Ecuaciones diferenciales: Operadores lineales

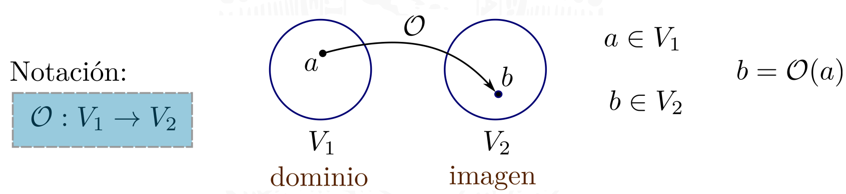
Prof. Jesús Hernández Trujillo Facultad de Química, UNAM

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales pueden expresarse como ecuaciones de operadores. Por lo tanto, es posible utilizar algunas herramientas del álgebra lineal para entender la forma general que tienen las soluciones de este tipo de ecuaciones diferenciales. A continuación, se hace una breve exposición sobre definiciones de operador lineal, kernel, ecuaciones de operadores y su relación con las ecuaciones diferenciales. Se asumen conocimientos introductorios de álgebra lineal de los cursos de Álgebra Superior y Cálculo II. Para consultar conceptos básicos relacionados con el tema (incluso para quienes no cursan Cálculo II), se proporciona bibliografía al final del documento.

2. Operadores lineales

Un **operador** (también llamado transformación) es una regla de asociación entre elementos de dos espacios vectoriales.[1] En el siguiente esquema se presenta de manera gráfica esa regla de asociación.



La notación $\mathcal{O} : V_1 \to V_2$ quiere decir que el operador $\mathcal{O}$ asocia elementos del espacio vectorial V_1 con elementos del espacio vectorial V_2. Además, una vez que se selecciona un elemento a que pertenece al dominio, su imagen es el elemento $b = \mathcal{O}(a)$.

Ejemplo 1. $y = f(x) = 2x + \operatorname{sen} 2x$. *La regla f asocia números reales con números reales; a $\pi/2 \in \Re$ le corresponde el elemento $2(\pi/2) + \operatorname{sen}(2\pi/2) = \pi \in \Re$. Es decir, $f(\pi/2) = \pi$. Este ejemplo muestra que la definición habitual de funciones está incluida en la de operadores.*

Ejemplo 2. $\mathcal{L}^2 = x d^2/dx^2 - 2d/dx$. *Este operador asocia funciones con funciones. La acción de este operador sobre la función $y = x^4 - x^2 + 3$ conduce a*

$$\mathcal{L}^2 y = -2x + 4x^3 \,.$$

[1] A menos que se señale lo contrario, la discusión se limita a espacios vectoriales reales.

Asimismo, esta última igualdad,

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = -2x + 4x^3,$$

es la ecuación diferencial de segundo orden con solución particular $y_p(x) = x^4 - x^2 + 3$. *Este ejemplo ilustra cómo una ecuación diferencial puede expresarse como una ecuación de operadores.*

Ejemplo 3. *Este ejemplo es tomado del curso de Estructura de la materia. La ecuación de Schrödinger del átomo de hidrógeno*

$$\hat{\mathcal{H}}\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z),$$

donde E *es la energía atómica, es una ecuación de operadores.* $\hat{\mathcal{H}}$ *es el operador Hamiltoniano:*

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2\right] - 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}$$

La ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial y también una ecuación de operadores. Su solución proporciona las funciones de onda del átomo de hidrógeno.

Un operador $\mathcal{O}$ es **lineal** sí y sólo si para todo par $u, v \in V_1$, y constantes $k_1, k_2 \in \Re$, se cumple

$$\mathcal{O}\left(k_1 f_1 + k_2 f_2\right) = k_1 \mathcal{O} f_1 + k_2 \mathcal{O} f_2 \,. \tag{1}$$

No todos los operadores cumplen con esta propiedad.

Ejemplo 4. *El operador derivada es un operador lineal pues, por las propiedades de la derivada, se cumple que*

$$\frac{d}{dx}\left[k_1 f(x) + k_2 g(x)\right] = k_1\frac{d\,f}{dx} + k_2\frac{d\,g}{dx}\,.$$

Ejemplo 5. *El operador diferencial de orden* n *es un operador lineal*

$$\hat{\mathcal{L}}^n = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_o(x) \tag{2}$$

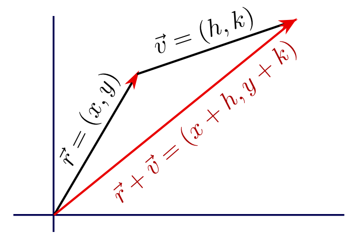
Cualquier ecuación diferencial lineal ordinaria de orden n *puede escribirse en términos de operadores.*

Ejercicio 1. *El operador de traslación de un vector en* $\Re^2$ *se define como*

$$T_{(h,k)}(x,y) = (x+h, y+k)$$

Por ejemplo, la traslación del vector $(x,y) = (1,2)$ *por el vector* $(h,k) = (2,1)$ *conduce al vector* $(3,3)$.

Gráficamente:



Verifica que el operador traslación en $\Re^2$ *no es lineal.*

---

3. Kernel de un operador lineal

El **kernel** (también llamado núcleo) del operador lineal $\mathcal{O}$ es el conjunto de todos los elementos del dominio que tienen al elemento cero por imagen:

$$\ker(\mathcal{O}) = \{v \in V_1 | \mathcal{O}(v) = 0\}$$

Ejemplo 6. *El operador identidad se define como* $\mathcal{I}(x,y,z) = (x,y,z)$. *El kernel de* $\mathcal{I}$ *es* $\ker(\mathcal{I}) = \{(0,0,0)\}$ *pues para que*

$$\mathcal{I}(x,y,z) = (x,y,z) = (0,0,0)$$

por la definición de igualdad de vectores, se cumple que

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 7. *El operador* $\mathcal{A}(x,y) = (2x, x-y)$ *tiene por kernel al conjunto formado por el vector* $(0,0)$. *Esto se debe a que, para que se cumpla* $(2x, x-y) = (0,0)$, *el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} 2x \quad &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

tiene por solución $x = 0$ *y* $y = 0$.

En los siguientes ejercicios, encuentra el kernel de cada operador.

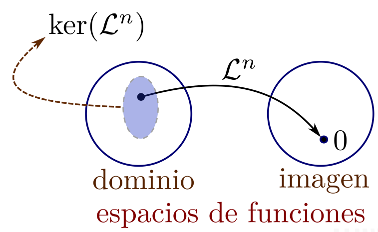
Ejercicio 2. $\mathcal{B}(x, y) = (y, 0)$.

Ejercicio 3. $\mathcal{C}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_3)$.

En lo que se refiere al curso de Ecuaciones diferenciales, el kernel del operador diferencial de orden n, ec. (2), es de dimensión n:

$$\dim[\ker(\mathcal{L}^n)] = n$$

Esto significa que se requieren n funciones linealmente independientes para general cualquier elemento del kernel.



El conjunto
$$\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$$
es linealmente independiente y genera el subespacio $\ker(\mathcal{L}^n)$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial lineal ordinaria homogénea,

$$\hat{\mathcal{L}}^n y = a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_o(x)y = 0, \tag{3}$$

es el kernel del operador $\hat{\mathcal{L}}^n$, el cual es de dimension n. La solución general de la ec. (3) es de la forma

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \tag{4}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son las constantes (parámetros) de integración de la ecuación diferencial. Es decir, la solución de la ec. (3) es una combinación lineal de un conjunto de funciones base. El problema de resolver la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n consiste en encontrar un conjunto de funciones base $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ del espacio vectorial de funciones del dominio. Se trata de un conjunto fundamental de soluciones cuando, para las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, el Wronskiano es diferente de cero:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Una solución particular de la ecuación diferencial se obtiene al asignar valores a las constantes $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ a partir de las condiciones iniciales del problema. Esa solución particular es alguna de las funciones que forman parte del kernel del operador diferencial lineal.

Ejemplo 8. *El kernel del siguiente operador diferencial*

$$\mathcal{L}^2 = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} + 6$$

es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

En este caso, las funciones base $\{e^{-3x}, e^{2x}\}$ *forman un conjunto fundamental de soluciones pues*

$$W = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{2x} \\ -3e^{-3x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 5e^{-x} \neq 0 \, para\ todo \, x \in \Re$$

Estas funciones generan el subespacio de la solución general:

$$y(x) = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$$

A partir de las condiciones iniciales $y(0) = 1, y'(0) = -1$ *se obtiene la solución particular*

$$y(x) = \frac{3}{5}e^{-3x} + \frac{2}{5}e^{2x}$$

---

4. Ecuaciones de operadores

Considera un operador lineal $\mathcal{O} : V_1 \to V_2$. Además, sean $y \in V_1$ y $g \in V_2$. Una **ecuación de operadores** es de la forma

$$\mathcal{O}y = g \tag{5}$$

Por ejemplo, la ecuación de Schröndiger del Ejemplo 3 es una ecuación de operadores.

Un problema que es importante resolver por sus posibles aplicaciones es el de encontrar y cuando g es conocido. Es decir, se trata de encontrar la solución de la ecuación de operadores.

Un caso particular es la ecuación de operadores homogénea:

$$\mathcal{O}y = 0 \tag{6}$$

cuya solución es $\ker(\mathcal{O})$; es decir, $y_h \in \ker(\mathcal{O})$. Por lo tanto:

$$\mathcal{O}y_h = 0 \tag{7}$$

Ejemplo 9. *El sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 - 3y_3 &= 0 \\ y_1 - 3y_2 + y_3 &= -5 \\ -y_1 + 8y_2 + 5y_3 &= 10 \end{aligned}$$

se tiene la forma de una ecuación de operadores:

$$\mathrm{A}\vec{y} = \vec{b},$$

donde

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Esto se debe a que un operador lineal puede tener una representación matricial. Nótese que los vectores $\vec{y}$ y $\vec{b}$ se expresaron como columnas para que, por definición,[2] *la multiplicación matricial $\mathrm{A}\vec{y}$ esté definida. La solución de la ecuación de operadores es*

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, la solución del sistema de ecuaciones es $y_1 = 0$, $y_2 = -5$, $y_3 = 10$.

La ec. (5) es una ecuación de operadores no homogénea. Sea y_p una solución particular de esta ecuación, tal que

$$\mathcal{O}y_p = g \tag{8}$$

[2] Para que la multiplicación matricial esté definida, el número de columnas de la matriz A debe coincidir con el número de renglones de $\vec{b}$. Nótese ademas que cuando un vector se expresa como renglón o como columna se contiene la misma información.

Debido a que $\mathcal{O}$ es lineal, la ec. (1), con $k_1 = k_2 = 1$, conduce a

$$\mathcal{O}(y_h + y_p) = \mathcal{O}y_h + \mathcal{O}y_p$$

Tomando en cuenta a las ecuaciones (7) y (8), se cumple que

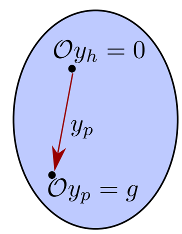
$$\mathcal{O}(y_h + y_p) = g \tag{9}$$

Es decir,

$$y = y_h + y_p \tag{10}$$

es la solución general de la ecuación de operadores no homogénea, (5).

De manera análoga al ejercicio 1, geométricamente la solución del problema no homogéneo se obtiene trasladando la solución y_h del problema homogéneo mediante la solución y_p.



Al operador diferencial lineal de orden n, ec. (2), le corresponde la ecuación de operadores no homogénea

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_o(x)y = g(x) \tag{11}$$

En base a la presente discusión, para encontrar su solución, primero hay que resolver la correspondiente ecuación homogénea, ec. (3). Adicionalmente, debido a la ec. (10), hay que encontrar la solución particular y_p para tener la solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea. En el curso, se discutirán técnicas para encontrar y_h y y_p de este tipo de ecuaciones.

Ejemplo 10. *Sean $\mathcal{L}^2 = d^2/dx^2 + 3$ y $g(x) = e^{3x}$. La ecuación diferencial asociada a este operador y a la función $g(x)$, $\mathcal{L}^2 y(x) = g(x)$, es*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3y = e^{3x}$$

Mediante sustitución directa, es posible verificar que la solución de la correspondiente ecuación diferencial lineal ordinaria homogénea es

$$y_h(x) = c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{3}x$$

y que una solución particular de la ecuación no homogénea es

$$y_p(x) = \frac{1}{12}e^{3x}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{3}x + \frac{1}{12}e^{3x}$$

Cabe mencionar que la solución de una ecuación de operadores puede ser $y = \{\}$, el conjunto vacío; en cuyo caso, la ecuación no tiene solución. Otro problema importante es determinar si la ecuación tiene una solución única o no. Lo anterior lleva a los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación de operadores. El problema de unicidad se resuelve al examinar la ecuación homogénea: $\mathcal{O}y = 0$ tiene solución única si y sólo si $\ker(\mathcal{O}) = \{0\}$.

A continuación, aunque no se trata de ecuaciones diferenciales, por simplicidad se ilustra la situación para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Los sistemas de ecuaciones siguientes se resuelven con los métodos habituales del curso de Álgebra Superior y se discuten en el contexto de las soluciones de las ecuaciones (5) y (6). En este documento no se profundizará más en los teoremas de existencia y unicidad.

Ejemplo:

El sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\mathrm{B}\vec{y} = \vec{0}$ dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

no tiene solución única. El sistema tiene soluciones que son de la forma

$$y_2 = \frac{13}{5}y_1, \qquad y_3 = -\frac{1}{5}y_1.$$

Se trata de un número infinito de soluciones porque y_1 puede tomar cualquier valor; es decir, $y_1 \in \Re$ es un grado de libertad. El kernel de B conforma la solución del sistema homogéneo y contiene los vectores de la forma:

$$\vec{y}_h = \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{13}{5}y_1 \\ -\frac{1}{5}y_1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

y no solamente al vector $\vec{0}$.

Adicionalmente, el siguiente sistema de ecuaciones lineales no homogéneo utilizando la misma matriz B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

también tiene un número infinito de soluciones dado por

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{y}_h + \vec{y}_p$$

donde $\vec{y}_h$ está dado por la ec. (12), y

$$\vec{y}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Nótese además que

$$\mathrm{B}\vec{y_p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

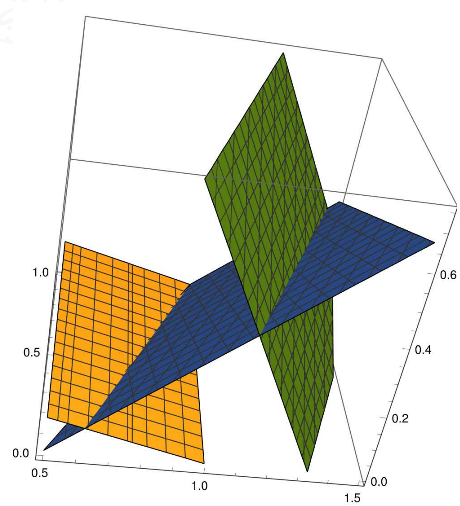
como era de esperarse debido a la ec. (8).

Por otro lado, el sistema no homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

no tiene solución.

Geométricamente, este último sistema de ecuaciones no tiene solución porque cada ecuación representa un plano y éstos no tienen un punto $P(y_1, y_2, y_3)$ de intersección común.



Bibliografía

1. D. R. Kreider, R. G. Kuller, D. R. Ostberg, F. W. Perkins, *An Introduction to Linear Analysis*, Addison-Wesley 1996.

2. W. E. Boyce, R. C. Diprima, R. B. Meade, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th Edn., Wiley 2017.

3. J. Hernández Trujillo, *Apuntes de Álgebra Lineal*, FQ-UNAM, 2022.