sctm06
sociedad, ciencia, tecnología y matemáticas 2006

Mapas, colores y números

Marta Macho Stadler
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

En este texto se recoge la conferencia del mismo nombre impartida durante el ciclo de conferencias SCTM2006. El título, un tanto *misterioso,* esconde un famoso problema matemático que surgió en el siglo XIX, ha tardado más de 100 años en resolverse y ha provocado diversas controversias a lo largo de los años en que muchas personas (no todas con formación matemática *seria*) intentaron resolverlo sin mucho éxito: me refiero a la llamada *conjetura de los cuatro colores.*

¿Qué dice esta conjetura?

Afirma que bastan *cuatro* colores para colorear un mapa geográfico plano sin que dos países colindantes tengan el mismo color.

Los mapas a los que aludimos son siempre conexos (en caso contrario podría estudiarse el problema por separado) y cada una de sus regiones es también de una única pieza, es decir no se admite una figura como la figura 1, donde el *país* E se divide en dos trozos disjuntos.

Además, dos territorios distintos no pueden tocarse sólo en un punto, y así se pueden ignorar regiones con una única línea frontera (figuras 2 y 3).

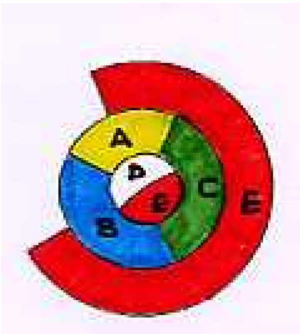


Figura 1.

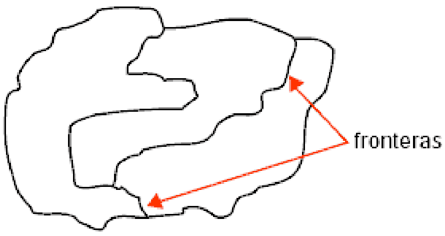


Figura 2.

Figura 3.

Se podría pensar que cuanto más complicado (en cantidad de regiones, formas y maneras de colindar) es el mapa, mayor número de colores será preciso; pero la prueba sorprendente, es que no es así…

La conjetura de los cuatro colores es un *problema topológico*, ya que lo importante no es la forma de las regiones, sino como están colocadas las unas respecto a las otras.

Aunque parece un *juego de niños* (se entiende perfectamente lo que dice la conjetura y parece que basta con tener un poco de *habilidad* para conseguir un 4-coloreado), vamos a ver a lo largo de estas líneas que esta afirmación no es cierta: su demostración involucra técnicas matemáticas complejas.

Además, se trata de un problema sin ninguna utilidad práctica aparentemente: es un reto a la razón humana y ahí radica precisamente su interés.

En los siguientes apartados se describen las etapas de la demostración de manera cronológica, destacando además algunas anécdotas curiosas.

1. LA AVENTURA COMIENZA

Antes de empezar, conviene destacar que la conjetura de los cuatro colores sobre mapas planos equivale al mismo enunciado sobre mapas esféricos: en efecto, la demostración de esta propiedad se deduce por simple proyección estereográfica, como muestra la figura 4.

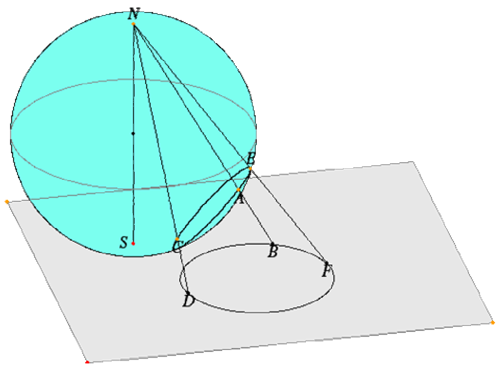


Figura 4.

La propiedad clave en la resolución de la conjetura es la *fórmula de Euler*, que se define para mapas a partir de la misma fórmula para poliedros de la manera que a continuación se describe: dado un poliedro cualquiera, se infla sobre una esfera, se proyecta estereográficamente y se obtiene una proyección del poliedro sobre el plano.

La *fórmula de Euler para poliedros* afirma que:

$$\boldsymbol{c - a + v = 2},$$

donde $\boldsymbol{c}$ es el número de caras, $\boldsymbol{a}$ el de aristas y $\boldsymbol{v}$ el de vértices del poliedro estudiado.

Gracias al proceso recién descrito, puede hablarse de la *fórmula de Euler para mapas*:

$$\boldsymbol{r - l + p = 2},$$

donde $\boldsymbol{r}$ es el número de regiones, $\boldsymbol{l}$ el de líneas frontera y $\boldsymbol{p}$ el de puntos de encuentro entre dos líneas frontera diferentes, y donde hay que tener en cuenta que la región exterior del mapa debe de contarse (corresponde a la región más cercana al polo norte antes de la proyección estereográfica).

Y la *aventura* comienza…

Francis Guthrie (1839-1899, foto 1), abogado y botánico, observa que es capaz de colorear un mapa complicado de los cantones de Inglaterra con sólo 4 colores (figura 5). En 1852, enuncia la conjetura a su hermano Frederick (University College London) y éste a Augustus de Morgan, su profesor.

Foto 1.

Francis Guthrie observa además que 3 colores no son suficientes, mostrando el llamado *diagrama crítico* que aparece en la figura 6, y que obviamente precisa de 4 colores para no contradecir las condiciones de la conjetura.

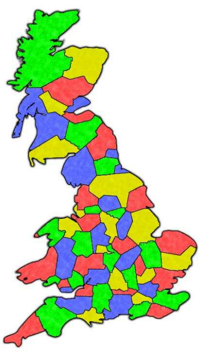


Figura 5.

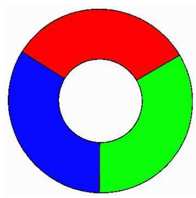


Figura 6.

Frederick Guthrie (1833-1886, foto 2), hermano del anterior y fundador de la Physical Society en 1874, es el primero en observar que el problema de los cuatro colores no se puede generalizar a dimensión 3: en efecto, según un ejemplo posterior de Heinrich Tietze (1880-1964), es posible construir un ejemplo de mapa tridimensional que precise tantos colores como se desee (se describe, por ejemplo en la página 20 de **[W2]**).

Augustus de Morgan (1806-1871, foto 3) tiene un gran interés por esta conjetura y difunde entre sus colegas su importancia.

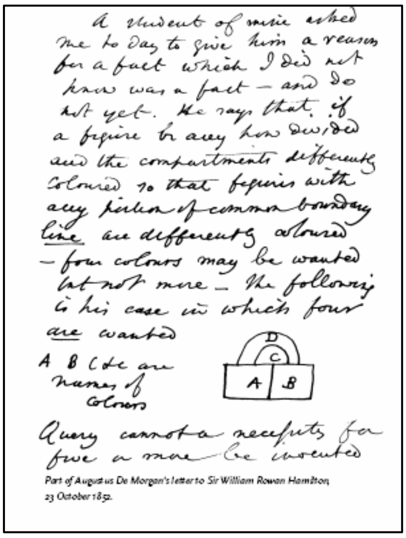
Foto 2.

Foto 3.

Una de las primeras personas con las que *habla* (de manera epistolar, como es costumbre en esa época) es con el matemático y físico irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), que no comparte el interés de De Morgan por el problema.

De Morgan le escribe una carta el 23 de octubre de 1852…

> A student of mine [*se refiere a Frederick Guthrie*] asked me today to give him a reason for a fact which I did not know was a fact - and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured - four colours may be wanted, but not more - the following is the case in which four colours are wanted.
>
> Query cannot a necessity for five or more be invented […] (foto 4).



A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact — and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured — four colours may be wanted but not more — the following is his case in which four are wanted

A B C D are names of colours

Query cannot a necessity for five or more be invented

Part of Augustus De Morgan's letter to Sir William Rowan Hamilton, 23 October 1852.

Foto 4.

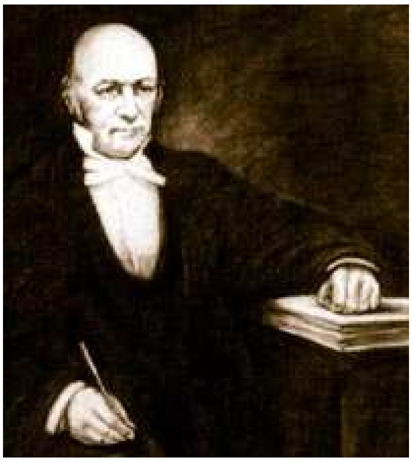


Foto 5.

En ese momento Hamilton (foto 5) está trabajando en teoría de cuaterniones, y responde a De Morgan con sarcasmo:

> I am not going to attempt your quaternion of colour very soon.

Así que, decepcionado, De Morgan se pone en contacto con otros matemáticos.

En 1853, escribe al famoso filósofo de Cambridge William Whewell (1794-1866, foto 6), describiendo la conjetura como un axioma matemático.

El problema de los cuatro colores cruza el Atlántico y encuentra al matemático, filósofo y lógico Charles Sanders Peirce (1839-1914, foto 7) que da un seminario sobre la demostración, aunque nunca la escribe…

Tras la muerte de De Morgan en 1871, el problema de los cuatro colores parece dormido. Aunque Peirce sigue buscando su demostración, ninguno de los amigos británicos de De Morgan lo mencionan.

Afortunadamente, el problema no está del todo enterrado, gracias a Arthur Cayley (1821-1895, foto 8) de la Universidad de Cambridge.

En junio de 1878, Arthur Cayley acude a un Encuentro de la London Mathematical Society, donde hace la siguiente pregunta:

> Has a solution been given of the statement that in colouring a map of a country, divided into counties, only four colours are required, so that no two adjacent counties should be painted in the same colour?

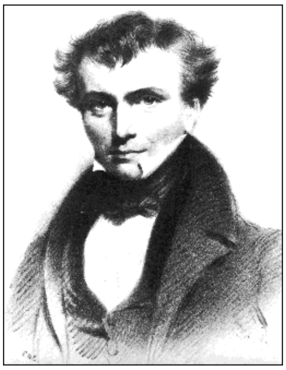


Foto 6.

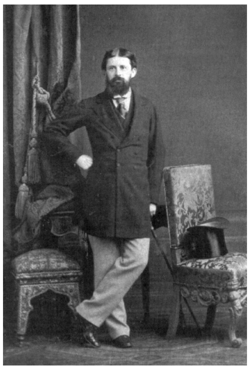


Foto 7.

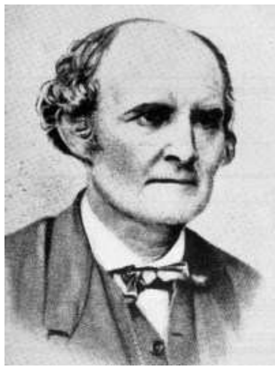
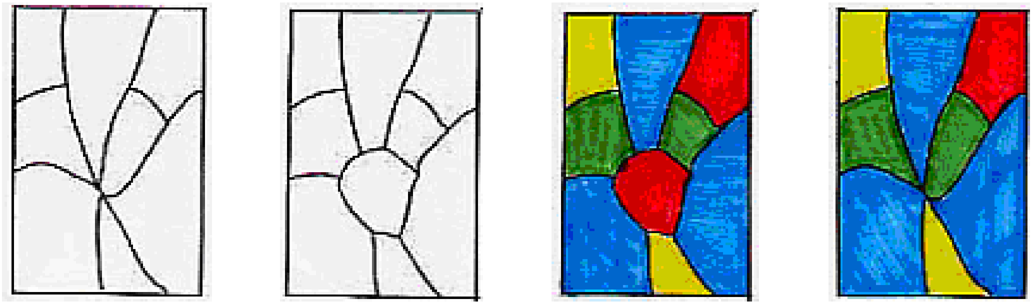


Foto 8.

Cayley está realmente interesado en el teorema de los cuatro colores y, tras haber presentado su pregunta, publica en 1879 una nota corta sobre el tema, no en una revista matemática, sino en los *Proceedings of the Royal Geographical Society*, donde admite su dificultad:

> I have not succeeded in obtaining a general proof: and it is worth while to explain wherein the difficulty consists.

Entre otros, observa que cuando se intenta probar el teorema de los cuatro colores pueden imponerse condiciones más restrictivas sobre los mapas a colorear; en particular, basta con limitarse a *mapas cúbicos*, es decir, aquellos en los que hay *exactamente* 3 regiones en cada punto de encuentro. En efecto, consideremos un mapa en el que hay más de 3 regiones en alguno de los puntos de encuentro; sobre este punto puede pegarse un pequeño parche que produce un mapa cúbico. Si se puede colorear este mapa con cuatro colores, se puede obtener un 4-coloreado del mapa original simplemente aplastando el parche en un punto… (ver figura 7).



mapa original | parcheado | coloreado | coloreado final

Figura 7.

2. LA *FRUSTRADA* PRUEBA DE KEMPE COMO CLAVE DE LA DEMOSTRACIÓN DEFINITIVA

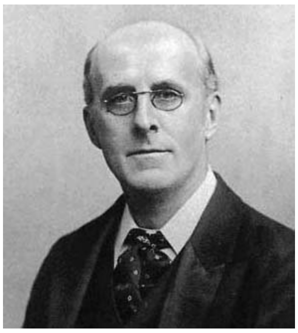


Foto 9.

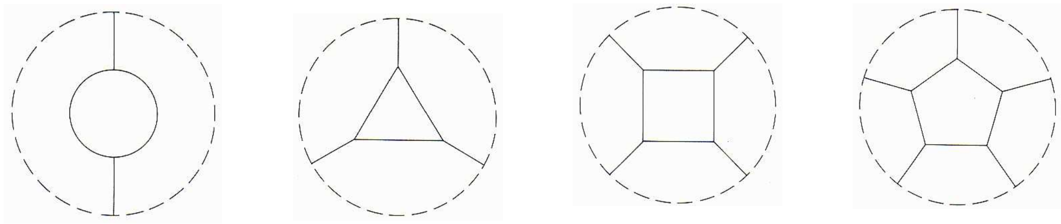
Alfred Bray Kempe (1849-1922, foto 9) aprende matemáticas de Cayley y se gradúa en 1872, con distinción en matemáticas.

A pesar de su pasión por las matemáticas y la música (era un excelente cantante), elige la profesión de abogado (se especializa en ley eclesiástica), dejando las matemáticas, la música y el alpinismo como pasatiempos.

En 1872 escribe su primer trabajo matemático sobre la solución de ecuaciones por medios mecánicos y cinco años más tarde, estimulado por un descubrimiento de Charles Nicholas Peaucellier (1832-1913) sobre un mecanismo para trazar líneas rectas, publica su famoso tratado *How to draw a straight line: a lecture on linkages* (Nature Series, MacMillan and Co., 1877).

Kempe se interesa por el problema de los cuatro colores tras la pregunta de Cayley en la London Mathematical Society. En junio de 1879 obtiene su solución del teorema de los cuatro colores y lo publica primero en *Nature* y a final de ese año lo difunde en el *American Journal of Mathematics.* En 1880, publica unas versiones simplificadas de su prueba en los *Proceedings of the London Mathematical Society*, donde corrige algunas erratas de su prueba original, pero deja intacto el error fatal.

Kempe usa la fórmula de Euler para mapas cúbicos para obtener la llamada *counting formula*, que permite probar que: *Todo mapa tiene al menos una región con,* *como mucho, cinco regiones vecinas,* es decir, cada mapa contiene al menos un dígono, un triángulo, un cuadrado o un pentágono (ver figura 8).



Dígono Triángulo Cuadrado Pentágono

Figura 8.

En efecto, si $\boldsymbol{C_i}$ representa la cantidad de regiones con $\boldsymbol{i}$ comarcas vecinas en el mapa, demuestra que:

$$\mathbf{4}\boldsymbol{C_2} + \mathbf{3}\boldsymbol{C_3} + \mathbf{2}\boldsymbol{C_4} + \boldsymbol{C_5} - \boldsymbol{C_7} - \mathbf{2}\boldsymbol{C_8} - \mathbf{3}\boldsymbol{C_9} - \ldots = \mathbf{12},$$

por lo que debe de existir un $\boldsymbol{C_i}$ (para $\boldsymbol{i}$ = 2, 3, 4, 5) no nulo.

Además, si $\boldsymbol{C_2 = C_3 = C_4 = 0}$, debe de ser $\boldsymbol{C_5}$ mayor o igual a **12**, es decir: *Un mapa cúbico que no contiene ni dígonos, ni triángulos ni cuadrados, debe contener al menos* **12** *pentágonos.*

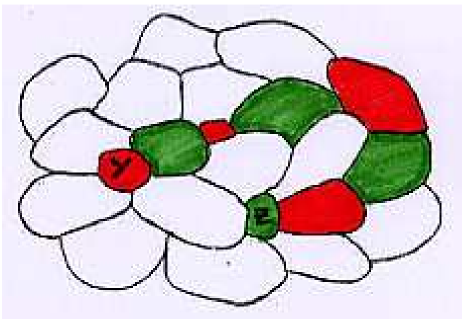


Figura 9.

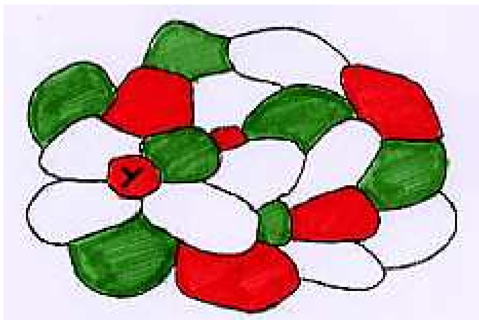


Figura 10.

Veamos a continuación la *inspirada* (y sencilla) demostración de Kempe: si $\boldsymbol{X}$ es una región de un mapa cúbico $\boldsymbol{M}$, denotamos por $\boldsymbol{v(X)}$ el número de las comarcas que le son colindantes. La prueba se hace precisamente por inducción sobre el número de regiones. Como $\boldsymbol{M}$ es un mapa cúbico, sabemos que existe una región $\boldsymbol{X}$ con $\boldsymbol{v(X) \leq 5}$. Suponemos entonces que el mapa $\boldsymbol{M \backslash \{X\}}$ es 4-coloreable, y se trata de ver que $\boldsymbol{M}$ también lo es. Hay tres casos posibles:

Si $\boldsymbol{v(X) = 1}$, **2** ó **3**, obviamente disponemos de al menos un color para colorear $\boldsymbol{X}$ con él.

Supongamos que $\boldsymbol{v(X) = 4}$. Antes de continuar, debemos introducir dos nuevos términos.

Si $\boldsymbol{Z}$ e $\boldsymbol{Y}$ son dos regiones, por ejemplo, $\boldsymbol{Y}$ de color rojo y $\boldsymbol{Z}$ de color verde en un mapa 4-coloreado, se llama *cadena de Kempe rojo-verde de* $\boldsymbol{Y}$ *a* $\boldsymbol{Z}$ a un camino que va de $\boldsymbol{Y}$ a $\boldsymbol{Z}$, alternando los colores rojo y verde (figura 9).

Una *componente rojo-verde* de $\boldsymbol{Y}$ es el conjunto de todas las regiones $\boldsymbol{Z}$ del mapa, tales que existe una cadena de Kempe rojo-verde de $\boldsymbol{Y}$ a $\boldsymbol{Z}$ (figura 10).

El interés de estas dos definiciones es que se pueden invertir los colores rojo y verde en una componente rojo-verde cualquiera de un grafo 4-coloreado para obtener un nuevo 4-coloreado respetando la conjetura de los cuatro colores, como se muestra en el ejemplo de las figuras 11 y 12.

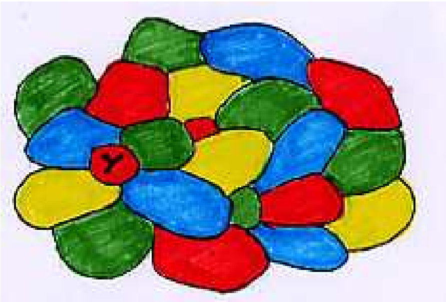


Figura 11. Carta original.

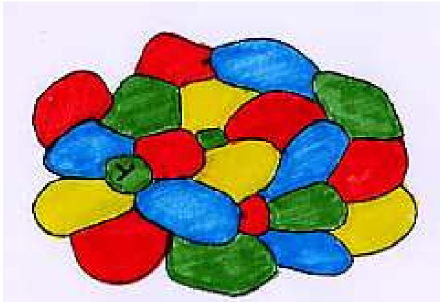


Figura 12. Carta obtenida por inversión de la componente rojo-verde.

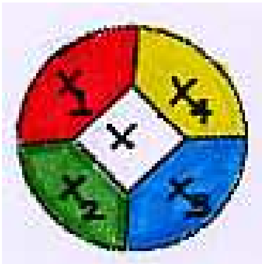


Figura 13.

En el caso que estamos estudiando en que $\boldsymbol{v(X) = 4}$, un entorno de $\boldsymbol{X}$ es de la forma indicada en la figura 13.

Y se distinguen dos posibilidades:

a) $\boldsymbol{X_3}$ no está en la componente rojo-azul de $\boldsymbol{X_1}$.
b) $\boldsymbol{X_3}$ está en la componente rojo-azul de $\boldsymbol{X_1}$.

Veámoslas por separado:

a) Si $\boldsymbol{X_3}$ no está en la componente rojo-azul de $\boldsymbol{X_1}$, entonces se invierten el rojo y el azul en esta componente y se libera un color (en el ejemplo de lasa figuras 14 y 15, el rojo) para $\boldsymbol{X}$.
b) Si $\boldsymbol{X_3}$ está en la componente rojo-azul de $\boldsymbol{X_1}$, entonces $\boldsymbol{X_2}$ no está en la componente amarillo-verde de $\boldsymbol{X_4}$, y se hace un cambio en la componente de $\boldsymbol{X_4}$, rescatando un color (en el ejemplo de las figuras 16 y 17, el amarillo) para $\boldsymbol{X}$.

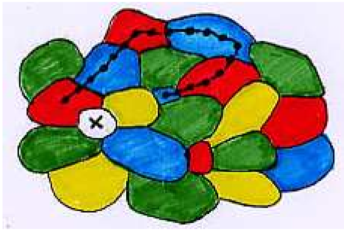


Figura 14.

Figura 15.

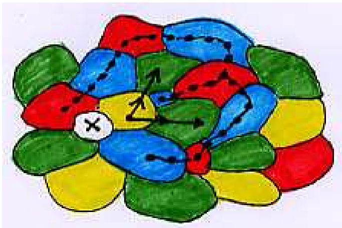


Figura 16.

Figura 17.

Figura 18.

Finalmente, supongamos que $\boldsymbol{v(X) = 5}$, con lo que un entorno de $\boldsymbol{X}$ es de la forma que se muestra en la figura 18.

Se distinguen dos posibilidades:

a) $\boldsymbol{X_2}$ no pertenece a la componente amarilla-verde de $\boldsymbol{X_5}$ ó $\boldsymbol{X_2}$ no pertenece a la componente azul-verde de $\boldsymbol{X_4}$,

b) $\boldsymbol{X_2}$ pertenece a la componente amarilla-verde de $\boldsymbol{X_5}$ y $\boldsymbol{X_2}$ pertenece a la componente azul-verde de $\boldsymbol{X_4}$.

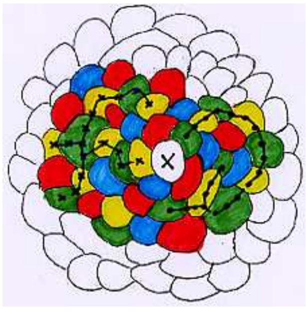


Figura 19.

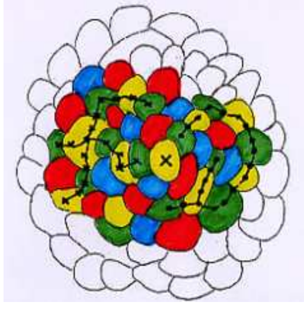


Figura 20.

Veámoslas por separado.

a) Supongamos que $\boldsymbol{X_2}$ no pertenece a la componente amarilla-verde de $\boldsymbol{X_5}$ (el otro caso se hace análogamente). Entonces, se invierten el amarillo y el verde en esta componente y queda libre un color (en el caso representado debajo, el amarillo) para $\boldsymbol{X}$.
b) Si $\boldsymbol{X_2}$ pertenece a la componente amarilla-verde de $\boldsymbol{X_5}$ y $\boldsymbol{X_2}$ pertenece a la componente azul-verde de $\boldsymbol{X_4}$, se invierten las componentes roja-azul de $\boldsymbol{X_1}$ y roja-amarilla de $\boldsymbol{X_3}$ para liberar el rojo para $\boldsymbol{X}$.

Y así, la demostración de Kempe ha finalizado *con éxito.*

Esta prueba es aceptada rápidamente y pronto empieza a formar parte del *folklore* matemático.

Uno de los ingleses victorianos que se entretiene con el teorema de los cuatro colores es Lewis Carroll. Bajo su nombre real de Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898, foto 10) enseña matemáticas durante muchos años en Christ Church de Oxford. A Carroll le encanta inventar puzzles y juegos. Uno de ellos es precisamente:

- A is to draw a fictitious map divided into counties.
- B is to colour it (or rather mark the counties with names of colours) using as few colours as possible.
- Two adjacent counties must have different colours.
- A's object is to force B to use as many colours as possible.

How many can he force B to use?

Foto 10.

Foto 11.

Foto 12.

Todos piensan que debe de haber una prueba más corta…

En 1887, el director del Clifton College organiza un concurso para encontrar una demostración del teorema de los cuatro colores que ocupe *menos de 30 líneas y una página de diagramas*.

Entre otros participantes, el Obispo de Londres Frederick Temple (1891-1902, foto 11) presenta en 1889 una *demostración* en el *Journal of Education*… por supuesto *incorrecta.*

Percy John Heawood (1861-1955, foto 12) publica «Map Colour Theorem» en el *Journal of Pure and Applied Mathematics* en 1890. Encuentra, *muy a su pesar*, un caso para el que la prueba de Kempe no funciona, ilustrado en la figura 21.

Aquí se encuentra el error: en efecto, en la prueba dada por Kempe, en el caso en que $\boldsymbol{v(X) = 5}$, las componentes amarilla-verde de $\boldsymbol{X_5}$ y azul-verde de $\boldsymbol{X_4}$ pueden cruzarse (el caso b) en la discusión anterior). Y entonces, las componentes rojo-azul de $\boldsymbol{X_1}$ y rojo-amarillo de $\boldsymbol{X_3}$ no pueden invertirse simultáneamente…

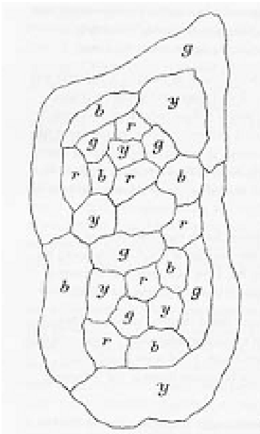


Figura 21.

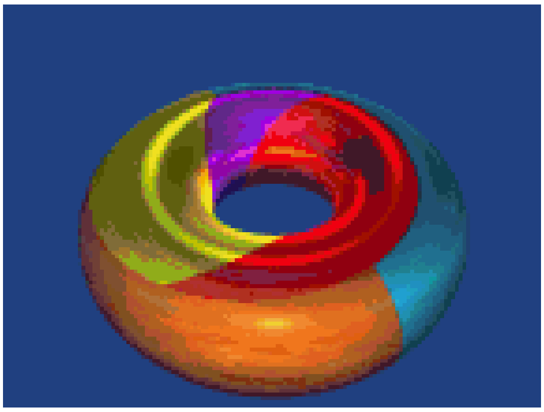


Foto 13. Fuente: http://www.johnstonsarchive.net.

Kempe admite su error en las páginas de los *Proceedings of the London Mathematical Society*, y el 9 de abril de 1891 dice lo siguiente en un encuentro de la citada sociedad matemática:

> My proof consisted of a method by which any map can be coloured with four colours. Mr. Heawood gives a case in which the method fails, and thus shows the proof to be erroneous. I have not succeeded in remedying the defect, though it can be shown that the map which Mr. Heawood gives can be coloured with four colours, and thus his criticism applied to my proof only and not to the theorem itself.

A pesar del error encontrado, Heawood usa el argumento de las cadenas de Kempe para probar el teorema de los 5 colores. Y demuestra también que el número máximo $\boldsymbol{N}$ de colores necesarios para colorear un mapa (su llamado *número cromático*) sobre una superficie de género $\boldsymbol{g > 0}$ (es decir, todas menos la esfera) sin borde es la parte entera del número:

$$\mathbf{1/2\ (7+ (48}g\mathbf{+1)^{1/2}).}$$

Este es el denominado *problema de coloreado de mapas de Heawood.*

Respecto a este último problema, en 1968, Gerhard Ringel y Ted Youngs prueban que para toda superficie sin borde *orientable* de género $\boldsymbol{g > 0}$ o toda superficie sin borde *no orientable* distinta de la botella de Klein, $\boldsymbol{N}$ es de hecho el número exacto de colores precisos.

Por ejemplo, para colorear mapas tóricos son necesarios… ¡7 colores! (en este caso $\boldsymbol{g=1}$, y basta con sustituir en la fórmula dada por Heawood).

Usando de nuevo esta fórmula, se demuestra que el 4-coloreado del doble toro precisa de 8 colores (aquí es ***g*=2**):

Foto 14. Bernard Frize: *Percy John Heawood Conjecture (Edition for Parkett 74)*, 2005.

Foto 15.

Para la botella de Klein son precisos 6 colores (uno menos que el supuesto número que le correspondería ***N*=7**), como demuestra Thomas L. Saaty en 1986. Para la banda de Möbius, que es una superficie con borde, se necesitan también 6 colores (aquí la fórmula de Heawood no se puede aplicar).

¡El único caso no resuelto es el de la esfera (el plano)!

3. TRAS MÁS DE UN SIGLO DE AVENTURA… ¿UN ORDENADOR RESUELVE EL PROBLEMA?

Hasta este momento, la demostración se ha planteado en términos de mapas, pero existe una manera dual de abordarla: sustituyendo los mapas por grafos. ¿Cómo? Se marca la capital de cada país del mapa dado, se unen las capitales de países contiguos y se obtiene el *grafo dual* del mapa. Colorear el mapa equivale a pintar las capitales (*vértices del grafo*), asignando distintos tonos a dos capitales unidas por una trayectoria (*arista*) (figuras 22 y 23).

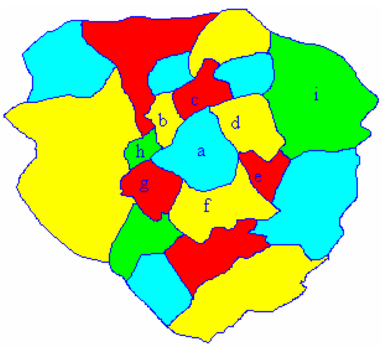


Figura 22. Mapa coloreado.

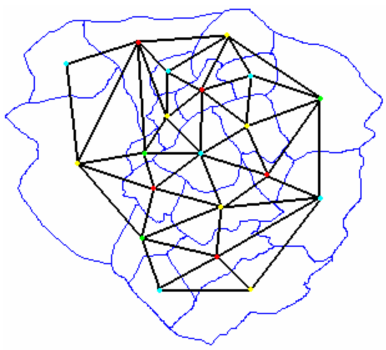


Figura 23. Grafo dual coloreado.

Los grafos duales de mapas son siempre *planarios*, es decir, se puede dibujar en el plano una representación concreta del grafo, en la cual las aristas no se corten excepto en un eventual vértice común. Por ejemplo, el grafo llamado $\boldsymbol{K_4}$ que aparece en la figura 24 es planario, como se demuestra mediante las transformaciones indicadas:

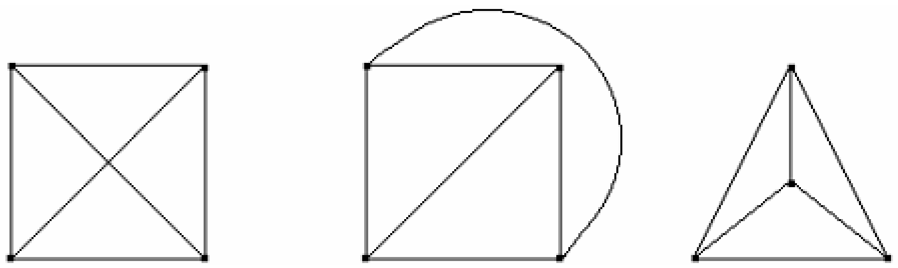


Figura 24.

El grafo $\boldsymbol{K_4}$. Dos representaciones planarias de $\boldsymbol{K_4}$.

Además, es fácil probar que:

1. un mapa es cúbico si, y sólo si, su grafo dual es triangulado (es decir, un grafo planario, en el que cada cara tiene exactamente tres aristas),
2. el número de regiones colindantes se corresponde con el grado de cada vértice (es decir, el número de aristas incidentes),
3. la fórmula de Euler se hereda para grafos duales, es decir:

***Núm*(*vértices*) – *Núm*(*aristas*) + *Núm*(*caras*) = 2.**

Existe una aproximación alternativa al teorema de los cuatro colores: suponemos que la conjetura es falsa, es decir, se conocen mapas (grafos) que no pueden 4-colorearse. Entre estos mapas (grafos) que necesitan 5 colores o más, debe de haber alguno con el *menor número posible de regiones*: es un *minimal criminal*… así un minimal criminal no puede 4-colorearse, pero un mapa (grafo) con menos regiones (vértices), sí.

Entonces, para probar el teorema de los cuatro colores hay que demostrar que no existen minimales criminales... y eso se consigue encontrando condiciones restrictivas sobre este tipo de mapas (grafos).

De hecho, en este nuevo lenguaje, lo que Kempe demuestra con su prueba es que un minimal criminal no puede contener dígonos, triángulos o cuadrados (en esta prueba es en la que usa su método de cadenas)... y se *equivoca* al intentar probar que tampoco puede contener pentágonos. Precisamente, si hubiese conseguido esto último, habría quedado establecida la conjetura: no podrían existir minimales criminales ya que, como se ha comentado antes, cualquier mapa debe contener obligatoriamente un dígono, un triángulo, un cuadrado o un pentágono.

La demostración correcta del teorema de los cuatro colores toma la de Kempe, pero para la inducción, en vez de eliminar un único vértice, se recorta un determinado trozo del grafo (una *configuración*).

Los siguientes conceptos son los fundamentales en la prueba:

1. una *configuración* en un grafo es un ciclo con vértices internos triangulados;
2. un *conjunto inevitable* ***K*** es un conjunto finito de configuraciones tal que todo grafo contiene una copia conforme de una ***k*** de ***K***: de hecho, Kempe demuestra que para mapas cúbicos ***K***={dígonos, triángulos, cuadrados, pentágonos} es un conjunto inevitable (y se equivoca);

3. ***k*** es *una configuración reducible,* si se puede deducir el coloreado de cualquier grafo que contenga a ***k***, a partir de un grafo menor.

El plan de la prueba consiste entonces en encontrar un conjunto inevitable ***K*** y si ***K*** estuviese formado sólo de configuraciones reducibles, la demostración del teorema de los cuatro colores estaría terminada ya que, en tal caso, no podría existir un minimal criminal.

Foto 16.

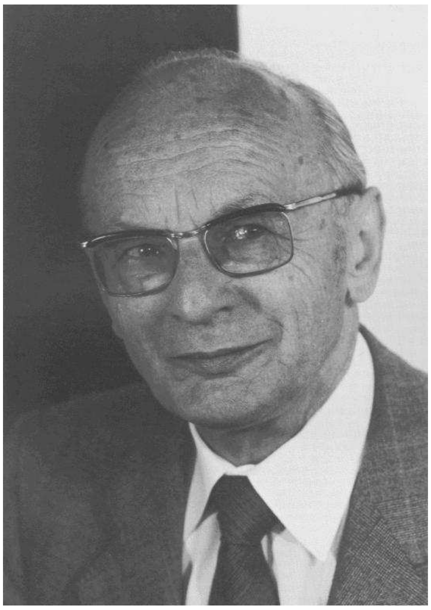


Foto 17.

En 1913, George David Birkhoff (1884-1944, foto 16) publica el artículo «The reducibility of maps», donde avanza en el estudio de los conjuntos reducibles.

Esta gran contribución es utilizada por otros matemáticos para demostrar la conjetura para mapas con ciertas cantidades (pequeñas) de regiones.

Mucha más gente sigue trabajando en el tema…

Uno de ellos es Heinrich Heesch (1906-1995, foto 17), graduado en matemáticas y música.

Heesch no es un matemático cualquiera: resuelve en 1932 uno de los 23 problemas de Hilbert de 1900, el llamado *regular parquet problem* (construcción de un tipo particular de embaldosamiento del plano), que es parte del problema 18 de Hilbert.

En 1969, Heinrich Heesch sistematiza la prueba de la reducibilidad, desarrollando un algoritmo que intenta implementar con ordenador. Realiza diversos tests con el programa *Algol 60* en una máquina *CDC1604A*, y entra ya en contacto en América con su alumno Wolfgang Haken. Anuncia que la conjetura puede resolverse estudiando *solamente* 8.900 configuraciones.

Además, a través de su *algoritmo de descarga,* propone un método de construcción de conjuntos inevitables.

En efecto, para generar un conjunto inevitable de configuraciones, la idea de Heesch es considerar el grafo como una *red eléctrica*, asociando a cada vértice una *carga* inicial de **6-*d*(*v*)**, donde ***d*(*v*)** es el grado del vértice ***v*** (figura 25).

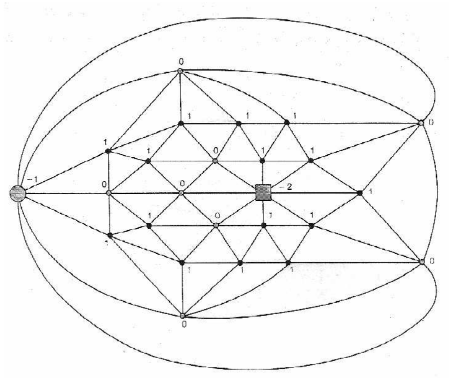


Figura 25.

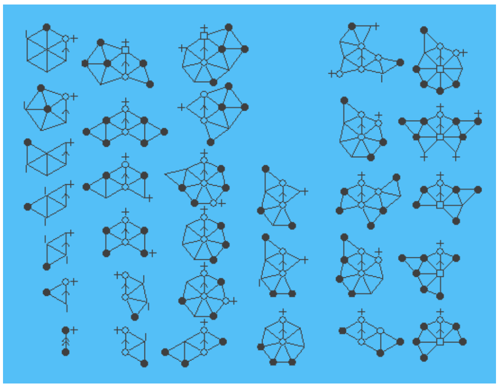


Figura 26. Una lista de configuraciones inevitables.

Usando la fórmula de Euler, Heesch prueba que la suma de las cargas en un grafo triangulado es **12**.

Si se desplazan las cargas eléctricas sobre la red (con su *algoritmo de descarga*), la suma total no ha variado, debe de seguir siendo 12: los vértices cargados positivamente pueden ceder cargas, los cargados negativamente pueden recibir y los de carga nula no intercambian. Con este proceso, su objetivo es eliminar de esta *red eléctrica* los vértices de carga negativa, obteniendo un conjunto de configuraciones con vértices de cargas positivas o nulas: como todo grafo triangulado es de carga total 12, debe contener al menos una de las configuraciones (cuya geometría dependerá del proceso de descarga elegido) del conjunto anterior, que forma entonces un *conjunto inevitable*.

Una vez obtenida la extensa lista de configuraciones inevitables, si se prueba que todas son reducibles se dispone finalmente de una prueba inductiva de la conjetura (figura 26).

Mientras tanto, otros matemáticos comprueban la conjetura, tomando mapas con cantidades cada vez mayores de regiones (por ejemplo, Ore y Stemple, especialistas en teoría de grafos, demuestran en 1970 que cualquier mapa con 39 regiones es 4-coloreable).

El matemático y divulgador Martin Gardner (1914-, foto 18), editor de los «Mathematical Games» de la revista *Scientific American*, publica el 1 de abril de 1975 un artículo pretendiendo haber demostrado que el mapa de 110 regiones (que llama *el mapa de McGregor*) de la figura 27 requiere necesariamente 5 colores: se tiene así un contraejemplo, invalidando la por entonces aún conjetura de los cuatro colores.

En ese artículo [«Mathematical Games: Six Sensational Discoveries that Somehow or Another have Escaped Public Attention», *Scientific American* 232, 127-131, 1975], Gardner rebate algunas teorías científicas bien asentadas… destacamos, como muestra, tres de los seis *descubrimientos:*

1. da una refutación de la teoría de la relatividad de Einstein,
2. anuncia que Leonardo había inventado el retrete que se limpiaba con el agua de su cisterna,
3. argumenta que la base de los logaritmos naturales, el número **e**, elevada a una cierta potencia daba como resultado el número entero 262537412640768744.

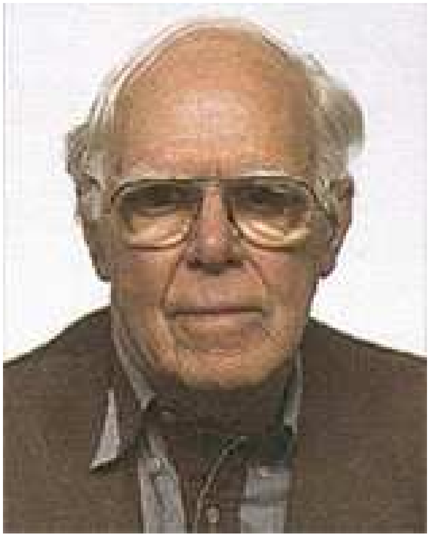


Foto 18.

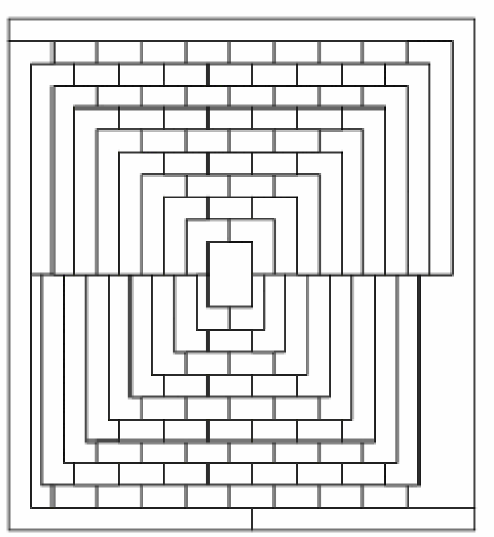


Figura 27.

Claramente, se trata de una broma… el 1 de abril es el *Día de los Inocentes* en los países anglosajones. Parece que Gardner recibe numerosas cartas de lectores contrariados que le envían 4-coloreados del mapa de McGregor… En la figura 28 se muestra una propuesta del especialista en teoría de grafos Stan Wagon (Macalester College):

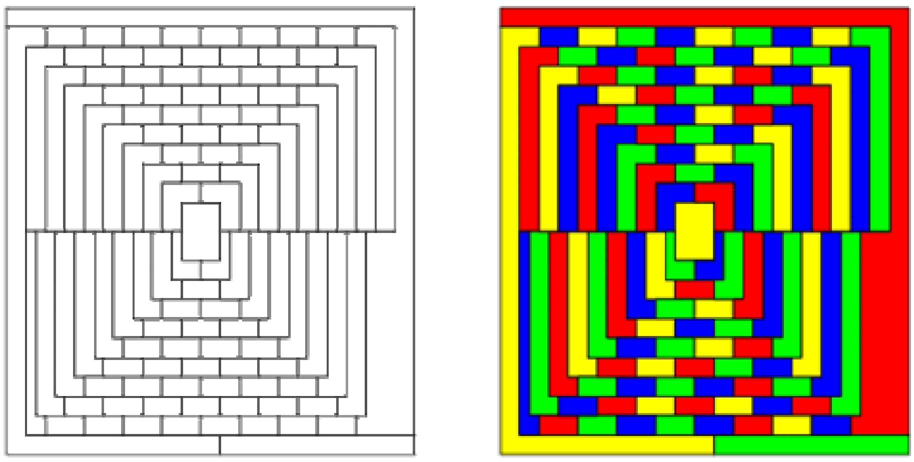


Figura 28.

El progreso es lento, hasta que en 1976 Ken Appel (foto 19) y Wolfgang Haken (foto 20) dan una prueba cuyos principales ingredientes son los conceptos de *reducibilidad* y *descarga.*

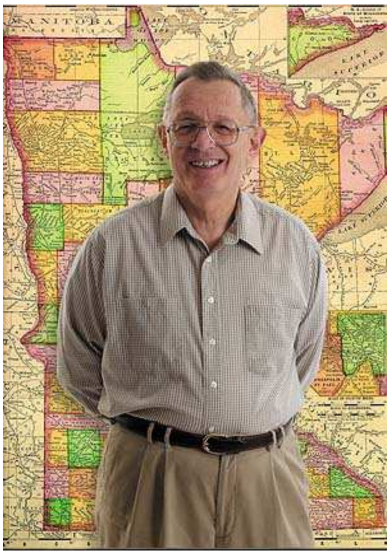


Foto 19. K. Appel.

Foto 20. W. Haken ha trabajado en teoría de nudos, la conjetura de Poincaré y el problema de los cuatro colores…

La primera prueba de Appel, Haken y Koch usa un algoritmo de descarga muy sofisticado, que produce una lista de **1.936** configuraciones inevitables, cada una de las cuales se demuestra reducible con la ayuda de un ordenador. Modificando consecutivamente el algoritmo de descarga, encuentran uno (con **300** reglas de descarga) que produce un conjunto de 1.482 configuraciones inevitables, comprobando que son reducibles con la ayuda de un ordenador programado por Koch para buscar las extensiones requeridas del coloreado: lleva **1.200** horas de cálculo en un *IBM 360.* La demostración es completada por Appel y Haken en 1976, tras seis años de duro trabajo, desarrollada a lo largo de más de **100** páginas impresas, **400** microfilms con dibujos y la verificación de varios miles de casos particulares. Como ya se ha comentado, todo este trabajo precisa en este momento de más de 50 días completos de trabajo de los tres ordenadores de la Universidad de Illinois, trabajando con un programa de varios miles de líneas: esto es lo mismo que decir que nadie puede comprobar la veracidad o falsedad del teorema *a mano*.

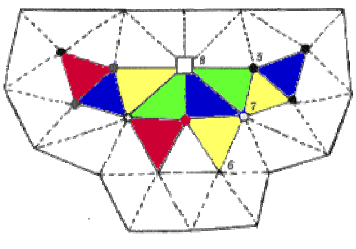


Figura 29.

A modo de muestra de la enorme cantidad de datos que se manejan en la demostración, en la prueba de reducibilidad de la configuración de la figura 29 se necesitan unos 199.000 coloreados…

K. Appel, tras hacer las últimas comprobaciones, coloca en el tablón de anuncios de su Departamento:

> Modulo careful checking,
> it appears that
> Four colors suffice.

… que incluso aparece como matasellos en el año 1977 (foto 21).

Foto 21.

En 1989, Appel y Haken reconocen el papel fundamental jugado por Kempe en toda esta historia:

> Kempe's argument was extremely clever, and although his "proof" turned out not to be complete, it contained most of the basic ideas that eventually led to the correct proof one century later.

Muchos matemáticos aceptan esta como una prueba irrefutable, pero muchos otros argumentan que no se trata de una demostración matemática: la máquina había verificado que una enorme cantidad de mapas podían colorearse usando a lo más 4 colores, pero… ¿y si existía un mapa, que el ordenador no hubiera contemplado, que no podía colorearse de esa forma? ¿Cuáles son los principales reproches hacia la demostración de Appel y Haken? Son dos:

1. parte de la prueba no puede verificarse a mano, y
2. la parte realizada a mano es muy complicada y no había sido verificada de forma independiente.

En 1996, N. Robertson, D.P. Sanders, P. Seymour y R. Thomas (Georgia Institute of Technology) publican «A new proof of the four-colour theorem». ¿Qué aporta esta nueva prueba? Fundamentalmente:

1. elimina complicaciones, confirmando que la inevitabilidad de un conjunto reducible puede probarse sin explorar tantos ejemplos como en la prueba de Appel y Haken;
2. el conjunto inevitable de su demostración es de tamaño **633**;
3. dan un conjunto de tan sólo **32** reglas de descarga;
4. la comprobación a mano de la inevitabilidad se reemplaza por una prueba formal que puede verificarse con un ordenador;
5. la comprobación dura únicamente 3 horas en cualquier ordenador doméstico.

En 2004, B. Werner (INRIA) y G. Gonthier (Microsoft Research, Cambridge) verifican la prueba anteriormente citada de Robertson *et al.* (con alguna aportación original), formulando el problema en términos del programa *Coq 7.3.1* (que utiliza ecuaciones de tipo lógico). Este programa elimina la necesidad de *fiarse* de los variados programas de ordenador usados para verificar los casos particulares: basta con *dar crédito* al asistente *Coq*. Con este sistema, confirman la validez de cada una de las etapas de la prueba.

En 2004, Ibrahim Cahit dice haber demostrado la conjetura, usando el nuevo concepto de *cadenas espirales* y sin necesidad de utilizar un ordenador como apoyo: lo prueba en tan sólo 12 páginas (en un preprint, agosto 2004), pero nunca ha sido publicado… Sin embargo, en el ICM2006 lo explica en una de las sesiones del congreso…

4. ¿PODEMOS *CREER* LA PRUEBA DE LA CONJETURA?

Sin duda, las dos características fundamentales de la prueba de la conjetura de los cuatro colores son:

1. ha servido de estímulo en el desarrollo de teorías matemáticas como la teoría de grafos y de redes;
2. es el primer mayor teorema demostrado (¿*verificado*?) usando un ordenador…

Este último punto (¿es correcta la compilación realizada por el ordenador?, ¿el hardware utilizado es infalible?) levanta muchas controversias en el momento de la aparición de la demostración, objeciones mitigadas al aparecer otras pruebas realizadas con ayuda de ordenador, como la clasificación de los grupos simples finitos (que depende de cálculos imposibles de ejecutar con detalle a mano) o la solución de Hales del problema de Kepler sobre el empaquetamiento óptimo de esferas.

Esta prueba ha suscitado muchos interrogantes *meta-matemáticos* sobre el papel concedido a la mente humana y a los ordenadores en matemáticas: ¿se puede aceptar como válida una afirmación que sólo una máquina, y no una mente humana, puede comprobar?

Son los griegos los que introducen el concepto fundamental de *demostración*, noción que ha seducido y perseguido a los matemáticos durante los últimos 2000 años.

Pero, ¿qué es una demostración? El matemático y filósofo de la Ciencia Imre Lakatos (1922-1974, foto 22) define en **[L]** una demostración como:

> Una sucesión finita de fórmulas de algún sistema dado, donde cada uno de los pasos de la sucesión es o bien un axioma del sistema, o una fórmula derivada por una regla del sistema a partir de una fórmula precedente.

El filósofo Thomas Tymoczko (1943-1996) califica una demostración como algo **[T]**:

1. *convincente* (suficiente como para convencer incluso a los escépticos que duden de la veracidad del resultado),

2. *formalizable* (la conclusión debería alcanzarse partiendo de sistemas axiomáticos), y
3. *comprobable.*

Este último es el aspecto más controvertido en el caso del teorema de los cuatro colores. ¿Puede estar un teorema probado si no se puede leer (comprobar) su demostración? Y ¿qué prueban las demostraciones? Teoremas.

Foto 22.

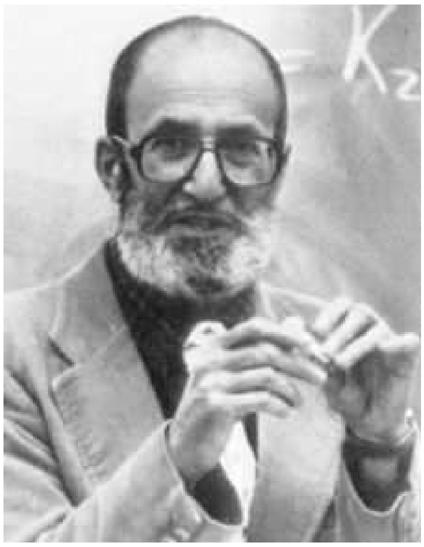


Foto 23.

Según E.R. Swart, no hay un tipo de teorema, sino cuatro **[S]**:

1. teoremas cuya prueba puede realizarse en la cabeza de uno,
2. teoremas que precisan lápiz y papel para demostrarse,
3. teoremas que no sólo requieren lápiz y papel, sino también una gran cantidad de esfuerzo y tiempo,
4. teoremas que sólo pueden probarse con ayuda de un ordenador.

La división no está clara... Pero, el teorema de los cuatro colores se encontraría sin duda alguna en la categoría 4.

Sobre este tema de las demostraciones, existen dos corrientes principales.

LOS ESCÉPTICOS

Que opinan que el aspecto de la *comprobabilidad* es el que pone en duda la credibilidad de la prueba. Si las pruebas deben ser verificadas, parece que entonces automáticamente una persona (lo opuesto a una máquina) debe completar esta tarea: esto no puede hacerse con la prueba del *teorema de los cuatro colores*.

El genial matemático Paul Halmos (1916-2006, foto 23) opina que la demostración realizada con un ordenador tiene la misma credibilidad que si está hecha por un *adivino,* las máquinas tienen algunas propiedades físicas que aún tenemos que entender…

Y afirma:

> No puedo aprender nada de la demostración. La prueba no indica la razón por la que sólo se necesitan 4 colores ¿por qué no 13? ¿Qué tiene de especial el número 4?

El matemático belga y Medalla Fields en 1978 Pierre Deligne (1954-) opina lo siguiente:

> No creo en una prueba hecha con ordenador. En primer lugar, soy demasiado egocéntrico. Creo en una demostración si la entiendo, si está clara. Un ordenador puede también cometer errores, pero es mucho más difícil encontrarlos.

Tymockzo dice que usar un ordenador para establecer una verdad matemática es transformar pruebas en experimentos. Afirma que el *teorema de los cuatro colores* ha sido *confirmado* a través de un experimento de física teórica, pero no probado de una manera formal. Pero, aunque se tiene una pequeña idea de lo que el ordenador está testeando, no se tiene el 100% de seguridad de lo que se está haciendo. Esto significa que la naturaleza de los resultados demostrados con ordenador es del tipo *«Simon dice»*, donde los matemáticos son invitados a *tener fe* y a creerse lo que una criatura *superior* afirma… pero, como él dice: *«Esto son matemáticas, no religión»*.

LOS NO ESCÉPTICOS

Argumentan del siguiente modo:

1. la crítica de que los ordenadores tienen virus o producen *errores*, se puede aplicar de la misma manera a las personas, que cometen errores con frecuencia. Aunque las equivocaciones cometidas por los ordenadores son más difíciles de localizar, los seres humanos se equivocan con más frecuencia; los ordenadores siguen un programa rígido predeterminado, y no tienen tropiezos motivados por los cambios de humor, el estrés u otros factores externos;
2. la *longitud* de algunas demostraciones está más allá de la capacidad de computación humana, pero es perfectamente aceptable por los estándares de las máquinas;
3. la idea de que *no* pueden usarse ordenadores va a ser cada vez más insólita para las generaciones futuras: es sólo una cuestión de hábito y aceptación, los ordenadores serán *(¿son?)* herramientas como el *lápiz y el papel*…
4. la prueba de Appel y Haken es en esencia *tradicional*, ya que consiste en una serie de pasos lógicos, que conducen a la conclusión de que la conjetura puede reducirse a una predicción sobre el comportamiento de unos **2.000** mapas.

El matemático John L. Casti (1943-) **[Cas]** opina en el siguiente sentido sobre la prueba del teorema de los cuatro colores:

> Como el problema se ha obtenido por medios totalmente inapropiados, ningún matemático de primera fila debería trabajar más en ello y por lo tanto una demostración

decente puede ser retrasada indefinidamente… Así que hemos hecho una cosa mala, muy mala y pienso que una cosa similar no debería cometerse nunca más.

En respuesta a esta opinión, Dan Archdeacon (Universidad de Vermont) responde: *«Hay muchas malas pinturas de jardines, pero eso no impidió a Van Gogh pintar sus girasoles»…*

Vladimir I. Arnold (1937-), el prestigioso matemático ruso, considera que la matemática es una *ciencia experimental*. Su artículo «Sur l'éducation mathématique» (*Gazette de Mathématiciens* 78, 1998) comienza diciendo: *«Las matemáticas son la parte de la física en la que los experimentos son baratos».* De hecho, Arnold exige aplicar a la investigación en matemática el esquema clásico en física: *experiencia - modelo - estudio del modelo - conclusiones - verificación por la experiencia*. Sostiene que *siempre* debe ser así, incluso *sin ordenador*, y es equivocado el esquema, para algunos matemáticos paradigmático, de *definición - teorema - demostración*. El esquema clásico en física es, en esencia, el usado por cualquier matemático que trabaja en *modelización*: a partir de la experiencia, se plantea el modelo (con las etapas auxiliares de diseño o elección del método numérico a usar, programación, implementación, puesta a punto y validación) y después vienen la experimentación numérica (estudio del modelo) y las conclusiones, que pueden llevar a la identificación de fenómenos físicos antes no identificados.

No obstante, el filósofo Ludwig Wittgenstein (1889-1951) distingue entre las matemáticas y las ciencias naturales, diciendo que un experimento no garantiza que se obtenga siempre el resultado original si repite varias veces. Las demostraciones, sin embargo, no dependen del tiempo, son *verdades eternas*…

En *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* **[H]**, Hud Hudson, profesor de filosofia en la Western Washington University, afirma dar un contraejemplo de la conjetura de los cuatro colores. El artículo, traducido del original aparecido en 2003 en el *American Mathematical Monthly*, da un ejemplo de un *mapa,* el de *Zenopia,* una isla bidimensional formada por 6 provincias, y que precisa de 6 tonos para colorearse… Pero, no hay que preocuparse… en realidad, no se trata de un contraejemplo de la conjetura de los cuatro colores: *Zenopia* es un mapa con fronteras *extrañas*, que de hecho quedan excluidas en el enunciado original. Os aconsejo leer **[H]** para entender la especial geografía de *Zenopia.*

AGRADECIMIENTOS

Quería dar un especial agradecimiento a Edith e Isabel (y al resto de las/os organizadoras/es) por todo su trabajo en torno a la organización de esta serie de conferencias.

BIBLIOGRAFÍA

[AH1] APPEL K Y HAKEN W. «Every planar map is four colourable, Part I: discharging», *Illinois Journal of Mathematics* 21, 429-490, 1977.

[AHK] APPEL K, HAKEN W Y KOCH J. «Every planar map is four colourable, Part II: reducibility», *Illinois Journal of Mathematics* 21, 491-567, 1977.

[AH2] APPEL K Y HAKEN W. «The solution of the four-color-map problem», *Scientific American* 237 (4), 108-121, 1977.

[B] BARNETTE D. *Map coloring, polyhedra, and the four-colour problem*. Mathematical Association of America, 1983.

[Cal] CALUDE A. *The journey of the four colour theorem through time.* University of Auckland, 2001.

[Cas] CASTI J. *Mathematical Mountaintops*. Oxford University Press, 2001.

[FF] FRITSCH R Y FRITSCH G. *The four-color theorem*. Springer, 1998.

[H] HUDSON H. «No basta con cuatro colores». *La Gaceta de la RSME* 8 (2), 361-368, 2005.

[L] LAKATOS I. «What does a mathematical proof prove?». En *Mathematics, Science and Epistemology.* Cambridge University Press, 540-551, 1979.

[O] ORE O. *The four-color problem*. Academic Press, 1967.

[RSST1] ROBERTSON N, SANDERS DP, SEYMOUR P Y THOMAS R. «The four-colour theorem». *Journal of Combinatorial Theory* 70, 2-44, 1977.

[RSST2] ROBERTSON N, SANDERS DP, SEYMOUR P Y THOMAS R. «A new proof of the four-colour theorem». *Electronic Announcements of the AMS* 2, 17-25, 1996.

[SK] SAATY JL Y KAINEN PC. *The four colour problem: assaults and conquest.* Dover, 1986.

[S] SWART ER. «The philosophical implications of the four-colour theorem». *American Mathematical Monthly* 87, 697-707, 1980.

[T] TYMOCZKO T. «The four-color problem and its philosophical significance». *Journal of Philosophy* 76, 57-70, 1979.

[W1] WILSON RJ. *Introducción a la teoría de grafos.* Alianza Universidad, 1983.

[W2] WILSON RJ. *Four colors suffice: how the map problem was solved.* Princeton University Press, 2002.