Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata

(Finitamente) Subdirectamente irreducibles y representación global tipo-Birkhoff para ciertas variedades de estructuras reticuladas.

Hector Luis Gramaglia

Tesis presentada para acceder al grado de Doctor en Matemática.

DIRECTOR: Dr. Diego Vaggione

CODIRECTORA: Dra. Marta Sagastume

Abríl, 1997

Quiero expresar un sincero agradecimiento a las tres personas más comprometidas en la concreción de este trabajo.

A Diego (Vaggione) por la libertad, y correspondiente confianza, a la hora de decidir el siguiente paso. Por la generosidad y sinceridad que impuso desde el primer momento, cuando poco se sabía como se podían ir dando las cosas.

A Marta (Sagastume), por su guía y apoyo desde La Plata. Además por haber sugerido a las MS-álgebras como candidatas a la aplicación de nuestros métodos de estudio. Sugerencia acertada, como se puede ver en la sección 3.

A la más comprometida de todas, Vilma, por su encanto, y por ser el más sólido apoyo (y tiempo completo).

Quiero agradecer también a algunas personas más.

A las personas en las que encontré apoyo tanto en FAMAF como en el Dto. de Matemática en La Plata.

Al Dr. Roberto Cignoli, por ser siempre nuestro referente.

Al apoyo (por siempre) de mis padres y hermanos.

A cinco personitas que siempre están cerca: Lucía, Carolina, Camila, Mateo y Clarisa.

CONTENIDOS

1. Introducción

Sin lugar a dudas la herramienta fundamental para el estudio de satisfactibilidad de ecuaciones en álgebras es el teorema de representación subdirecta de Birkhoff. La explicación es simple, una ecuación se satisface en un producto subdirecto $A \subseteq \Pi\{A_i : i \in I\}$ si y sólo si lo hace en cada A_i.

Cuando consideramos propiedades que involucran cuantificadores existenciales la situación se complica ya que en general aunque dichas propiedades se cumplan en los factores del producto subdirecto, estas no necesariamente se cumplirán en el producto. Por ejemplo, si consideramos la representación subdirecta

$$L \subseteq \mathbf{2}^I$$

de un reticulado distributivo acotado, se podrá observar que la sentencia

$$\forall x \exists y \ (x \wedge y = 0) \,\&\, (x \vee y = 1)$$

se verifica en todo factor, pero no necesariamente en el reticulado L. Sin enbargo, hay representaciones subdirectas las cuales se comportan bien en el sentido antes mensionado. Por ejemplo, para el caso de las álgebras de Boole, las propiedades del tipo

$$\forall \exists \, \mathit{positiva} \to \bigwedge p = q$$

de los factores (o sea del álgebra $\mathbf{2}$) pasan al álgebra representada, o para el caso de las álgebras de Heyting, las propiedades del tipo

$$\forall \exists ! \bigwedge p = q$$

de los factores, son preservadas por el álgebra representada.

La explicación de este hecho es que en tales casos la representación subdirecta del álgebra A es en realidad una representación de A como el álgebra de las secciones globales de cierto haz. Cuando un álgebra es representada en tal forma, los elementos de la misma pueden ser pensados como funciones continuas. En consecuencia, se tiene la herramienta fundamental de la Patchwork Property, i.e. se pueden encontrar nuevos elementos del álgebra pegando funciones continuas que coincidan en abiertos, lo cual le permite satisfacer ciertos cuantificadores existenciales que se cumplen en los factores.[1]

La situación anterior condujo a Krauss y Clark [21] a introducir un nuevo concepto en álgebra universal, a saber, el de *producto subdirecto global.* Los productos subdirectos globales se corresponden en forma natural con las representaciones de álgebras como álgebras de las secciones globales de haces.

Concretamente, un producto subdirecto $A \subseteq \Pi\{A_i : i \in I\}$ será llamado *global* cuando exista una topología sobre I tal que

(a) *dicha topología contiene a la topología generada por los ecualizadores* $E(x,y) = \{i \in I : x(i) = y(i)\}$, *con* $x, y \in A$.

(b) *(Patchwork Property) Si* F_r, *con* $r \in R$, *son abiertos tales que su unión es* I, *y si* x_r, *con* $r \in R$, *son elementos de* A *tales que para cada* $r, s \in R$, x_r *y* x_s *coinciden en* $F_r \cap F_s$, *entonces existe un* $x \in A$ *tal que* $x(i) = x_r(i)$, *cada vez que* $i \in F_r$.

Para dar un ejemplo de como usar una representacion en producto subdirecto global, nótese que si $L \subseteq \mathbf{2}^I$ es un producto subdirecto global, donde L es un reticulado distributivo acotado, entonces L es complementado ya que dado un $a \in L$, el complemento de a es aquel $b \in \mathbf{2}^I$ tal que:

$$b(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \in E(a,0) \\ 0 \text{ si } i \in E(a,1) \end{cases}$$

el cual por (a) y (b) debe estar en L.

Resulta entonces natural plantear el siguiente:

PROBLEMA: *Dada una variedad $\mathcal{V}$, estudiar la existencia de una clase $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ tal que toda álgebra de $\mathcal{V}$ sea representable como un producto subdirecto global con factores en $\mathcal{F}$ y además toda álgebra de $\mathcal{F}$ sea globalmente indescomponible.*

[1] El trabajo pionero sobre el uso de haces en álgebra universal es debido a Comer [10], [11].

Dicho problema es resuelto en [33] para las variedades:

(1) Reticulados distributivos, con $\mathcal{F} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$.
(2) Reticulados distributivos acotados, con $\mathcal{F} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$.
(3) álgebras de Stone, con $\mathcal{F} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$.

y en [15] para las variedades:

(4) p-álgebras distributivas, con
$\mathcal{F} = \{S \oplus \mathbf{1} : S \subseteq (B \oplus \mathbf{1}) \times B'$, con B, B' álgebras de Boole$\} \cup \{\mathbf{2}\}$

(5) Variedades aritméticas en las cuales los finitamente subdirectamente irreducibles forman una clase universal, con $\mathcal{F}$ igual a esta clase (por ejemplo, álgebras de Heyting, álgebras de Wajsberg, f-rings, etc).

(6) Variedades semisimples de expansiones de reticulados distributivos en las cuales las álgebras simples forman una clase universal, con
$\mathcal{F} = \{A \subseteq S_1 \times S_2 : A$ es directamente indescomponible y S_1, S_2 son simples$\}$
(por ejemplo, álgebras de De Morgan, de Boole, etc).

(7) Variedades de p-álgebras distributivas dobles tales que todos sus miembros tienen rango finito, con $\mathcal{F} = \{L : \left|\rho^L[x]\right| \leq 3$ y L no tiene elementos complementados distintos de 0 y 1$\}$.
(Aqui ρ^L es la congruencia dada por $(x, y) \in \rho^L$ sii $x^* = y^*$ y $x^+ = y^+$.)

Mas concretamente en dichos trabajos se prueba que la clase $\mathcal{F}$ tiene las siguientes propiedades:

S1 *Para toda álgebra A en la variedad, el mapa natural:*

$$\begin{array}{rcl} \tau : A & \rightarrow & \Pi\{A/\theta : \theta \in \Sigma(A, \mathcal{F})\} \\ x & \rightarrow & \langle x/\theta : \theta \in \Sigma(A, \mathcal{F})\rangle \end{array}$$

es un embedding y $\tau(A)$ es un producto subdirecto global, donde $\Sigma(A, \mathcal{F}) = \{\theta : A/\theta \cong B \in \mathcal{F}\}$ es provisto de la topología de los ecualizadores, que hace a $\Sigma(A, \mathcal{F})$ un espacio de Stone donde los conjuntos fundamentales son exactamenete los conjuntos de la forma

$\bigcup_{k=1}^{k=n}\bigcap_{l=1}^{l=m} E(\tau(x_{kl}),\tau(x_{kl}))$, *con* $x_{kl}, y_{kl} \in A$ *y* $n, m \geq 0$.

S2 *Toda no trivial* $A \in \mathcal{F}$ *es globalmente indescomponible.*

Para dar un ejemplo de las aplicaciones que se pueden obtener de este tipo de representaciones las cuales no son obtenibles de la representación subdirecta de Birkhoff, consideremos el caso de la variedad de reticulados distributivos acotados para la cual tenemos $\mathcal{F} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$.

Supongamos que L es un reticulado distributivo acotado en el cual no hay cadenas de filtros primos de longitud mayor o igual a 2. Entonces uno fácilmente nota que **3** no es imagen homomórfica de L y por lo tanto nuestra representación global sólo tendrá factores iguales a **2**. De esta forma, tal como se lo hizo anteriormente se puede probar que L es complementado, obteniendo así el resultado clásico de Nachbin [24].

Las herramientas fundamentales usadas para obtener tales representaciones globales son por una parte [33, Corolario 2 de 6.2], el cual relaciona la representabilidad global con el Teorema Chino del Resto, y por la otra la dualidad de Priestley, la cual para los casos de expansiones de reticulados distributivos nos permite estudiar el Teorema Chino del Resto además de proveer una clase candidata a ser la clase de factores (llamada $\mathcal{F}^{\mathcal{V}}$, para una variedad $\mathcal{V}$).

En este trabajo vamos a abordar el estudio de la clase $\mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ y de sus propiedades representacionales para algunas variedades de expansiones de reticulados distributivos. Empezamos la sección 3 introduciendo una nueva variedad (que llamamos $\mathcal{V}_1$) que resulta una abstracción de las variedades de MS-álgebras y demi-p-lattices. En el Teorema 5 obtenemos una representación de las congruencias de las álgebras de $\mathcal{V}_1$ a través de pares de congruencias. Si nos restringimos a las p-álgebras distributivas, obtenemos el resultado de Lakser [22], en el que se descompone una congruencia θ en una par (θ_1, θ_2), donde θ_1 es una congruencia del álgebra de Boole $B(L)$ de elementos cerrados y θ_2 es una congruencia del reticulado $D(L)$ de elementos densos. En el Teorema 10, utilizamos la representación anterior para obtener una caracterización de las álgebras (finitamente) subdirectamente irreducibles de $\mathcal{V}_1$. De este resultado obtenemos nuevas caracterizaciones (Teoremas 12 y 15) de los (finitamente) subdirectamente irreducibles de las variedades de MS-álgebras (Sankappanavar [30]) y demi-p-lattices (Sankappanavar [29]). Posteriormente caracterizamos la clase $\mathcal{F}^{\mathcal{V}_1}$ a partir de la cual obtenemos Teoremas de representación global de las variedades mencionadas. Para el caso de las MS-álgebras, encontramos una clase de 25 álgebras finitas, 5 de las cuales son globalmente descomponibles. Del estudio realizado para los demi-p-lattices encontramos que la clase $\mathcal{F}^{\mathcal{AP}}$ satisface las propiedades S1 y S2 para la variedad $\mathcal{AP}$ de almost-p-lattices (que contienen a las p-álgebras distributivas). Finalmente aplicamos los resultados obtenidos para el estudio de la permutabilidad de las congruencias (Teorema 20).

En la sección 4 nos dedicamos a la variedad de las p-álgebras distributivas dobles. Primero obtenemos un teorema de representación de las congruencias a través de triples de congruencias. Usando este resultado obtenemos de manera fácil una nueva caracterización de las p-álgebras distributivas dobles no regulares (finitamente) subdirectamente irreducibles, estableciendo luego la equivalencia con la caracterización dada por Katrinack en [20]. Obtenemos luego un teorema de representación global para esta variedad que nos permite encontrar una clase $\mathcal{F}$ satisfaciendo S1 y S2 para cualquier variedad de p-álgebras distributivas dobles de rango finito. Terminamos la sección con una aplicación de los resultados al estudio de la permutabilidad de las congruencias.

En la sección 5 estudiamos la variedad $\mathcal{V}$ de álgebras pseudocomplementadas provistas de una complementación de De Morgan $x \longrightarrow \sim x$. Estas álgebras fueron introducidas por Romanowska en [28]. Sobre los subdirectamente irreducibles de esta variedad conocemos los resultados obtenidos por Romanowska en [28] (para las álgebras finitas) y los obtenidos por Sankappanavar en [31] (para las álgebras satisfaciendo la ecuación $\sim (x \wedge (\sim x)^*)^* = x \wedge (\sim x)^*$, que corresponde a lo que definimos como rango 0). En esta sección damos una caracterización completa de las álgebras (finítamente) subdirectamente irreducibles. Terminamos la sección encontrando una clase $\mathcal{F}$ que verifica S1 y S2 para toda subvariedad de $\mathcal{V}$ integrada por álgebras de rango finito.

2. NOTACIÓN Y RESULTADOS ASUMIDOS

El lector puede encontrar en [23] la notación y los resultados básicos de álgebra universal que asumimos conocidos en este trabajo.

Si $\mathcal{K}$ es una clase de álgebras, entonces $I(\mathcal{K})$, $S(\mathcal{K})$ y $P_u(\mathcal{K})$ denotan las clases de imágenes homomórficas, subálgebras y ultraproductos de los miembros de $\mathcal{K}$, respectivamente. Sea A un álgebra. ∇^A es la congruencia universal de A y Δ^A es la congruencia trivial de A. $Con(A)$ denota el reticulado de congruencias de A. Por $\theta^A(x,y)$ denotamos la congruencia principal generada por el par $(x,y) \in A^2$. Una congruencia θ de A es llamada *completamente meet irreducible* (resp. *meet irreducible)* si $\theta \neq \nabla^A$ y para toda familia (finita) $\{\delta_i : i \in I\} \subseteq Con(A)$, si $\theta = \cap\{\delta_i : i \in I\}$, entonces $\theta = \delta_i$ para algún $i \in I$. Denotamos al conjunto de las congruencias completamente meet irreducibles (resp. meet irreducibles) de A por $CMICon(A)$ (resp. $MICon(A)$). Diremos que A es *finitamente subdirectamente irreducible* (f.s.i. para mayor brevedad) si Δ^A es meet irreducible en $Con(A)$. Dada $\mathcal{K}$, usamos $\mathcal{K}_{SI}$ (resp. $\mathcal{K}_{FSI}$) para denotar la clase de los miembros subdirectamente irreducibles (resp. finitamente subdirectamente irreducibles) de $\mathcal{K}$. Si $A \subseteq \Pi\{A_i : i \in I\}$, entonces $\pi_i : A \rightarrow A_i$ denotará la proyección canónica.

RETICULADOS Y DUALIDAD DE PRIESTLEY

Como es usual, **1**, **2** denotan las cadenas de uno y dos elementos respectivamente y en general **n** denota la cadena de n elementos. Si P es un conjunto parcialmente ordenado, entonces usamos $[x), (x]$ y $[x,y]$ para denotar $\{y \in P : x \leq y\}, \{y \in P : y \leq x\}$ y $\{z \in P : x \leq z \leq y\}$, respectivamente.

Si L es un reticulado distributivo acotado, por $X(L)$ denotamos al *espacio de representación de Priestley* de L, esto es, al conjunto de los filtros primos de L ordenados por la inclusión y con la topología que tiene como subbase a los conjuntos de la forma $\sigma(x) = \{p \in X(L) : x \in p\}$ y $X(L) - \sigma(x)$, con $x \in L$. Para más información sobre la dualidad de Priestley remitimos al lector a [25] y [26], donde encontrará también otras referencias. Si $U \subseteq X(L)$, entonces diremos U es *creciente* (resp. *decreciente*) cuando para todo $p \in U$ y $q \in X(L)$, si $p \subseteq q$ (resp. $q \subseteq p$), entonces $q \in U$. Por $M(X(L))$ y $m(X(L))$ denotamos el conjunto de los filtros maximales y minimales de $X(L)$, respectivamente.

Los siguiente resultados conocidos sobre esta dualidad serán usados sin mención previa (ver [25] y [26]):

(a) $X(L)$ es un espacio compacto Hausdorff.

(b) $U \subseteq X(L)$ es clopen creciente sii $U = \sigma(x)$ para algún $x \in L$.

(c) El mapa $Y \to \theta_Y = \{(x,y) : \sigma(x) \cap Y = \sigma(y) \cap Y\}$ es un anti-isomorfismo entre el reticulado de los clopen de $X(L)$ y $Con(L)$. Si $\theta \in Con(L)$, entonces el correspondiente clopen es

$$Y(\theta) = \{p : \text{ si } (x,y) \in \theta, \text{ entonces } x \in p \text{ sii } y \in p\}$$

(d) $Y(\theta)$, con la topología relativa y el orden dado por la inclusión, es el espacio de representación de Priestley de L/θ.

(e) Para todo filtro F, el conjunto cerrado correspondiente a

$$\theta^L(F) = \{(x,y) : x \wedge u = y \wedge u \text{ para algún } u \in F\}$$

es $\{p : F \subseteq p\}$.

Un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra de *De Morgan* si $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un reticulado distributivo acotado y $\sim$ es un endomorfismo dual (i.e. $\sim (x \vee y) =\sim x \wedge \sim y$, $\sim (x \wedge y) =\sim x \vee \sim y$, $\sim 0 = 1$ y $\sim 1 = 0$). Si L es un álgebra de De Morgan, entonces el mapa $g^L : X(L) \to X(L)$ definido por $g^L(p) = L - \{x \in L : \sim x \in p\}$ es un homeomorfismo que satisface $\left(g^L\right)^2(p) = p$, para todo $p \in X(L)$. Más aún, para todo $p, q \in X(L)$, si $p \subseteq q$, entonces $g^L(q) \subseteq g^L(p)$

TEOREMA CHINO DEL RESTO

Supongamos que $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \{Y : Y \subseteq X\}$. Decimos que $\mathcal{A}$ *minoriza* $\mathcal{B}$ cuando para cada $Y \in \mathcal{B}$ existe $Z \in \mathcal{A}$ tal que $Z \subseteq Y$. Si $Z \subseteq X$, entonces decimos que Z *minoriza* $\mathcal{B}$ cuando Z interseca a cada miembro de B, esto es, $\{\{z\} : z \in Z\}$ minoriza $\mathcal{B}$.

Sea A un álgebra. Sea $\theta_1, ..., \theta_n \in Con(A)$ y sea $x_1, \ldots, x_n \in A$. La 2n-tupla $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ es llamada un *sistema* en A si $(x_i, x_j) \in \theta_i \vee \theta_j$, para todo $1 \leq i, j \leq n$. Una *solución* de un sistema $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ es un elemento $x \in A$ tal que $(x, x_i) \in \theta_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Sea Σ un conjunto de congruencias del álgebra A. Decimos que A satisface el *Teorema chino del resto con respecto a* Σ si todo sistema $(\theta_1, ..., \theta_n, x_1 ..., x_n)$ en A tal que $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$ minoriza Σ, tiene una solución. Cuando Σ es el conjunto vacío obtenemos la versión conocida del Teorema Chino del Resto.

Un *espacio de Stone* (ver [4]) es un espacio topológico X compacto T_o que satisface:

(1) La familia de los conjuntos compactos y abiertos de X es un anillo de conjuntos y una base para X.

(2) Si A y B son familias de conjuntos abiertos y compactos tales que $\bigcap A \subseteq \bigcup B$, entonces existen conjuntos finitos $A_o \subseteq A$ y $B_o \subseteq B$ tal que $\bigcap A_o \subseteq \bigcup B_o$. Los conjuntos abiertos y compactos de un espacio de Stone son llamados *fundamentales*.

Theorem 1. : *([33, Corolario 2 de Teorema 6.2]) Sea A un álgebra de congruencias distributivas. Sea $\mathcal{F}$ una clase universal que contenga toda imagen homomórfica de A que sea subdirectamente irreducible. Son equivalentes:*

(a) Existe un producto subdirecto global $A_1 \subseteq \Pi\{A_i : i \in I\}$ tal que $A_1 \cong A$ y $A_i \in \mathcal{F}$, para todo $i \in I$.

(b) El mapa natural:

$$\begin{array}{rcl} \tau : A & \rightarrow & \Pi\{A/\theta : \theta \in \Sigma(A, \mathcal{F})\} \\ x & \rightarrow & \langle x/\theta : \theta \in \Sigma(A, \mathcal{F})\rangle \end{array}$$

es un embedding y $\tau(A)$ es un producto subdirecto global, donde $\Sigma(A, \mathcal{F}) = \{\theta : A/\theta \cong B \in \mathcal{F}\}$ es provisto de la topología de los ecualizadores, que hace a $\Sigma(A, \mathcal{F})$ un espacio de Stone donde los conjuntos fundamentales son exactamenete los conjuntos de la forma

$\bigcup_{k=1}^{k=n} \bigcap_{l=1}^{l=m} E(\tau(x_{kl}), \tau(x_{kl}))$, *con* $x_{kl}, y_{kl} \in A$ *y* $n, m \geq 0$.

(c) A satisface el Teorema Chino del Resto con respecto a $\Sigma(A, \mathcal{F})$.

Para terminar esta sección vamos a dar ahora los tres resultados claves que usaremos para obtener la representación global de todas las variedades que estudiaremos. Estos resultados han sido probados en [16]

Indescomponibilidad global

Diremos que un álgebra A es *globalmente indescomponible* si cada vez que

$$A_1 \subseteq \Pi\{A_i : i \in I\}$$

es un producto subdirecto global sobre un espacio compacto I tal que A_1 es isomorfa a A, se tiene que existe un $i \in I$ tal que $\pi_i : A_1 \longrightarrow A_i$ es un isomorfismo, donde π_i es la proyección canónica sobre el factor i-ésimo.

Theorem 2. *Sea A de congruencias distributivas.*

(a) A es globalmente indescomponible sii para todo $\theta_1, ..., \theta_n \in Con(A) - \{\Delta^A\}$ tal que $\bigcap\{\theta_i : 1 \leq i \leq n\} = \Delta^A$, existe un sistema $(\theta_1, ..., \theta_n, x_1, ..., x_n)$ que no tiene solución.

(b) Supongamos que A es el producto subdirecto de n álgebras finitamente subdirectamente irreducibles. Entonces A es globalmente indescomponible sii para todo $\theta_1, ..., \theta_n \in Con(A) - \{\Delta^A\}$ tal que $\bigcap\{\theta_i : 1 \leq i \leq n\} = \Delta^A$, existe un sistema $(\theta_1, ..., \theta_n, x_1, ..., x_n)$ que no tiene solución.

Expansiones de reticulados

Por una *variedad de expansiones de reticulados* entendemos a una variedad $\mathcal{V}$ tal que existen términos binarios $\wedge, \vee$ y términos de aridad cero $0, 1$ tales que para todo $A \in \mathcal{V}$, el álgebra $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un reticulado distributivo acotado.

Sea $A \in \mathcal{V}$. Usaremos A^* para denotar al reticulado $< A, \wedge, \vee, 0, 1 >$. Por $\theta^A_{lat}(x, y)$ denotamos la congruencia principal de reticulados generada por $(x, y) \in A^2$. Sea $Cl(A) = \{Z \subseteq X(A^*) : Z$ es cerrado y $\theta_Z \in Con(A)\}$. Note que $Cl(A)$ es cerrado para intersecciones arbitrarias. Para un subconjunto $Y \subseteq X(A^*)$, sea

$$\overline{Y} = \bigcap\{Z : Y \subseteq Z,\ Z \in Cl(A)\}$$

Es fácil chequear que $Y \to \overline{Y}$ es un operador topológico de clausura (i.e., un operador de clausura tal que $\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$ y $\overline{\emptyset} = \emptyset$), cuyo reticulado completo de conjuntos cerrados es $Cl(A)$. Más aún, el mapa $Y \to \theta_Y$ es un anti-isomorfismo entre $Cl(A)$ y $Con(A)$. Si A es un álgebra de De Morgan, entonces

$$Cl(A) = \{Y : Y \text{ es un subconjunto cerrado de } X(A^*) \text{ y } g^A(Y) = Y\}$$

(este resultado fue esencialmente dado por Cornish y Fowler [13]).

Definimos $Z(A)$ como el conjunto de todos los elementos complementados $e \in A^*$ tal que para todo símbolo de función n-ario F y todo $x_1, ..., x_n \in A$ tenemos

$F(x_1, ..., x_n) \wedge e = F(x_1 \wedge e, ..., x_n \wedge e) \wedge e$

$F(x_1, ..., x_n) \wedge e^c = F(x_1 \wedge e^c, ..., x_n \wedge e^c) \wedge e^c$,

donde e^c es el complemento de e. El mapa $e \longrightarrow \theta^{A^*}([e^c))$ identifica los elementos complementados de A^* con las congruencias factor de A^* (ver [18, III.4, Theorem 1]). Este isomorfismo (de álgebras Booleanas) identifica $Z(A)$ con el álgebra Booleana de las congruencias factor de A. Más aún, notemos que el mapa $e \longrightarrow \sigma(e)$ identifica los miembros de $Z(A)$ con los elementos de $Cl(A)$ los cuales son crecientes, decrecientes y clopen de $X(A^*)$. En particular tenemos que A es directamente indescomponible sii $Z(A) = \{0,1\}$ sii $X(A^*)$ y $\emptyset$ son los únicos elementos crecientes, decrecientes y clopen de $X(A^*)$.

Escribiremos $\bar{p}$ en lugar de $\overline{\{p\}}$.

Lemma 3. *Sea $A \in \mathcal{V}$. Entonces*

$$CMICon(A) \subseteq \{\theta_{\bar{p}} : p \in X(A^*)\} \subseteq MICon(A)$$

Si la clase $\mathcal{V}_{SI}$ es universal, entonces los tres conjuntos son iguales. Si toda congruencia principal de A es una congruencia de reticulados compacta, entonces

$$\{\theta_{\bar{p}} : p \in X(A^*)\} = MICon(A). \square$$

El siguiente resultado nos ofrece una clase candidata para la representación global. En las secciones siguientes estudiaremos esta clase para cada una de las variedades de las que nos ocuparemos.

Definimos

$$\mathcal{F}^{\mathcal{V}} = \{A \in \mathcal{V} : X(A^*) = \overline{\{p,q\}},\ para\ alg\acute{u}n\ p \leq q\}$$

Denotamos por $\mathcal{V}_{DI}$ a la clase de todas las álgebras directamente indescomponibles de $\mathcal{V}$.

Theorem 4. *(1) Toda $A \in \mathcal{V}$ satisface el Teorema Chino del Resto con respecto a $\Sigma(A, \mathcal{F}^{\mathcal{V}})$. Luego la clase $ISP_u(\mathcal{F}^{\mathcal{V}})$ satisface S1.*

(2) $\mathcal{F}^{\mathcal{V}} \subseteq I(\{A \subseteq A_1 \times A_2 : A \text{ es subdirecto y } A_1, A_2 \in \mathcal{V}_{FSI}\}) \cap \mathcal{V}_{DI}$
Si la clase $\mathcal{V}_{SI}$ es un conjunto finito de álgebras finitas, entonces también lo es la clase $S(\mathcal{F}^{\mathcal{V}})$, la cual satisface S1.

(3) Sea $A \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$, con $X(A^*) = \overline{\{p,q\}}$ y $p \leq q$. Si existen congruencias no triviales $\theta_1 \subseteq \theta_{\bar{p}}$ y $\theta_2 \subseteq \theta_{\bar{q}}$ tales que $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup \theta_2$ entonces A es globalmente descomponible.

3. Reticulados distributivos acotados con una operación unaria adicional

En esta sección introduciremos una nueva variedad $\mathcal{V}_1$ que tendrá como subvariedades importantes a las variedades de demi-p-lattices y MS-álgebras. Más aún, la variedad $\mathcal{V}_1$ contiene a la variedad de las ágebras semi-De Morgan distributivas. La variedad $\mathcal{V}_1$ se define rescatando de las variedades mencionadas una propiedad clave: el nucleo de la operación unaria es una congruencia de reticulados. Esto nos permite establecer un teorema de caracterización de las congruencias del álgebra mediante pares de congruencias, imitando el Teorema de Lakser [22] de caracterización de las congruencias de las p-álgebras. Utilizaremos este resultado para obtener una caracterización de los (finitamente) subdirectamente irreducibles de esta nueva variedad, de la cual deduciremos nuevas caracterizaciones de los (finitamente) subdirectamente irreducibles de las variedades de demi-p-álgebras y MS-álgebras. Posteriormente calculamos la clase $\mathcal{F}^{\mathcal{V}_1}$ para luego obtener teoremas de representación global para las variedades mencionadas. Terminamos la sección aplicando el teorema de representación global para caracterizar a los demi-p-lattices de congruencias permutables.

La siguiente lista de variedades constituyen las subvariedades más relevantes que tendrá nuestra nueva variedad $\mathcal{V}_1$. Damos la definición junto con algunas referencias a las cuales el lector se puede remitir para más información.

Un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, *, 0, 1\rangle$ es una semi-De Morgan álgebra si L satisface las siguientes condiciones:

$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un reticulado distributivo con 0 y 1
$(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$
$(x \wedge y)^{**} = x^{**} \wedge y^{**}$
$0^* = 1$
$1^* = 0$

$x^{***} = x^*$

Denotamos por $\mathcal{SDM}$ a la variedad de las semi-De Morgan álgebras distributivas. Si además L verifica la condición

$$x^* \wedge x^{**} = 0$$

diremos que L es un *reticulado distributivo demi-pseudocomplementado (demi-p-lattice,* para más brevedad). Los demi-p-lattices fueron introducidos por Sankappanavar en [32] como una generalización de los reticulados distributivos pseudocomplementados. Estas álgebras tienen la importante propiedad de que al conjunto de elementos cerrados (i.e. los x tales que $x = x^{**}$) puede ser dotado de una estructura de álgebra de Boole. Denotamos por $\mathcal{DP}$ a la variedad de demi-p-lattices.

Un demi-p-lattice L es un *almost-p-lattice* si L satisface la identidad:

$$x \wedge x^* = 0.$$

La variedad de almost-p-lattices es denotada por $\mathcal{AP}$. Referimos al lector a [29] para las propiedades básicas de los demi-p-lattices y almost-p-lattices. Un almost-p-lattice L es un *reticulado distributivo pseudocomplementado* (o *p-álgebra distributiva)* si L satisface la condición $x \wedge a = 0$ sii $a \leq x^*$. Las p-ágebras distributivas forman una variedad (ver [18]) denotada por $\mathcal{B}$.

Mencionamos por último la variedad $\mathcal{B}_1$ de *álgebras de Stone,* definida como la subvariedad de $\mathcal{B}$ formada por las álgebras que satisfacen

$$(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*$$

Continuamos ahora con otra linea de generalizaciones del álgebra de Boole. La próxima variedad que introduciremos surge como una importante subclase de $\mathcal{K}_{1,1}$, constituida por los reticulados distributivos acotados dotados de un endomorfismo dual f (es decir, un álgebra de *Ockham)* cuyo esqueleto es un álgebra de De Morgan [6]. Un álgebra $\langle L, \wedge, \vee, \circ, 0, 1\rangle$ es una *MS-álgebra* si satisface las siguientes condiciones:

$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ es un reticulado distributivo con 0 y 1

$(x \wedge y)^\circ = x^\circ \vee y^\circ$
$x \leq x^{\circ\circ}$
$1^\circ = 0.$

Referimos al lector a [7] y [8] para las propiedades básicas de las MS-álgebras. Por $\mathcal{MS}$ denotamos la variedad de MS-álgebras. Por $\mathcal{M}$ denotamos la subvariedad formada por las álgebras de De Morgan (i.e. las MS-álgebras que satisfacen $x^{\circ\circ} = x$). Por $\overline{\mathcal{M}}$ denotamos la variedad de reticulados distributivos acotados provistos de una operación adicional $x \longrightarrow x^\circ$ que es un automorfismo satisfaciendo la propiedad $x^{\circ\circ} = x$.

UNA GENERALIZACION DE LOS DEMI-P-LATTICES Y LAS MS-ALGEBRAS

Vamos ahora a introducir algunas variedades nuevas. Sean

$\mathcal{V}_1$= variedad de reticulados distributivos acotados provistos de una operación adicional $x \longrightarrow x^\circ$ que satisface las siguientes propiedades:
$(x \wedge y)^\circ = (x^\circ \vee y^\circ)^{\circ\circ}$
$(x \vee y)^\circ = (x^\circ \wedge y^\circ)^{\circ\circ}$
$1^\circ = 0$
$0^\circ = 1.$

$\mathcal{V}_2$ = variedad de reticulados distributivos acotados provistos de una operación adicional $x \longrightarrow x^\circ$ que satisface las siguientes propiedades:
$(x \wedge y)^\circ = (x^\circ \wedge y^\circ)^{\circ\circ}$
$(x \vee y)^\circ = (x^\circ \vee y^\circ)^{\circ\circ}$
$1^\circ = 1$
$0^\circ = 0.$

La primera generaliza las nociones de demi-p-lattices, dual demi-p-lattices, MS-álgebras y dual MS-álgebras. Algunas propiedades comunes a $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ pueden ser estudiadas a través de la siguiente variedad:

$\mathcal{V}_0$ = variedad de reticulados distributivos acotados provistos de una operación adicional $x \longrightarrow x^\circ$ que satisface las siguientes propiedades:

$$(x \wedge y)^\circ = (x^{\circ\circ} \wedge y^{\circ\circ})^\circ$$
$$(x \vee y)^\circ = (x^{\circ\circ} \vee y^{\circ\circ})^\circ .$$

Un simple cálculo muestra que $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_0$. Damos en la Figura 1 un diagrama de Hasse mostrando la relación que existe entre todas estas variedades.

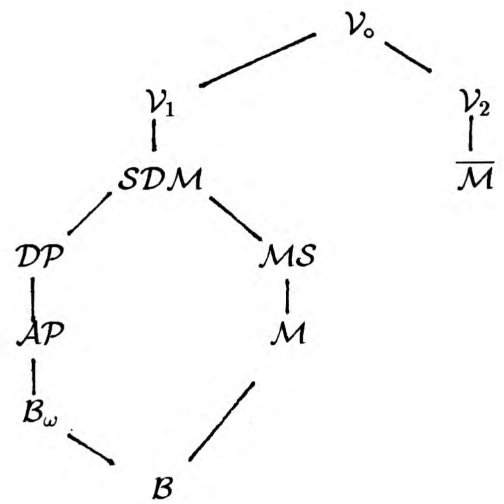


Figura 1

La propiedad crucial que rescatamos de las álgebras de $\mathcal{V}_0$ es la siguiente:

Un reticulado distributivo acotado L dotado de una operación unaria $x \longrightarrow x^\circ$ que verifica $x^\circ = x^{\circ\circ\circ}$ está en $\mathcal{V}_0$ sii la relación γ^L definida por $(x,y) \in \gamma^L \iff x^\circ = y^\circ$ es una congruencia de reticulados.

Esta propiedad nos permite considerar el reticulado L/γ^L. Notemos que para cada $z \in L$, la clase de equivalencia de z que denotaremos

$$G\,[z] = \{x \in L : x^\circ = z^\circ\} = \{x \in L : x^{\circ\circ} = z^{\circ\circ}\}$$

tiene a $z^{\circ\circ}$ como único elemento que pertenece a la imagen del homomorfismo $x \longrightarrow x^\circ$. Esto nos da pie para que veamos al álgebra L/γ^L de la siguiente manera. Para $L \in \mathcal{V}_0$ sea

$$S(L) = \{x^{\circ} : x \in L\} = \{x : x = x^{\circ\circ}\},$$

el *esqueleto* de L. El esqueleto $S(L)$ puede tornarse un álgebra $\langle S(L), \dot{\vee}, \dot{\wedge}, ^{\circ}, 0, 1\rangle$ definiendo $a\dot{\vee}b = (a \vee b)^{\circ\circ}$ y $a\dot{\wedge}b = (a \wedge b)^{\circ\circ}$. Notemos que el mapa $x \longrightarrow x^{\circ\circ}$ de L a $S(L)$ es un homomorfismo sobre.

Estableceremos algunos resultados generales sobre $\mathcal{V}_0$, pero estudiaremos con detalles los casos en que $S(L)$ resulta un álgebra de De Morgan. Esto ocurre exactamente para las álgebras de $\mathcal{V}_1$.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}_1 = \{L \in \mathcal{V}_0 : S(L) \in \mathcal{M}\} \\
&\mathcal{V}_2 = \left\{L \in \mathcal{V}_0 : S(L) \in \overline{\mathcal{M}}\right\}.
\end{aligned}$$

Nuestro próximo objetivo es generalizar el Teorema de representación de las congruencias de Lakser [22] a la variedad $\mathcal{V}_{\circ}$. Recordamos que una congruencia θ de una p-álgebra L puede ser vista como un par (δ, σ), donde $\delta \in Con(B(L))$ y $\sigma \in Con(D(L))$. La propiedad $x = x^{\circ\circ} \wedge (x \vee x^{\circ})$ que se verifica en las p-álgebras resulta fundamental. En efecto, esta ecuación nos permite probar que el mapa

$$\tau \longrightarrow \tau \cap (D(L) \times D(L))$$

de $(\rho^L]$ en $Con(D(L))$ es una biyección. Para probar esto usamos la siguiente propiedad:

$$(x, y) \in \tau \text{ sii } (x \vee x^*, y \vee y^*) \in \tau \cap (D(L) \times D(L)).$$

Para el caso de un álgebra L de $\mathcal{V}_0$ no contamos con una clase de equivalencia privilegiada como lo es $D(L) = G[1]$ para las p-álgebras. Luego en nuestra representación debemos reemplazar $Con(D(L))$ por $(\gamma^L]$.

Antes de pasar al teorema introducimos algo de notación que simplificará la exposición. Sea L un reticulado distributivo. Si (x, y), $(a, b) \in L \times L$ y R, $S \subseteq L \times L$, entonces definimos

$$\begin{aligned}
&(x, y) * (a, b) = ((a \vee x) \wedge y, (b \vee x) \wedge y) \\
&R * S = \{h_1 * h_2 : h_1 \in R \text{ y } h_2 \in S\}
\end{aligned}$$

Si $S = \{(a,b)\}$, entonces escribimos $R*(a,b)$ en lugar de $R*\{(a,b)\}$. Sea $h_1, h_2 \in L\times L$. Si $h_1 * h_2 = h_1$ y $h_2 * h_1 = h_2$, entonces decimos que h_1 y h_2 son *L-simétricos.* Note que si $h_1, h_2 \in L \times L$ son L-simétricos, entonces $\theta^L(h_1) = \theta^L(h_2)$.

Sea $L \in \mathcal{V}_0$. Un *par de congruencias* de L es un par $(\delta,\sigma) \in Con(S(L)) \times (\gamma^L]$ que satisface:

$$\text{(I) } \gamma^L * \delta \subseteq \sigma.$$

Por $Cp(L)$ denotamos el conjunto de pares de congruencias de L. Si $\theta \in Con(L)$, entonces por $\theta_{S(L)}$ denotamos la restricción de θ a $S(L)$.

Theorem 5. *Si $L \in \mathcal{V}_0$, entonces $Cp(L)$ es un subreticulado de $Con(S(L)) \times (\gamma^L]$ y el mapa Φ definido por*

$$\begin{array}{rcl} Con(L) & \rightarrow & Cp(L) \\ \theta & \rightarrow & \left(\theta_{S(L)}, \theta \wedge \gamma^L\right) \end{array}$$

es un isomorfismo. Si $(\delta,\sigma) \in Cp(L)$, entonces la correspondiente congruencia $\theta \in Con(L)$ está determinada por

$$\text{(II) } (x,y) \in \theta \text{ sii } (x^{\circ\circ}, y^{\circ\circ}) \in \delta \text{ y } \gamma^L * (x,y) \subseteq \sigma.$$

Prueba: Es fácil ver que $Cp(L)$ es un subreticulado de $Con(L)$. Veamos que Φ es 1-1. Para cada $\delta \in Con(S(L))$ definimos

$$\tilde{}\delta = \{(x,y) \in L \times L : (x^{\circ\circ}, y^{\circ\circ}) \in \delta\}.$$

Sea $\theta \in Con(L)$. Usando que $x^{\circ\circ\circ} = x^\circ$, podemos deducir que $\tilde{}\theta_{S(L)} \subseteq \gamma^L \circ \theta \circ \gamma^L$. Luego $\tilde{}\theta_{S(L)} = \gamma^L \vee \theta$. Concluimos que Φ es 1-1 observando que el mapa

$$\begin{array}{rcl} Con(L) & \rightarrow & Con(L) \times Con(L) \\ \theta & \rightarrow & \left(\theta \vee \gamma^L, \theta \wedge \gamma^L\right) \end{array}$$

es 1-1. Vamos a probar ahora que Φ es sobre. Sea $(\delta,\sigma) \in Cp(L)$. Definimos θ como en (II). Usando las identidades

$$\begin{array}{rcl} (z,w) * (x \vee s, y \vee t) & = & ((z,w) * (x,y)) \vee ((z,w) * (s,t)) \\ (z,w) * (x \wedge s, y \wedge t) & = & ((z,w) * (x,y)) \wedge ((z,w) * (s,t)) \end{array}$$

probamos que $\theta \in Con_{lat}(L)$. Por (I), $\theta \in Con(L)$. Finalmente, probemos que $\theta \wedge \gamma^L = \sigma$ y $\theta_{S(L)} = \delta$. Es fácil ver que $\sigma \subseteq \theta \wedge \gamma^L$ y $\theta_{S(L)} \subseteq \delta$. Dado que $(z,w)*(z,w) = (z \wedge w, w)$, para todo $z, w \in L$, tenemos $\theta \wedge \gamma^L \subseteq \sigma$. La desigualdad $\delta \subseteq \theta_{S(L)}$ se deduce de (I).□

(FINITAMENTE) SUBDIRECTAMENTE IRREDUCIBLES

Trataremos ahora de explicar brevemente como vamos a encarar el estudio de las álgebras subdirectamente irreducibles. Este planteo se repetirá en todas las secciones siguientes. Para lograr que γ^L sea monolito (es decir, $\Delta^L \neq \gamma^L \subseteq \theta$, para todo $\theta \in Con(L)$) imponemos las siguientes condiciones:

- $(\gamma^L] = \{\Delta^L, \gamma^L\}$
- No existe $\Delta^{S(L)} \neq \delta \in Con(S(L))$ tal que $\left(\delta, \Delta^L\right) \in Cp(L)$.

Dada cualquier congruencia no trivial θ, entonces el par asociado a θ es $(\theta_{S(L)}, \theta \cap \gamma^L)$. Dado que $\theta \cap \gamma^L \in \{\Delta^L, \gamma^L\}$, tenemos por la segunda condición que $\theta \cap \gamma^L = \gamma^L$, es decir que $\gamma^L \subseteq \theta$. Esto garantiza que γ^L es el monolito de L. Haremos ahora un estudio más detallado de las condiciones de arriba, para poder introducir las definiciones que necesitamos.

Dado que γ^L es el nucleo de la operación $x \longrightarrow x^\circ$, tenemos que si $(x,y) \in \gamma^L$ entonces $\theta^L_{lat}(x,y) \in Con(L)$. Esto, sumado a la primera condición, impide la existencia de cadenas del tipo $x < z < y < v$ tales que (x,z), $(y,v) \in \gamma^L$, ya que en este caso tendríamos $\theta(x,z) \neq \theta(y,v)$. Esto nos induce a esteblecer las siguientes definiciones.

Sea $L \in \mathcal{V}_0$ y sea $k \in \{2,3\}$. Decimos que L es *k-regular* si $|G[b]| \leq k$, para cada $b \in S(L)$. Si $C \subseteq L$ es la cadena finita $x_1 < x_2 < ... < x_n$, definimos $n^{L,C} = \left|\left\{1 \leq i < n : x_i^\circ = x_{i+1}^\circ\right\}\right|$. En caso que $\{n^{L,C} : C \subseteq L \text{ es una cadena finita}\}$ tenga un máximo, lo denotamos por n^L. Claramente, si $n^L = 1$, entonces L es 2-regular y $n^L = 0$ si y sólo si $\gamma^L = \Delta^L$.

Pasamos ahora al estudio de la segunda condición dada arriba. Vamos a caracterizar los pares $(a,b) \in S(L) \times S(L)$ que verifican si $a, b \in S(L)$ y $(\theta^{S(L)}(a,b), \Delta^L) \in Cp(L)$, entonces $a = b$.

Un par $(a,b) \in S(L) \times S(L)$ será *γ^L-disjunto* si para todo $x, y, z, w \in L$ tal que $z^\circ = w^\circ$, las siguientes ecuaciones se satisfacen:

$$\begin{aligned}
&(a \vee b)^{\circ\circ} = b \\
&(((a \vee x) \wedge y)^{\circ\circ} \vee z) \wedge w = (((b \vee x) \wedge y)^{\circ\circ} \vee z) \wedge w \\
&(((a^\circ \vee x) \wedge y)^{\circ\circ} \vee z) \wedge w = (((b^\circ \vee x) \wedge y)^{\circ\circ} \vee z) \wedge w.
\end{aligned}$$

Decimos que un par γ^L-disjunto (a,b) es *trivial* si $a = b$.

Lemma 6. *Supongamos que $L \in \mathcal{V}_1$. Sea $(a,b) \in S(L) \times S(L)$ tal que $(a \vee b)^{\circ\circ} = b$. Las siguientes condiciones se satisfacen:*
i) (a,b) es γ^L-disjunto
ii) $\theta(a,b) \cap \gamma^L = \Delta^L$
iii) $\left(\theta^{S(L)}(a,b), \Delta^L\right) \in Cp(L)$. □

Probemos ahora el Lema 6. Previamente establecemos el siguiente Lema.

Lemma 7. *Sea $L \in \mathcal{V}_0$.*
(1) El pseudocomplemento $\left(\gamma^L\right)^*$ de γ^L en $Con_{lat}(L)$ está dado por $\left(\gamma^L\right)^* = \left\{(x,y) : \gamma^L * (x,y) \subseteq \Delta^L\right\}$.
(2) Si $\delta \in Con(S(L))$, entonces $\left(\delta, \Delta^L\right) \in Cp(L)$ sii $\delta \subseteq \left(\gamma^L\right)^*$.
(3) Si $p \in X(L) - Y\left(\gamma^L\right)$ y $\delta \in Con(S(L))$, entonces $\left(\delta, \theta_p \cap \gamma^L\right) \in Cp(L)$ sii $\delta \subseteq \theta_p$.

Prueba: (1). Si $\theta \in Con_{lat}(L)$ y $(x,y) \in \theta$, entonces $(z,w) * (x,y) \in \theta \cap \gamma^L$, para todo $(z,w) \in \gamma^L$. Luego, si $\theta \cap \gamma^L = \Delta^L$, entonces $\theta \subseteq \gamma_1 = \left\{(x,y) : \gamma^L * (x,y) \subseteq \Delta^L\right\}$. Usando que $z \leq w$ implica $(z,w) * (z,w) = (z,w)$, deducimos $\gamma^L \cap \gamma_1 = \Delta^L$.

(2). Sigue de (1) y (I).

(3). Si $\gamma^L = \Delta^L$, entonces (3) es trivial. Asumamos que $\gamma^L \neq \Delta^L$ y tomemos $p \in X(L) - Y\left(\gamma^L\right)$. Sea $(z,w) \in \gamma^L$ tal que $z \notin p$ y $w \in p$. Si $(a,b) \in \delta$ y $\left(\delta, \theta_p \cap \gamma^L\right) \in Cp(L)$, entonces, por (I), $((a \vee z) \wedge w, (b \vee z) \wedge w) \in \theta_p$, lo que determina que $(a,b) \in \theta_p$. La conversa sigue fácilmente. □

Prueba de 6: Primero, vamos a probar que i) implica iii). Sea $a, b \in S(L)$ tal que (a,b) es γ^L-disjunto. Sabemos que $\theta^{S(L)}(a,b) = \theta_{lat}^{S(L)}(a,b) \vee \theta_{lat}^{S(L)}(a^\circ, b^\circ)$ (ver [4]). Sea $(c,d) \in \theta_{lat}^{S(L)}(a,b)$. Usando que $c\dot{\wedge}a = d\dot{\wedge}a$ y $c\dot{\vee}b = d\dot{\vee}b$ podemos deducir que

$$\begin{aligned} c &= ((c \vee a) \wedge (c \vee d))^{\circ\circ} \\ c\dot{\vee}d &= ((c \vee b) \wedge (c \vee d))^{\circ\circ} \end{aligned}$$

Dado que (a,b) es γ^L-disjunto, tenemos que $\gamma^L * (c, c\dot{\vee}d) \subseteq \Delta^L$ y consecuentemente $(c, c\dot{\vee}d) \in \left(\gamma^L\right)^*$. Mediante un argumento similar obtenemos que $(d, c\dot{\vee}d) \in \left(\gamma^L\right)^*$ y en consecuencia $(c,d) \in \left(\gamma^L\right)^*$. Luego $\theta_{lat}^{S(L)}(a,b) \subseteq \left(\gamma^L\right)^*$ y de manera similar, $\theta_{lat}^{S(L)}(a^\circ, b^\circ) \subseteq \left(\gamma^L\right)^*$. Por Lema 7, tenemos que $\left(\theta^{S(L)}(a,b), \Delta^L\right) \in Cp(L)$.

iii) implica i) se sigue de un cálculo simple.

Para probar que ii) implica iii), note que $\theta^{S(L)}(a,b) \subseteq \theta(a,b)_{S(L)}$. Dado que $\left(\theta(a,b)_{S(L)}, \Delta^L\right) \in Cp(L)$, tenemos que

$$\gamma^L * \theta^{S(L)}(a,b) \subseteq \gamma^L * \theta(a,b)_{S(L)} \subseteq \Delta^L$$

de lo que deducimos iii).

Para probar que iii) implica ii) note que si θ es la congruencia asociada al par $\left(\theta^{S(L)}(a,b), \Delta^L\right)$, entonces $\theta \cap \gamma^L = \Delta^L$. □

Los dos lemas siguientes tienen pruebas similares. Vamos a probar el segundo, dejando al lector la prueba del primero.

Lemma 8. *Si $L \in \mathcal{V}_0$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $n^L = 1$

(2) $(\gamma^L] = \left\{\Delta^L, \gamma^L\right\}$

(3) Existe exactamente un filtro primo p tal que θ_p no contiene a γ^L. □

Lemma 9. *Si $L \in \mathcal{V}_0$ y L es 3-regular , entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $n^L = 2$

(2) $(\gamma^L] = \left\{\Delta^L, \theta_1, \theta_2, \gamma^L\right\}$*, donde* $\theta_1, \theta_2 \in Con(L) - \left\{\Delta^L, \gamma^L\right\}$ *y* $\theta_1 \not\models \theta_2$.

(3) $\left\{p \in X(L) : \theta_p\right.$ *no contiene a* $\left.\gamma^L\right\}$ *es una cadena de dos elementos.*

Más aún, si (2) ocurre, entonces θ_1 *y* θ_2 *permutan sii* L *es 2-regular.*

Prueba: Sea L 3-regular. Las siguientes condiciones son fáciles de chequear:

(I) Si $G[b] = \{z, w, v\}$, $z < w < v$, entonces
$p = \{t \in L : (w \vee t) \wedge v = v\}$ y $q = \{t \in L : (z \vee t) \wedge w = w\}$
son filtros primos.

(II) Si $p \in X(L)$ y θ_p no contiene a γ^L, entonces existe $(z, w) \in \gamma^L$ tal que w cubre z, $z \notin p$ y $w \in p$. luego $p = \{t \in L : (z \vee t) \wedge w = w\}$.

(III) Si $p \in X(L)$, entonces $\theta_p \wedge \gamma^L \in Con(L)$.

Supongamos que (1) ocurre. Usando (II), deducimos que toda cadena $X(L) - Y\left(\gamma^L\right)$ tiene a lo sumo longitud 2. Sea $p_1, p_2 \in X(L) - Y\left(\gamma^L\right)$. Afirmamos que $\{p_1, p_2\}$ es una cadena. Sean z_1, w_1, z_2, w_2 los elementos dados por (II) para p_1, p_2, respectivamente. Si $\{z_1 \wedge z_2,\ w_1 \wedge w_2,\ z_1 \vee z_2,\ w_1 \vee w_2\}$ es una cadena, entonces $\{p_1, p_2\}$ es una cadena. Sino,

$$p_1 = p_2 = \{t \in L : t \vee z_1 \vee z_2 \geq w_1 \vee w_2\}$$

de lo que sigue (3).

Que (3) implica (2) se deduce de (III).

Supongamos (2). Vamos a probar (1). Sea C la cadena
$x_1 < x_2 < ... < x_k$.
Note que, para cada $1 \leq i < j < k$, se tiene que

$$\theta_{lat}(x_i, x_{i+1}) \cap \theta_{lat}(x_j, x_{j+1}) = \Delta^L.$$

Dado que $x_i^\circ = x_{i+1}^\circ$ implica $\theta_{lat}(x_i, x_{i+1}) \in (\gamma^L] - \left\{\Delta^L\right\}$, tenemos que $n^{L,C} \leq 2$, lo que nos permite obtener (1).

Para la prueba del resto del lema, note que, por (3), $\theta_1 \vee \theta_2 = \gamma^L$ y $\theta_1 \wedge \theta_2 = \Delta^L$. Si L es 3-regular propia, $b \in S(L)$ y $|G[b]| = 3$, entonces $\theta_{1G[b]}$ y $\theta_{2G[b]}$ no permutan y en consecuencia θ_1 y θ_2 no permutan. Si L es 2-regular y $(x, y) \in \theta_1 \vee \theta_2$, entonces $(x, y) \in \theta_1$ o $(x, y) \in \theta_2$, porque $\theta_{1G[x^{\circ\circ}]} = \Delta^{G[x^{\circ\circ}]}$ o $\theta_{2G[x^{\circ\circ}]} = \Delta^{G[x^{\circ\circ}]}$. Luego θ_1 y θ_2 permutan.□

(Finitamente) subdirectamente irreducibles de la clase $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$.

Note que si $L \in \mathcal{V}_1$ (resp. $L \in \mathcal{V}_2$) y $\gamma^L = \Delta^L$, entonces $L \in \mathcal{M}$ (resp. $L \in \overline{\mathcal{M}}$). Recordamos que $\mathcal{M}_{SI} = \mathcal{M}_{FSI} = \{\mathbf{2},\mathbf{3},M\}$, donde M es el álgebra de De Morgan dada en la Figura 2.

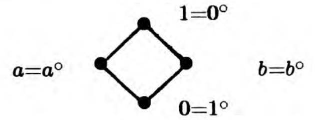


Figura 2

(ver [4]). Es fácil chequear que $\overline{\mathcal{M}}_{SI} = \overline{\mathcal{M}}_{FSI} = \{\mathbf{2}, M_1\}$, donde M_1 se dá en la Figura 3.

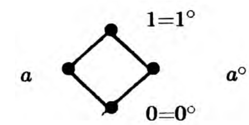


Figura 3

Con los siguientes resultados completamos la caracterización de las álgebras f.s.i. de $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$.

Theorem 10. *Sea $L \in \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ y asumamos que $\gamma^L \neq \Delta^L$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) L es s.i.

(2) L es f.s.i.

(3) $n^L = 1$ y todo par γ^L-disjunto es trivial.

Prueba: Supongamos (2). Vamos a probar (3). Veamos primero que $n^L = 1$. Sea C la cadena

$x_1 < x_2 < ... < x_k$.

Note que, para cada $1 \leq i < j < k$, se tiene que $\theta_{lat}(x_i, x_{i+1}) \cap \theta_{lat}(x_j, x_{j+1}) = \Delta^L$. Dado que $x_i^\circ = x_{i+1}^\circ$ implica $\theta_{lat}(x_i, x_{i+1}) \in (\gamma^L] - \left\{\Delta^L\right\}$, tenemos que $n^{L,C} \leq 1$, lo que nos permite obtener que $n^L = 1$. Que todo par γ^L-disjunto es trivial se deduce del Lema 6.

Supongamos (3). Afirmamos que γ^L es la menor congruencia no trivial en L. Por el Lema 8, basta ver que si $\delta \in Con(S(L))$ y $(\delta, \Delta^L) \in Cp(L)$, entonces $\delta = \Delta^{S(L)}$. A su vez, por el Lema 7, basta ver que si $\delta \in Con(S(L))$ y $\delta \subseteq (\gamma^L)^*$, entonces $\delta = \Delta^{S(L)}$. Dado que $\theta^{S(L)}(a,b) \subseteq (\gamma^L)^*$ y $a\dot{\vee}b = b$ implican que (a,b) es un par γ^L-disjunto, para todo $(a,b) \in S(L) \times S(L)$ (ver los Lemas 7 y 6), tenemos la afirmación.□

Para la variedad de MS-álgebras, la condición de no poseer pares γ^L-disjuntos no triviales toma una forma agradable.

Lemma 11. *Sea $L \in \mathcal{V}_1$ y supongamos que $n^L = 1$ y L satisface las siguiente ecuaciones:*
$(x \wedge y)^{\circ\circ} = x^{\circ\circ} \wedge y^{\circ\circ}$
$(x \vee y)^{\circ\circ} = x^{\circ\circ} \vee y^{\circ\circ}$.
Las siguientes condiciones son equivalentes:
(1) Todo par γ^L-disjunto es trivial.
(2) Si $a \in S(L) - \{0,1\}$, entonces $a = a^\circ$.

Prueba: Usando la hipótesis deducimos que $\theta_{lat}^{S(L)}(a,b) = \left(\theta_{lat}^L(a,b)\right)_{S(L)}$, para todo $(a,b) \in S(L) \times S(L)$. Luego, por Lemas 7 y 6,

(I) $(a,b) \in S(L) \times S(L)$ es γ^L-disjunto sii $a\dot{\vee}b = b$ y (a,b), $(a^\circ, b^\circ) \in (\gamma^L)^*$.
(II) $(\gamma^L)^* = \theta_p$, para algún $p \in X(L)$ (use el Lema 8).

Supongamos (1). Sea $a \in S(L) - \{0,1\}$. Afirmamos que $(a \wedge a^\circ,\ a \vee a^\circ)$ es γ^L-disjunto. Supongamos lo contrario. Entonces $(a \vee a^\circ, 1)$ es γ^L-disjunto y consecuentemente $(a,1)$ o $(a^\circ,1)$ es γ^L-disjunto, lo que es una contradicción. Luego, hemos probado la afirmación y por lo tanto $a = a^\circ$.

Supongamos ahora (2). Dado que el mapa $a \to a^\circ$ de $S(L)$ a $S(L)$ es un anti-isomorfismo, tenemos que, para todo $a, b \in S(L) - \{0,1\}$, no se verifica la desigualdad $a \leq b$ ni $a \leq b$. Luego $|S(L)| \leq 4$. (1) sigue a partir de (I) y (II). □

Las MS-álgebras s.i. fueron deterninados por Sankappanavar en [30]. En el teorema que sigue obtendremos una nueva caracterización de estas álgebras.

Corollary 12. *Una MS-álgebra L es (finitamente) s.i. sii $n^L \leq 1$ y $S(L)$ es un álgebra de De-Morgan s.i..*

Prueba: Note que si L es una MS-álgebra satisfaciendo (2) del Lema 11, entonces L es s.i.. □

Los demi-p-lattices s.i. fueron deterninados por Sankappanavar en [29]. Nosotros obtendremos ahora una nueva caracterización de estas álgebras utilizando un recurso similar al utilizado anteriormente. Nos basaremos en las propiedades que satisfacen este tipo particular de álgebras para obtener una forma más agradable para la condición de tener pares γ^L-disjuntos triviales.

Lemma 13. *Supongamos que L satisface la ecuación $(x \wedge y)^{\circ\circ} = x^{\circ\circ} \wedge y^{\circ\circ}$ (por ejemplo si $L \in \mathcal{MS}$ o $L \in \mathcal{DP}$). Entonces $Z(L) = \{e \in S(L) : e$ es complementado y $e^\circ = e^c\}$, donde e^c denota el complemento de e.*

Prueba: Sea $e \in S(L)$ complementado tal que $e^\circ = e^c$. Note que
$a^\circ \wedge e = (a^\circ \wedge e) \dot{\vee} 0 = (a^\circ \dot{\wedge} e) \dot{\vee} (e^\circ \dot{\wedge} e) = (a^\circ \dot{\vee} e^\circ) \wedge e = (a \wedge e)^\circ \wedge e$,
lo cual dice que $e \in Z(L)$. La otra inclusión es dejada al lector.□

Lemma 14. *Sea $L \in \mathcal{V}_1$. Supongamos que $S(L)$ es Booleana y L satisface la ecuación $(x \wedge y)^{\circ\circ} = x^{\circ\circ} \wedge y^{\circ\circ}$.*
(1) Si $Z(L) = \{0,1\}$, entonces todo par γ^L-disjunto es trivial.
(2) Si $n^L \leq 2$ y L es 3-regular, entonces la conversa de (1) es cierta.

Prueba: (1) Sea (a, b) γ^L-disjunto. Sabemos que $\theta^{S(L)}(a, b) \subseteq \left(\gamma^L\right)^*$ (ver Lemas 7 y 6). Luego $(a\dot{\vee}b^\circ, 1) \in \left(\gamma^L\right)^*$. Por Lema 7 tenemos que $(a\dot{\vee}b^\circ) \vee z \geq w$, para todo $(z, w) \in \gamma^L$. Tome $z = (a\dot{\vee}b^\circ) \vee (a\dot{\vee}b^\circ)^\circ$ y $w = 1$ para deducir que $(a\dot{\vee}b^\circ) \vee (a\dot{\vee}b^\circ)^\circ = 1$. (1) sigue fácilmente.

(2) Por Lema 9, $\left(\gamma^L\right)^* = \theta_{\{p,q\}}$ para algún $p, q \in X(L)$ tal que $p \subseteq q$. Si $c \in R(L)$, entonces $c \in p$ o $c^\circ \in p$. Supongamos que $c \in p$. Note que, por

hipótesis, $\theta_{lat}^{S(L)}(c,1) = \left(\theta_{lat}^{L}(c,1)\right)_{S(L)}$. Dado que $(c,1) \in \left(\gamma^L\right)^*$, tenemos que $\theta^{S(L)}(c,1) = \theta_{lat}^{S(L)}(c,1) \subseteq \left(\gamma^L\right)^*$. Por Lemas 7 y 6, $(c,1)$ es γ^L-disjunto y en consecuencia $c=1$. El caso $c \notin q$ puede ser hecho de manera similar.□

Corollary 15. *Sea L un demi-p-lattice. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) L es s.i.

(2) L es f.s.i.

(3) $Z(L) = \{0,1\}$ y $n^L \leq 1$. □

REPRESENTACION GLOBAL

Note que, si $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{M}}$, entonces $X(L) = \overline{\{p,q\}} = \{p,q,g(p),g(q)\}$. Usando este hecho podemos calcular $\mathcal{F}^{\mathcal{M}} = \{\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},M,N\}$, donde N es el álgebra De Morgan dada en la Figura 4.

N

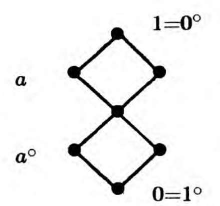


Figura 4

Un cómputo similar produce $\mathcal{F}^{\overline{\mathcal{M}}} = \{\mathbf{2},M_1,N_1\}$, donde N_1 es el álgebra dada en la Figura 5.

N_1

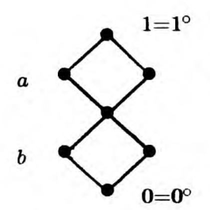


Figura 5

Theorem 16. *Sea $\mathcal{V}$ una subvariedad de $\mathcal{V}_1$ y sea $L \in \mathcal{V}$.*

i) $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ sii

(1) L es 3-regular

(2) $n^L \leq 2$

(3) Si $n^L = 0$, entonces $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{M}}$.

(4) Si $n^L = 1$, entonces existe un par γ^L-disjunto (a,b) tal que todo par γ^L-disjunto no trivial (c,d) es $S(L)$-simétrico a algún par de $\{(a,b),(a^\circ,b^\circ)\}$.

(5) Si $n^L = 2$, entonces todo par γ^L-disjunto es trivial.

En consecuencia la clase $S\left(\mathcal{F}^{\mathcal{V}}\right)$ satisface (S1).

ii) Si $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ es globalmente descomponible, entonces L es 2-regular propia no finitamente subdirectamente irreducible.

Proof: i). Sea $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ y sea $p,q \in X(L)$ tal que $p \subseteq q$ y $X(L) = \overline{\{p,q\}}$.

Para probar que L satisface (1), sea $Y = Y\left(\gamma^L\right) \cup \{p,q\}$. Dado que $\theta_Y \subseteq \gamma^L$, tenemos que $\theta_Y \in Con(L)$ y en consecuencia $Y = X(L)$. Dado que $p \subseteq q$, tenemos (1).

Para probar que L satisface (2), use los Lemas 8 y 9.

Para probar que L satisface (3), note que si $\gamma^L = \Delta^L$ y $i = 1$, entonces $L \in \mathcal{M}$.

Para probar que L satisface (4) y (5), asumimos que $\left(\delta, \Delta^L\right) \in Cp(L)$. Sea θ la congruence de L asociada al par $\left(\delta, \Delta^L\right)$. Tenemos que $X(L) = Y(\theta) \cup Y\left(\gamma^L\right)$. Si $n^L = 2$, entonces $p,q \notin Y\left(\gamma^L\right)$ (ver Lema 9) y consecuentemente $Y(\theta) = X(L)$. Entonces $\delta = \Delta^L$ y en consecuencia (5) sigue a partir del Lema 6. Supongamos que $n^L = 1$ y $\delta \neq \Delta^L$. Note que $\left|\{p,q\} \cap Y\left(\gamma^L\right)\right| \leq 1$. Vamos a considerar el caso $p \in Y\left(\gamma^L\right)$. El caso $q \in Y\left(\gamma^L\right)$ puede ser hecho de manera similar. Dado que $q \notin Y\left(\gamma^L\right)$, tenemos que $q \in Y(\theta)$. Sea $p_1 = \{x \in L : x^\circ \notin p\}$. Usando que $p \in Y\left(\gamma^L\right)$ podemos probar que $p_1 \in X(L)$ y que $\theta_{\{p,p_1\}} \in Con(L)$. Luego $X(L) = Y(\theta) \cup \{p,p_1\}$. Afirmamos que $Y(\theta) = X(L) - \{p,p_1\}$. Primero, notemos que $Y\left(\gamma^L\right)$, con la topología relativa y el orden dado por la inclusión, es el espacio de representación de Priestley de $L/\gamma^L \cong S(L)$, que es un álgebra de De Morgan. Por otro lado, note que $Y(\theta) \cap Y\left(\gamma^L\right)$ es el cerrado correspondiente a $(\theta \vee \gamma^L)/\gamma^L \in Con\left(L/\gamma^L\right)$. Por lo tanto, $p \in Y(\theta) \cap Y\left(\gamma^L\right)$ sii $p_1 = g^{L/\gamma^L}(p) \in Y(\theta) \cap Y\left(\gamma^L\right)$ y entonces tenemos la afirmación. Ahora, sea (a,b) un par γ^L-disjunto tal que $a \neq b$. Por Lema 6, la congruencia θ_1 asociada al par $\left(\theta^{S(L)}(a,b), \Delta^L\right)$ tiene como cerrado a $Y(\theta_1) = Y(\theta)$. Luego, todo par γ^L-disjunto no trivial (c,d) es $S(L)$-simétrico a lagún elemento de $\{(a,b),\ (a^\circ,b^\circ)\}$ y en consecuencia tenemos (4).

Vamos ahora a probar la conversa. Supongamos que L satisface (1),...,(5). El caso $n^L = 0$ es trivial. Si $n^L = 2$, entonces, por Lema 9, existen $p,q \in X(L) - Y(\gamma^L)$ tal que $p \subseteq q$ y $X(L) = \{p,q\} \cup Y(\gamma^L)$. Sea $\theta \in Con(L)$ tal que $\theta \subseteq \theta_p \cap \theta_q$. Tenemos que el par asociado a θ es $(\theta_{S(L)}, \Delta^L)$, porque $\theta_p \cap \theta_q \cap \gamma^L = \Delta^L$. Por (5) y Lema 6 tenemos que $\theta_{S(L)} = \Delta^{S(L)}$. Por lo tanto $X(L) = \overline{\{p,q\}}$. Supongamos ahora que $n^L = 1$. Si todo par γ^L-disjunto es trivial, entonces L es s.i. y, consecuentemente, $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}_i}$ (Lema 3). Supongamos que (a,b) es un par γ^L-disjunto y $a \neq b$. Sea p el único filtro primo r tal que γ^L no está contenida en θ_p (ver Lema 8). Sea $q \in X(L)$ tal que $(a,b) \notin \theta_q$ y sea $\theta \in Con(L)$ tal que $\theta \subseteq \theta_p \cap \theta_q$. Por Lema 8, $\theta \cap \gamma^L = \Delta^L$. Afirmamos que $\theta_{S(L)} = \Delta^{S(L)}$. Sea $(c,d) \in \theta_{S(L)}$. Dado que $\left(\theta^{S(L)}(c,d), \Delta^L\right) \in Cp(L)$, tenemos que $\theta^{S(L)}(c,d) \in \left\{\Delta^L, \theta^{S(L)}(a,b)\right\}$. Supongamos que $\theta^{S(L)}(c,d) = \theta^{S(L)}(a,b)$. Dado que $\theta \subseteq \theta_q$, tenemos que $\theta^{S(L)}(c,d) \subseteq \theta_q$ y consecuentemente $\theta^{S(L)}(a,b) \subseteq \theta_q$, lo que es una contradición. Entonces $c = d$ y tenemos la afirmación.

ii). Supongamos primero que L es 3-regular propia y que $L \subseteq \prod\{L_i : i \in I\}$ es un producto subdirecto global, donde I es un espacio y $ker(\pi_i) \neq \Delta^L$, para todo $i \in I$. Usando los Lemas 6 y 9, podemos deducir que L/θ es 2-regular, para todo $\theta \neq \Delta^L$. Luego cada $L_i \cong L/\ker(\pi_i)$ es 2-regular. Sea $x,y,z \in L$ tal que $x < z < y$ y supongamos que $x^\circ = y^\circ = z^\circ$. Note que $E(x,z) \cup E(z,y) = I$. Definimos w de la siguiente manera

$$w(i) = \begin{cases} y(i) & \text{si } i \in E(x,z) \\ x(i) & \text{si } i \in E(z,y) \end{cases}.$$

Claramente w esta bien definida y en consecuencia tenemos que $w \in L$. Dado que w es el complemento de z en $[x,y] \subseteq G[x]$, hemos probado que $G[x]$ es relativamente complementado, para todo $x \in L$, lo que es una contradicción. Entonces L es globalmente indescomponible. Finalmente note que por (a) de Teorema 3.2, todo álgebra f.s.i. de congruencias distributivas es globalmente indescomponible, y en consecuencia tenemos ii). □

Es fácil chequear que el teorema anterior es válido si reemplazamos $\mathcal{V}_1$ por $\mathcal{V}_2$.

En las figuras 6, 7 y 8 agrupados son las clases de equivalencias no triviales de $\gamma^L = \ker(^\circ)$. Note que cada diagrama define la operación $x \to x^\circ$ de manera única. (Use que $1^\circ = 0$ y que $a^{\circ\circ} = a$.)

Theorem 17. *Las siguientes condiciones son equivalentes para una MS-álgebra L:*

(1) $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{MS}}$

(2) Las siguientes condiciones son verdaderas:

(i) L es 3-regular

(ii) $n^L \leq 2$

(iii) $S(L) \in \mathcal{F}^{\mathcal{M}}$

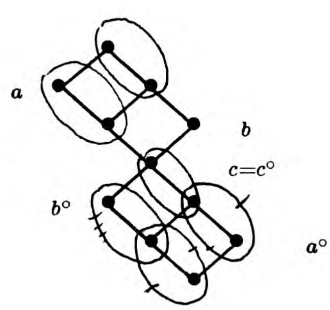
(iv) si L es 3-regular propia, entonces $S(L)$ es f.s.i..

(v) $L \notin I(\{K_1, K_2\})$, donde K_1 y K_2 son las MS-álgebras dadas en la Figura 6.

*(3) $L \in I\{$**2**,**3**,**4**,**5**$,N, M, L_1, ..., L_{19}\}$, donde $L_1, ..., L_{19}$ es la MS-álgebras dada en la Figura 7 y donde vemos* **2**,**3**,**4** *y* **5** *como álgebras de Kleene.*

Más aún, $\mathcal{F}^{\mathcal{MS}}$ es una clase universal que satisface (S1). Los únicos mienbros globalmente descomponibles de $\mathcal{F}^{\mathcal{MS}}$ son L_9, L_{10}, L_{11}, L_{12}, L_{13}.

K_1



K_2

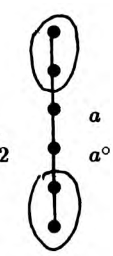


Figura 6

Proof: Primero, note que si L es 3-regular, entonces $X(L) - Y(\gamma^L)$ es finita y por lo tanto $(\gamma^L)^* = \theta_{X(L)-Y(\gamma^L)}$. Entonces, por los Lemas 7 y 6,

(I) $(a,b) \in S(L) \times S(L)$ es γ^L-disjunto sii $a\dot{\vee}b = b$ y (a,b), $(a^\circ, b^\circ) \in \theta_{X(L)-Y(\gamma^L)}$.

(1)$\Rightarrow$(2). (i). Use el Teorema 16.

(ii). Use el Teorema 16.

(iii). Sea $p, q \in X(L)$ tal que $p \subseteq q$ y $X(L) = \overline{\{p, q\}}$. Claramente $p_1 = p \cap S(L)$ y $q_1 = q \cap S(L)$ son filtros primos de $S(L)$. Sea $\delta \in Con(S(L))$ tal que $\delta \subseteq \theta_{p_1} \cap \theta_{q_1}$. Dado que $\theta_p \cap \theta_q \cap \gamma^L = \Delta^L$, tenemos que $\delta \subseteq \left(\gamma^L\right)^*$ y en consecuencia, por el Lema 7, tenemos que $\left(\delta, \Delta^L\right) \in Cp(L)$. Sea θ la congruencia asociada con el par $\left(\delta, \Delta^L\right)$. Dado que $\theta \subseteq \theta_p \cap \theta_q$, tenemos que $\theta = \Delta^L$ y por lo tanto $\delta = \Delta^{S(L)}$.

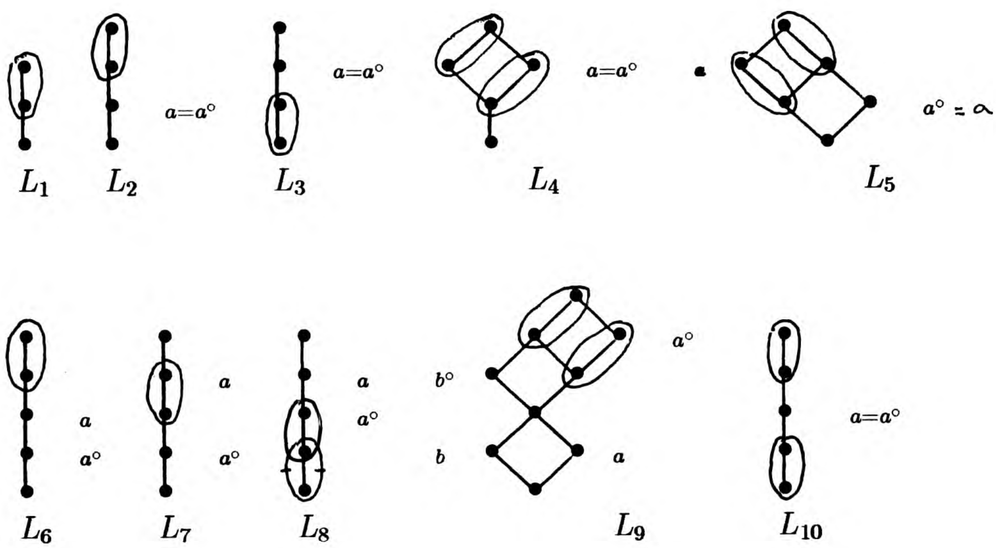


Figura 7

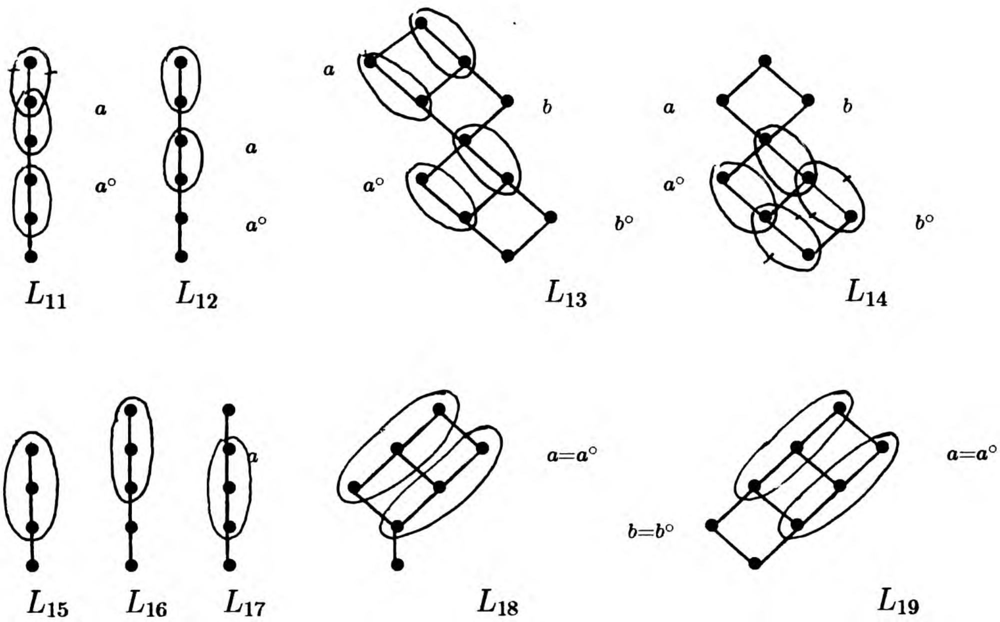


Figura 7

(iv) Sea L 3-regular y supongamos que $S(L)$ no es f.s.i.. Entonces, el diagrama de Hasse de L es uno de los diagramas dados en la Figura 8.

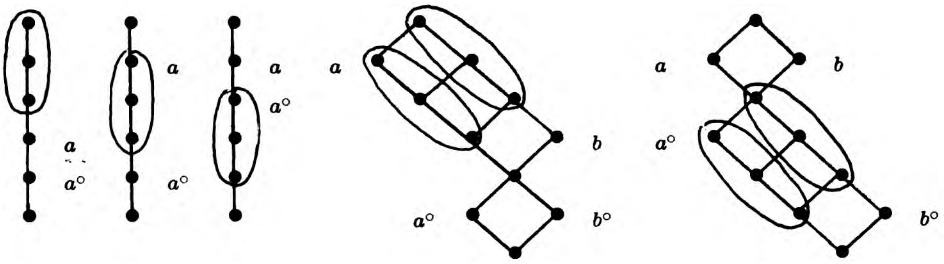


Figura 8

Usando (I), podemos deducir que L tiene un par γ^L-disjunto no trivial, lo que dice que $L \notin \mathcal{F}^{\mathcal{MS}}$.

(v) Note que (c, b) es un par γ^L-disjunto de K_1 y (a, a°) es un par γ^L-disjunto de K_2.

(2)$\Rightarrow$(1). Consideremos los siguientes casos:

CASO $n^L = 0$. Entonces $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{M}} \subset \mathcal{F}^{\mathcal{MS}}$.

CASO $n^L = 1$. Si $S(L)$ es f.s.i., entonces L es f.s.i. y en consecuencia $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{MS}}$. Si $S(L)$ no es f.s.i., entonces puede ser probado que L es isomorfa L_i, para algún $i \in \{6, 7, 8, 9, 14\}$. Entonces L satisface (4) del Teorema 16 y en consecuencia $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{MS}}$.

CASO $n^L = 2$ y es L 2-regular. Puede ser probado que L es isomorfa a L_i, para algún $i \in \{10, 11, 12, 13\}$. Luego, todo par γ^L-disjunto es trivial y entonces, por el Teorema 16, $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{MS}}$.

CASO $n^L = 2$ y es L 3-regular. Puede ser probado que L es isomorfa a L_i, para algún $i \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$. Entonces, todo par γ^L-disjunto es trivial y entonces, por el Teorema 16, $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{MS}}$.

(2)$\Rightarrow$(3) y (3)$\Rightarrow$(1) han sido probados en la argumentación anterior.

Vomas a probar ahora que los únicos miembros globalmente descomponibles de $\mathcal{F}^{\mathcal{MS}}$ son $L_9, ..., L_{13}$. Primero, supongamos que $10 \leq i \leq 13$. Entonces L_i es 2-regular y $n^{L_i} = 2$ y por lo tanto $X(L_i) = \overline{\{p, q\}}$, para algún $p, q \in X(L_i) - Y\left(\gamma^{L_i}\right)$ tal que $p \subset q$. Puede ser chequeado que $\theta_{\bar{p}} \vee \theta_{\bar{q}} = \theta_{\bar{p}} \cup \theta_{\bar{q}}$ y en consecuencia, por el Teorema 4, L_i es globalmente descomponible. Afirmamos ahora que L_9 es globalmente descomponible. Sea $p = [a^\circ)$ y $q = L_9 - (b]$. Es fácil chequear que $X(L_9) = \overline{\{p, q\}}$ y $\gamma^{L_9} \vee \theta_{\bar{p}} = \gamma^{L_9} \cup \theta_{\bar{p}}$. Entonces, por el Teorema 4, L_9 es globalmente descomponible. Supongamos ahora que $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{MS}}$ es globalmente descomponible. Por el Teorema 16, L es 2-regular propia no f.s.i.. Puede ser chequeado que L es isomorfa a L_i para algún $9 \leq i \leq 13$.

Finalmente, vamos a probar que $\mathcal{F}^{\mathcal{MS}}$ es universal. Sea ϕ una sentencia universal tal que L satisface (1), (2), (3) y (4) sii L satisface ϕ. Sea ψ una sentencia universal axiomatizando $S\left(\mathcal{F}^{\mathcal{MS}}\right)$. Note que si L satisface ϕ, entonces $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{MS}} \cup I\{K_1, K_2\}$. Por otro lado, note que K_1, K_2 no están en la clase $S\left(\mathcal{F}^{\mathcal{MS}}\right)$. Entonces $\phi \wedge \psi$ axiomatiza $\mathcal{F}^{\mathcal{MS}}$. $\square$

Para poder caracterizar la clase $\mathcal{F}^{\mathcal{DP}}$ necesitamos el siguiente lema

Lemma 18. *Sea $L \in \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ tal que $S(L)$ es un álgebra Booleana y sea $p \in X(L)$.*

(1) Supongamos que p no pertenece a $Y\left(\gamma^L\right)$. Si $q \in Y\left(\gamma^L\right)$ y p es comparable con q, entonces $q \in \bar{p}$.

(2) Si L satisface la ecuación $(x \wedge y)^{\circ\circ} = x^{\circ\circ} \wedge y^{\circ\circ}$, entonces $\bar{p} = \{p\} \cup \left\{q \in Y\left(\gamma^L\right) : p \cap S(L) \subseteq q\right\}$.

Prueba: (1). Supongamos que $p \notin Y\left(\gamma^L\right)$ y $q \in Y\left(\gamma^L\right)$. Primero, asumamos que $p \subseteq q$. Claramente $\theta_{\bar{p}} \cap \gamma^L = \theta_p \cap \gamma^L$. Sea $\delta \in Con(S(L))$ tal que $\left(\delta, \theta_p \cap \gamma^L\right)$ es el par de congruencias asociado a $\theta_{\bar{p}}$. Por el Lema 7, si $(a, 1) \in \delta$, entonces $a \in p$ y por lo tanto $a \in q$. Luego $1/\delta \subseteq q$. Dado que $S(L)$ es un álgebra Booleana y $q \in Y\left(\gamma^L\right)$, tenemos que $\{(x, y) : (x^\circ, y^\circ) \in \delta\} \subseteq \theta_q$. Entonces $\theta_{\bar{p}} \subseteq \theta_q$ y en consecuencia $q \in \bar{p}$. El caso $q \subseteq p$ puede ser probado de manera similar.

(2). Sean p, δ como en la prueba de (1). Usando el Lema 7 y la hipótesis, podemos deducir que $\left(\delta_1, \theta_p \cap \gamma^L\right) \in Cp(L)$ sii $[1]\delta_1 \subseteq p$, para todo $\delta_1 \in Con(S(L))$. Dado que $p \cap S(L)$ es un filtro de $S(L)$, tenemos que $\delta = \theta^{S(L)}(p \cap S(L))$. Entonces, para todo $q \in Y\left(\gamma^L\right)$, tenemos que $\theta_{\bar{p}} \subseteq \theta_q$ sii $p \cap S(L) \subseteq q$. □

Theorem 19. *(1) Un demi-p-lattice $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{DP}}$ sii L satisface las siguientes condiciones:*

(i) L es 3-regular

(ii) $n^L \leq 2$

(iii) $Z(L) = \{0, 1\}$.

Entonces, $\mathcal{F}^{\mathcal{DP}}$ es una clase universal, que satisface (S1). Los elementos globalmente descomponibles $\mathcal{F}^{\mathcal{DP}}$ son exactamente los miembros 2-regulares que verifican $n^L = 2$.

(2) $\mathcal{F}^{\mathcal{AP}}$ satisface (S1) y (S2).

Prueba: (1) Sea $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{DP}}$ tal que $\gamma^L \neq \Delta^L$ y sean $p, q \in X(L)$ tal que $p \subseteq q$ y $X(L) = \overline{\{p, q\}}$. Si L es s.i., entonces, por el Corolario 15, L satisface (i), (ii) y (iii). Supongamos ahora que L no es s.i. Por (2) del Lema 18 y el Lema 3, tenemos que $p \neq q$ y que p, q no están en $Y\left(\gamma^L\right)$. Dado que $n^L = 2$, por el Teorema 16, todo par γ^L-disjunto es trivial. Entonces, por el Lema 14, $Z(L) = \{0, 1\}$. (i) y (ii) siguen del Lema 16. La conversa sigue fácilmente del Lema 16 y el Lema 14.

Sea $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{DP}}$ globalmente descomponible. Por los Teoremas 16 y 15, L es 2-regular y $n^L = 2$. Vamos a probar la conversa. Supongamos que L es 2-regular y $n^L = 2$. Entonces $\overline{X(L) = \{p,q\}}$, para algún $p, q \in X(L) - Y\left(\gamma^L\right)$ tal que $p \subset q$. Puede ser chequeado que $\theta_{\bar{p}} \vee \theta_{\bar{q}} = \theta_{\bar{p}} \cup \theta_{\bar{q}}$ y luego, por el Teorema 4, L es globalmente descomponible.

(2) Puede ser probado que si $L \in \mathcal{DP}$ es 2-regular propia y $n^L = 2$, entonces $|\{x : x^\circ = 1\}| = |\{x : x^\circ = 0\}| = 2$.

Por [29, Theorem 2.2] y el Teorema 16 tenemos que $\mathcal{F}^{\mathcal{AP}}$ satisface (S2). □

Supongamos que L es un demi-p-lattice tal que $p^{\circ\circ} \cap (L-q)^{\circ\circ} = \emptyset$, para todo filtro primo $p \subset q$. Note que si $L/\theta \in \mathcal{F}^{\mathcal{DP}}$, entonces L/θ es 2-regular. Entonces todo factor de la representación global del Teorema 19 es 2-regular y en consecuencia podemos usar argumentos similares (patching) a los usados en la última parte de la prueba del Teorema 16 para obtener que $G[x]$ es reletivamente complementado, para todo $x \in L$. La aplicación anterior puede ser pensada como un análogo al teorema de Nachbin [24]. De manera similar obtuvimos [15] resultados de tipo Nachbin para p-álgebras distributivas dobles de un rango finito y para toda variedad semisimple de expansiones de reticulados en las cuales los miembros simples forman una clase universal (por ejemplo, álgebras de De Morgan). El siguiente teorema completa la anterior aplicación.

Theorem 20. : *Sea L un demi-p-lattice. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) L es isomorfa a un producto subdirectamente global con factores subdirectamente irreducibles.

(2) El mapa natural

$$\tau : L \longrightarrow \Pi\{L/\theta : \theta \in CMICon(L)\}$$
$$x \longrightarrow \langle x/\theta : \theta \in CMICon(L)\rangle$$

es un embedding y $\tau(L)$ es un producto subdirecto global, donde CMICon(L) es provisto de la topología de los ecualizadores, que hacen de $CMICon(L)$ un espacio de Stone donde los conjuntos fundamentales son los conjuntos de la forma $\bigcup_{k=1}^{n} \bigcap_{l=1}^{m} E(\tau(x_{kl}), \tau(y_{kl}))$, *with* $x_{kl}, y_{kl} \in L$ *y* $n, m \geq 0$.

(3) Todo sistema $(\theta_1, ..., \theta_n, x_1, ..., x_n)$ tal que $\theta_1 \cap \ldots \cap \theta_n = \Delta^L$ tiene una solución.

(4) $G[x]$ es relativamente complementado para todo $x \in L$.

(5) Si $p \subset q$, entonces $p^{\circ\circ} \cap (L-q)^{\circ\circ} = \emptyset$.

(6) Las congruencias de L permutan.

Prueba: Note que $\theta_1 \cap \ldots \cap \theta_n = \Delta^L$ sii el conjunto $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$ minoriza $CMICon(L)$. Dado que $\mathcal{DP}_{SI}$ es universal, (1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3) siguen del Teorema 1.

(1)$\Rightarrow$(4). Use argumentos similares (patching) a los de la última parte de la prueba del Teorema 16.

(4)$\Rightarrow$(5). Supongamos que $p, q \notin Y\left(\gamma^L\right)$. Si $un \in p^{\circ\circ} \cap (L-q)^{\circ\circ}$, entonces $p \cap G[a]$ y $q \cap G[a]$ son filtros primos distintos de $G[a]$, lo que contradice el hecho de que $G[a]$ es relativamente complementado. Si $p \in Y\left(\gamma^L\right)$ (resp. $q \in Y\left(\gamma^L\right)$), entonces $p^{\circ\circ} = p \cap S(L)$ (resp. $(L-q)^{\circ\circ} = (L-q) \cap S(L)$). Entonces tenemos la implicación.

(5)$\Rightarrow$(6). Sea (θ_1, ρ_1, x, y) un sistema y sean $\theta \subseteq \theta_1$, $\rho \subseteq \rho_1$ congruencias compactas tal que $(x, y) \in \theta \vee \rho$. Probaremos que el sistema (θ, ρ, x, y) tiene una solución en L. Note que

(*) $\sigma(x) \cap Y(\theta) \cap Y(\rho) = \sigma(y) \cap Y(\theta) \cap Y(\rho)$.

La siguiente afirmación puede ser probada usando (*)

El sistema (θ, ρ, x, y) tiene una solución sii $U = (\sigma(x) \cap Y(\theta)) \cup (\sigma(y) \cap Y(\rho))$ satisface la siguiente implicación

$p \in U$, $\quad q \in Y(\theta) \cup Y(\rho)$ y $p \subseteq q$ implican $q \in U$.

Probaremos que U satisface esta implicación. Sea $p \in \sigma(x) \cap Y(\theta)$ y sea $q \in Y(\rho) - Y(\theta)$ tal que $p \subset q$. Supongamos que $\left|\{p, q\} \cap Y\left(\gamma^L\right)\right| = 0$. Por (5) y el Teorema del Filtro Primo existe un filtro primo r tal que $p \subset r \subset q$ y $r \in Y\left(\gamma^L\right)$. Por el Lema 18, tenemos que $r \in Y(\theta) \cap Y(\rho)$. Luego, por (*), tenemos que $y \in r \subset q$ y en consecuencia $q \in \sigma(y) \cap Y(\rho)$. El caso $\left|\{p, q\} \cap Y\left(\gamma^L\right)\right| \geq 1$ sigue del Lema 18 y (*).

(6)$\Rightarrow$(3). Sigue del hecho de que un álgebra aritmética satisface el Teorema Chino del Resto con respecto al conjunto vacío de congruencias (ver [17, p. 221]). $\square$

Notemos que, por (3)$\Rightarrow$(6) del teorema anterior, un demi-p-lattice L satisface el Teorema Chino del Resto con respecto a $\sum(L, \mathcal{DP}_{SI})$ sii L es de congruencias permutables. Luego, para cada $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{DP}_{SI} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}^{\mathcal{DP}}$, el Teorema Chino del Resto con respecto a $\Sigma(L, \mathcal{M})$ puede ser tomado como una versión débil de permutabilidad.

4. P-ÁLGEBRAS DISTRIBUTIVAS DOBLES

Comenzamos la sección dando la notación y las definiciones básicas relacionadas con las p-álgebras distributivas dobles. Las reglas básicas de computación en estas álgebras pueden ser encontradas en [20]. En este trabajo Katriňák caracteriza a las álgebras subdirectamente irreducibles. Nosotros vamos a proponer en esta sección un estudio de estas álgebras utilizando un teorema de caracterización de las congruencias mediante de triples de congruencias. Esto permitirá presentar de manera más simple a las álgebras subdirectamente irreducibles y, a su vez, será un instrumento útil para el cálculo de $\mathcal{F}^{\mathcal{V}}$.

Si $\langle L, \vee, \wedge, ^*, 0, 1\rangle$ es una p-álgebra distributiva, entonces por $D(L)$ denotamos el filtro $\{x \in L : x^* = 0\}$ de *elementos densos* de L. Acorde con la notación usual, escribiremos $B\,(L)$ en lugar de $S\,(L)$. Por el teorema de Glivenko (ver [4, VIII.4, Theorem 3]), $B\,(L)$ es un álgebra Booleana. Las reglas básicas de computación en p-álgebra distributivas pueden encontrarse en [17].

Un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, *, +, 0, 1\rangle$ es llamada una p-álgebra distributiva doble si $\langle L, \vee, \wedge, *, 0, 1\rangle$ es una p-álgebra distributiva y $\langle L, \vee, \wedge, +, 0, 1\rangle$ es una p-álgebra distributiva dual. Para una p-álgebra distributiva dual L definimos el conjunto

$$\overline{B}(L) = \{x \in L : x = x^{++}\}$$

de elementos cerrados duales y

$$\overline{D}(L) = \{x \in L : x^+ = 1\}$$

el conjunto de elementos *densos duales.*

Sea L una p-álgebra distributiva doble. La relación ρ^L definida por

$$(x, y) \in \rho^L \text{ sii } x^* = y^* \text{ y } x^+ = y^+$$

es relación de congruencias en L. Diremos que L es *regular* si $\rho^L = \Delta^L$. Usamos $G[x]$ para denotar el subreticulado $\{z \in L : (x, z) \in \rho^L\}$. Katriňák [20] define una p-álgebra distributiva doble como *nearly regular* si $|G[x]| \leq 2$ para todo $x \in L$. Para una adecuada descripción de nuestra clase de fibras vamos a introducir el concepto de álgebra *3-regular,* que es una leve generalización del concepto de nearly regular. Una p-álgebra distributiva doble L es *3-regular* si $|G[x]| \leq 3$ para todo $x \in L$.

Dado un $a \in L$, $a^{n(+*)}$ es definido inductivamente como sigue:

$$a^{0(+*)} = a, \quad a^{(n+1)+*} = a^{n(+*)+*}, \quad \textit{para todo } n \geq 0.$$

Los elementos $a^{n(*+)}$ son definidos en una manera similar.

Un elemento $x \in L$ se dice de un *rango finito* n si satisface la identidad $x^{n(+*)} = x^{(n+1)(+*)}$. Un álgebra L es de *rango finito* si todo elemento de L tiene rango finito.

Vamos ahora a establecer un teorema de caracterización de las congruencias de una p-álgebra distributiva doble L utilizando triples de congruencias. Este resultado será clave para obtener una nueva caracterización de las álgebras s.i. no regulares y una caracterización de las álgebras de $\mathcal{F}^{\mathcal{V}}$. Al pretender imitar el teorema de representación dado por Lakser para las p-álgebras, nos encontramos frente a un problema similar al que encontramos en la representación de las congruencias en $\mathcal{V}_1$. No contamos en el caso general con una clase de equivalencia de congruencia ρ^L privilegiada, como es la clase $D(L)$ respecto de la congruencia γ^L. Recurrimos entonces para la representación a 3-tuples de la forma

$$(\gamma, \delta, \sigma) \in Con(B(L)) \times Con(\bar{B}(L)) \times (\rho^L].$$

Si $D(L)$ posee un menor elemento z_0 (en particular para L finita) entonces la clase $G[z_0]$ cumple la propiedad

$$(x, y) \in \theta \text{ sii } ((x \wedge x^+) \vee z_0, (y \wedge y^+) \vee z_0) \in \theta \cap (G[z_0] \times G[z_0])$$

para todo $\theta \subseteq \rho^L$, como veremos posteriormente. Esto permite una caracterización con triples en

$$Con(B(L)) \times Con(\bar{B}(L)) \times Con(G[z_0]).$$

Si $x \in L$, denotamos $d_x = x \vee x^*$ y $b_x = x \wedge x^+$.

Por $Ct(L)$ denotamos el conjunto de 3-tuples $(\gamma, \delta, \sigma) \in Con(B(L)) \times Con(\bar{B}(L)) \times (\rho^L]$ que satisfacen:

(T1) $(a, 1) \in \gamma$, $d \in D(L)$ y $b \in \bar{D}(L)$ implican $((a \wedge b) \vee d, b \vee d) \in \sigma$

(T2) $(a, 0) \in \delta$, $d \in D(L)$ y $b \in \bar{D}(L)$ implican $((a \vee d) \wedge b, b \wedge d) \in \sigma$

(T3) $(a, 1) \in \gamma$ implica $(a^{++}, 1) \in \delta$

(T4) $(a, 0) \in \delta$ implica $(a^{**}, 0) \in \gamma$.

Si $\theta \in Con\,(L)$ entonces por θ_B, $\theta_{\bar{B}}$ denotamos la restricción de θ a $B\,(L)$ y $\bar{B}\,(L)$, respectivamente.

Theorem 21. *Sea L una p-álgebra distributiva doble. Entonces, el mapa*

$$\begin{array}{rcl} Con(L) & \rightarrow & Con(B(L)) \times Con(\bar{B}(L)) \times (\rho^L] \\ \theta & \rightarrow & (\theta_B, \theta_{\bar{B}}, \theta \cap \rho^L) \end{array}$$

es un homomorfismo 1-1 que mapea $Con(L)$ sobre $Ct(L)$. Si $(\gamma, \delta, \sigma) \in Ct(L)$ entonces la correspondiente congruencia $\theta \in Con(L)$ esta determinada por

(I) $(x, y) \in \theta$ sii $(x^{**}, y^{**}) \in \gamma$, $(x^{++}, y^{++}) \in \delta$ y

$$(b_x \vee (d_x \wedge d_y), b_y \vee (d_x \wedge d_y)) \in \sigma.$$

Prueba: Ya que

$$\begin{array}{rcl} x & = & x^{++} \vee (x^{**} \wedge (b_x \vee (d_x \wedge d_y))) \\ y & = & y^{++} \vee (y^{**} \wedge (b_y \vee (d_x \wedge d_y))) \end{array}$$

para todo $x, y \in L$, tenemos que, para cualquier $\theta \in Con(L)$

(1) $(x, y) \in \theta$ sii $(x^{**}, y^{**}) \in \theta_B$, $(x^{++}, y^{++}) \in \theta_{\bar{B}}$ y

$$(b_x \vee (d_x \wedge d_y), b_y \vee (d_x \wedge d_y)) \in \theta \wedge \rho^L.$$

Sea $(\gamma, \delta, \sigma) \in Ct(L)$ y sea θ_1 la congruencia de L determinada por $(x, y) \in \theta_1$ sii $(x^{**}, y^{**}) \in \gamma$, $(x^{++}, y^{++}) \in \delta$ y $((x \wedge b) \vee d, (y \wedge b) \vee d) \in \sigma$ para cualquier $d \in D(L)$ y $b \in \bar{D}(L)$. Vamos a probar que $\theta_1 \in Con(L)$. Sea $(x, y) \in \theta_1$. Como $(x^*, y^*) \in \gamma$ y γ es una congruencia booleana, tenemos que $x^* \wedge a = y^* \wedge a$, para algún $a \in B(L)$ tal que $(a, 1) \in \gamma$. Sea $b \in \bar{D}(L)$ y $d \in D(L)$. Por (T1) tenemos que $((a \wedge b) \vee d, b \vee d) \in \sigma$ y también

$((x^* \wedge b) \vee d, (x^* \wedge a \wedge b) \vee d) \in \sigma$.

De manera similar probamos que $((y^* \wedge b) \vee d,\ (y^* \wedge a \wedge b) \vee d) \in \sigma$. Luego $((x^* \wedge b) \vee d, (y^* \wedge b) \vee d) \in \sigma$. Más aún, ya que

$(x^{*++} \wedge a^{++})^{++} = (y^{*++} \wedge a^{++})^{++}$

y $(a^{++},1) \in \delta$, tenemos que $(x^{*++}, y^{*++}) \in \delta$ (usamos que δ es una congruencia booleana) y por lo tanto $(x^*, y^*) \in \theta_1$. Debe notarse que en realidad hemos demostrado que $\gamma \subseteq \theta_{1B}$. De manera similar probamos que θ_1 preserva $^+$ y que $\delta \subseteq \theta_{1\bar{B}}$. Queda probado que $\theta_1 \in Con(L)$. Tenemos además que lo siguiente se cumple:

$$(2)\theta_{1B} \subseteq \gamma,\ \theta_{1\bar{B}} \subseteq \delta and \sigma = \theta_1 \wedge \rho^L.$$

Sólo vamos a probar que $\theta_1 \wedge \rho^L \subseteq \sigma$. Las otras desigualdades son fáciles de comprobar. Sea $(x,y) \in \theta_1 \wedge \rho^L$ y sea $d = (x \wedge y) \vee x^*$. Notemos que $(x,y) \in \theta_1 \wedge \rho^L$ implica $(x, x \wedge y) \in \sigma$. Luego se verifica

$$\begin{aligned}
&x^* = y^* \\
&x^+ = y^+ \\
&(r,s) = ((x \wedge b_x) \vee d, (y \wedge b_x) \vee d) \in \sigma.
\end{aligned}$$

Se sigue que $(x^{**} \wedge r, x^{**} \wedge s) \in \sigma$, y en consecuencia,
$(x^{++} \vee (x^{**} \wedge r), x^{++} \vee (x^{**} \wedge s)) = (x, x \wedge y) \in \sigma$.
De manera similar probamos que $(x \wedge y, y) \in \sigma$ y consecuentemente $(x,y) \in \sigma$. Entonces hemos probado (2) y el teorema se deduce desde (1).□

Supongamos ahora que $D(L)$ un menor elemento z_0 y sea $Ct'(L)$ el conjunto de 3-tuplas
$(\gamma, \delta, \alpha) \in Con(B(L)) \times Con(\bar{B}(L)) \times Con(G[z_0])$
que satisfacen (T3), (T4) y
(T1') $(a,1) \in \gamma$ y $b \in \bar{D}(L)$ implican $((a \wedge b) \vee z_0, b \vee z_0) \in \alpha$
(T2') $(a,0) \in \delta$ y $b \in \bar{D}(L)$ implican $((a \vee z_0) \wedge b, b \wedge z_0) \in \alpha$.
Tenemos el siguiente resultado, que puede ser obtenido del Teorema 21.

Corollary 22. *Supongamos que $D(L)$ tiene un menor elemento z_0. El mapa*

$$\begin{array}{ccc}
Con(L) & \longrightarrow & Con(B(L)) \times Con(\bar{B}(L)) \times Con(G[z_0]) \\
\theta & \longrightarrow & (\theta_B, \theta_{\bar{B}}, \theta_{G[z_0]})
\end{array}$$

es un homomorfismo 1-1 que mapea $Con(L)$ sobre $Ct'(L)$. Si $(\gamma, \delta, \alpha) \in Ct'(L)$ entonces la correspondiente congruencia $\theta \in Con(L)$ esta determinada por
(I) $(x,y) \in \theta$ sii $(x^{**}, y^{**}) \in \gamma$, $(x^{++}, y^{++}) \in \delta$ y
$((x \wedge x^+) \vee z_0, (y \wedge y^+) \vee z_0) \in \alpha$. □

Note que las p-álgebras distributivas dobles que poseen tal z_0 forman una variedad (de tipo (2,2,1,1,0,0,0)) que contiene las álgebras finitas.

(Finitamente) Subdirectamente irreducibles

Vamos a comenzar ahora con el estudio de las álgebras no regulares (finitamente) s.i.. Se produce en este caso un fenómeno similar al descripto en la sección anterior en la que usamos la representación por pares de congruencias para el estudio de las álgebras en $\mathcal{V}_1$. Si logramos las condiciones

- $(\rho^L] = \{\Delta^L, \rho^L\}$
- si $(\gamma, \delta, \Delta^L) \in Ct(L)$ entonces $\gamma = \Delta^{B(L)}$ y $\delta = \Delta^{\bar{B}(L)}$,

entonces, garantizamos que ρ^L será el monolito de L En efecto, dada cualquier congruencia no trivial θ, entonces el triple asociado a θ es $(\theta_B, \theta_B, \theta \cap \rho^L)$. Dado que $\theta \cap \rho^L \in \{\Delta^L, \rho^L\}$, tenemos por la segunda condición que $\theta \cap \rho^L = \rho^L$, es decir que $\rho^L \subseteq \theta$. Esto garantiza que ρ^L es el monolito de L. Haremos ahora un estudio más detallado de las condiciones de arriba, para poder introducir las definiciones que necesitamos.

Para las p-álgebras dobles se introducen definiciones similares a las establecidas para la variedad $\mathcal{V}_1$, sólo que reemplazamos γ^L por ρ^L, como congruencia privilegiada del álgebra. La noción de k-regularidad fue introducida por Katriňák con el nombre de *nearly regularidad,* para el caso $k = 2$. A diferencia de las álgebras en $\mathcal{V}_1$, para las p-álgebras dobles la condición de 2-regularidad es equivalente a la de $n^L = 1$, por lo tanto podremos precindir de la definición de n^L. La primera condición dada anteriormente, $(\rho^L] = \{\Delta^L, \rho^L\}$, será equivalente a la condición de nearly regularidad.

Dado que $B(L)$ y $\bar{B}(L)$ son álgebras de Boole, la segunda condición toma una forma más agradable que para el caso de $\mathcal{V}_1$. Como todas las congruencias principales de $B(L)$ y $\bar{B}(L)$ son de la forma $\theta(a, 1)$ y $\theta(0, b)$, no necesitamos hablar de "pares ρ^L-disjuntos". Damos ahora una definición conveniente y luego mostramos como se relaciona con la segunda condición.

Diremos que $x \in L$ es *transversal* si para cada $n \geq 1$, $d \in D(L)$ y $b \in \bar{D}(L)$ tenemos que

$$\left(x^{n(+*)} \wedge b\right) \vee d = b \vee d$$
$$\left(x^{+n(*+)} \vee d\right) \wedge b = b \wedge d.$$

Sea $x \in L$. Denotamos

$$\begin{aligned} F_x &= \{a \in B(L) : a \geq x^{n(+*)} \text{ para algún } n \geq 1\} \\ I_x &= \{b \in \bar{B}(L) : b \leq x^{+n(*+)} \text{ para algún } n \geq 1\} \end{aligned}$$

Es fácil chequear que F_x es un filtro de $B(L)$ y I_x es un ideal de $\bar{B}(L)$. Sea Θ_x (resp. Γ_x) la congruencia de $B(L)$ (resp. $\bar{B}(L)$) asociada con el filtro F_x (resp. ideal I_x).

Es fácil chequear ahora que

$$x \text{ es transversal sii } \left(\Theta_x, \Gamma_x, \Delta^L\right) \in Ct(L).$$

Theorem 23. *Supongamos que L no es regular. Entonces L es (finitamente) subdirectamente irreducible si y sólo si L es nearly regular y 1 es el único elemento transversal.*

Antes de probar el teorema vamos a estudiar las álgebras nearly regulares. Recordamos que si L es un reticulado distributivo acotado entonces por $M(L)$ (resp. $m(l)$) denotamos al conjunto de filtros primos maximales (resp. minimales) de L. Los siguientes hechos serán usados sin una mención previa:

(a) (ver [1]) *Si L es una p-álgebra distributiva y Y es a subconjunto cerrado de $X(L)$, entonces $Y \in Cl(L)$ si y sólo si para todo $p \in Y$ y $q \in M(X(L))$, si $p \subseteq q$, entonces $q \in Y$. Por lo tanto para $Y \subseteq X(L)$ tenemos que $\overline{Y} = Y \cup \{q \in M(X(L)) : p \subseteq q$, para algún $p \in Y\}$.*

(b) (Ver [4, Theorem 2, p. 154]) Sea L *una p-álgebra distributiva y sea p un filtro primo en L. Entonces p es un filtro maximal de L sii $p \supseteq D(L)$.*

(c) (Ver [27])$Y(\rho^L) = M(L) \cup m(L)$.

Lemma 24. (*Katriňák [20]) Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(1) L es nearly regular
(2) $(\rho^L] = \{\Delta^L, \rho^L\}$.

Prueba: (2)$\Rightarrow$(1). Si $x < y \leq z$ y $x, y \in G[z]$, entonces $\theta_{lat}(x,y)$, $\theta_{lat}(y,z) \in Con(L)$ y $\theta_{lat}(x,y) \neq \theta_{lat}(y,z)$. Luego $y = z$.

(1)$\Rightarrow$(2). Supongamos que L es nearly regular propia. Sean p_i filtros primos tales que $p_i \notin M(L) \cup m(L)$, para $i = 1{,}2$. Se puede probar que existe $z \in D(L)$ y $w \in \bar{D}(L)$ tales que $z \notin p_i$ y $w \in p_i$, para cada $1 \leq i \leq 2$. Luego,

$$x \in p_i \text{ sii } (x \vee z) \wedge w \in p_i \cap G[w],$$

para cada $x \in L$ y $1 \leq i \leq 2$. Ya que $|G[w]| \leq 2$, tenemos que $p_1 = p_2$. Luego, tenemos probado que existe a lo sumo un filtro primo p tal que $p \notin M(L) \cup m(L)$. Sea (z,w), $(x,y) \in \rho^L$ tal que $x < y$ y $z < w$. Ya que

$$\begin{aligned} p_1 &= \{t \in L : (t \vee z) \wedge w = w\} \\ p_2 &= \{t \in L : (t \vee x) \wedge y = y\} \end{aligned}$$

son filtros primos, tenemos que $p_1 = p_2$ y consecuentemente $(w \vee x) \wedge y = y$ y $(z \vee x) \wedge y \neq y$. Ya que L es nearly regular tenemos que $(z \vee x) \wedge y = x$ y luego $(x,y) \in \theta_{lat}(z,w)$. Hemos probado (2). El caso L regular es trivial. □

Prueba de 23: Sea L finitamente subdirectamente irreducible. Veamos que 1 es el único elemento transversal. Supongamos que $(\Theta_x, \Gamma_x, \Delta^L) \in Ct(L)$. Sea θ la congruencia asociada al triple $(\Theta_x, \Gamma_x, \Delta^L)$. Dado que, por Teorema 21, $\theta \wedge \rho^L = \Delta^L$, tenemos que $\theta = \Delta^L$ y en consecuencia $x = 1$. La afirmación sigue de (I). Para probar que L es nearly regular, note que si $x < y < z$ y $y, z \in G[x]$ entonces $\theta_{lat}(x,y)$, $\theta_{lat}(y,z) \in Con(L)$ y $\theta_{lat}(x,y) \cap \theta_{lat}(y,z) = \Delta^L$.

Supongamos ahora que L es nearly regular y que 1 es el único elemento transversal. Probaremos que ρ^L es monolito en $Con(L)$. Sea $\Delta^L \neq \theta \in Con(L)$. Note que, para cada $x \in [1]\theta$, $(\Theta_x, \Gamma_x, \theta(x,1) \wedge \rho^L) \in Ct(L)$. Luego, por (I), $\theta(x,1) \wedge \rho^L \neq \Delta^L$ y, en concecuencia, por el Lema 24, $\rho^L \subseteq \theta(x,1) \subseteq \theta$. □

Vamos ahora a dar un Lema que nos permite obtener la caracterización dada por Katriňák en [20].

Lemma 25. *Si L es nearly regular propia y $x \in L$ entonces las siguiente condiciones son equivalentes:*

i) x es transversal

ii) $|G[d]| = 1$, para cada $d \in [F_{d_x}) \cap D(L)$.

Proof: i)⇒ii). Sea $d \in [F_{d_x}) \cap D(L)$ y supongamos que $d_1 \in G[d]$, $d \leq d_1$. Ya que x es transversal, tenemos que $d = \left(x^{n(+*)} \wedge b_{d_1}\right) \vee d = b_{d_1} \vee d = d_1$, donde $n \geq 1$ es tal que $x^{n(+*)} \leq d$. Supongamos ahora que $d_1 \leq d$. Vamos a probar que $d_1 \in [F_{d_x}) \cap D(L)$. Sea z tal que $z \in F_{d_x}$ y $z \leq d$. Dado que $z \wedge d_1 \in G[z \wedge d] = G[z]$, tenemos que $z^{n(+*)} = (z \wedge d_1)^{n(+*)}$ para cada $n \geq 1$. Luego, $z \wedge d_1 \in F_{d_x}$ y en consecuencia, $d_1 \in [F_{d_x}) \cap D(L)$.

ii)⇒i). Supongamos que x no es transversal. Vamos a probar que ii) no es cierto. Consideramos dos casos:

CASO $\left(x^{n(+*)} \wedge b\right) \vee d \neq b \vee d$, para algún $n \geq 1$, $d \in D(L)$ y $b \in \bar{D}(L)$. Sea $z = \left(x^{n(+*)} \wedge b\right) \vee d$ y $w = b \vee d$. Dado que $x^{n(+*)} \wedge z = x^{n(+*)} \wedge w$, tenemos que $x^{n(+*)} \vee z \neq x^{n(+*)} \vee w$. Este caso sigue a partir de la observación de que $\left(x^{n(+*)} \vee z, x^{n(+*)} \vee w\right) \in \rho^L$.

CASO $\left(x^{+n(*+)} \vee d\right) \wedge b = b \wedge d$, para algún $n \geq 1$, $d \in D(L)$ y $b \in \bar{D}(L)$. Usando un argumento similar al anterior podemos probar que existe $b \in \bar{D}(L)$ satisfaciendo $|G[b]| \neq 1$, tal que $x^{+n(*+)} \geq b$ para algún $n \geq 0$. Luego $x^{n+1(+*)} \leq b^* \leq b \vee b^* \in D(L)$. Dado que, para todo $b_1 \in G[b]$, $b_1 \wedge b^* = 0$, tenemos que $|G[b \vee b^*]| \neq 1$ y así hemos completado el último caso posible. □

Por $C(L)$ denotamos el conjunto $\{x \in L : x^* \vee x = 1 \text{ y } x^* \wedge x = 0\}$.

Corollary 26. *(Katriňák [20]) Sea L no regular . L es (finitamente) subdirectamente irreducible si y sólo si L es nearly regular, $C(L) = \{0, 1\}$ y para cada $1 \neq x \in D(L)$ con $|G[x]| = 1$ existe $d \in D(L)$ satisfaciendo $|G[d]| \neq 1$ tal que $x^{n(+*)} \leq d$ para algún $n \geq 0$.* □

Representacion global

Vamos ahora a comenzar el estudio de la clase $\mathcal{F}^{\mathcal{V}}$. Primero vamos a abordar un tópico que, como ya hemos mencionado, posee una importancia crucial en la representación global: la construcción de soluciones para sistemas de congruencias. En este caso, el Teorema de representación de las congruencias nos permite descomponer un sistema de ecuaciones en varios subsistemas, que resolveremos por separado.

Para $1 \leq i \leq n$ definimos los términos t_i^n como sigue:

$$t_i^n = b_{y_i} \vee \bigwedge\nolimits_{j=1}^n d_{y_j}.$$

Es fácil probar que $t_i^n(\vec{x}) \in G[z]$ para todo $\vec{x} \in L^n$, donde $z = \bigwedge_{j=1}^n d_{x_j}$.

Lemma 27. *Si $\vec{x} \in L^n$, $d \in D(L)$ y $d \leq \bigwedge\limits_{j=1}^{n} d_{x_j}$ entonces*

$$x_i = ((d \vee d_{x_i}) \wedge x_i^{**}) \vee x_i^{++},$$

para $i = 1, ..., n$.
Luego, para $1 \leq i \leq n$,

$$x_i = (t_i^n(\vec{x}) \wedge x_i^{**}) \vee x_i^{++}. \ \square$$

Theorem 28. *Sea $S = (\theta_1, ..., \theta_n, x_1, ..., x_n)$ un sistema en L. Consideremos los siguientes sistemas asociados a S:*
$S_B = (\theta_{1B}, ..., \theta_{nB}, x_1^{**}, ..., x_n^{**})$ en $B(L)$,
$S_{\bar{B}} = (\theta_{1\bar{B}}, ..., \theta_{n\bar{B}}, x_1^{++}, ..., x_n^{++})$ en $\bar{B}(L)$ and
$S_{G[z]} = (\theta_{1G[z]}, ..., \theta_{nG[z]}, t_1^n(\vec{x}), ..., t_n^n(\vec{x}))$ en $G[z]$, donde $z = \bigwedge_{j=1}^n d_{x_j}$.
Si $a \in B(L)$, $b \in \bar{B}(L)$ y $t \in G[z]$ son soluciones de S_B , $S_{\bar{B}}$ y $S_{G[z]}$, respectivamente, entonces $(t \wedge a) \vee b$ es una solución de S. Recíprocamente, si x es una solución de S, entonces $x^{**} \in B(L)$, $x^{++} \in \bar{B}(L)$ y $b_x \vee z \in G[z]$ son soluciones de S_B , $S_{\bar{B}}$ y $S_{G[z]}$, respectivamente. Consecuentemente S tiene una solución en L si y sólo si $S_{G[z]}$ tiene una solución en $G[z]$.

Prueba: Para probar el implica, note que por el lema anterior,
$((t \wedge a) \vee b, x_i) = \left((t \wedge a) \vee b, (t_i^n(\vec{x}) \wedge x_i^{**}) \vee x_i^{++}\right) \in \theta_i$.
Para probar la recíproca, note que $b \vee z \in G[z]$, para cada $b \in \bar{D}(L)$. Por lo tanto $(b_x \vee z, t_i^n(\vec{x})) = (b_x \vee z, b_{x_i} \vee z) \in \theta_{iG[z]}$. $\square$

Para terminar el estudio previo a la caracterización de $\mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ vamos primero a probar un resultado que nos permite caracterizar las álgebras 3-regulares y luego introduciremos algunos conceptos nuevos.

Lemma 29. *Sea L be a p-álgebra distributiva doble. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) L es 3-regular propia

(2) $(\rho^L] = \{\Delta^L, \theta_1, \theta_2, \rho^L\}$, donde θ_1, θ_2 no permutan

(3) $X(L) - Y\left(\rho^L\right)$ es es una cadena de dos elementos.

Prueba: usando que $Y\left(\rho^L\right) = M(X(L)) \cup m(X(L))$, podemos deducir que

(*) Si $F \subseteq X(L) - Y\left(\rho^L\right)$ es finita entonces existen $d \in D(L)$ y $b \in \bar{D}(L)$ tales que $p = \{x \in L : (x \wedge b) \vee d \in p \cap G[d]\}$, para todo $p \in F$

(1) $\Rightarrow$ (3). Sigue de (*).

(3) $\Rightarrow$ (2). Sea $U = \{p\} \cup Y(\rho^L)$ y $V = \{q\} \cup Y(\rho^L)$, donde $p, q \in X(L) - Y(\rho^L)$, $p \subset q$. entonces $\theta_U, \theta_V \in Con(L)$ y $(\rho^L] = \{\Delta^L, \theta_U, \theta_V, \rho^L\}$. Por (*), existe $d \in D(L)$ tal que $p \cap G[d] \subset q \cap G[d]$ es una cadena de filtros primos de $G[d]$. Entonces, $\theta_{p \cap G[d]}, \theta_{q \cap G[d]}$ no permutan y en consecuencia θ_U, θ_V no permutan.

(2) $\Rightarrow$ (3). Ya que $\theta_{\{p\} \cup Y(\rho^L)} \in Con(L)$, para todo $p \in X(L) - Y(\rho^L)$, tenemos que $X(L) = \{p, q\} \cup Y\left(\rho^L\right)$, para algún $p, q \in X(L)$ y en consecuencia $|G[z]| \leq 4$, para todo $z \in L$. Vamos a probar $p \subseteq q$ o $q \subseteq p$. Por el Corolario 28, existe $x \in L$ tal que $G[x] = \{u, v, t\}$ y $u < v < t$. Entonces, para todo $z \in L$ y $f \in \{p, q\}$, $z \in f$ sii $(z \vee u) \wedge t \in f \cap G[x]$, y en consecuencia $p \subseteq q$ o $q \subseteq p$. $\square$

Sea $L_\circ$ una p-álgebra distributiva doble regular. $L_\circ$ se dice to be *auxiliar* si existe una p-álgebra distributiva doble K s.i. tal que $L \cong K/\rho^K$. La noción de álgebra auxiliar fue introducida por M. Adams y T. Katriňák en [3]. Observamos que para toda p-álgebra distributiva doble $L_\circ$ tenemos que $Z(L_\circ)$ es el conjunto de elementos complementados de $L_\circ$ (use el Lema 13).

Theorem 30. *(M. Adams y T. Katriňák [3]) Una p-álgebra distributiva doble regular $L_\circ$ es auxiliar si y sólo si las siguientes condiciones son verdaderas:*

(1) existe un ideal primo I de $D(L_\circ)$ tal que para todo $1 \neq x \in D(L_\circ)$, existe $d \in I$ tal que $x^{n(+*)} \leq d$, para algún $n \geq 0$,

(2) $Z(L_\circ) = \{0, 1\}$ (o $\bigwedge\{x^{n(+*)} : n \geq 0\} = 0$, para todo $x \in L_\circ - \{1\}$.)$\square$

Lemma 31. *(a) Una p-álgebra distributiva doble regular L es auxiliar sii existe $p \in X(L)$ tal que $X(L) = \bar{p}$.*

(b) $S(\{$álgebras auxiliares$\}) \subseteq \{$álgebras auxiliares$\}$.

Prueba: (a) Sea L un álgebra auxiliar. Supongamos que I es un ideal primo de $D(L)$ que satisface la condición (1) del Teorema 42. Afirmamos que $X(L) = \bar{p}$, donde $p = L-(I]$. Sea $\theta \in Con(L)$. Si $(x,1) \in \theta$ y $\theta \subseteq \theta_p$ entonces $x \vee x^* = 1$ (use la condición (1) del Teorema 42). Dado que $Z(L) = \{0,1\}$, tenemos que $[1]\theta = \{1\}$ y en consecuencia $\theta = \Delta^L$, porque L es regular. Entonces, tenemos la afirmación.

Supongamos ahora que $X(L) = \bar{p}$, para algún $p \in X(L)$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $p \in m(X(L))$ ($q \subseteq p$ implica $\bar{p} \subseteq \bar{q}$). Definamos $I = (L-p) \cap D(L)$. Si $I = \emptyset$, entonces $p \in M(X(L))$ y en consecuencia $L \cong \mathbf{2}$. Supongamos que $I \neq \emptyset$. Sea $1 \neq x \in D(L)$ y sea F el filtro $\{t \in L : t \geq x^{n(+*)}$ para algún $n \geq 0\}$. Se puede chequear fácilmente que $\theta^L(F) \in Con(L)$. Dado que $\theta^L(F) \neq \Delta^L$, tenemos que $\theta^L(F)$ no está contenido en θ_p. Entonces F no está contenido en p y en consecuencia existe $n \geq 0$ tal que $x^{n(+*)} \leq d \vee x^{n(+*)} \in I$, donde d es cualquier elemento de I.

(b) Sea $L \in S(\{L_0\})$, donde L_0 es un álgebra auxiliar. Por [27, Corollary 2.5], existe un mapeo que preserva el orden $\Phi : X(L_0) \to X(L)$, el cual es sobre. Sea $p \in X(L_0)$ tal que $X(L_0) = \bar{p}$. Dado que Φ preserva el orden, tenemos que $\Phi^{-1}\left(\overline{\Phi(p)}\right) \in Cl(L_0)$. Entonces $\Phi^{-1}\left(\overline{\Phi(p)}\right) = X(L_0)$ y, consecuentemente, $X(L) = \overline{\Phi(p)}$. □

Recordemos que T. Katriňák [20] probó que una p-álgebra distributiva doble no regular L es s.i. sii L es nearly regular, $Z(L) = \{0,1\}$ y

(*) para todo $1 \neq x \in D(L)$ con $|G[x]| = 1$ existe $d \in D(L)$ satisfaciendo $|G[d]| \neq 1$ tal que $x^{n(+*)} \leq d$ para algún $n \geq 0$.
Más aún, L es s.i. sii L es f.s.i.

Theorem 32. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad de p-álgebra distributiva dobles. Entonces $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ sii $L \in \mathcal{V}$ y se dan las siguientes condiciones:*
(i) si L es regular entonces L es auxiliar,
(ii) si L no es regular entonces L es 3-regular, $Z(L) = \{0,1\}$ y L satisface (*).
Más aún, $\mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ satisface (S2).

Proof: Sea $p, q \in X(L)$ tal que $p \subseteq q$ y $X(L) = \overline{\{p,q\}}$.

L satisface (i). Sea L regular. Tenemos que $X(L) = \bar{p} = \bar{q}$. Sea $1 \neq x \in D(L)$ y supongamos que $p \in m(X(L))$. Definamos $I = (L-p) \cap D(L)$. Si $I = \emptyset$ entonces $p \in M(X(L))$ y en consecuencia $L \cong \mathbf{2}$. Supongamos que $I \neq \emptyset$ y sea F el filtro $\{t \in L : t \geq x^{n(+*)}$ para algún $n \geq 0\}$. Puede chequearse que

$\theta^L(F) \in Con(L)$. Ya que $\theta^L(F) \neq \Delta^L$, tenemos que $\theta^L(F)$ no está contenido en θ_p. Entonces F no está contenido en p y por lo tanto existe $n \geq 0$ tal que $x^{n(+*)} \leq d \vee x^{n(+*)} \in I$, donde d es cualquier elemento de I. Entonces hemos finalizado el caso $p \in m(X(L))$.

Si $p \in M(X(L))$ entonces existe $q_1 \in m(X(L))$ tal que $q_1 \subseteq p$ y $\overline{q_1} = X(L)$, porque $p \in \overline{q_1}$. Luego sigue (i).

L satisface (ii). Supongamos que L no es regular. Primero notemos que, por el Lema 29, L es 3-regular. Vamos a probar que $Z(L) = \{0,1\}$. Sea W un clopen creciente y decreciente de $X(L)$. Note que $(X(L) - W)$, $W \in Cl(L)$. Ya que $p, q \in W$ o $p, q \in (X(L) - W)$, tenemos que $W = X(L)$ o $W = \emptyset$. Luego $Z(L) = \{0,1\}$. Ahora vamos a probar que L satisface (*). Sea $x \in L - \{1\}$. Definamos $F = \{z \in B(L) : z \geq x^{n(+*)}$ para algún $n \geq 0\}$ y $I = \{w \in \bar{B}(L) : w \leq x^{+n(*+)}$ para algún $n \geq 0\}$. Dado que $X(L) = \overline{\{p,q\}}$, tenemos que $\theta \wedge \rho^L = \Delta^L$ implica $\theta = \Delta^L$, para todo $\theta \in Con(L)$. En consecuencia, $\left(\theta^B(F), \theta^{\bar{B}}(I), \Delta^L\right) \notin Ct(L)$. Ya que $\left(\theta^B(F), \theta^{\bar{B}}(I), \Delta^L\right)$ satisface (T3) y (T4), podemos tener dos casos:

CASO $\left(\theta^B(F), \theta^{\bar{B}}(I), \Delta^L\right)$ no satisface (T1). Puede chequearse que existen $b \in \bar{D}(L)$ y $d \in D(L)$ tal que $\left(x^{n(+*)} \wedge b\right) \vee d \neq b \vee d$, para algún $n \geq 0$. Sea $z = \left(x^{n(+*)} \wedge b\right) \vee d$ y $w = b \vee d$. Ya que $x^{n(+*)} \wedge z = x^{n(+*)} \wedge w$, tenemos que $x^{n(+*)} \vee z \neq x^{n(+*)} \vee w$. Este caso sigue a partir de la siguiente condición $\left(x^{n(+*)} \vee z, x^{n(+*)} \vee w\right) \in \rho^L$.

CASO $\left(\theta^B(F), \theta^{\bar{B}}(I), \Delta^L\right)$ no satisface (T2). Usando argumentos similares a los anteriores podemos ver que existe $b \in \bar{D}(L)$ satisfaciendo $|G[b]| \neq 1$, tal que $x^{+n(*+)} \geq b$ para algún $n \geq 0$. Entonces $x^{n+1(+*)} \leq b^* \leq b \vee b^* \in D(L)$. Dado que, para todo $b_1 \in G[b]$, $b_1 \wedge b^* = 0$, tenemos que $|G[b \vee b^*]| \neq 1$ y así terminamos el último caso posible.

Supongamos ahora que L satisface (i) y (ii). Sea L regular y supongamos que I es un ideal primo en $D(L)$ que satisface la condición (1) del Teorema 42. Afirmamos que $X(L) = \bar{p}$, donde $p = L - (I]$. Si $\theta \in Con(L)$, $(x,1) \in \theta$ y $\theta \subseteq \theta_p$ entonces $x \vee x^* = 1$ (use la condición (1) del Teorema 42). Ya que $Z(L) = \{0,1\}$, tenemos que $[1]\theta = \{1\}$ y en consecuencia $\theta = \Delta^L$, porque L es regular. Entonces, la afirmación sigue. Supongamos ahora que L no es regular. Por el Lema 29, existen $p, q \in X(L)$ tales que $X(L) = \{p,q\} \cup Y\left(\rho^L\right)$. Afirmamos que $X(L) = \overline{\{p,q\}}$. Sea $\theta \in Con(L)$ tal que $p, q \in Y(\theta)$ y sea $(a,1) \in \theta_B$, $a \neq 1$. Observemos que $|G[a \vee a^*]| = 1$. En efecto, si $z \in G[a \vee a^*]$ entonces, por el

Corolario 28, tenemos que 1 es una solución del sistema $(\theta, \rho, z, 1)$ (recordemos que $[1]\,\rho^L = \{1\}$), lo que dice que $z = a \vee a^*$, porque $\theta \wedge \rho^L = \Delta^L$. Entonces, por (*), existe $d \in D(L)$ satisfaciendo $|G[d]| \neq 1$ tal que $(a \vee a^*)^{n(+*)} \leq d$ para algún $n \geq 0$. Note que, para todo $d_1 \in G\,[d]$, $(a \vee a^*)^{n+1(+*)} \leq d^{+*} = d_1^{+*} \leq d_1$. Sea $v, w \in G\,[d]$, $v < w$. Es fácil ver que $((a \vee a^*)^{n+1(+*)} \wedge (w \wedge w^+)) \vee v = v \neq w = (w \wedge w^+) \vee v$, contradiciendo que $\left(\theta_B, \theta_{\bar{B}}, \Delta^L\right) \in Ct\,(L)$. Entonces hemos probado que $X\,(L) = \overline{\{p, q\}}$.

Ahora vamos a probar que $\mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ satisface (S2). Sea $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$. Si L es regular entonces L es f.s.i. (ver el Lema 3) y en consecuencia, por el Teorema 2 (a), L es globalmente indescomponible. Ahora asumamos que L no es regular y que $L \subseteq \Pi\{L_i : i \in I\}$ es un producto subdirecto global, donde I es un espacio compacto y $\ker(\pi_i) \not\models 0$, para todo $i \in I$. Note que L/θ es nearly regular, para todo $\theta \neq \Delta^L$. Luego L_i es nearly regular, para todo $i \in I$. Usando argumentos similares a los de la última parte de la prueba del Teorema 16, podemos probar que $G[x]$ es relativamente complementado para cualquier $x \in L$, lo que implica que L es nearly regular. Entonces L es s.i., le que contradice el hecho de que las congruencias $\ker(\pi_i)$ son no triviales. □

Como ya hemos mencionado, si nos restringimos a una variedad de álgebras de rango finito, entonces la clase en cuestión es universal y por lo tanto obtenemos la representación del tipo Birkhoff.

Corollary 33. *Si $\mathcal{V}$ es una variedad de p-álgebra distributiva dobles tales que todo $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ tiene rango finito, entonces $\mathcal{F}^{\mathcal{V}} = \{L \in \mathcal{V} : L$ es 3-regular and $Z\,(L) = \{0,1\}\}$ satisfies (S1) and (S2).*

Prueba: Sea $L \in \{L \in \mathcal{V} : L$ es 3-regular and $Z\,(L) = \{0,1\}\}$. Si $x^{n(+*)} = x^{n+1(+*)}$ entonces

$$x^{n+1(+*)} \vee x^{n(+*)+} = x^{n(+*)} \vee (x^{n(+*)})^+ = 1$$
$$x^{n+1(+*)} \wedge x^{n(+*)+} = (x^{n(+*)+})^* \wedge x^{n(+*)+} = 0.$$

Luego $x^{n+1(+*)}$ es complementado y por lo tanto $x^{n+1(+*)} = 0$. Ahora la condición (*)y la condición (1) del Teorema 42 siguen fácilmente. Hemos probado entonces que

$$\mathcal{F}^{\mathcal{V}} = \{L \in \mathcal{V} : L \text{ es 3-regular and } Z\,(L) = \{0,1\}\}.$$

Ahora se ve fácilmente que $\mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ es universal. □

La equivalencia entre las condiciones (4), (5) y (6) en el próximo Teorema fue establecida por Adams en [2].

Theorem 34. *Sea $\mathcal{J}$ la clase de p-álgebras distributivas dobles 2-regulares con $Z(L) = \{0,1\}$. Para una p-álgebra distributiva doble L las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) L es isomorfa a un producto subdirecto global $L_1 \subseteq \prod\{L_i : i \in I\}$ donde cada $L_i \in \mathcal{J}$.

(2) El mapa natural:

$$\tau : L \longrightarrow \Pi\{L/\theta : \theta \in \Sigma(L,\mathcal{J})\}$$
$$x \longrightarrow \langle x/\theta : \theta \in \Sigma(L,\mathcal{J})\rangle$$

es es un embeding y $\tau(L)$ es un producto subdirecto glabal, donde $\Sigma(L,\mathcal{J})$ es provisto de la topología de los ecualizadores, que hace a $\Sigma(L,\mathcal{J})$ un espcio de Stone deonde los conjuntos fundamentales son los de la forma

$\cup_{k=1}^{n}\cap_{l=1}^{m}E(\tau(x_{kl}),\tau(y_{kl}))$, $x_{kl}, y_{kl} \in L$, $n, m \geq 0$.

(3) L satisface el Teorema Chino del Resto con respecto a $\Sigma(L,\mathcal{J})$.

(4) $G[x]$ es relativamente complementado para todo $x \in L$.

(5) Toda cadena de filtros primos tiene longitud a lo sumo 3.

(6) L es de congruencias permutables.

Proof: (1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3) Sigue a partir del Teorema 1.

(1)$\Rightarrow$(4). Use los argumentos de la última parte de la prueba del Teorema 16.

(4)$\Rightarrow$(5). Supongamos que $s \subset p \subseteq q \subset r$ es una cadena de filtros primos de L. Entonces $p, q \notin M(X(L)) \cup m(X(L))$ y en consecuencia existe $z \in D(L)$ y $w \in \overline{D}(L)$ tales que $z \notin q$ y $w \in p$. Consecuentemente, si $j \in \{p,q\}$ y $x \in L$, entonces $x \in j$ si y sólo si $(x \vee z) \wedge w \in j \cap G[w]$. Ya que $G[w]$ es relativamente complementado, tenemos que $p \cap G[w] = q \cap G[w]$. Luego $p = q$.

(5)$\Rightarrow$(2). Sigue del Teorema 1 y de la observación de que si $G[u] = \{u, v, w\}$ y $u \leq v \leq w$ entonces $p = \{x \in L : (x \vee u) \wedge w = w\}$ y $q = \{x \in L : (x \vee u) \wedge w \geq v\}$ son filtros primos.

(4)$\Rightarrow$(6). Se sabe que (4) implica que para cada $x \in L$, las congruencias en $G[x]$ permutan. Sea $\theta, \delta \in Con(L)$, sea $(x,y) \in \theta \vee \delta$ y sea $z = (x \vee x^*) \wedge (y \vee y^*)$. Dado que $\theta_{G[z]}, \delta_{G[z]}$ permutan, tenemos que el sistema $(\theta_{G[z]}, \delta_{G[z]}, t_1^2(x,y), t_2^2(x,y))$ tiene una solución en $G[z]$. Por el Corolario 28 existe $w \in L$ tal que $(x,w) \in \theta$ y $(w,y) \in \delta$. □

5. Álgebras de De Morgan pseudocomplementadas.

Un álgebra $\langle L, \vee, \wedge, \sim, ^*, 0, 1\rangle$ es una *álgebra de De Morgan pseudocomplementada (PCDM-álgebra,* para mayor brevedad*)* si $\langle L, \vee, \wedge, ^*, 0, 1\rangle$ es una p-álgebra distributiva y $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1\rangle$ es un álgebra de De Morgan.

Las PCDM-álgebras, además de ser reticulados pseudocomplementados, poseen pseudocomplementación dual. En efecto, dada L una PCDM-álgebra y $x \in L$, definamos

$$x^+ = \sim (\sim x)^*$$

La condición $x \vee y = 1$ es equivalente a $\sim x \wedge \sim y = 0$ que a su vez es equivalente a $\sim y \leq (\sim x)^*$. Dado que $x \to \sim x$ es un homomorfismo que revierte el orden, tenemos la equivalencia

$$x \vee y = 1 \iff y \geq \sim (\sim x)^*.$$

lo que demuestra que $x^+ = \sim (\sim x)^*$ es el pseudocomplemento dual de x. La p-álgebra distributiva doble $\langle L, \vee, \wedge, ^*, ^+, 0, 1\rangle$ asociada a la PCDM-álgebra L será denotada por L_d.

Calculemos ahora la congruencia ρ^{L_d} (recordemos que si L es una p-álgebra distributiva doble entonces ρ^L se define

$$(x.y) \in \rho^L \text{ sii } x^* = y^* \text{ y } x^+ = y^+)$$

Notemos que

$$x^+ = y^+ \iff (\sim x)^* = (\sim y)^* \iff (\sim x, \sim y) \in \gamma^L$$

donde γ^L es la congruencia de Glivenko de L. Luego la congruencia de Glivenko asociada a la p-álgebra dual $\langle L, \vee, \wedge, ^+, 0, 1\rangle$ es

$$\sim \gamma^L = \left\{(\sim x, \sim y) : (x, y) \in \gamma^L\right\}$$

Por lo tanto

$$\rho^{L_d} = \gamma^L \cap \sim \gamma^L$$

Escriberemos sólamente ρ cuando desde el contexto sepamos de que álgebra estamos hablando.

Vamos ahora a intentar lograr, como en las variedades anteriormente estudiadas, un teorema de representación de las congruencias. Para esto necesitamos introducir un nueva estructura asociada a L.

Sea L una PCDM-álgebra. Si $x \in L$, entonces definimos $\alpha(x) = (\sim x)^*$. Mediante $B_\circ(L)$ denotamos el álgebra $\langle B(L), \dot{\vee}, \wedge, \alpha, 0, 1\rangle$. Note que las siguientes condiciones son verdaderas para todo $a, b \in B_\circ(L)$:

$\alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge \alpha(b)$
$\alpha^2(a) = a^{+*}$ y luego $\alpha^n(a) \geq \alpha^{n+2}(a)$, para todo $n \geq 0$.

Esta estructura nos permite imitar la representación obtenida para las álgebras en $\mathcal{V}_1$, caracterizando a una congruencia θ de L mediante un par

$$(\gamma, \sigma) \in Con(B_\circ(L)) \times (\rho]$$

Mediante $CP(L)$ denotamos el conjunto de pares $(\gamma, \sigma) \in Con(B_\circ(L)) \times (\rho]$ tal que:
(P1) $(a, 1) \in \delta$, $d \in D(L)$ y $b \in \overline{D}(L)$ implican $((a \wedge b) \vee d, b \vee d) \in \sigma$.

Recordamos que, para todo $x \in L$, denotamos $x \vee x^*$ y $x \wedge x^+$ por d_x y b_x, respectivamente.

Theorem 35. *Si L es una PCDM-álgebra, entonces el mapa*

$$\begin{array}{ccc} Con(L) & \longrightarrow & Con(B_\circ(L)) \times (\rho] \\ \theta & \longrightarrow & (\theta_B, \theta \wedge \rho) \end{array}$$

Theorem 36. *es un homomorfismo 1-1 que mapea $Con(L)$ sobre $CP(L)$. Si $(\delta,\sigma) \in CP(L)$, entonces la correspondiente congruencia $\theta \in Con(L)$ está determinada por*

$$(x,y) \in \theta \text{ si y sólo si } (x^{**},y^{**}),\ (\alpha(x),\alpha(y)) \in \delta \text{ y}$$
$$(b_x \vee (d_x \wedge d_y),\ b_y \vee (d_x \wedge d_y)) \in \sigma.$$

Prueba: Primero, observemos que, para todo $\theta \in Con(L)$,
(1) $(x,y) \in \theta$ si y sólo si (x^{**},y^{**}), $(\alpha(x),\alpha(y)) \in \theta_B$ y
$(b_x \vee (d_x \wedge d_y),\ b_y \vee (d_x \wedge d_y)) \in \theta \wedge \rho^L$.

En efecto,

$$\begin{aligned} x &= ((b_x \vee (d_x \wedge d_y)) \wedge x^{**}) \vee x^{++} \\ y &= ((b_y \vee (d_x \wedge d_y)) \wedge y^{**}) \vee y^{++} \end{aligned}$$

para todo $x, y \in L$.

Sea $(\delta,\sigma) \in CP(L)$ y sea θ_1 la relación en L determinada por $(x,y) \in \theta_1$ si y sólo si
$(x^{**},y^{**}) \in \delta$, $(\alpha(x),\alpha(y)) \in \delta$ y $((x \wedge b) \vee d, (y \wedge b) \vee d) \in \sigma$
para todo $d \in D(L)$ y todo $b \in \overline{D}(L)$. Afirmamos que $\theta_1 \in Con(L)$. Es fácil chequear que θ_1 es una congruencia de reticulado. Sea $(x,y) \in \theta_1$. Dado que $(x^*,y^*) \in \delta$ y δ es una congruencia booleana, tenemos que $x^* \wedge a = y^* \wedge a$, para algún $a \in B(L)$ tal que $(a,1) \in \delta$. Sea $b \in \overline{D}(L)$ y $d \in D(L)$. Por (P1) tenemos que $((a \wedge b) \vee d, b \vee d) \in \sigma$ y en consecuencia puede ser probado que
$((x^* \wedge b) \vee d, (x^* \wedge a \wedge b) \vee d) \in \sigma$.
En una manera similar demostramos que $((y^* \wedge b) \vee d,\ (y^* \wedge a \wedge b) \vee d) \in \sigma$ y en consecuencia $((x^* \wedge b) \vee d, (y^* \wedge b) \vee d) \in \sigma$. Dado que $(\alpha(x^*), \alpha(y^*)) \in \delta$, tenemos que θ_1 preserva $*$. Más aún, puede ser chequeado que
$((\sim x)^{**}, (\sim y)^{**})$, $(\alpha(\sim x), \alpha(\sim y)) \in \delta$.
Sea $d \in D(L)$ y $b \in \overline{D}(L)$. Dado que $\sim b \in D(L)$ y $\sim d \in \overline{D}(L)$, tenemos que
$(\sim ((\sim x \vee d) \wedge b), \sim ((\sim y \vee d) \wedge b)) = ((x \wedge \sim d) \vee \sim b, (y \wedge \sim d) \vee \sim b) \in \sigma$
Entonces $((\sim x \vee d) \wedge b, (\sim y \vee d) \wedge b) \in \sigma$ y luego
$((\sim x \wedge b) \vee d, (\sim y \wedge b) \vee d) = (((\sim x \vee d) \wedge b) \vee d, ((\sim y \vee d) \wedge b) \vee d) \in \sigma$.
Entonces, tenemos que $(\sim x, \sim y) \in \theta_1$ y en consecuencia tenemos la afirmación.
Po otro lado tenemos que
(2) $\theta_{1B} = \delta$ y $\sigma = \theta_1 \wedge \rho^L$.

Sólo probaremos que $\theta_1 \wedge \rho^L \subseteq \sigma$ y las otras inclusiones son dejadas al lector. Sea $(x,y) \in \theta_1 \wedge \rho^L$. Definamos $b = x \wedge x^+$ y $d = (x \wedge y) \vee x^*$. Dado que

$(b_x \vee (d_x \wedge d_{x\wedge y}), b_{x\wedge y} \vee (d_x \wedge d_{x\wedge y})) = ((x \wedge b) \vee d, (y \wedge b) \vee d) \in \sigma$

tenemos que $(x, x\wedge y) \in \sigma$. De una manera similar demostramos que $(x\wedge y, y) \in \sigma$ y en consecuencia $(x,y) \in \sigma$. Entonces tenemos probado (2) y el teorema sigue de (1).□

En el caso de las PCDM-álgebras ocurre un fenómeno particular que no se daba en los casos anteriores. Recordamos que para los casos ya tratados, toda congruencia de reticulados $\sigma \subseteq \rho^L$ (o $\sigma \subseteq \gamma^L$ para el caso de las álgebras en $\mathcal{V}_1$) era una congruencia de L. Esta diferencia nos obliga a cambiar en cierta medida el método de estudio. Para introducir el método que vamos a utilizar para el tratamiento de los (f.s.i.) s.i. de las PCDM-álgebras, vamos a cambiar el enfoque de los casos anteriores. Para este breve análisis, un álgebra L será cualquier álgebra en $\mathcal{V}_1$ o cualquier p-álgebra distributiva doble. Si L es k-regular, tomemos como una estructura asociada a L al reticulado $R(L)$, definido como el reticulado $G[a]$, donde a es algún elemento tal que $|G[a]| = k$. Para probar que esta definición es buena, se podría ver que todas las clases de equivalencia que poseen igual cardinal son isomorfas, consideradas como reticulado. Entonces habríamos pedido como condición necesaria para ser (f.s.i.) s.i. que $R(L)$ sea un reticulado s.i.. No fue necesario hacer esto porque los reticulados distributivos acotados R s.i. se caracterizan fácilmente a nivel de conjuntos con la condición $|R| = 2$. Para el caso de las PCDM-álgebras, la estructura asociada según este enfoque no es la de reticulado sino la de álgebra de De Morgan. Por eso tendremos que introducir formalmente esta estructura asociada que llamaremos $M(L)$. Para la caracterización de los f.s.i. estudiremos la condición $(\rho^L] = \{\Delta^L, \rho^L\}$ que se traducirá en la condición "$M(L)$ s.i.". Para introducir $M(L)$ recurrimos a la dualidad topológica.

Sea $k \geq 1$. Decimos que una PCDM-álgebra L es *k-regular* si $|G[x]| \leq k$, para todo $x \in L$. Sea L una PCDM-álgebra k-regular, con $k \geq 1$, y sea $\Phi(L) = X(L) - Y(\rho)$. Afirmamos que $\Phi(L)$ es finito. Para probar la afirmación vamos a probar que si existe en $\Phi(L)$ un conjunto de n filtros primos distintos F entonces hay una clase de equivalencia de ρ que posee n filtros primos distintos. Sea $F \subseteq \Phi(L)$ un conjunto finito y sea $p \in F$. Ya que

$Y(\rho) = M(X(L)) \cup m(X(L)),$

entonces p no es maximal ni minimal, por lo tanto $D(L)$ no está contenido en p y $p \cap \bar{D}(L) \neq \emptyset$ (recordemos que un filtro en una p-álgebra es maximal sii contiene a $D(L)$). Luego existen $d \in D(L)$ y $b \in \bar{D}(L)$ tal que $d \notin p$ y $b \in p$, para todo $p \in F$. Esto se puede generalizar de la siguiente manera. Sean $p_1, ..., p_k \in F$. Entonces podemos encontrar $d \in D(L)$ y $b \in \bar{D}(L)$ tal que $d \notin p_i$ y $b \in p_i$, para todo $0 \leq i \leq k$ (tomando el "meet" y el "join" de los encontrados para cada caso). Veamos ahora que si $p_i \neq p_j$ para todo $i \neq j$, entonces

$$p_i \cap G[d \vee b] \neq p_j \cap G[d \vee b].$$

Sea $x \in p_i - p_j$, entonces

$$((x \wedge b) \vee d)^{++} = (x \wedge b)^{++} \vee d^{++} = (x^+ \vee b^+)^+ \vee d^{++} = d^{++}$$

$$((x \wedge b) \vee d)^* = (x \wedge b)^* \wedge d^* = 0$$

Luego $(x \wedge b) \vee d \in G[d \vee b]$. Por otro lado, fácilmente se ve que

$$(x \wedge b) \vee d \in p_i \cap G[d \vee b] - p_j \cap G[d \vee b].$$

Probamos entonces que $p_i \cap G[d \vee b]$ y $p_j \cap G[d \vee b]$ son filtros distintos. Luego hemos probado la afirmación.

Más aún, dado que el mapa g preserva el orden desde $X(L)$ sobre su orden dual, tenemos que $g(M(X(L))) = m(X(L))$ y consecuentemente $g(\Phi(L)) = \Phi(L)$. Entonces el reticulado $L(\Phi(L))$ de subconjuntos cerrados crecientes de $\Phi(L)$ puede ser convertido en un álgebra de De Morgan definiendo $\sim U = \Phi(L) - g(U)$, para todo $U \in L(\Phi(L))$. Denotamos esta álgebra por $M(L)$.

Lemma 37. *Sea L una PCDM-álgebra k-regular, $k \geq 1$. Si $x \in L$ y $|G[x]| = k$, entonces $\left\langle G[x], \vee, \wedge, \neg, 0^{G[x]}, 1^{G[x]} \right\rangle$ es un álgebra de De Morgan, donde definimos $\neg z = \left(\sim z \vee 0^{G[x]}\right) \wedge 1^{G[x]}$, para todo $z \in G[x]$, . Más aún,*

$$\left\langle G[x], \vee, \wedge, \neg, 0^{G[x]}, 1^{G[x]} \right\rangle \cong M(L).$$

Prueba: Sea $a \in D(L)$ tal que el mapa

$$\begin{array}{ccc} \Phi(L) & \to & X(G[a]) \\ p & \to & p \cap G[a] \end{array}$$

es 1-1. Entonces el homomorfismo de reticulados $f : G[a] \to L(\Phi(L))$ definido por $f(x) = \sigma(x) \cap \Phi(L)$, es un isomorfismo. Más aún, para todo $x \in G[a]$, tenemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(\sim f(x)) &= f^{-1}(\Phi(L) - g(\sigma(x) \cap \Phi(L))) \\ &= \left(X(L) - \sigma\left(0^{G[a]}\right)\right) \cap \sigma\left(1^{G[a]}\right) \cap \sigma(\sim x). \end{aligned}$$

Entonces, tenemos probado que $\langle G[a], \vee, \wedge, \neg, 0^{G[a]}, 1^{G[a]} \rangle$ es un álgebra de De Morgan isomorfa a $M(L)$. Para completar la prueba, use los siguientes hechos:

Theorem 41. *Sea L una PCDM-álgebra de rango finito. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) L es s.i.

(2) L es f.s.i.

(3) (i) $Z(L) = \{0, 1\}$

(ii) L es 4-regular y $M(L)$ es una álgebra de De Morgan s.i..

Prueba: Use los Teoremas 39 y 40 y la observación de arriba. □

Representación por haces del tipo Birkhoff.

Sea $L_\circ$ una p-álgebra distributiva doble regular. $L_\circ$ se dice *auxiliar* si existe una p-álgebra distributiva doble K s.i. tal que $L \cong K/\rho^K$. La noción de álgebra auxiliar fue introducida por M. Adams y T. Katriňák en [3]. Observamos que para toda p-álgebra distributiva doble $L_\circ$ tenemos que $Z(L_\circ)$ es el conjunto de elementos complementados de $L_\circ$ (use el Lema 13).

Theorem 42. *(M. Adams y T. Katriňák [3]) Una p-álgebra distributiva doble regular $L_\circ$ es auxiliar si y sólo si las siguientes condiciones son verdaderas:*

(1) existe un ideal primo I de $D(L_\circ)$ tal que para todo $1 \neq x \in D(L_\circ)$, existe $d \in I$ tal que $x^{n(+*)} \leq d$, para algún $n \geq 0$,

(2) $Z(L_\circ) = \{0, 1\}$ (o $\bigwedge\{x^{n(+*)} : n \geq 0\} = 0$, para todo $x \in L_\circ - \{1\}$.)□

Lemma 43. *(a) Una p-álgebra distributiva doble regular L es auxiliar sii existe $p \in X(L)$ tal que $X(L) = \bar{p}$.*

(b) $S(\{$álgebras auxiliares$\}) \subseteq \{$álgebras auxiliares$\}$.

Prueba: (a) Sea L un álgebra auxiliar. Supongamos que I es un ideal primo de $D(L)$ que satisface la condición (1) del Teorema 42. Afirmamos que $X(L) = \bar{p}$, donde $p = L - (I]$. Sea $\theta \in Con(L)$. Si $(x, 1) \in \theta$ y $\theta \subseteq \theta_p$ entonces $x \vee x^* = 1$ (use la condición (1) del Teorema 42). Dado que Z$(L) = \{0, 1\}$, tenemos que $[1]\,\theta = \{1\}$ y en consecuencia $\theta = \Delta^L$, porque L es regular. Entonces, tenemos la afirmación.

Supongamos ahora que $X(L) = \bar{p}$, para algún $p \in X(L)$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $p \in m(X(L))$ ($q \subseteq p$ implica $\bar{p} \subseteq \bar{q}$). Definamos $I = (L - p) \cap D(L)$. Si $I = \emptyset$, entonces $p \in M(X(L))$ y en consecuencia $L \cong \mathbf{2}$. Supongamos que $I \neq \emptyset$. Sea $1 \neq x \in D(L)$ y sea F el filtro $\{t \in L : t \geq x^{n(+*)}$

como $\rho\wedge\theta=\Delta^L$, tenemos que $z=a\vee a^*$ y en consecuencia el la afirmación sigue. Entonces, por (i), existe $d\in D(L)$ satisfaciendo $|G[d]|\neq 1$ tal que $\alpha^n((a\vee a^*)\wedge \alpha(a\vee a^*))\leq d$ para algún $n\geq 0$. Note que, para todo $d_1\in G\,[d]$,

$$\alpha^{n+2}((a\vee a^*)\wedge\alpha(a\vee a^*))\leq\alpha^2\,(d)=d^{+*}=d_1^{+*}\leq d_1.$$

Supongamos que $w_1,w_2\in G\,[d]$ y que $w_1<w_2$. Sea $b=w_2\wedge w_2^+$. Dado que $w_2\vee w_2^+=1=w_1\vee w_1^+$, tenemos que b no es menor que w_1 y en consecuencia

$$(\alpha^{n+2}((a\vee a^*)\wedge\alpha(a\vee a^*))\wedge b)\vee w_1=w_1<b\vee w_1,$$

contradiciendo que $\left(\theta^{B_\circ(L)}\,(a,1)\,,\Delta^L\right)\in CP\,(L)$. Entonces $a=1$. Resta observar que si $\left(\delta,\Delta^L\right)\in CP\,(L)$ y $(a,1)\in\delta$, entonces $\left(\theta^{B_\circ(L)}\,(a,1)\,,\Delta^L\right)\in CP\,(L)$.

(2)$\Rightarrow$(3). Para cada $p\in\Phi\,(L)$ definamos $Y_p=\left\{p,g^{X(L)}\,(p)\right\}\cup Y\,(\rho)$. Si $\mathcal{K}$ es la clase de todas las PCDM-álgebras 4-regulares, entonces, por el Lemas 37,

$$\sum(L,\mathcal{K})=\left\{\theta_{Y_p}:p\in\Phi\,(L)\right\}\cup[\rho).$$

Entonces $\bigcap\sum(L,\mathcal{K})=\Delta^L$. Dado que $\mathcal{K}$ es una clase universal tenemos que $\sum(L,\mathcal{K})$ es compacto [34, Corollary 1 of 4.5]. Dado que Δ^L es meet irreducible, [34, 2.1] implica que existe $r\in\Phi\,(L)$ tal que $\theta_{Y_r}=\Delta^L$. Entonces $\Phi\,(L)$ es finita. Ahora observemos que L es k-regular, para algún $k\geq 1$. En efecto, si r es un filtro primo en $G[x]$, entonces para $z,w\in G[x]$ tal que $z\in r$ y $w\notin r$ tenemos que $r=p\cap G[x]$, donde $p=\{t\in L:(t\vee z)\wedge w\in r\}\in\Phi(L)$. Entonces tenemos definido $M\,(L)$. Dado que $\theta_{Y_r}\in Con\,(L)$, para cada $r\in\Phi\,(L)$, tenemos que $\Phi\,(L)=\{p,q\}$, para algún $p,q\in X\,(L)$ tal que $g\,(p)=q$. Luego $(\Phi\,(L)\,,g^{\Phi(L)})$ es el espacio dual de una álgebra de De Morgan f.s.i.. Por el Lemas 37, L es 4-regular y en consecuencia tenemos (ii). Ahora vamos a probar (i). Sea $x\in L-\{1\}$ y definamos $a=\alpha(x\wedge\alpha\,(x))$. Dado que $\theta\wedge\rho=\Delta^L$ implica $\theta=\Delta^L$, para todo $\theta\in Con\,(L)$, tenemos que $(\theta^B(a,1),\Delta^L)\notin CP\,(L)$. Entonces, $(\theta^B(a,1),\Delta^L)$ no satisface (P1). Puede ser chequeado que existen $d\in D\,(L)$ y $b\in\bar{D}(L)$, y existe un entero $n\geq 0$ tal que $(\alpha^n\,(a)\wedge b)\vee d\neq b\vee d$. Sea $z=(\alpha^n(a)\wedge b)\vee d$ y $w=b\vee d$. Dado que $\alpha^n\,(a)\wedge z=\alpha^n\,(a)\wedge w$, tenemos que $\alpha^n\,(a)\vee z\neq\alpha^n\,(a)\vee w$. (i) sigue a partir del hecho que $(\alpha^n\,(a)\vee z,\alpha^n\,(a)\vee w)\in\rho^L$. $\Box$

Observamos que para todo PCDM-álgebra L, tenemos que $Z(L)=\{e:\sim e$ es el complemento de $e\}=\{e:e^*=\sim e\}=\{e:\alpha\,(e)=e\}$ (use el Lema 13).

Un elemento $a\in B_\circ\,(L)$ se dice de *rango finito* n si satisface la identidad $\alpha^n\,(a)\wedge\alpha^{n+1}\,(a)=\alpha^{n+1}\,(a)\wedge\alpha^{n+2}\,(a)$. L es de *rango finito* si todo elemento de $B_\circ\,(L)$ tiene rango finito.

Es suficiente demostrar que si $a, b \in B(L)$ y $F_a \cap F_b = \{1\}$, entonces $a = 1$ o $b = 1$. Sea $a, b \in B(L)$, $a \neq 1 \neq b$. Sea l una cota inferior para

$\{\alpha^n(a) \vee \alpha^m(b) : n, m < \omega\}$.

Dado que $B(L)$ es un álgebra Booleana, tenemos que $(\alpha^n(a))^* \wedge l$ es una cota inferior para $\{\alpha^m(b) : m < \omega\}$, para todo $n \geq 0$, y en consecuencia $(\alpha^n(a))^* \wedge l = 0$ para todo $n \geq 0$. Entonces $l = 0$. Dado que $F_a \cap F_b = \{1\}$ implica $\alpha^n(a) \vee \alpha^m(b) = 1$ para todo $n, m \geq 0$, tenemos que $F_a \cap F_b \neq \{1\}$.

Recíprocamente, supongamos que L es f.s.i.. Por el Teorema 35, $B_\circ(L)$ es f.s.i.. Sea $a \in B(L) - \{1\}$ y definamos

$G_a = \{b \in B(L) : b \geq (\alpha^n(a \wedge \alpha(a)))^* \text{ para todo } n \geq 0\}$.

Claramente G_a es un filtro de $B(L)$. Afirmamos que $\alpha(b) \in G_a$ para todo $b \in G_a$. Sea $b \in G_a$ y sea $n \geq 0$. Dado que $b \geq (\alpha^{n+1}(a \wedge \alpha(a)))^*$, tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha(b) \geq \alpha\left((\alpha^{n+1}(a \wedge \alpha(a)))^*\right) &= (\sim(\sim \alpha^n(a \wedge \alpha(a)))^{**})^* \\ &= (\alpha^n(a \wedge \alpha(a)))^{++*} \geq (\alpha^n(a \wedge \alpha(a)))^* \end{aligned}$$

y en consecuencia tenemos la afirmación. Entonces $\theta_{G_a} \in Con(B_\circ(L))$. Sea $l \in B(L)$ tal que $l \leq \alpha^n(a)$ para todo $n \geq 0$. Note que $l^{**} \leq \alpha^n(a \wedge \alpha(a))$ para todo $n \geq 0$ lo cual implica que $l^* \in G_a$. Dado que $B_\circ(L)$ es f.s.i. y $F_a \cap G_a = \{1\}$, tenemos que $G_a = \{1\}$ y en consecuencia $l = 0$. □

Theorem 40. *Sea L una PCDM-álgebra, $\rho \neq \Delta^L$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) L es s.i.

(2) L es f.s.i.

(3) (i) Para cada $x \in D(L) - \{1\}$, si $|G[x]| = 1$, entonces existen $d \in D(L)$ y $n \geq 0$ tal que $|G[d]| > 1$ y $\alpha^n(x \wedge \alpha(x)) \leq d$.

(ii) L es 4-regular y $M(L)$ es un álgebra de De Morgan s.i..

Prueba: (3)⇒(1). Vamos una probar que ρ es el monolito de $Con(L)$. Sea $\sigma \in Con(L)$ tal que $\sigma \subseteq \rho$. Note que $\sigma \in \{\Delta^L, \rho\}$. En efecto, por los Lemas 37 y 3, existen $p, q \in X(L)$ tal que $\Phi(L) = \{p, q\}$ y $g^{\Phi(L)}(p) = q$, lo cual dice que $Y(\sigma) = Y(\rho)$ o $Y(\sigma) = X(L)$. Resta demostrar que si $(\delta, \Delta^L) \in CP(L)$, entonces $\delta = \Delta^{B_\circ(L)}$. Sea $1 \neq a \in B(L)$ y supongamos $\left(\theta^{B_\circ(L)}(a,1), \Delta^L\right) \in CP(L)$. Sea θ la congruencia de L asociada al par $\left(\theta^{B_\circ(L)}(a,1), \Delta^L\right)$. Afirmamos que $|G[a \vee a^*]| = 1$. Sea $z \in G[a \vee a^*]$. Dado que $(a \vee a^*, 1) \in \theta$, tenemos que $(z^{++}, 1)$, $(z^{**}, 1) \in \theta$ y luego $(z, 1) = ((z \wedge z^{**}) \vee z^{++}, (z \wedge 1) \vee 1) \in \theta$. Además,

- El mapeo $y \to y \vee x^*$ es un homomorfismo 1-1 de $G[x]$ a $G[x \vee x^*]$. En consecuencia, si $|G[x]| = k$, es un isomorfismo.

- (Katriňák [20]) Si $u, v \in D(L)$ y $u^{++} \leq v^{++}$, entonces el mapeo $t \to t \wedge (t^+ \vee u)$ es un homomorfismo 1-1 de $G[u]$ a $G[v]$. □

Antes de comenzar la caracterización de los f.s.i. vamos a introducir el siguiente Lema.

Lemma 38. *Si L es una PCDM-álgebra y $a \in B(L)$, entonces*

$$\theta^{B_\circ(L)}(a,1) = \bigcup_{k \geq 0} \theta_{lat}^{B(L)}\left(\alpha^k(a \wedge \alpha(a)), 1\right).$$

Prueba: Claramente $\theta_{lat}^{B(L)}\left(\alpha^k(a \wedge \alpha(a)), 1\right) \subseteq \theta^{B_\circ(L)}(a,1)$, para todo $k \geq 0$. Note que
$a \wedge \alpha(a) \geq \alpha(a) \wedge \alpha^2(a) \geq \alpha^2(a) \wedge \alpha^3(a) \geq ....$
Entonces, $\theta_\circ = \bigcup_{k<\omega} \theta_{lat}^{B(L)}\left(\alpha^k(a \wedge \alpha(a)), 1\right)$ es una congruencia de reticulado. Use que $\alpha(x \wedge y) = \alpha(x) \wedge \alpha(y)$, para todo $x, y \in L$, para probar que $\theta_\circ \in Con(L)$. Dado que $(a,1) \in \theta_{lat}^{B(L)}(a \wedge \alpha(a), 1)$, tenemos el lema. □

Las PCDM-álgebras finitamente subdirectamente irreducibles fueron caracterizadas por Romanowska [28]. En [31], Sankappanavar caracteriza las subdirectamente irreducibles de rango 0 (i.e. satisfaciendo la ecuación $x \wedge \alpha(x) = \alpha(x \wedge \alpha(x))$). Los siguientes dos teoremas dan una caracterización completa de las PCDM-álgebras (finitamente) subdirectamente irreducibles.

Theorem 39. *Sea L una PCDM-álgebra con $\rho = \Delta^L$.*

(1) L es simple sii para todo $a \in B(L) - \{1\}$ existe $k \geq 0$ tal que $\alpha^k(a \wedge \alpha(a)) = 0$.

(2) L es s.i. sii existe $b \in B(L) - \{1\}$ tal que para todo $a \in B(L) - \{1\}$, tenemos que $b \geq \alpha^k(a \wedge \alpha(a))$ para algún $k < \omega$.

(3) L es f.s.i. sii $\bigwedge_{k<\omega} \alpha^k(a) = 0$ para todo $a \in B(L) - \{1\}$.

Proof: Note que, por el Teorema 35, $Con(L) \cong Con(B_\circ(L))$. (1) y (2) siguen fácilmente a partir del lema 38. Vamos a probar (3). Para cada $a \in B(L)$, sea $F_a = [1]\,\theta^{B_\circ(L)}(a,1)$. Supongamos que $\bigwedge_{k\geq 0} \alpha^k(a) = 0$ para todo $a \in B(L) - \{1\}$.

para algún $n \geq 0\}$. Se puede chequear fácilmente que $\theta^L(F) \in Con(L)$. Dado que $\theta^L(F) \neq \Delta^L$, tenemos que $\theta^L(F)$ no está contenido en θ_p. Entonces F no está contenido en p y en consecuencia existe $n \geq 0$ tal que $x^{n(+*)} \leq d \vee x^{n(+*)} \in I$, donde d es cualquier elemento de I.

(b) Sea $L \in S(\{L_0\})$, donde L_0 es un álgebra auxiliar. Por [27, Corollary 2.5], existe un mapeo que preserva el orden $\Phi : X(L_0) \to X(L)$, el cual es sobre. Sea $p \in X(L_0)$ tal que $X(L_0) = \bar{p}$. Dado que Φ preserva el orden, tenemos que $\Phi^{-1}\left(\overline{\Phi(p)}\right) \in Cl(L_0)$. Entonces $\Phi^{-1}\left(\overline{\Phi(p)}\right) = X(L_0)$ y, consecuentemente, $X(L) = \overline{\Phi(p)}$. □

Mediante L_0^D denotamos la p-álgebra doble dual de L_0, es decir, el álgebra determinada por el orden dual de L_0. Note que el reducto de $L_0 \times L_0^D$ a las operaciones ($\vee$, $\wedge$, *, 0, 1) puede ser visto como una PCDM-álgebra definiendo $\sim(x, y) = (y, x)$. Denotamos esta álgebra por $DM(L_0)$.

Theorem 44. *Sea $\mathcal{V}$ una variedad PCDM-álgebras. $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ sii $L \in \mathcal{V}$ y las siguientes condiciones son verdaderas:*

(i) Si L_d es regular, entonces L es isomorfa a algún $L_1 \in S(\{DM(L_0)\})$, para alguna p-álgebra distributiva doble auxiliar L_0.

(ii) Si L_d no es regular, entonces L es 7-regular, $M(L) \in \mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ y L satisface la condición (i) del Teorema 40.

Más aún, $\mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ satisfase (S2).

Prueba: Para cada $r \in X(L)$, definamos $Y^r = \bigcap\{Y \in Cl(L_d) : r \in Y\}$. Supongamos que $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$. Sea $p, q \in X(L)$ tal que $p \subseteq q$ y $X(L) = \overline{\{p, q\}}$. Note que $X(L) = Y(\rho) \cup \{p, q, g(p), g(q)\}$. Sipongamos que L_d no es regular. Por el Lema 37, tenemos que L es 7-regular y $M(L) \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$. La condición (i) del Teorema 40 puede ser verificada de una manera similar a la utilizada en la prueba del Teorema 40. Supongamos ahora que L_d es regular. Entonces $X(L) = \bar{p} = \bar{q}$. Dado que el mapeo g preserva el orden desde $X(L)$ sobre su orden dual, tenemos que $Y^{g(p)} = g(Y^p)$. Más aún, tenemos que $X(L) = \bar{p} \subseteq Y^p \cup g(Y^p)$ y en consecuencia $X(L) = Y^p \cup g(Y^p)$. Usando [27, Prop. 3], podemos deducir que $L_d/\theta_{g(Y^p)}$ es isomorfa a $(L_d/\theta_{Y^p})^D$. Luego $L_d \in S\left(\{L_d/\theta_{Y^p} \times (L_d/\theta_{Y^p})^D\}\right)$. Use que $\sigma(\sim x) \cap Y^p = g\left((X(L) - \sigma(x)) \cap Y^{g(p)}\right)$, para todo $x \in L$, para deducir que $L \in S(\{DM(L_d/\theta_{Y^p})\})$. Finalmente, por (a) de el Lema 43, L_d/θ_{Y^p} es auxiliar.

Recíprocamente, supongamos que L satisfase (i) y (ii). Supongamos que L_d no es regular . Si $M(L)$ es s.i., entonces L es s.i. y en consecuencia $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$. Supongamos que $M(L)$ no es s.i.. Entonces $|\Phi(L)| \geq 3$ y existen $p, q \in \Phi(L)$ tal que $p \subset q$ y $p \neq g^{X(L)}(q)$. Sea $\theta \in Con(L)$ tal que $p, q \in Y(\theta)$. Dado que $\Phi(L) = \left\{ p, q, g^{X(L)}(p), g^{X(L)}(q) \right\}$, tenemos que $\theta \cap \rho = \Delta^L$. Use argumentos similares a los de la prueba del Teorema 40, para probar que $X(L) = \overline{\{p, q\}}$. Luego $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$. Supongamos ahora que L_d es regular y que L es isomorfa a una subalgebra L_1 de $DM(L_0)$, donde L_0 es un álgebra auxiliar. Sea π_1, π_2 las proyecciones canónicas de $L_1 \subseteq L_0 \times L_0^D$. Dado que L_0 es auxiliar, tenemos que existe $p \in X(L_1)$ tal que $Y_{\ker(\pi_1)} = Y^p$. Usando que $\sim (x, y) = (y, x)$, para todo $(x, y) \in L_1$, podemos deducir que $\sim \ker(\pi_1) = \ker(\pi_2)$, lo cual dice que $Y_{\ker(\pi_2)} = g\left(Y_{\ker(\pi_1)} \right)$. Entonces $Y_{\ker(\pi_2)} = Y^{g(p)}$ y consecuentemente $X(L) = \bar{p}$.
□

Theorem 45. *Sea $\mathcal{V}$ una variety de PCDM-álgebras de rango finito. $L \in \mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ si y sólo si L es 7-regular, $M(L) \in \mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ y $Z(L) = \{0, 1\}$. Más aún, $\mathcal{F}^{\mathcal{V}}$ satisface (S1) y (S2).*

Prueba: Use el Teorema 44. □

BIBLIOGRAPHY

[1] M. E. ADAMS, *The structure of distributive lattices*, Ph. Thesis, University of Bristol, 1973.

[2] M. E. ADAMS and R. BEAZER, *Congruence properties of distributive double p-algebras*, Czechoslovak Math. J., 41(116)(1991) n°2.

[3] M. E. ADAMS and T. KATRIŇÁK, *A note on subdirectly irreducible distributive double p-algebras*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 35 (1983), 46-58.

[4] R. BALBES and P. DWINGER, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, Columbia, Missouri, 1974.

[5] R. BEAZER, *Finitely subdirectly irreducible algebras with pseudocomplementation.* Algebra Universalis, 12 (1981) 376-386.

[6] J. BERMAN, *Distributive lattices with an additional unary operation,* Aequationes Math. 16 (1977), 165-171.

[7] T. S. BLYTH and J. C. VARLET, *On a common abstraction of De Morgan algebras and Stone algebras,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A94 (1983) 301-308.

[8] T. S. BLYTH and J. C. VARLET, *Subvarieties of the class of MS-algebras,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A94 (1983) 157-169.

[9] S. BURRIS and H. SANKAPPANAVAR, *A Course in Universal Algebra,* Springer-Verlag, New York, 1981.

[10] S. COMER, *Representation of algebras by sections over boolean spaces,* Pacific J. of Math., 38 (1971), 29-38.

[11] S. COMER, *Elementary properties os structure of sections,* Bol. Soc. Mat. Mexicana, 19 (1974), 78-85.

[12] W. H. CORNISH, *A sheaf representation of distributive pseudocomplemented lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. 57 (1976) 11-15.

[13] W. H.CORNISH and P. R. FOWLER, *Coproducts of Kleene algebras,* J. Austral. Math. Soc. Ser A 27, 209-220.

[14] J. CZELAKOWSKI and W. DZIOBIAK, *Congruence distributive quasivarieties whose finitely subdirectly irreducible members form a universal class*, Algebra Universalis, 27 (1990) 128-149.

[15] H. GRAMAGLIA and D. VAGGIONE, *Birkhoff-like sheaf representation for varieties of lattice expansions,* Studia Logica 56 (1996) 111-131.

[16] H. GRAMAGLIA and D. VAGGIONE, *(Finitely) Subdirectly irreducible and Birkhoff-like sheaf representation for certain varieties of lattice ordered estructures,* en referato.

[17] G. GRÄTZER, *Universal Algebra*, Van Nostrand, Princeton, 1968.

[18] G. GRÄTZER, *Lattice Theory. First Concepts and Distributive Lattices*, W. H. Freeman and Co., 1971.

[19] T. HETCHT. and T. KATRIŇÁK, *Principal congruences of p-algebras and double p-algebras*, Proc. of Amer. Math. Soc. 58 (1976) 25-31.

[20] T. KATRIŇÁK, *Subdirectly irreducible distributive double p-algebras*, Algebra Univ. 10 (1980), 195-219.

[21] P. H. KRAUSS and D. M. CLARK, *Global Subdirect Products*, Amer. Math. Soc. Mem. 210 (1979).

[22] H. LAKSER, *The structure of pseudo-complemented distributive lattices I: subdirect decomposition*, Trans. Amer. Math. Soc. 156 (1971), 335-342.

[23] R. McKENZIE, G. McNULTY and W. TAYLOR, *Algebras, Lattices, Varieties,* Vol. 1, The Wadsworth & Brooks/Cole Math. Series, Monterey, California, 1985.

[24] L. NACHBIN, *Une propriété charactéristique des algèbres booliénnes*, Portugal. Math. 6 (1947), 115-118.

[25] H. PRIESTLEY, *Representation of distributive lattices by means of ordered stone spaces*, Bull. London Math. Soc., 2 (1970), 186-190.

[26] H. PRIESTLEY, *Ordered sets and duality for distributive lattices.* Annals of Discrete Math. 23 (1984), 39-60.

[27] H. PRIESTLEY, *The construction of spaces dual to pseudocomplemented distributive lattices.* The Quarterly Journal of Math. 26 (1975), 215-228.

[28] A. ROMANOWSKA, *Subdirectly irreducible pseudocomplemented De Morgan algebras,* Algebra Universalis 12 (1981), 70-75.

[29] H. SANKAPPANAVAR, *Demi- pseudocomplemented lattices: principal congruences and subdirect irreducibility,* Algebra Universalis, 27 (1990) 180-193.

[30] H. SANKAPPANAVAR, *Distributive lattices with a dual endomorphism,* Z. Math. Logik Grundlag. Math. 31 (1985), 385-392.

[31] H. SANKAPPANAVAR, *Principal congruences of pseudocomplemented De Morgan algebras,* Zeitchr. f. math. Logic und Grundlagen d. Math. 33 (1987), 3-11.

[32] H. SANKAPPANAVAR, *Semi-De Morgan algebras,* J. Symbolic. Logic 52, (1987) 712-724.

[33] D. J. VAGGIONE, *Sheaf representation and chinese remainder theorems,* Algebra Universalis 29 (1992), 232-272.

[34] D. J. VAGGIONE, *Locally Boolean spectra,* Algebra Universalis 33 (1995), 319-354.

[35] J. VARLET, *A regular variety of type* $<2,2,1,0,0>$, Algebra Universalis 2 (1972), 218-223.