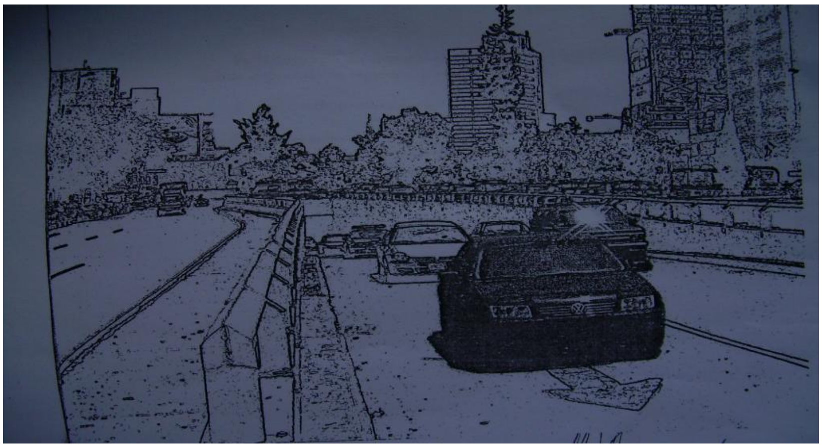
Análisis del flujo vehicular



Generalidades

Mediante el análisis de los elementos del flujo vehicular se pueden entender las características y el comportamiento del transito, requisitos básicos para el planeamiento, proyecto y operación de carreteras, calles y sus obras complementarias dentro del sistema de transporte. Con la aplicación de las leyes de la física y las matemáticas, el análisis de flujo vehicular describe la forma como circulan los vehículos en cualquier tipo de vialidad, lo cual permite determinar el nivel de eficiencia de la operación.

Uno de los resultados mas Ulises del análisis del flujo vehicular es el desarrollo de modelos microscópicos y microscópicos que relacionan sus diferentes variables como el volumen, la velocidad, la densidad, el intervalo y el espaciamiento. Estos modelos han sido la base del desarrollo del concepto de capacidad y niveles de servicio aplicado a diferentes tipos de elementos viales.

El objetivo, al abordar el análisis del flujo vehicular, es dar a conocer algunas de las metodologías e investigaciones y sus aplicaciones mas relevantes en este tema, con particular énfasis en los aspectos que relacionan las variables del flujo vehicular la descripción probabilística o casual del flujo de transito, la distribución de los vehículos en una vialidad y las distribuciones estadísticas empleadas en proyecto y control de transito.

Conceptos fundamentales

En esta sección se presenta una descripción de algunas de las características fundamentales del flujo vehicular, representadas en sus tres variables principales: el flujo, la velocidad y la densidad. Mediante la deducción de relaciones entre ellas se puede determinar las características de la corriente de transito y así predecir las consecuencias de diferentes opciones de operación o de proyecto. De igual manera el conocimiento de estas tres variables reviste singular importancia, ya que estas indican la calidad o nivel de servicio experimentado por los usuarios de cualquier sistema vial.

A su vez estas tres variables pueden ser expresadas en términos de otras llamadas variables asociadas: el volumen, el intervalo, el espaciamiento, la distancia y el tiempo.

A continuación se verán los principales conceptos relacionados con las variables del flujo vehicular.

Variables relacionadas con el flujo

Las variables racionadas con el flujo son la tasa del flujo, el volumen, el intervalo simple entre vehículos consecutivos y el intervalo promedio entre varios vehículos.

Tasa del flujo o flujo (q) y volumen (q)

La tasa del flujo q es la frecuencia a la cual pasan los vehículos por un punto o sección trasversal de un carril o calzada. La tasa de flujo es pues el numero de vehículos N que pasan durante un intervalo de tiempo especifico T a una hora, expresada en veh/mino veh/seg. No obstante la tasa de flujo q también puede ser expresada en veh/hora, teniendo cuidado con su interpretación, pues no se trata del numero de vehículos que efectivamente pasan durante una hora completa o volumen horario q.
La tasa del flujo se calcula entonces con la siguiente expresión:

$$q = N/T$$

Intervalo simple (h_i):

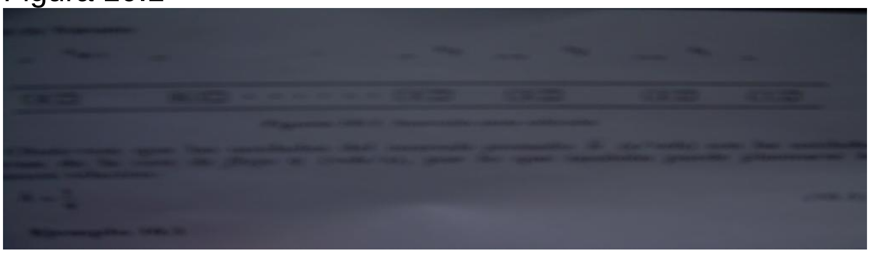
Es el intervalo de tiempo entre el paso de los vehículos consecutivos, generalmente expresado en segundos y medido entre puntos homólogos del par de vehículos.

Intervalo promedio (h):

Es el promedio de todos los intervalos simples h_i existente entre diversos vehículos que simulan por una vialidad. Por tratarse de un promedio se expresa en segundos por vehículo y se calcula de acuerdo a la figura 10.1 mediante la siguiente expresión:

Donde:
h: intervalo promedio(s/veh)
N: numero de vehículos (veh)
N-1: numero de intervalos (veh)
h_i: intervalo simple entre el vehículo.

Figura 10.1



Ejemplo 10.1

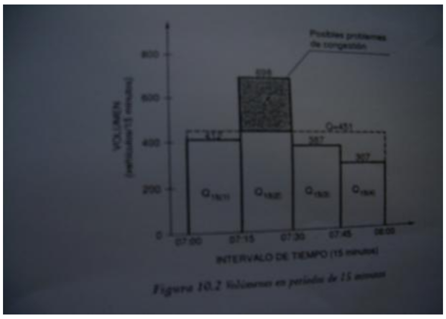
Sobre un punto específico de una vialidad se realizo un aforo vehicular durante una hora en periodos de 15 min. Dando como resultado el numero de vehículos que muestran en la tabla 10.1. Se desea calcular las tasas de flujo para cada periodo, calcular el volumen horario y comparar la tasa de flujo máximo y el volumen horario.

Tabla 10.1 volúmenes en 15 min.

Intervalo de tiempo (horas minutos)	Volumen cada 15 minutos Q_{15}
07:00-07:15 07:15-07:30 07:30-07:45 07:45-08:00	412 698 387 307

La figura 10.2 muestra los diferentes volúmenes, lo mismo que los volúmenes, lo mismo que el volumen horario, referidos a periodos de15 minutos.

Figura 10.2



Comparación entre la tasa de flujo máximo y el volumen horario:

De acuerdo con los valores obtenidos anteriormente, la tasa de flujo máximo corresponde al segundo periodo. Por tanto:

$q_{max} = q_2 = 2792$ veh/hor $\qquad$ $Q = 1804$ veh/h

$q_2 > Q$, significa que la frecuencia con la que pasaron los vehículos en el segundo cuarto de hora fue mayor que la frecuencia con la que pasaron en toda la hora efectiva.
Esto muestra la concentración de vehículos en cortos intervalos de tiempo, que en caso de tratarse de periodos de máximas demandas, puede generar problemas de congestión.
Esta conclusión, manifiesta la importancia de tomar en cuenta los volúmenes vehiculares en periodos cortos, que al ser altos causan congestión y, por consiguiente, demoras.

Ejemplo 10.2

Sobre una determinada calzada de una arteria urbana de tres carriles se cronometraron los tiempos de paso de cada uno de los vehículos por un punto de referencia tal como se indica en la tabla 10.2. se requiere calcular la tasa de flujo para el periodo de estudio, calcular el intervalo promedio y representar e interpretar gráficamente los diversos intervalos simples y el intervalo promedio.

Tabla 10.2

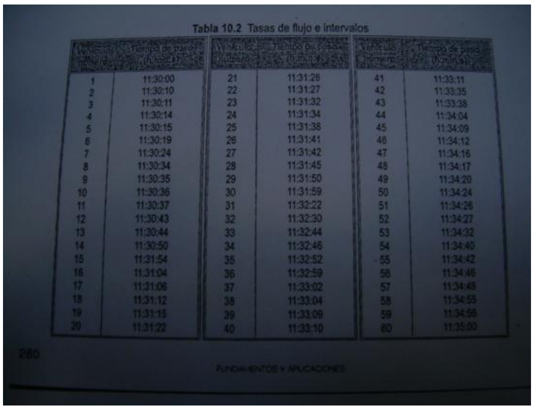


Tabla 10.2 Tasas de flujo e intervalos

Vehículo número	Tiempo de paso (h:min:s)	Vehículo número	Tiempo de paso (h:min:s)	Vehículo número	Tiempo de paso (h:min:s)
1	11:30:00	21	11:31:26	41	11:33:11
2	11:30:10	22	11:31:27	42	11:33:35
3	11:30:11	23	11:31:32	43	11:33:38
4	11:30:14	24	11:31:34	44	11:34:04
5	11:30:15	25	11:31:38	45	11:34:09
6	11:30:19	26	11:31:41	46	11:34:12
7	11:30:24	27	11:31:42	47	11:34:16
8	11:30:34	28	11:31:45	48	11:34:17
9	11:30:35	29	11:31:50	49	11:34:20
10	11:30:36	30	11:31:59	50	11:34:24
11	11:30:37	31	11:32:22	51	11:34:26
12	11:30:43	32	11:32:30	52	11:34:27
13	11:30:44	33	11:32:44	53	11:34:32
14	11:30:50	34	11:32:46	54	11:34:40
15	11:31:54	35	11:32:52	55	11:34:42
16	11:31:04	36	11:32:59	56	11:34:46
17	11:31:06	37	11:33:02	57	11:34:49
18	11:31:12	38	11:33:04	58	11:34:55
19	11:31:15	39	11:33:09	59	11:34:56
20	11:31:22	40	11:33:10	60	11:35:00

280

FUNDAMENTOS Y APLICACIONES

Tasa de flujo: q

Según la tabla 10.2 se aforaron 60 vehículos N durante 5 minutos T por lo que de acuerdo con la ecuación 10.1 se tiene.

q = N/T = 60veh/5min (60min/1hor)

=720veh/hor

Intervalo promedio (h):

Con base en la tabla 10.2, se elabora la tabla 10.3 que muestra los intervalos simples ente pares de vehículos consecutivos.

Tabla 10.3 Intervalos simples entre pares de vehículos consecutivos.

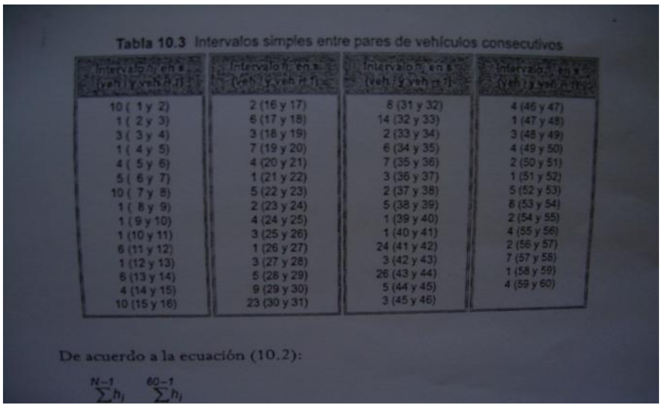


Tabla 10.3 Intervalos simples entre pares de vehículos consecutivos

Intervalo h_i en s (veh i y veh i+1)	Intervalo h_i en s (veh i y veh i+1)	Intervalo h_i en s (veh i y veh i+1)	Intervalo h_i en s (veh i y veh i+1)
10 (1 y 2)	2 (16 y 17)	8 (31 y 32)	4 (46 y 47)
1 (2 y 3)	6 (17 y 18)	14 (32 y 33)	1 (47 y 48)
3 (3 y 4)	3 (18 y 19)	2 (33 y 34)	3 (48 y 49)
1 (4 y 5)	7 (19 y 20)	6 (34 y 35)	4 (49 y 50)
4 (5 y 6)	4 (20 y 21)	7 (35 y 36)	2 (50 y 51)
5 (6 y 7)	1 (21 y 22)	3 (36 y 37)	1 (51 y 52)
10 (7 y 8)	5 (22 y 23)	2 (37 y 38)	5 (52 y 53)
1 (8 y 9)	2 (23 y 24)	5 (38 y 39)	8 (53 y 54)
1 (9 y 10)	4 (24 y 25)	1 (39 y 40)	2 (54 y 55)
1 (10 y 11)	3 (25 y 26)	1 (40 y 41)	4 (55 y 56)
6 (11 y 12)	1 (26 y 27)	24 (41 y 42)	2 (56 y 57)
1 (12 y 13)	3 (27 y 28)	3 (42 y 43)	7 (57 y 58)
6 (13 y 14)	5 (28 y 29)	26 (43 y 44)	1 (58 y 59)
4 (14 y 15)	9 (29 y 30)	5 (44 y 45)	4 (59 y 60)
10 (15 y 16)	23 (30 y 31)	3 (45 y 46)	

De acuerdo a la ecuación (10.2):

$\sum\limits^{N-1} h_i \quad \sum\limits^{60-1} h_i$

De acuerdo a la ecuación (10.2):

$$h = \frac{\overset{N-1}{\sum} h_i}{\underset{N-1}{i=1}} = \frac{\overset{60-1}{\sum} h_i}{\underset{60-1}{i=1}}$$

$$= \frac{10+1+3+4.....+1+4}{59}$$

$$= \frac{300\ s}{} = 5.08\ seg/veh$$

59 veh

El intervalo promedio también se puede calcular utilizando la ecuación (10.3), así;

$h = 1 / q \quad = \quad 1 / 720 \text{ veh/h} \quad (3600 \text{ seg} / 1 \text{ hor})$

$\quad = \quad 5.00 \text{ s/veh}$

Interpretación grafica de los intervalos:

En la figura 10.3 aparecen los diversos intervalos simples para cada par de vehículos consecutivos, lo mismo que el intervalo promedio. Las partes sombreadas por debajo de la línea del intervalo promedio indican que varios vehículos circulan a intervalos pequeños, formando grupos que reflejan concentraciones vehiculares que mueven a lo largo del tiempo en forma de ondas.

Figura 10.3 Intervalos simples entre pares de vehículos consecutivos me intervalo promedio.

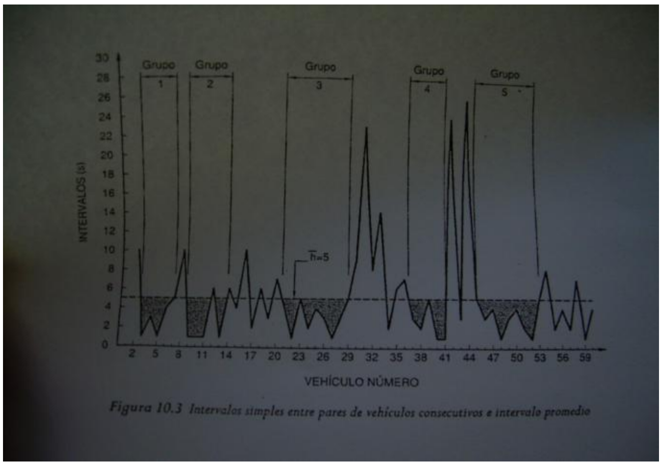


Figura 10.3 Intervalos simples entre pares de vehículos consecutivos e intervalo promedio

Variables relacionadas con la velocidad:

Las variables del flujo vehicular relacionadas con la velocidad son la velocidad de punto, la velocidad instantánea, la velocidad de marcha temporal, la velocidad media espacial, la velocidad de recorrido.

Variables relacionadas con la densidad:

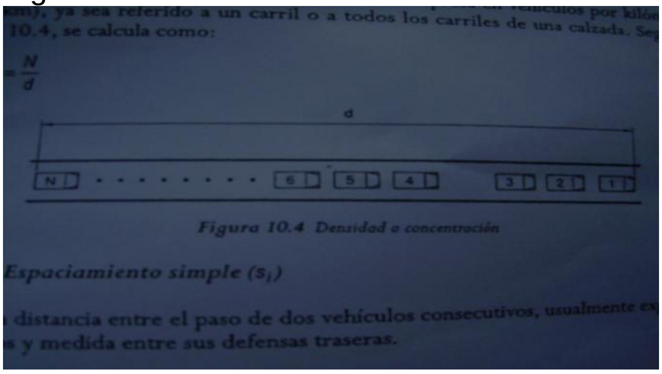
Las variables del flujo vehicular relacionadas con la densidad son la densidad o concentración, el espaciamiento simple entre vehículos consecutivos y el espaciamiento promedio entre varios vehículos.

Densidad o concentración (k):

Es el numero N de vehículos que ocupan una longitud especifica, d, de una vialidad en un momento dado. Generalmente se expresa en vehículos por kilómetros, ya sea referido a un carril o a todos los carriles de una calzada. Según la figura10.4, se calcula como:

$K = N/d$

Figura 10.4



Espaciamiento simple (s_i):

Es la distancia entre el paso de dos vehículos consecutivos, usualmente expresada en metros y medida entre sus defensas traseras.

Espaciamiento promedio (s):

Es el promedio de todos los espaciamientos simples, S_i, existentes entre los diversos vehículos que circulan por una vialidad. Por tratarse de un promedio se expresa en metros por vehículos y se calcula de acuerdo a la figura 10.5, mediante la sig. expresión:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} S_i}{N-1}$$

Donde:

S: espaciamiento promedio (m/veh)

N: numero de vehículos (veh)

N-1: numero de espaciamientos (veh)

S: espaciamiento simple entre el vehículo

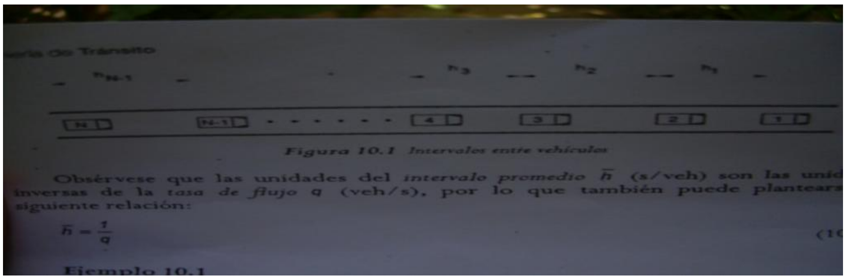


Figura 10.5 espaciamientos entre vehículos.

Obsérvese que las unidades del espaciamiento promedio S (m/veh) son las unidades inversas de la densidad K (veh/m), por lo que también puede plantearse la sig relación:

$S = 1/k$

Ejemplo 10.3

En un tramo de un kilómetro de una autopista de tres carriles por sentido, en un instante dado son observados 30 veh en el carril de la derecha, 20 veh en el carril central y 18 veh en el carril de la izquierda. Se desea calcular las densidades por carriles y por toda la calzada, y estimar el espaciamiento promedio.

Ejemplo 10.4

Este ejemplo permite entender las características microscópicas del flujo vehicular, mediante el análisis de las distribuciones de intervalos y espaciamientos, y sus relaciones con el flujo y la densidad. Para tal efecto, de utiliza el diagrama espacio- tiempo que es un grafico que describe la relación entre la ubicación de los vehículos en una corriente vehicular (espaciamientos), y el tiempo (intervalos) a medida que los vehículos avanzan a lo largo de un carril de una carretera o calle. En la Fig. 10.6 se muestran diagrama espacio – tiempo para cuatro vehículos donde el eje vertical representa la distancia y el eje horizontal el tiempo.

1. en el punto de observación A (k0+000) en el tiempo cero (t = 0)

Posición de los vehículos:

El vehículo 1 esta a 50m de A
El vehículo 2 esta a 25m de A
El vehículo 3 esta a 10m de A
El vehículo 4 esta a 0m de A

Espaciamiento y densidad:

S_1 = 50-25 = 25m
S_2 = 25-10 = 15m
S_3 = 10-0 = 10m

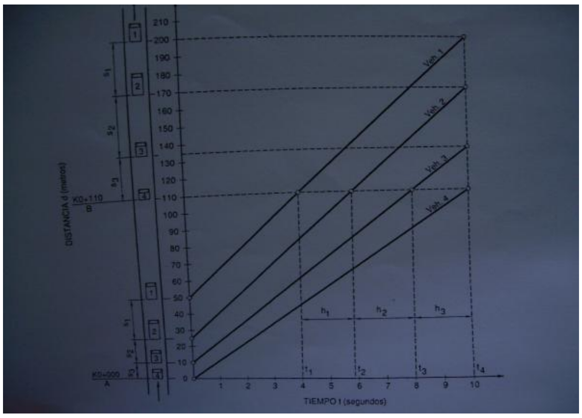


Fig. 10.6 Variables del flujo vehicular en el espacio y el tiempo.

El espaciamiento promedio, de acuerdo a la ecuación 10.5 es:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} S_i}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{4-1} S_i}{4-1} = \frac{25+15+10}{3} = 16.67 \text{ m/veh}$$

Por lo tanto la densidad media estimada es:

$$K = 1/S = 1 / 16.67 \text{ m/veh } (1\text{km} / 1000 \text{ m})$$

$= 60$ veh/km

En el punto de observación B (K0 + 110) en el tiempo 10 segundos (t = 10 s)
Posición de los vehículos:
El vehículo 1 esta a 200-100 = 90m de B
El vehículo 2 esta a 170-110 = 60m de B
El vehículo 3 esta a 135-110 = 25m de B
El vehículo 4 esta a 110-110 = 0m de B

Espaciamiento y densidad:

$S_1 = 200-170 = 30m$
$S_2 = 170-135 = 35m$
$S_3 = 135-110 = 25m$

$$S = \frac{30+35+25}{3} = 30m/veh$$

$$K = 1/s = 1/ 30m/veh\ (1km/1000m)$$
$$= 33.3\ veh/km$$

Velocidades:

La velocidad de un vehículo para un instante t, es la pendiente del diagrama espacio – tiempo para ese vehículo en ese instante t. para este ejemplo, los cuatro vehículos se mueven a velocidades constantes, ya que las pendientes de sus líneas asociadas son constantes. De otra manera, una línea curva, significa un cambio de pendiente, es decir un cambio de velocidad, que implica la aceleración.
Durante 10seg. Los vehículos recorren las sig. distancias.
El vehículo 1: $d_1 = 200-500= 150m$
El vehículo 2: $d_2 = 175-25 = 145m$
El vehículo 3: $d_3 = 135-10 = 125m$
El vehículo 4: $d_4 = 110-0 = 110m$

Y desarrollan las sig. velocidades:

$$V = \frac{d}{t}$$

El vehículo 1: $V_1 = 150m/10s\ (3.6) = 54.0$ km/h
El vehículo 2: $V_2 = 145m/10s\ (3.6) = 52.2$ km/h
El vehículo 3: $V_3 = 125m/10s\ (3.6) = 45.0$ km/h
El vehículo 4: $V_4 = 110m/10s\ (3.6) = 39.6$ km/h

Relación entre el flujo, la velocidad, la densidad, el intervalo y el espaciamiento.

El esquema de la figura 10.7 muestra un par de vehículos consecutivos a los cuales se les han asociado atributos tanto en el tiempo como en el espacio. Asi por ejemplo, el paso es el tiempo necesario para que el vehículo recorra su propia longitud, y la brecha o claro es el intervalo de tiempo libre disponible entre los dos vehículos, equivalente a la separacion entre ellos medida desde la defensa trasera del primer vehículo, dividida por la velocidad (la del segundo vehículo o la del grupo de vehículos si todos ellos viajan a la misma velocidad).

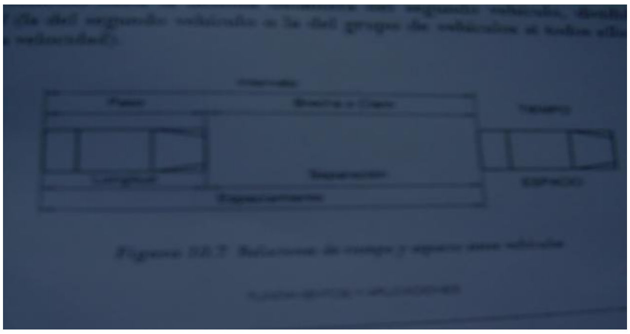


Figura 10.7 **relaciones de tiempo y espacios entre vehículos**.

Con base en la figura 10.7 y considerando un grupo vehicular que se mueve a velocidad aproximadamente constante, su intervalo promedio y espaciamiento promedio se pueden relacionar así:

Espacio = (velocidad) (tiempo)

$$S = V_e * h$$

Como se puede ver la expresión anterior, para un grupo de vehículos, el intervalo promedio y el espaciamiento promedio se relacionan a través de la velocidad media espacial.

También, como cualquier fluido continuo, el flujo de la corriente de transito puede definirse en términos de sus tres variables principales: la tasa de flujo q, la velocidad V y la densidad K.

Por las ecuaciones (10.3 y 10.6) se sabe que:

$h = 1/q \quad S = 1/K$

Reemplazando los dos valores anteriores de la ecuación 10.7 queda:

$1/K = V_e\, k\, (1/q)$

En donde:

$q = V_e\, k$

A la anterior correlación se le conoce como la ecuación fundamental del flujo vehicular, que en forma general se expresa como:

$$h = v\, k$$

Los resultados numéricos dados por la ecuación fundamental del flujo vehicular dependen del método de medición empleado para definir cada una de sus variables y de una forma de promediarlas ya que es conocido, existen mediciones de tipo puntual, mediciones sobre distancias o tramos específicos y mediciones dentro de todo un sistema.

Ejemplo 10.5

En un punto de una vialidad se contaron 105 veh durante 15 min. A lado y lado del punto anterior y en una distancia de 50 metros de longitud, se cronometraron los tiempos tomados en recorrerla por una muestra de 30 veh dado los siguientes valores:

7 vehículos emplearon 2.0 segundos
9 vehículos emplearon 2.5 segundos
8 vehículos emplearon 2.8 segundos
6 vehículos emplearon 3.0 segundos

Se quiere calcular la tasa de flujo, el intervalo promedio, la velocidad media espacial, la densidad y el espaciamiento promedio

Tasa de flujo: q

$$q = \frac{N}{T} = \frac{105\ veh}{15\ min}\left[\frac{60\ min}{1\ h}\right] = 420\ veh\ /\ h$$

Intervalo promedio: $\bar{h}$

$$\bar{h} = \frac{1}{q} = \frac{1}{420\ veh/h}\left[\frac{3{,}600\ seg}{1\ h}\right] = 8.57\ seg/\ veh$$

Velocidad media especial: $\bar{V}_e$

$$\bar{V}_e = \frac{d}{t} \quad \frac{d}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(f_i\, t_i)}{n}} \quad = \frac{d}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(f_i\, t_i)}{30}}$$

$$\bar{V}_e = \frac{50}{\dfrac{7(2.0) + 9(2.5\ s) + 8(2.8\ s) + 6(3.0\ s)}{30}}\left[\frac{1\ km}{1{,}000\ m}\right]\left[\frac{3{,}600\ seg}{1\ h}\right] =$$

$= 70.2\ km\ /h$

Densidad: K

Despejando k de la ecuación (10.8), se tiene:

$$K = \frac{q}{V_e} = \frac{420\ veh/h}{70.2\ km/h} = 5.98\ veh/km = 6\ veh/h$$

Espaciamiento promedio: $\bar{s}$

$$\bar{s} = \frac{1}{k} \quad \frac{1}{5.98\ veh/km}\left[\frac{1{,}000\ m}{1\ km}\right] = 167.22 m/veh$$

10.3 MODELOS BASICOS DEL FLUJO VEHICULAR

Los anteriores conceptos y relaciones fundamentales, constituyen el punto de partida para analizar aun mas las características del flujo vehicular a través de sus tres variables principales: flujo (q), velocidad (v), y densidad (k), relacionados mediante la ecuación fundamental del flujo vehicular, que como se demostró, su formula general es:

$q = vk$

Si se establece una relación entre cualquiera dos de las tres variables, la relación de estas dos con la tercera determina la ecuación $q = vk$. Naturalmente, las posibles combinaciones son velocidad-densidad (v, k); flujo – densidad (q, k) y velocidad – flujo (v, q). La variable más fácil de medir es el flujo q, siguiéndole en su orden la velocidad v y la densidad k. Por esta razón, usualmente se considera la densidad k como la variable dependiente. De todas maneras no existe una variable dependiente aislada, como tampoco existe cuando se representa un punto aislado en el espacio en función de sus tres coordenadas (x, y, z). Por lo tanto es de gran ayuda visualizar la ecuación fundamental del flujo vehicular, considerando la superficie que representan, como se grafica sobre ejes mutuamente perpendiculares en el espacio, tal como se ilustra en la figura 10.8.

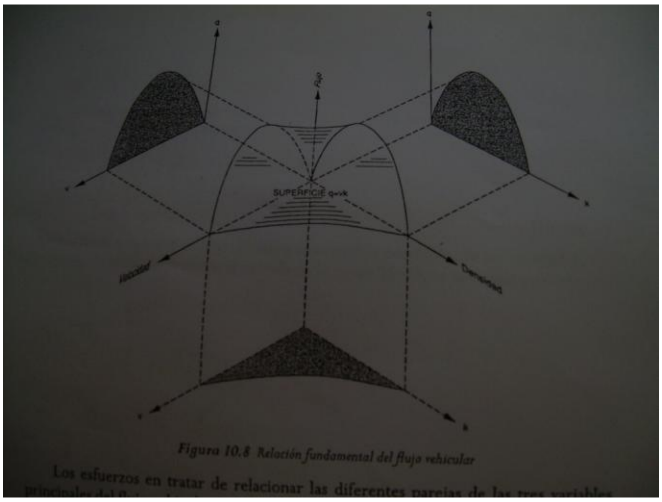
Uno de los objetivos fundamentales que busca el ingeniero de transito, es el de optimizar la operación de los sistemas de transito existentes y el de intervenir en el proyecto de sistemas viales futuros bastantes eficientes. De esta manera, la optimización en transito indica la selección de las mejores condiciones de operación, sujetos a las habilidades del sistema o recursos y a las restricciones del usuario y del medio ambiente.

Las medidas de efectividad, que entran en el objetivo definido como una función, inherentes en el criterios de optimización, serán aquellas que se puedan expresar como una función de las variables de transito presentes en el problema, llamadas variables de decisión. La tarea es, desde luego, elegir valores para las variables de decisión o de control que hagan óptima la función objetiva.

En los modelos determenisticos, los cuales otorgan un valor preciso para cada medida de efectividad definida al tomar ciertos valores específicos las variables de decisión, aplicadas a problemas de transito, se supone que las relaciones funcionales entre las variables de entrada y los parámetros que miden la efectividad son constantes. Esto es, solo ocurrirá un valor de la función objetivo para cualquier conjunto dado de valores de las variables de entrada.

En general los modelos del flujo vehicular se pueden clasificar en dos grandes clases: microscópico y macroscópico. Los modelos microscópicos consideran los espaciamientos y las velocidades individuales de los vehículos, con base de la teoría del seguimiento vehicular. Los modelos macroscópicos describen la operación vehicular en términos de sus variables de flujo, generalmente tomadas como promedio. A su ves, estos modelos de flujo vehicular son la base de la simulación microscópica y macroscópica.

Figura 10.8



Los esfuerzos en tratar de relacionar las diferentes parejas de las tres variables principales del flujo vehicular (q, k, v) se han basado en la toma de datos y ajuste simple a curvas o regresión, en métodos deductivos a partir de condiciones limites o de frontera y en analogías físicas. Estas tres formas de aproximarse al fenómeno del transito, han dado como resultado el desarrollo de los modelos macroscópicos, los cuales suponen un movimiento homogéneo o condiciones de flujo estacionario y describen las características generales o globales de la corriente vehicular. A continuación se analizan algunos de estos modelos.

Modelo Lineal.

B.D. Greenshields llevo a cabo una de las primeras investigaciones sobre el comportamiento del flujo vehicular, en la cual estudio la relación existente entre la velocidad y la densidad. Utilizando un conjunto de datos (k, v), para diferentes condiciones del transito, propuso una relación lineal entre la velocidad v y la densidad k, que mediante el ajuste por el método de los mínimos cuadros, según la figura 10.9, se llega al modelo lineal siguiente:

$$\bar{V}_e = V_l - \left(\frac{V_l}{K_c} \right) K$$

Donde:

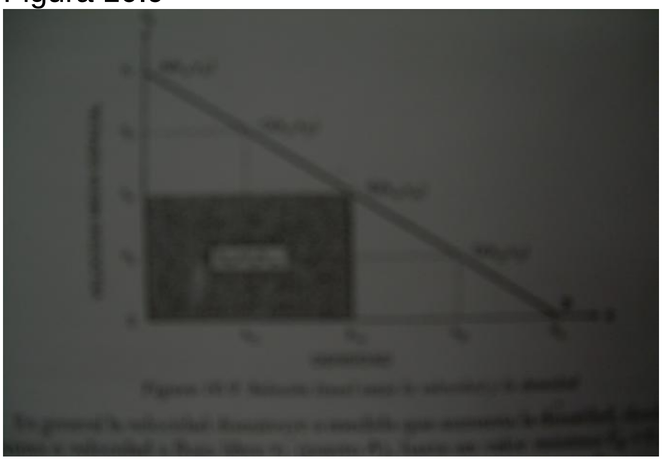
$\bar{V}_e$ = velocidad media espacial (km/h)

K = densidad (veh/km/carril)

V_l = velocidad media espacial a flujo libre (km/h).

K_c = densidad de congestionamiento (veh/km/carril)

Figura 10.9



En general la velocidad disminuye a medida que aumenta la densidad, desde un valor máximo o velocidad a flujo libre V_l (punto A), hasta un valor mínimo $v_e = 0$ (punto B) donde la densidad alcanza su máximo valor o de congestionamiento K_c.

Obviamente, en la práctica, la densidad nunca toma el valor cero, lo cual quiere decir que para que exista velocidad a flujo libre, debe presentarse al menos un vehículo sobre la calle o carretera circulando a esa velocidad, bajo esta condición, la densidad es muy baja, tal que el vehículo o los pocos vehículos circulan libremente a la velocidad máxima o limite establecida para la viabilidad. En el otro extremo, al presentarse4 congestionamiento, los vehículos están detenidos uno tras otro.

El flujo, q, se puede representar en el diagrama velocidad – densidad, a través de la ecuación fundamental $q = vk$, donde para cualquier punto sobre la recta de coordenadas (k, v), el producto vk es el área de un rectángulo cuyo lado horizontal es la densidad k y cuyo lado vertical es la velocidad v. asi, por ejemplo, para los puntos C y D, los flujos asociados a las densidades y las velocidades correspondientes son:

$$q_c = v_c k_c$$
$$q_D = v_D k_D$$

El rectángulo de área máxima corresponde al punto E, que esta ubicado exactamente de la mitad de la recta. Su área, sombreada en la figura 10.9, representa el flujo máximo, q_m, el cual se obtiene para los valores siguientes de v_m y k_m :

$$V_m = \frac{v_l}{2}$$
$$k_m = \frac{k_c}{2}$$

Por lo tanto; el flujo máximo es:

$$q_m = v_m k_m$$

o lo que es lo mismo:

$$q_m = \frac{v_l\, k_c}{4}$$

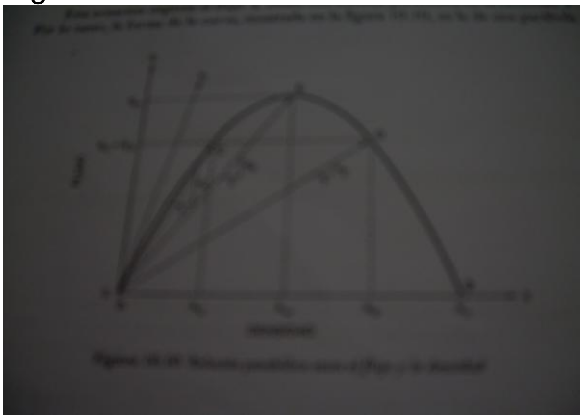
La relación entre el flujo q y la densidad k, se obtienen reemplazando la ecuación (10.11) en la ecuación fundamental (10.10), asi.

$$q = vk = \left(v_l - \left(\frac{v_l}{k} \right) k \right) k$$

$$q = v_l k - \left(\frac{v_l}{k_c} \right) k^2$$

Esta ecuación expresa al flujo q como una función parabólica de la densidad k. por lo tanto, la forma de la curva, mostrada en la figura 10.10, es la de una parábola.

Figura 10.10



Finalmente se puede observar que las regiones correspondientes a flujos de transito no congestionados están limitadas por:

$0 < q < q_m$
$V_m < V_e < V_l$
$0 < k < k_m$

Ejemplo 10.6

En un tramo de carretera, se realizo un estudio de aforos y velocidades en diferentes días para diversas condiciones de operación del transito. Esto permitió obtener pares de datos densidad - velocidad media espacial (k, V_e), que al realizar su ajuste lineal por el método de los mínimos cuadrados dio como velocidad a flujo libre el valor de 76 kilómetros por hora y como velocidad de congestionamiento el valor de 152 vehículos por kilómetro por carril. Se sabe además que la longitud promedio de los vehículos es de 5 metros. Se desea determinar: las ecuaciones del modelo lineal que caracterizan este flujo vehicular, al flujo máximo, el intervalo promedio a flujo máximo, el espacio promedio a flujo máximo, y la separación promedio entre vehículos a flujo máximo.

Ecuaciones del modelo lineal.

Los parámetros del modelo son dados como:

$V_l = 76$ km/h
$K_c = 152$ veh/km/carril

La relación velocidad- densidad, según la ecuación 10.11, es:

$$\bar{V}_e = V_l - \left(\frac{V_l}{K_c}\right) k = 76 - \left(\frac{76}{152}\right) k = 76 - 0.5\,k$$

La relación flujo – densidad según la ecuación 10.16 es:

$$q = V_l k - \left(\frac{V_l}{k_c}\right) k^2 = 76\,k - \left(\frac{76}{152}\right) k^2 = 76\,k - 0.5\,k^2$$

La relación velocidad – flujo, según la ecuación 10.18 es:

$$\bar{V}_e = \frac{V_l}{2} + \frac{\sqrt{V_l^2 - 4\left(\frac{V_l}{k_c}\right)q}}{2} = 76/2 + \frac{\sqrt{76^2 - 4\left(\frac{76}{152}\right)q}}{2} =$$

$38 \; \sqrt{\;} \; +$ 1,444 – 0.5

Por lo tanto, las ecuaciones del modelo son:

$\overline{V}_e = 76 - 0.5\ k$
$\underline{q} = 76\ k - 0.5\ k^2$
$V_e = 38 + 1444 - 0.5\ q$

Flujo máximo: q_m

De acuerdo con la ecuación 10.15, el flujo máximo es:

$$q_m = \frac{V_l k_c}{4} = \frac{76\ (152)}{4} = 2{,}888\ \text{veh/h/carril}$$

Intervalo promedio a flujo máximo: h_m

$$h_m = \frac{1}{q_m} \quad \frac{1}{2{,}888\ \text{veh/h/carril}} \quad \left(\frac{3600\ \text{s}}{1\ \text{h}}\right) = 1.25\ \text{s/ veh/carril}$$

Espaciamiento promedio a flujo máximo: s_m

$$\overline{S}_m = \frac{1}{k_m} = \frac{1}{\frac{k_c}{2}} = \frac{1}{\frac{152\ \text{veh/km/carril}}{2}} \quad \left(\frac{1000}{1\ \text{km}}\right) = 13.16\ \text{m/veh/carril}$$

Separación promedio entre vehículos a flujo máximo:

De acuerdo a la figura 10.7, presentada anteriormente, la separaron entre vehículos se mide entre la defensa trasera del primero y la defensa delantera del segundo. Esto es:

Separación = Espaciamiento – Longitud del segundo vehiculo

En condiciones de flujo máximo, en promedio se tiene:

Separación promedio = 13.16 - 5.00 = 8.16 m/veh

Ejemplo 10.7

Con este ejemplo se pretende dar una introducción al concepto de nivel de servicio que ofrece una viabilidad existente o que ofrecerá una vialidad en el proyecto, bajo condiciones de circulación continua. Para tal efecto, supóngase que se han definido seis características generales de operación en función de la densidad de congestionamiento, así:

Condiciones de flujo libre: $0 < k_l < 0.05\ k_c$
Condiciones de flujo estable: $0.05\ k_c < k_2 < 0.15\ k_c$

Condiciones de flujo aun estable: $0.15\ k_c < k_3 < 0.30\ k_c$
Condiciones de flujo casi inestable: $0.30\ k_c < k_4 < 0.40\ k_c$
Condiciones de flujo inestable: $0.40\ k_c < k_5 < 0.60\ k_c$
Condiciones de flujo $0.60\ k_c < k_6 < 1.00\ k_c$

Además, se sabe que el flujo vehicular se ajusta a ala siguiente relación lineal entre la velocidad y la densidad.

$\bar{V}_e = 74 – 0.62\ k$

Donde:

$\bar{V}_e$ = velocidad media espacial (km/h)
K = densidad (veh/km/carril)

Se quiere las relaciones de flujo a capacidad que limitan las diversas condiciones de operación, y determinar la calidad del servicio ofrecido a una demanda vehicular de 1,600 veh/h que circula bajo condiciones no congestionadas.

Relaciones de flujo a capacidad: $q/\ q_m$

La densidad de congestionamiento se presenta para la velocidad media espacial igual a cero. Por lo tanto.

$0 = 74 – 0.62\ k_c$

De donde:

$K_c = 119$ veh/km/carril

Los valores máximos de las densidades que limitan cada una de las condiciones de operación dadas son:

$K_1 = 0.05\ k_c = 0.05\ (119) = 6$ veh/km/carril
$K_2 = 0.15\ k_c = 0.15\ (119) = 18$ veh/km/carril
$K_2 = 0.30\ k_c = 0.30\ (119) = 36$ veh/km/carril
$K_4 = 0.40\ k_c = 0.40\ (119) = 48$ veh/km/carril
$K_5 = 0.60\ k_c = 0.60\ (119) = 71$ veh/km/carril
$K_6 = 1.00\ k_c = 1.00\ (119) = 119$ veh/km/carril

Las velocidades correspondientes a estas densidades, utilizando la ecuación dada, son:

$V_{e1} = 74 – 0.62\ k_1 = 74 – 0.62\ (6) = 70.3$ km/h
$V_{e2} = 74 – 0.62\ k_2 = 74 – 0.62\ (18) = 62.8$ km/h
$V_{e3} = 74 – 0.62\ k_3 = 74 – 0.62\ (36) = 51.7$ km/h
$V_{e4} = 74 – 0.62\ k_4 = 74 – 0.62\ (48) = 44.2$ km/h
$V_{e5} = 74 – 0.62\ k_5 = 74 – 0.62\ (71) = 30.0$ km/h
$V_{e6} = 74 – 0.62\ k_6 = 74 – 0.62\ (119) = 0.0$ km/h

Los flujos correspondientes a las densidades y velocidades anteriores son:

$q_1 = V_{e1}k_1 = 70.3\ (6) = 422$ veh/h/carril
$q_2 = V_{e2}k_2 = 62.8\ (18) = 1130$ veh/h/carril
$q_3 = V_{e3}k_3 = 51.7\ (36) = 1861$ veh/h/carril
$q_4 = V_{e4}k_4 = 44.2\ (48) = 2122$ veh/h/carril
$q_5 = V_{e5}k_5 = 30.0\ (71) = 2130$ veh/h/carril
$q_6 = V_{e6}k_6 = 0.0\ (119) = 0$ veh/h/carril

La velocidad a flujo libre se presenta, teóricamente, para la densidad igual a cero. Por lo que en la ecuación inicial dada se obtiene:

$V_l = 74 - 0.62\ (k) = 74 - 0.62\ (0) = 74$ km/h

La capacidad o flujo máximo según la ecuación 10.15 es:

$$q_m = \frac{V_l k_c}{4} = \frac{74(119)}{4} = 2{,}202 \text{ veh/h/carril}$$

De esta manera, las relaciones de flujo a capacidad que limitan la seis condiciones de operación son:

$$\frac{q_1}{q_m} = \frac{422}{2{,}202} = 0.19$$

$$\frac{q_2}{q_m} = \frac{1130}{2{,}202} = 0.51$$

$$\frac{q_3}{q_m} = \frac{1861}{2{,}202} = 0.85$$

$$\frac{q_4}{q_m} = \frac{2122}{2{,}202} = 0.96$$

$$\frac{q_5}{q_m} = \frac{2130}{2{,}202} = 0.96$$

$$\frac{q_6}{q_m} = \frac{0}{2{,}202} = 0.00$$

Utilizando el diagrama fundamental que relaciona la velocidad con el flujo, en la figura 10.13, se ilustran las diversas condiciones de operación.

Calidad de servicios para una demanda de 1600 veh/h/carril

Para esta demanda la relación de flujo a capacidad es:

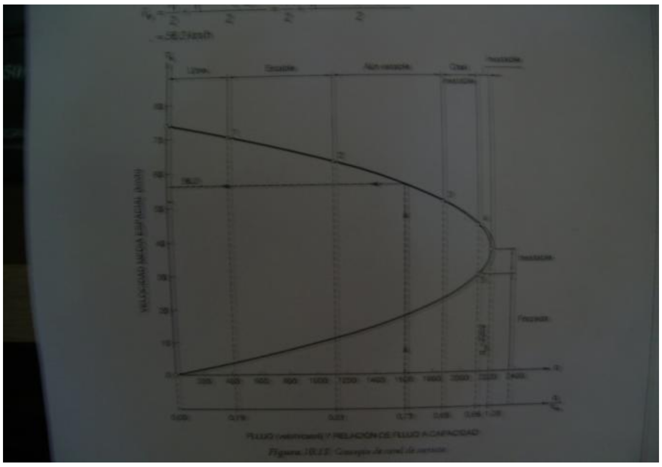
$$q = 1600 = 0.73$$

q_m 2202

Obsérvese en la figura 10.13 que para una relación de flujo a capacidad es de 0.73, el servicio ofrecido por esta vialidad es aun estable, que de acuerdo con la ecuación (10.18) para condiciones de operación no congestionadas, le corresponde una velocidad media espacial de:

$$V_e = \frac{V_l + \sqrt{V_l^2 - 4\left(\frac{V_l}{k_c}\right)q}}{2} = \frac{74 + \sqrt{74^2 - 4\left(\frac{74}{119}\right)1600}}{2} = 56.3 \text{ km/h}$$

Figura 10.13



Modelos no lineales.

Otras investigaciones, relacionadas con el comportamiento del flujo vehicular, han llegado a la conclusión de que no siempre existe una buena correlación lineal entre la velocidad y la densidad. En este caso se logra un mejor ajuste mediante otros modelos, los cuales toman más en cuenta la curvatura de los datos. A continuación se mencionan los modelos macroscópicos más clásicos con sus respectivas ecuaciones que relacionan el flujo, la velocidad y la densidad.

$$V_e = V_m \ln\left(\frac{k_c}{k}\right)$$

$$q = V_m k \ln\left(\frac{k_c}{k}\right)$$

Este modelo da buenos ajustes, especialmente en flujos congestionados, ya que no funciona muy bien a bajas densidades como puede observarse en la ecuación (10.19), debido a que cuando k tiene a cero la velocidad se hace tan grande que puede a llagar a se infinita, que seria de la condición a flujo libre. Por lo tanto, los parámetros del modelo son la velocidad a flujo máximo v_m y la densidad de congestionamiento k_c, los cuales deben ser especificados, pues a partir de ellos se determinan otras características del flujo vehicular en estudio.

Para condiciones de flujo máximo:

$V_e = V_m$ y $K = K_m$

Reemplazando la velocidad y la densidad a flujo máximo en la ecuación 10.19, se tiene:

$$V_m = V_m \ln\left(\frac{k_c}{k_m}\right)$$

$$\ln\left(\frac{k_c}{k_m}\right) = 1$$

De donde:

$$K_m = \frac{k_c}{e}$$

$e = 2.718282$

Y por lo tanto el flujo máximo q_m o capacidad es:

$$q_m = V_m k_m = \frac{V_m k_c}{e}$$

Ejemplo 10.8

Para un flujo de transito congestionado, se determino como velocidad a flujo máximo el valor de 28 km/h y como la densidad de congestionamiento el valor de 142 veh/km/carril. Se desea plantear las ecuaciones del modelo logarítmico, calcular la velocidad y el flujo para una densidad de 80 veh/km/carril, y calcular la capacidad.

Ecuaciones del modelo.
Para la información dada se tiene:

$$V_m = V_m \ln\left(\frac{k_c}{k}\right) = 28 \ln\left(\frac{142}{k}\right)$$

$$q = V_m\, k \ln\left(\frac{k_c}{k}\right) = 28\, k \ln\left(\frac{142}{k}\right)$$

Velocidad y flujo para una densidad de 80 veh/km/carril.

Reemplazando el valor de esta densidad en las expresiones anteriores, se obtiene.

$$V_e = 28 \ln\left(\frac{142}{80}\right) = 16.1 \text{ km/h}$$

$$q = 28\,(80)\,\ln\left(\frac{142}{80}\right) = 1285 \text{ km/h}$$

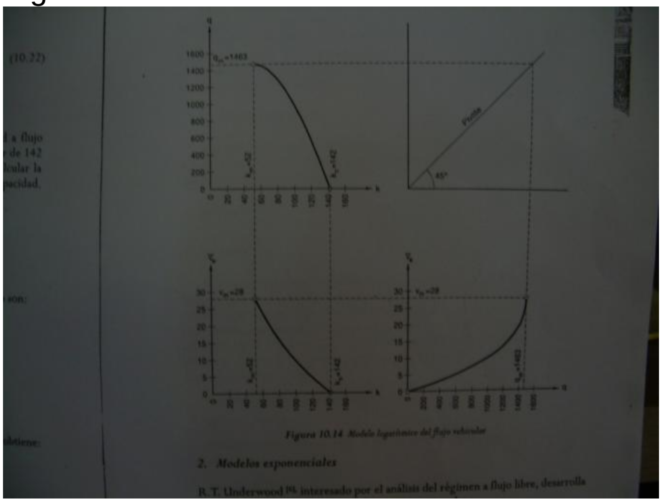
Capacidad

Utilizando la ecuación (10.22), la capacidad es:

$$q_m = \frac{V_m\,k_c}{e} = \frac{28\,(142)}{2.718282} = 1463 \text{ veh/h/ carril}$$

En la figura 10.14 se muestra el diagrama del flujo vehicular correspondiente a este ejemplo, según el modelo logaritmico.

Figura 10.14



Modelos exponenciales.

R. T. Underwood interesado por el análisis del régimen a flujo libre, desarrolla el siguiente modelo exponencial para flujos no congestionados

$$\bar{V}_e = V_l e^{-k/km}$$

$$q = V_l k e^{-k/km}$$

Como puede verse en la ecuación 10.23, el modelo no representa la velocidad igual a cero para las altas densidades, que seria la condición de congestionamiento. Por esta razón los parámetros del modelo son la densidad a flujo máximo k_m y la velocidad a flujo libre v_l.

Para condiciones de flujo máximo (k_m, v_m), la ecuación (10.23) se convierte en:

$$V_m = v_l e^{-km/km}$$

De donde:

$$V_m = v_l$$

$\overline{}$
e

El valor del flujo máximo o capacidad es:

$$q_m = v_m k_m = \frac{v_l k_m}{e}$$

Ejemplo 10.9

En un estudio de flujos no congestionado en una vialidad, se determino como velocidad a flujo libre el valor de 80 km/h y como densidad a capacidad el valor de 60 veh/km/carril. Se quiere plantear las ecuaciones del modelo exponencial y calcular la capacidad.

Ecuaciones del modelo:

Reemplazando la velocidad a flujo libre y a la densidad a capacidad en las ecuaciones 10.23 y 10.24, para este flujo vehicular se tienen las siguientes expresiones:

$$\overline{V}_e = V_{le}^{-k/km} = 80e^{-k/60}$$

$$q = V_l k e^{-k/km} = 80e^{-k/60}$$

Capacidad

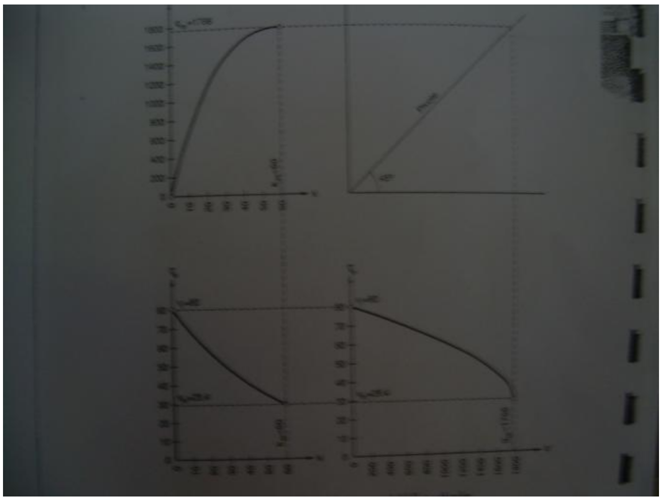
De acuerdo a la ecuación 10.26, la capacidad es:

$$q_m = \frac{V_l k_m}{e} = \frac{80\ (60)}{2.718282} = 1766 \text{ veh/h/carril}$$

En la figura 10.15 se presenta el diagrama fundamental correspondiente al modelo exponencial, según su ejemplo.
Por otra parte, dentro de los modelos exponenciales, como lo menciona A. D Mary, un grupo de investigación de la universidad de Northqestern concluye que la gran mayoría de las curvas velocidad – densidad tiene la forma de una s o de campana. Tal grupo propone la siguiente ecuación de tipo exponencial de segundo orden.

$$\overline{V}_e = Vl_e^{-0.5(k/km)2}$$

Figura 10.15



Otros modelos

L. A. Pipes y P.K. Munjal obtuvieron una familia de modelos de la forma:

$$\overline{V}_e = V_l \left[1 \left(\frac{k}{k_c} \right)^n \right]$$

Donde n es un número real mayor que cero. Nótese que cuando n=1, la expresión se transforma en el modelo lineal de Greenshields.
D.R. Drew propone el siguiente modelo parabólico.

$$\overline{V}_e = V_l \left[\left(1 - \frac{k}{k_c} \right) \right]^n$$

Descripción probabilística del flujo vehicular

Si todos los vehículos que circulan por una determinada vialidad se encuentran espaciados uniformemente, será fácil determinar su flujo y los diferentes niveles de congestionamiento. Sin embargo, en muchos casos los vehículos no viajan a intervalos uniformes, si no que lo hacen en grupos con un intervalo promedio para cada uno, reflejando concentraciones vehiculares que se mueven en forma de ondas a través del tiempo.

Más aun, en situaciones más cercanas a la realidad, los vehículos circulan en forma completamente dispersa. Todos aquellos enfoques que tratan de tener en cuenta la heterogeneidad del flujo, suponen que el patrón de llegadas o de paso de los vehículos corresponde, en cierta manera, a un proceso aleatorio. En muchos problemas de ingeniería de transito es de gran utilidad describir el flujo vehicular, detal manera que conserve algunas de sus características discretas, considerando de esta forma los aspectos probabilísticos de su comportamiento.

Para seleccionar la distribución de probabilidad que mas fielmente represente un flujo vehicular especifico, es necesario que este cumpla tres condiciones: primero, cada conductor sitúa su vehiculo independientemente que los demás, excepto cuando su espaciamiento es muy pequeño; segundo, para cualquier flujo, el numero de vehículos que pasa por un punto en un intervalo de tiempo dado es independiente del numero de vehículos que pasan por otro punto durante el mismo intervalo; tercero, el numero de vehículos que pasan por un punto dado en un intervalo de tiempo es independiente del numero de vehículos que pasan por el mismo punto durante otro intervalo.

Los supuestos anteriores son los que utiliza la distribución de poisson, la caul tiene aplicación para flujos vehiculares bajos y medios.
Suponiendo que la distribución de legada de los vehículos a un punto es de tipo poisson, entonces la probabilidad de x llegadas en cualquier intervalo de tiempo t viene dada por la siguiente expresión:

$$P(x) = P(X = x) = \frac{m^x e^{-m}}{x!} \quad \text{para } x = 0,1,2\ldots..$$

Donde:

X = variable aleatoria que representa el numero de llegadas de vehículos a un punto
P(x) = probabilidad que lleguen exactamente x vehículos al punto durante un intervalo de tiempo t
M = numero medio de vehículos que se espera leguen durante el intervalo de tiempo t
E= base de los logaritmos neperianos = 2:718282

El valor de m en función de la tasa de flujo de llegadas q es:

$$m = qt$$

Por lo tanto, la distribución de poisson también se puede escribir como:

$$P(x) = P(X = x) = \frac{q^{t\ \ 0}\ e^{-qt}}{x!}$$

Ahora, la probabilidad que no lleguen vehículos durante el intervalo de tiempo t, según la expresión anterior es:

$$P(o) = P(X = 0) = \frac{q^{t\ \ 0}\ e^{-qt}}{0!} = e^{-qt} \text{ para } t > 0$$

Si no llegan vehículos durante el intervalo de tiempo t, entonces existe un intervalo de tiempo h entre vehículos de al menos t. esto quiere decir que el intervalo h es igual o mayor que t. esta característica define la distribución de intervalos de tiempo entre vehículos, la cual se expresa como:

$$P(h > t) = e^{-qt} \text{ para } t > 0$$

La anterior expresión indica que la distribución de intervalos entre vehículos es una variable continua de tipo exponencial negativa.

La distribución discreta de llegadas, ecuación 10.32, y la distribución continua de intervalos, ecuación 10.33, tienen varias aplicaciones: control de intersecciones, calculo de longitudes de almacenamiento en carriles de vuelta izquierda, estimación de filas y demoras del transito, disponibilidad de claros o separaciones entre vehículos de una corriente secundaria, estudio de maniobras de convergencia de corrientes vehiculares, predicción de llegadas de vehículos a puntos de interés, etc.

Por el complemento de la ecuación 10.33, la probabilidad de un intervalo h sea que t es:

$P(h < t) = 1 - P(h > t)$
$P(h < t) = 1 - e^{-qt}$ Para $t > 0$

Una manera fácil de calcular las probabilidades, según la distribución de poisson, se logra utilizando la siguiente propiedad.

$$P(x+1) = \frac{m}{X+1} p(x)$$

Que también puede escribirse como:

$$P(x) = \frac{m}{x} p(x-1)$$

En la tabla 10.4 y en figura 10.16, se ilustra la distribución de llegadas de vehículos según poisson para varios valores de m, dada por la ecuación 10.30. Obsérvese que

Para valores pequeños de m la distribución es altamente sesgada, en tanto que a medida que m aumenta la distribución se hace más simétrica
El cálculo de las probabilidades se realiza utilizando las ecuaciones (10.30) y (10.35) que para el caso de *m = 1* se tiene:

10.35), que para el caso de m

$$p(0)=P(X=0)=\frac{m^x e^{-m}}{x!}=\frac{1^0 e^{-1}}{0!}=0.368$$

$$p(1)=\frac{m}{x+1}p(x)=\frac{1}{1}p(0)=\frac{1}{1}(0.368)=0.368$$

$$p(2)=\frac{1}{2}p(1)=\frac{1}{2}(0.368)=0.184$$

$$p(3)=\frac{1}{3}p(2)=\frac{1}{3}(0.184)=0.061$$

$$p(4)=\frac{1}{4}p(3)=\frac{1}{4}(0.061)=0.015$$

$$p(5)=\frac{1}{5}p(4)=\frac{1}{5}(0.015)=0.003$$

$$p(6)=\frac{1}{6}p(5)=\frac{1}{6}(0.003)=0.001$$

$$p(7)=\frac{1}{7}p(6)=\frac{1}{7}(0.001)=0.000$$

Como se demostró anteriormente, la distribución de intervalos entre vehículos ($h \geq t$) dada por la ecuación (10.33) es una función continua, ya que el valor de *t* es de cero hasta infinito. Lo mismo sucede con su complemento ($h < t$), ecuación (10.34), conocida como probabilidad acumulativa *menor que*. La figura 10.17 muestra estas dos distribuciones para el caso en el cual *q = 2*, donde:

$$P(h \geq t)=e^{-qt}=e^{-2t}$$
$$p(h < t)=1-e^{-qt}=1-e^{-2t}$$

Así, para varios valores de t, se tienen las siguientes probabilidades:

Para $t=0$:

$$P(h \geq 0)=e^{-2(0)}=1.000$$
$$P(h < 0)=1-e^{-2(0)}=0.000$$

Para $t=1$:

$$P(h \geq 1)=e^{-2(1)}=0.135$$
$$P(h < 1)=1-e^{-2(1)}=0.865$$

Para $t=2$:

$$P(h \geq 2)=e^{-2(2)}=0.018$$
$$P(h < 2)=1-e^{-2(2)}=0.982$$

Para $t=3$:

$$P(h \geq 3)=e^{-2(3)}=0.002$$
$$P(h < 3)=1-e^{-2(3)}=0.998$$

Otra de las aplicaciones de las funciones continuas anterioes, consiste endeterminar la probabilidad de tener u intervalo h entre vehiculos dentro de un intervalo de t_1 a t_2, siendo $t_1 < t_2$, lo cualse puede plantear de la siguiente manera

$$P(t_1 < h < t_2) = P(h < t_2) - P(h < t_1)$$
$$= (1 - e^{-qt_2}) - (1 - e^{-qt_1})$$
$$P(t_1 < h < t_2) = e^{-qt_1} - e^{-qt_2} \quad para \quad t_1, t_2 \geq 0 \qquad (10.37$$

También, es importante tener en cuenta otras propiedades de la distribució acumulada de Poisson, las cuales se expresan como sigue:

1. Probabilidad que lleguen *N o menos* vehículos:

$$P(X \leq N) = p(0) + p(1) + p(2) + \ldots + p(N)$$
$$P(X \leq N) = \sum_{x=0}^{N} p(x) = \sum_{x=0}^{N} \left(\frac{m^x e^{-m}}{x!} \right) \qquad (10.38$$

2. Probabilidad que lleguen *más de* N vehículos:

$$P(X > N) = 1 - P(X \leq N)$$
$$P(X > N) = 1 - \sum_{x=0}^{N} \left(\frac{m^x e^{-m}}{x!} \right) \qquad (10.39$$

3. Probabilidad que lleguen *menos de* N vehículos:

$$P(X < N) = p(0) + p(1) + p(2) + \ldots + p(N-1) = P(X < N-1)$$
$$P(X < N) = \sum_{x=0}^{N-1} \left(\frac{m^x e^{-m}}{x!} \right) \qquad (10.40$$

4. Probabilidad que lleguen *N o más* vehículos:

$$P(X \geq N) = 1 - P(X < N)$$
$$P(X \geq N) = 1 - \sum_{x=0}^{N-1} \left(\frac{m^x e^{-m}}{x!} \right) \qquad (10.4$$

Ejemplo 10.10 sobre unos de los accesos de una determinada interseccion sin semaforo, en promedio 5 vehiculos por hora dan vuelta a izquierda. Se desea determinar la probabilidad una hora especifica: exactamente 5 den vuelta; exactamente 3 den vuelta; a lo maximo 3 den vueltas; mas de 3 den vueltas; menos de 3 den vuelta y por lo menos 3 den vuelta.

En este caso el valos de m es de:

m= 5 vueltas durate una hora

Suponiendo que loa vehiculos llegan a la interseccion y dan vuelta siguiendo la distribucion de posicion, según la ecuacion (10.30):

$$p(5)=P(X=5)=\frac{5^5e^{-5}}{5!}=0.175$$

Exactamente 3 den vuelta: ecuación (10.30)

$$p(3)=P(X=3)=\frac{5^3e^{-5}}{3!}=0.140$$

A lo máximo 3 den vuelta: ecuación (10.38)

$$P(X\leq 3)=\sum_{x=0}^{3}\left(\frac{5^xe^{-5}}{x!}\right)$$

$$P(X\leq 3)=\frac{5^0e^{-5}}{0!}+\frac{5^1e^{-5}}{1!}+\frac{5^2e^{-5}}{2!}+\frac{5^3e^{-5}}{3!}=0.265$$

Más de 3 den vuelta: ecuación (10.39)

$$P(X>3)=1-\sum_{x=0}^{3}\left(\frac{5^xe^{-5}}{x!}\right)$$

$$P(X>3)=1-0.265=0.735$$

Menos de 3 den vuelta: ecuación (10.40)

$$P(X<3)=\sum_{x=0}^{3-1}\left(\frac{5^xe^{-5}}{x!}\right)=0.125$$

Por lo menos de 3 den vuelta: ecuación (10.41)

$$P(X\geq 3)=1-\sum_{x=0}^{2}\left(\frac{5^xe^{-5}}{x!}\right)=0.875$$

Una carretera, donde se supone que los vehículos están distribuidos en forma casual según la distribución de Poisson, tiene un flujo medio de 342 vehículos por hora. Se desea conocer la probabilidad de tener un intervalo entre vehículos menor de 8 segundo y determinar el porcentaje delos intervalos entre vehículos que estén entre 10 y 20 segundos

Intervalo menor de 8 segundos: $P(h < 8\,s)$

La tasa media de flujo q es:

$q = 342\ veh/h$

El intervalo de tiempo t de referencia es de 8 segundos, esto es:

$t = 8\ s/intervalo$

El número medio m de vehículos que se espera lleguen durante los 8 segundos, de acuerdo a la ecuación (10.31), es:

$$m = qt = (342\ veh/h)(8\ s/intervalo)\left(\frac{1\ h}{3{,}600\ s}\right)$$
$$= 0.76\ veh/intervalo$$

Por lo tanto la probabilidad de tener un intervalo entre vehículos menor de 8 segundos, utilizando la ecuación (10.34), es:

$$P(h < 8\,s) = 1 - e^{-qt} = 1 - e^{-0.76} = 0.532$$

Porcentaje de intervalos entre 10 y 20 segundos: $P(10\,s < h < 20\,s)$

Los valores de t_1, t_2, qt_1 y qt_2 son:

$t_1 = 10\ s/intervalo \quad t_2 = 20\ s/intervalo$

$$qt_1 = 342(10)\left(\frac{1}{3{,}600}\right) = 0.95$$

$$qt_2 = 342(20)\left(\frac{1}{3{,}600}\right) = 1.90$$

Luego, de acuerdo a la ecuación (10.37):

$$P(10\,s < h < 20\,s) = e^{-qt_1} - e^{-qt_2} = e^{-0.95} - e^{-1.90} = 0.237$$

Lo que indica que el 23.7% de todos los intervalos entre los vehículos están entre 10y 20 segundos.

Ejemplo 10.12

Una de las aplicaciones de la distribución acumulativa de Poisson es el proyecto de carriles de vuelta hacia a la izquierda. Un criterio utilizado consiste en proyectar los carriles de tal manera que el número de vehículos que deseen voltear hacia a la izquierda exceden la capacidad de almacenamiento del carril únicamente el 5% del tiempo durante un ciclo determinado. Para 160 vehículos que den vuelta hacia a la izquierda en un ciclo de 80 segundos, calcular la longitud necesaria de almacenamiento del carril especial de vuelta hacia la izquierda.

Sea N capacidad de almacenamiento o longitud requerida del carril en número de vehículos. Exceder la capacidad de almacenamiento del carril en el 5% del tiempo, significa que la probabilidad de llegada a dicho carril, durante un ciclo, de mas de N vehículos es del 0.05. esto, según la ecuación (10.39), se expresa así:

$$P(X > N) = 1 - \sum_{x=0}^{N}\left(\frac{m^x e^{-m}}{x!}\right) = 0.05$$

Para la cual, $m = qt$, donde:

$t = 80\ s/ciclo \quad q = 160\ veh/h$

$$m = qt = (160\ veh/h)(80\ s/ciclo)\left(\frac{1\,h}{3{,}600\,s}\right)$$

$$\simeq 3.56\ veh/ciclo$$

Por lo tanto:

$$P(X > N) = 1 - \sum_{x=0}^{N}\left(\frac{3.56^x e^{-3.56}}{x!}\right)$$

$$= 0.05$$

Que es lo mismo que:

$$\sum_{x=0}^{N}\left(\frac{3.56^x e^{-3.56}}{x!}\right) = 0.95$$

Esta relación puede ser calculada para N, acumulando términos en el miembro de la izquierda hasta que se satisfaga la ecuación para sucesivos valores de N, tal como lo muestra la tabla 10.5. En esta tabla se observa que el valor de 0.95 esta entre N=6 y N=7. Tomando este último valor, se concluye que la capacidad o longitud del carril debe ser tal que permita almacenar por lo menos 7 vehículos.

Si se considera de 5.00 metros la longitud promedio de los vehículos, con una separación entre ellos de 0.80 metros cuando esperan dar vuelta hacia a la izquierda, la longitud del carril debe ser de al menos:

7(5.00)+6(0.80)=39.80m

Ejemplo 10.13

Los vehículos que circulan por un enlace de entrada a una autopista, necesitan mínimo un claro o brecha de 4 segundos en la corriente principal para incorporarse. Si el flujo medio sobre la autopista es de 1,600 vehículos por hora, distribuidos de acuerdo ala distribución de Poisson, determinar el numero de claros o brecha disponibles. Se trata de calcular la probabilidad de tener un intervalo h en la corriente principal de al menos 4 segundos. Por lo que:

$t = 4\ s/intervalo \quad q = 1{,}600\ veh/h$

$$qt = (1{,}600\ veh/h)(4\ s/intervalo)\left(\frac{1\,h}{3{,}600\,s}\right)$$

$$= 1.78\ veh/intervalo$$

Ahora, de acuerdo a la ecuación (10.33), la probabilidad es:

$$P(h \geq 4\,s) = e^{-qt} = e^{-1.78} = 0.169$$

Por lo tanto, el número de claros o brechas disponibles en una hora es:

$$(1{,}600 - 1)(0.169) = 270$$

En un punto de una vialidad durante 5 minutos se contaron 21 vehículos, los cuales circulaban con las siguientes velocidades instantáneas:

a. 8 vehículos con 60 km/h

b. 9 vehículos con 70 km/h

c. 4 vehículos con 80 km/ h

Calcule: 1) la Tasa de flujo. 2) El intervalo promedio. 3) La velocidad media espacial. 4) La densidad. 5) El espaciamiento promedio.

Con cronómetros sincronizados a la misma hora en las secciones transversales A-A y B-B de la figura 10.18 se muestrearon 5 vehículos consecutivos, los cuales pasaron por las respectivas secciones a las horas mostradas en la tabla 10.6 1) Calcular V_t, V_e, y S_t. 2) Estimar la tasa de flujo. 3) ¿Cuántos vehículos por Kilómetros caracterizan esta corriente vehicular? 4) ¿Cómo es el nivel de operación de esta corriente vehicular?

En una sección de 100 metros de longitud, en un instante dado, se encuentran distribuidos 4 vehículos como se ilustra en la figura 10.19, viajando a las velocidades constantes que allí se indican. Estime la densidad y la tasa de flujo.

A lo largo de un carril de una autopsia un grupo de 12 vehículos consecutivos se encuentran distribuidos longitudinalmente viajando a las velocidades e intervalos entre ellos, como lo muestra la tabla 10.7. Determinar: 1) La tasa media de flujo. 2) Las velocidades media temporal y espacial. 3) ¿Cuántos kilómetros de autopsia ocupa esta columna de vehículos?

Un tramo de carretera tiene una velocidad a flujo libre de 90 km/h y una densidad de congestionamiento de 160 veh/Km. Utilizando el modelo lineal, determine: 1) La capacidad. 2) Las densidades y velocidades correspondientes a un flujo de demanda de 800 veh/h.

La relación entre la velocidad y la densidad de una corriente vehicular está dad por la siguiente expresión:

$V_e = 52 – 0.32\ K$

Donde Ve es la velocidad media espacial en Km/h y K es la velocidad en Veh/km. Determine: 1) El flujo máximo. 2) El intervalo promedio a flujo máximo. 3) El espaciamiento promedio a congestión.

La figura 10.20 ilustra cuatro tipos de vehículos. 1) Para la situación mostrada, calcule: A – La velocidad media espacial. B – La velocidad media temporal. C- La densidad. 2) Se realizó un conteo en la sección transversal AA durante 30 minutos, arrojando los siguientes vehículos: 30 veces del tipo A, 10 veces del tipo B, 40 veces del tipo C y 20 veces del tipo D. En estas condiciones, determine: a – La velocidad media temporal. b – La velocidad media espacial. c – La densidad. 3) Si este flujo se ajusta al modelo lineal, según: $q = 100v – 0.8\ V^{2,}$ para q en veh/h y VV en km/h, ¿cuál es la capacidad?

La relación entre la tasa de flujo q (autos/h/carril) y la velocidad V (Km/h) de una corriente vehicular de comportamiento lineal es: $q = 72v – 0.86v^2$ 1) Calcule la capacidad. 2) Determine la relación volumen a capacidad para una densidad de 20 autos/km/carril. 3) Para una tasa de flujo de 500 autos/h/carril en condiciones de flujo estable, realice una estimación de la velocidad del tránsito mixto (autos + autobuses + camiones), si la corriente vehicular posee el 8% de vehículos pesados (autobuses + camiones). Use un equivalente de pesados igual a 2.0.

El modelo lineal de una corriente vehicular arroja la siguiente expresión: $q = -\ 0.6k^2 + 70k$

Donde K esta dado en veh/km/carril y q en veh/h/carril. 1) Calcule la capacidad del carril. 2) Para una tasa de flujo de 500 veh/h/carril, calcule las velocidades y comente acerca de la operación vehicular de este flujo. 3) Determine las tres ecuaciones del flujo vehicular y dibújelas.

Una carretera rural, bajo diferentes condiciones de tránsito, presenta los datos de velocidad media espacial V^e (km/h) y densidad K (veh/km/carril) dados en la tabla 10.8.1) Determine la capacidad de esta carretera, utilice regresión lineal entre la velocidad y la densidad. 2) ¿Cómo es la correlación? 3) Dibuje el diagrama fundamental correspondiente.

Para los datos de la tabla 10.8: 1) Realice el ajuste logarítmico, planteando las ecuaciones del flujo vehicular. 2) ¿Cómo es la correlación? 3) Dibuje el diafragma fundamental. 4) Determine la capacidad.

Una corriente de tránsito en condiciones de flujo no congestionado, presenta los datos de velocidad media espacial Ve (km7h) y densidad K (veh7km7carril) dados en la tabla 10.9. 1) Realice la regresión exponencial entre la velocidad y la densidad, determinando las ecuaciones del flujo vehicular. 2) ¿Cómo es la correlación? 3) Dibuje el diafragma fundamental. 4) Calcule la capacidad.

Durante una hora típica en un punto de una vialidad pasan, cada 15 minutos, 40, 50,20 y 10 vehículos, respectivamente. Para un intervalo de tiempo de 15 minutos, cual es la probabilidad de llegada al punto de: 1) Exactamente 10, 20, 40 y 50 vehículos, respectivamente. 2) Mas de 30 vehículos. 3) A lo máximo 20 vehículos. Suponga que los vehículos llegan según la distribución de Poisson.

Un punto de una carretera tiene un flujo medio de 150 vehículos cada 30 minutos. Calcule: 1) La probabilidad de llegada al punto de exactamente 4 vehículos durante un intervalo de 20 segundos. 2) La probabilidad de tener un intervalo entre vehículos, menor que el intervalo promedio.

La figura 10.21 muestra esquemáticamente un enlace de convergencia hacia una autopista. Los vehículos del enlace necesitan disponer, al menos, de un intervalo de 5 segundos en la corriente principal para poder incorporarse sin problema. ¿Cuántos vehículos por hora sobre el enlace deberán “verdaderamente” ceder el paso y, en última instancia, hasta “parar”?

La figura 10.22 muestra cuatro tipos de vehículos, A, B, C y D, distribuidos en una distancia de un kilómetro antes del acceso a una intersección. 1) Para la situación dad en el esquema, calcule la velocidad media temporal, la velocidad media espacial y la densidad. 2) Al realizar un aforo en la sección transversal 1 – 1 durante 30 minutos se contaron los siguientes vehículos: 20 del tipo A, 40 del tipo B, 10 del tipo C y 30 del tipo D. En estas condiciones, calcule la velocidad media temporal, la velocidad media espacial y la densidad. 3) Si un vehículo de la calle secundaria, después de efectuar e “alto”, necesita por lo menos 6 segundos para cruzar la calle principal, calcule la probabilidad que tiene de realizar el cruce suponiendo que dispone de suficiente visibilidad para hacerlo.