partir de la définition (3.86),

$$\begin{cases} \tilde{g}_p(\kappa) = \frac{1}{j\kappa} [e^{j\kappa} + (-1)^{p-1} e^{-j\kappa}] - \frac{p}{j\kappa} \tilde{g}_{p-1}(\kappa) \text{ pour } p \geq 1 \\ \tilde{g}_0(\kappa) = 2 \frac{\sin \kappa}{\kappa} \end{cases} \quad (3.87)$$

Toutefois, lorsque $|\kappa|$ est grand, l'évaluation de $\tilde{g}_p(\kappa)$ en utilisant (3.87) conduit à des erreurs numériques importantes, causées par la soustraction de termes peu différents et de grand module. La relation de récurrence (3.87) est donc recommandée uniquement pour des valeurs raisonnablement faibles de $|\kappa|$, en pratique $|\kappa| < 10$. Lorsque $|\kappa| > 10$, le calcul de $\tilde{g}_0(\kappa)$ peut être effectué en considérant plutôt la relation de récurrence inverse

$$\tilde{g}_p(\kappa) = \frac{1}{p+1} [e^{j\kappa} + (-1)^p e^{-j\kappa}] - \frac{j\kappa}{p+1} \tilde{g}_{p+1}(\kappa) \quad (3.88)$$

et en imposant $\tilde{g}_P(\kappa) = 0$, P étant un entier suffisamment grand, on suggère de prendre $P = 50$. Les relations (3.87) et (3.88) autorisent donc le calcul de $\tilde{g}_p(\kappa)$ pour des valeurs successives de p , croissantes ou décroissantes. En substituant les valeurs calculées de \tilde{g}_m et \tilde{g}_n dans (3.85), et en utilisant l'expression (3.82), la pression acoustique rayonnée peut donc être calculée simplement en tout point du champ lointain à partir de la solution vibratoire. Les variations de la pression rayonnée en fonction de la direction dans l'espace permettent à leur tour de visualiser le diagramme de directivité de la source acoustique, et d'analyser, de manière *locale*, le rayonnement acoustique.

3.5.2 Indicateurs vibroacoustiques

Outre la pression acoustique rayonnée en champ lointain, les autres indicateurs vibroacoustiques utilisés pour quantifier les phénomènes sont la vitesse vibratoire quadratique de la structure, la puissance acoustique rayonnée dans le fluide et l'efficacité de rayonnement de la structure. Ces trois indicateurs, contrairement à la pression acoustique rayonnée, sont globaux.

La puissance acoustique rayonnée par la structure dans le demi-espace $z > 0$ peut être obtenue, compte tenu que le milieu fluide est sans pertes, en sommant l'intensité acoustique radiale sur un hémisphère de rayon infini. Cette intensité étant connue lorsque la pression en champ lointain est connue, la puissance rayonnée est finalement donnée par l'expression suivante,

$$W = \frac{\rho_0 \Omega^4}{8c_0 \pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} |\tilde{w}(\lambda, \mu)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.89)$$

Compte tenu de (3.85),

$$W = \left(\frac{a^2}{4r}\right)^2 \frac{\rho_0 \Omega^4}{8c_0 \pi^2} \{a_{mn}\}^T \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \tilde{g}_m(\lambda \frac{a}{2}) \tilde{g}_n(\mu \frac{b}{2}) \tilde{g}_p^*(\lambda \frac{a}{2}) \tilde{g}_q^*(\mu \frac{b}{2}) \sin \theta d\theta d\varphi \right] \{a_{pq}^*\} \quad (3.90)$$

où * désigne l'opération de conjugué complexe.

Une alternative possible à l'évaluation dans le champ lointain de la puissance rayonnée est la sommation de l'intensité normale sur la surface de la structure. Cette méthode, toutefois, nécessite le calcul des impédances de rayonnement modales non seulement directes, mais aussi couplées, puisque, comme l'ont montré KELTIE et PENG [31], le couplage des modes par le fluide peut être important au sens de la puissance rayonnée, sous la fréquence critique. L'approche proposée ici ne rend pas nécessaire le calcul des impédances de rayonnement, et ne pose pas d'hypothèse de couplage modal nul.

L'efficacité de rayonnement, ou facteur de rayonnement, est définie comme le rapport sans dimension de la puissance acoustique rayonnée et de la vitesse quadratique de la structure multipliée par $\rho_0 c_0 ab$. La vitesse quadratique de la structure, notée $\langle \dot{w}^2 \rangle$, est

définie comme la moyenne temporelle et spatiale de la vitesse vibratoire sur (S),

$$\langle \dot{w}^2 \rangle = \frac{1}{S} \int_{(S)} \frac{1}{2} \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right|^2 dS = \frac{1}{2\rho_s h ab} \Omega^2 \{a_{mn}\}^T [M_{mnpq}] \{a_{pq}^*\} \quad (3.91)$$

L'efficacité de rayonnement est donc

$$\sigma = \frac{W}{\rho_0 c_0 ab \langle \dot{w}^2 \rangle}, \quad (3.92)$$

et peut être calculée à partir de (3.90) et (3.91). Lorsque les coefficients $\{a_{mn}\}$ sont obtenus comme solution du problème aux valeurs propres (3.68), l'équation (3.92) définit le facteur de rayonnement d'un mode particulier de la structure. Lorsque les $\{a_{mn}\}$ sont obtenus comme solution du système linéaire (3.74), l'équation (3.92) définit le facteur de rayonnement global de la structure pour l'excitation spécifiée.

3.5.3 Commentaires sur l'implantation numérique

La pression acoustique rayonnée par la structure dans une direction quelconque de l'espace s'obtient de manière directe à partir de la solution vibratoire et de la transformée de Fourier des fonctions α^m et β^n définies sur $[-1, +1]$. L'évaluation de la puissance acoustique rayonnée nécessite le calcul de l'intégrale (3.89). Dans cette étude, l'intégrale en question a été calculée numériquement en utilisant un algorithme de quadrature adaptatif basé sur les règles de Gauss-Kronrod. Le caractère très directif du rayonnement acoustique au-delà de la première fréquence critique modale de la structure se traduit par de très fortes variations de la fonction à intégrer, ce qui rend nécessaire un tel algorithme adaptatif.

3.6 Conclusions

Le but de ce chapitre était la mise en place des éléments théoriques permettant de modéliser la chaîne excitation mécanique – vibrations – bruit pour une structure plane complexe rayonnant dans un milieu fluide léger.

Au niveau vibratoire, l'approche variationnelle rend possible la prise en compte de paramètres structuraux nouveaux tels que des conditions aux limites élastiques sur le contour (Γ), des masses ponctuelles rajoutées, des supports souples et des raidisseurs sur

(S). Par ailleurs, cette approche permet de prendre en compte facilement des excitations mécaniques de type force ponctuelle ou force répartie (l'extension au cas de moment de force ne pose pas de difficulté particulière). La résolution du problème vibratoire relève d'une démarche systématique en trois étapes: (i) construction d'une fonctionnelle d'énergie de la structure; cette première étape nécessite une réflexion préalable sur les hypothèses cinématiques adoptées pour décrire le mouvement de la structure; (ii) choix d'un sous-espace fonctionnel et d'une base fonctionnelle de ce sous-espace sur lequel s'effectue la recherche des extremums de la fonctionnelle; (iii) recherche des extremums. L'approche variationnelle satisfait l'exigence d'"ouverture" du modèle en ce sens qu'elle permet, au besoin et sans difficultés, l'adjonction progressive d'éléments structuraux de complexité croissante. D'autre part, le degré d'approximation de la solution vibratoire est fixé uniquement par la troncature des développements sur la base fonctionnelle; la précision de la solution est donc contrôlable *a posteriori* à partir d'un paramètre objectif, et n'est pas limitée par des hypothèses *a priori*.

Au niveau acoustique, l'expression asymptotique dans le champ lointain de la formulation intégrale de Rayleigh rend possible de manière simple le calcul de la pression rayonnée à grande distance de la source, et partant, de la puissance rayonnée dans le demi-espace fluide. Il faut noter que cette étape, en l'absence de couplage fluide-structure, évite le calcul de l'impédance de rayonnement de la structure, délicat et coûteux.

Au total, les limitations du modèle vibroacoustique ainsi élaboré concernent la densité modale de la structure, qui doit rester faible ou moyenne. Le modèle, néanmoins, constitue un outil puissant et, à notre connaissance unique, pour l'étude du rayonnement basses et moyennes fréquences par des structures réalistes. Dans le chapitre qui suit, ce modèle est utilisé pour étudier l'incidence des paramètres structuraux sur le comportement vibratoire et acoustique sur la base d'indicateurs vibroacoustiques globaux.

Chapitre 4

Résultats — Incidence des paramètres structuraux sur les vibrations et le bruit rayonné dans l'air

4.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'analyser, à l'aide du modèle théorique proposé précédemment, l'incidence des paramètres mécaniques de la structure sur les vibrations et le bruit rayonné dans l'air. Cette analyse, menée sur la base d'indicateurs globaux – vitesse vibratoire quadratique, efficacité de rayonnement, puissance acoustique rayonnée – se situe dans un contexte de contrôle du bruit, de sorte que l'indicateur significatif en dernière analyse est la puissance acoustique rayonnée par la structure. On doit rappeler que les principales hypothèses sous-jacentes sont l'absence de charge fluide, la présence d'un baffle rigide dans le plan de la structure, et l'indépendance de la force excitatrice vis-à-vis de la structure réceptrice.

Les résultats numériques présentés dans ce chapitre concernent successivement l'influence des conditions aux limites de la structure, l'ajout ponctuel de masse ou de raideur,

l'ajout d'éléments mécaniques raidisseurs. Tous ces résultats ont été obtenus pour une plaque rectangulaire en acier ayant les caractéristiques suivantes: $a = 0.455m$, $r = a/b = 1.2$, $h = 1mm$, $\rho_s = 7850kgm^{-3}$, $D = 18Nm$, $\nu = 0.28$. La densité modale d'une telle plaque est de $5.7 \times 10^{-2}Hz^{-1}$ (un mode/18Hz) et sa fréquence critique est de $12kHz$. Son rayonnement dans la gamme de fréquences audibles est donc essentiellement situé sous la fréquence critique, et ce rayonnement est contrôlé par des mécanismes modaux.

4.2 Influence des conditions aux limites

4.2.1 Rayonnement modal pour différentes conditions aux limites

Lorsqu'une structure présente un comportement modal marqué, il est commode d'en étudier le rayonnement mode à mode. Cette section présente l'efficacité de rayonnement de différents modes de la plaque étudiée en fonction de la fréquence excitatrice pour diverses conditions aux limites. Les cas extrêmes de contour appuyé ("S-S"), encastré ("C"), libre ("F") et guidé ("G") ont fait l'objet d'une attention particulière car ils doivent fournir les bornes du comportement vibratoire et acoustique d'une structure présentant des conditions aux limites élastiques. Le cas encastré et le cas libre n'ont pas été traités par GOMPERS [19] dont l'étude est pourtant la plus complète à ce jour; le rayonnement modal d'une plaque encastrée a été étudié par DEGEORGES [11]; le cas libre constitue, à notre connaissance, un apport original de cette étude.

La condition de rayonnement maximal d'un mode donné est la coïncidence entre la longueur d'onde mécanique et la longueur d'onde acoustique. Cette coïncidence se produit à la fréquence dite "fréquence critique modale". La fréquence critique modale a une expression simple dans le cas de l'appui seulement. Pour d'autres conditions aux limites, elle peut être calculée pour un mode i donné à partir de la relation de dispersion d'une plaque mince en flexion,[44, page 27]

$$\omega_i^2 = \frac{D}{\rho_s h} k_i^4 \quad (4.1)$$

et la condition de coïncidence

$$k_i = k_0 \quad (4.2)$$

où ω_i est la pulsation propre du mode considéré et k_i est le nombre d'onde mécanique correspondant. La pulsation propre ω_i est directement fournie par la solution du problème aux valeurs propres (3.68). Les équations (4.1) et (4.2) sont simultanément vérifiées à la fréquence

$$f_i^c = \frac{c_0}{2\pi} \left(\frac{\rho_s h}{D} \right)^{1/4} \omega_i^{1/2} \quad (4.3)$$

qui est la fréquence critique pour le mode i considéré.

Plaques simplement supportées et plaques encadrées

La figure 4.1 montre l'efficacité –ou facteur– de rayonnement de différents modes de la plaque dans la gamme de fréquences $20Hz - 3kHz$ dans les cas d'appui simple (trait plein) et d'encastrement (trait pointillé). Le graphique (4.1.a) présente un groupe de modes dont l'ordre suivant x et y est faible, le graphique (4.1.b) présente un groupe de modes dont l'ordre suivant une direction x ou y est faible, l'ordre suivant l'autre direction étant élevé, et le graphique (4.1.c) présente un groupe de modes dont l'ordre suivant x et y est élevé. Les points sont des valeurs théoriques fournies par WALLACE [87] dans le cas d'appui simple, calculées pour les modes (1-1), (2-2), (7-1) et (5-5) à des fractions successives $1/10f_i^c$, $1/5f_i^c$, $1/2f_i^c$, f_i^c de la fréquence critique modale. Le tableau 4.1 liste les fréquences propres f_i obtenues numériquement après résolution du problème aux valeurs propres (3.68), et les fréquences critiques modales données par l'équation (4.3) pour la même série de modes.

Les valeurs calculées du facteur de rayonnement sont en excellent accord avec les valeurs de WALLACE pour tous les modes présentés. Le maximum du facteur de rayonnement est atteint, comme prévu, au voisinage de la fréquence critique modale calculée. Sous la fréquence critique modale, il est possible de hiérarchiser les modes suivant leur efficacité à rayonner en modes impair-impair (de type monopolaire), pair-impair ou impair-pair (de type dipolaire) et pair-pair (de type quadripolaire). Pour tous les modes présentés, l'efficacité de rayonnement varie peu de l'appui à l'encastrement (un facteur légèrement supérieur à deux, au plus). La contrainte en rotation des bords de la plaque n'apparaît donc pas comme un paramètre déterminant pour les phénomènes de rayonnement acoustique; cette conclusion est en accord avec les observations antérieures de LOMAS et HAYEK

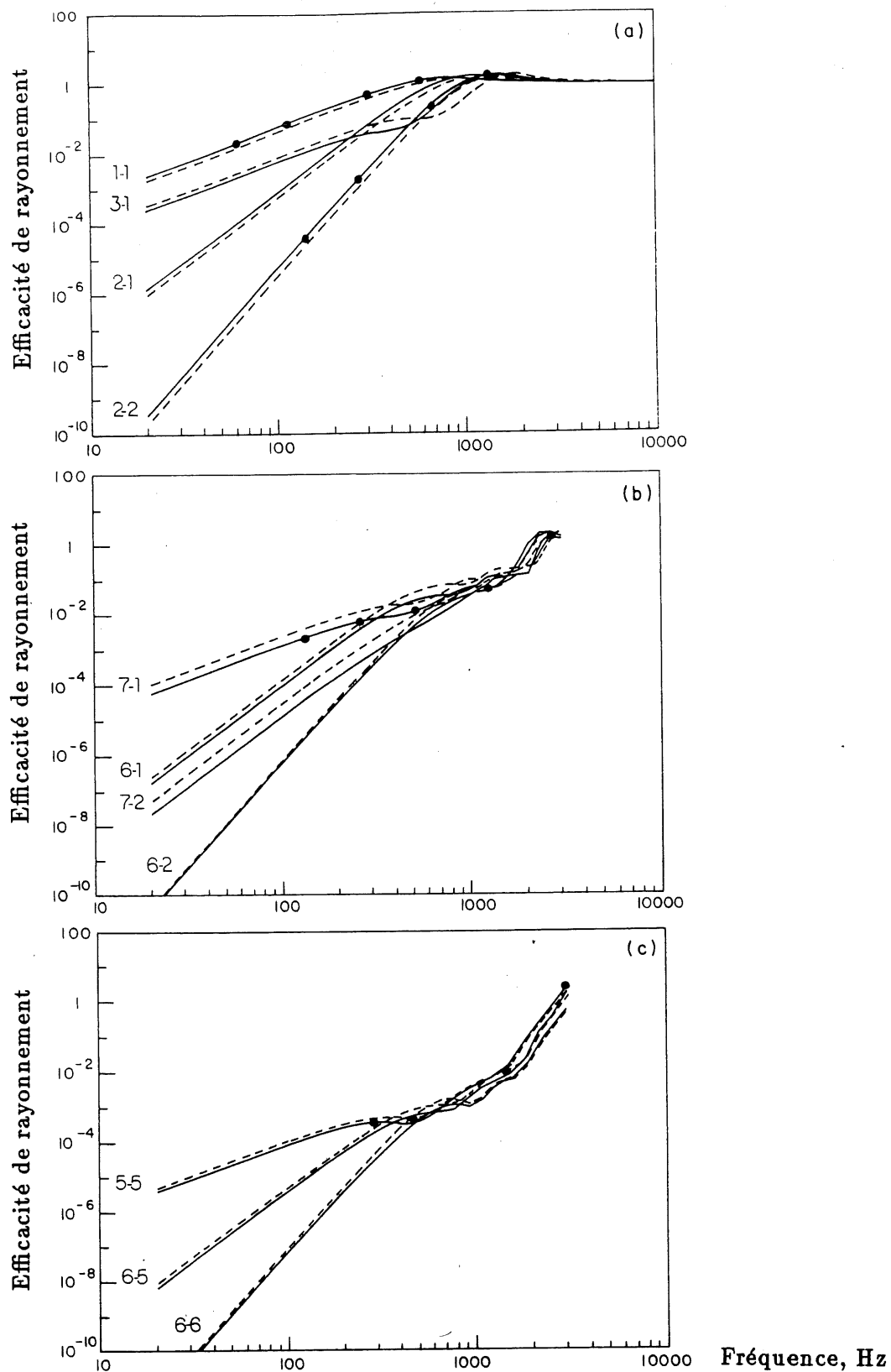


Figure 4.1: Efficacité de rayonnement de différents modes d'une plaque simplement supportée et d'une plaque encastree. (a) modes (1-1),(2-1),(2-2),(3-1); (b) modes (6-1),(6-2),(7-1),(7-2); (c) modes (5-5),(6-5),(6-6).

Tableau 4.1: Fréquences propres f_i et fréquences critiques modales f_i^c pour différents modes i d'une plaque simplement supportée et d'un plaque encastree.

| | | ordre du mode, $i = (j, k)$ | | | | | | | |
|---------------------|-------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| condition | | (1,1) | (2,1) | (2,2) | (3,1) | (6,1) | (6,2) | (7,1) | (7,2) |
| limite | | | | | | | | | |
| simplement supporté | f_i, Hz | 28.5 | 63.0 | 114. | 121. | 435. | 487. | 594. | 645. |
| | f_i^c, Hz | 587. | 874. | 980. | 1209. | 2297. | 2429. | 2683. | 2795. |
| encastree | f_i, Hz | 52.4 | 94.0 | 157. | 161. | 520. | 563. | 701. | 752. |
| | f_i^c, Hz | 797. | 1068. | 1379. | 1398. | 2509. | 2613. | 2914. | 3020. |

| | | ordre du mode, $i = (j, k)$ | | |
|---------------------|-------------|-----------------------------|-------|-------|
| condition | | (5,5) | (6,5) | (6,6) |
| limite | | | | |
| simplement supporté | f_i, Hz | 712. | 842. | 1090. |
| | f_i^c, Hz | 2937. | 3195. | 3635. |
| encastree | f_i, Hz | 812. | 966. | 1305. |
| | f_i^c, Hz | 3136. | 3421. | 3977. |

Tableau 4.2: Fréquences propres f_i et fréquences critiques modales f_i^c pour différents modes i d'une plaque libre et d'un plaque guidée.

| | | rang du mode, i | | | | | | | | |
|-----------|-------------|-------------------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| condition | | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 8 | 10 | 13 | 22 |
| limité | | | | | | | | | | |
| | guidée | | | | | | | | | |
| | f_i, Hz | 0. | 16.9 | 28.5 | 46.1 | 63.0 | 104. | 121. | 172. | 305. |
| | f_i^c, Hz | - | 453. | 587. | 747. | 874. | 1121. | 1209. | 1442. | 1923. |
| libre | | | | | | | | | | |
| | f_i, Hz | 0. | 0. | 19.3 | 24.9 | 46.7 | 71.8 | 91.1 | 144. | 251. |
| | f_i^c, Hz | - | - | 484. | 549. | 752. | 932. | 1051. | 1322. | 1743. |

[47]. Il faut noter de plus que, sous la fréquence critique modale, l'efficacité de rayonnement est plus grande dans le cas de l'appui simple pour les premiers modes de la plaque (modes (1-1),(2-1),(2-2)); la tendance inverse prévaut pour tous les autres modes présentés. Ce résultat est cohérent avec certains travaux antérieurs sur le rayonnement acoustique de poutres [86,65], ou de plaques [11], et montre que l'efficacité de rayonnement d'une structure à rayonner ne croît pas de manière monotone avec les contraintes introduites aux frontières; d'autre part la conclusion que l'efficacité de rayonnement est doublée en passant d'une condition d'appui simple à une condition d'encastrement ne s'applique pas aux premiers modes d'une plaque.

Plaques libres et plaques guidées

La figure 4.2 montre le facteur de rayonnement de quelques modes d'une plaque libre (trait plein) et d'une plaque guidée (trait pointillé). Les différents modes présentés sont identifiés par leur rang dans une classification par valeur croissante de fréquences propres. Les points reportés sont les valeurs théoriques calculées dans le cas guidé à partir des formules de GOMPERS [19], pour le troisième et le dixième mode. L'accord obtenu avec les résultats numériques est excellent. Le tableau 4.2 liste, pour la série de modes présentés, les valeurs des fréquences propres et des fréquences critiques modales calculées.

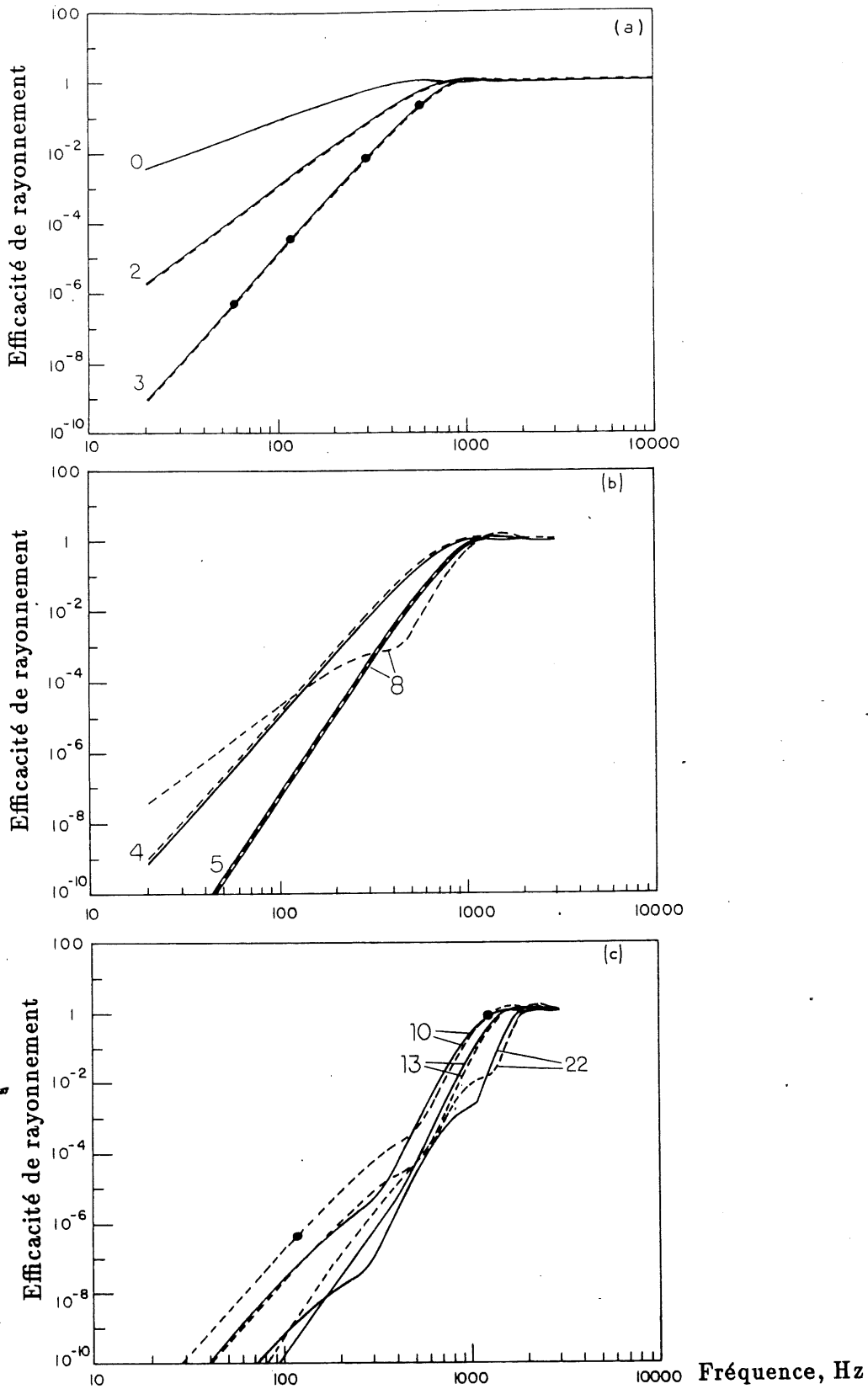


Figure 4.2: Efficacité de rayonnement de différents modes d'une plaque libre et d'une plaque guidée. (a) modes de rang 0,2,3; (b) modes de rang 4,5,8; (c) modes de rang 10,13,22.

Les cas libre et guidé sont des cas pour lesquels la plaque admet des modes rigides. Ces modes sont,

- dans le cas guidé: le mouvement de "piston" (mode 0)
- dans le cas libre: le mouvement de "piston" (mode 0), ainsi que les deux rotations rigides autour des axes x et y (modes 1 et 2).

Ces modes sont caractérisés par une énergie de déformation nulle, et admettent donc une fréquence propre nulle. Pour tous les cas où la raideur de translation k sur le contour (Γ) est égale à zéro, le mode "piston" existe. Dans de telles situations, l'analyse en basses fréquences du rayonnement acoustique doit tenir compte de ces modes rigides; l'étude pourtant assez complète de GOMPERTS [19] ne porte que sur les modes élastiques d'une plaque, même lorsque les modes rigides sont permis par les conditions aux limites.

La figure 4.2.a indique clairement l'importance de ces modes rigides au plan acoustique, puisque leur efficacité de rayonnement est bien supérieure aux modes élastiques sous la fréquence critique modale; ceci laisse présager leur effet dominant sur le bruit rayonné en basses fréquences. Ce point particulier est plus amplement discuté dans la section 4.2.3. La faible efficacité de rayonnement des modes élastiques d'une plaque libre a déjà été signalée par SKUDZRYK [73] et par WILLIAMS [90]; physiquement, cette particularité résulte de l'annulation complète entre les monopôles de rayonnement adjacents représentés par les quarts de longueur d'onde mécanique (figure 4.3). Cette interprétation suggère pour une plaque libre ou guidée l'absence de modes de coins ou de bords, ce qui a été vérifié expérimentalement par STRONG [82]. Une autre propriété intéressante, démontrée par WILLIAMS [90] établit que lorsque le mode piston existe, il est nécessairement le seul mode "volumétrique", c'est-à-dire le seul mode caractérisé par un flux de vitesse non nul une fois intégré sur la surface de la plaque. Le mode piston est donc le seul mode monopolaire d'une plaque libre ou d'une plaque guidée. l'examen des courbes relatives aux modes élastiques, figures 4.2.a, 4.2.b et 4.2.c révèle qu'en effet, les modes élastiques correspondent dans tous les cas à un rayonnement dipolaire ou quadripolaire.

Les résultats indiquent en outre que le facteur de rayonnement est peu différent dans

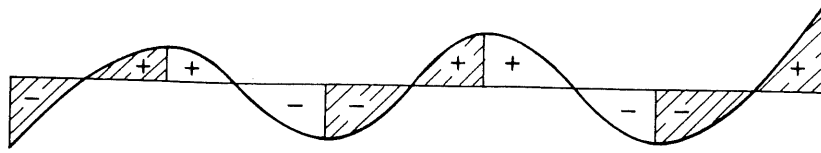


Figure 4.3: Déformée vibratoire d'un mode de plaque libre.

les cas libre et guidé pour les premiers modes; le facteur de rayonnement est sensiblement plus grand dans le cas guidé pour les modes élevés.

Le résultat essentiel en ce qui a trait à l'influence des conditions aux limites sur le rayonnement modal est que *la rigidité de translation des limites est le paramètre contrôlant les phénomènes de rayonnement acoustique en basses fréquences.*

4.2.2 Rayonnement des modes rigides d'une plaque – Solution basses fréquences

La discussion qui précède a permis d'établir que, lorsque les modes rigides existent, ils gouvernent le rayonnement acoustique en basses fréquences; il paraît donc intéressant de donner des expressions approchées mais simples permettant de calculer le rayonnement acoustique dans de telles situations. Les développements qui suivent visent à obtenir de telles relations approchées pour l'efficacité de rayonnement et la puissance rayonnée en basses fréquences lorsque seuls ces modes rigides sont considérés.

Le mouvement piston w_p et la rotation rigide w_r de la plaque autour de l'axe y sont donnés par

$$w_p(\alpha, \beta) = 1 \quad (4.4)$$

$$w_r(\alpha, \beta) = \alpha \quad (4.5)$$

En particulierisant l'équation (3.90) aux champs de déplacement (4.4) et (4.5), on obtient

la puissance acoustique rayonnée dans chacun des deux cas,

$$W_p = \left(\frac{a^2}{r}\right)^2 \frac{\rho_0 \Omega^4}{8c_0 \pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} j_0^2\left(\lambda \frac{a}{2}\right) j_0^2\left(\mu \frac{b}{2}\right) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4.6)$$

$$W_r = \left(\frac{a^2}{r}\right)^2 \frac{\rho_0 \Omega^4}{8c_0 \pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} j_1^2\left(\lambda \frac{a}{2}\right) j_0^2\left(\mu \frac{b}{2}\right) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4.7)$$

où $\lambda = k_0 \sin \theta \cos \varphi$, $\mu = k_0 \sin \theta \sin \varphi$, et j_0 et j_1 sont les fonctions de Bessel sphériques d'ordre 0 et d'ordre 1, respectivement. Après développement de j_0 et de j_1 en séries de Taylor et intégration par rapport à θ et φ , les expressions (4.6) et (4.7) deviennent

$$W_p = \left(\frac{a^2}{r}\right)^2 \frac{\rho_0 \Omega^4}{4c_0 \pi} \quad (4.8)$$

$$W_r = \left(\frac{a^2}{r}\right)^2 \frac{\rho_0 \Omega^4}{432c_0 \pi} (k_0 a)^2 \quad (4.9)$$

Ces expressions correspondent au premier terme seulement du développement en séries de Taylor, et sont valides en basses fréquences uniquement, $k_0 a \ll 1$. Les formules correspondantes pour le facteur de rayonnement sont, dans le cas du mode piston,

$$\sigma_p = \frac{1}{2\pi r} (k_0 a)^2 \quad k_0 a \ll 1, \quad (4.10)$$

et dans le cas du mode de rotation rigide autour de y ,

$$\sigma_r = \frac{1}{72\pi r} (k_0 a)^4 \quad k_0 a \ll 1 \quad (4.11)$$

L'expression (4.10) dans le cas du piston est identique à celle obtenue par STEPANISHEN [79] lorsque $k_0 a$ est petit. On peut noter que dans les équations (4.10) et (4.11), l'efficacité de rayonnement est inversement proportionnelle à l'allongement r de la plaque, et est donc maximale pour une plaque de forme carrée. Les valeurs de $r\sigma_p$ et de $r\sigma_r$ obtenues à partir de ces expressions simples sont représentées à la figure 4.4 en fonction de $k_0 a$. Le mouvement piston correspond à un rayonnement monopolaire, la rotation rigide à un rayonnement dipolaire. Les valeurs numériques calculées concordent avec celles reportées sur la figure 4.2.a. Les tendances indiquées par les courbes de la figure 4.4 ne s'appliquent pas en hautes fréquences, où $r\sigma$ doit tendre asymptotiquement vers la valeur constante r ($\sigma \rightarrow 1$).

La puissance acoustique rayonnée par un piston rectangulaire excité par une force unitaire de fréquence Ω s'obtient par simple application de la formule (4.10). Si M est la

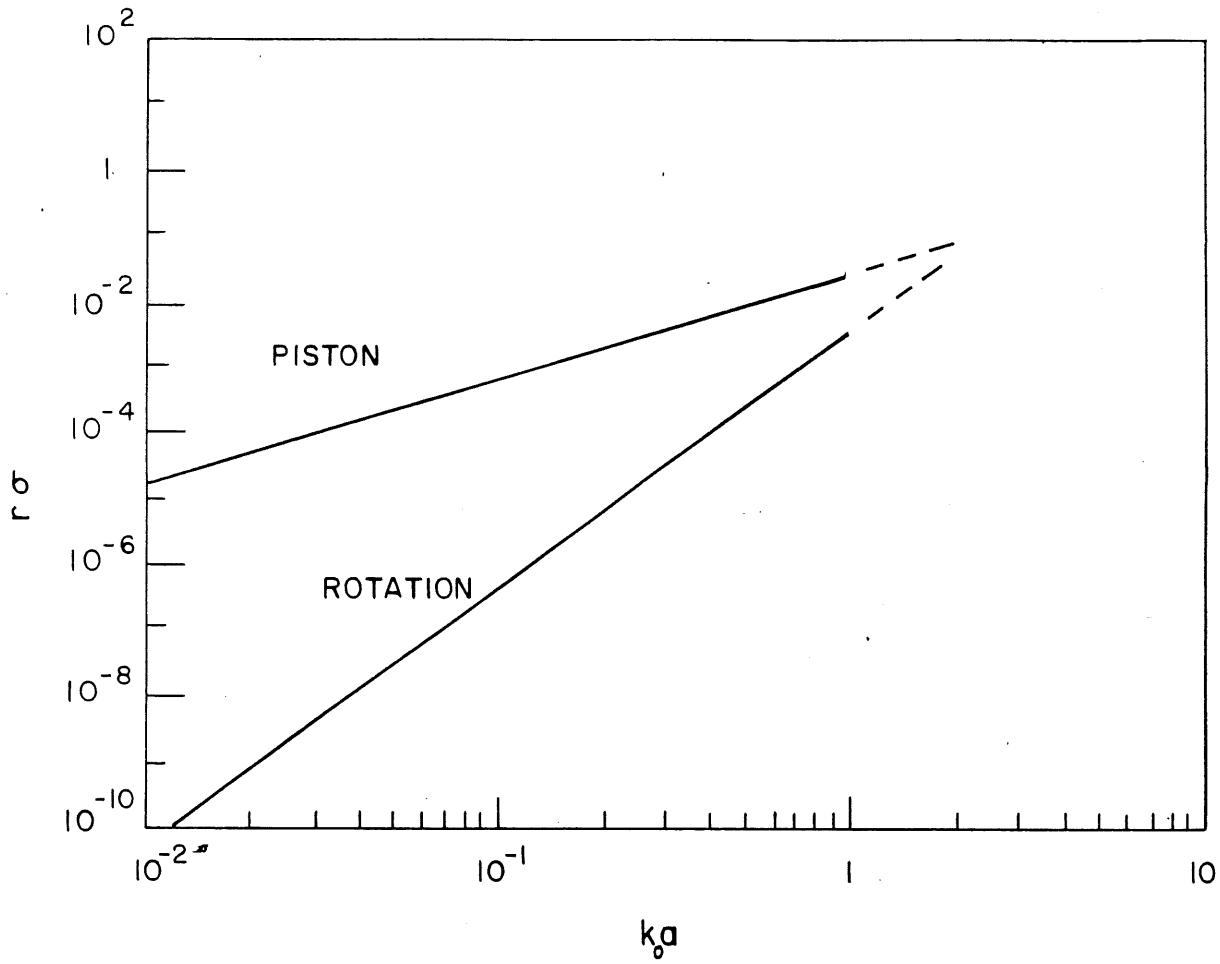


Figure 4.4: Efficacité de rayonnement des modes rigides d'une plaque rectangulaire. La rotation rigide est par rapport à l'axe y .

masse du piston, sa vitesse est $\dot{w} = \frac{1}{j\Omega M}$, et la puissance rayonnée dans un demi-espace fluide, compte tenu de l'efficacité de rayonnement (4.10) est

$$W = \frac{\rho_0}{4\pi c_0 (\rho_s h)^2} \quad (4.12)$$

où $(\rho_s h)$ est la masse surfacique du piston. On notera que W est indépendant de la fréquence excitatrice.

4.2.3 Réponse acoustique d'une plaque pour différentes conditions aux limites

La figure 4.5 montre la puissance acoustique rayonnée par la plaque mise en vibrations forcées, pour les conditions aux limites suivantes: appui simple ("S-S"), encastrement ("C"), contour libre ("F"), contour guidé ("G"). La force excitatrice est appliquée ponctuellement au centre de la plaque ($\alpha = 0, \beta = 0$), et son amplitude est de $1N$. Compte tenu de la position de cette force, seuls les modes symétriques sont présents dans la réponse vibratoire. Le facteur de perte structural utilisé dans les calculs est $\eta_p = 0.01$. La figure 4.6 représente l'efficacité de rayonnement correspondante pour les mêmes conditions aux limites.

La comparaison entre les conditions d'appui et d'encastrement (figure 4.6.a) révèle deux régions fréquentielles distinctes: la région où le premier mode domine la réponse vibratoire, pour laquelle l'efficacité de rayonnement est plus grande dans le cas d'appui simple, et la région multimodale, pour laquelle l'efficacité de rayonnement est plus grande dans le cas d'encastrement. Ces observations recourent les conclusions de la section 4.2.1.

Les pics du spectre de puissance (figure 4.5) correspondent aux résonances des modes symétriques de la plaque; ces résonances sont clairement visibles dans le cas d'appui simple et d'encastrement, beaucoup moins visibles dans les cas libre et guidé. Pour tenter d'expliquer ce résultat, on a calculé et reporté l'expression (4.12) sur la même graphique. La valeur obtenue s'avère tout à fait représentative de la puissance rayonnée dans les cas de conditions aux limites libre et guidée. Il apparaît donc que, dans la gamme de fréquences

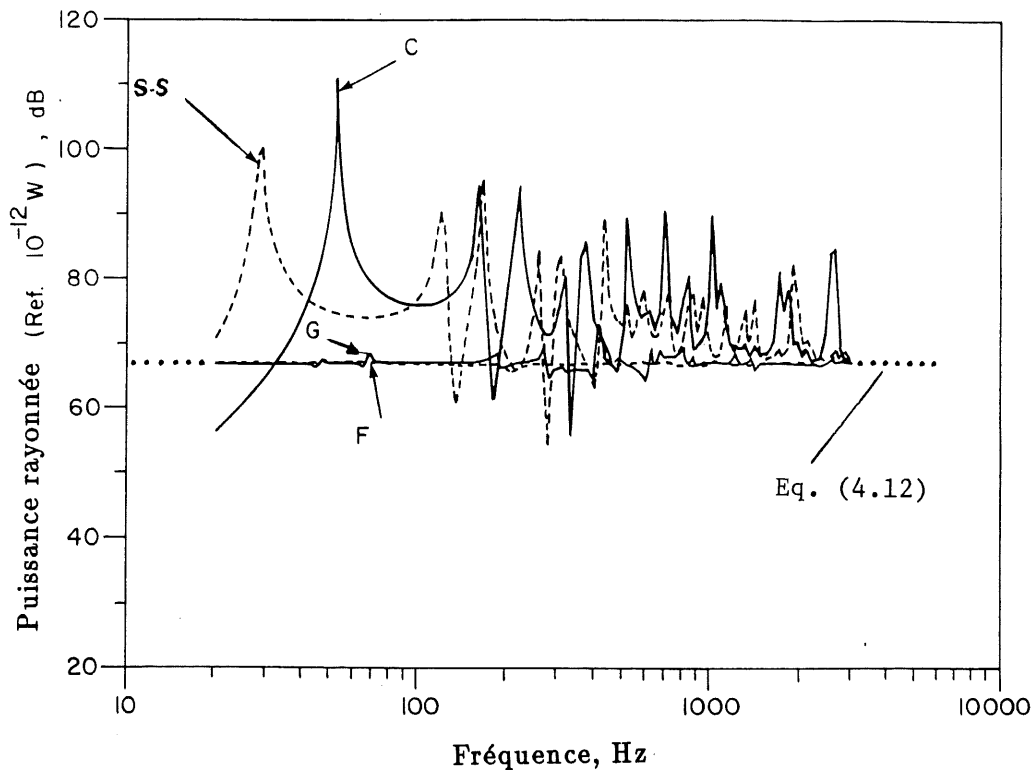


Figure 4.5: Puissance acoustique rayonnée par une plaque rectangulaire pour différentes conditions aux limites.

considérée, la composante "piston" du mouvement véhicule la quasi totalité de la puissance rayonnée pour les conditions aux limites libres et guidées; le mouvement de piston, très efficace en rayonnement, masque sur le spectre acoustique l'ensemble des modes élastiques qui, quoique fortement excités, voire résonants, sont très faiblement efficaces à rayonner. Cette propriété remarquable produit un spectre de puissance presque parfaitement plat. Toutefois, à des fréquences plus élevées (non représentées sur le graphique), les modes élastiques, devenus efficaces en rayonnement, émergeraient du spectre de puissance. On peut noter que, hormis certaines zones fréquentielles très limitées, l'expression (4.12) fournit une borne inférieure pour la puissance rayonnée dans les cas d'appui simple ou d'encastrement.

Les résultats précédents suggèrent qu'un montage souple d'une plaque sur ses bords est une solution potentielle pour minimiser la puissance acoustique rayonnée; ceci n'est pas sans poser certains problèmes pratiques. Il semble donc pertinent d'envisager l'effet de légères perturbations autour d'une condition aux limites par exemple complètement

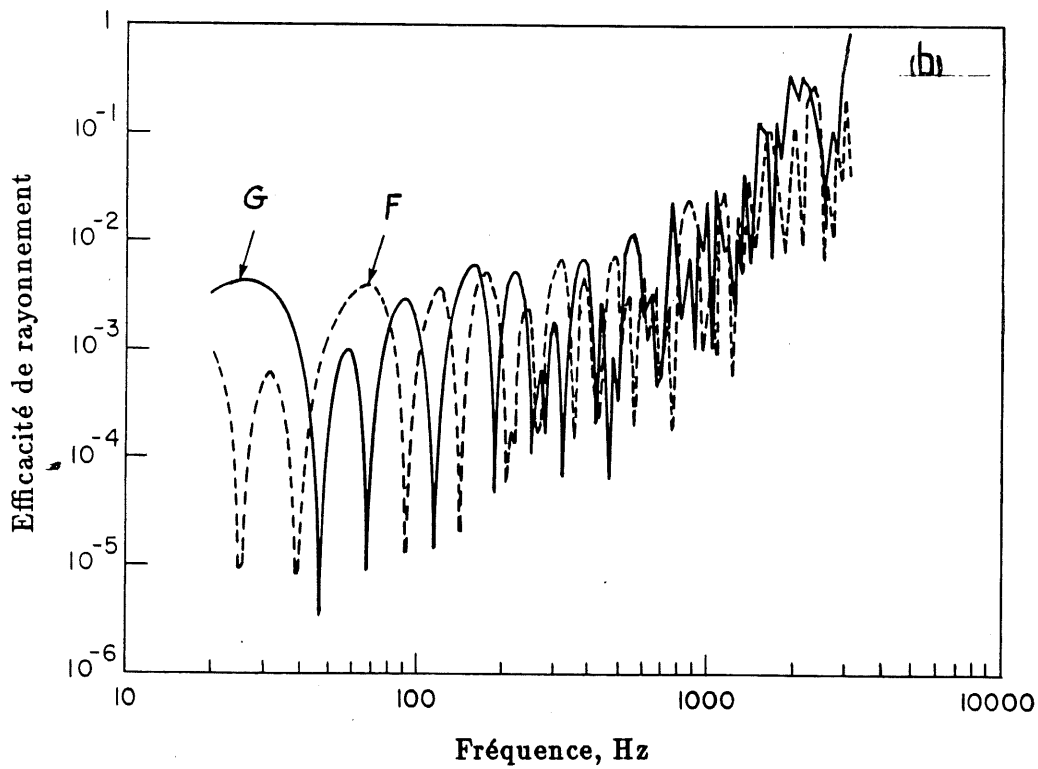
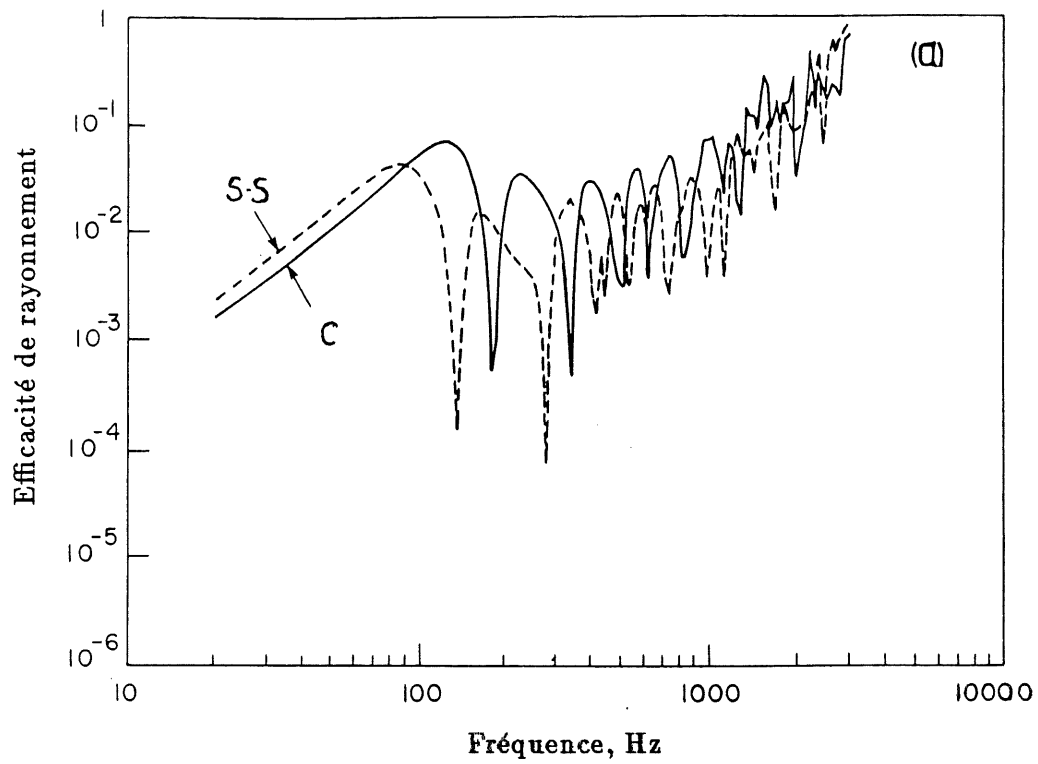


Figure 4.6: Facteur de rayonnement d'une plaque rectangulaire pour différentes conditions aux limites: (a) appui simple et encastrement, (b) contour libre et contour guidé.

libre en introduisant localement des zones “dures” sur le contour. Les résultats obtenus sont illustrés à la figure 4.7, pour une plaque partiellement libre - partiellement encastree. Les zones encastrees du contour ont des dimensions petites, et sont localisees, soit au centre de chaque cote de la plaque (cas 1), soit à chaque coin (cas 2), selon les schemas de la figure 4.7. Comme on le voit, les contraintes supplementaires localement introduites suffisent à compromettre de maniere dramatique le faible rayonnement de la plaque libre; les proprietes particulieres de la condition libre apparaissent donc tres sensibles à la presence de perturbations, de discontinuities ou de zones “dures” localisees sur le contour de la plaque.

4.3 Influence du rajout ponctuel de masse ou de raideur

4.3.1 Rajout ponctuel de masse

Rajout de masse au point d'excitation

Les figures 4.8 et 4.9 presentent la reponse vibratoire et acoustique de la plaque excitee en son centre par une force ponctuelle unitaire, pour divers taux croissants μ de masse ponctuelle rajoutee sous la force ($\mu = 0, \mu = 0.1, \mu = 0.2, \mu = 0.5$), entre $20 Hz$ et $3 kHz$. Le graphique 4.8.a montre le niveau de vitesse vibratoire quadratique $\langle \dot{w} \rangle^2$ (dB re $1 m^2 s^{-2}$), moyenné spatialement sur la surface de la plaque; le graphique 4.8.b represente le facteur de rayonnement σ correspondant, sur une echelle logarithmique (les valeurs indiquees en ordonnee sont $10 \log_{10} \sigma$). Le produit de la vitesse quadratique par le facteur de rayonnement permet d'obtenir directement la puissance acoustique W rayonnee dans le fluide (dB re 10^{-12} watt), qui est representee sur le graphique 4.9. Les conditions aux limites sont des appuis simples.

La rajout de masse sous la force contribue à diminuer fortement le niveau vibratoire moyen de la structure en hautes frequences (figure 4.8.a): c'est le domaine frequentiel où l'impedance de la masse (proportionnelle à Ω) domine celle de la plaque. Le rajout de masse au point d'excitation produit donc une diminution locale de la mobilite et cree un

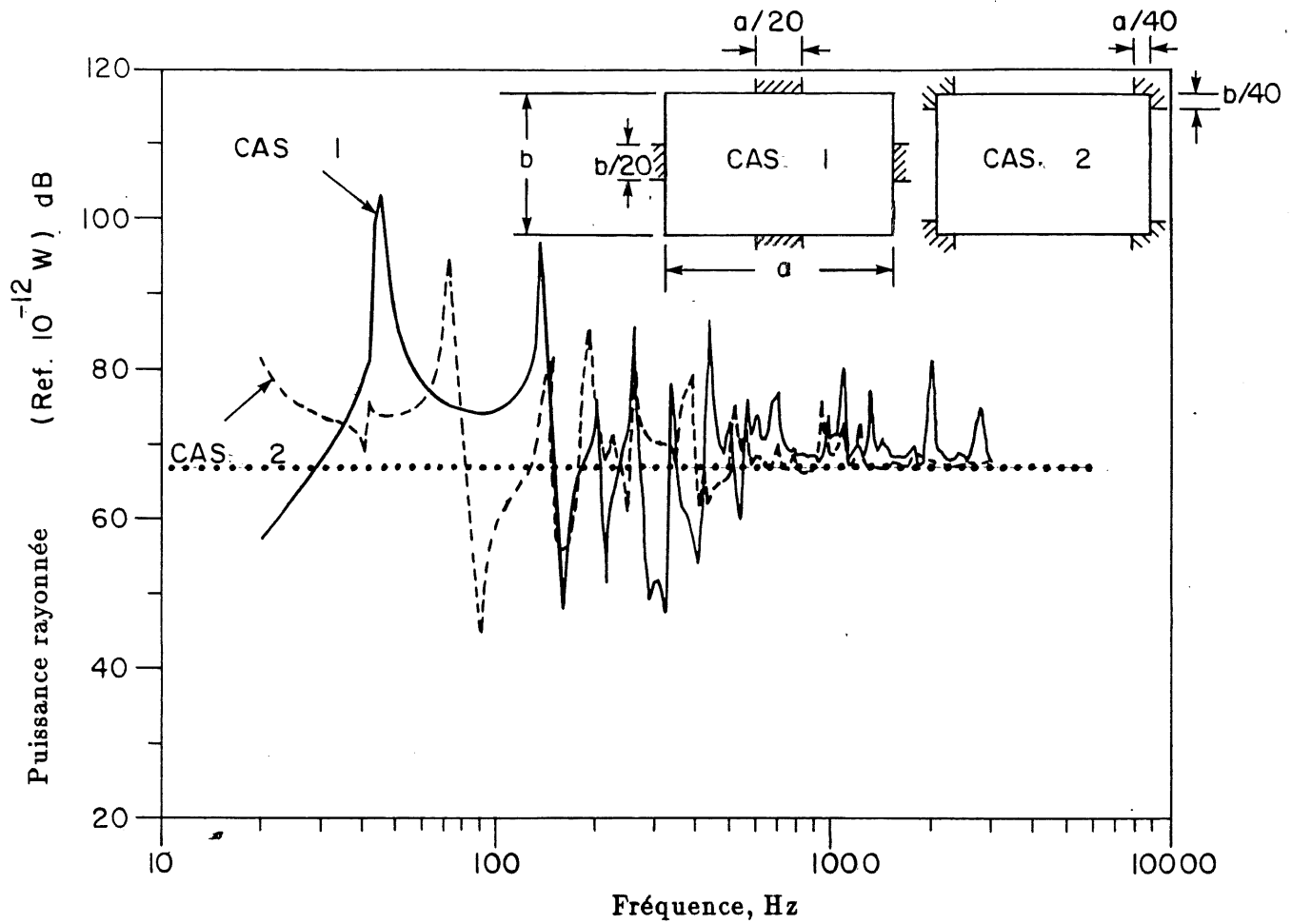


Figure 4.7: Puissance acoustique rayonnée par une plaque rectangulaire partiellement libre - partiellement encadrée.

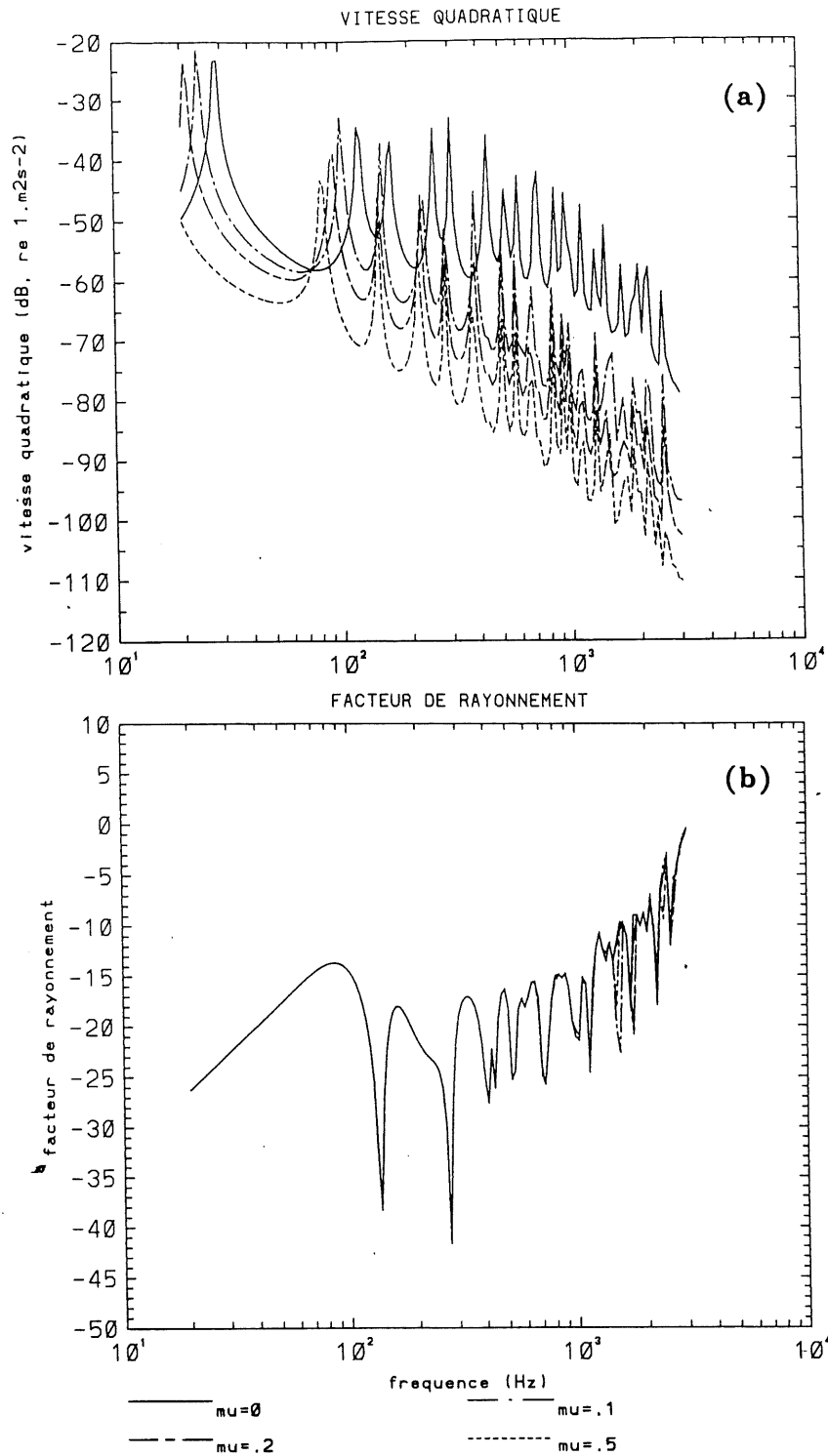


Figure 4.8: Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes masses ponctuelles rajoutées au point d'excitation; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

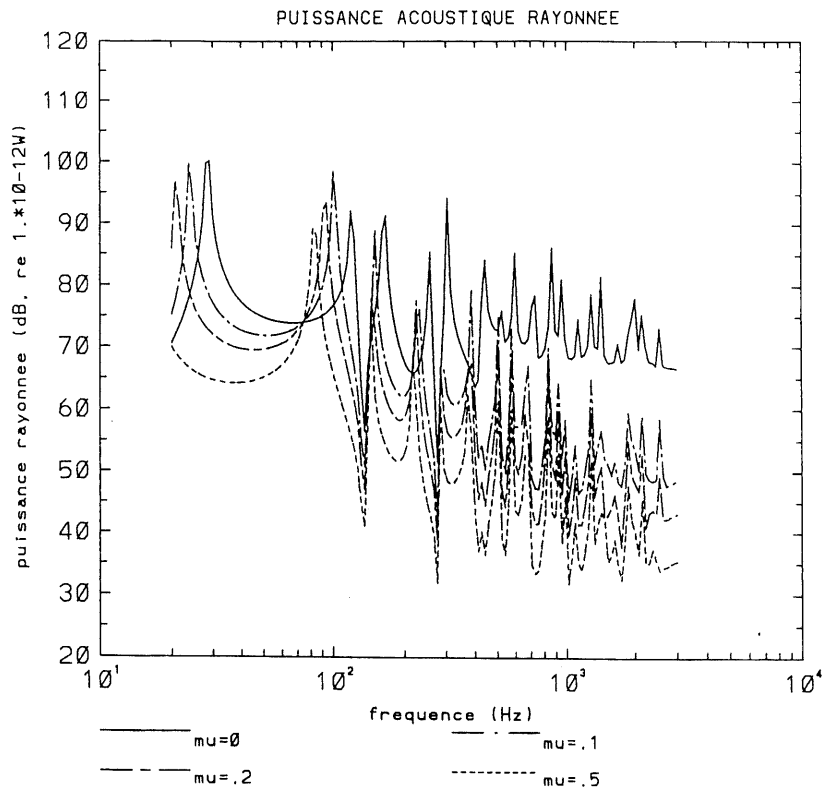


Figure 4.9: Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes masses ponctuelles rajoutées au point d'excitation.

point "dur" à des fréquences élevées. Ces conclusions recourent celles de SNOWDON [76]. En basses fréquences, l'effet prédominant est la diminution des fréquences propres liée à l'accroissement de la masse totale de la structure. On sait [76] que le glissement de la première fréquence propre n'est pas borné et s'accroît à mesure que le taux de masse rajoutée augmente. Par contre, toutes les autres fréquences propres de la plaque chargée par la masse ont une limite inférieure qui correspond aux antirésonances de la plaque nue. Ces antirésonances sont identifiables sur les courbes des figures 4.8.a et 4.9 comme les points communs à toutes les courbes, clairement visibles en basses fréquences.

La présence de la masse, bien qu'affectant considérablement le comportement vibratoire de la structure, laisse inchangée l'efficacité de rayonnement (figure 4.8.b). Ce résultat s'interprète physiquement par le fait que la masse modifie uniquement la force présentée à la plaque en amplitude et en phase; en conséquence, l'efficacité de rayonnement en présence d'une masse sous la force est identique à celle de la plaque nue. Cette propriété est

généralisable à toute modification locale de la structure aux points d'entrée de l'énergie. En corollaire, le gain obtenu par adjonction de masse sur la puissance acoustique rayonnée est strictement identique à celui obtenu sur le niveau vibratoire de la structure (figure 4.9). L'ajout de masse en vue de réduire le bruit rayonné est donc une solution potentielle pour des fréquences suffisamment élevées.

Rajout de masse hors point d'excitation

Les figures 4.10 et 4.11 présentent les résultats obtenus lorsque la masse est située hors excitation, au point $\alpha = 0.44, \beta = 0.53$, la force étant appliquée en $\alpha = 0, \beta = 0$.

Le rajout de masse n'entraîne cette fois-ci pas de diminution du niveau vibratoire de la structure (figure 4.10.a). Un tel résultat est conforme aux conclusions de KUBOTA *et al* [34]. Par contre la présence d'une masse excentrée rompt la symétrie de la structure et des déformées propres; de nouveaux modes structuraux, pour lesquels le point d'excitation n'est pas un nœud vibratoire, sont alertés, ce qui justifie l'émergence de nouveaux pics sur les spectres vibratoires et acoustiques. Ces pics sont visibles surtout en basses fréquences; plus haut en fréquence, les courbes tendent à se confondre, ce qui peut s'interpréter par le fait que la masse rajoutée est suffisante pour créer un nœud de vibration. Pour des modes d'ordre élevé, la distorsion du champ vibratoire due à la masse est comparativement plus faible, et les résonances de la plaque chargée par la masse se produisent à des fréquences très voisines de celles de la plaque nue. La présence d'une masse hors point d'excitation est donc inefficace à réduire l'énergie vibratoire de la structure, mais peut être un moyen éventuel pour diminuer localement son déplacement.

Le facteur de rayonnement (figure 4.10.b) est affecté par l'ajout d'une masse excentrée. Les différences les plus significatives se situent en basses fréquences; globalement la présence de la masse fait légèrement diminuer l'efficacité de rayonnement de la structure. SEYBERT et TSUI [72] ont étudié le problème analogue dans le cas d'une poutre chargée par une masse ponctuelle de position variable. Leur interprétation des phénomènes en termes de rayonnement modal montre que la présence d'une masse ponctuelle perturbe les déformées

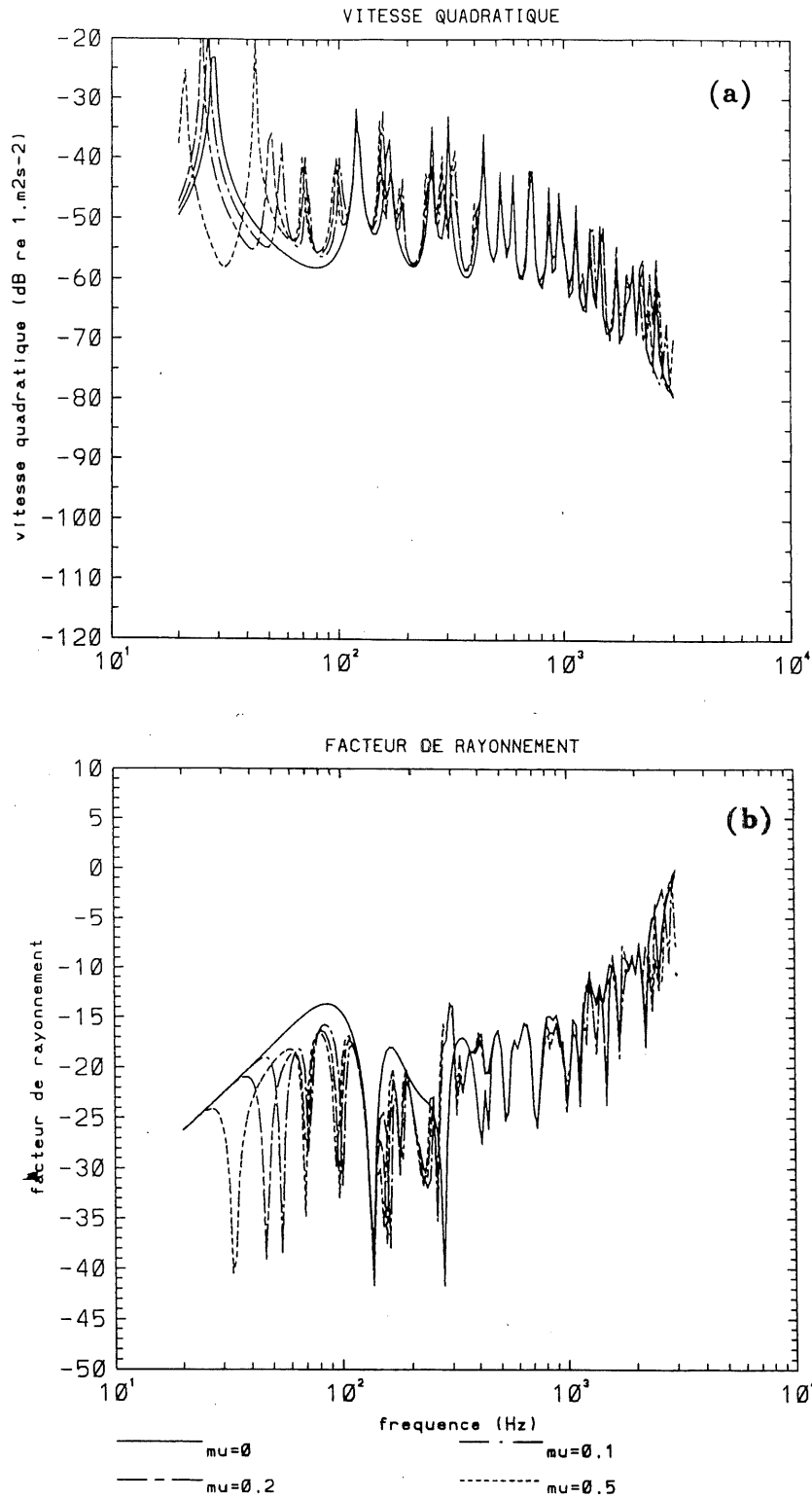


Figure 4.10: Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes masses ponctuelles rajoutées en $\alpha = 0.44, \beta = 0.53$; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

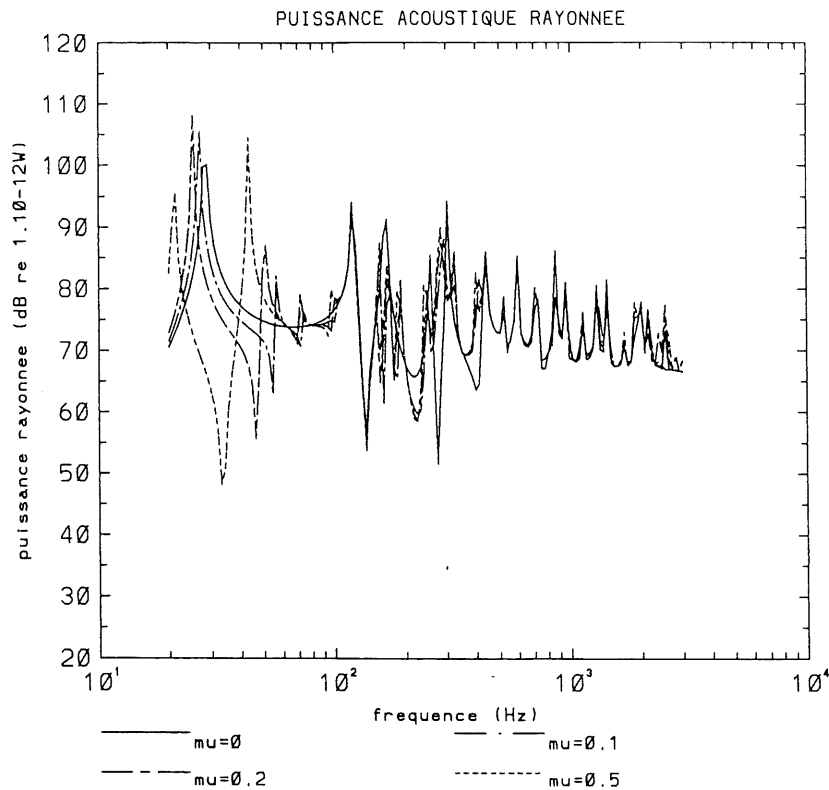


Figure 4.11: Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes masses ponctuelles rajoutées en $\alpha = 0.44, \beta = 0.53$.

propres de la poutre, et redistribue donc les pôles de rayonnement sur la structure. Dans le cas présent d'une plaque excitée en son centre, ce sont les modes symétriques, très efficaces en rayonnement qui sont perturbés; les modes résultants pour la plaque chargée par la masse introduisent des composantes anti-symétriques faiblement rayonnantes dans le champ de déplacement. Le résultat global est une moindre efficacité de rayonnement. Il faut noter que cette diminution est liée au cas très particulier présenté ici d'une force centrée. D'autre part, les résultats présentés ici ne semblent pas mettre en évidence, même en hautes fréquences d'accroissement de l'efficacité de rayonnement, conséquence généralement admise, [89], d'une discontinuité introduite dans une structure uniforme.

En corollaire, la puissance acoustique rayonnée dans le fluide (figure 4.11) n'est que peu affectée par l'ajout d'une masse hors point d'excitation. Il a été vérifié que ces conclusions restent vraies indépendamment des conditions aux limites de la structure.

4.3.2 Rajout ponctuel de raideur

Rajout de raideur au point d'excitation

Les figures 4.12 et 4.13 présentent la réponse vibratoire et le rayonnement de la plaque excitée en son centre par une force ponctuelle de $1N$, pour divers taux croissants κ de raideur ponctuelle rajoutée sous la force ($\kappa = 0, \kappa = 10^3, \kappa = 10^4, \kappa = 10^5$). Les conditions aux limites sont des appuis simples.

L'ajout de raideur et l'ajout de masse au point d'excitation conduisent à des résultats sensiblement différents; cependant les mécanismes impliqués sont les mêmes. L'ajout ponctuel de raideur sous l'excitation contribue à diminuer fortement l'énergie vibratoire de la structure en basses fréquences (figure 4.12.a). Dans cette région, l'impédance du ressort (inversement proportionnelle à Ω) est très grande devant l'impédance mécanique de la plaque, ce qui provoque, comme dans le cas de la masse, une diminution de la mobilité d'entrée de la structure: un point "rigide" est offert à la force en basses fréquences. L'effet supplémentaire est le glissement des fréquences propres vers la droite, lié à l'accroissement de rigidité de la structure. Dans ce cas, le glissement est borné pour toutes les fréquences propres, et la limite supérieure est également l'antirésonance de la plaque nue. Pour les raisons exposées précédemment, l'efficacité de rayonnement de la structure n'est pas changée par l'ajout ponctuel de raideur sous la force; le gain obtenu en termes de puissance acoustique rayonnée est rigoureusement celui obtenu en termes de vitesse quadratique de la structure. Le domaine d'action privilégié de l'ajout de raideur en vue de réduire le bruit rayonné est donc celui des basses fréquences.

Rajout de raideur hors point d'excitation

Les figures 4.14 et 4.15 montrent les résultats obtenus lorsque la raideur ponctuelle est située au point $\alpha = 0.44, \beta = 0.53$, la force étant appliquée en $\alpha = 0, \beta = 0$.

L'effet d'une raideur ponctuelle hors point d'excitation est similaire à celui d'une masse ajoutée hors point d'excitation: émergence de nouveaux pics vibratoires et acoustiques en basses fréquences, et condition de nœud vibratoire en hautes fréquences au point où la

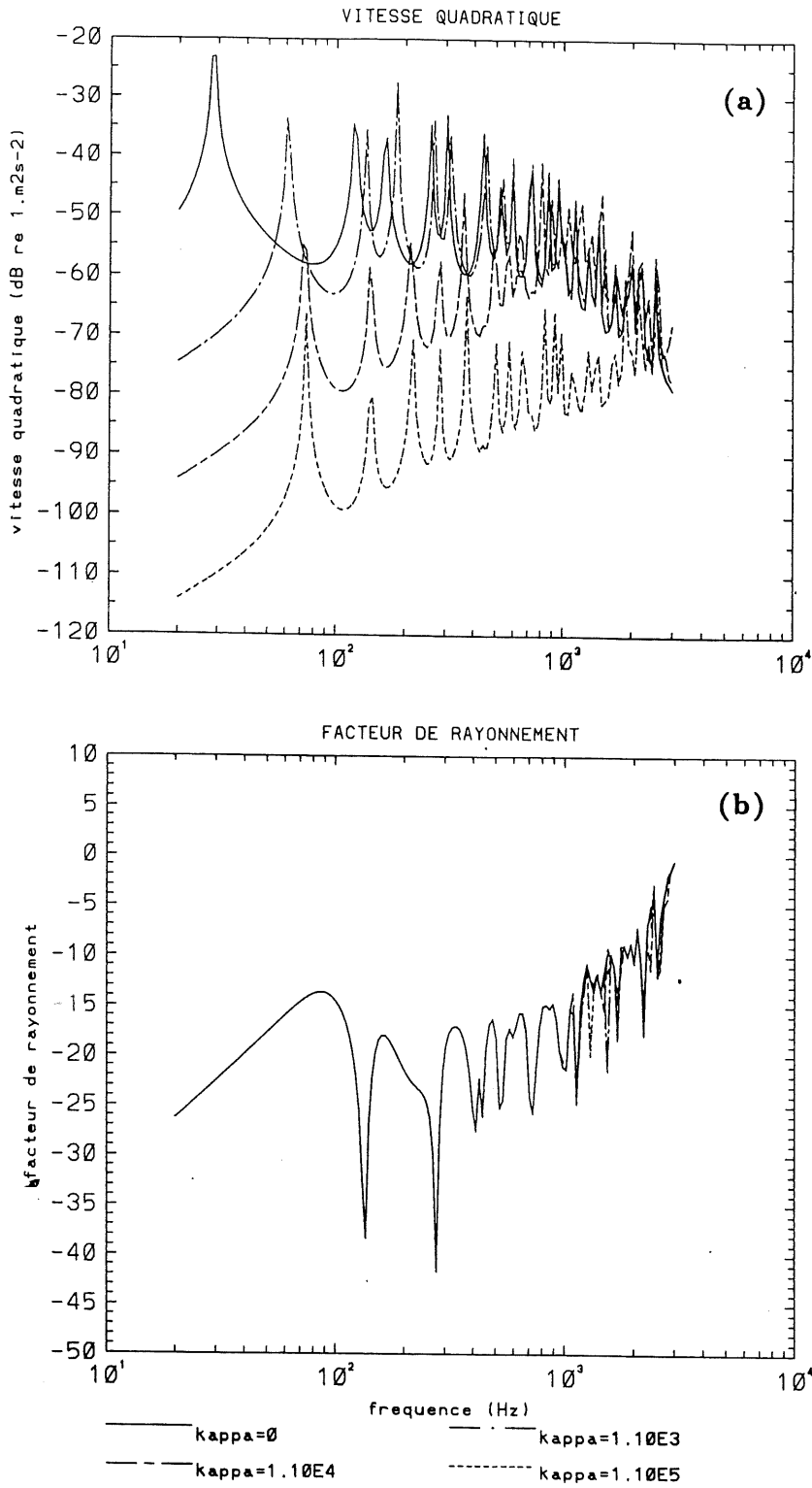


Figure 4.12: Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes raideurs ponctuelles rajoutées au point d'excitation; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

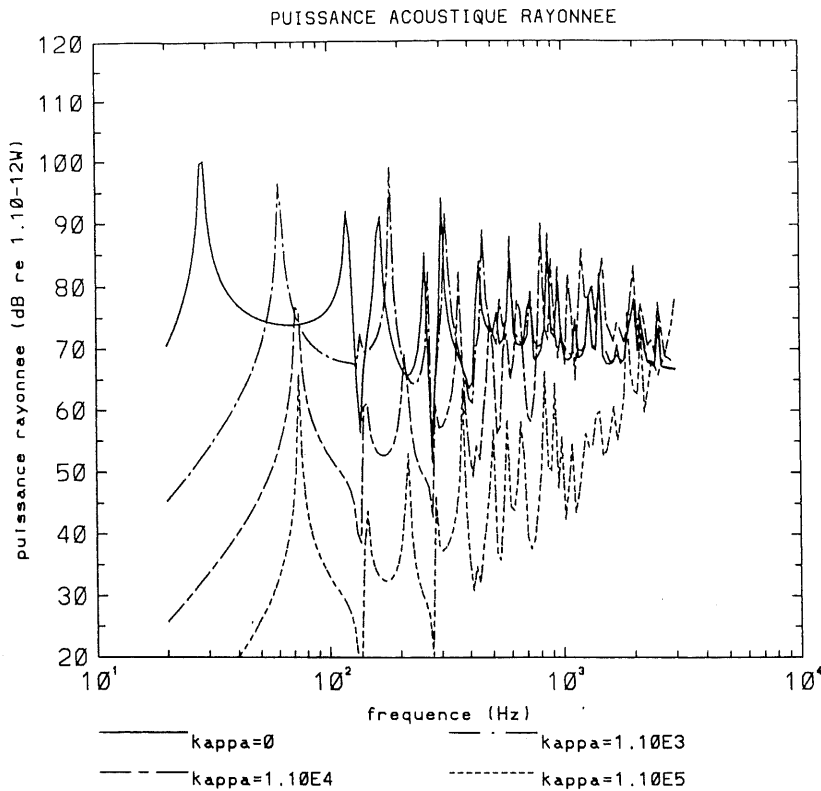


Figure 4.13: Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes raideurs ponctuelles rajoutées au point d'excitation.

raideur est introduite. On notera qu'à fréquences élevées, les courbes de la figure 4.11 et celles de la figure 4.15 sont pratiquement confondues. L'effet sur le facteur de rayonnement s'interprète, comme dans le cas d'une masse, par la distorsion des déformées propres et la redistribution des monopôles de rayonnement sur la structure, ce qui conduit dans le cas présenté ici à perturber la symétrie des déformées propres et à introduire une composante antisymétrique, peu efficace en rayonnement. Globalement, la puissance acoustique rayonnée (figure 4.15) est peu affectée par la présence d'une raideur ponctuelle hors point d'excitation. Il a été vérifié que les conclusions énoncées dans cette section sont indépendantes des conditions aux limites de la structure.

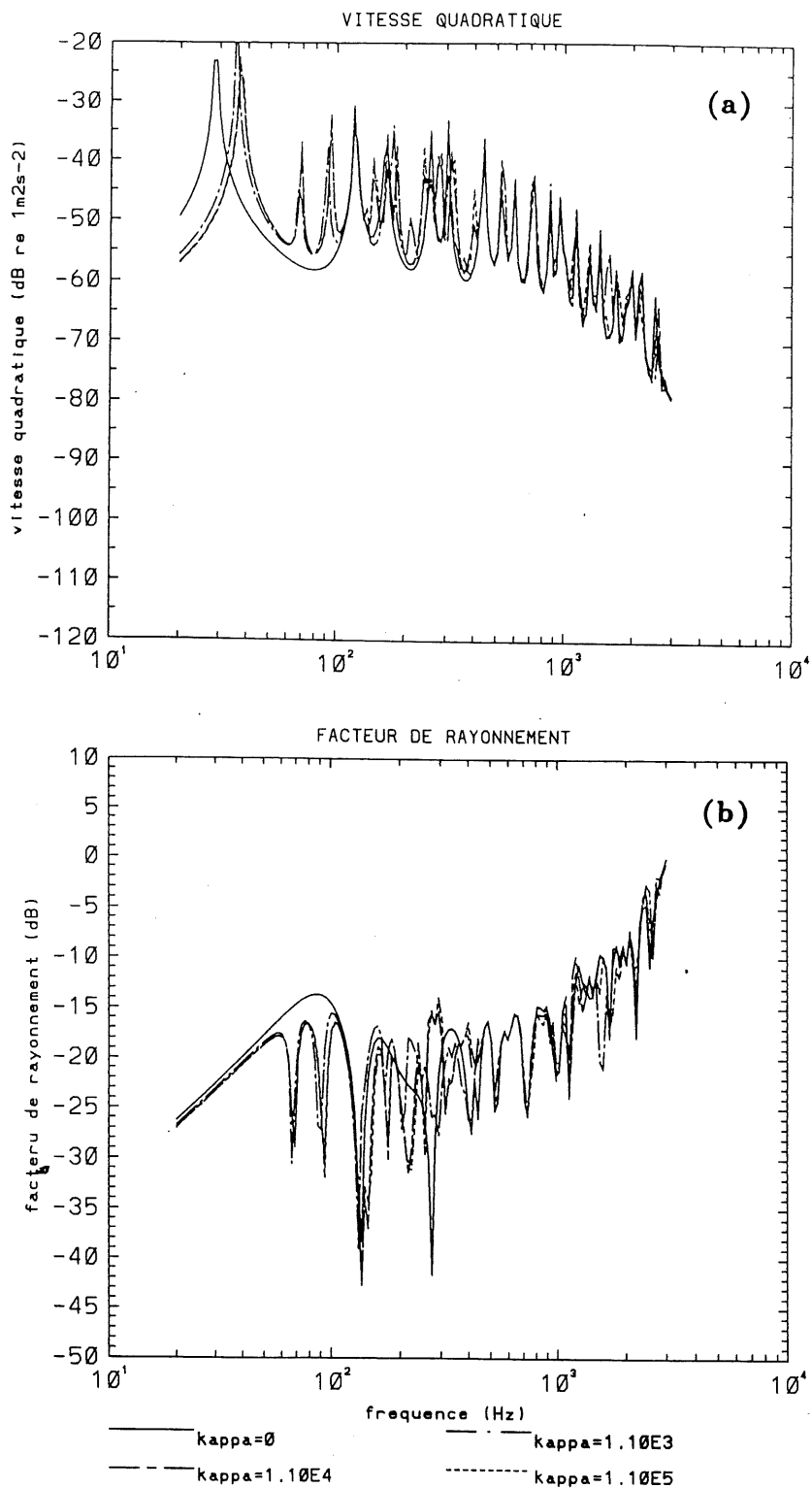


Figure 4.14: Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes raideurs ponctuelles rajoutées en $\alpha = 0.44, \beta = 0.53$; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

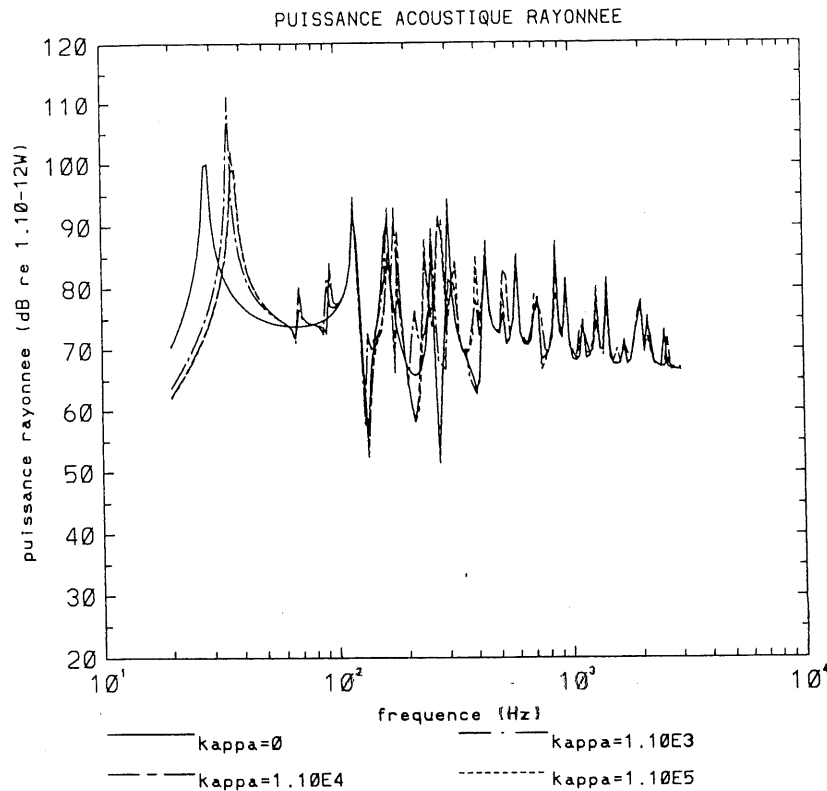
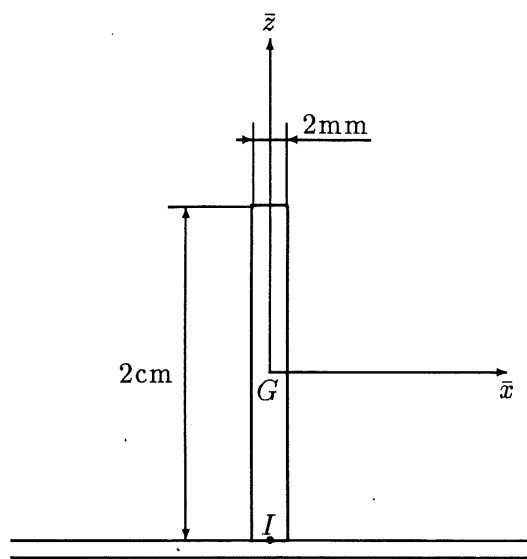


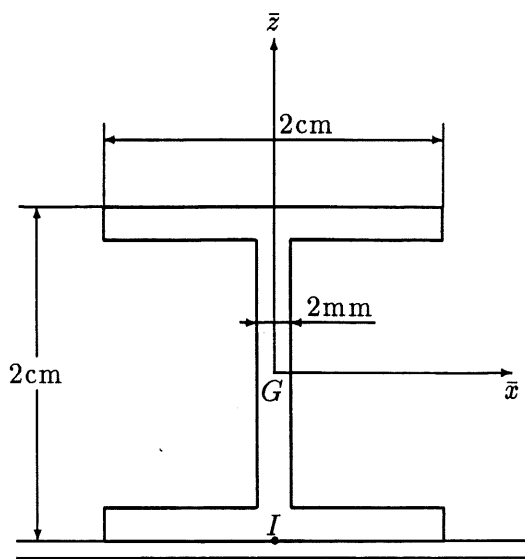
Figure 4.15: Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple pour différentes raideurs ponctuelles rajoutées en $\alpha = 0.44, \beta = 0.53$.

4.4 Influence du rajout de raidisseurs

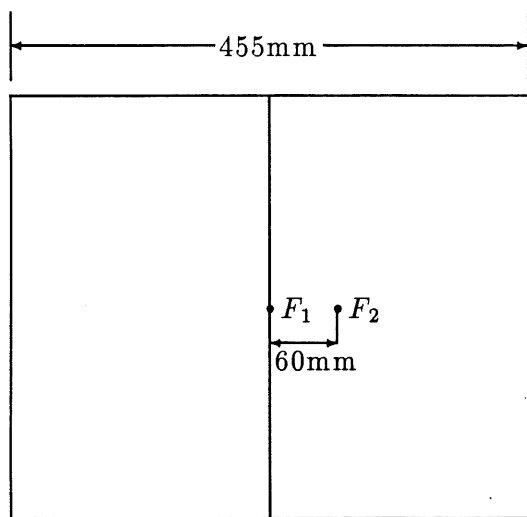
La figure 4.16 illustre les différents profils et configurations utilisés dans les calculs. Le profil # 1 est un élément de type membrure, le profil # 2 est un raidisseur en "I". Les résultats présentés supposent que les raidisseurs sont en acier. Les paramètres géométriques sont les suivants: pour le profil # 1, $I_{zz} = 1.33 \times 10^{-11} m^4$, $I_{xx} = 1.33 \times 10^{-9} m^4$, $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{z}_0 = -10 \times 10^{-3} m$, $S = 40 \times 10^{-6} m^2$; pour le profil # 2, $I_{zz} = 2.67 \times 10^{-9} m^4$, $I_{xx} = 7.16 \times 10^{-9} m^4$, $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{z}_0 = -10 \times 10^{-3} m$, $S = 112 \times 10^{-6} m^2$. La configuration A inclut un seul raidisseur parallèle à l'axe y et passant par le centre de la plaque; la configuration B inclut cinq raidisseurs identiques répartis suivant un réseau orthogonal, avec un espacement inter-raideurs constant dans chaque direction. Pour chacune de ces deux configurations, l'excitation est une force ponctuelle de $1N$ située soit au centre de la plaque, soit sur l'axe x à $60mm$ du centre de la plaque, sensiblement au centre d'une cellule inter-raideurs (point $\alpha = 0.26, \beta = 0$). Dans le cas où la force est au centre de la plaque, elle s'applique sur le raidisseur au droit du point d'attache I.



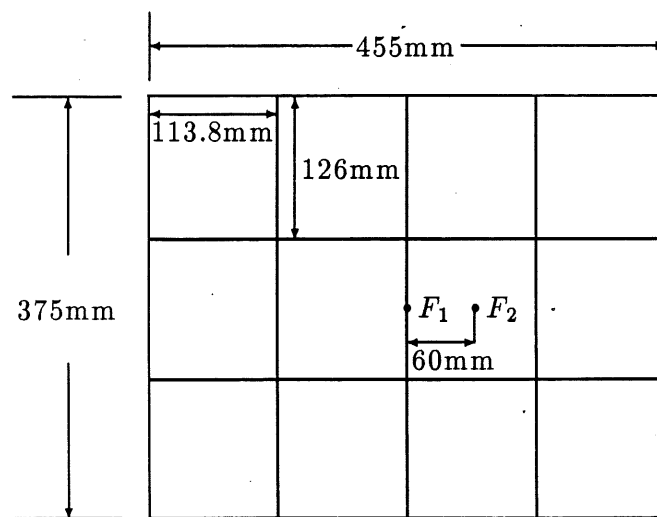
Profil # 1



Profil # 2



Configuration A



Configuration B

Figure 4.16: Profils et configurations des raidisseurs utilisés dans les calculs

4.4.1 Configuration à un raidisseur

Les figures 4.17 et 4.18 présentent les vibrations et le bruit rayonné dans la configuration A avec la force appliquée au centre de la plaque. Les résultats relatifs à la structure raidie sont comparés avec une situation de référence identique pour les figures 4.17 à 4.24, qui est celle de la structure non raidie excitée par une force ponctuelle située au centre de la plaque (courbes en trait plein). Les conditions aux limites sont des appuis simples.

Le graphique 4.17.a met clairement en évidence la chute du niveau vibratoire après adjonction du raidisseur; ce niveau vibratoire est fortement réduit à l'intérieur de deux zones fréquentielles distinctes: la première zone s'étend jusqu'à environ 400 Hz , et correspond au domaine de comportement en "raideur" du raidisseur. La seconde zone comprend les fréquences supérieures à 700 Hz et correspond au comportement en "masse" du raidisseur. La chute du niveau de vitesse vibratoire quadratique se justifie dans les deux cas par une diminution de la mobilité d'entrée de la structure. L'effet supplémentaire important est l'élévation des fréquences propres, ainsi que la diminution de la densité modale pour la structure raidie. La diminution de la densité modale n'est en fait vraie qu'en basses fréquences; on sait en effet [55] qu'en hautes fréquences les densités modales de la plaque seule et du raidisseur doivent s'additionner. La diminution de la densité modale en basses fréquences est un effet particulièrement favorable lorsque l'excitation a un spectre fréquentiel large. La figure 4.17.a montre en outre la supériorité du profil # 2 en terme de gain vibratoire. Il faut noter que pour cette configuration et cette excitation, les modes de torsion des raidisseurs ne sont pas sollicités; seuls les modes de flexion sont alertés, et la supériorité du profil # 2 se justifie simplement par sa plus grande rigidité en flexion. L'examen du facteur de rayonnement (figure 4.17.b) montre un accroissement substantiel de l'efficacité de rayonnement (jusqu'à 10 dB) dans le domaine multimodal après adjonction du raidisseur; ce résultat est conforme à de nombreuses études antérieures. Les deux courbes relatives à la structure raidie sont rigoureusement confondues. L'accroissement d'efficacité de rayonnement s'avère donc indépendant du profil du raidisseur; cette particularité, toutefois, n'est pas généralisable, et parait liée à la complète symétrie du problème étudié. Au total, la puissance acoustique rayonnée (figure 4.18) se trouve donc être peu

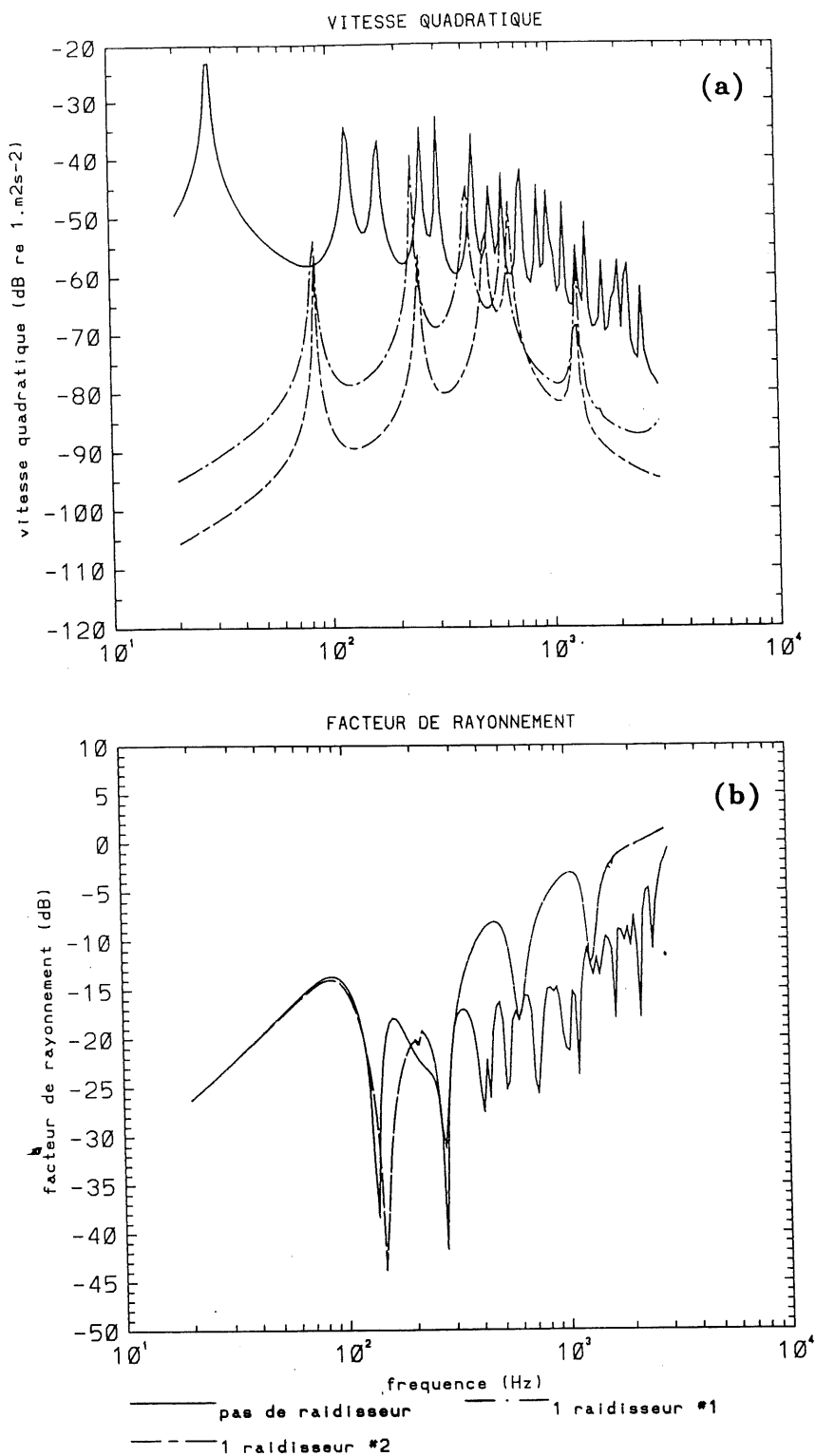


Figure 4.17: Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie (configuration A), excitée en son centre; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

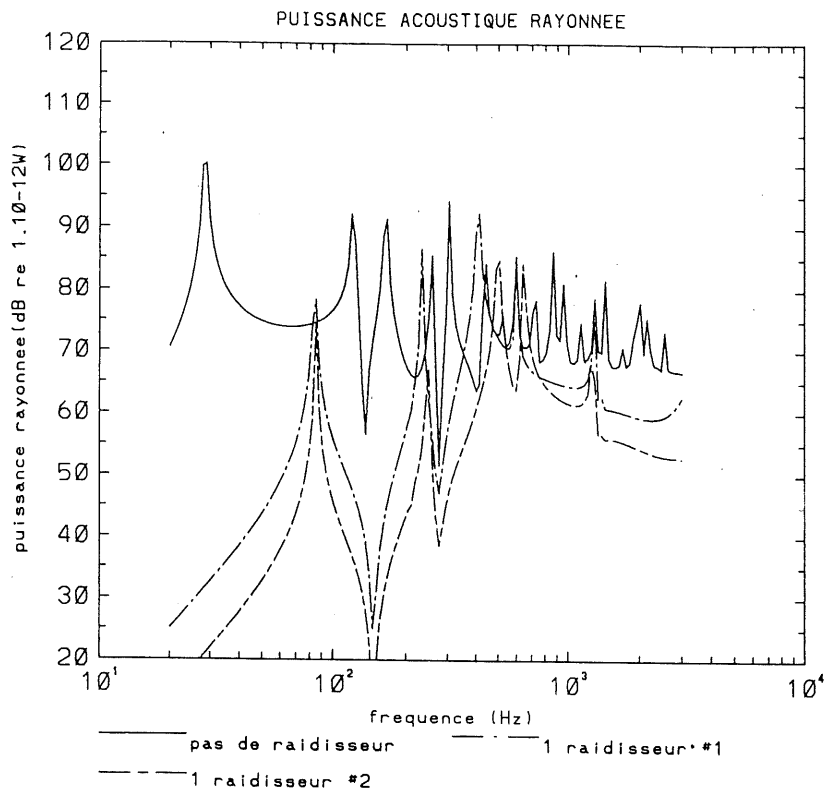


Figure 4.18: Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie, (configuration A), excitée en son centre.

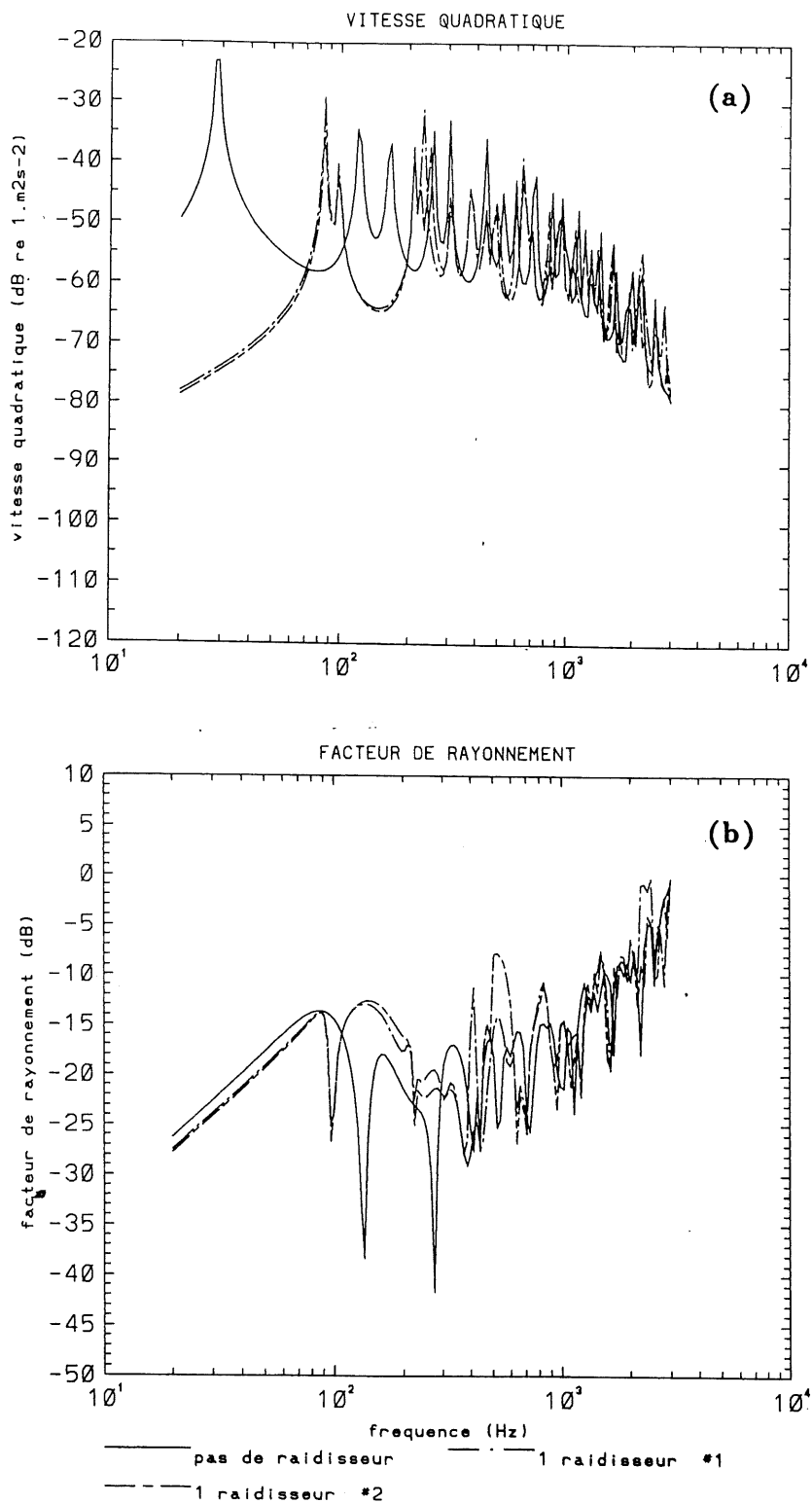


Figure 4.19: Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie (configuration A), excitée au point $\alpha = 0.26, \beta = 0$; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

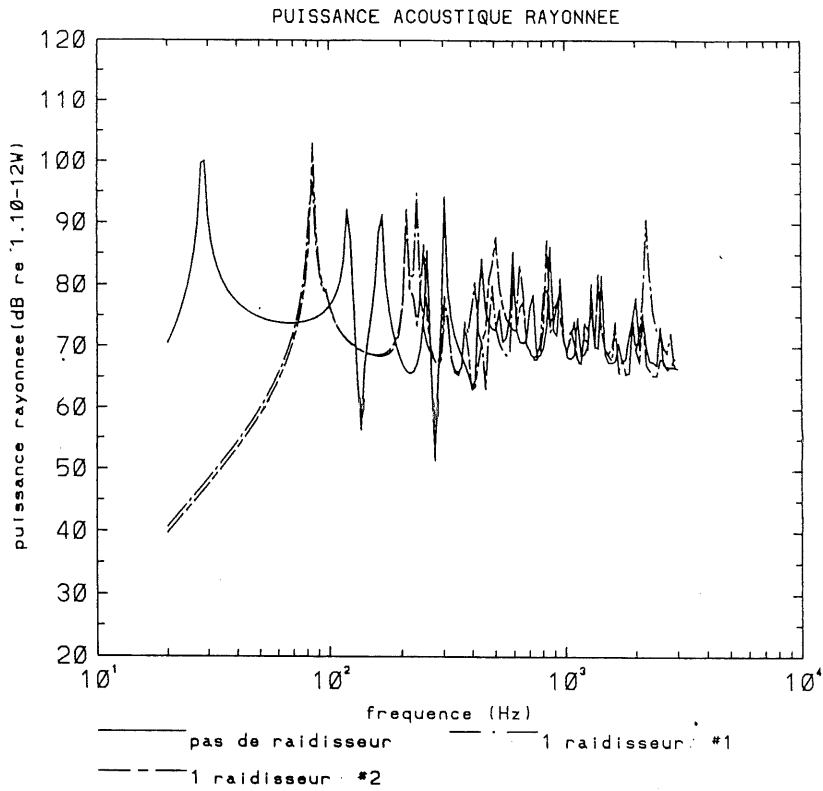


Figure 4.20: Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie (configuration A), excitée au point $\alpha = 0.26, \beta = 0$.

diminuée dans le domaine du comportement en “masse” du raidisseur; par contre, le gain acoustique observé dans le domaine du comportement en “raideur” est important.

Les figures 4.19 et 4.20 illustrent le cas où l’excitation est appliquée sur la plaque, au point $\alpha = 0.26, \beta = 0$. Cette fois, le niveau vibratoire moyen de la structure n’est pas notablement affecté par la présence du raidisseur, et la vitesse quadratique est presque rigoureusement la même pour les deux profils étudiés (figure 4.19.a). Ce dernier résultat s’interprète par le fait que le raidisseur, lorsqu’il est implanté hors excitation, est suffisant pour créer une ligne nodale au niveau de la jonction plaque-raisseur. Il apparaît finalement (figure 4.20) que l’adjonction d’un seul raidisseur hors du point d’excitation n’entraîne pas de gain acoustique notable sauf aux fréquences inférieures à la première fréquence propre du système raidi.

4.4.2 Configuration à cinq raidisseurs

Dans la configuration B (cinq raidisseurs identiques), figures 4.21 à 4.24, la position de l’excitation s’avère moins importante. Les résultats obtenus dans les deux cas – excitation centrée, appliquée sur un des raidisseurs, excitation excentrée appliquée sur la plaque – sont comparables et illustrent les phénomènes et les tendances observées à la figure 4.17: mise en évidence de deux régimes de comportement en “raideur” et en “masse” des raidisseurs, chute importante des niveaux vibratoires et acoustiques en basses fréquences, élévation des fréquences propres de la structure, accroissement de son efficacité de rayonnement. Il est à noter que dans la configuration B, l’efficacité de rayonnement atteint sa valeur maximale, voisine de 1 (0dB), au voisinage de 1kHz, alors que la fréquence critique de la plaque nue est de 12kHz; ceci suggère que du point de vue du transfert acoustique, la structure raidie a un comportement de structure homogène avec une rigidité de flexion équivalente accrue.

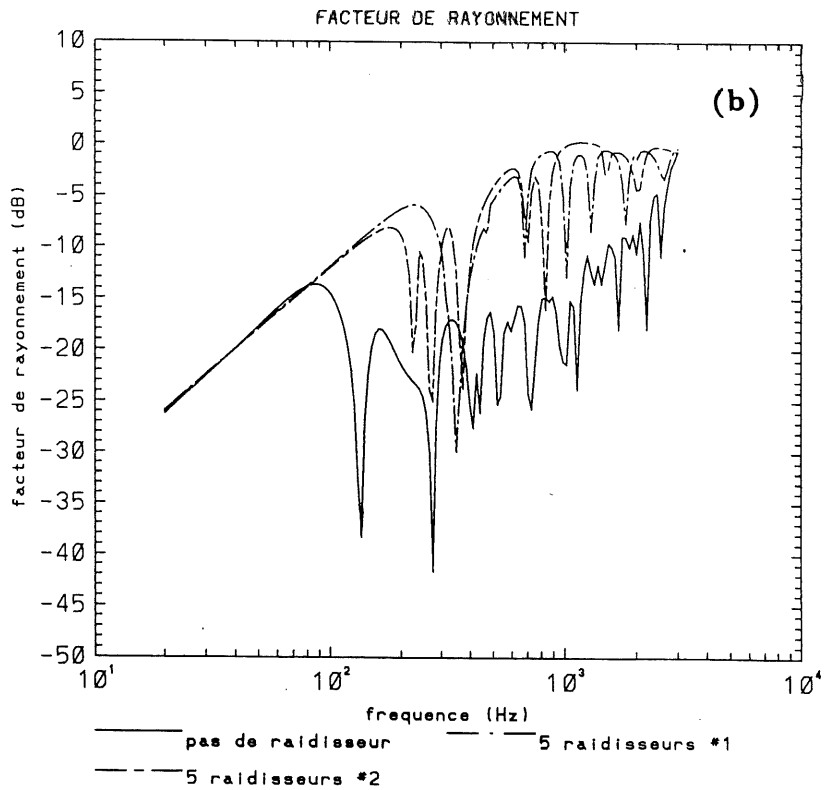
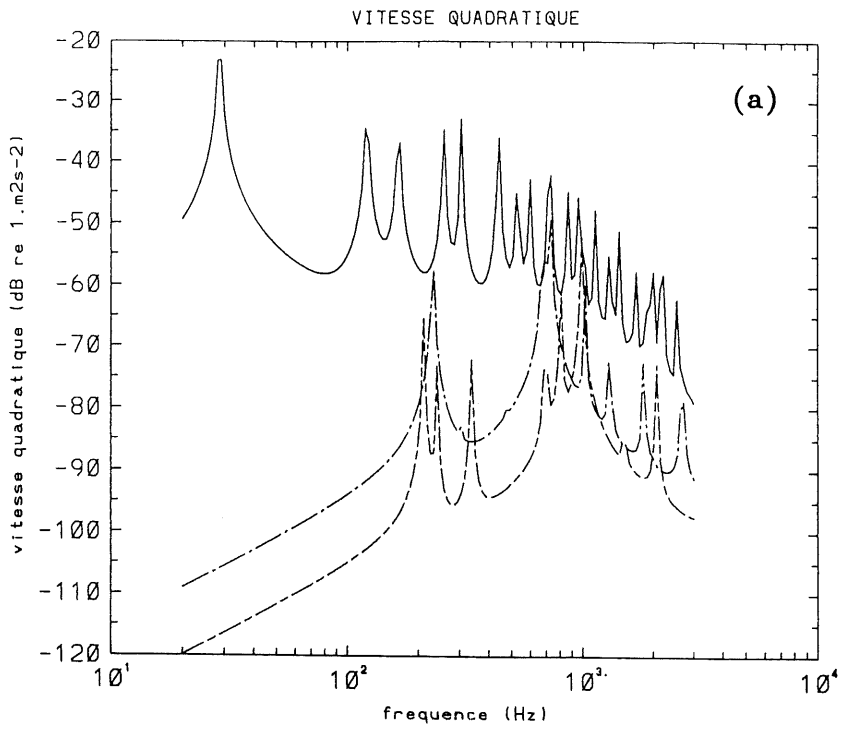


Figure 4.21: Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie (configuration B), excitée en son centre; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

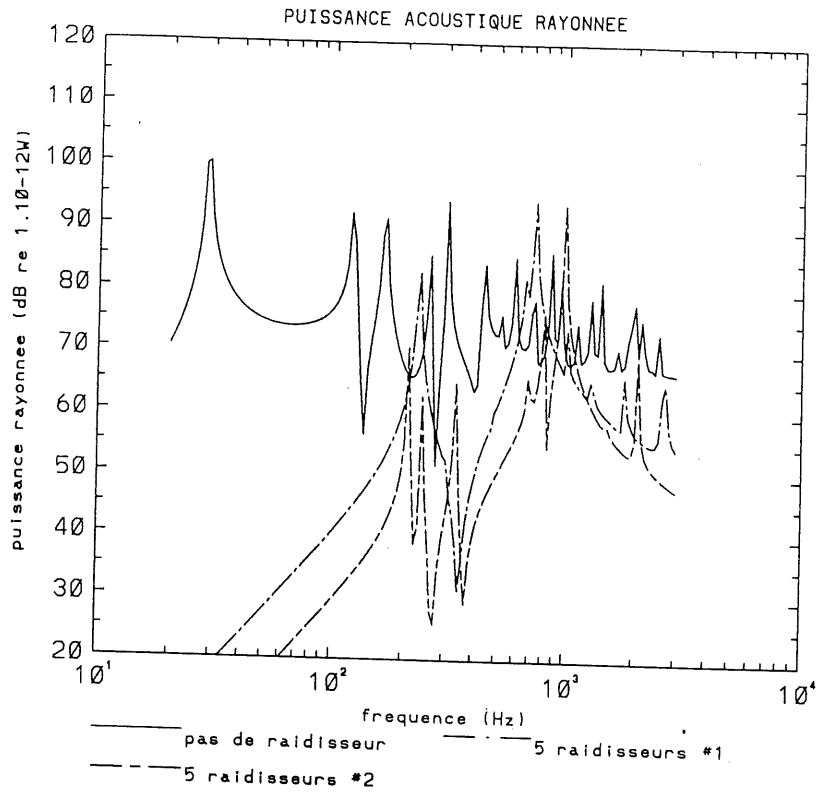


Figure 4.22: Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie (configuration B), excitée en son centre.

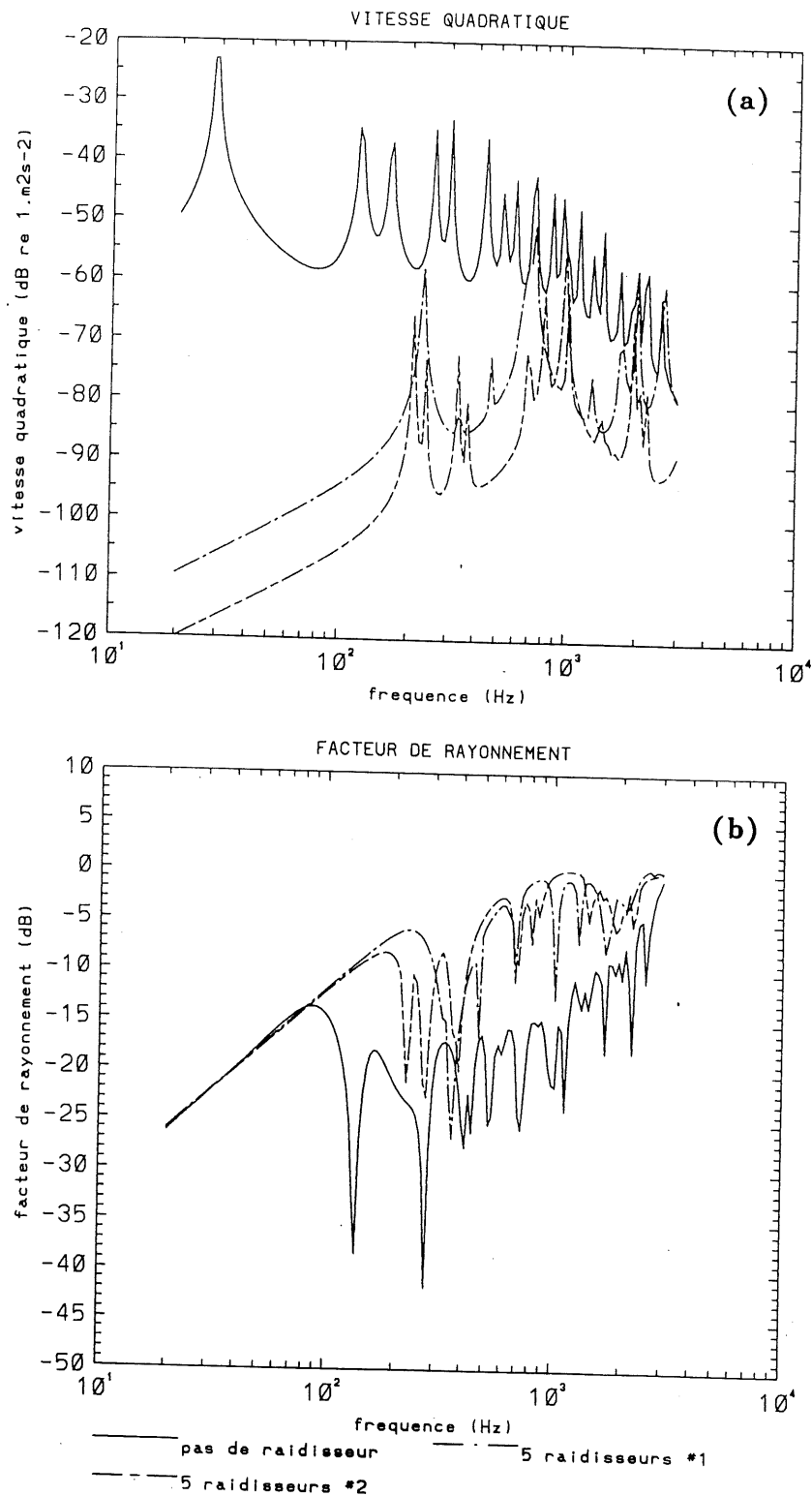


Figure 4.23: Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie (configuration B), excitée au point $\alpha = 0.26, \beta = 0$; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

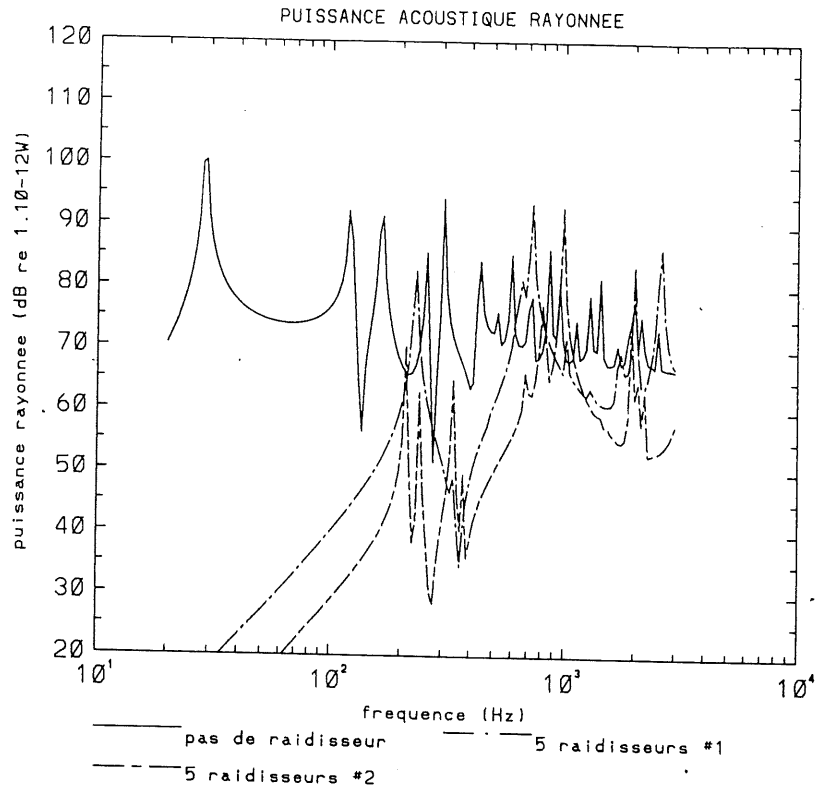


Figure 4.24: Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire sur appui simple, raidie (configuration B), excitée au point $\alpha = 0.26, \beta = 0$.

4.5 Conclusions

Ce chapitre a permis d'analyser de manière quantitative l'influence de paramètres structuraux importants sur les vibrations et le bruit rayonné dans l'air par une plaque rectangulaire dans un cas d'excitation mécanique ponctuelle. L'ensemble des paramètres explorés – conditions aux limites, rajout de masse ou de raideur, rajout de raidisseurs – s'avèrent décisifs en matière de comportement vibro-acoustique, ce qui montre *a posteriori* que le recours à des modèles simples (structure nue, conditions d'appui simple) est inapte à décrire correctement la plupart des situations réelles.

Les conclusions essentielles en ce qui concerne les effets respectifs de chacun des paramètres structuraux sont compilées sous forme de tableau (tableau 4.3). Ce tableau complète et nuance celui donné en introduction de cette étude (tableau 1.1). Dans une perspective de contrôle du bruit, il est possible de dégager les idées maîtresses suivantes:

- La modification de la structure aux points d'entrée de l'énergie, a un effet généralement favorable sur le rayonnement acoustique lorsqu'elle va dans le sens d'une diminution de la mobilité d'entrée.
- La modification de la structure hors point d'excitation a un effet faible ou nul.
- Le paramètre qui gouverne le transfert acoustique en ce qui a trait aux conditions aux limites est la rigidité du contour en déflexion.

Il faut toutefois garder à l'esprit que l'ensemble de ces conditions ont été énoncées dans l'hypothèse de force excitatrice constante et indépendante de la structure réceptrice. En pratique, une telle hypothèse signifie que la source vibratoire a une impédance mécanique infinie, et se comporte effectivement comme une source de force, constante quelle que soit l'enveloppe rayonnante à laquelle elle est couplée. La seconde hypothèse importante du modèle est la présence d'un baffle rigide dans le plan de la structure. Ces deux hypothèses sont rarement rencontrées en pratique, et leur coût n'est pas encore bien cerné. Il serait donc pertinent, à terme, d'inclure les effets liés au baffle et au couplage mécanique source vibratoire – structure dans l'évaluation des moyens passifs de réduction du bruit rayonné.

Tableau 4.3: Incidence des paramètres structuraux sur les vibrations et le bruit rayonné dans l'air

| | première fréquence propre | vitesse quadratique | efficacité de rayonnement |
|--|---------------------------|--------------------------------|--|
| Conditions aux limites | | | |
| Augmentation de la rigidité de rotation du contour | ↗ | → | ↘ premiers modes ↗ autres modes effet basses fréq. |
| Augmentation de la rigidité de déflexion | ↗ | → | ↗ effet basses fréq. |
| Modification de la structure au point d'excitation | | | |
| masse ponctuelle | ↘ | ↘ effet hautes fréq. | → |
| raideur ponctuelle | ↗ | ↘ effet basses fréq. | → |
| raidisseur | ↗ | ↘ effet basses/hautes fréq. | ↗ |

Tableau 4.3: Suite

| | première fréquence propre | vitesse quadratique | efficacité de rayonnement |
|--|------------------------------|--|------------------------------|
| Modification de la structure hors point d'excitation | | | |
| masse ponctuelle | ↘ | → effet local | →en moyenne |
| raideur ponctuelle | ↗ | → effet local | →en moyenne |
| raidisseur | ↗ | →ou ↘ suivant nombre et type de raidisseurs effet basses/hautes fréq. | ↗ |

Chapitre 5

Validation du cadre théorique

5.1 Introduction

Ce chapitre présente les validations de la théorie proposée au chapitre 3 pour le rayonnement d'une structure plane complexe dans l'air. Ces validations sont faites à partir de comparaisons avec des moyens de simulation purement numériques (méthode des éléments finis) d'une part, et à partir de comparaisons avec des mesures d'autre part. Il s'agit de validations préliminaires effectuées autour de situations volontairement simples, à la fois compatibles avec des modèles d'éléments finis, et contrôlables expérimentalement.

5.2 Comparaisons avec la méthode des éléments finis

La vitesse de calcul et la taille mémoire des ordinateurs a rendu possible depuis une décennie environ le développement, la commercialisation et l'utilisation à grande échelle de codes de calcul spécialisés dans la résolution de problèmes vibroacoustiques, sur la base de méthodes par éléments finis. Cette section présente certaines comparaisons entre les résultats de nos calculs, et ceux obtenus par éléments finis dans des situations similaires. L'objectif de ces comparaisons est double:

- premièrement, et compte tenu du fait que les phénomènes physiques modélisés et les équations fondamentales solutionnées sont les mêmes dans l'un et l'autre cas, vérifier la justesse de nos calculs,

- deuxièmement, évaluer les atouts et cerner les limites respectives des deux approches comme outils de prédiction.

Le code de calcul par éléments finis qui a servi de support à cette comparaison est SYS-NOISE4.3¹ interfacé avec ANSYS4.4². Ces deux logiciels sont commercialement disponibles. ANSYS4.4 est un code d'éléments finis de structure qui a été utilisé pour générer la réponse vibratoire de la structure *in-vacuo* à des excitations mécaniques prescrites. SYS-NOISE4.3 est un code qui utilise la technique des éléments finis de frontière pour générer le champ acoustique rayonné par la structure en tout point du fluide, à partir du champ de déplacement de la structure calculé par ANSYS4.4. Les tables de résultats générées par ces programmes ont été converties en formats compatibles avec les indicateurs vibroacoustiques utilisés jusqu'à présent dans ce travail: vitesse vibratoire quadratique, efficacité de rayonnement et puissance rayonnée dans un demi-espace fluide. On présente ici, pour deux situations typiques, la comparaison entre les résultats obtenus par éléments finis ("BFE") et les résultats obtenus par le modèle exposé au chapitre 3, identifiés pour les besoins par l'appellation de "méthode analytique".

Les figures 5.1 et 5.2 présentent la première situation étudiée, qui est celle d'une plaque encastree sur ses bords. Les données utilisées sont les suivantes: $a = 0.455m$, $r = 1.21$, $h = 1mm$, $\rho_s = 7850kg/m^3$, $D = 18Nm$, $\nu = 0.28$; l'excitation simulée est une force ponctuelle de $1N$ appliquée au point défini par $\alpha = 0.44$, $\beta = 0.53$ et le fluide considéré est l'air, $\rho_0 = 1.225kg/m^3$, $c_0 = 340m/s$. Les paramètres du calcul utilisés dans la méthode analytique sont tels que le champ de déplacement vibratoire est reconstruit à partir de 169 fonctions-essais ($N = 13$ dans l'équation (3.79)). La méthode par éléments finis a été mise en œuvre avec deux maillages différents de la structure, de 9 éléments \times 11 éléments et de 13 éléments \times 16 éléments; les éléments utilisés sont des éléments isoparamétriques à quatre nœuds, chaque nœud possédant trois degrés de liberté (un déplacement de flexion et deux rotations). Les nœuds frontière sur le contour de la plaque sont astreints à un déplacement nul et à une rotation nulle, de manière à imposer une condition d'encastrement. Le calcul

¹SYSNOISE4.3, Dynamic Engineering (1990)

²ANSYS4.4, Swanson Analysis Systems (1990)

du rayonnement est effectué en supposant l'existence d'un baffle rigide infini dans le plan de la plaque.

Les comparaisons, effectuées entre $20Hz$ et $2kHz$ en termes de vitesse quadratique de structure (figure 5.1.a), efficacité de rayonnement (figure 5.1.b) et puissance rayonnée dans le fluide (figure 5.2), s'avèrent très satisfaisantes, aussi bien sur la position des fréquences singulières que sur l'amplitude des phénomènes. Les déviations significatives apparaissant à hautes fréquences doivent être attribuées aux limites liées soit au nombre fini de fonctions-essai retenues pour la méthode de Rayleigh-Ritz, soit au nombre fini d'éléments utilisés pour discrétiser la structure. Il est possible de chiffrer en première approximation les limites supérieures inhérentes à chacune des méthodes:

- Si N est l'ordre maximal de la décomposition utilisé dans la méthode de Rayleigh-Ritz, équation (3.79), les modes structuraux correctement modélisés ont un ordre inférieur ou égal à $N - 5$ suivant chacune des deux directions x et y . Pour $N = 13$, la condition imposée au nombre d'onde structural est donc

$$k < \frac{8\pi}{a} \quad (5.1)$$

Compte tenu de la relation de dispersion pour une plaque infinie *in-vacuo*,

$$\omega^2 = \frac{D}{\rho_s h} k^4, \quad (5.2)$$

l'ensemble des fréquences f respectant la condition (5.1) est tel que

$$f < \frac{1}{2\pi} \left(\frac{D}{\rho_s h} \right)^{1/2} \left(\frac{8\pi}{a} \right)^2 \quad (5.3)$$

Pour le problème traité, la fréquence maximale de calcul estimée pour la méthode de Rayleigh-Ritz est de $740Hz$.

- Le critère de maillage usuel retenu pour les problèmes élastoacoustiques traités par la technique des éléments finis est de six nœuds au moins par longueur d'onde structurale et par longueur d'onde acoustique. Sous la fréquence critique de plaque, la longueur d'onde structurale est inférieure à la longueur d'onde acoustique, le critère structural est donc le plus restrictif. La fréquence maximale respectant le critère de six nœuds au

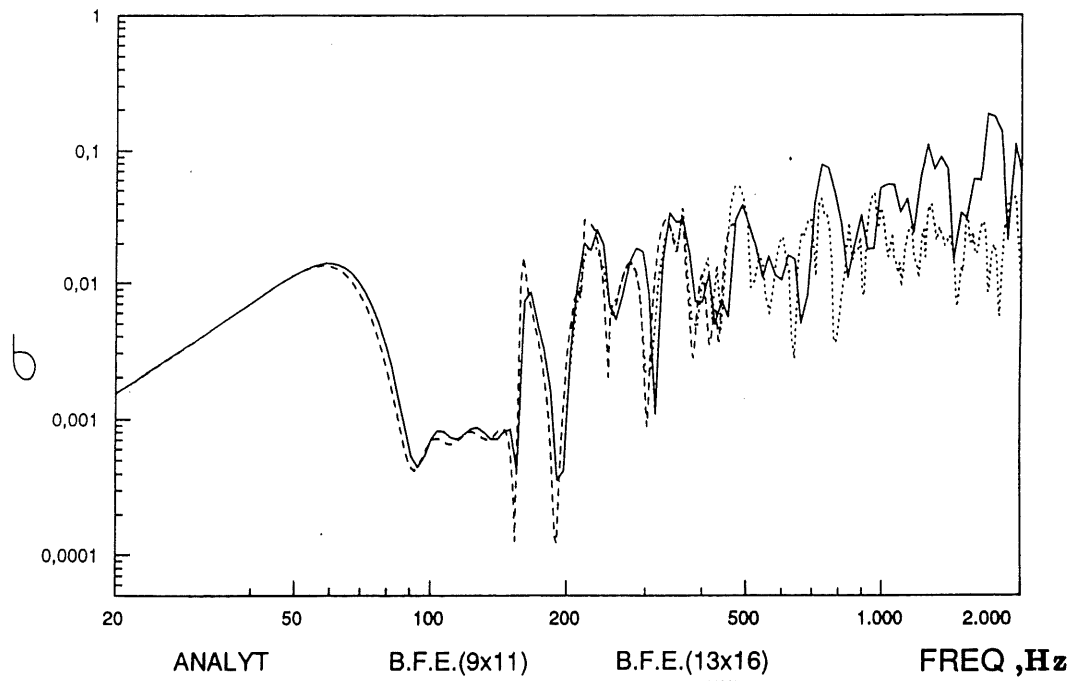
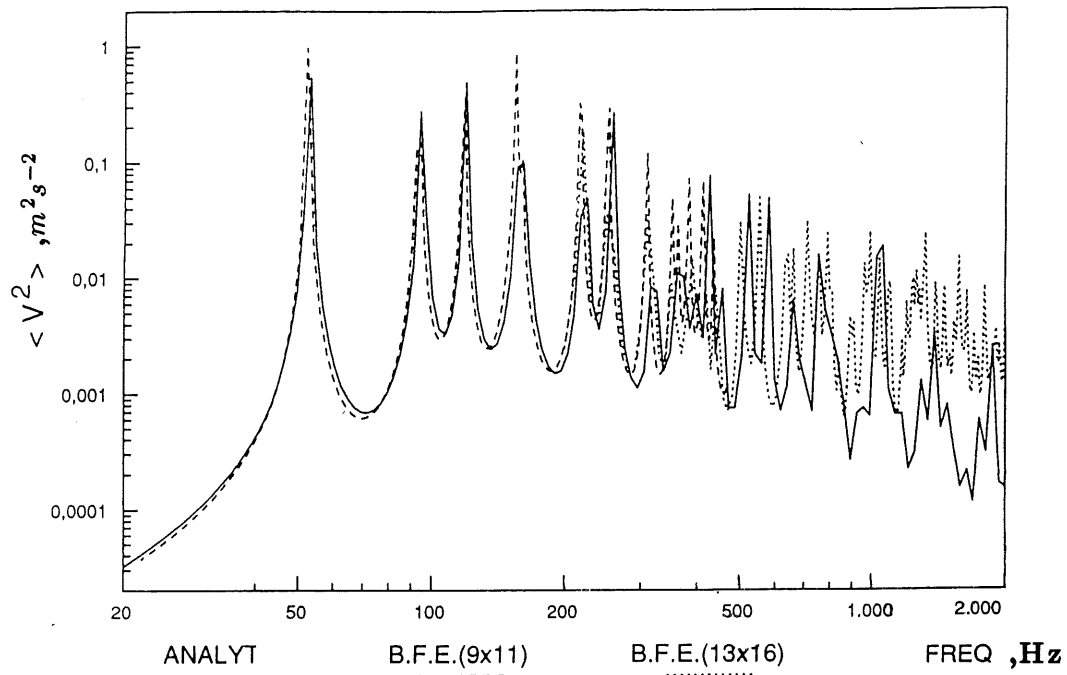


Figure 5.1: Réponse vibratoire et rayonnement dans l'air d'une plaque rectangulaire encastrée, comparaison entre la méthode analytique et la méthode par éléments finis; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

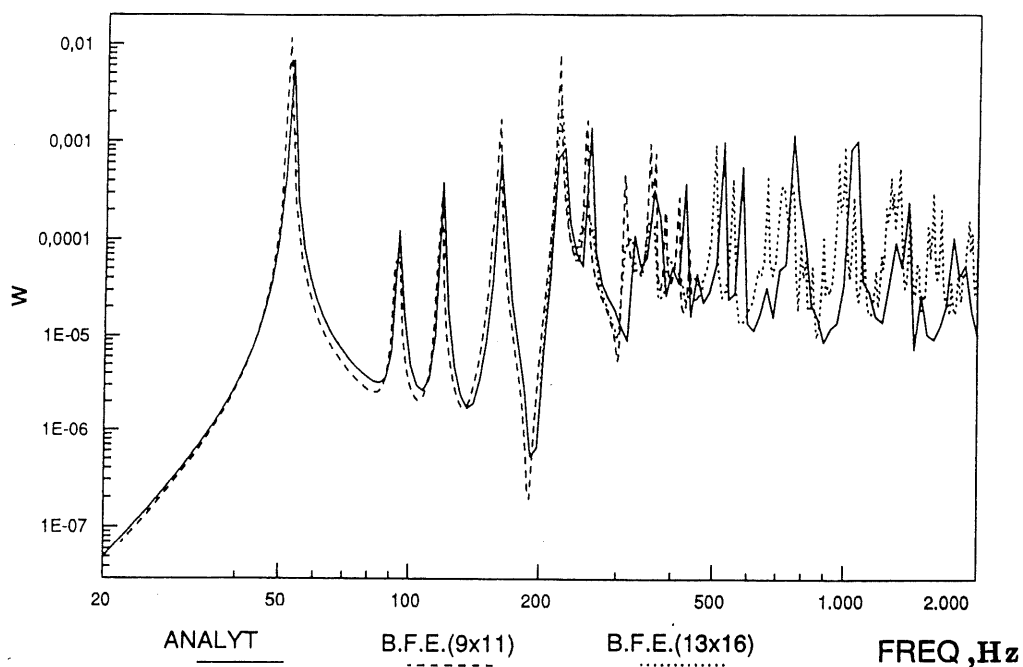


Figure 5.2: Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire encastree, comparaison entre la méthode analytique et la méthode par éléments finis.

moins par longueur d'onde structurale pour le problème étudié est $f = 166 Hz$ pour un maillage 9 éléments \times 11 éléments, $f = 330 Hz$ pour un maillage 13 éléments \times 16 éléments.

Les critères énoncés pour chacune des deux approches sont ceux permettant de calculer avec une précision satisfaisante les fréquences propres de la structure; les tendances moyennes fournies restent néanmoins raisonnablement bonnes même largement au-delà des fréquences maximales estimées au moyen de ces critères.

La deuxième situation étudiée est celle d'une plaque identique présentant des conditions aux limites libres (figures 5.3 et 5.4), les autres données et les paramètres de calcul restant inchangés. La condition de contour libre a été simulé par éléments finis en n'imposant aucune condition sur l'ensemble des nœuds frontière de la plaque.

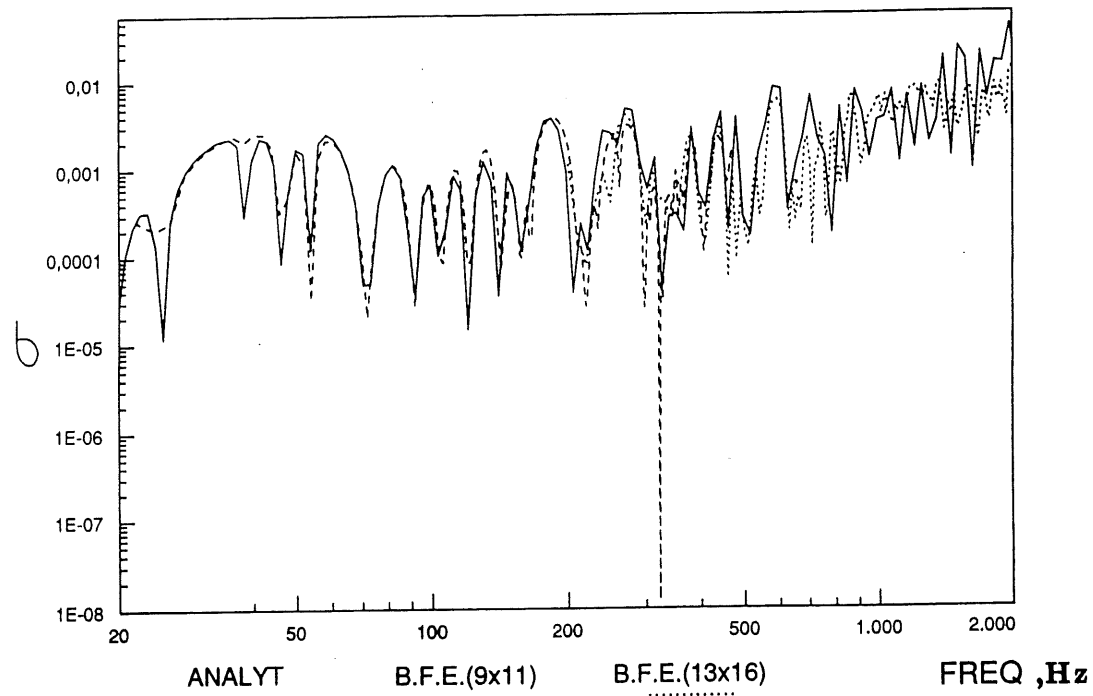
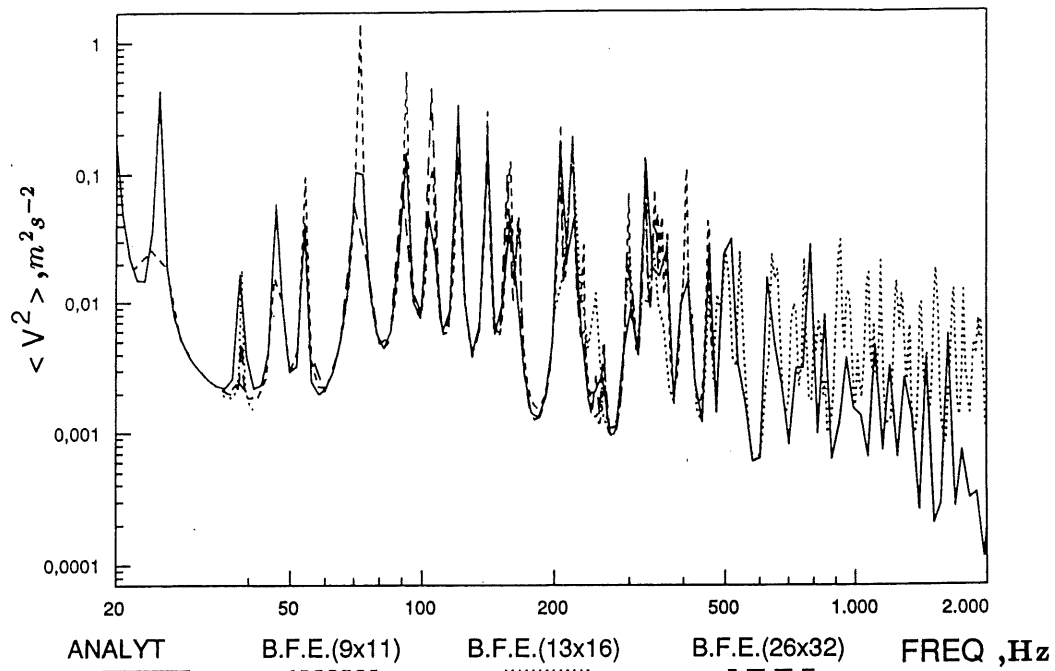


Figure 5.3: Réponse vibratoire et rayonnement dans l'air d'une plaque rectangulaire libre, comparaison entre la méthode analytique et la méthode par éléments finis; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

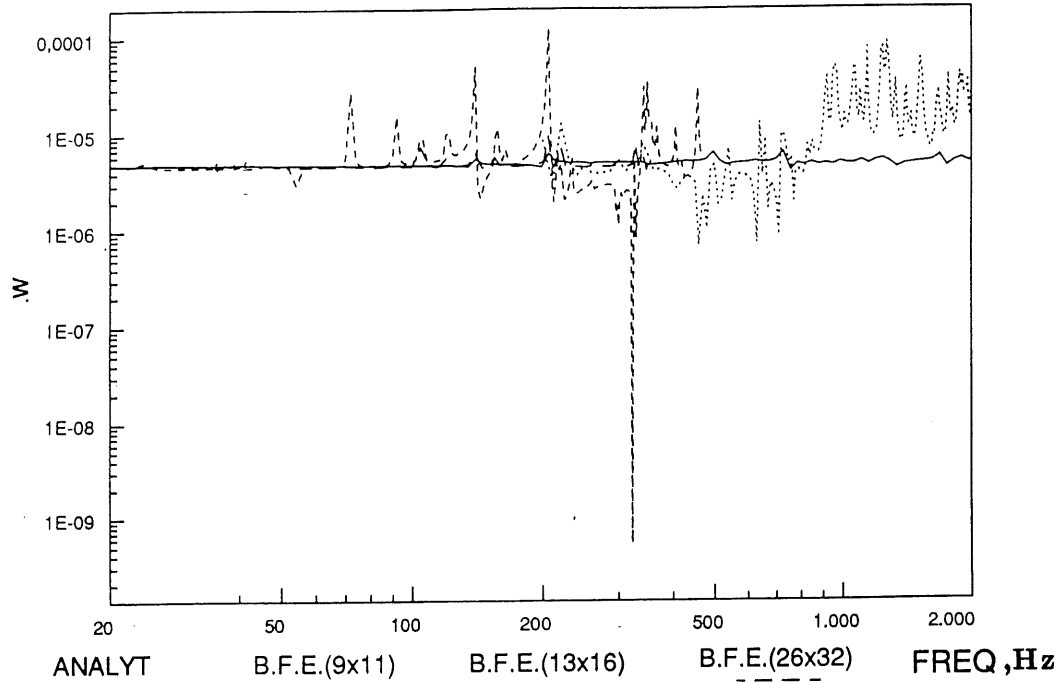


Figure 5.4: Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire libre, comparaison entre la méthode analytique et la méthode par éléments finis.

On sait (chapitre 4) que le cas d'une plaque libre est un cas particulier pour lequel l'ensemble des modes élastiques sont faiblement rayonnants, et sont masqués sur les spectres acoustiques basses fréquences par le mode piston de la plaque, fortement rayonnant. La très faible efficacité de rayonnement des modes élastiques d'une plaque libre résulte d'effets de compensation presque totale entre le rayonnement des diverses zones vibratoires de la plaque. Ce mécanisme physique particulier s'avère très sensible à des perturbations mêmes faibles (section 4.2.4); le cas d'une plaque libre doit donc constituer un test probant de la précision d'une méthode de calcul donnée. L'accord obtenu entre la méthode dite analytique et la simulation par éléments finis est satisfaisant en termes de réponse vibratoire de la structure (figure 5.3.a). Par contre des écarts sensibles peuvent être notés sur le spectre de puissance rayonnée même en basses fréquences, la méthode par éléments finis prévoyant l'émergence de pics de puissance plus ou moins prononcés aux fréquences propres de la plaque. Ces pics résultent à notre avis d'un calcul numérique imprécis du rayonnement, théoriquement très faible, des modes élastiques de la plaque, l'erreur résiduelle étant con-

sidérablement amplifiée aux résonances de ces modes.

Les temps de calcul moyen par fréquence sur un ordinateur SiliconGraphics4D120 pour les deux cas présentés ici sont de 9s par la méthode analytique, 48s par la méthode des éléments finis avec un maillage 9 éléments \times 11 éléments, 163s avec un maillage 13 éléments \times 16 éléments.

5.3 Comparaisons avec des mesures

Des mesures vibratoires et acoustiques ont été effectuées dans des situations simples et contrôlées, compatibles avec la théorie proposée, dans le double but de:

- confronter de manière systématique la théorie et la réalité,
- cerner les éventuelles causes d'écart et les paramètres sensibles au niveau expérimental.

On dispose à l'heure actuelle dans la littérature de relativement peu de données expérimentales sur le rayonnement acoustique des plaques, et parmi elles, de très peu de données en bande fine, et de très peu de comparaisons systématiques théorie/expérience. Les mesures existantes servent le plus souvent à mettre en évidence des effets et des tendances qualitatives. Les grandeurs mesurées peuvent être soit des grandeurs locales (pression rayonnée en champ lointain, WATSON [89], intensité acoustique en champ proche, KRISHNAPPA *et al* [33]), soit des grandeurs globales (efficacité de rayonnement de la structure ou puissance rayonnée). Dans ce dernier cas les résultats sont généralement donnés en bandes 1/3 octave, et illustrent les effets liés au type de matériau (CREMER, HECKL et UNGAR [6], KOJIMA *et al* [32]) ou à la présence de perforations dans la structure (PIERRI [66]). On trouve par ailleurs dans les études sur la transparence acoustique des plaques, des données expérimentales pour l'efficacité de rayonnement de plaques simples (MACADAM [50]), ou de plaques raidies (VON VENZKE *et al* [85]). Ces données, toutefois, concernent des cas d'excitation acoustique de la structure, et sont également présentées en bandes 1/3 octave. La mesure de la puissance rayonnée et de l'efficacité de rayonnement s'effectue classiquement en chambre réverbérante avec la technique des microphones tournants (CREMER,

HECKL et UNGAR [6]). On fait aujourd'hui de plus en plus appel aux techniques de l'intensimétrie acoustique avec des sondes de champ proche à deux microphones (FORSEN *et al* [17]), ou à trois microphones (LOYAU [48]); ces techniques ont l'avantage de permettre la mesure simultanée de l'intensité acoustique rayonnée et de la vitesse vibratoire reconstruite.

Une comparaison théorie/expérience passe par la contrôle de l'ensemble des paramètres dont dépend, *in fine* le champ rayonné; ces paramètres sont nombreux et certains, comme l'amortissement structural, les caractéristiques du matériau et les conditions aux limites de la structure, sont difficilement accessibles d'emblée. Les mesures présentées ici ont été effectuées dans le cas d'une plaque mince en appui simple ou encastrée sur ses bords, et sont présentées en bande fine. Ces mesures ont été conduites au laboratoire d'acoustique du Centre Technique des Industries Mécaniques (CETIM), en France. L'auteur souhaite remercier T. Loyau de son importante contribution dans l'étude expérimentale.

5.3.1 Montage expérimental

L'expérience conduite a pour but de mesurer la vitesse vibratoire quadratique, la puissance rayonnée dans l'air et le facteur de rayonnement d'une plaque mince bafflée excitée par une force ponctuelle pour des conditions aux limites d'appui simple et d'encastrement. Le schéma du montage est donné à la figure 5.5.

Locaux et structure

On dispose de deux locaux d'essais séparés par un mur percé d'une ouverture carrée de $1m \times 1m$ dans laquelle est insérée la structure testée. Le local côté excitation est réverbérant; le local côté réception est non traité acoustiquement. Le mur séparateur assure une condition de baffle rigide dans le plan de la plaque. La structure est une plaque d'aluminium carrée de dimensions $920mm \times 920mm \times 4mm$, dont la fréquence critique calculée est d'environ $3kHz$.

L'aménagement de la structure dans l'ouverture est décrit à la figure 5.6. Un cadre

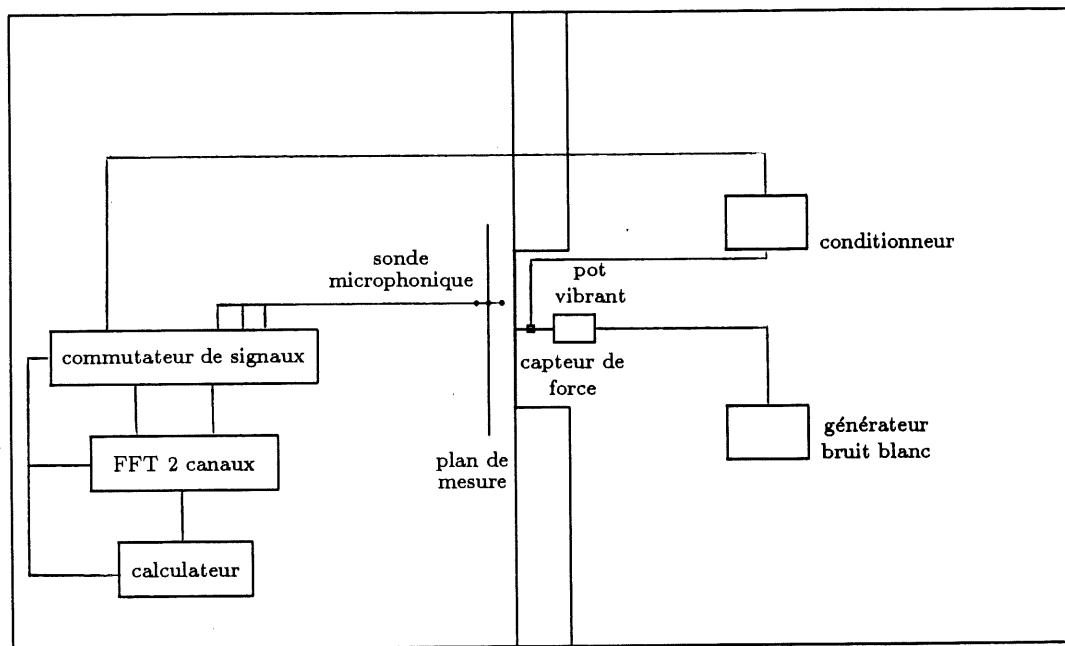


Figure 5.5: Schéma du montage expérimental pour la mesure du rayonnement acoustique par une plaque mince bafflée.

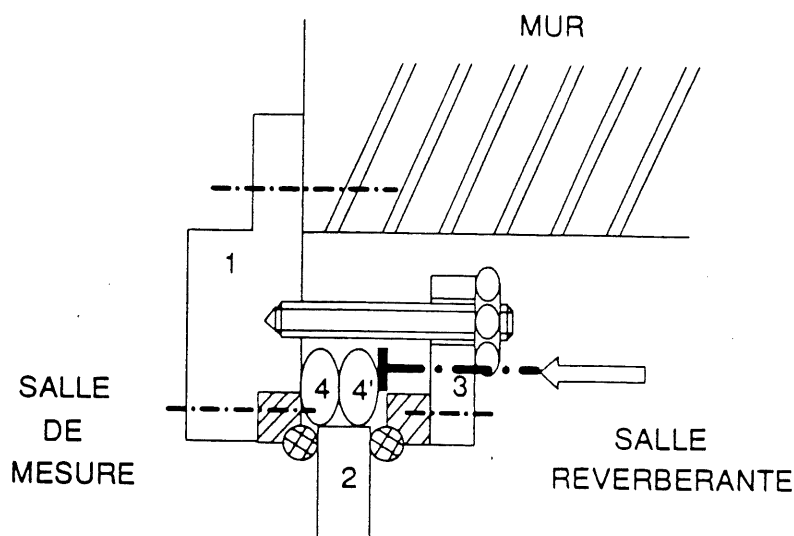


Figure 5.6: Montage de la structure dans la fenêtre d'essai.

rigide (1) est fixé sur le mur du côté de la salle de mesure, un cadre mobile (3) est vissé sur le cadre fixe du côté de la salle réverbérante, enserrant la plaque (2). L'étanchéité acoustique entre les deux salles est assurée par des joints de caoutchouc (4) comprimés par un cadre léger qui est maintenu en place par des vis disposées sur le cadre mobile. La figure 5.7 illustre les modes de fixation utilisés pour réaliser un appui simple et un encastrement.

Excitation

La structure est excitée en son centre par un pot vibrant WILCOXON F4 alimenté par un générateur de bruit blanc B&K 1405. La force excitatrice injectée dans la plaque est mesurée par un capteur de force suivi d'un conditionneur ENDEVCO 2775, pour être acheminé vers le système d'acquisition et de traitement de données.

Mesure

Le système de mesure, côté local de réception doit permettre d'accéder à la vitesse vibratoire quadratique et à la puissance rayonnée dans le local de réception, ces deux quantités permettant d'en déduire directement l'efficacité de rayonnement de la structure. La mesure

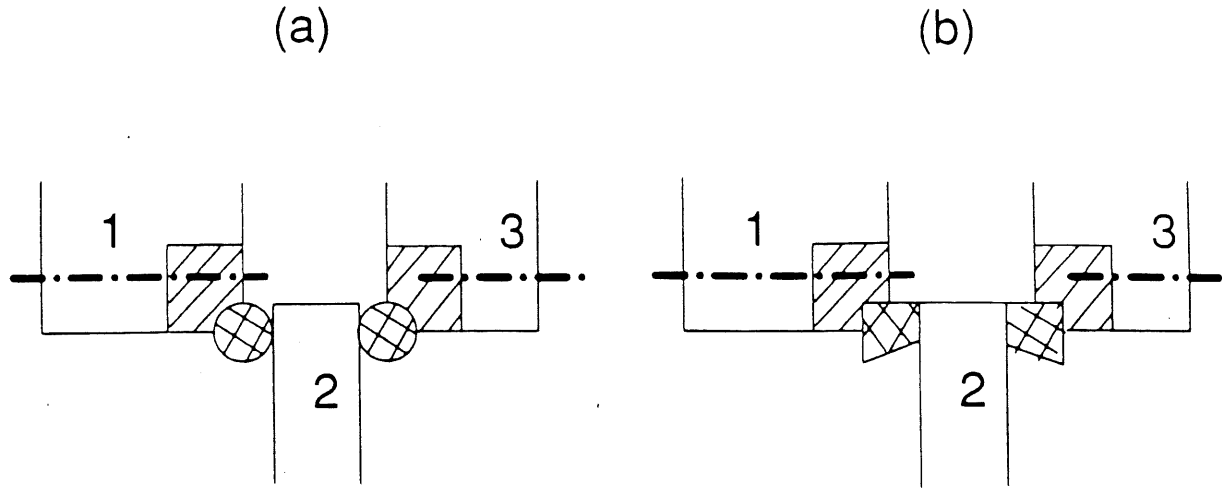


Figure 5.7: Conditions de fixation (a) en appui simple; (b) en encastrement.

de la vitesse de paroi et la mesure du rayonnement acoustique sont effectuées simultanément par une seule sonde constituée de trois microphones rapprochés, dont les centres acoustiques sont alignés perpendiculairement à la surface vibrante et situés à faible distance de celle-ci. La mesure des autospectres et des interspectres entre paires de microphones permet, en un point donné, d'accéder à l'intensité acoustique active normale au plan de la plaque I_n et de reconstruire par extrapolation la vitesse de paroi v_n au droit du point de mesure. Les principes et la technique de la mesure ont été plus amplement décrits par LOYAU [48]. La mesure est répétée en \mathcal{N} points d'un plan de mesure parallèle à la plaque. La vitesse vibratoire quadratique $\langle \dot{w}_m^2 \rangle$ et la puissance acoustique W_m mesurées sont obtenues par les relations suivantes,

$$\langle \dot{w}_m^2 \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \langle v_n^2 \rangle \quad (5.4)$$

$$W_m = \frac{ab}{\mathcal{N}} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} I_n \quad (5.5)$$

L'efficacité de rayonnement mesurée est obtenue par la formule

$$\sigma_m = \frac{W_m}{\rho_0 c_0 ab \langle \dot{w}_m^2 \rangle} \quad (5.6)$$

Lors de la mesure, l'espacement inter-microphones était de 12mm , la distance entre la plaque et le microphone central était de 36mm . Les erreurs de phase entre les microphones rend la technique de mesure très imprécise en basses fréquences (moins de 100Hz). Le plan de mesure, de dimensions $1.2\text{m} \times 1.2\text{m}$ est constitué de $\mathcal{N} = 49$ points répartis sur un maillage régulier de 7 points \times 7 points, qui est balayé à l'aide d'un système robotisé de déplacement et de localisation. La sonde est constituée de trois microphones quart de pouce AKSUD 34012. Les trois signaux de pression acoustique et le signal de mesure de la force excitatrice sont acheminés à un commutateur de signaux PHILIPS PM2101 et PHILIPS PM2120. La mesure des autospectres et interspectres entre paires de capteurs microphoniques est effectuée à l'aide d'un système de traitement de signal HP 3582 qui effectue l'acquisition et la FFT sur deux voies d'analyse. Le traitement des spectres et le calcul des indicateurs vibratoires et acoustiques globaux sont assurés par un ordinateur central HP VECTRA. Les résultats en vitesse quadratique de la structure et en puissance acoustique rayonnée sont référencés à une force excitatrice unitaire pour fins de comparaisons avec la théorie, $\langle \dot{w}_m^2 \rangle / F_m^2$, W_m / F_m^2 , où F_m est la force excitatrice mesurée par bande de fréquence.

5.3.2 Résultats

Les comparaisons théorie/expérience sont présentées pour les conditions d'appui simple et d'encastrement aux figures 5.8, 5.9 et 5.10 en termes de vitesse vibratoire quadratique de la structure, puissance rayonnée et facteur de rayonnement. Les constantes physiques de l'aluminium utilisées dans le calcul sont $E = 7.2 \times 10^{10}\text{Pa}$, $\rho_s = 2700\text{kg/m}^3$, $\nu = 0.3$; le facteur de perte structural introduit est $\eta_p = 7 \times 10^{-2}$. Le trait plein représente le résultat du calcul, le trait pointillé celui de la mesure.

Dans tous les cas, la dépendance fréquentielle des phénomènes est bien estimée par la théorie. La position prédite des premières résonances est satisfaisante dans les deux cas de conditions aux limites (figure 5.8). On remarquera toutefois une légère sous-estimation par la théorie des fréquences propres mesurées dans le cas de l'appui simple (figure 5.8.a), et une légère sur-estimation dans le cas de l'encastrement (figure 5.8.b). Cette remarque

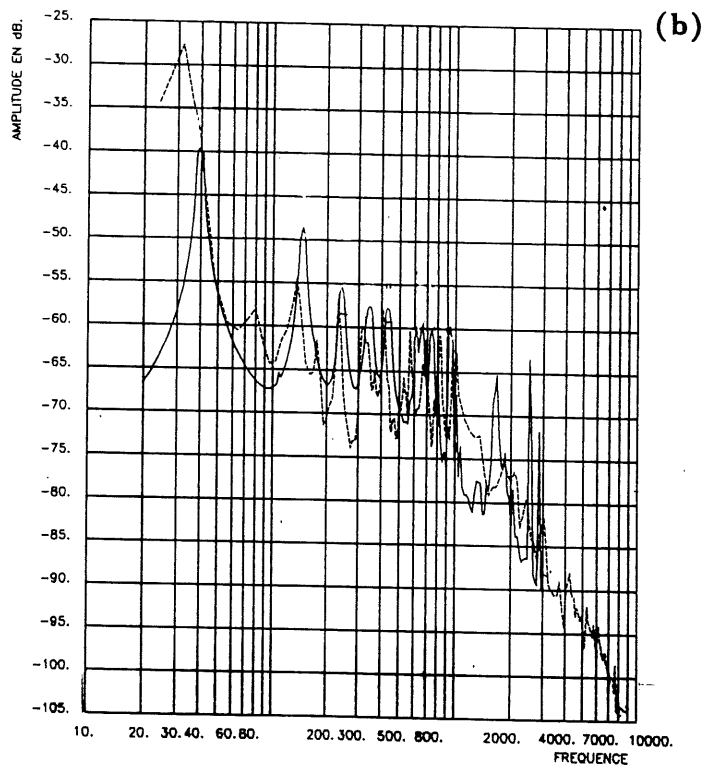
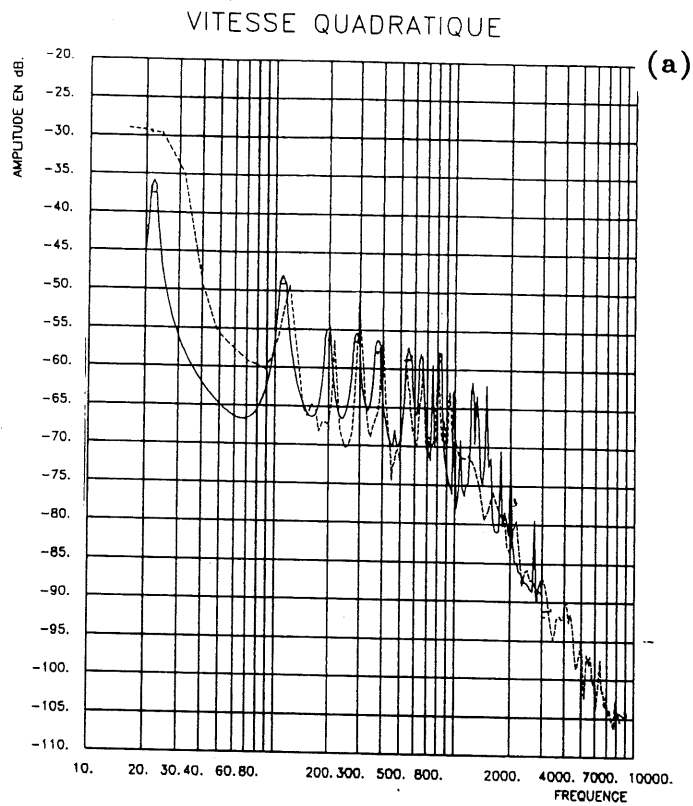


Figure 5.8: Comparaison théorie/expérience pour la vitesse quadratique d'une plaque mince excitée par une force ponctuelle, (a) en appui simple, (b) encastrée. ——— théorie
 - - - - - expérience

PUISSANCE ACOUSTIQUE

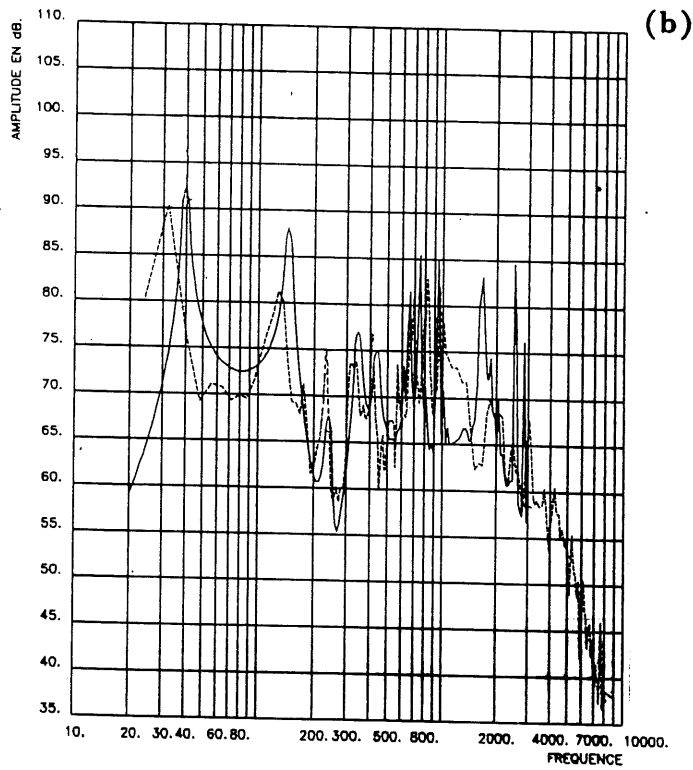
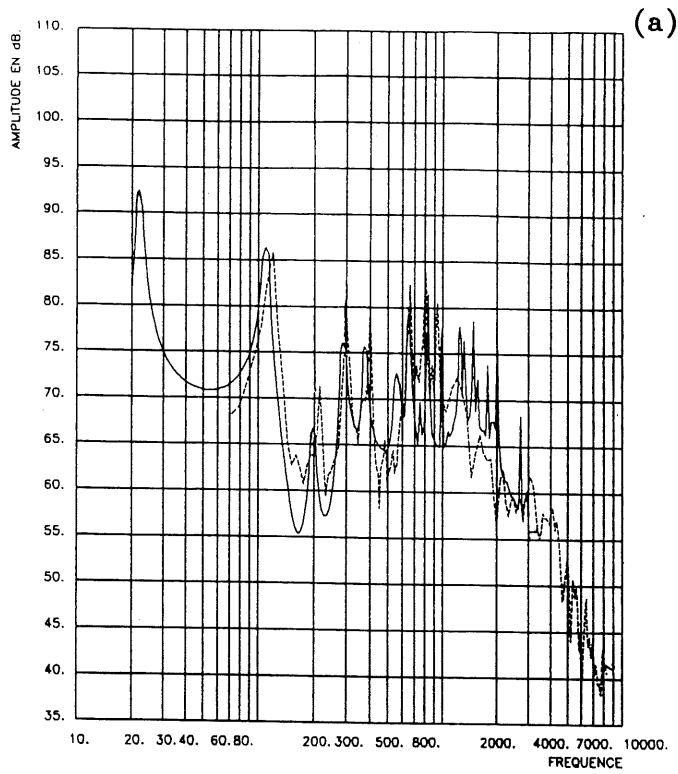


Figure 5.9: Comparaison théorie/expérience pour la puissance acoustique rayonnée par une plaque mince excitée par une force ponctuelle, (a) en appui simple, (b) encastrée.

— théorie
 --- expérience

FACTEUR DE RAYONNEMENT

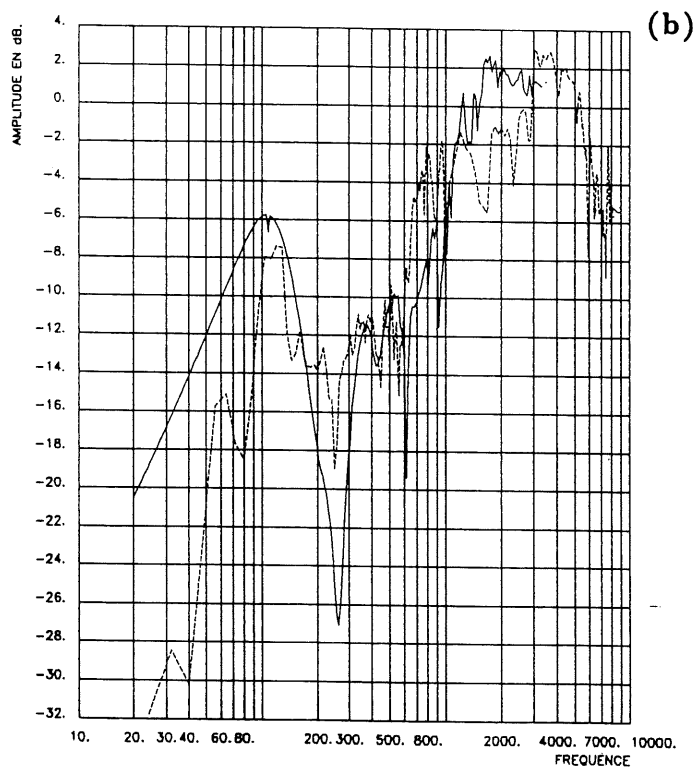
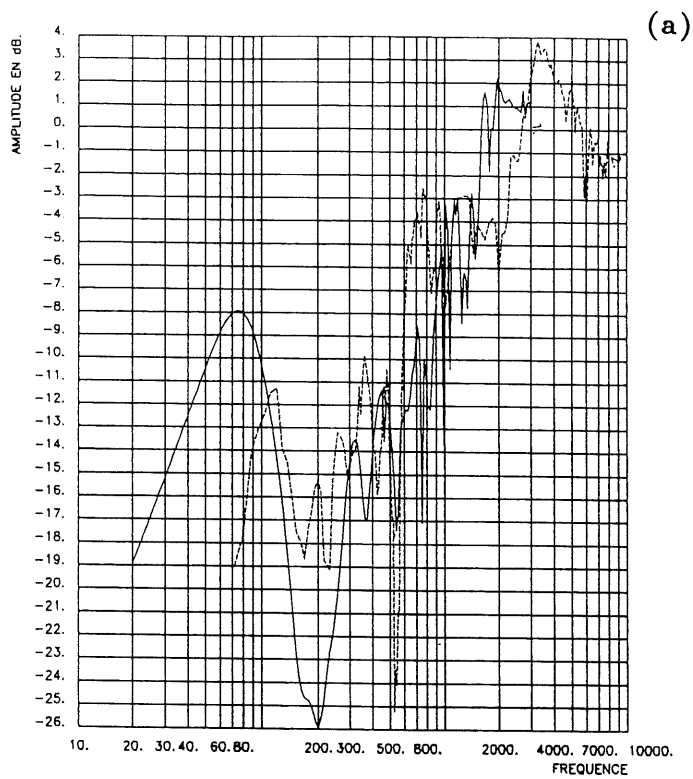


Figure 5.10: Comparaison théorie/expérience pour le facteur de rayonnement d'une plaque mince excitée par une force ponctuelle, (a) en appui simple, (b) encastrée.

— théorie
 ---- e xpérience

suggère que la rotation du contour de la structure n'est pas laissé totalement libre par le montage expérimental dans le cas de l'appui simple, et que la rotation du contour n'est pas totalement contrainte dans le cas de l'encastrement. Une telle constatation situe bien le caractère assez peu représentatif en réalité de conditions extrêmes telles que l'appui simple et l'encastrement. .

Les indicateurs acoustiques calculés – puissance rayonnée et efficacité de rayonnement – suivent correctement les tendances fournies par la mesure (figures 5.9 et 5.10). Les valeurs expérimentales du facteur de rayonnement confirment en particulier le caractère modal très marqué des phénomènes en basses fréquences et la relative indépendance de l'efficacité de rayonnement vis-à-vis des contraintes imposées sur la rotation du contour de la structure. On remarque qu'entre $200Hz$ et $300Hz$, l'efficacité de rayonnement prédite est inférieure à l'efficacité de rayonnement mesurée; les raisons de cet écart ne sont pas encore éclaircies.

5.4 Conclusions

Les comparaisons, sur des cas simples, entre la méthode de calcul que nous avons proposé et les moyens de simulation numériques offerts par la technique des éléments finis ont permis, d'une part de valider les calculs effectués, d'autre part de mettre en évidence les performances de l'outil de prédiction mis en œuvre.

Les confrontations, toujours autour de situations simples, avec les résultats expérimentaux ont montré que la théorie proposée prédit adéquatement le rayonnement acoustique dans les situations où il est contrôlé par des mécanismes modaux. Il serait souhaitable de poursuivre ces vérifications initiales autour de situations plus complexes et compatibles avec la réalité industrielle, dans le but de tester la théorie proposée comme outil de prédiction à part entière.

Deuxième Partie |

Fluide lourd

Chapitre 6

L'interaction fluide – structure

6.1 introduction

Le but de ce chapitre est d'étendre au cas d'un fluide lourd le cadre théorique exposé au chapitre 3 et valable pour une structure plane complexe immergée dans un fluide léger (essentiellement l'air). Le problème étudié est donc en tout point identique à celui présenté au chapitre 3, avec cette fois-ci un demi-espace fluide dense en $z > 0$, le demi-espace $z < 0$ étant vide. Dans l'hypothèse d'un fluide lourd, la pression acoustique pariétale modifie la réponse de la structure, et doit être conservée dans le calcul comme une sollicitation sur la structure au même titre que les forces mécaniques appliquées. Ce problème a des applications importantes pour les vibrations et le bruit rayonné par les structures marines (bâtiments de surface, sous-marins, plate-formes "offshore"). Il s'agit d'un problème complexe d'un point de vue théorique car le comportement du fluide et de la structure sont alors fortement couplés. L'objectif de ce chapitre est donc de modéliser, pour les structures considérées dans le cadre de ce travail, l'interaction dynamique entre le fluide et la structure.

On présente dans un premier temps les équations générales du problème couplé, équations qui montrent le rôle central joué par les termes d'impédances de rayonnement de la structure. Une brève revue des connaissances fait le point sur les méthodes existantes pour calculer ces termes d'impédance de rayonnement. Une méthode originale est proposée

dans le cas où les conditions aux limites sont générales (raideur finie de déflexion et de rotation sur le contour). Les différents indicateurs vibroacoustiques calculés par le modèle sont présentés, et la méthode est testée et comparée à des résultats existants dans le cas simple d'un piston rectangulaire.

6.2 Equations générales du problème couplé – impédances de rayonnement

Une structure se comporte différemment d'un point de vue acoustique si elle est immergée dans un milieu fluide dense ou dans un milieu fluide léger. Cette différence a été historiquement mise en évidence par une expérience de LESLIE en 1837, et justifiée physiquement pour la première fois par STOKES en 1868 [27]. Un milieu dense crée une charge fluide sur la structure et en modifie la réponse dynamique. Cette charge fluide est elle-même créée par la réponse dynamique de la structure sous la forme d'une fluctuation de pression dans le fluide à la surface de la structure, ou pression pariétale. Le problème théorique est donc couplé. Les impédances de rayonnement de la structure sont les paramètres importants de l'interaction fluide-structure car, comme on le verra, elles quantifient à la fois la charge fluide, et l'énergie cédée par la structure au fluide, c'est-à-dire le rayonnement acoustique. (On peut se reporter à la section 2.4.3 pour le rappel des études antérieures sur l'interaction fluide-structure).

6.2.1 Charge fluide

Dans le problème énoncé en 3.2.1, la charge fluide exercée sur la structure est la pression pariétale $p(x, y, 0^+)$. Cette pression pariétale fournit à la structure un travail

$$W_{acoustique} = - \int_{(S)} p(x, y, 0^+) w(x, y) dx dy \quad (6.1)$$

qui s'ajoute au travail $W_{mécanique}$ fourni par les forces excitatrices (voir section 3.3.7). La fonctionnelle de Hamilton de la structure sous l'action des forces excitatrices et de la charge fluide est donc

$$\mathcal{H}(w) = \int_{t_0}^{t_1} (T - V + W) dt \quad (6.2)$$

où $W = W_{m\acute{e}canique} + W_{acoustique}$, T est l'énergie cinétique de la structure et V est l'énergie de déformation de la structure. Les expressions de $W_{m\acute{e}canique}$, T et V sont formellement identiques à celles obtenues au chapitre 3.

Par ailleurs, la solution de pression acoustique dans le fluide peut être mise sous la forme intégrale suivante, dans l'hypothèse d'une dépendance temporelle $e^{j\omega t}$ [28],

$$p(x, y, z) = -\rho_0 \omega^2 \int_{(S)} G(x, y, z/x', y', 0) w(x', y') dx' dy' \quad (6.3)$$

où $G(x, y, z/x', y', z')$ est la fonction de Green pour un demi-espace avec condition de Neumann à $z = 0$,

$$G(x, y, z/x', y', 0) = \frac{e^{-jk_0 r}}{2\pi r} \quad (6.4)$$

avec $k_0 = \omega/c_0$ et

$$r = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2} \quad (6.5)$$

La pression acoustique dans le fluide et le déplacement vibratoire de la structure sont les solutions du système formé par l'équation (6.3) et la condition de stationnarité du hamiltonien (6.2). Il s'agit d'un système rendu couplé par la présence du terme de charge fluide $W_{acoustique}$ dans la fonctionnelle de Hamilton, et pour lequel on ne dispose pas de solution exacte, même dans des cas simples (plaque nue sur appui simple, par exemple). Les solutions approchées disponibles actuellement sont généralement obtenues en décomposant le déplacement de la structure et la pression pariétale sur la base des modes *in-vacuo* de la structure [44,10,67]. Une telle approche nécessite la connaissance *a priori* des modes *in-vacuo* de la structure, et s'avère donc incompatible avec l'hypothèse de conditions aux limites arbitraires sur le contour de la plaque. Dans ce cas, la méthode de Rayleigh-Ritz permet de remplacer la base modale par une base fonctionnelle cinématiquement admissible. L'utilisation de la base des polynômes de Taylor, décrite au chapitre 3, est illustrée dans ce chapitre pour le calcul du couplage fluide/structure.

6.2.2 Impédances de rayonnement

En particulierisant (6.3) à $z = 0$, la pression pariétale s'écrit

$$p(x, y, 0^+) = -\rho_0 \omega^2 \int_{(S)} G(x, y, 0/x', y', 0) w(x', y') dx' dy' \quad (6.6)$$

Substituant (6.6) dans (6.1),

$$W_{acoustique} = \rho_0 \omega^2 \int_{(S)} \int_{(S)} w(x, y) G(x, y, 0/x', y', 0) w(x', y') dx dy dx' dy' \quad (6.7)$$

Compte tenu que le déplacement structural peut être développé sur la base de Taylor,

$$w(x, y) = \{a_{mn}\}^T \{\Phi_m(x) \Psi_n(y)\}$$

$$w(x', y') = \{a_{pq}\}^T \{\Phi_p(x') \Psi_q(y')\}$$

avec $\Phi_m(x) = (\frac{2x}{a})^m$, $\Psi_n(y) = (\frac{2y}{b})^n$, on obtient

$$W_{acoustique} = \rho_0 \omega^2 \{a_{mn}\}^T \left[\int_{(S)} \int_{(S)} \Phi_m(x) \Psi_n(y) G(x, y, 0/x', y', 0) \Phi_p(x') \Psi_q(y') dx dy dx' dy' \right] \{a_{pq}\} \quad (6.8)$$

La condition de stationnarité de \mathcal{H} pour la structure immergée dans un fluide lourd est, d'après l'équation (3.71),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_{mn}} \right) + \frac{\partial V}{\partial a_{mn}} = \frac{\partial W_{mécanique}}{\partial a_{mn}} + \frac{\partial W_{acoustique}}{\partial a_{mn}} \quad (6.9)$$

L'ensemble de ces conditions peut être mis sous la forme matricielle suivante:

$$(-\Omega^2 [M_{mnpq}] + [\tilde{K}_{mnpq}]) \{a_{mn}\} = \{f_{mn}\} - j\Omega [Z_{mnpq}] \{a_{mn}\} \quad (6.10)$$

où $[M_{mnpq}]$, $[\tilde{K}_{mnpq}]$ et $\{f_{mn}\}$ sont respectivement la matrice de masse, la matrice de rigidité de la structure dissipative, et le vecteur des forces mécaniques généralisées, calculés dans la base de Taylor. La matrice $[Z_{mnpq}]$ est la matrice dite des impédances de rayonnement, calculée dans la base de Taylor, dont chaque coefficient se calcule comme

$$Z_{mnpq} = j\rho_0 \Omega \int_{(S)} \int_{(S)} \Phi_m(x) \Psi_n(y) G(x, y, 0/x', y', 0) \Phi_p(x') \Psi_q(y') dx dy dx' dy' \quad (6.11)$$

Les remarques suivantes s'imposent:

- Le terme $j\Omega[Z_{mnpq}]\{a_{mn}\}$ dans l'équation (6.10) traduit l'influence du milieu fluide sur la réponse de la structure. La résolution du système linéaire (6.10) passe par l'évaluation de la matrice $[Z_{mnpq}]$ des impédances de rayonnement, dont chaque coefficient se présente comme une intégrale quadruple sur un domaine fini d'une fonction singulière (la fonction G n'est pas définie lorsque $x = x'$ et $y = y'$). Ce premier constat situe bien la complexité du problème au niveau théorique, et indique le degré de difficulté supplémentaire introduit par la présence du fluide dans les calculs.
- La matrice $[Z_{mnpq}]$ est une matrice complexe dont la partie imaginaire représente la masse rajoutée par le fluide sur la structure, et dont la partie réelle représente l'amortissement par rayonnement acoustique. La partie réelle de $[Z_{mnpq}]$ contient donc l'information nécessaire au calcul du bruit rayonné par la structure. Ce point sera développé à la section 6.5.
- La matrice $[Z_{mnpq}]$, lorsqu'elle est exprimée dans la base des modes *in-vacuo* de la structure, est appelée matrice des impédances modales de rayonnement. Cette matrice étant pleine, le système linéaire (6.10) cesse d'être diagonal lorsqu'un fluide dense est pris en considération, et les modes *in-vacuo* deviennent couplés par la présence du fluide; les termes de la matrice $[Z_{mnpq}]$ expriment ce couplage intermodal, c'est-à-dire la capacité d'un mode donné d'induire par le fluide le mouvement d'un autre mode donné. La base des modes *in-vacuo* permet donc d'interpréter utilement les phénomènes en termes de perturbation des modes *in-vacuo* par le fluide; il ne semble pas que le recours à une base non modale pour décrire ces phénomènes ait été jamais envisagé.

6.3 Revue des méthodes disponibles pour le calcul des impédances de rayonnement

Le calcul du rayonnement acoustique des plaques finies immergées dans un fluide lourd nécessite le calcul des impédances de rayonnement, qu'elles soient exprimées dans une base modale ou dans une base fonctionnelle. Il s'agit assurément de l'étape critique de

la modélisation et du calcul numérique, puisqu'elle consomme généralement l'essentiel du temps CPU dans les codes de calcul existants. On trouve dans la littérature relativement peu d'études consacrées à ce problème difficile dans le cas de structures planes. Les méthodes disponibles reposent soit sur la transformation des équations dans l'espace des nombres d'onde, soit sur la résolution numérique de l'équation (6.11).

6.3.1 Transformation dans l'espace des nombres d'onde

Cette méthode a été initialement appliquée par DAVIES [10] au calcul des coefficients de couplage intermodal dans le cas d'une plaque sur appui simple. Elle s'appuie sur une transformée de Fourier bidimensionnelle sur les variables d'espace x et y du champ de pression $p(x, y, z)$ et du champ de déplacement $w(x, y)$, moyennant quoi les impédances de rayonnement intermodales peuvent être mises sous la forme suivante:

$$Z_{mnpq} = \rho_0 \Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\Phi}_m(\lambda) \tilde{\Psi}_n(\mu) \tilde{\Phi}_p^*(\lambda) \tilde{\Psi}_q^*(\mu)}{[k_0^2 - \lambda^2 - \mu^2]^{1/2}} d\lambda d\mu \quad (6.12)$$

où $\tilde{\Phi}_m(\lambda)$ et $\tilde{\Psi}_n(\mu)$ désignent les transformées de Fourier des fonctions $\Phi_m(x) = \sin[\frac{m\pi}{a}(x - a/2)]$ et $\Psi_n(y) = \sin[\frac{n\pi}{b}(y - b/2)]$, et $*$ désigne le conjugué complexe. L'expression (6.12) peut être résolue par intégration dans le plan complexe et évaluée par des formules simples moyennant certaines approximations. Ces approximations sont légitimes en basse fréquence (selon DAVIES, lorsque $k_0 a < \pi$). Les expressions obtenues par DAVIES ont été, depuis, largement utilisées par d'autres auteurs.

POPE et LEIBOWITZ [67] ont à la suite de DAVIES proposé des résultats plus complets à partir de la même méthode, et CHANG et LEEHEY [5] ont étendu l'analyse au cas d'un fluide en mouvement. Cette approche présente l'avantage de conduire à des expressions simples pour les impédances de rayonnement; ces expressions reposent cependant sur des approximations pour certaines fonctions mathématiques qui ne sont pas toutes justifiées, et leur application est limitée au seul cas de plaque sur appui simple.

6.3.2 Résolution numérique

L'expression (6.11) a été résolue directement de manière numérique par SANDMAN [70,71] dans le cas d'une plaque sur appui simple par développement sur la base des modes propres *in-vacuo*, $\Phi_m(x) = \sin[\frac{m\pi}{a}(x-a/2)]$ et $\Psi_n(y) = \sin[\frac{n\pi}{b}(y-b/2)]$. Compte tenu que le nombre de coefficients de couplage Z_{mnpq} à évaluer est généralement élevé, l'approche numérique est extrêmement coûteuse en temps de calcul, et irréaliste en hautes fréquences. De plus, le caractère oscillant de la fonction à intégrer rend délicate la quadrature numérique; CHANG et LEEHEY [5] ont montré que certains résultats de SANDMAN étaient entachés d'importantes erreurs numériques.

6.4 Méthode de calcul des impédances de rayonnement proposée dans le cas de conditions aux limites générales

La méthode proposée ci-après pour le calcul des impédances de rayonnement utilise la définition (6.11) avec la base fonctionnelle de Taylor $\Phi_m(x) = (\frac{2x}{a})^m$, $\Psi_n(y) = (\frac{2y}{b})^n$. L'intégration est faite analytiquement, ce qui rend l'approche très performante en temps de calcul, tout en conservant intacte la généralité du problème en ce qui a trait aux conditions aux limites sur le contour de la plaque.

6.4.1 Exposé de la méthode

On rappelle que

$$Z_{mnpq} = j\rho_0\Omega \int_{(S)} \int_{(S)} \Phi_m(x)\Psi_n(y)G(x,y,0/x',y',0)\Phi_p(x')\Psi_q(y')dx dy dx' dy'$$

avec

$$G(x,y,0/x',y',0) = \frac{e^{-jk_0r}}{2\pi r}$$

et

$$r = [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2} \quad (6.13)$$

d'où

$$Z_{mnpq} = \frac{\rho_0 \Omega k_0}{2\pi} \int_{(S)} \int_{(S)} \Phi_m(x) \Psi_n(y) \frac{e^{-jk_0 r}}{-jk_0 r} \Phi_p(x') \Psi_q(y') dx dy dx' dy' \quad (6.14)$$

La fonction à intégrer est singulière lorsque $r = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = x'$ et $y = y'$. Si l'on effectue un développement en série de Taylor de la fonction $\frac{e^{-jk_0 r}}{-jk_0 r}$ en puissances croissantes de $k_0 r$, on obtient

$$\frac{e^{-jk_0 r}}{-jk_0 r} = \frac{1}{-jk_0 r} + 1 + \frac{(-jk_0 r)}{2} + \dots + \frac{(-jk_0 r)^{k-1}}{k!} + \dots \quad (6.15)$$

Un tel développement permet de rejeter la singularité sur le premier terme du développement. Les termes d'ordre supérieur sont réguliers. En reportant (6.15) dans (6.14),

$$Z_{mnpq} = \frac{\rho_0 \Omega k_0}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-jk_0)^{k-1}}{k!} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \Phi_m(x) \Psi_n(y) r^{k-1} \Phi_p(x') \Psi_q(y') dx dy dx' dy' \quad (6.16)$$

Enfin, en effectuant dans l'intégrale le changement de variables,

$$\begin{cases} \alpha = 2x/a & \alpha \in [-1, +1] \\ \beta = 2y/b & \beta \in [-1, +1] \\ \alpha' = 2x'/a & \alpha' \in [-1, +1] \\ \beta' = 2y'/b & \beta' \in [-1, +1] \end{cases} \quad (6.17)$$

et compte tenu que

$$\begin{cases} \Phi_m(\alpha) = \alpha^m \\ \Psi_n(\beta) = \beta^n \\ \Phi_p(\alpha') = \alpha'^p \\ \Psi_q(\beta') = \beta'^q, \end{cases} \quad (6.18)$$

l'impédance de rayonnement d'ordre m, n, p, q s'exprime finalement comme une somme infinie de coefficients faisant apparaître une intégrale quadruple sur un domaine fini,

$$Z_{mnpq} = \frac{\rho_0 \Omega k_0}{2\pi} \frac{a^4}{16r^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-j)^{k-1} \frac{(k_0 a/2)^{k-1}}{(k-1)!} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \alpha^m \beta^n [(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2} (\beta - \beta')^2]^{\frac{k-1}{2}} \alpha'^p \beta'^q d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \quad (6.19)$$

Dans l'expression (6.19), $r = a/b$ désigne l'allongement de la plaque. Z_{mnpq} est une quantité complexe. Il est possible de séparer de manière explicite les parties réelle et imaginaire de Z_{mnpq} , ce qui, comme on va le voir, conduit à une interprétation physique particulièrement intéressante des solutions; en séparant la sommation discrète en valeurs paires de k et en valeurs impaires de k , on obtient

$$\begin{aligned}
Z_{mnpq} &= \frac{\rho_0 \Omega k_0 a^4}{2\pi 16r^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k_0 a/2)^{2k}}{(2k+1)!} \\
&\quad \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \alpha^m \beta^n [(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(\beta - \beta')^2]^k \alpha'^p \beta'^q d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \\
&+ j \frac{\rho_0 \Omega k_0 a^4}{2\pi 16r^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k_0 a/2)^{2k-1}}{(2k)!} \\
&\quad \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \alpha^m \beta^n [(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(\beta - \beta')^2]^{k-1/2} \alpha'^p \beta'^q d\alpha d\beta d\alpha' d\beta'
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Le premier terme de (6.20) est la partie réelle de l'impédance de rayonnement, ou résistance de rayonnement, qui traduit l'amortissement par rayonnement de la structure. Le second terme de (6.20) est la partie imaginaire de l'impédance de rayonnement, ou réactance de rayonnement, qui traduit la masse rajoutée par le fluide sur la structure. La formulation proposée permet donc de séparer de manière explicite la partie résistive et la partie réactive des phénomènes. Par la suite, on posera

$$I_{mnpq}^{(k)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \alpha^m \beta^n [(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(\beta - \beta')^2]^{k-1/2} \alpha'^p \beta'^q d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \tag{6.21}$$

$$J_{mnpq}^{(k)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \alpha^m \beta^n [(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(\beta - \beta')^2]^k \alpha'^p \beta'^q d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \tag{6.22}$$

Donc

$$\begin{aligned}
Z_{mnpq} &= \frac{\rho_0 \Omega k_0 a^4}{2\pi 16r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \\
&\quad [(-1)^k \frac{(k_0 a/2)^{2k}}{(2k+1)!} J_{mnpq}^{(k)} + j(-1)^k \frac{(k_0 a/2)^{2k-1}}{(2k)!} I_{mnpq}^{(k)}]
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Les expressions (6.21), (6.22), (6.23) forment le cœur de la méthode suggérée, à partir de laquelle chaque coefficient Z_{mnpq} peut être calculé, versé dans la matrice $[Z_{mnpq}]$ des

impédances de rayonnement, ce qui permet *in fine* de déterminer la réponse de la structure immergée en résolvant le système linéaire (6.10) pour les coefficients inconnus a_{mn} . L'obtention des divers indicateurs vibroacoustiques en fluide lourd est amplement détaillée à la section 6.5. Auparavant, il est bon de faire quelques remarques sur les avantages et les limitations de la méthode qui vient d'être exposée pour le calcul de Z_{mnpq} .

6.4.2 Remarques sur la méthode

Calcul de $I_{mnpq}^{(k)}$ et $J_{mnpq}^{(k)}$

Le calcul de Z_{mnpq} passe par le calcul des coefficients réactifs $I_{mnpq}^{(k)}$ donnés par (6.21) et des coefficients résistifs $J_{mnpq}^{(k)}$ donnés par (6.22) pour des valeurs de m, n, p, q comprises entre 0 et N , et pour des valeurs croissantes de k à partir de $k = 0$. Le calcul de $J_{mnpq}^{(k)}$ est simple puisque la fonction à intégrer dans (6.22) est un polynôme. La méthode fournit donc un moyen simple et rapide pour calculer avec le degré de précision voulue la partie résistive des impédances de rayonnement. Par contre, le calcul de $I_{mnpq}^{(k)}$ implique l'intégration d'un polynôme multiplié par une fonction radical, ce qui pose plus de difficultés au plan mathématique; on peut noter que, excepté pour $k = 0$, l'intégrande de $I_{mnpq}^{(k)}$ est une fonction régulière. La résolution détaillée de $I_{mnpq}^{(k)}$ et $J_{mnpq}^{(k)}$ est présentée aux annexes 2 et 3, respectivement. On peut simplement faire ici les deux remarques importantes suivantes:

- Le nombre de coefficients $I_{mnpq}^{(k)}$ à calculer en pratique est fortement réduit compte tenu des deux propriétés suivantes:

$$I_{mnpq}^{(k)} = 0 \quad \text{lorsque } (m + p) \text{ est impair ou } (n + q) \text{ est impair} \quad (6.24)$$

$$I_{mnpq}^{(k)} = I_{pnmq}^{(k)} = I_{mqpn}^{(k)} = I_{pqmn}^{(k)} \quad (6.25)$$

Les mêmes propriétés s'appliquent intégralement à $J_{mnpq}^{(k)}$.

- La résolution de $I_{mnpq}^{(k)}$ pour tout quintuplet (m, n, p, q, k) (voir annexe 2) peut être effectuée, avec un peu d'effort, grâce à un schéma de calcul récursif sur l'ensemble des indices m, n, p, q et k , ce qui autorise un calcul relativement rapide de l'ensemble des coefficients $I_{mnpq}^{(k)}$ non nuls.

Convergence

Pratiquement, la sommation sur k dans l'équation (6.23) doit être tronquée à un ordre fini. Cet ordre fini détermine la précision du développement en série de Taylor (6.15) de la fonction $\frac{e^{-jk_0r}}{-jk_0r}$. On a pu observer que 10 termes dans la somme (6.23), c'est-à-dire 20 termes dans le développement (6.15) étaient suffisants pour assurer la convergence de l'impédance de rayonnement tant que $k_0a < 10$ (soit une fréquence maximale de $5kHz$ pour une plaque de longueur $a = 0.455m$ dans l'eau), ce qui représente une condition moins restrictive que celle de DAVIES [10], $k_0a < \pi$. Le critère de convergence retenu impose au premier terme non inclus dans la série de ne pas excéder, en module, 1% de la valeur de la série. Notons que, le nombre d'onde acoustique k_0 étant plus petit dans l'eau que dans l'air pour une fréquence donnée, la méthode converge plus rapidement dans l'eau.

Particularités de la méthode et conséquences sur le temps de calcul

Les coefficients $I_{mnpq}^{(k)}$ et $J_{mnpq}^{(k)}$ donnés par (6.21) et (6.22) sont indépendants de la fréquence excitatrice. Ils représentent des fonctions de couplage spatial uniquement, et ne dépendent en fait que de la forme de la structure, via le coefficient d'allongement r de la plaque. La dépendance fréquentielle de Z_{mnpq} réapparaît lors de la sommation sur k dans l'équation (6.23). L'impédance de rayonnement Z_{mnpq} apparaît donc comme une somme de coefficients de couplage spatial, avec des pondérations variables suivant la fréquence. Cette particularité permet des gains très importants en temps de calcul puisque les coefficients $I_{mnpq}^{(k)}$ et $J_{mnpq}^{(k)}$ peuvent être "précalculés" une fois pour toutes pour une plaque de dimensions a et b données, indépendamment de toutes les autres caractéristiques du problème (fréquence, épaisseur, conditions aux limites et éléments mécaniques ajoutés sur la structure). L'approche est donc particulièrement avantageuse s'il s'agit d'itérer des simulations à partir d'une situation de base où seules les dimensions de la structure sont prescrites.

6.5 Indicateurs vibroacoustiques en fluide lourd

On présente dans ce qui suit les divers indicateurs vibratoires et acoustiques dans le cas d'une plaque rectangulaire rayonnant dans un fluide lourd. La réponse de la structure en

fluide lourd s'obtient à partir du système linéaire (6.10),

$$(-\Omega^2[M_{mnpq}] + [\tilde{K}_{mnpq}])\{a_{mn}\} = \{f_{mn}\} - j\Omega[Z_{mnpq}]\{a_{mn}\}$$

Le vecteur solution de ce système $\{a_{mn}\}$ fournit la projection du champ de déplacement $w(x, y)$ sur la base connue de Taylor. Ce vecteur solution permet aussi d'accéder à l'ensemble des indicateurs vibratoires et acoustiques de la structure en fluide lourd.

6.5.1 Vitesse quadratique de la structure

La vitesse vibratoire quadratique de la structure est calculée de la même manière qu'en fluide léger et s'obtient, connaissant $\{a_{mn}\}$, suivant la relation

$$\langle \dot{w}^2 \rangle = \frac{1}{2\rho_s h ab} \Omega^2 \{a_{mn}\}^T [M_{mnpq}] \{a_{pq}^*\} \quad (6.26)$$

où ρ_s et h sont respectivement la masse volumique et l'épaisseur de la plaque.

6.5.2 Pression acoustique rayonnée en champ lointain

Le champ des vitesses étant connu à la surface de la structure, la pression acoustique rayonnée dans le champ lointain s'en déduit par simple transformée de Fourier spatiale,

$$p(R, \theta, \varphi) = -\rho_0 \Omega^2 \frac{e^{-jk_0 R}}{2\pi R} \tilde{w}(\lambda, \mu) \quad (6.27)$$

où R, θ, ϕ sont les coordonnées polaires (voir fig. 3.1) d'un point courant du champ lointain ($R \rightarrow \infty$), et $\tilde{w}(\lambda, \mu)$ est la transformée de Fourier spatiale du déplacement $w(x, y)$ qui peut être calculée à partir des relations (3.85), (3.87) et (3.88) connaissant $\{a_{mn}\}$.

6.5.3 Puissance acoustique rayonnée

Calcul de la puissance à partir de l'information de champ lointain

La puissance acoustique rayonnée par la structure dans le demi-espace $z > 0$ peut être calculée en sommant l'intensité acoustique radiale sur un hémisphère de rayon infini,

$$W = \frac{\rho_0 \Omega^4}{8c_0 \pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} |\tilde{w}(k_0 \sin \theta \cos \phi, k_0 \sin \theta \sin \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (6.28)$$

Cette approche est celle qui a été employée dans le cas d'un fluide léger; elle nécessite, on l'a vu, une résolution numérique de l'intégrale (6.28). Cette résolution numérique devient délicate au-delà de la première fréquence critique modale car l'intensité acoustique varie fortement en fonction de la direction considérée dans l'espace.

Calcul de la puissance à partir de l'information de champ pariétal

Une alternative à l'expression (6.28) consiste à calculer la puissance rayonnée en sommant l'intensité acoustique normale sur la surface $z = 0^+$,

$$W = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \left[\int_{(S)} p(x, y, 0^+) \dot{w}^*(x, y) dx dy \right] \quad (6.29)$$

Or,

$$p(x, y, 0^+) = -\rho_0 \Omega^2 \int_{(S)} G(x, y, 0/x', y', 0) w(x', y') dx' dy'$$

et

$$\dot{w}^*(x, y) = j\Omega w^*(x, y) \quad (6.30)$$

donc

$$W = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \left[j\rho_0 \Omega^3 \int_{(S)} \int_{(S)} w(x', y') G(x, y, 0/x', y', 0) w^*(x, y) dx dy dx' dy' \right] \quad (6.31)$$

Substituant dans (6.31)

$$w(x', y') = \{a_{mn}\}^T \{\Phi_m(x') \Psi_n(y')\}$$

$$w^*(x, y) = \{a_{pq}^*\}^T \{\Phi_p(x) \Psi_q(y)\}$$

on obtient

$$W = -\frac{1}{2} \rho_0 \Omega^3 \{a_{mn}\}^T \left[\mathcal{I}m \left(\int_{(S)} \int_{(S)} \Phi_m(x') \Psi_n(y') G(x, y, 0/x', y', 0) \Phi_p(x) \Psi_q(y) dx dy dx' dy' \right) \right] \{a_{pq}^*\} \quad (6.32)$$

c'est-à-dire,

$$W = \frac{1}{2} \Omega^2 \{a_{mn}\}^T [\mathcal{R}e(Z_{mnpq})] \{a_{pq}^*\} \quad (6.33)$$

La puissance rayonnée dans un demi-espace fluide peut donc être évaluée à partir de la partie résistive des impédances de rayonnement $\mathcal{R}e(Z_{mnpq})$ et des coefficients a_{mn} du déplacement vibratoire sur la base de Taylor. L'approche proposée pour le calcul de Z_{mnpq} fournit de manière explicite la partie réelle de Z_{mnpq} , dont le calcul numérique ne pose pas de difficulté particulière. Le calcul de la puissance rayonnée par la structure à partir de la pression pariétale et du champ de déplacement vibratoire est donc plus direct que le calcul utilisant l'information de champ lointain.

On peut montrer de plus que l'expression (6.33) est liée à une décomposition en multipôles de la structure. Une telle décomposition est intéressante car elle permet d'expliquer directement l'efficacité de rayonnement de la structure en basses fréquences, de même que la directivité du rayonnement dans l'espace. En effet, on rappelle que, d'après (6.23),

$$\mathcal{R}e(Z_{mnpq}) = \frac{\rho_0 \Omega k_0}{2\pi} \frac{a^4}{16r^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k_0 a/2)^{2k}}{(2k+1)!} J_{mnpq}^{(k)} \quad (6.34)$$

c'est-à-dire,

$$\mathcal{R}e(Z_{mnpq}) = \frac{\rho_0 c_0}{2\pi} \frac{a^2}{4r^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k_0 a/2)^{2k+2}}{(2k+1)!} J_{mnpq}^{(k)} \quad (6.35)$$

La dépendance fréquentielle de $\mathcal{R}e(Z_{mnpq})$ dans (6.35) caractérise le rayonnement des fonctions couplées $\Phi_m \Psi_n$ et $\Phi_p \Psi_q$; le terme $k = 0$ dans la somme (6.35) caractérise le comportement monopolaire, le terme $k = 1$, le comportement dipolaire, le terme $k = 2$, le comportement quadripolaire, et le terme courant $k = i$ le comportement 2^i -upolaire. Substituant (6.35) dans (6.33),

$$W = \frac{\rho_0 c_0 \Omega^2 a^2}{16\pi r^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k_0 a/2)^{2(k+1)}}{(2k+1)!} \{a_{mn}\}^T [J_{mnpq}^k] \{a_{pq}^*\} \quad (6.36)$$

Dans cette expression, la puissance rayonnée est décomposée en contributions monopolaire ($k = 0$), dipolaire ($k = 1$), quadripolaire ($k = 2$), ... 2^i -upolaire ($k = i$). WILLIAMS [90] avait déjà montré qu'un développement en série de Taylor du noyau de Green G conduit à un développement de la puissance rayonnée en puissances croissantes du nombre d'onde k_0 . Il avait également montré l'utilité d'un tel développement pour interpréter le rayonnement de plaques avec diverses conditions aux limites, et avait soulevé le cas particulier intéressant d'une plaque libre. Cependant, l'idée initiale du développement en série de Taylor de G n'a, semble-t-il, jamais été utilisé pour le calcul des impédances de rayonnement.

Comparaison entre les deux méthodes de calcul de la puissance rayonnée

Compte tenu que le fluide est sans pertes, l'évaluation de la puissance rayonnée en champ lointain, équation (6.28), et en champ proche, équation (6.33), doit conduire au même résultat. Ceci permet de confronter les deux méthodes de calcul, et de vérifier la convergence du calcul en champ proche en fonction de l'ordre du développement en série de G .

La comparaison entre les deux méthodes est illustrée à la figure 6.1, pour le facteur de rayonnement et la puissance rayonnée dans le cas d'une plaque d'acier $0.455m \times 0.375m \times 1mm$ en appui simple, immergée dans l'eau et excitée par une force de $1N$ au centre de la plaque. La puissance a été évaluée soit en champ lointain suivant l'équation (6.28), soit en champ proche suivant l'équation (6.33) en tronquant la série (6.23) à l'ordre $k = 0$ ("tayl = 0"), $k = 2$ ("tayl = 2"), $k = 4$ ("tayl = 4"), ce qui correspond à un développement du noyau de Green à l'ordre 0, 4 et 8, respectivement.

Comme espéré, les indicateurs calculés en champ proche et en champ lointain coïncident. La convergence s'améliore lorsque l'ordre du développement de G s'accroît; la coïncidence est parfaite jusqu'à environ $2kHz$ pour $k = 4$, ce qui est en accord avec le critère de convergence énoncé en 6.4.

6.5.4 Efficacité de rayonnement

L'efficacité de rayonnement de la structure est

$$\sigma = \frac{W}{\rho_0 c_0 ab \langle \dot{w}^2 \rangle} \quad (6.37)$$

et peut être calculée connaissant $\langle \dot{w}^2 \rangle$, équation (6.26), et W , équation (6.28) ou (6.33).

6.5.5 Résistances et réactances intermodales de rayonnement

L'impédance de rayonnement est le terme de couplage entre deux modes *in-vacuo* de la structure, qui est induit par la présence du fluide. C'est la quantité qui est généralement utilisée pour caractériser l'interaction fluide-structure sur la base des modes propres *in-vacuo* de la structure [47]. La résistance et la réactance intermodale de rayonnement

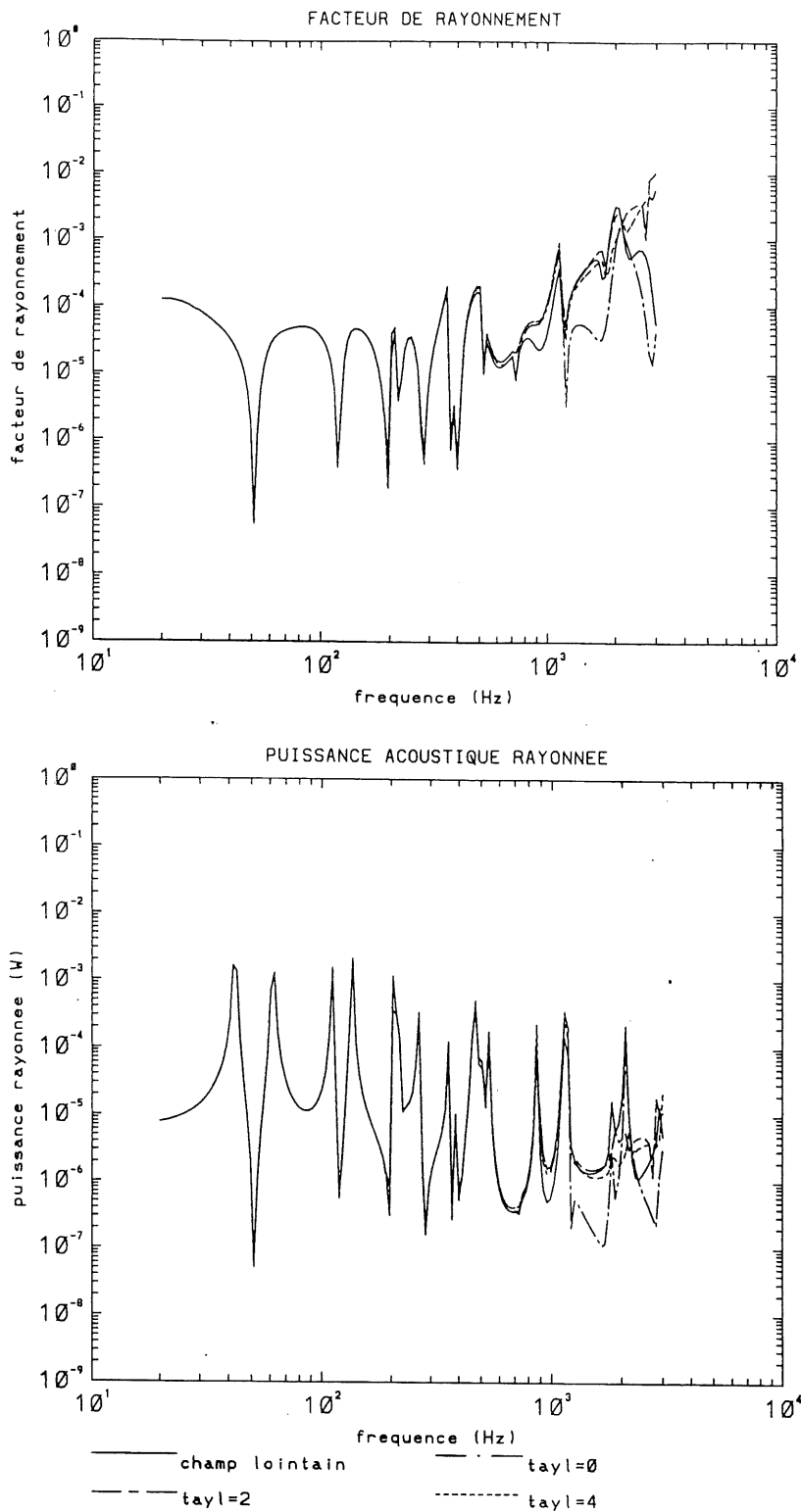


Figure 6.1: Rayonnement dans l'eau d'une plaque sur appui simple. Comparaison entre le calcul du rayonnement en champ lointain et en champ proche.

sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de l'impédance intermodale de rayonnement.

Soit deux modes *in-vacuo* i et j de la structure, $\{a_{mn}\}_i$ la décomposition du mode i sur la base $(\frac{2x}{a})^m(\frac{2y}{b})^n$, $\{a_{pq}\}_j$ la décomposition du mode j sur la base $(\frac{2x}{a})^p(\frac{2y}{b})^q$. L'impédance intermodale de rayonnement pour les modes i et j est obtenue grâce aux relations:

$$z_{ij} = \frac{Z_{ij}}{N_i \rho_0 c_0} \quad (6.38)$$

$$Z_{ij} = \{a_{mn}\}_i^T [Z_{mnpq}] \{a_{pq}\}_j \quad (6.39)$$

$$N_i = \{a_{mn}\}_i^T \left[\int_{(S)} \left(\frac{2x}{a}\right)^m \left(\frac{2y}{b}\right)^n \left(\frac{2x}{a}\right)^p \left(\frac{2y}{b}\right)^q dx dy \right] \{a_{pq}\}_i \quad (6.40)$$

où N_i est la norme du mode i , et $(\rho_0 c_0)$ est l'impédance spécifique du fluide. On peut encore écrire

$$z_{ij} = \frac{\rho_s h}{\rho_0 c_0} \frac{\{a_{mn}\}_i^T [Z_{mnpq}] \{a_{pq}\}_j}{\{a_{mn}\}_i^T [M_{mnpq}^{(plaque)}] \{a_{pq}\}_i} \quad (6.41)$$

où $(\rho_s h)$ est la masse surfacique de la structure et $[M_{mnpq}^{(plaque)}]$ est la matrice de masse de la plaque seule. On en déduit finalement l'expression de la résistance intermodale r_{ij} et de la réactance intermodale x_{ij} , normalisées à l'impédance spécifique du fluide $(\rho_0 c_0)$.

$$r_{ij} = \frac{\rho_s h}{\rho_0 c_0} \frac{\{a_{mn}\}_i^T [\mathcal{R}e(Z_{mnpq})] \{a_{pq}\}_j}{\{a_{mn}\}_i^T [M_{mnpq}^{(plaque)}] \{a_{pq}\}_i} \quad (6.42)$$

$$x_{ij} = \frac{\rho_s h}{\rho_0 c_0} \frac{\{a_{mn}\}_i^T [\mathcal{I}m(Z_{mnpq})] \{a_{pq}\}_j}{\{a_{mn}\}_i^T [M_{mnpq}^{(plaque)}] \{a_{pq}\}_i} \quad (6.43)$$

Lorsque $i = j$, ces relations définissent la résistance et la réactance modale de rayonnement normalisées r_i et x_i pour le mode i . La résistance modale normalisée r_i n'est autre que l'efficacité de rayonnement du mode i .

6.6 Cas du piston rectangulaire

Le rayonnement acoustique d'un piston rectangulaire a été étudié par de nombreux auteurs, dont BURNETT et SOROKA [4], STEPANISHEN [79], LEVINE [45], et MECHEL [59], qui ont proposé différentes méthodes pour en calculer l'impédance de rayonnement. Dans le contexte de notre travail, le cas du piston rectangulaire est un cas particulier où le

déplacement de la structure est représenté par la seule fonction de base $\Phi_0(x)\Psi_0(y) = 1$. L'impédance de rayonnement d'un piston rectangulaire se réduit donc, selon nos conventions d'écriture, au terme Z_{0000} , c'est-à-dire, d'après (6.23),

$$Z_{0000} = \frac{\rho_0 \Omega k_0}{2\pi} \frac{a^4}{16r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{(k_0 a/2)^{2k}}{(2k+1)!} J_{0000}^{(k)} + j (-1)^k \frac{(k_0 a/2)^{2k-1}}{(2k)!} I_{0000}^{(k)} \right] \quad (6.44)$$

La résistance et la réactance normalisées du piston peuvent être obtenues à l'aide des relations (6.42) et (6.43),

$$r_0 = \frac{1}{16r} \frac{(k_0 a)^2}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k_0 a/2)^{2k}}{(2k+1)!} J_{0000}^{(k)} \quad (6.45)$$

$$x_0 = \frac{1}{16r} \frac{(k_0 a)^2}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k_0 a/2)^{2k-1}}{(2k)!} I_{0000}^{(k)} \quad (6.46)$$

Il est donc intéressant, à titre de validation, de comparer ces solutions avec des résultats disponibles dans la littérature, en particulier les valeurs tabulées par BURNETT et SOROKA [4], réputées très précises.

On remarquera en premier lieu que, dans la limite des basses fréquences ($k_0 a \ll 1$), la somme (6.45) peut être convenablement approchée par son premier terme,

$$r_0 \approx \frac{(k_0 a)^2}{2\pi r} \frac{J_{0000}^{(0)}}{16}, \quad k_0 a \ll 1 \quad (6.47)$$

Compte tenu que $J_{0000}^{(0)} = 16$,

$$r_0 \approx \frac{(k_0 a)^2}{2\pi r}, \quad k_0 a \ll 1 \quad (6.48)$$

Cette expression de la résistance de rayonnement du mode piston en basses fréquences est formellement identique à celle obtenue par une autre voie au chapitre 4, équation (4.10). La comparaison complète avec les données de BURNETT et SOROKA est présentée à la figure 6.2 pour un piston rectangulaire de dimensions $0.455m \times 0.375m$ rayonnant dans l'air, en termes de résistance de rayonnement normalisée et de réactance de rayonnement normalisée. Les relations (6.45) et (6.46) ont été calculées avec divers ordres de développement, $k = 0$ ("tayl = 0"), $k = 3$ ("tayl = 3"), $k = 6$ ("tayl = 6"), $k = 8$ ("tayl = 8"), et les résultats de

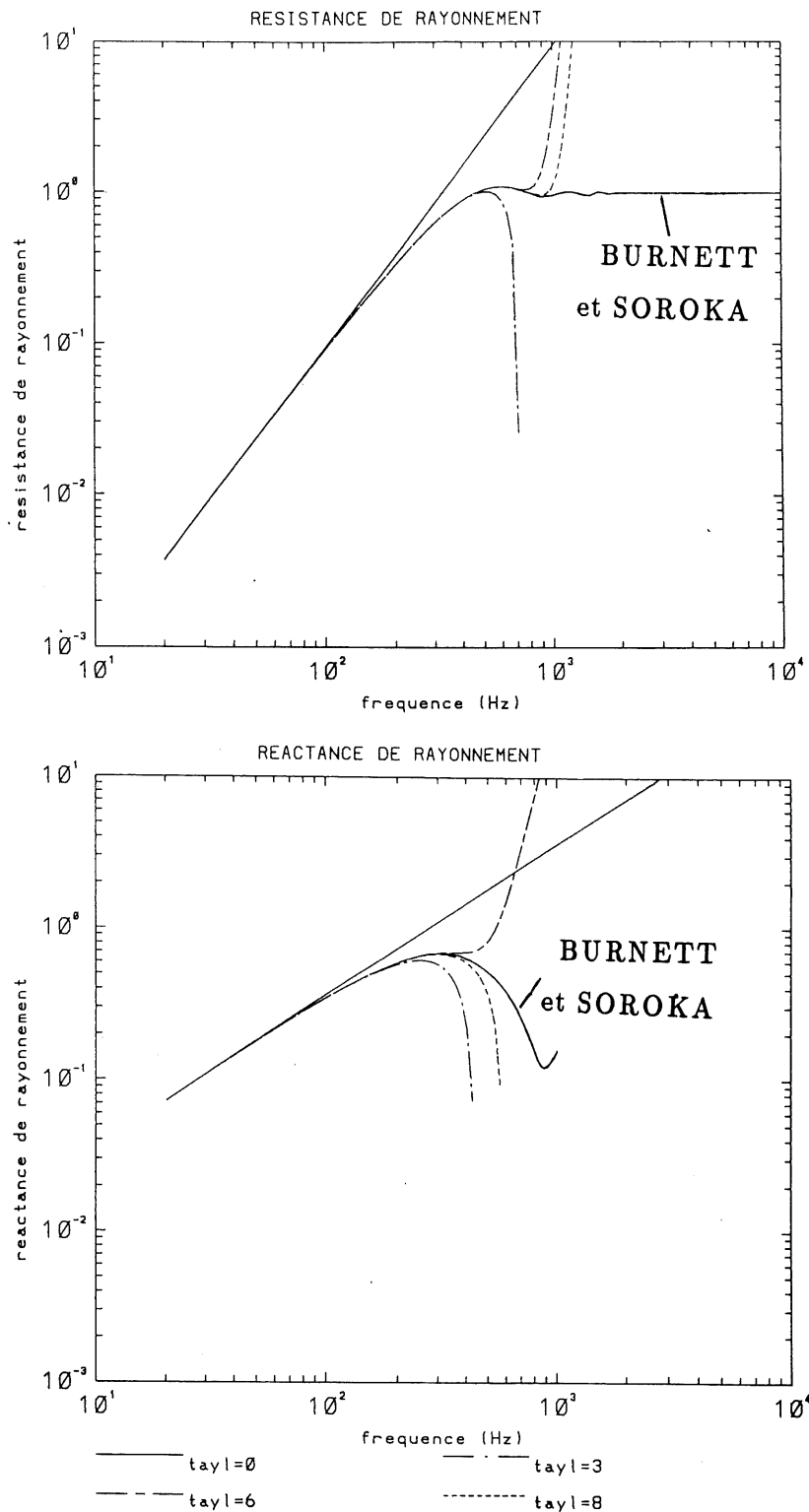


Figure 6.2: Résistance et réactance de rayonnement d'un piston rectangulaire dans l'air. Comparaison entre les relations (6.45), (6.46) calculées pour divers ordres de développement de G , et les données de BURNETT et SOROKA

BURNETT et SOROKA ont été reportés à titre de comparaison. La comparaison est très satisfaisante en basses fréquences, et le domaine de validité des développements (6.45) et (6.46) peut être étendu en augmentant l'ordre maximal des développements. On remarque que pour $k = 6$, la solution exacte est convenablement reconstruite jusqu'à la fréquence critique du piston (résistance de rayonnement maximale).

6.7 Conclusions

Le but de ce chapitre était l'extension au cas d'un fluide lourd du modèle de rayonnement par une structure plane complexe, exposé au chapitre 3, et limité jusqu'ici au cas d'un fluide léger. Cette seconde étape de la modélisation est motivée par les applications importantes de rayonnement acoustique dans l'eau par les structures marines. Il s'agit d'un problème complexe au niveau théorique car le comportement de la structure et du fluide sont alors fortement couplés. Ce couplage n'ayant été résolu jusqu'ici que dans des cas simples (plaque rectangulaire en appui simple), il a été nécessaire d'étendre l'analyse au cas des structures complexes considérées dans ce travail. Cet effort a abouti à une méthode originale pour le calcul des impédances de rayonnement de plaques rectangulaires complexes. Cette méthode constitue, à notre sens, un progrès important par rapport aux connaissances existantes, ses principaux avantages étant:

- Prise en compte de conditions aux limites arbitraires sur le contour de la plaque. Ceci rend la méthode plus générale que celles disponibles actuellement.
- Solution analytique des impédances de rayonnement, d'où des temps de calcul réduits par rapport aux méthodes purement numériques, et des possibilités d'interpréter physiquement les résultats (décomposition de la structure en multipôles de rayonnement, solutions asymptotiques basses fréquences, ...).
- Précision contrôlable de la solution.
- Développement de la solution en coefficients de couplage spatial qui ne dépendent pour une structure rectangulaire que de l'allongement $r = a/b$ de la plaque. Ces coefficients peuvent donc être "précalculés" pour être utilisés ultérieurement, ce qui au-

torise des gains de temps-calcul importants par exemple dans un processus d'optimisation des paramètres mécaniques de la structure en vue de minimiser la puissance rayonnée.

Le modèle développé et testé dans ce chapitre est exploité au chapitre qui suit pour étudier le rayonnement et les possibilités de discrétion acoustique dans l'eau.

Chapitre 7

Résultats en fluide lourd —

Incidence des paramètres structuraux sur les vibrations et le bruit rayonné dans l'eau

7.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'analyser l'influence des principaux paramètres structuraux sur les vibrations et le bruit rayonné par une plaque rectangulaire immergée dans l'eau. Cette analyse est effectuée à partir des développements théoriques exposés au chapitre précédent, et suppose donc, entre autres, que la structure est bafflée et que la force excitatrice est indépendante de la fréquence, et ne change pas lorsque les caractéristiques mécaniques de la structure varient. L'étude est menée sur la base d'indicateurs vibroacoustiques *globaux* – vitesse vibratoire quadratique, efficacité de rayonnement, puissance acoustique rayonnée dans le fluide –, et se situe dans un contexte de *discrétion acoustique* de la structure, de sorte que l'indicateur significatif en dernière analyse est la puissance rayonnée. L'analyse *locale* des phénomènes de rayonnement dans l'eau, par exemple à partir de la pression rayonnée en un point du champ lointain, bien qu'accessible au modèle développé, sort du cadre de la discussion.

Les résultats présentés dans ce chapitre concernent successivement les effets spécifiquement liés au fluide, l'influence des conditions aux limites de la structure, du rajout ponctuel de masse ou de raideur, du rajout de raidisseurs. Ces résultats sont dans une large part une extension de ceux présentés dans l'air au chapitre 4 et doivent être mis en parallèle avec eux.

7.2 Effets liés au fluide – Amortissement par rayonnement et masse rajoutée

Lorsqu'une structure est immergée dans un milieu fluide dense, ce fluide modifie la réponse dynamique de la structure, en rajoutant de l'inertie (masse rajoutée), et en prélevant de l'énergie acoustique à la structure (amortissement par rayonnement). L'hypothèse de fluide léger, retenue au long de la première partie de cette étude, consiste à négliger cette modification pour la structure, ce qui revient à: (i) calculer la réponse vibratoire *in-vacuo*; (ii) calculer le bruit rayonné à partir de la réponse *in-vacuo*. Pour l'air, une telle hypothèse est légitime en ce qui concerne l'effet de masse rajoutée si la structure est suffisamment massive. Par contre, même dans l'air, l'amortissement par rayonnement peut affecter notablement la réponse de la structure aux résonances; c'est donc un des paramètres qui contrôlent les niveaux vibratoires et acoustiques en cas d'excitation large bande, à moins que l'amortissement structural soit grand.

Les développements théoriques effectués au chapitre précédent permettent à présent d'éclaircir ces questions et de chiffrer avec précision, dans une situation donnée la valeur de l'amortissement par rayonnement et de la masse rajoutée par le fluide. Il est usuel de présenter ces effets en termes de résistances modales de rayonnement, et de réactances modales de rayonnement, dont la définition et l'interprétation ont été données au chapitre 6. On rappelle simplement que les résistances et réactances modales directes illustrent le couplage par le fluide d'un mode structural *in-vacuo* avec lui-même, tandis que les résistances et réactances modales croisées (ou intermodales) illustrent le couplage entre deux modes distincts.

On présente ici un exemple simple pour illustrer les phénomènes. Il s'agit d'une plaque en acier de dimensions $1m \times 0.5m$, bafflée et simplement appuyée sur son contour. On sait qu'alors les fonctions propres *in-vacuo* sont de simples fonctions sinusoïdales de x et de y . Le demi-espace $z > 0$ est de l'eau ($\rho_0 = 1000kg/m^3$, $c_0 = 1460m/s$). Les résistances et les réactances modales de rayonnement sont calculées pour différents modes *in-vacuo* de la plaque selon les relations (7.42) et (7.43). Le cas présenté est identique à un cas déjà rapporté dans la littérature par LOMAS et HAYEK [47].

7.2.1 Résistances et réactances modales de rayonnement, directes

La figure 7.1 montre les résistances et les réactances de rayonnement directes normalisées, pour les premiers modes de la plaque [modes (1-1), (2-1), (1-2), (3-1)], en fonction de la fréquence. La figure 7.2 présente les résultats correspondants pour les quelques modes suivants [modes (2-2), (4-1), (5-1)].

Les résultats en terme de résistance de rayonnement sont consistents avec les facteurs de rayonnement modaux correspondants présentés au chapitre 4 (figure 4.1), et calculés par une voie différente. Les tendances en basses fréquences montrent que, parmi les modes sélectionnés, les modes (impair-impair) rayonnent comme des monopôles, les modes (pair-impair) ou (impair-pair) comme des dipôles et les modes (pair-pair) comme des quadripôles. Les résultats en termes de réactance de rayonnement indiquent que, dans tous les cas, l'effet de masse rajoutée est proportionnel à la fréquence en basses fréquences. On peut noter qu'en outre, en basses fréquences, la réactance de rayonnement est très supérieure à la résistance de rayonnement (jusqu'à 1000 fois). Dans ces conditions, l'effet prédominant du fluide est donc celui de masse rajoutée; c'est le domaine fréquentiel où le fluide peut être considéré comme incompressible, ce qui est bien compatible avec l'hypothèse de LAPLACE. Les calculs effectués à plus hautes fréquences montrent que les résistances modales tendent vers 1, et que les réactances modales passent par un maximum, puis décroissent pour tendre vers 0. Ceci indique qu'en hautes fréquences, c'est l'effet d'amortissement par rayonnement qui domine sur l'effet de masse rajoutée, l'impédance de rayonnement de la structure de-

vient purement résistive, et pratiquement égale à l'impédance spécifique du fluide; c'est la condition qui caractérise un fort rayonnement acoustique de la structure.

Les valeurs numériques des résistances et des réactances de rayonnement pour tous les modes présentés dans cette section se sont avérées être en parfait accord avec les résultats de LOMAS et HAYEK [47].

7.2.2 Résistances et réactances modales de rayonnement, croisées

Les résistances et réactances modales de rayonnement illustrent les phénomènes de couplage par le fluide entre modes *in-vacuo* distincts. On rappelle que deux modes de parités différentes ne sont pas couplés par le fluide. La résistance et la réactance croisée pour les modes (m, n) et (p, q) ne sont donc non nulles que dans la mesure où $(m + p)$ et $(n + q)$ sont pairs. La figure 7.3 montre les résultats pour les premiers modes (impair-impair) de la plaque [couplage entre les modes (1-1) et (3-1), (1-1) et (1-3), (3-1) et (1-3)]. La figure 7.4 présente les résultats correspondants pour des modes (pair-impair) [couplage entre les modes (2-1) et (4-1)], et pour des modes (impair-pair) [couplage entre les modes (1-2) et (3-2)].

La figure 7.3.a montre que la résistance intermodale est une fonction oscillante qui peut prendre, suivant la fréquence, des valeurs positives ou négatives (les valeurs reportées représentent en fait la résistance de rayonnement en valeur absolue, et le creux visible à hautes fréquences sur les courbes de la figure 7.3.a correspond à un changement de signe de la résistance de rayonnement; la valeur est positive en basses fréquences, négative après le creux). Cette particularité signifie physiquement que, suivant la fréquence, le couplage de deux modes crée un flux d'énergie dirigé, soit de la plaque vers le fluide, soit du fluide vers la plaque. On constate d'autre part que le couplage entre les modes (impair-impair) représentés résulte en un rayonnement de type monopolaire (figure 7.3.a), alors que le couplage entre les modes (pair-impair) ou (impair-pair) représentés résulte en un rayonnement de type dipolaire (figure 7.4.a). Il est important de noter qu'en basses fréquences,

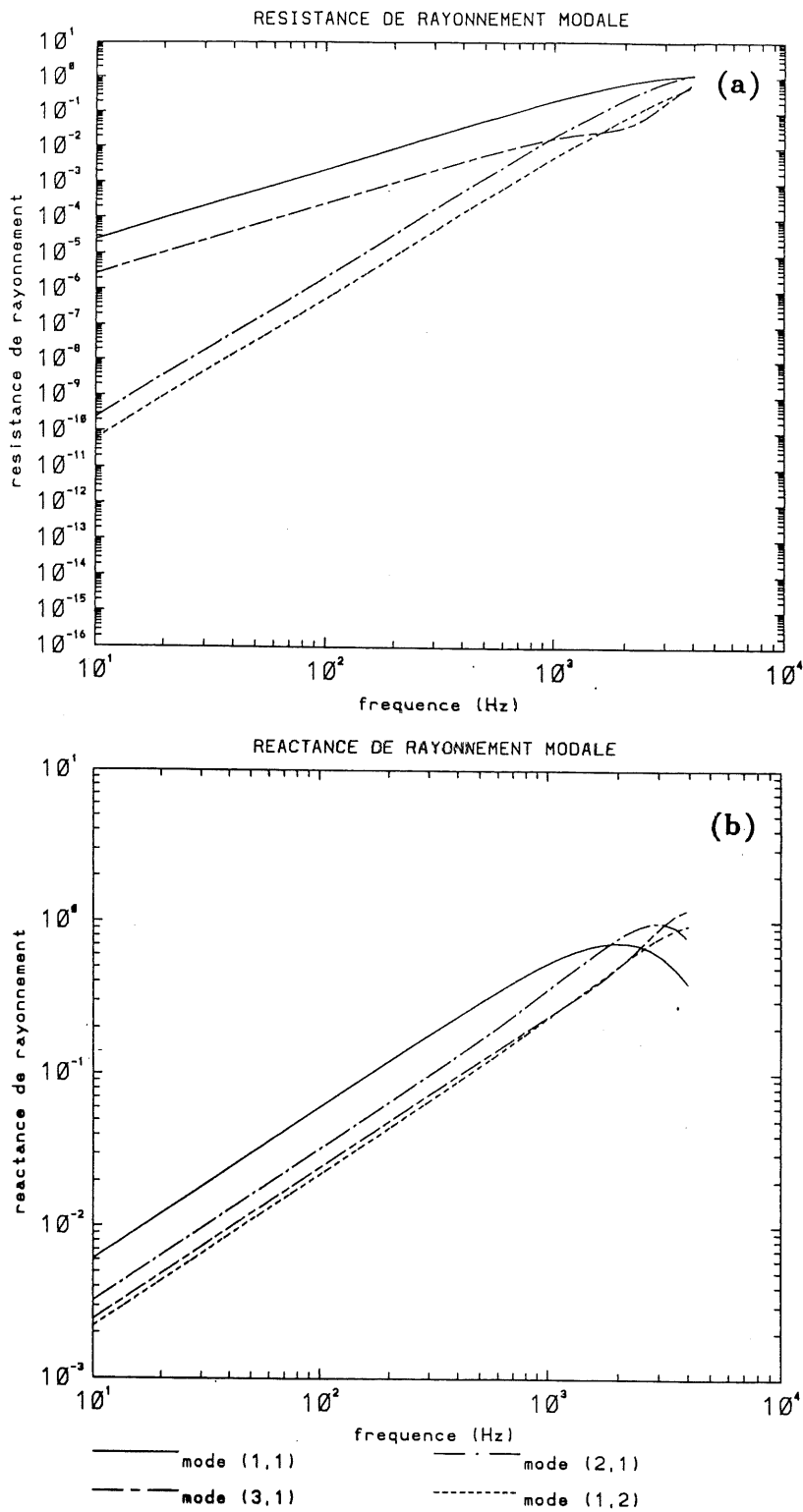


Figure 7.1: Impédances de rayonnement directes pour les modes (1-1), (2-1), (1-2), (3-1) d'une plaque en appui simple immergée dans l'eau. (a) résistances de rayonnement; (b) réactances de rayonnement

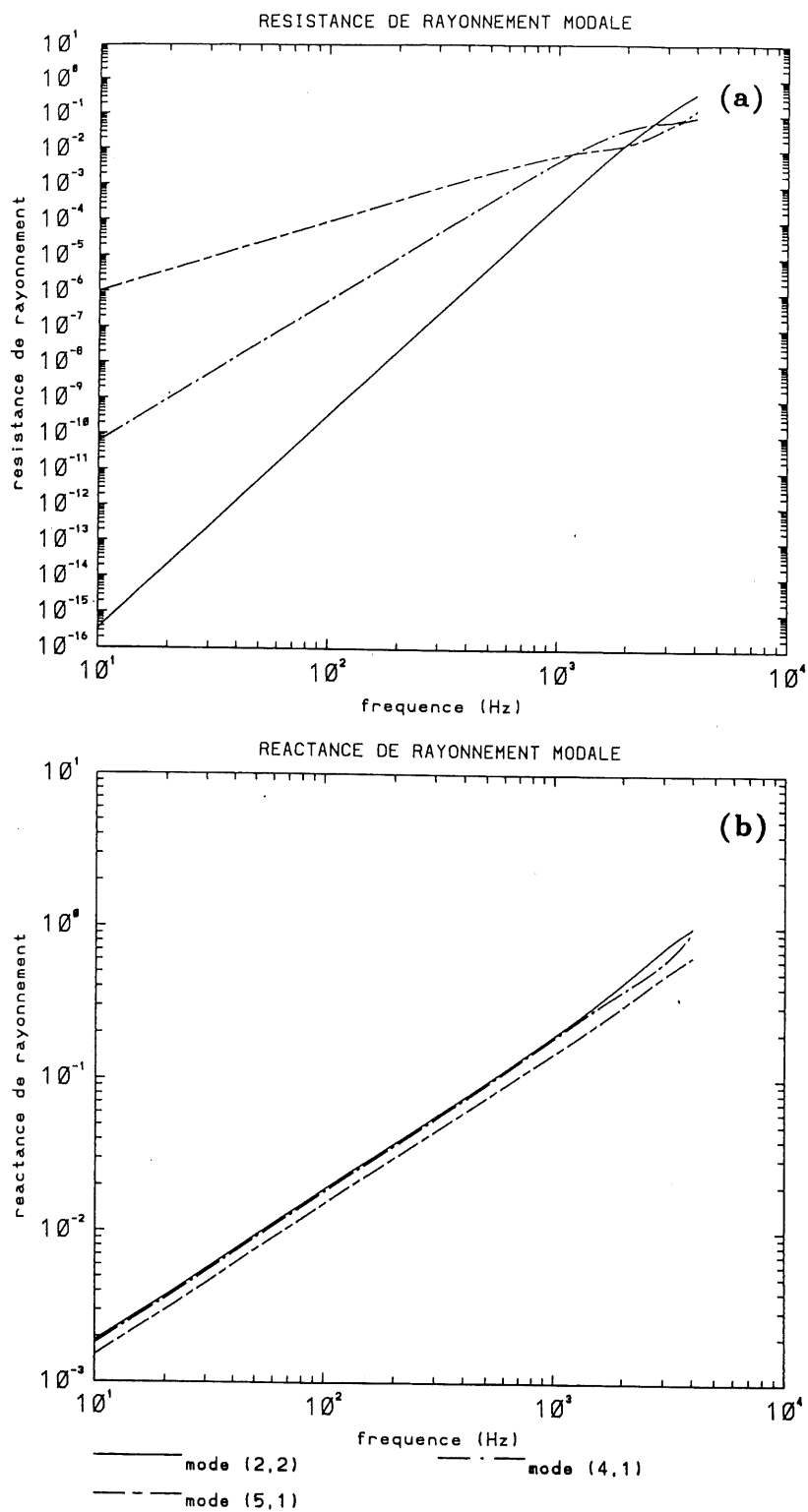


Figure 7.2: Impédances de rayonnement directes pour les modes (2-2), (4-1), (5-1) d'une plaque en appui simple immergée dans l'eau. (a) résistances de rayonnement; (b) réactances de rayonnement

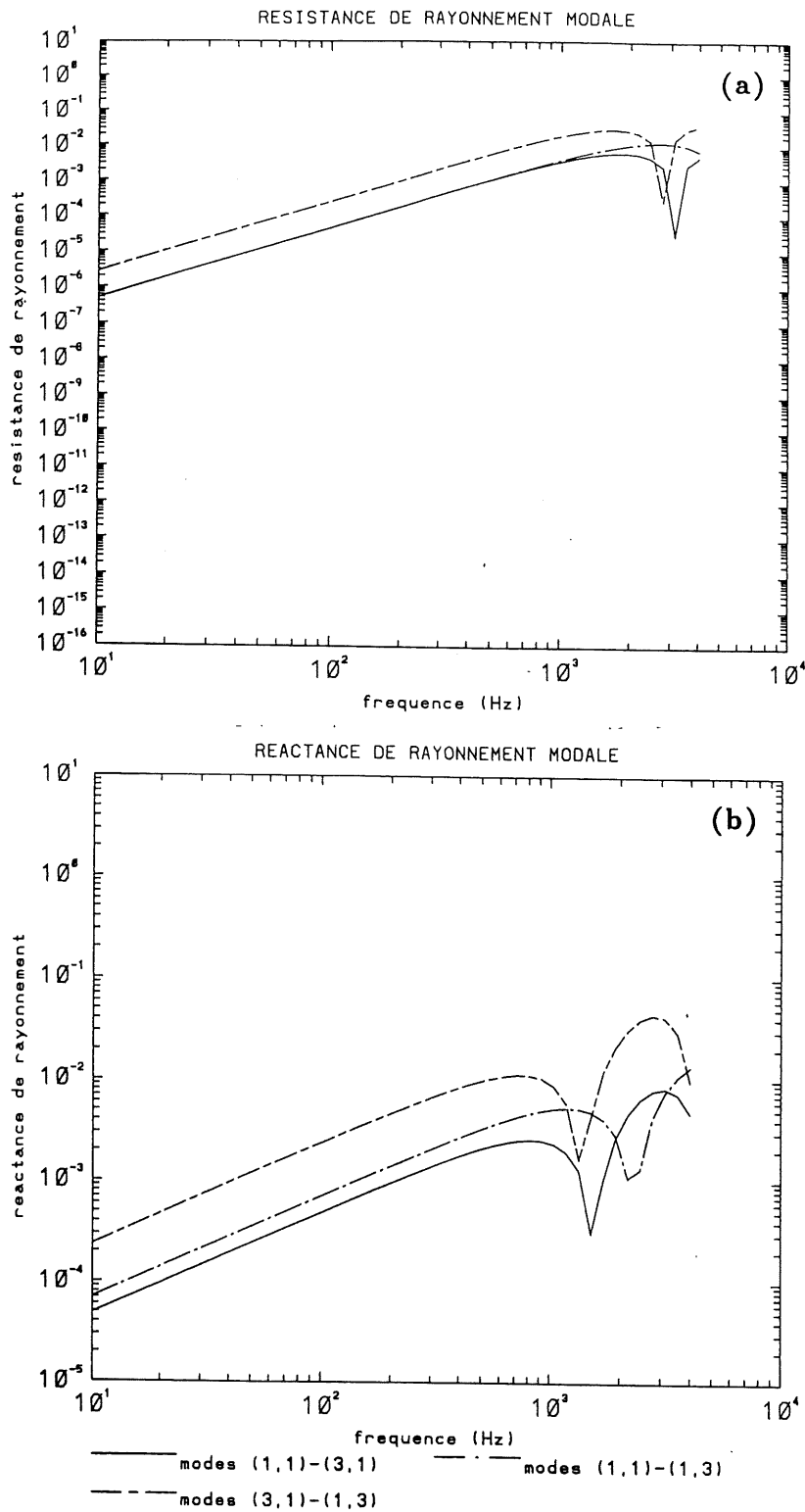


Figure 7.3: Impédances de rayonnement croisées pour les modes (1-1) et (3-1), (1-1) et (1-3), (3-1) et (1-3) d'une plaque en appui simple immergée dans l'eau. (a) résistances de rayonnement; (b) réactances de rayonnement

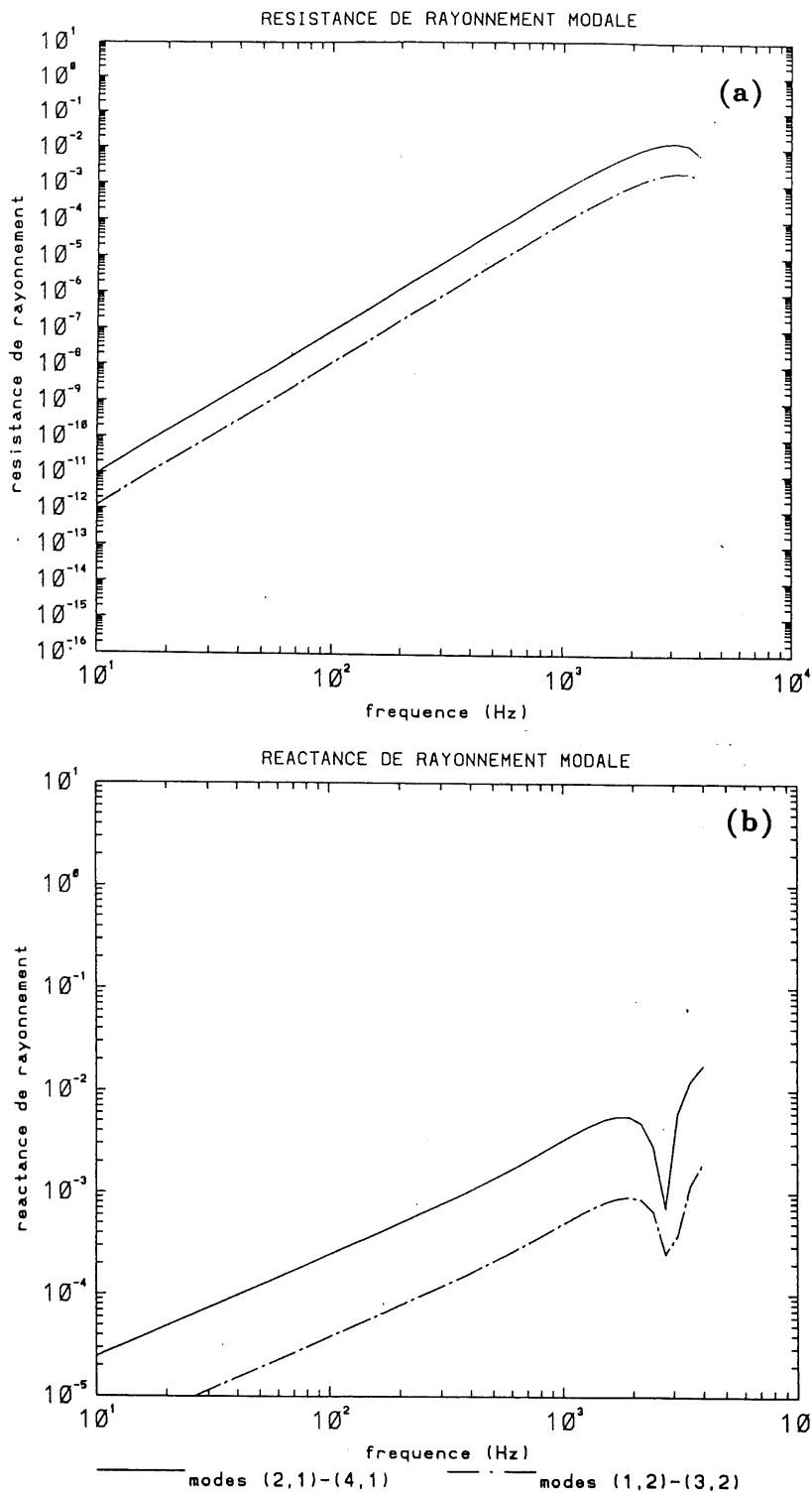


Figure 7.4: Impédances de rayonnement croisées pour les modes (2-1) et (4-1), (1-2) et (3-2) d'une plaque en appui simple immergée dans l'eau. (a) résistances de rayonnement; (b) réactances de rayonnement

la résistance intermodale de rayonnement est du même ordre de grandeur que la résistance modale directe pour les modes considérés, ce qui signifie qu'une part non négligeable de la puissance rayonnée est due au couplage des modes *in-vacuo* de la structure; *en général, la puissance rayonnée n'est donc pas simplement la somme des puissances rayonnées par chacun des modes pris séparément.* Une telle conclusion corrobore les résultats démontrés par KELTIE et PENG [31].

Les réactances de rayonnement intermodales sont, comme les réactances de rayonnement modales, proportionnelles à la fréquence en basses fréquences. En hautes fréquences ce sont également des fonctions oscillantes qui peuvent prendre des valeurs positives ou négatives. Elles restent en valeur absolue beaucoup plus faibles que les réactances modales directes (de 10 à 100 fois), ce qui montre que *l'effet de masse rajoutée par le fluide est relativement confiné aux termes diagonaux de la matrice d'impédance de rayonnement, et se traduit essentiellement par un auto-couplage des modes.*

7.3 Influence des conditions aux limites

On présente l'influence des conditions aux limites sur le rayonnement acoustique dans l'eau dans le cas d'une plaque rectangulaire en acier ayant les caractéristiques suivantes: $a = 0.455m$, $r = 1.21$ ($b = 0.375m$), $h = 1mm$, $\rho_s = 7850kgm^{-3}$, $D = 18Nm$, $\nu = 0.28$. La fréquence critique d'une telle plaque dans l'eau est de $223kHz$. Les constantes physiques utilisées pour l'eau sont $\rho_0 = 1000kgm^{-3}$, $c_0 = 1460ms^{-1}$. Les résultats numériques présentés ici et dans la suite de ce chapitre ont été obtenus en utilisant 169 fonctions d'essai pour la méthode de Rayleigh-Ritz ($N=13$), et en développant le noyau de Green en série de Taylor à l'ordre 17 (troncature à l'ordre 8 de la série (6.23)). Avec un tel ordre de développement du noyau de Green, la fréquence maximale de calcul estimée est d'environ $950Hz$ dans l'air, $4kHz$ dans l'eau.

Les figures 7.5 à 7.10 montrent respectivement les résultats obtenus pour des conditions aux limites d'appui simple, d'encastrement et de contour libre. L'excitation est une force ponctuelle de $1N$ au centre de la plaque, et le facteur de perte structural est $\eta_p = 0.01$.

Le cas d'une force au centre de la plaque est un cas particulier pour lequel seuls les modes symétriques participent à la réponse vibratoire et acoustique; on sait néanmoins que ces modes sont les plus efficaces en rayonnement, donc les plus significatifs du point de vue acoustique. Dans chaque cas les trois indicateurs vibroacoustiques suivants ont été calculés:

- (a) la vitesse quadratique de la structure, exprimée en m^2/s^2 ,
- (b) le facteur de rayonnement global de la structure,
- (c) la puissance acoustique rayonnée dans le fluide, exprimée en watts.

Pour chaque indicateur, les résultats obtenus dans l'eau ont été comparés avec ceux déjà calculés dans l'air.

7.3.1 Comparaison des résultats dans l'air et dans l'eau

Lorsque la plaque est immergée dans l'eau, on peut noter, indépendamment des conditions aux limites, les comportements suivants:

- la vitesse quadratique chute notablement, et les fréquences propres de la structure diminuent (la première résonance de la plaque immergée survient à une fréquence inférieure à $20Hz$, et n'est donc pas visible sur les courbes); ces tendances sont caractéristiques de l'effet de masse rajoutée par le fluide.
- le facteur de rayonnement est fortement réduit; la fréquence critique de la plaque étant beaucoup plus élevée dans l'eau que dans l'air ($223kHz$ dans l'eau et $12kHz$ dans l'air), le court-circuit acoustique est comparativement plus fort dans la gamme de fréquences présentée.
- malgré les effets cumulés d'une diminution du niveau vibratoire et d'une diminution de l'efficacité de rayonnement, la puissance rayonnée dans l'eau, exprimée en watts, est comparable en moyenne à la puissance rayonnée dans l'air. Ceci se justifie par la relation de proportionnalité entre la puissance rayonnée et l'impédance spécifique du fluide ($\rho_0 c_0$), qui est 3500 fois plus élevée dans l'eau que dans l'air.

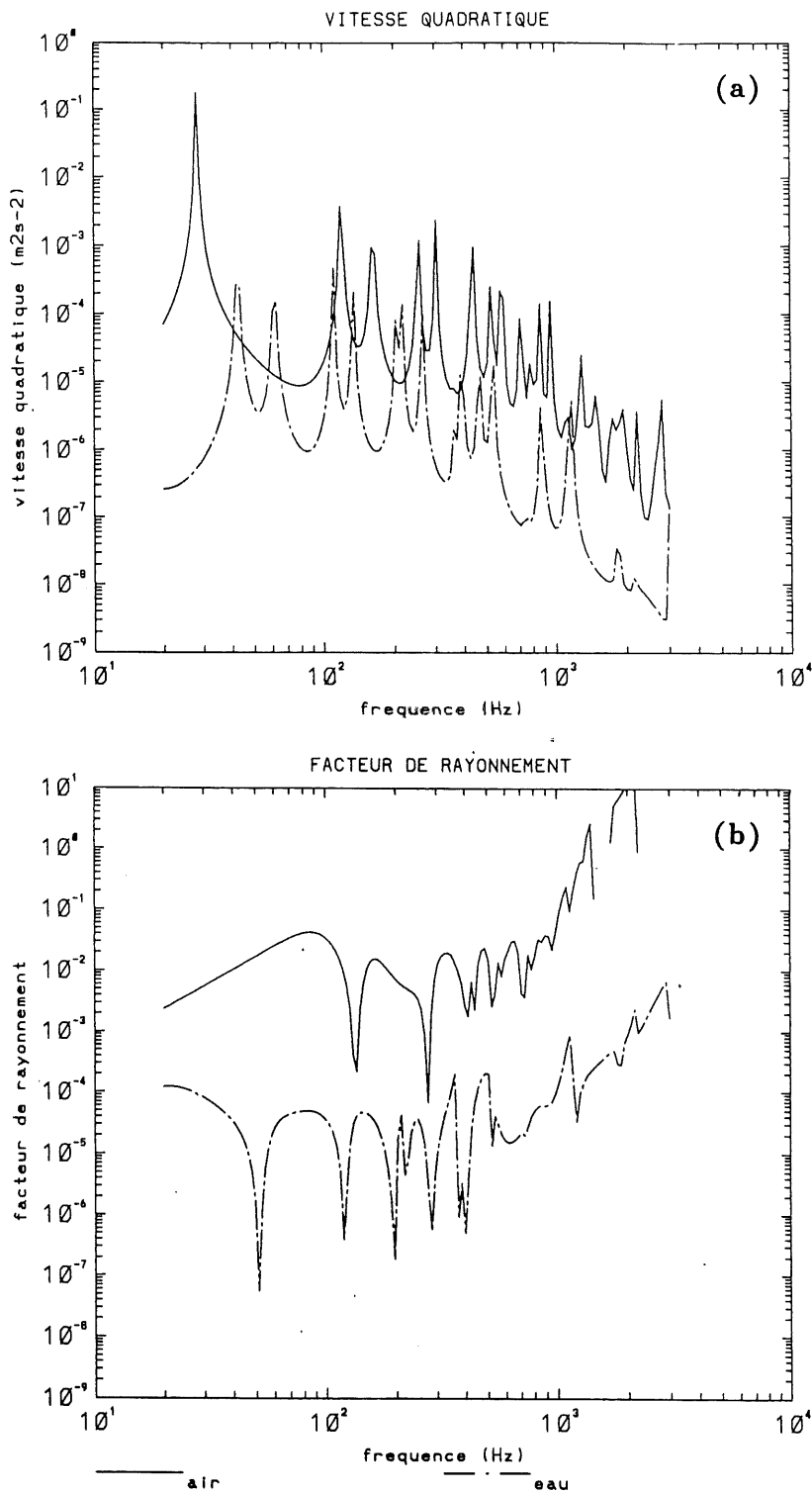


Figure 7.5: Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire en appui simple, comparaison des résultats dans l'air et dans l'eau; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

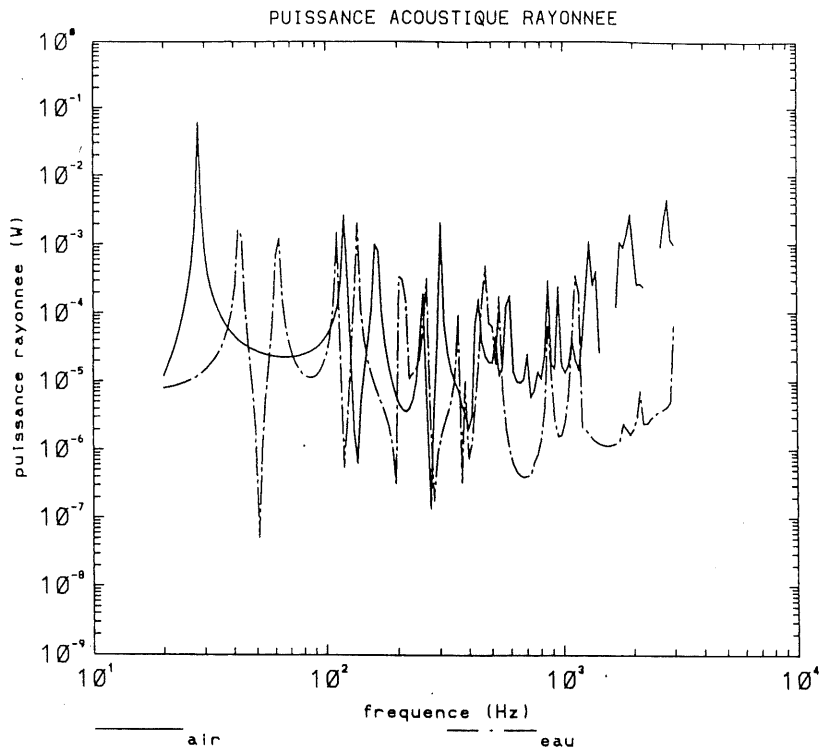


Figure 7.6: Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire en appui simple, comparaison des résultats dans l'air et dans l'eau.

7.3.2 Influence des conditions aux limites dans l'eau

En comparant entre eux les résultats obtenus dans l'eau pour les conditions d'appui simple, d'encastrement et de contour libre, on note que:

- la réponse vibratoire dans la région des modes propres est, en moyenne, peu affectée par les conditions aux limites de la structure (figures 7.5.a, 7.7.a, 7.9.a).
- l'efficacité de rayonnement est sensiblement la même dans les cas d'appui simple et d'encastrement (figures 7.5.b et 7.7.b); par contre, elle est comparativement très faible lorsque le contour est libre (figure 7.9.b).
- en corollaire, le niveau de puissance rayonnée dans l'eau est, en moyenne, peu modifié en passant de l'appui simple à l'encastrement (figures 7.6 et 7.8). Il est par contre spectaculairement diminué par des conditions au limites libres (figure 7.10), comme dans le cas de l'air. On peut noter cependant que le comportement acoustique d'une plaque libre est très différent dans l'air et dans l'eau. On sait (voir chapitre 4) que dans

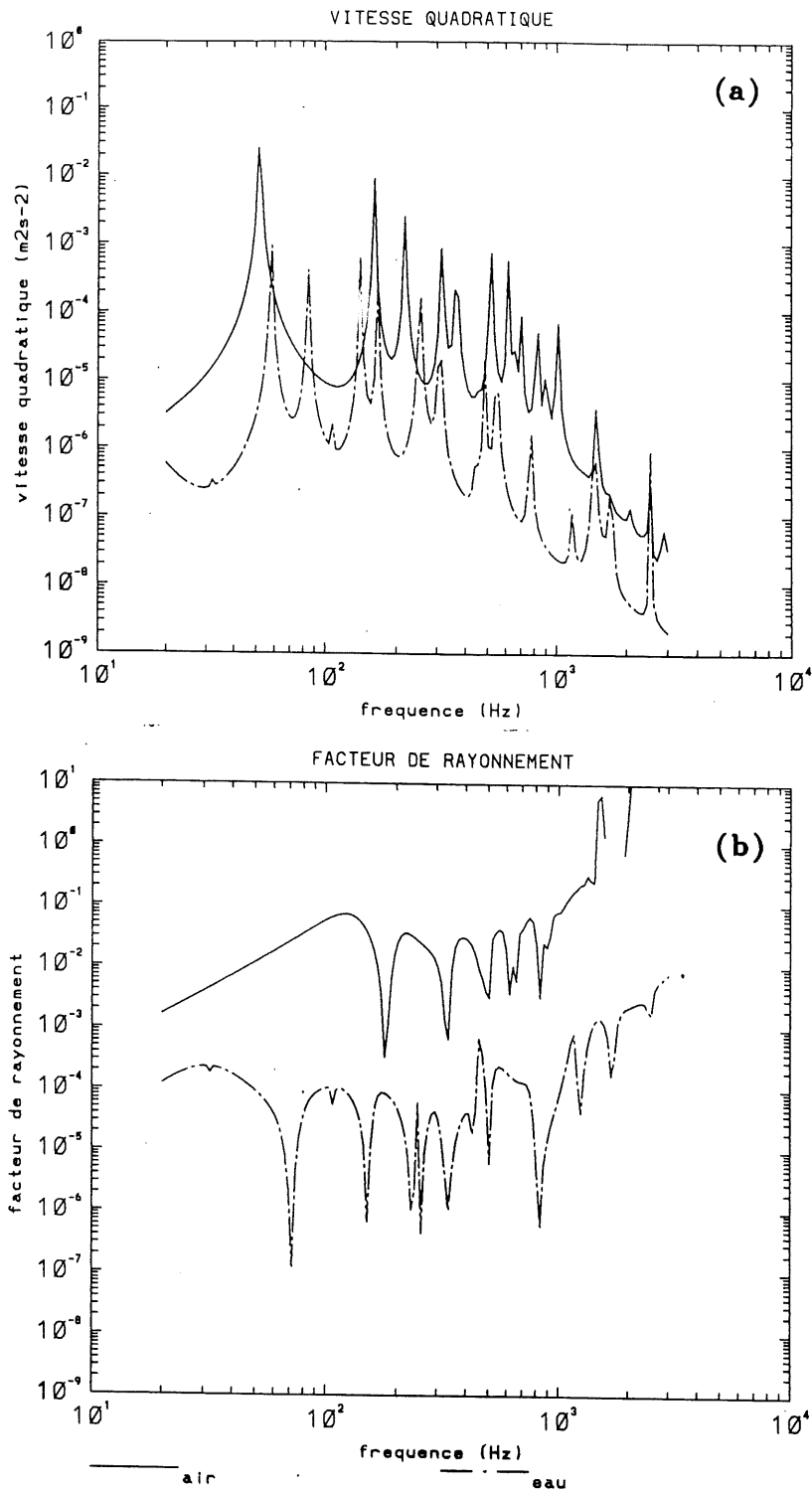


Figure 7.7: Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire encastrée, comparaison des résultats dans l'air et dans l'eau; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

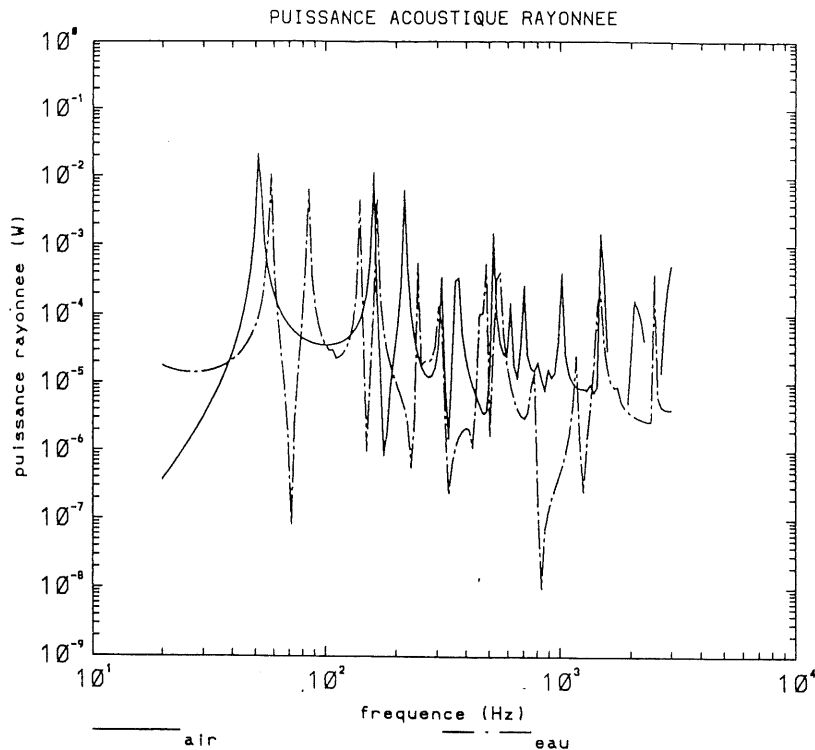


Figure 7.8: Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire encastrée, comparaison des résultats dans l'air et dans l'eau.

le cas de l'air, le rayonnement acoustique est dominé par le mode "piston" de la plaque, qui masque le rayonnement des modes élastiques et produit un spectre de puissance rayonnée relativement plat. Dans le cas de l'eau au contraire, les modes élastiques émergent clairement du spectre de puissance; l'explication possible de ce phénomène est la forte atténuation du mode "piston" de la plaque, du fait de la masse rajoutée par le fluide (proportionnelle à Ω) et de l'amortissement par rayonnement (proportionnel à Ω^2). Ces effets font rapidement décroître la contribution du mouvement de "piston" au niveau vibratoire à mesure que la fréquence croît; ce sont alors les modes élastiques, faiblement rayonnants mais fortement excités, qui contrôlent la réponse acoustique de la plaque.

En conclusion, le paramètre qui contrôle le rayonnement acoustique aussi bien dans l'air que dans l'eau s'avère être la rigidité en déflexion des contours de la plaque.

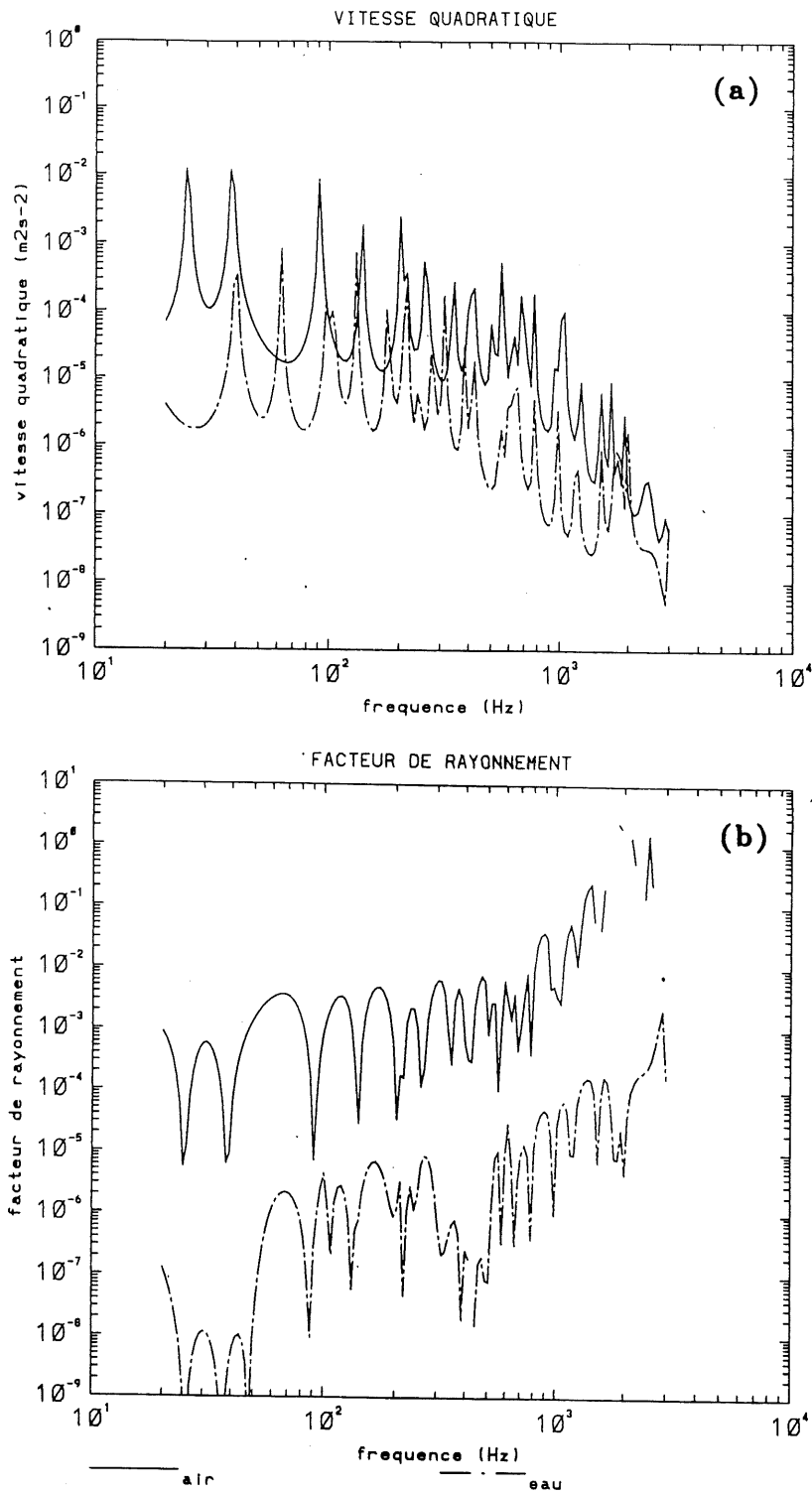


Figure 7.9: Réponse vibratoire et rayonnement d'une plaque rectangulaire libre, comparaison des résultats dans l'air et dans l'eau; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

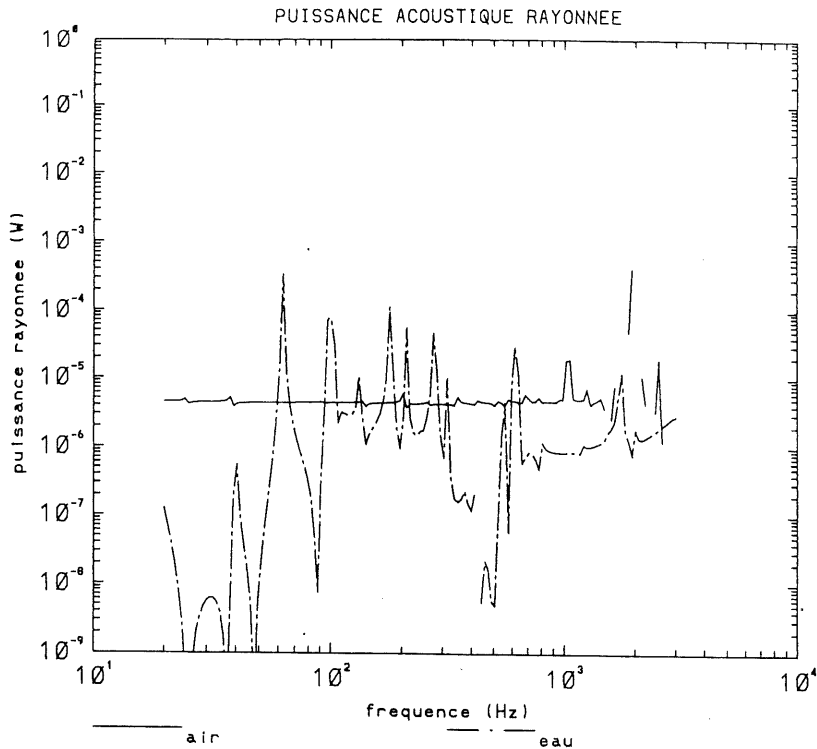


Figure 7.10: Puissance rayonnée par une plaque rectangulaire libre, comparaison des résultats dans l'air et dans l'eau.

7.4 Influence du rajout ponctuel de masse ou de raideur

7.4.1 Rajout ponctuel de masse

Les figures 7.11 et 7.12 présentent la réponse vibratoire et le rayonnement dans l'eau de la plaque excitée en son centre par une force ponctuelle de $1N$, pour divers taux croissants de masse rajoutée au point d'excitation, $\mu = 0$, $\mu = 0.1$, $\mu = 0.2$ et $\mu = 0.5$, entre $20Hz$ et $3kHz$. On rappelle que le taux de masse rajoutée est défini comme le rapport de la masse rajoutée à la masse de la plaque seule. Les résultats présentés concernent la vitesse vibratoire quadratique de la structure, l'efficacité de rayonnement et la puissance rayée dans l'eau. Les conditions aux limites simulées sont des appuis simples.

L'addition de masse au point d'excitation fait chûter le niveau vibratoire moyen de la structure en hautes fréquences (figure 7.11.a) en augmentant l'impédance mécanique de la

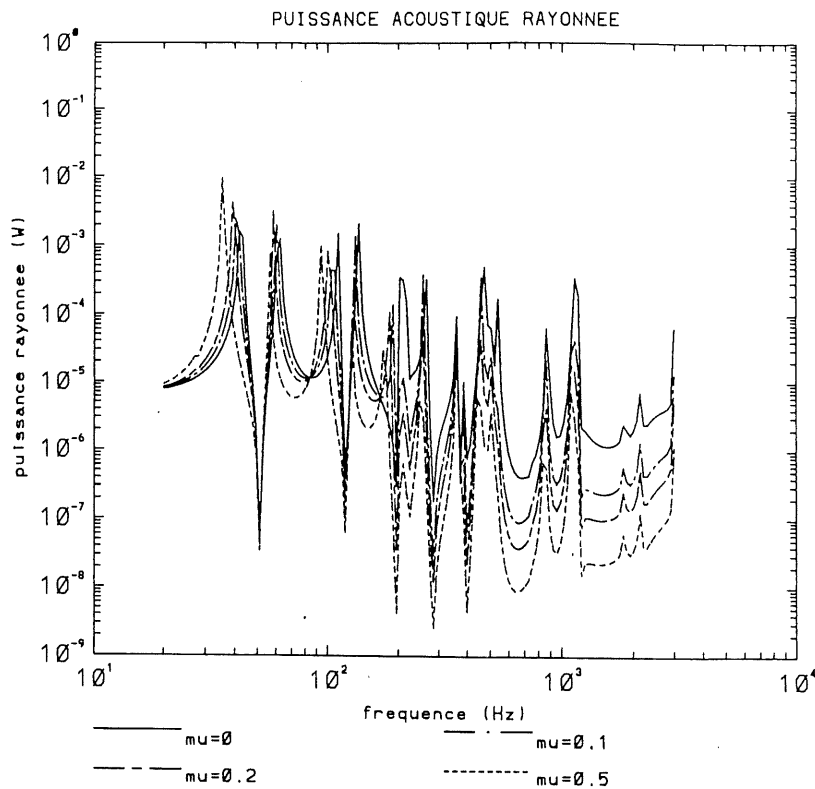


Figure 7.12: Puissance rayonnée dans l'eau par une plaque rectangulaire sur appui simple, pour différentes masses ponctuelles rajoutées au point d'excitation.

structure. On sait déjà que l'adjonction de masse agit favorablement sur le niveau vibratoire et le bruit rayonné dans la mesure où l'impédance propre de la masse (proportionnelle à la valeur de la masse et à Ω) est supérieure à l'impédance mécanique de la plaque. L'impédance mécanique de la plaque étant augmentée par la charge fluide, il faut s'attendre à ce que l'effet bénéfique d'une masse ajoutée sous la force soit comparativement moins grand pour une plaque immergée dans l'eau que pour une plaque *in-vacuo* ou dans l'air. Ceci peut être vérifié si l'on compare les résultats obtenus dans l'eau (figure 7.11.a) et dans l'air (figure 4.8.a, chapitre 4), toutes choses étant égales par ailleurs: la diminution du niveau vibratoire est moins importante dans l'eau, et la gamme de fréquences où ce niveau est diminué est moins étendue.

Le facteur de rayonnement de la structure est indépendant du taux de masse rajoutée, et identique à celui de la plaque nue (figure 7.11.b), en vertu du fait que toute modification de la structure au niveau de la force excitatrice ne modifie pas l'efficacité de celle-ci à

rayonner. En conséquence, le gain acoustique obtenu par adjonction de masse au point d'excitation est rigoureusement identique au gain vibratoire. Le rajout de masse est une solution potentielle pour diminuer le bruit rayonné en hautes fréquences; pour un même gain de puissance rayonnée, le taux de masse rajoutée devra être plus grand dans l'eau que dans l'air.

7.4.2 Rajout ponctuel de raideur

Les figures 7.13 et 7.14 présentent la réponse vibratoire et acoustique de la plaque excitée en son centre par une force ponctuelle de $1N$, pour divers taux croissants κ de raideur rajoutée sur la structure au point d'excitation, $\kappa = 0$, $\kappa = 10^3$, $\kappa = 10^4$, $\kappa = 10^5$. Le taux de raideur κ est le paramètre sans dimension défini comme

$$\kappa = k \frac{a^2}{D}$$

où k est la raideur ajoutée (Nm^{-1}), et D est la rigidité de flexion de la plaque. Les conditions aux limites simulées sont des appuis simples.

L'addition de raideur au point d'excitation fait chûter le niveau vibratoire de la plaque en basses fréquences (figure 7.13.a), dans la région où l'impédance propre du ressort ajouté (proportionnelle à sa raideur et inversement proportionnelle à Ω) est supérieure à l'impédance mécanique de la plaque chargée par le fluide. Pour les mêmes raisons que celles exposées plus haut dans le cas d'une masse ponctuelle rajoutée, la zone fréquentielle où le niveau vibratoire est réduit doit être comparativement moins étendue dans l'eau que dans l'air, et l'amplitude des gains obtenus doit être moins importante. La comparaison avec les résultats obtenus dans l'air dans des conditions identiques (figure 4.12.a, chapitre 4) corrobore cette hypothèse.

Pour les mêmes raisons que celles exposées précédemment, l'efficacité de rayonnement de la structure n'est pas affectée par l'ajout ponctuel de raideur sous la force (figure 7.13.b); le gain réalisé en termes de puissance rayonnée (figure 7.14) est rigoureusement celui réalisé en termes de niveau vibratoire de la structure. Le rajout de raideur au point d'excitation

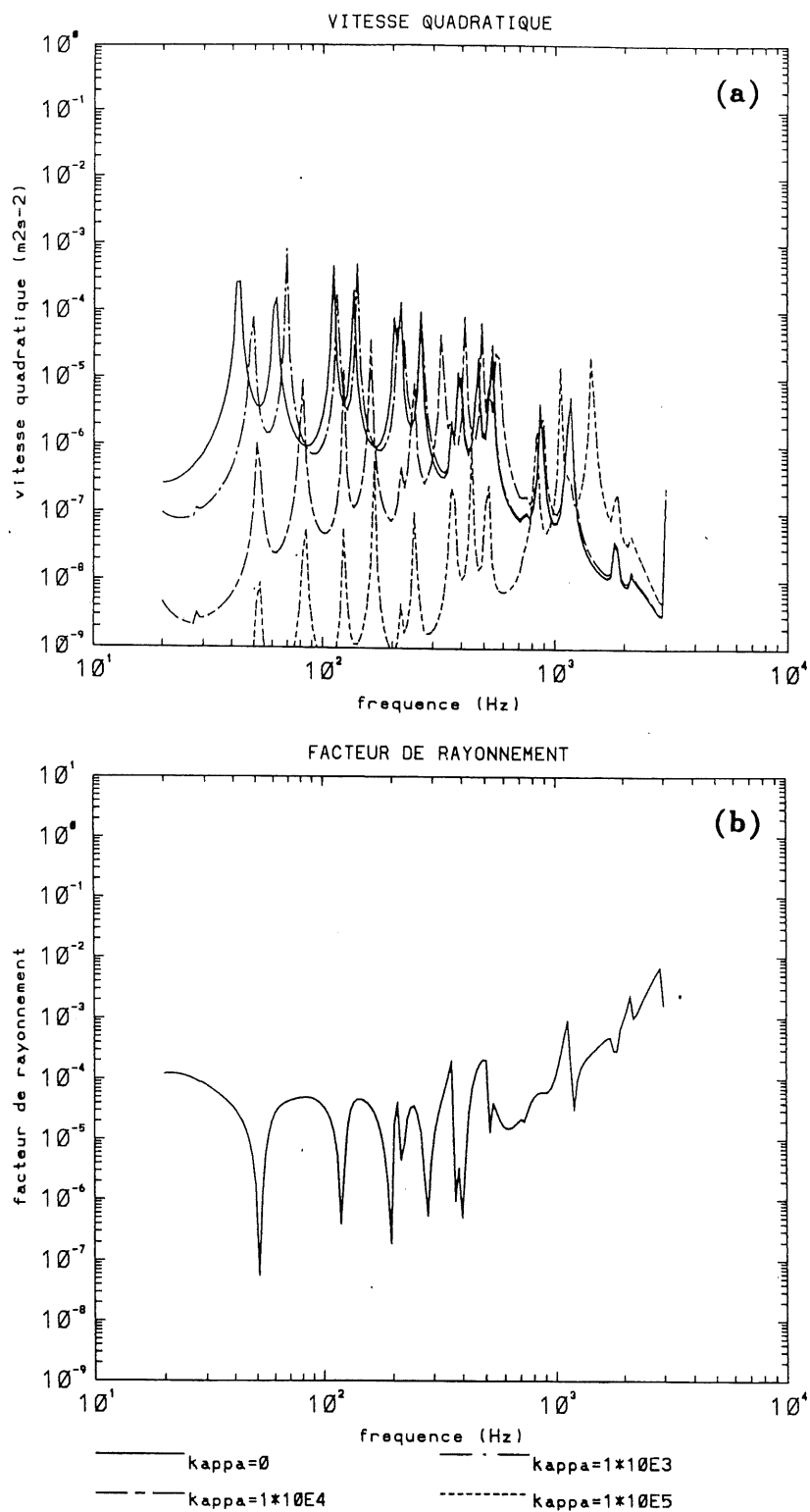


Figure 7.13: Réponse vibratoire et rayonnement dans l'eau d'une plaque rectangulaire sur appui simple, pour différentes raideurs ponctuelles rajoutées au point d'excitation; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

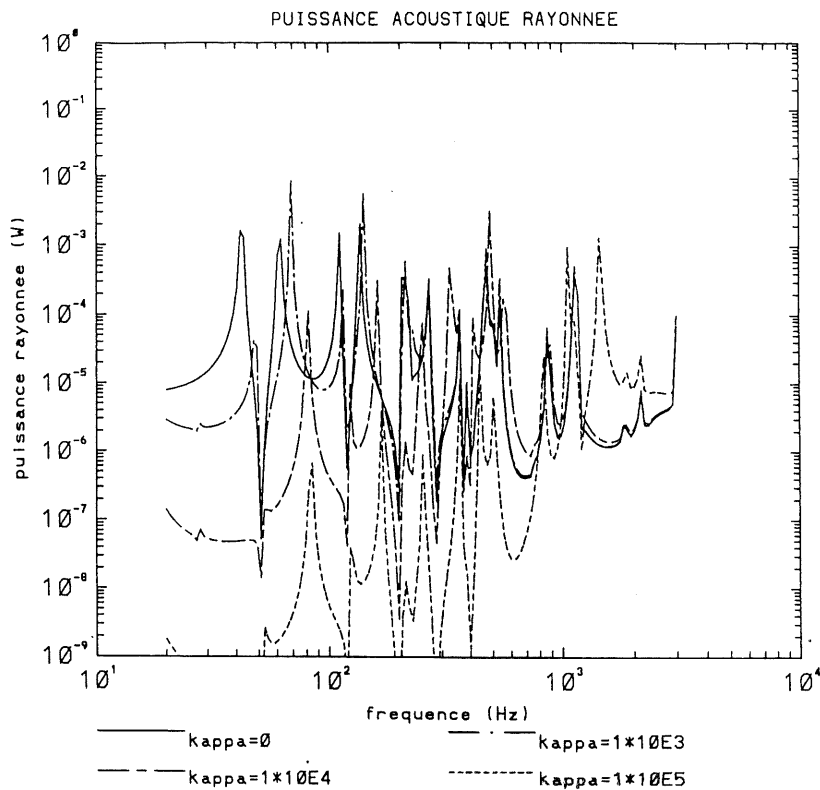
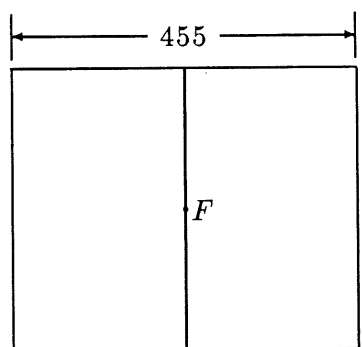
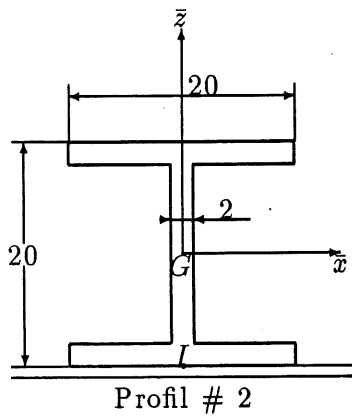


Figure 7.14: Puissance rayonnée dans l'eau par une plaque rectangulaire sur appui simple, pour différentes masses ponctuelles rajoutées au point d'excitation.

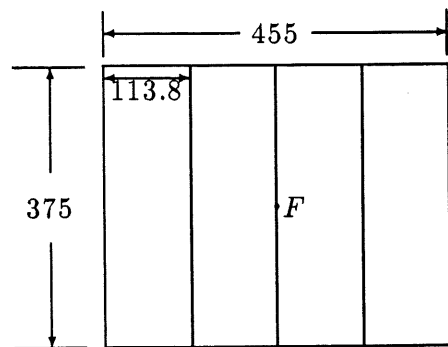
est donc une solution potentielle de réduction du bruit rayonné en basses fréquences; pour un même gain de puissance rayonnée, le taux de raideur rajoutée devra être plus grand dans l'eau que dans l'air.

7.5 Influence du rajout de raidisseurs

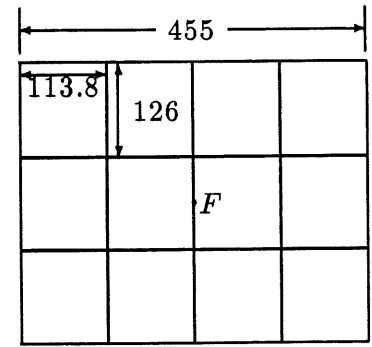
Cette section évalue l'adjonction d'éléments raidisseurs sur la structure comme moyen de contrôler passivement le bruit rayonné dans l'eau. La figure 7.15 décrit le profil et les trois configurations de raidisseurs qui ont été testées dans le calcul. Le matériau simulé pour les raidisseurs est l'acier. La première configuration inclut un seul raidisseur parallèle au petit côté de la plaque et passant par le centre de la plaque; la deuxième configuration inclut trois raidisseurs parallèles au petit côté de la plaque et régulièrement espacés; la troisième configuration inclut trois raidisseurs parallèles au petit côté et deux raidisseurs parallèles au grand côté de la plaque. Dans tous les cas, l'excitation est une force ponctuelle unitaire



Configuration 1 raidisseur



Configuration 3 raidisseurs



Configuration 5 raidisseurs

Figure 7.15: Profils et configurations des raidisseurs utilisés dans les calculs (les dimensions sont en *mm*).

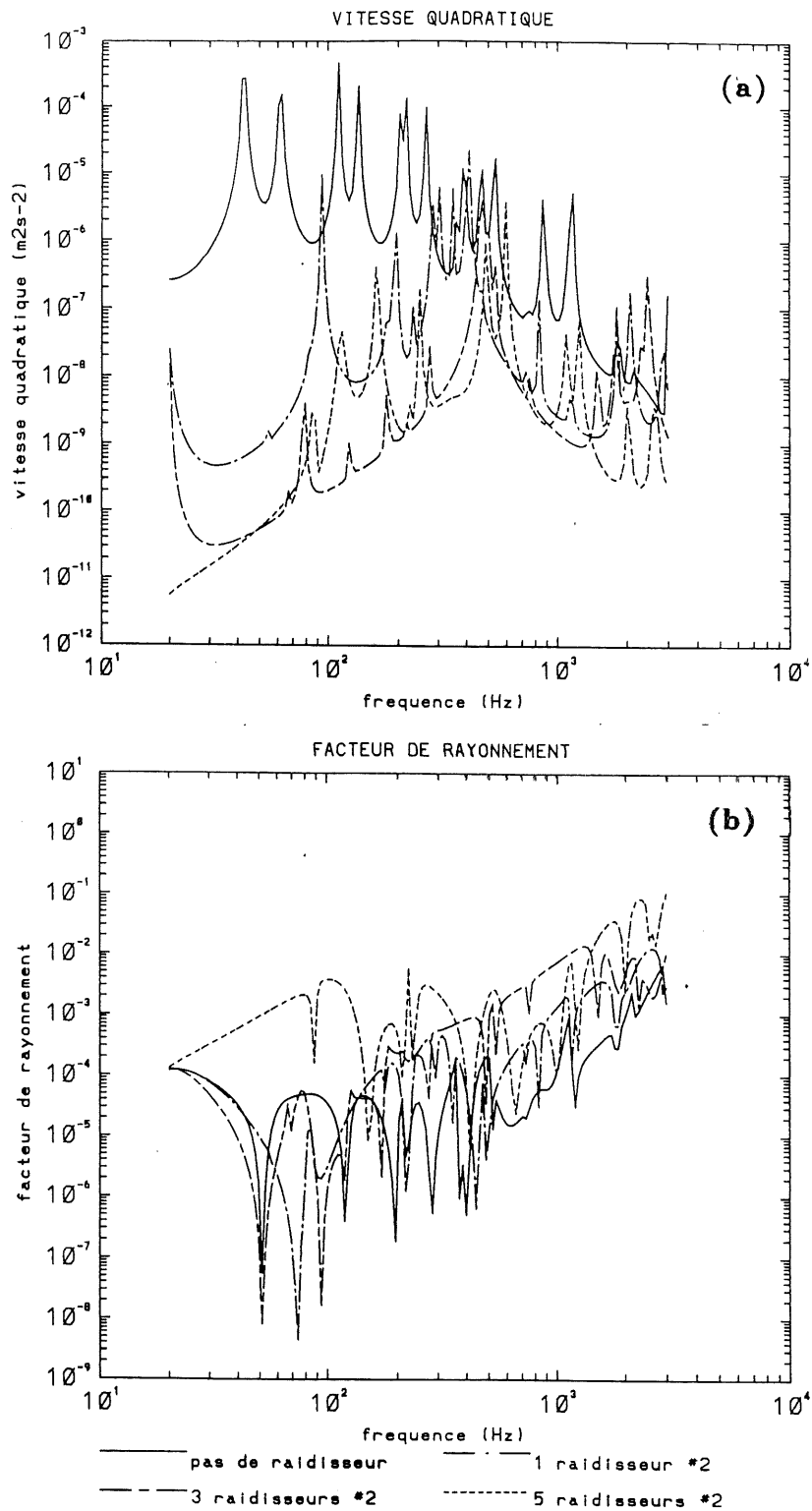


Figure 7.16: Réponse vibratoire et rayonnement dans l'eau d'une plaque rectangulaire sur appui simple, pour diverses implantations d'éléments raidisseurs; (a) vitesse quadratique de plaque, (b) efficacité de rayonnement.

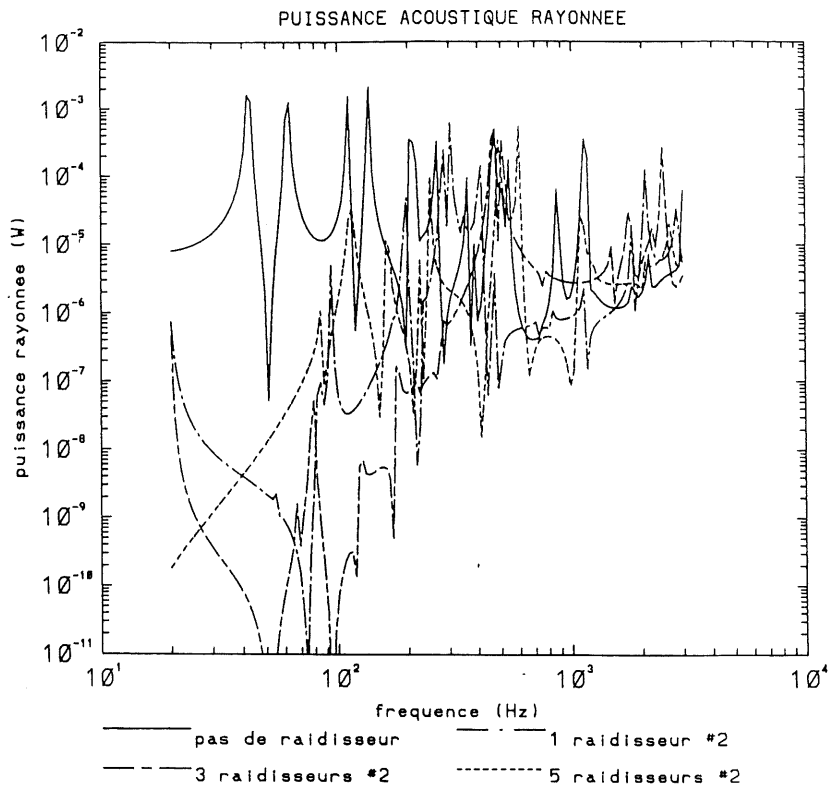


Figure 7.17: Puissance rayonnée dans l'eau par une plaque rectangulaire sur appui simple, pour diverses implantations d'éléments raidisseurs.

appliquée au centre de la plaque, au droit du point d'attache du raidisseur central. Les résultats sont comparés à une situation de référence qui est celle de la structure non raidie.

Les résultats numériques sont reportés à la figure 7.16 en termes de vitesse vibratoire quadratique de la structure, efficacité de rayonnement et à la figure 7.17 en termes de puissance acoustique rayonnée dans l'eau. Les tendances observées sont qualitativement comparables à celles déjà constatées pour le rayonnement en fluide léger d'une structure raidie:

- chute importante du niveau vibratoire en basses fréquences après adjonction de raidisseurs, dans le régime de réponse en "raideur" des raidisseurs, et diminution moins importante du niveau vibratoire en hautes fréquences, dans le régime de réponse en "masse" des raidisseurs.
- augmentation sur toute la gamme de fréquences de l'efficacité de rayonnement.

- chute du niveau de puissance rayonnée uniquement en basses fréquences, dans le régime de réponse en “raideur” des raidisseurs.

7.6 Conclusions

Ce chapitre a permis de caractériser pour la première fois et de manière précise, le comportement vibratoire et acoustique d’une structure plane complexe en présence d’un milieu fluide dense. Les connaissances acquises doivent permettre, dans un premier temps de mieux pénétrer et comprendre les mécanismes physiques impliqués, et doivent déboucher à terme sur des moyens pratiques de discrétion acoustique pour des structures immergées.

La présence d’un milieu fluide dense modifie radicalement la réponse vibratoire de la structure, et altère les phénomènes de transfert acoustique. L’information qui permet de caractériser ces changements est en large part recélée par les résistances et les réactances modales de rayonnement. L’examen de ces quantités conduit aux conclusions importantes suivantes:

- pour des excitations basses fréquences, l’effet dominant est l’inertie ajoutée par le fluide; cet effet se traduit surtout par un auto-couplage des modes *in-vacuo* de la structure.
- dans tous les cas, la puissance rayonnée par la structure est due en large part aux termes de couplage entre les modes *in-vacuo*. La puissance rayonnée n’est donc pas simplement la somme des puissances rayonnées par chacun des modes, ceci indépendamment du fluide.

La présence d’un milieu fluide dense ne modifie cependant pas les grandes tendances déjà observées pour l’air en ce qui concerne l’influence des paramètres structuraux sur le rayonnement acoustique. Dans une perspective de discrétion acoustique, il est possible de recourir aux deux grandes stratégies suivantes:

- diminuer la mobilité d’entrée de la structure, par ajout de masse ou de rigidité aux points d’excitation de la structure, ou par adjonction de raidisseurs.

- diminuer l'efficacité de la structure à rayonner, par exemple en assurant des conditions de fixation souple sur le contour de la structure, ou en sélectionnant dans la réponse des modes peu rayonnants.

Conclusions

Nous avons présenté les vibrations et le rayonnement acoustique de structures rectangulaires complexes immergées dans un fluide léger ou dense, et sollicitées par des forces mécaniques.

Le travail a été articulé autour des trois tâches essentielles suivantes:

- Le développement d'un cadre théorique rigoureux permettant le calcul des indicateurs vibratoires et acoustiques à partir de la connaissance des forces excitatrices agissant sur de telles structures,
- L'exploitation de ce cadre théorique dans une perspective de contrôle du bruit, afin d'étudier l'incidence des paramètres mécaniques de la structure sur le bruit rayonné dans l'air, ou sur le bruit rayonné dans l'eau,
- La validation de ce cadre théorique à partir de comparaisons avec des moyens de simulation purement numériques, ou à partir de comparaisons avec des mesures.

Ce travail, à notre sens, représente une contribution scientifique et une contribution technologique au corps des connaissances disponibles aujourd'hui dans le domaine des vibrations et de l'acoustique. Le bilan de ces contributions est fait dans ce qui suit, et les prolongements possibles de l'étude sont également évoqués.

Contribution scientifique Les apports scientifiques importants et les originalités de l'étude résident dans les aspects suivants:

- La prise en compte sur le plan du comportement vibroacoustique, de paramètres mécaniques nouveaux tels que les conditions de fixation de la structure, l'ajout multi-ponctuel de masse et de raideur, l'ajout d'éléments raidisseurs.
- Le développement d'une solution analytique originale pour le couplage fluide/-structure dans le cas d'une plaque rectangulaire présentant des conditions aux limites générales.
- Nous nous sommes également risqués à des ébauches de solutions pratiques dans une perspective de réduction de la puissance acoustique rayonnée. Ces solutions s'articulent autour de deux stratégies possibles:
 1. diminuer la mobilité d'entrée de la structure. Cette stratégie est illustrée par l'ajout de masse, de raideur ou de raidisseurs *aux points d'excitation de la structure*. En comparaison, les modifications structurales *hors points d'excitation* ont une incidence faible, voire nulle sur les vibrations et le bruit rayonné.
 2. diminuer l'efficacité de rayonnement de la structure. Cette stratégie peut être mise en œuvre en assurant des conditions de fixation souples sur le contour de la structure, ou en sélectionnant dans la réponse vibratoire des modes faiblement rayonnants.

Contribution technologique Nous avons déjà souligné le fossé important qui sépare encore la réalité industrielle et les connaissances disponibles, l'absence de règles et de moyens concrets d'action pour réduire le bruit en agissant sur la structure vibrante. Dans ce contexte, le travail réalisé a permis de progresser dans les directions suivantes:

- Il est possible d'élaborer un modèle de prédiction évolutif, pouvant incorporer pas à pas des éléments de complexité croissante de manière à appréhender de plus en plus finement la réalité,
- On a montré la faisabilité et la viabilité d'un contrôle acoustique *ab initio*, à partir d'une conception mécanique optimisée de la structure, en faisant des choix pertinents et décisifs sur les matériaux employés, le dimensionnement, les conditions de fixation, les raidisseurs, ...

- Il faut retenir la conclusion pratique selon laquelle l'action sur les forces excitatrices amont demeure la solution la plus efficace pour diminuer le bruit rayonné.

Perspectives Nous voyons des prolongements possibles de cette étude dans les directions suivantes:

- Une phase expérimentale importante sur des structures véritablement complexes, c'est-à-dire compatibles avec la réalité industrielle, afin de tester les capacités du modèle proposé comme outil de prédiction à part entière.
- L'inclusion d'un modèle de structure à couches multiples.
- L'utilisation du modèle conjointement avec des modèles de sources vibratoires, ou avec des mesures de forces excitatrices réelles.
- L'utilisation du modèle comme moyen de simulation et d'évaluation de solutions basées sur les principes du contrôle actif.
- L'extension du modèle à d'autres types d'excitation – excitation acoustique, excitation de couche limite.
- L'étude du comportement vibroacoustique de structures planes couplées par des liaisons souples, avec application à l'isolation vibratoire et acoustique des machines.
- L'étude des phénomènes de rayonnement acoustique en champ proche pour des structures planes complexes.
- L'influence de la condition bafflée sur le rayonnement acoustique de plaques.

Annexe A

Expressions de la matrice de masse, de la matrice de raideur, du vecteur des forces mécaniques dans la base de Taylor

Les équations (3.58), (3.66) et (3.75) sont particularisées dans le cas de la base de Taylor (3.79). Les expressions qui suivent supposent que la plaque et les raidisseurs sont constitués de matériaux isotropes et que les constantes élastiques du contour k et c sont uniformes le long du contour.

$$M_{mnpq}^{(plaque)} = \begin{cases} \frac{\rho_s h a^2}{r(m+p+1)(n+q+1)} & \text{pour } (m+p) \text{ et } (n+q) \text{ pairs} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$M_{mnpq,i}^{(masse)} = \frac{\mu_i \rho_s h a^2}{r} \alpha_i^{m+p} \beta_i^{n+q} \quad (\text{A.2})$$

$$K_{mnpq}^{(plaque)} = \begin{cases} \frac{16D}{a^2 r} \left[\frac{m(m-1)p(p-1)}{(m+p-3)(n+q+1)} + r^4 \frac{n(n-1)q(q-1)}{(m+p+1)(n+q-3)} \right] + \\ r^2 \frac{\nu m(m-1)q(q-1) + \nu n(n-1)p(p-1) + 2(1-\nu)mnpq}{(m+p-1)(n+q-1)} & \text{pour } (m+p) \text{ et } (n+q) \text{ pairs} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$K_{mnpq,j}^{(raideur)} = \frac{D \kappa_j}{a^2} \alpha_j^{m+p} \beta_j^{n+q} \quad (\text{A.4})$$

$$K_{mnpq}^{(contour)} = \begin{cases} \frac{2D}{a^2} \left[\frac{k}{m+p+1} + \frac{k}{r(n+q+1)} + \frac{4cr^2 nq}{m+p+1} + \frac{4cmp}{r(n+q+1)} \right] & \text{pour } (m+p) \\ & \text{et } (n+q) \text{ pairs} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Dans le cas d'un raidisseur parallèle à l'axe y , situé à l'abscisse $x_k^{(r)}$, et en notant $\alpha_k^{(r)} = \frac{2}{a} x_k^{(r)}$,

$$M_{mnpq,k}^{(raidisseur)} = \begin{cases} \frac{a}{2r} \rho_k^{(r)} \{ S_k [\bar{x}^2(O_k) + \bar{z}^2(O_k)] + I_{\bar{x}\bar{x},k} + I_{\bar{z}\bar{z},k} \} mp [\alpha_k^{(r)}]^{m+p-2} \frac{2}{n+q+1} \\ + \frac{2r}{a} \rho_k^{(r)} \{ S_k \bar{z}^2(O_k) + I_{\bar{x}\bar{x},k} \} [\alpha_k^{(r)}]^{m+p} \frac{2nq}{n+q-1} \\ + \frac{a}{2r} \rho_k^{(r)} S_k [\alpha_k^{(r)}]^{m+p} \frac{2}{n+q+1} \\ - \frac{1}{r} \rho_k^{(r)} S_k \bar{x}(O_k) (m+p) [\alpha_k^{(r)}]^{m+p-1} \frac{2}{n+q+1} \text{ pour } (n+q) \text{ pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

$$K_{mnpq,k}^{(raidisseur)} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{8r^2}{a^3} E_k^{(r)} \{ I_{\bar{x}\bar{x},k} + S_k \bar{z}^2(O_k) \} [\alpha_k^{(r)}]^{m+p} \frac{2n(n-1)q(q-1)}{n+q-3} + \\ \frac{8r}{a^3} G_k^{(r)} \{ 4I_{\bar{x}\bar{x},k} + I_{\bar{z}\bar{z},k} + S_k [4\bar{z}^2(O_k) + \bar{x}^2(O_k)] \} mp [\alpha_k^{(r)}]^{m+p-2} \frac{2nq}{n+q-1} \\ \text{pour } (n+q) \text{ pair} \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

Dans le cas d'un raidisseur parallèle à l'axe x , situé à l'abscisse $y_k^{(r)}$, et en notant $\beta_k^{(r)} = \frac{2}{b} y_k^{(r)}$,

$$M_{mnpq,k}^{(raidisseur)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2r^2}{a} \rho_k^{(r)} \{ S_k [\bar{x}^2(O_k) + \bar{z}^2(O_k)] + I_{\bar{x}\bar{x},k} + I_{\bar{z}\bar{z},k} \} nq [\beta_k^{(r)}]^{n+q-2} \frac{2}{m+p+1} \\ + \frac{2}{a} \rho_k^{(r)} \{ S_k \bar{z}^2(O_k) + I_{\bar{x}\bar{x},k} \} [\beta_k^{(r)}]^{n+q} \frac{2mp}{m+p-1} \\ + \frac{a}{2} \rho_k^{(r)} S_k [\beta_k^{(r)}]^{n+q} \frac{2}{m+p+1} \\ - r \rho_k^{(r)} S_k \bar{x}(O_k)(n+q) [\beta_k^{(r)}]^{n+q-1} \frac{2}{m+p+1} \text{ pour } (m+p) \text{ pair} \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \quad (\text{A.8})$$

$$K_{mnpq,k}^{(raidisseur)} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{a^3} E_k^{(r)} \{ I_{\bar{x}\bar{x},k} + S_k \bar{z}^2(O_k) \} [\beta_k^{(r)}]^{n+q} \frac{2m(m-1)p(p-1)}{m+p-3} + \\ \frac{8r^2}{a^3} G_k^{(r)} \{ 4I_{\bar{x}\bar{x},k} + I_{\bar{z}\bar{z},k} + S_k [4\bar{z}^2(O_k) + \bar{x}^2(O_k)] \} nq [\beta_k^{(r)}]^{n+q-2} \frac{2mp}{m+p-1} \\ \text{pour } (m+p) \text{ pair} \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \quad (\text{A.9})$$

La relation (3.75) est particularisée à une force ponctuelle d'amplitude f appliquée en x_0, y_0

$$f_{mn} = f \alpha_0^m \beta_0^n \quad (\text{A.10})$$

avec $\alpha_0 = \frac{2}{a}x_0$; $\beta_0 = \frac{2}{b}y_0$

Annexe B

Solution des intégrales $I_{mnpq}^{(k)}$ (réactances de rayonnement)

Soit à résoudre l'intégrale

$$I_{mnpq}^{(k)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \alpha^m \beta^n [(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(\beta - \beta')^2]^{k-1/2} \alpha'^p \beta'^q d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \quad (\text{B.1})$$

avec $(m, n, p, q, k) \in N^5$.

On remarquera d'abord que:

$$I_{mnpq}^{(k)} = 0 \quad \text{lorsque } (m + p) \text{ est impair ou } (n + q) \text{ est impair} \quad (\text{B.2})$$

$$I_{mnpq}^{(k)} = I_{pnmq}^{(k)} = I_{mqpn}^{(k)} = I_{pqmn}^{(k)} \quad (\text{B.3})$$

On pourra donc se limiter au calcul de $I_{mnpq}^{(k)}$ lorsque $m \geq p$, $n \geq q$, $(m + p)$ est pair, $(n + q)$ est pair.

En outre, on posera:

$$I_{npq}^{(k)}(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \beta^n [(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(\beta - \beta')^2]^{k-1/2} \alpha'^p \beta'^q d\beta d\alpha' d\beta' \quad (\text{B.4})$$

$$I_{pq}^{(k)}(\beta) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [(1 - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(\beta - \beta')^2]^{k-1/2} \alpha'^p \beta'^q d\alpha' d\beta' \quad (\text{B.5})$$

$$I_q^{(k)}(\alpha') = \int_{-1}^{+1} [(1 - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(1 - \beta')^2]^{k-1/2} \beta'^q d\beta' \quad (\text{B.6})$$

B.1 Relation de récurrence sur $I_{mnpq}^{(k)}$

En remarquant que

$$I_{mnpq}^{(k)} = \int_{-1}^{+1} \alpha^m I_{npq}^{(k)}(\alpha) d\alpha \quad (\text{B.7})$$

et en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} I_{mnpq}^{(k)} &= \left[\frac{\alpha^{m+1}}{m+1} I_{npq}^{(k)}(\alpha) \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{\alpha^{m+1}}{m+1} \frac{dI_{npq}^{(k)}(\alpha)}{d\alpha} d\alpha \\ &= \frac{1}{m+1} I_{npq}^{(k)}(1) + \frac{(-1)^m}{m+1} I_{npq}^{(k)}(-1) \\ &\quad - \int_{-1}^{+1} \frac{\alpha^{m+1}}{m+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (2k-1)(\alpha - \alpha') \beta^n \\ &\quad [(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(\beta - \beta')^2]^{k-3/2} \alpha'^p \beta'^q d\beta d\alpha' d\beta' d\alpha \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

C'est-à-dire,

$$I_{mnpq}^{(k)} = \frac{2}{m+1} I_{npq}^{(k)}(1) - \frac{2k-1}{m+1} \left[I_{(m+2)npq}^{k-1} - I_{(m+1)n(p+1)q}^{k-1} \right] \quad \text{pour } k \geq 1 \quad (\text{B.9})$$

La relation de récurrence trouvée permet donc de calculer $I_{mnpq}^{(k)}$, connaissant $I_{npq}^{(k)}(1)$ et $I_{mnpq}^{(0)}$. Dans ce qui suit, on présente le calcul de $I_{npq}^{(k)}(1)$; le terme $I_{mnpq}^{(0)}$ est résolu en B.4.

B.2 Relation de récurrence sur $I_{npq}^{(k)}(1)$

De manière similaire, en remarquant que

$$I_{npq}^{(k)}(1) = \int_{-1}^{+1} \beta^n I_{pq}^{(k)}(\beta) d\beta \quad (\text{B.10})$$

et en effectuant une intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{npq}^{(k)}(1) &= \left[\frac{\beta^{n+1}}{n+1} I_{pq}^{(k)}(\beta) \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{\beta^{n+1}}{n+1} \frac{dI_{pq}^{(k)}(\beta)}{d\beta} d\beta \\ &= \frac{1}{n+1} I_{pq}^{(k)}(1) + \frac{(-1)^n}{n+1} I_{pq}^{(k)}(-1) \\ &\quad - \int_{-1}^{+1} \frac{\beta^{n+1}}{n+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (2k-1) \frac{1}{r^2} (\beta - \beta') \beta^n \\ &\quad [(1 - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(\beta - \beta')^2]^{k-3/2} \alpha'^p \beta'^q d\alpha' d\beta' d\beta \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

c'est-à-dire,

$$I_{npq}^{(k)}(1) = \frac{2}{n+1} I_{pq}^{(k)}(1) - \frac{2k-1}{r^2(n+1)} \left[I_{(n+2)pq}^{k-1}(1) - I_{(n+1)p(q+1)}^{k-1}(1) \right] \quad \text{pour } k \geq 1 \quad (\text{B.12})$$

La relation de récurrence précédente permet donc de calculer $I_{npq}^{(k)}(1)$ à partir de l'intégrale double $I_{pq}^{(k)}(1)$, et de $I_{npq}^{(0)}(1)$. Dans ce qui suit, on présente le calcul de $I_{pq}^{(k)}(1)$; le terme $I_{npq}^{(0)}(1)$ est résolu en B.5.

B.3 Relation de récurrence sur $I_{pq}^{(k)}(1)$

Nous avons, par définition,

$$I_{pq}^{(k)}(1) = \int_{-1}^{+1} \alpha'^p I_q^{(k)}(\alpha') d\alpha' \quad (\text{B.13})$$

En effectuant une intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{pq}^{(k)}(1) &= \left[\frac{\alpha'^{p+1}}{p+1} I_q^{(k)}(\alpha') \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{\alpha'^{p+1}}{p+1} \frac{dI_q^{(k)}(\alpha')}{d\alpha'} d\alpha' \\ &= \frac{1}{p+1} I_q^{(k)}(1) + \frac{(-1)^p}{p+1} I_q^{(k)}(-1) \\ &\quad + \int_{-1}^{+1} \frac{\alpha'^{p+1}}{p+1} \int_{-1}^{+1} (2k-1)(1-\alpha') \\ &\quad \left[(1-\alpha')^2 + \frac{1}{r^2} (\beta-\beta')^2 \right]^{k-3/2} \beta'^q d\beta' d\alpha' \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

c'est-à-dire,

$$I_{pq}^{(k)}(1) = \frac{1}{p+1} \left[I_q^{(k)}(1) + (-1)^p I_q^{(k)}(-1) \right] + \frac{2k-1}{(p+1)} \left[I_{(p+1)q}^{k-1}(1) - I_{(p+2)q}^{k-1}(1) \right] \quad \text{pour } k \geq 1 \quad (\text{B.15})$$

La relation de récurrence précédente permet donc de calculer $I_{pq}^{(k)}(1)$ à partir des intégrales simples $I_q^{(k)}(1)$ et $I_q^{(k)}(-1)$, et de $I_{pq}^{(0)}(1)$. Dans ce qui suit, on présente le calcul de $I_{mnpq}^{(0)}$, $I_{npq}^{(0)}(1)$ et $I_{pq}^{(0)}(1)$; les termes $I_q^{(k)}(1)$ et $I_q^{(k)}(-1)$ sont résolus en B.7 et B.8.

B.4 Relation de récurrence sur $I_{mnpq}^{(0)}$

On rappelle que

$$I_{mnpq}^{(0)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\alpha^m \beta^n \alpha'^p \beta'^q}{\left[(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2} (\beta - \beta')^2 \right]^{1/2}} d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \quad (\text{B.16})$$

En effectuant l'intégration par rapport à α , on aboutit à la relation de récurrence suivante:

$$I_{mnpq}^{(0)} = \frac{2}{m} I_{npq}^{(1)}(1) + \frac{2m-1}{m} I_{(m-1)n(p+1)q}^{(0)} - \frac{m-1}{m} \left[I_{(m-2)n(p+2)q}^{(0)} + \frac{1}{r^2} \left(I_{(m-2)(n+2)pq}^{(0)} - 2I_{(m-2)(n+1)p(q+1)}^{(0)} + I_{(m-2)np(q+2)}^{(0)} \right) \right]$$

(B.17)

pour $m \geq 2$

Le calcul de $I_{mnpq}^{(0)}$ pour tout m nécessite le calcul préalable de $I_{npq}^{(1)}(1)$, $I_{0npq}^{(0)}$ et $I_{1npq}^{(0)}$. Le calcul de $I_{0npq}^{(0)}$ et $I_{1npq}^{(0)}$ est effectué en B.8 et B.9.

B.5 Relation de récurrence sur $I_{npq}^{(0)}(1)$

On rappelle que

$$I_{npq}^{(0)}(1) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\beta^n \alpha'^p \beta'^q}{\left[(1 - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2} (\beta - \beta')^2 \right]^{1/2}} d\beta d\alpha' d\beta' \quad (B.18)$$

En effectuant l'intégration par rapport à β , on aboutit à la relation de récurrence suivante:

$$I_{npq}^{(0)}(1) = \frac{2r^2}{n} I_{pq}^{(1)}(1) + \frac{2n-1}{n} I_{(n-1)p(q+1)}^{(0)}(1) - \frac{n-1}{n} \left[I_{(n-2)p(q+2)}^{(0)}(1) + r^2 \left(I_{(n-2)pq}^{(0)}(1) - 2I_{(n-2)(p+1)q}^{(0)}(1) + I_{(n-2)(p+2)q}^{(0)}(1) \right) \right]$$

(B.19)

pour $n \geq 2$

Le calcul de $I_{npq}^{(0)}(1)$ pour tout n nécessite le calcul préalable de $I_{pq}^{(1)}(1)$, $I_{0pq}^{(0)}(1)$ et $I_{1pq}^{(0)}(1)$. Le calcul de $I_{0pq}^{(0)}(1)$ et $I_{1pq}^{(0)}(1)$ est effectué en B.11 et B.12.

B.6 Relation de récurrence sur $I_{pq}^{(0)}(1)$

On rappelle que

$$I_{pq}^{(0)}(1) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\alpha'^p \beta'^q}{\left[(1 - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2} (1 - \beta')^2 \right]^{1/2}} d\alpha' d\beta' \quad (B.20)$$

En effectuant l'intégration par rapport à α' , on aboutit à la relation de récurrence suivante:

$$I_{pq}^{(0)}(1) = \frac{1}{p} \left[I_q^{(1)}(1) + (-1)^p I_q^{(1)}(-1) \right] + \frac{2p-1}{p} I_{(p-1)q}^{(0)}(1) - \frac{p-1}{p} \left[\left(1 + \frac{1}{r^2} \right) I_{(p-2)q}^{(0)}(1) - \frac{2}{r^2} I_{(p-2)(q+1)}^{(0)}(1) + \frac{1}{r^2} I_{(p-2)(q+2)}^{(0)}(1) \right]$$

(B.21)

pour $p \geq 2$

Le calcul de $I_{pq}^{(0)}(1)$ pour tout p nécessite le calcul préalable de $I_q^{(1)}(1)$, $I_q^{(1)}(-1)$, $I_{0q}^{(0)}(1)$ et $I_{1q}^{(0)}(1)$. Le calcul de $I_{0q}^{(0)}(1)$ et $I_{1q}^{(0)}(1)$ est effectué en B.14 et B.15.

B.7 Relation de récurrence sur $I_q^{(k)}(1)$ et $I_q^{(k)}(-1)$, $k \geq 1$

B.7.1 Relation de récurrence sur $I_q^{(k)}(1)$

Rappelons que

$$I_q^{(k)}(1) = \frac{1}{r^{2k-1}} \int_{-1}^{+1} (1 - \beta')^{2k-1} \beta'^q d\beta' \quad (\text{B.22})$$

En intégrant par parties, on établit facilement que

$$I_q^{(k)}(1) = \frac{(-1)^q 2^{2k-1}}{(q+1)r^{2k-1}} + \frac{2k-1}{(q+1)r} I_{(q+1)}^{(k-1/2)}(1) \quad (\text{B.23})$$

La récurrence obtenue est initiée connaissant $I_q^{(1/2)}(1)$. On montre sans difficulté que

$$I_q^{(1/2)}(1) = \frac{1 + (-1)^q}{q} \quad (\text{B.24})$$

B.7.2 Relation de récurrence sur $I_q^{(k)}(-1)$

$I_q^{(k)}(-1)$ est donnée par

$$I_q^{(k)}(-1) = \int_{-1}^{+1} \left[4 + (1 - \beta')^2\right]^{k-1/2} \beta'^q d\beta' \quad (\text{B.25})$$

En intégrant par parties, on établit facilement que

$$I_q^{(k)}(-1) = \frac{2^{2k-1}}{(q+1)} + \frac{(-1)^q}{(q+1)} \left(4 + \frac{4}{r^2}\right)^{k-1/2} + \frac{2k-1}{(q+1)r^2} \left[I_{(q+1)}^{(k-1)}(-1) - I_{(q+2)}^{(k-1)}(-1) \right] \quad (\text{B.26})$$

La récurrence obtenue est initiée connaissant $I_q^{(0)}(-1)$. Le calcul de $I_q^{(0)}(-1)$ est exposé en détail en B.18, en remarquant que

$$I_q^{(0)}(-1) = M_{q,r}(2,1), \quad (\text{B.27})$$

$M_{q,r}(2,1)$ ayant la définition donnée en B.18.

B.8 Résolution de $I_{0npq}^{(0)}$

Par définition,

$$I_{0npq}^{(0)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\beta^n \alpha'^p \beta'^q}{\left[(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2} (\beta - \beta')^2 \right]^{1/2}} d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \quad (\text{B.28})$$

Après intégration par rapport à la variable α ,

$$I_{0npq}^{(0)} = J_{npq}(1) - J_{npq}(-1) \quad (\text{B.29})$$

où l'on a posé

$$J_{npq}(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \log \left(\alpha - \alpha' + \sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2} (\beta - \beta')^2} \right) \beta^n \alpha'^p \beta'^q d\alpha' d\beta d\beta' \quad (\text{B.30})$$

Le calcul de $J_{npq}(\alpha)$ est fait en B.10.

B.9 Résolution de $I_{1npq}^{(0)}$

On rappelle que

$$I_{1npq}^{(0)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\alpha \beta^n \alpha'^p \beta'^q}{\left[(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2} (\beta - \beta')^2 \right]^{1/2}} d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \quad (\text{B.31})$$

On montre de manière similaire que, après intégration par rapport à la variable α ,

$$I_{1npq}^{(0)} = J_{n(p+1)q}(1) - J_{n(p+1)q}(-1) + I_{npq}^{(1)}(1) - I_{npq}^{(1)}(-1) \quad (\text{B.32})$$

où $J_{npq}(\alpha)$ a la même signification que ci-haut. Le calcul de l'intégrale $J_{npq}(\alpha)$ est effectué dans la section suivante. Les termes $I_{npq}^{(1)}(1)$ et $I_{npq}^{(1)}(-1)$ peuvent être calculés à l'aide des relations générales établies en B.2, après avoir noté que

$$I_{npq}^{(k)}(-1) = (-1)^p I_{npq}^{(k)}(1) \quad (\text{B.33})$$

B.10 Résolution de $J_{npq}(\alpha)$

Rappelons que l'on a défini

$$J_{npq}(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \log \left(\alpha - \alpha' + \sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2} (\beta - \beta')^2} \right) \beta^n \alpha'^p \beta'^q d\alpha' d\beta d\beta' \quad (\text{B.34})$$

On posera

$$J_{nq}(\alpha, \alpha') = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \log \left(\alpha - \alpha' + \sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2} (\beta - \beta')^2} \right) \beta^n \beta'^q d\beta d\beta' \quad (\text{B.35})$$

Alors,

$$J_{npq}(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \alpha'^p J_{nq}(\alpha, \alpha') d\alpha' \quad (\text{B.36})$$

En intégrant par parties,

$$J_{npq}(\alpha) = \left[\frac{\alpha'^{p+1}}{p+1} J_{nq}(\alpha, \alpha') \right]_{-1}^{+1} - \frac{1}{p+1} \int_{-1}^{+1} \alpha'^{p+1} \frac{dJ_{nq}(\alpha, \alpha')}{d\alpha'} d\alpha' \quad (\text{B.37})$$

ce qui conduit à la relation de récurrence suivante,

$$J_{npq}(\alpha) = \frac{1}{p+1} [J_{nq}(\alpha, 1) + (-1)^p J_{nq}(\alpha, -1)] + \frac{1}{p+1} I_{n(p+1)q}^{(0)}(\alpha) \quad (\text{B.38})$$

L'intégrale $J_{npq}(\alpha)$ peut donc être calculée par récurrence à partir de $I_{npq}^{(0)}(\alpha)$ (voir B.5), et de $J_{nq}(\alpha, \alpha')$. Le calcul de $J_{nq}(\alpha, \alpha')$ est exposé en détail en B.17, en remarquant que

$$J_{nq}(\alpha, \alpha') = L_{nq,r}(\alpha - \alpha'), \quad (\text{B.39})$$

$L_{nq,r}(\alpha - \alpha')$ ayant la définition donnée en B.17.

B.11 Résolution de $I_{0pq}^{(0)}(1)$

Par définition,

$$I_{0pq}^{(0)}(1) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\alpha'^p \beta'^q}{\left[(1 - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2} (\beta - \beta')^2 \right]^{1/2}} d\beta d\alpha' d\beta' \quad (\text{B.40})$$

Après intégration par rapport à la variable α , on obtient la relation de récurrence suivante,

$$I_{0pq}^{(0)}(1) = r [J_{pq}(1) - J_{pq}(-1)] \quad (\text{B.41})$$

où l'on a posé

$$J_{pq}(\beta) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \log \left(\frac{\beta - \beta'}{r} + \sqrt{\frac{(\beta - \beta')^2}{r^2} + (1 - \alpha')^2} \right) \alpha'^p \beta'^q d\alpha' d\beta' \quad (\text{B.42})$$

Le calcul de $J_{pq}(\beta)$ est effectué à la section B.13.

B.12 Résolution de $I_{1pq}^{(0)}(1)$

On rappelle que

$$I_{1pq}^{(0)}(1) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\beta \alpha'^p \beta'^q}{\left[(1 - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2} (\beta - \beta')^2 \right]^{1/2}} d\beta d\alpha' d\beta' \quad (\text{B.43})$$

Comme précédemment, après intégration par rapport à la variable α , on obtient la relation de récurrence suivante,

$$I_{1pq}^{(0)}(1) = r^2 \left[I_{pq}^{(1)}(1) - I_{pq}^{(1)}(-1) \right] + r \left[J_{pq}(1) - J_{pq}(-1) \right] \quad (\text{B.44})$$

où $J_{pq}(\beta)$ a la même signification que plus haut. On donne par la suite les relations nécessaires au calcul de $J_{pq}(\beta)$. Les termes $I_{pq}^{(1)}(1)$ et $I_{pq}^{(1)}(-1)$ sont calculés à l'aide des relations énoncées en B.3, après avoir remarqué que

$$I_{pq}^{(k)}(-1) = (-1)^q I_{pq}^{(k)}(1) \quad (\text{B.45})$$

B.13 Résolution de $J_{pq}^{(\beta)}$

Rappelons que l'on a défini

$$J_{pq}(\beta) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \log \left(\frac{\beta - \beta'}{r} + \sqrt{\frac{(\beta - \beta')^2}{r^2} + (1 - \alpha')^2} \right) \alpha'^p \beta'^q d\alpha' d\beta' \quad (\text{B.46})$$

On posera

$$J_p(\beta, \beta') = \int_{-1}^{+1} \log \left(\frac{\beta - \beta'}{r} + \sqrt{\frac{(\beta - \beta')^2}{r^2} + (1 - \alpha')^2} \right) \alpha'^q d\alpha' \quad (\text{B.47})$$

Alors,

$$J_{pq}(\beta) = \int_{-1}^{+1} \beta'^q J_p(\beta, \beta') d\beta' \quad (\text{B.48})$$

En intégrant par parties,

$$J_{pq}(\alpha) = \left[\frac{\beta'^{q+1}}{q+1} J_p(\beta, \beta') \right]_{-1}^{+1} - \frac{1}{q+1} \int_{-1}^{+1} \beta'^{q+1} \frac{dJ_p(\beta, \beta')}{d\beta'} d\beta' \quad (\text{B.49})$$

ce qui conduit à la relation de récurrence suivante,

$$J_{pq}(\beta) = \frac{1}{q+1} \left[J_p(\beta, 1) + (-1)^q J_p(\beta, -1) \right] + \frac{1}{(q+1)r} I_{p(q+1)}^{(0)}(\beta) \quad (\text{B.50})$$

L'intégrale $J_{pq}(\beta)$ peut donc être calculée par récurrence à partir de $I_{pq}^{(0)}(\beta)$ (voir B.6), et de $J_p(\beta, \beta')$. Le calcul de $J_p(\beta, \beta')$ est exposé en détail en B.16, en remarquant que

$$J_p(\beta, \beta') = L_{p,1}\left(\frac{\beta - \beta'}{r}, 1\right), \quad (\text{B.51})$$

$L_{p,1}\left(\frac{\beta - \beta'}{r}, 1\right)$ ayant la définition donnée en B.16.

B.14 Résolution de $I_{0q}^{(0)}(1)$

On a, par définition,

$$I_{0q}^{(0)}(1) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\beta'^q}{\left[(1 - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(1 - \beta')^2\right]^{1/2}} d\alpha' d\beta' \quad (\text{B.52})$$

Après intégration par rapport à α' ,

$$\begin{aligned} I_{0q}^{(0)}(1) &= \int_{-1}^{+1} \beta'^q \log \left(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{r^2}(1 - \beta')^2} \right) d\beta' \\ &\quad - \int_{-1}^{+1} \beta'^q \log \left(\frac{1 - \beta'}{r} \right) d\beta' \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Cette relation peut encore s'écrire, avec les notations introduites en B.16,

$$I_{0q}^{(0)}(1) = L_{q,r}(2, 1) - L_{q,r}(0, 1) \quad (\text{B.54})$$

B.15 Résolution de $I_{1q}^{(0)}(1)$

On rappelle que

$$I_{1q}^{(0)}(1) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\alpha' \beta'^q}{\left[(1 - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(1 - \beta')^2\right]^{1/2}} d\alpha' d\beta' \quad (\text{B.55})$$

Après intégration par rapport à α' ,

$$I_{1q}^{(0)}(1) = I_{0q}^{(0)}(1) + I_q^{(1)}(1) - I_q^{(1)}(-1) \quad (\text{B.56})$$

Le terme $I_{1q}^{(0)}(1)$ est donc calculé à partir de $I_{0q}^{(0)}(1)$ fourni en B.14 et de $I_q^{(1)}(1)$ et $I_q^{(1)}(-1)$, fournis en B.7.

B.16 Resolution de $J_p(\beta, \beta')$ et de $I_{0q}^{(0)}(1)$

B.16.1 Relation de récurrence sur $L_{q,b}(a, x)$

Il a été démontré en B.13 et en B.14 que la résolution de $J_p(\beta, \beta')$ et de $I_{0q}^{(0)}(1)$ passe par le calcul du terme général $L_{q,b}(a, x)$ de la forme

$$L_{q,b}(a, x) = \int_{-1}^{+1} y^q \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dy \quad (\text{B.57})$$

où a, b, x sont des coefficients réels qui prennent certaines valeurs connues pour le calcul de $J_p(\beta, \beta')$ et de $I_{0q}^{(0)}(1)$:

$$J_p(\beta, \beta') = L_{p,1}\left(\frac{\beta - \beta'}{r}, 1\right), \quad (\text{B.58})$$

et

$$I_{0q}^{(0)}(1) = L_{q,r}(2, 1) - L_{q,r}(0, 1) \quad (\text{B.59})$$

On notera $L_{q,b}(a, x; y)$ la fonction primitive telle que

$$L_{q,b}(a, x; y) = \int y^q \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dy \quad (\text{B.60})$$

de sorte que

$$L_{q,b}(a, x) = L_{q,b}(a, x; 1) - L_{q,b}(a, x; -1) \quad (\text{B.61})$$

On supposera dans toute cette section que $a \neq 0$. Le cas $a = 0$ sera discuté dans la section B.20.

En intégrant par parties, on montre sans difficulté que

$$\begin{aligned} L_{q,b}(a, x; y) &= y^q(y-x) \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) \\ &\quad - aby^q \log \left(\frac{x-y}{b} + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) + y^q(y-x) \\ &\quad - \int qy^{q-1}(y-x) \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dy \\ &\quad + \int qaby^{(q-1)} \log \left(\frac{x-y}{b} + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dy \\ &\quad + \int qy^{(q-1)}(y-x) dy \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

Examinons successivement les trois intégrales produites dans l'expression précédente.

- Par définition,

$$\int qy^{q-1}(y-x) \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dy = qL_{q,b}(a, x; y) - qxL_{q-1,b}(a, x; y) \quad (\text{B.63})$$

- On trouve sans difficulté que

$$\int qy^{(q-1)}(y-x) dy = \frac{q}{q+1}y^{(q+1)} - xy^q \quad (\text{B.64})$$

- En intégrant par parties, on montre que

$$\begin{aligned} \int qaby^{(q-1)} \log \left(\frac{x-y}{b} + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dy = \\ aby^q \log \left(\frac{x-y}{b} + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) + a \int \frac{y^q}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dy \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

Après report de ces trois relations dans l'expression (B.62), la relation de récurrence suivante sur l'intégrale indéfinie $L_{q,b}(a, x; y)$ peut être établie:

$$\begin{aligned} L_{q,b}(a, x; y) = \frac{q}{q+1}xL_{q-1,b}(a, x; y) + \frac{a}{q+1} \int \frac{y^q}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dy \\ \frac{y^q(y-x)}{q+1} \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) - \frac{1}{(q+1)^2}y^{q+1} \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

A partir de cette relation, et de la relation (B.61), l'intégrale définie $L_{q,b}(a, x)$ peut être calculée, connaissant $L_{0,b}(a, x)$ et $\int_{-1}^{+1} \frac{y^q}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dy$. Le calcul de $\int_{-1}^{+1} \frac{y^q}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dy$ est effectué en B.18; le calcul de $L_{0,b}(a, x)$ est présenté dans ce qui suit.

B.16.2 Résolution de $L_{0,b}(a, x)$

On rappelle que

$$L_{0,b}(a, x; y) = \int \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dy \quad (\text{B.67})$$

En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dy = \\ (y-x) \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) - ab \log \left(\frac{x-y}{b} + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) - (y-x) \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

A partir de cette relation, et de la relation (B.61), l'intégrale définie $L_{0,b}(a, x)$ peut être calculée. Il faut faire remarquer ici que les termes du type $(x-y) \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right)$ qui apparaissent dans les expressions de $L_{q,b}(a, x; y)$ et $L_{0,b}(a, x; y)$, sont nuls lorsqu'évalués pour $x = y$, ceci quelque soit a .

B.17 Résolution de $J_{nq}(\alpha, \alpha')$

B.17.1 Relation de récurrence sur $L_{nq,b}(a)$

On pose

$$L_{nq,b}(a) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} x^n y^q \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dx dy \quad (\text{B.69})$$

On sait alors, d'après B.10, que l'intégrale $J_{nq}(\alpha, \alpha')$ peut être exprimée en fonction de $L_{nq,b}(a)$ comme

$$J_{nq}(\alpha, \alpha') = L_{nq,r}(\alpha - \alpha') \quad (\text{B.70})$$

On notera de plus $L_{nq,b}(a; x, y)$ la fonction primitive telle que

$$L_{nq,b}(a; x, y) = \int \int x^n y^q \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dx dy \quad (\text{B.71})$$

de sorte que

$$L_{nq,b}(a) = L_{nq,b}(a; 1, 1) + L_{nq,b}(a; -1, -1) - L_{nq,b}(a; 1, -1) - L_{nq,b}(a; -1, 1) \quad (\text{B.72})$$

On supposera de plus que $a \neq 0$. Le cas $a = 0$ sera discuté dans la section B.20.

Pour calculer la fonction $L_{nq,b}(a; x, y)$, on peut écrire

$$L_{nq,b}(a; x, y) = \int x^n L_{q,b}(a, x; y) dx \quad (\text{B.73})$$

Compte tenu de la relation de récurrence B.66 pour $L_{q,b}(a, x; y)$, la relation précédente devient

$$\begin{aligned} L_{nq,b}(a; x, y) &= \frac{q}{q+1} \int x^{n+1} L_{q-1,b}(a, x; y) dx + \frac{a}{q+1} \iint \frac{x^n y^q}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx dy \\ &\quad + \frac{1}{q+1} \int x^n y^q (y-x) \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dx \\ &\quad - \frac{1}{(q+1)^2} \int x^n y^{(q+1)} dx \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

Ceci permet d'obtenir la relation de récurrence suivante pour $L_{nq,b}(a; x, y)$,

$$\begin{aligned}
L_{nq,b}(a; x, y) &= \frac{q}{q+1} L_{(n+1)(q-1),b}(a; x, y) + \frac{a}{q+1} \iint \frac{x^n y^q}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx dy \\
&\quad + \frac{1}{q+1} \int x^n y^q (y-x) \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dx \\
&\quad - \frac{1}{(n+1)(q+1)^2} x^{(n+1)} y^{(q+1)}
\end{aligned} \tag{B.75}$$

En remarquant que

$$\int x^n y^q (y-x) \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dx = y^{q+1} L_{n,b}(a, y; x) - y^q L_{n+1,b}(a, y; x), \tag{B.76}$$

cette relation de récurrence peut être à nouveau écrite comme

$$\begin{aligned}
L_{nq,b}(a; x, y) &= \frac{q}{q+1} L_{(n+1)(q-1),b}(a; x, y) + \frac{a}{q+1} \iint \frac{x^n y^q}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx dy \\
&\quad + \frac{y^{q+1}}{q+1} L_{n,b}(a, y; x) - \frac{y^q}{q+1} L_{n+1,b}(a, y; x) - \frac{1}{(n+1)(q+1)^2} x^{(n+1)} y^{(q+1)}
\end{aligned} \tag{B.77}$$

La relation obtenue permet donc de calculer $L_{nq,b}(a; x, y)$ connaissant $L_{n0,b}(a; x, y)$ et $L_{n,b}(a, y; x)$. Le calcul de $L_{n,b}(a, y; x)$ peut être effectué à partir de l'ensemble des relations énoncées en B.16; dans ce qui suit, les relations nécessaires au calcul de $L_{n0,b}(a; x, y)$ sont présentées. Le calcul du terme $\iint \frac{x^n y^q}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx dy$ est effectué en B.19.

B.17.2 Résolution de $L_{n0,b}(a; x, y)$

Par définition,

$$L_{n0,b}(a; x, y) = \iint x^n \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dx dy \tag{B.78}$$

L'intégration par rapport à la variable y conduit à

$$\begin{aligned}
L_{n0,b}(a; x, y) &= \int x^n (y-x) \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dx \\
&\quad - ab \int x^n \log \left(\frac{x-y}{b} + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dx - \int x^n (y-x) dx \tag{B.79}
\end{aligned}$$

Dans cette expression, les deux premières intégrales produites s'écrivent

$$\int x^n (y-x) \log \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dx = yL_{n,b}(a, y; x) - L_{n+1,b}(a, y; x) \quad (\text{B.80})$$

et

$$\int x^n \log \left(\frac{x-y}{b} + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \log \left(\frac{x-y}{b} + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) - \frac{1}{b(n+1)} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx \quad (\text{B.81})$$

La relation finalement obtenue pour $L_{n0,b}(a; x, y)$ est donc

$$\begin{aligned} L_{n0,b}(a; x, y) &= yL_{n,b}(a, y; x) - L_{n+1,b}(a, y; x) - y \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} \\ &\quad - ab \frac{x^{n+1}}{n+1} \log \left(\frac{x-y}{b} + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) \\ &\quad + a \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

A partir de cette relation, le calcul de l'intégrale définie $L_{n0,b}(a)$ peut être fait, connaissant $L_{n,b}(a, y)$ et $\int_{-1}^{+1} \frac{x^{n+1}}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx$. Le terme $L_{n,b}(a, y)$ est accessible à partir des relations données en B.16; le terme $\int_{-1}^{+1} \frac{x^{n+1}}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx$ est calculé en B.18.

B.18 Résolution de $I_q^{(0)}(-1)$, $L_{q,b}(a, x)$ et $L_{n0,b}(a)$.

B.18.1 Relation de récurrence directe sur $M_{n,b}(a, y)$.

On a montré précédemment que les termes $I_q^{(0)}(-1)$ (section B.7), $L_{q,b}(a, x)$ (section B.16) et $L_{n0,b}(a)$ (section B.17) se ramènent tous au calcul d'une intégrale définie simple dont la forme générale est

$$M_{n,b}(a, y) = \int_{-1}^{+1} \frac{x^n}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx \quad (\text{B.83})$$

On définira comme d'habitude la fonction primitive

$$M_{n,b}(a, y; x) = \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx \quad (\text{B.84})$$

de sorte que l'intégrale définie se calculera connaissant la primitive à partir de

$$M_{n,b}(a, y) = M_{n,b}(a, y; 1) - M_{n,b}(a, y; -1) \quad (\text{B.85})$$

On montre qu'il existe la relation de récurrence double suivante pour $M_{n,b}(a, y; x)$,

$$\begin{aligned} M_{n,b}(a, y; x) = & \frac{b^2}{n} \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} x^{n-1} \\ & + \frac{2n-1}{n} y M_{n-1,b}(a, y; x) \\ & - \frac{n-1}{n} (y^2 + b^2 a^2) M_{n-2,b}(a, y; x) \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$

Le terme général $M_{n,b}(a, y; x)$ peut donc être calculé si les deux premiers termes $M_{0,b}(a, y; x)$ et $M_{1,b}(a, y; x)$ sont connus.

B.18.2 Résolution de $M_{0,b}(a, y; x)$.

On a

$$M_{0,b}(a, y; x) = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx \quad (\text{B.87})$$

Cette expression s'intègre sans difficulté pour donner

$$M_{0,b}(a, y; x) = b \log \left(\frac{x-y}{b} + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) \quad (\text{B.88})$$

B.18.3 Résolution de $M_{1,b}(a, y; x)$.

Par définition,

$$M_{1,b}(a, y; x) = \int \frac{x}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx \quad (\text{B.89})$$

En intégrant par parties, on montre aisément que

$$M_{1,b}(a, y; x) = y M_{0,b}(a, y; x) + b^2 \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \quad (\text{B.90})$$

Le terme $M_{1,b}(a, y; x)$ est donc défini de manière simple en fonction du terme $M_{0,b}(a, y; x)$ calculé plus haut.

B.18.4 Relation de récurrence inverse sur $M_{n,b}(a, y; x)$.

La relation de récurrence directe sur $M_{n,b}(a, y; x)$, établie en B.18.1, a l'inconvénient d'être numériquement instable lorsque n est assez grand. Il peut alors être préférable de considérer la relation de récurrence inverse suivante pour calculer $M_{n,b}(a, y; x)$,

$$\begin{aligned}
 M_{n,b}(a, y; x) = & \frac{b^2}{n+1} \frac{1}{y^2 + b^2 a^2} \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} x^{n+1} \\
 & + \frac{2n+3}{n+1} \frac{y}{y^2 + b^2 a^2} M_{n+1,b}(a, y; x) \\
 & - \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{y^2 + b^2 a^2} M_{n+2,b}(a, y; x)
 \end{aligned} \tag{B.91}$$

La relation de récurrence inverse est alors nécessairement stable; les valeurs initiales $M_{N,b}(a, y; x)$ et $M_{N-1,b}(a, y; x)$ doivent être résolues numériquement.

B.19 Résolution de $L_{nq,b}(a)$.

B.19.1 Relation de récurrence sur $M_{nq,b}(a)$.

La résolution de l'intégrale $L_{nq,b}(a)$ nécessite le calcul, entre autres, de l'intégrale double suivante, notée $M_{nq,b}(a)$,

$$M_{nq,b}(a) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{x^n y^q}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx dy \tag{B.92}$$

On définit la fonction primitive

$$M_{nq,b}(a; x, y) = \int \int \frac{x^n y^q}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx dy \tag{B.93}$$

de sorte que

$$M_{nq,b}(a) = M_{nq,b}(a; 1, 1) + M_{nq,b}(a; -1, -1) - M_{nq,b}(a; 1, -1) - M_{nq,b}(a; -1, 1) \tag{B.94}$$

En remarquant que

$$M_{nq,b}(a; x, y) = \int x^n M_{q,b}(a, x; y) dx, \tag{B.95}$$

en en reportant la relation de récurrence directe trouvée pour $M_{n,b}(a; x, y)$, on obtient la relation de récurrence suivante pour $M_{nq,b}(a; x, y)$,

$$M_{nq,b}(a; x, y) = \frac{b^2}{q} y^{q-1} \int x^n \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} dx + \frac{2q-1}{q} M_{(n+1)(q-1)}(a; x, y) - \frac{q-1}{q} M_{(n+2)(q-2)}(a; x, y) - \frac{q-1}{q} b^2 a^2 M_{n(q-2)}(a; x, y) \quad (\text{B.96})$$

Le calcul du terme général $M_{nq,b}(a; x, y)$ passe donc par la détermination préalable des termes initiaux $M_{n_0,b}(a; x, y)$ et $M_{n_1,b}(a; x, y)$, ainsi que de l'intégrale $\int x^n \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} dx$; Le calcul de $M_{n_0,b}(a; x, y)$ et $M_{n_1,b}(a; x, y)$ est effectué dans la suite de cette section; le calcul de $\int x^n \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} dx$ est résolu en intégrant par parties, ce qui conduit à la relation suivante,

$$\int x^n \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} - \frac{1}{(n+1)b^2} [M_{n+2,b}(a, y; x) - y M_{n+1,b}(a, y; x)], \quad (\text{B.97})$$

les termes $M_{n+2,b}(a, y; x)$ et $M_{n+1,b}(a, y; x)$ étant déterminés à partir des relations B.18.

B.19.2 Résolution de $M_{n_0,b}(a; x, y)$.

On rappelle que

$$M_{n_0,b}(a; x, y) = \int \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx dy \quad (\text{B.98})$$

On montre, après intégration par rapport à y , et intégration par parties par rapport à x , que

$$M_{n_0,b}(a; x, y) = b \frac{x^{n+1}}{n+1} \log \left(\frac{y-x}{b} + \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} \right) + \frac{1}{n+1} M_{n+1,b}(a, y; x) \quad (\text{B.99})$$

B.19.3 Résolution de $M_{n_1,b}(a; x, y)$.

On a

$$M_{n_1,b}(a; x, y) = \int \int \frac{x^n y}{\sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}}} dx dy \quad (\text{B.100})$$

En remarquant que

$$M_{n_1,b}(a; x, y) = \int x^n M_{1,b}(a, x; y) dx, \quad (\text{B.101})$$

et en reportant la relation trouvée pour $M_{1,b}(a; x, y)$, on obtient pour $M_{n1,b}(a; x, y)$ la relation suivante,

$$M_{n1,b}(a; x, y) = M_{(n+1)0,b}(a; x, y) + b^2 \int x^n \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} dx \quad (\text{B.102})$$

$M_{n1,b}(a; x, y)$ est donc connu à partir de $M_{(n+1)0,b}(a; x, y)$ calculé suivant la relation trouvée plus haut, et de $\int x^n \sqrt{a^2 + \frac{(x-y)^2}{b^2}} dx$, dont l'expression a été déjà trouvée en B.19.1

B.20 Résolution de $L_{nq,b}(0)$ et $L_{q,b}(0, x)$.

Cette section examine le cas $a = 0$ pour le calcul de $L_{nq,b}(a)$ et de $L_{q,b}(a, x)$. Ce cas particulier n'a pas été abordé aux sections B.16 et B.17. Lorsque $a = 0$, les termes à calculer prennent les expressions suivantes,

$$L_{q,b}(0, x) = \int_{-1}^{+1} y^q \log \frac{|x-y|}{b} dy \quad (\text{B.103})$$

$$L_{nq,b}(0) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} x^n y^q \log \frac{|x-y|}{b} dx dy \quad (\text{B.104})$$

Comme d'habitude, introduisons les fonctions primitives

$$L_{q,b}(0, x; y) = \int y^q \log \frac{|x-y|}{b} dy \quad (\text{B.105})$$

$$L_{nq,b}(0; x, y) = \int \int x^n y^q \log \frac{|x-y|}{b} dx dy \quad (\text{B.106})$$

Les intégrales définies $L_{nq,b}(0)$ et $L_{q,b}(0, x)$ peuvent alors être calculées à partir de l'ensemble des relations qui suivent,

$$L_{q,b}(0, x) = L_{q,b}(0, x; 1) - L_{q,b}(0, x; -1) \quad (\text{B.107})$$

$$L_{nq,b}(0) = L_{nq,b}(0; 1, 1) + L_{nq,b}(0; -1, -1) - L_{nq,b}(0; 1, -1) - L_{nq,b}(0; -1, 1) \quad (\text{B.108})$$

$$L_{q,b}(0, x; y) = \frac{q}{q+1} x L_{q-1,b}(0, x; y) + \frac{1}{q+1} y^q (y-x) \log \frac{|x-y|}{b} - \frac{1}{(q+1)^2} y^{q+1} \quad (\text{B.109})$$

$$L_{0,b}(0, x; y) = (y-x) \log \frac{|x-y|}{b} + x - y \quad (\text{B.110})$$

Faisons remarquer que, dans ces deux dernières expressions, le terme $(y-x) \log \frac{|x-y|}{b}$ est nul lorsqu'évalué pour $x = y$.

$$L_{nq,b}(0; x, y) = \frac{q}{q+1} L_{(n+1)(q-1),b}(0; x, y) + \frac{y^{q+1}}{q+1} L_{n,b}(0, y; x) - \frac{y^q}{q+1} L_{n+1,b}(0, y; x) - \frac{1}{(n+1)(q+1)^2} x^{n+1} y^{q+1} \quad (\text{B.111})$$

$$L_{n0,b}(0; x, y) = y L_{n,b}(0, y; x) - L_{n+1,b}(0, y; x) + \frac{x^{n+2}}{n+2} - y \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (\text{B.112})$$

Annexe C

Solution des intégrales $J_{mnpq}^{(k)}$ (résistances de rayonnement)

Soit à résoudre l'intégrale

$$J_{mnpq}^{(k)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \alpha^m \beta^n [(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(\beta - \beta')^2]^k \alpha'^p \beta'^q d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \quad (\text{C.1})$$

avec $(m, n, p, q, k) \in N^5$.

On fera d'abord, comme pour les réactances de rayonnement, les deux remarques utiles suivantes:

$$J_{mnpq}^{(k)} = 0 \quad \text{lorsque } (m + p) \text{ est impair ou } (n + q) \text{ est impair} \quad (\text{C.2})$$

$$J_{mnpq}^{(k)} = J_{pnmq}^{(k)} = J_{mqpn}^{(k)} = J_{pqmn}^{(k)} \quad (\text{C.3})$$

On pourra donc se limiter au calcul de $J_{mnpq}^{(k)}$ lorsque $m \geq p$, $n \geq q$, $(m + p)$ est pair, $(n + q)$ est pair.

La formule du binôme de Newton permet de poser

$$[(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(\beta - \beta')^2]^k = \sum_{i_1=0}^k C_k^{i_1} (\alpha - \alpha')^{2i_1} \frac{1}{r^{2(k-i_1)}} (\beta - \beta')^{2(k-i_1)} \quad (\text{C.4})$$

où l'on a posé

$$C_k^{i_1} = \frac{k!}{i_1!(k - i_1)!} \quad (\text{C.5})$$

De la même manière,

$$(\alpha - \alpha')^{2i_1} = \sum_{i_2=0}^{2i_1} C_{2i_1}^{i_2} \alpha^{i_2} \alpha'^{2i_1-i_2} (-1)^{i_2} \quad (\text{C.6})$$

$$(\beta - \beta')^{2(k-i_1)} = \sum_{i_3=0}^{2(k-i_1)} C_{2(k-i_1)}^{i_3} \beta^{i_3} \beta'^{2(k-i_1)-i_3} (-1)^{i_3} \quad (\text{C.7})$$

Il vient

$$\begin{aligned} & [(\alpha - \alpha')^2 + \frac{1}{r^2}(\beta - \beta')^2]^k = \\ & \sum_{i_1=0}^k \sum_{i_2=0}^{2i_1} \sum_{i_3=0}^{2(k-i_1)} \frac{1}{r^{2(k-i_1)}} C_k^{i_1} C_{2i_1}^{i_2} C_{2(k-i_1)}^{i_3} (-1)^{i_2+i_3} \alpha^{i_2} \beta^{i_3} \alpha'^{2i_1-i_2} \beta'^{2(k-i_1)-i_3} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Donc

$$\begin{aligned} & J_{mnpq}^{(k)} = \\ & \sum_{i_1=0}^k \sum_{i_2=0}^{2i_1} \sum_{i_3=0}^{2(k-i_1)} \frac{1}{r^{2(k-i_1)}} C_k^{i_1} C_{2i_1}^{i_2} C_{2(k-i_1)}^{i_3} (-1)^{i_2+i_3} \\ & \int_{-1}^{+1} \alpha^{m+i_2} d\alpha \int_{-1}^{+1} \beta^{n+i_3} d\beta \int_{-1}^{+1} \alpha'^{p+2i_1-i_2} d\alpha' \int_{-1}^{+1} \beta'^{q+2(k-i_1)-i_3} d\beta' \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} & J_{mnpq}^{(k)} = \\ & \sum_{i_1=0}^k \sum_{i_2=0}^{2i_1} \sum_{i_3=0}^{2(k-i_1)} \frac{1}{r^{2(k-i_1)}} C_k^{i_1} C_{2i_1}^{i_2} C_{2(k-i_1)}^{i_3} (-1)^{i_2+i_3} \\ & \frac{1^{m+i_2+1} + (-1)^{m+i_2+1}}{m+i_2+1} \frac{1^{n+i_3+1} + (-1)^{n+i_3+1}}{n+i_3+1} \frac{1^{p+2i_1-i_2+1} + (-1)^{p+2i_1-i_2+1}}{p+2i_1-i_2+1} \frac{1^{q+2(k-i_1)-i_3+1} + (-1)^{q+2(k-i_1)-i_3+1}}{q+2(k-i_1)-i_3+1} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Rappelons que, par hypothèse, $(m+p)$ est pair et $(n+q)$ est pair. En conséquence, $(m+i_2)$ et $(p+2i_1-i_2)$ sont de même parité, et $(n+i_3)$ et $(q+2(k-i_1)-i_3)$ sont de même parité, et

$$\begin{aligned} & J_{mnpq}^{(k)} = \\ & \sum_{i_1=0}^k \sum_{\substack{i_2=0, \\ (m+i_2) \text{ pair}}}^{2i_1} \sum_{\substack{i_3=0, \\ (n+i_3) \text{ pair}}}^{2(k-i_1)} \frac{1}{r^{2(k-i_1)}} C_k^{i_1} C_{2i_1}^{i_2} C_{2(k-i_1)}^{i_3} (-1)^{m+n} \\ & \frac{16}{(m+i_2+1)(n+i_3+1)(p+2i_1-i_2+1)(q+2(k-i_1)-i_3+1)} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Bibliographie

- [1] C.L. Amba-Rao. On the vibration of a rectangular plate carrying a concentrated mass. *J. Appl. Mech.*, 31:550–551, January 1964.
- [2] R.B. Bhat. Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomial in Rayleigh-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 102:493–499, 1985.
- [3] R.D. Blevins. *Formulas for natural frequency and mode shape*. Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, 1987.
- [4] D.S. Burnett and W.W. Soroka. Tables of rectangular piston radiation impedance functions, with applications to sound transmission through deep apertures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 51:1618–1623, 1969.
- [5] Y.M. Chang and P. Leehey. Acoustic impedance of rectangular panels. *Journal of Sound and Vibration*, 64(2):243–256, 1979.
- [6] L. Cremer, M. Heckl, and E.E. Ungar. *Structure-Borne Sound*. Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin, 1973.
- [7] D.G. Crighton. The Green function of an infinite fluid loaded membrane. *Journal of Sound and Vibration*, 86(3):411–433, 1983.
- [8] D.G. Crighton. The 1988 Rayleigh medal lecture: fluid loading—The interaction between sound and vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 133(1):1–27, 1989.

- [9] D.G. Crighton and D. Innes. Low frequency acoustic radiation and vibration response of locally excited fluid-loaded structures. *Journal of Sound and Vibration*, 91(2):293-314, 1983.
- [10] H.G. Davies. Low frequency random excitation of water-loaded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 15(1):107-126, 1971.
- [11] J.F. Degeorges. *Rayonnement acoustique des plaques en champ proche*. PhD thesis, Université du Maine, 1988.
- [12] D.M. Donskoi, A.E. Ekimov, and A.V. Lebedev. Influence of a mass inhomogeneity on sound radiation from massive plates. *Soviet Physics-Acoustics*, 34(4):362-364, July-August 1988.
- [13] E.H. Dowell and H. Kubota. Asymptotic modal analysis and statistical energy analysis of dynamical systems. *Journal of Applied Mechanics*, 52:949-957, December 1985.
- [14] V.N. Evseev. Sound radiation from an infinite plate with periodic inhomogeneities. *Soviet Physics-Acoustics*, 19(3):226-229, November-December 1973.
- [15] Frank Fahy. *Sound and Structural Vibration*. Academic Press, London, 1985.
- [16] Paul J.T. Filippi. Rayonnement d'une structure vibrante en fluide léger: application des techniques classiques de perturbation. *J. Acoustique*, 2:39-45, Mars 1989.
- [17] B. Forsen and M.J. Crocker. Estimation of acoustic velocity, surface velocity, and radiation efficiency by use of the two-microphone technique. *J. Acoust. Soc. Am.*, 73(3):1047-1053, March 1983.
- [18] M.C. Gomperts. Radiation from rigid baffled, rectangular plates with general boundary conditions. *Acustica*, 30:320-327, 1974.
- [19] M.C. Gomperts. Sound radiation from baffled, thin, rectangular plates. *Acustica*, 37:93-102, 1977.
- [20] D.G. Gorman. *Free Vibration Analysis of Rectangular Plates*. Elsevier North Holland, New York, 1982.

- [21] D.J. Gorman. A general solution for the free vibration of rectangular plates resting on uniform elastic edge supports. *Journal of Sound and Vibration*, 139(2):325–335, 1990.
- [22] R.H. Gutierrez and P.A.A. Laura. Transverse vibrations of rectangular plates elastically restrained against rotation along the edges with varying stiffeners length. *Journal of Sound and Vibration*, 101:122–124, 1985.
- [23] J.-L. Guyader. Modal sampling method for the vibration study of systems of high modal density. soumis.
- [24] J.-L. Guyader. Analyse modale du comportement vibroacoustique des structures – Mécanismes et réduction du bruit généré. *Revue d'Acoustique*, 79:26–37, 1986.
- [25] C.H. Hodges and J. Woodhouse. Vibration isolation from irregularity in a nearly periodic structure: Theory and measurements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 74:894–905, 1983.
- [26] C.H. Hodges and J. Woodhouse. Theories of noise and vibration transmission in complex structures. *Reports on Progress in Physics*, 49:107–170, 1986.
- [27] Miguel C. Junger. Approaches to acoustic fluid–elastic structure interactions. *J. Acoust. Soc. Am.*, 82(4):1115–1121, Octobre 1987.
- [28] Miguel C. Junger and David Feit. *Sound, Structures and Their Interaction*. The MIT Press, Cambridge, Massachussets, 1972.
- [29] Miguel.C. Junger. Pressure radiated by an infinite plate driven by distributed loads. *J. Acoust. Soc. Am.*, 74(2):649–653, August 1983.
- [30] R.F. Keltie and H. Peng. Acoustic power radiated from point-forced thin elastic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 112(1):45–52, 1987.
- [31] R.F. Keltie and H. Peng. The effects of modal coupling on the acoustic power radiation from panels. *Trans. of ASME*, 109:48–54, January 1987.
- [32] N. Kojima, K. Ikoma, and M. Fukada. Estimation of noise emitted by vibration of a plate. *Bulletin of JSME*, 24(193):1233–1239, July 1981.

- [33] G. Krishnappa and J.M. McDougall. Sound intensity distribution and energy flow in the nearfield of a clamped circular plate. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 111:465-471, October 1989.
- [34] Y. Kubota, S. Sekimoto, and E.H. Dowell. The high frequency response of a plate carrying a concentrated mass. *Journal of Sound and Vibration*, 138(2):321-333, 1990.
- [35] K. Lanczos. *The variational principles of mechanics*. Univ. of Toronto Press, Toronto, 1964.
- [36] B. Laulagnet. *Rayonnement acoustique des coques cylindriques, finies, raidies, revêtues d'un matériau de masquage*. PhD thesis, Institut National Des Sciences Appliquées de Lyon, 1989.
- [37] P.A.A. Laura and R.H. Gutierrez. A note on transverse vibrations of stiffened rectangular plates with edges elastically restrained against rotation. *Journal of Sound and Vibration*, 78:139-144, 1981.
- [38] M. Lax. The effect of radiation on the vibration of a circular diaphragm. *J. Acoust. Soc. Am.*, 16:5-13, 1946.
- [39] Arthur W. Leissa. *Vibration of plates*. Technical report, Ohio State University, Ohio State University, 1969.
- [40] F.G. Leppington, E.G. Broadbent, F.R.S. Heron, and K.H. Heron. The acoustic radiation efficiency of rectangular panels. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 382:245-271, 1982.
- [41] F.G. Leppington, E.G. Broadbent, F.R.S. Heron, and K.H. Heron. Acoustic radiation from rectangular panels with constrained edges. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 393:67-84, 1984.
- [42] F.G. Leppington, E.G. Broadbent, F.R.S. Heron, K.H. Heron, and S. Mead. Resonant and non-resonant acoustic properties of elastic panels. I. The radiation problem. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 406:139-171, August 1986.

- [43] Claude Lesueur. Analytical methods for acoustical radiation and transmission. In *Proceedings Inter-Noise 88*, pages 283–288, 1988.
- [44] Claude Lesueur. *Rayonnement Acoustique des Structures*. Collection Département Etudes et Recherches EDF. Eyrolles, 1988.
- [45] H. Levine. On the radiation impedance of a rectangular piston. *Journal of Sound and Vibration*, 89(4):447–455, 1983.
- [46] S.M. Lewis. The inertia of water surrounding a vibrating ship. *Trans. SNAME*, 37:1–20, 1929.
- [47] N.S. Lomas and S.I. Hayek. Vibration and acoustic radiation of elastically supported rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 52(1):1–25, 1977.
- [48] T. Loyau. Determination of radiation efficiency with a three microphone probe. In *Proceedings Inter-Noise 90*, pages 1053–1056, 1990.
- [49] R.H. Lyon. *Statistical Energy Analysis*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1975.
- [50] J.A. Macadam. The measurement of sound radiation from room surfaces in lightweight buildings. *Appl. Acoust.*, 9:103–118, 1976.
- [51] B.R. Mace. Periodically stiffened fluid loaded plates, I: Response to convected harmonic pressure and free wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*, 73(4):473–486, 1980.
- [52] B.R. Mace. Periodically stiffened fluid loaded plates, II: Response to line and point forces. *Journal of Sound and Vibration*, 73(4):487–504, 1980.
- [53] B.R. Mace. Sound radiation from fluid loaded orthogonally stiffened plates. *Journal of Sound and Vibration*, 79(3):439–452, 1981.
- [54] E.B. Magrab. Vibration of a rectangular plate carrying a concentrated mass. *J. Appl. Mech.*, 35:411–412, January 1968.

- [55] G. Maidanik. Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 34:809–826, 1962.
- [56] G. Maidanik and E.M. Kerwin Jr. Influence of fluid loading on the radiation from infinite plates below the critical frequency. *J. Acoust. Soc. Am.*, 40(5):1034–1038, 1966.
- [57] D.J. Mead. Plates with regular stiffening in acoustic media: Vibration and radiation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 88(1):391–401, July 1990.
- [58] D.J. Mead, D.C. Zhu, and N.S. Bardell. Free vibration of an orthogonally stiffened flat plate. *Journal of Sound and Vibration*, 127(1):19–48, 1988.
- [59] F.P. Mechel. Notes on the radiation impedance, especially of piston-like radiators. *Journal of Sound and Vibration*, 123(3):537–572, 1988.
- [60] Leonard Meirovitch. *Analytical methods in Vibration*. The MacMillan Company, New York, 1967.
- [61] H.W. Müller, W. Langer, H.P. Richter, and R. Storm. Praxisreport mashinenakustik. Technical report, Technische Hochschule Darmstadt, Decembre 1982.
- [62] Renée Morin. Orientations de la recherche en matière de contrôle du bruit. Technical report, Commission de la Santé et de la Sécurité au Travail, Septembre 1989.
- [63] M. Mukhopadhyay. Free vibration of rectangular plates with edges having different degrees of rotational restraint. *Journal of Sound and Vibration*, 67:459–468, 1979.
- [64] A.S. Nikiforov. Radiation from a plate of finite dimensions with arbitrary boundary conditions. *Soviet Physics-Acoustics*, 10(2):178–182, October-December 1964.
- [65] H. Peng and P. Banks-Lee. Edge effect on the radiation efficiency of a baffled beam below the critical frequency. *J. Acoust. Soc. Am.*, 88(4):2001–2006, October 1990.
- [66] R.A. Pierri. Study of dynamic absorber for reducing the vibration and noise radiation of plate-like structures. Master's thesis, University of Southampton, 1977.

- [67] Larry D. Pope and Ralph C. Leibowitz. Intermodal coupling coefficients for a fluid-loaded rectangular plate. *J. Acoust. Soc. Am.*, 56(2):408-415, August 1974.
- [68] A.J. Price and M.J. Crocker. Sound transmission through double panels using statistical energy analysis. *J. Acoust. Soc. Am.*, 47(3):683-693, 1970.
- [69] V.N. Romanov. Sound radiation from an infinite plate reinforced with a finite set of beams and driven by a point force. *Soviet Physics-Acoustics*, 23(1):63-68, January-February 1977.
- [70] B.E. Sandman. Motion of a three-layered elastic-viscoelastic plate under fluid loading. *J. Acoust. Soc. Am.*, 57(5):1097-1107, May 1975.
- [71] B.E. Sandman. Fluid-loaded vibration of an elastic plate carrying a concentrated mass. *J. Acoust. Soc. Am.*, 61(6):1503-1510, June 1977.
- [72] A.F. Seybert and Y.K. Tsui. The radiation efficiency of mass-loaded, slender, baffled beams. *Journal of Sound and Vibration*, 120(3):487-498, 1988.
- [73] E. Skudrzyk. *Simple and complex vibratory systems*. Penn State University Press, University Park, 1968.
- [74] Eugen Skudrzyk. The mean-value method for predicting the dynamic response of complex vibrators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 67(4):1105-1135, April 1980.
- [75] Eugen Skudrzyk. Understanding the dynamic behavior of complex vibrators. *Acustica*, 64(3):123-147, September 1987.
- [76] J.C. Snowdon. Vibration of simply supported rectangular and square plates to which lumped masses and dynamic vibration absorbers are attached. *J. Acoust. Soc. Am.*, 57:646-654, 1975.
- [77] Werner Soedel. *Vibrations of plates and shells*. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1981.
- [78] M.N. Soulami. Rayonnement acoustique pour une plaque simple ou avec nervures. Master's thesis, Université de Sherbrooke, 1991.

- [79] P.R. Stepanishen. The radiation impedance of a rectangular piston. *Journal of Sound and Vibration*, 55(2):275–288, 1977.
- [80] G. Strang. *Linear algebra and its applications*. Academic Press, New York, 1980.
- [81] W.A. Strawderman, S.-H. Ko, and A.H. Nutall. The real roots of a fluid-loaded plate. *J. Acoust. Soc. Am.*, 66(2):579–585, August 1979.
- [82] W.Y. Strong. Experimental methods to measure low-frequency sound radiation – Nearfield Acoustical Holography. Master's thesis, Pennsylvania State University, 1982.
- [83] Hideo Suzuki and Jiri Tichy. Sound radiation from an elastically supported circular plate. *J. Acoust. Soc. Am.*, 65(1):106–111, January 1979.
- [84] B.Z. Vlassov. *Pièces longues en voile mince*. Eyrolles, Paris, 1962.
- [85] G. von Venzke, P. Dämmig, and H.W. Fischer. Der Einfluss von Versteifungen auf die Schallabstrahlung und Schalldämmung von Metalwänden. *Acustica*, 29(1):29–40, 1973.
- [86] C.E. Wallace. Radiation resistance of a baffled beam. *J. Acoust. Soc. Am.*, 51(3):936–945, 1972.
- [87] C.E. Wallace. Radiation resistance of a rectangular panel. *J. Acoust. Soc. Am.*, 51(3):946–952, 1972.
- [88] G.B. Warburton. The vibration of rectangular plates. *Proc. Inst. Mech. Eng., ser. A*, 168(12):371–384, 1954.
- [89] E.E. Watson. Holographic sound detection of a rectangular plate with a mass loading. *Journal of Sound and Vibration*, 36(4):439–441, 1974.
- [90] Earl G. Williams. A series expansion of the acoustic power radiated from planar sources. *J. Acoust. Soc. Am.*, 73(5):1520–1524, May 1983.
- [91] J.-R. Wu and W.H. Liu. Vibration of rectangular plates with edge restraints and intermediate stiffeners. *Journal of Sound and Vibration*, 123(1):103–113, 1988.