Katedra aplikované matematiky

ŠKOMAM 2014

PETR VODSTRČIL

21. 1. 2014

KDYŽ ZLOMKY ŘETÍZKUJÍ

1

DEFINICE

Řetězovým zlomkem rozumíme výraz

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} \qquad \left(\overset{\text{ozn.}}{=} [a_0; a_1, a_2, \ldots] \right),$$

kde $\boxed{a_0 \in \mathbb{R}, \quad a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{R}^+.}$

Řetězový zlomek může být ukončený nebo neukončený.

HODNOTA ŘETĚZOVÉHO ZLOMKU

Je-li zlomek ukončený, je vše jasné:

$$[1; 35, 6, 2] = 1 + \cfrac{1}{35 + \cfrac{1}{6 + \frac{1}{2}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{35 + \cfrac{1}{\frac{13}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{35 + \frac{2}{13}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{457}{13}} = 1 + \frac{13}{457} = \frac{470}{457}.$$

Je-li zlomek neukončený, klademe

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots] = \lim_{n\to\infty} \underbrace{[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]}_{\text{víme, co to je}}.$$

Není přitom vůbec jisté, zda uvedená limita existuje. Této otázce se budeme věnovat později.

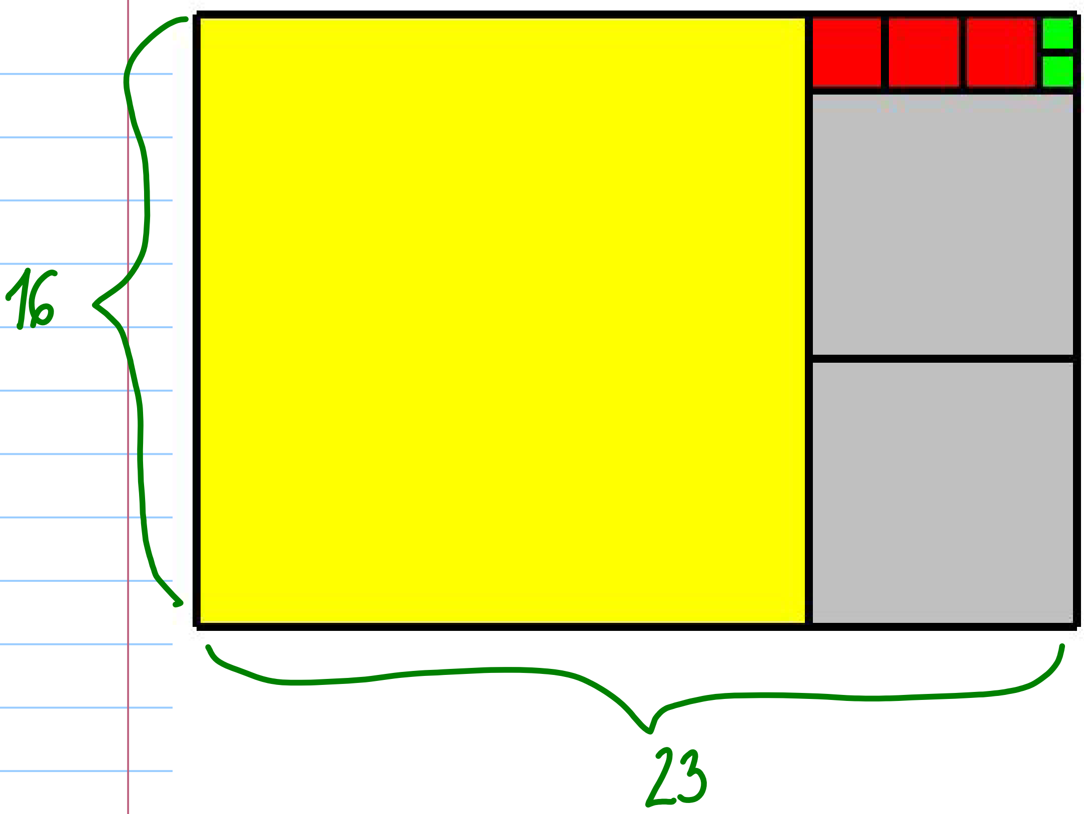
GEOMETRICKÁ INTERPRETACE UKONČENÉHO ŘETĚZOVÉHO ZLOMKU

Uvažujme např. zlomek $\frac{23}{16}$.

Tento zlomek lze vyjádřit pomocí řetězového zlomku $[1; 2, 3, 2]$, tzn.

$$\boxed{\frac{23}{16} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}.}$$

[ověřte]



[Čísla 1, 2, 3, 2 z řetězového zlomku odpovídají počtu čtverců (viz obrázek).]

SBLÍŽENÉ ZLOMKY

Uvažujme řetězový zlomek $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ (ukončený nebo neukončený).

Zkoumejme tyto výrazy:

[POZOR, toto není celá část.]

- $[a_0] = a_0 = \dfrac{a_0}{1}$.

  Položme-li $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, můžeme psát

  $$\boxed{[a_0] = \frac{p_0}{q_0}.}$$

- $[a_0; a_1] = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$.

Položíme-li $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$,

bude platit $\boxed{[a_0; a_1] = \frac{p_1}{q_1}}$.

- $$[a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} =$$

$$= a_0 + \frac{1}{\frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} =$$

$$= \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2 (a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_2 \cdot a_1 + 1} =$$

$$= \frac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0}.$$

Položíme-li $\boxed{\begin{aligned} p_2 &= a_2 p_1 + p_0, \\ q_2 &= a_2 q_1 + q_0, \end{aligned}}$

obdržíme $[a_0; a_1, a_2] = \frac{p_2}{q_2}$.

$\vdots$

Výše uvedené úvahy lze zobecnit.

Definujme p_n a q_n rekurentně:

$p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$,

(*)
$$\boxed{\begin{aligned} p_n &= a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned}}$$

[$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$]

VĚTA

Uvažujme řetězový zlomek $[a_0; a_1, a_2, \ldots\ldots]$. [ukončený nebo neukončený]

Pak pro každé $k \in \{0, 1, 2, \ldots\ldots\}$ [konečná nebo nekonečná množina]

platí
$$\boxed{[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}.}$$
(X)

DŮKAZ INDUKCÍ

Pro $k \in \{0, 1, 2\}$ tvrzení platí. [viz výše]

Předpokládejme, že vztah (X) platí pro $k = n$ [$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$]

a dokážeme ho pro $k = n+1$.

Přímým výpočtem zjistíme, že platí následující.

$$[a_0; a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, \overbrace{a_n + \frac{1}{a_{n+1}}}^{\tilde{a}_n}]$$

$$\overset{\text{indukční předpoklad}}{=} \frac{\tilde{p}_n}{\tilde{q}_n} \overset{\text{rek. vztahy } \circledast}{=} \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{\underbrace{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)}_{\tilde{a}_n} \cdot q_{n-1} + q_{n-2}} =$$

$$= \frac{(a_n a_{n+1} + 1) p_{n-1} + a_{n+1} p_{n-2}}{(a_n a_{n+1} + 1) q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}} =$$

$$= \frac{a_{n+1} \cdot \overbrace{(a_n p_{n-1} + p_{n-2})}^{p_n} + p_{n-1}}{a_{n+1} \cdot \underbrace{(a_n q_{n-1} + q_{n-2})}_{q_n} + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ TVRZENÍ $\square$

DEFINICE

Zlomkům $\frac{p_0}{q_0}$ $(= [a_0])$, $\frac{p_1}{q_1}$ $(= [a_0; a_1])$,

$\frac{p_2}{q_2}$ $(= [a_0; a_1, a_2])$, ...

říkáme sblížené zlomky řetězového zlomku

$[a_0; a_1, a_2, \dots\dots]$.

VÝPOČET SBLÍŽENÝCH ZLOMKŮ

Pro výpočet sblížených zlomků budeme využívat rekurentní vztahy $\circledast$.
Je výhodné položit

$$\boxed{p_{-1}=1,\ q_{-1}=0.}$$

Pak totiž rekurentní vztahy $\circledast$ platí i pro $n=1$.

PŘÍKLAD

Je dán řetězový zlomek

$$1+\cfrac{1}{35+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2}}}. \qquad \left(=[1;35,6,2]\right)$$

[víme, že hodnota je $\frac{470}{457}$]

Určete posloupnost jeho sblížených zlomků.

ŘEŠENÍ

Použijeme následující výpočetní schéma. (PROMYSLETE SI)

		1	35	6	2
p	1	1	36	217 [1+36·6]	470 [36+217·2]
q	0	1	35	211 [1+35·6]	457 [35+211·2]

Sblížené zlomky tedy jsou $\frac{1}{1}, \frac{36}{35}, \frac{217}{211}, \frac{470}{457}$. □

VLASTNOSTI SBLIŽENÝCH ZLOMKŮ

VĚTA

Pro každé dva sousední sblížené zlomky platí

$$\boxed{\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}.}$$

DŮKAZ

Stačí ukázat, že platí

$$\boxed{p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n.}$$

$n=0$:

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1)\cdot 1 - a_0 \cdot a_1 = 1 = (-1)^0.$$

Dále platí ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$\left(p_{n+2} q_{n+1} - p_{n+1} q_{n+2}\right) \overset{\text{rekur. vztahy}}{=}$$

$$= \left(\cancel{a_{n+2} p_{n+1}} + p_n\right)\cdot q_{n+1} - p_{n+1}\left(\cancel{a_{n+2} q_{n+1}} + q_n\right) =$$

$$= -\left(p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1}\right) \implies \text{TVRZENÍ} \qquad \square$$

DŮSLEDEK

$$\underbrace{\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots\cdots}_{\text{sblížené zlomky sudého řádu}} < \underbrace{\cdots\cdots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}}_{\text{sblížené zlomky lichého řádu}}.$$

DŮKAZ

Tvrzení plyne z předchozí věty a z toho, že

$$q_n q_{n+1} < q_{n+1} q_{n+2}. \qquad [n \in \mathbb{N} \cup \{0\}]$$

Platí totiž $q_{n+2} = \underbrace{a_{n+2}\, q_{n+1}}_{>0} + q_n > q_n$. □

Vraťme se nyní zpět k problému hodnoty neukončeného řetězového zlomku.

Víme, že

$$[a_0; a_1, a_2, \dots\dots] = \lim_{n\to\infty} \underbrace{[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]}_{\frac{p_n}{q_n}}.$$

Z předchozích úvah je jasné, že limita existuje [a je konečná] právě když platí

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} q_n q_{n+1} = +\infty.}$$

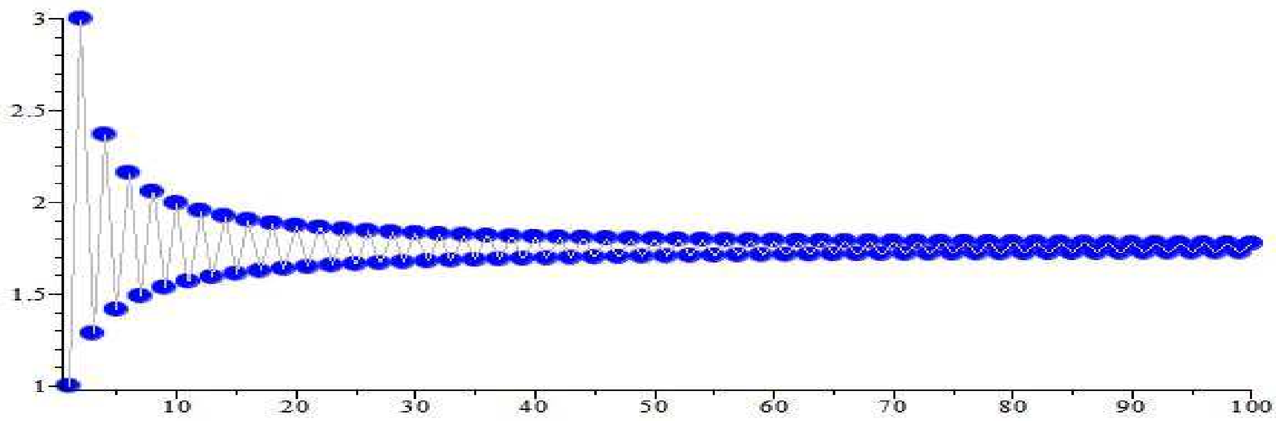
Lze ukázat, že to nastane právě tehdy, když

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty .}$$

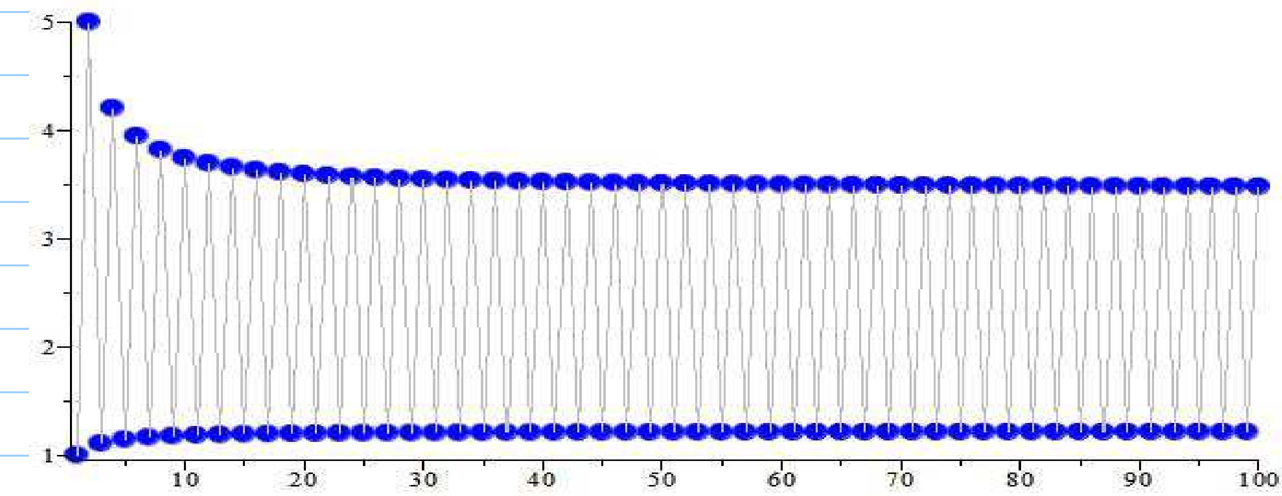
Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, pak $\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n}$ neexistuje.

OBRÁZKY

Graf sblížených zlomků (konvergentního) řetězového zlomku $[0; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\dots]$:



Graf sblížených zlomků (divergentního) řetězového zlomku $[0; 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots\dots]$:



ŘETĚZOVÉ ZLOMKY S CELOČÍSELNÝMI PRVKY

Od tohoto okamžiku budeme uvažovat pouze řetězové zlomky s celočíselnými prvky, tzn. budeme předpokládat, že

$$\boxed{a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{N}.}$$

Pak každý (nekonečný) řetězový zlomek je konvergentní, neboť (q_n) je rostoucí posloupnost přirozených čísel $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q_n q_{n+1} = +\infty$.

[Každý řetězový zlomek (s celočíselnými prvky) tedy představuje jisté reálné číslo.]

PŘÍKLAD

Určete hodnotu řetězového zlomku

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}} \qquad \left(= [1; 2, 3, 2, 3, \ldots]\right)$$

ŘEŠENÍ

Označme $\alpha = [2; 3, 2, 3, 2, 3, \ldots]$.
Pak $x = [1; \alpha]$.

Dále zřejmě $\boxed{\alpha} = [2; 3, \alpha] = 2 + \dfrac{1}{3 + \frac{1}{\alpha}} =$

$$= 2 + \frac{\alpha}{3\alpha + 1} \boxed{= \frac{7\alpha + 2}{3\alpha + 1}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 3\alpha^2 + \alpha = 7\alpha + 2 \Longrightarrow \alpha = \underset{[\alpha > 0]}{} \frac{3 + \sqrt{15}}{3}.$$

Odtud $x = [1; \alpha] = 1 + \dfrac{1}{\alpha} =$

$$= 1 + \frac{3}{\sqrt{15} + 3} = 1 + \frac{\sqrt{15} - 3}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{15} - 1}{2}.}$$

□

Zajímavá je však opačná otázka:

Lze každé reálné číslo vyjádřit řetězovým zlomkem?

Odpověď na tuto otázku je kladná.

Uvažujme tedy libovolné $x \in \mathbb{R}$.

Definujme $\boxed{a_0 = \lfloor x \rfloor.}$ $(\in \mathbb{Z})$ [dolní celá část]

Pak $a_0 \leq x < a_0 + 1$.

(13)

řetěz. zlomek

Je-li $a_0 = x$, pak $x = [a_0]$. → KONEC

Je-li $a_0 < x$, pak položme
$$r_1 = \frac{1}{x - a_0} > 1.$$

Pak ale platí $x = [a_0; r_1] = a_0 + \frac{1}{r_1}$.

Dále položme $\boxed{a_1 = \lfloor r_1 \rfloor.}$ $(\in \mathbb{N})$

Je-li $a_1 = r_1$, pak $x = [a_0; a_1]$. → KONEC

V opačném případě položme
$$r_2 = \frac{1}{r_1 - a_1} > 1.$$

Pak platí $x = [a_0; a_1, r_2]$.

Dále položme $\boxed{a_2 = \lfloor r_2 \rfloor.}$

Je-li $a_2 = r_2$, pak $x = [a_0; a_1, a_2]$. → KONEC

V opačném případě položme
$$r_3 = \frac{1}{r_2 - a_2} > 1.$$

Pak ale $x = [a_0; a_1, a_2, r_3]$.

$\vdots$

[Zajímavý je tedy pouze případ, kdy algoritmus neskončí po konečném počtu kroků.]

Dokážeme, že pak

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots].$$

Vzhledem k výše popsané konstrukci víme, že

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, r_{n+1}] =$$

$$= \frac{\tilde{p}_{n+1}}{\tilde{q}_{n+1}} = \frac{r_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1}}{r_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}}.$$

[p_n, q_n jsou dané rekurzí ⊛]

Odtud

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{r_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1}}{r_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| =$$

$$= \left| \frac{\cancel{r_{n+1} p_n q_n} + p_{n-1} q_n - \cancel{r_{n+1} p_n q_n} - p_n q_{n-1}}{(r_{n+1} q_n + q_{n-1}) \cdot q_n} \right| =$$

$$= \frac{|p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}|}{(r_{n+1} q_n + q_{n-1}) \cdot q_n} = \frac{1}{(r_{n+1} q_n + q_{n-1}) \cdot q_n} <$$

$$\overset{[r_{n+1} > 1]}{<} \frac{1}{(q_n + q_{n-1}) \cdot q_n} \overset{[q_{n-1} > 0]}{<} \frac{1}{q_n^2}.$$

Máme tedy

$$\boxed{\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}.}$$

Protože $q_n \to +\infty$, dostáváme $\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n} = x$, což jsme chtěli. □

PŘÍKLAD

Číslo $\sqrt{7}$ vyjádřete řetězovým zlomkem.

ŘEŠENÍ

$$a_0 = \lfloor \sqrt{7} \rfloor = \boxed{2}$$

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{7} - a_0} = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} = \frac{\sqrt{7} + 2}{3}$$

$$a_1 = \lfloor r_1 \rfloor = \boxed{1}$$

$$r_2 = \frac{1}{r_1 - a_1} = \frac{3}{\sqrt{7} - 1} = \frac{\sqrt{7} + 1}{2}$$

$$a_2 = \lfloor r_2 \rfloor = \boxed{1}$$

$$r_3 = \frac{1}{r_2 - a_2} = \frac{2}{\sqrt{7} - 1} = \frac{\sqrt{7} + 1}{3}$$

$$a_3 = \lfloor r_3 \rfloor = \boxed{1}$$

$$r_4 = \frac{1}{r_3 - a_3} = \frac{3}{\sqrt{7} - 2} = \sqrt{7} + 2$$

$$a_4 = \lfloor r_4 \rfloor = \boxed{4}$$

$$r_5 = \frac{1}{r_4 - a_4} = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} = \frac{\sqrt{7} + 2}{3}$$

periodicita

$$a_5 = a_1, \quad a_6 = a_2, \quad \ldots\ldots$$

Proto platí

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}}}}}}$$

$\square$

POZNÁMKA

Je-li číslo x racionální, pak je řetězový zlomek (získaný výše uvedeným algoritmem) ukončený. V případě iracionálního x je neukončený.

PŘÍKLAD $\left(x = \frac{470}{457}\right)$

$470 : 457 = 1$ zbytek 13

$457 : 13 = 35$ zbytek 2

$13 : 2 = 6$ zbytek 1

$2 : 1 = 2$ zbytek 0 → KONEC

$$\frac{470}{457} = 1 + \cfrac{1}{35 + \cfrac{1}{6 + \frac{1}{2}}}.$$

$\square$

JEDNOZNAČNOST VYJÁDŘENÍ

Domluvme se, že u ukončených řetězových zlomků $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ $(n \in \mathbb{N})$

budeme předpokládat $a_n \neq 1$. To si můžeme (poslední prvek řet. zlomku) dovolit, neboť

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1] = [a_0; a_1, \dots, \underbrace{a_{n-1}+1}_{\neq 1}].$$

Jestliže dodržíme výše uvedenou úmluvu, lze každé reálné číslo vyjádřit řetězovým zlomkem právě jedním způsobem. (PROMYSLETE SI)

PERIODICKÉ ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

Periodickým řetězovým zlomkem rozumíme řetězový zlomek tvaru

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \underbrace{b_1, b_2, \dots, b_n}_{\text{perioda}}, \underbrace{b_1, b_2, \dots, b_n}, \dots] =$$

ozn.

$$= [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \overline{b_1, b_2, \dots, b_n}].$$

PŘÍKLAD

Víme, že

$$\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}].$$ (periodický řetězový zlomek)

PROBLÉM

Jak vypadá množina

$$P = \{ x \in \mathbb{R} : \text{řetězový zlomek čísla } x \text{ je periodický} \} \; ?$$

Např. již víme, že $\sqrt{7} \in P$.

VĚTA

$$P = \left\{ \frac{a+\sqrt{b}}{c} : \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z},\ c \in \mathbb{Z},\ c \neq 0, \\ b \in \mathbb{N},\ \sqrt{b} \notin \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

DŮKAZ – náznak

Jedna inkluze je snadná. $[\subseteq]$

Podívejte se na příklad, ve kterém jsme hledali hodnotu periodického řetězového zlomku

$$[1; 2, 3, 2, 3, 2, 3, \ldots] = [1; \overline{2, 3}].$$

V jistý okamžik jsme se dostali ke kvadratické rovnici, jejíž řešení je tvaru $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$.

Tyto úvahy lze zobecnit na libovolný periodický řetězový zlomek.

Opačná inkluze $[\supseteq]$ je složitější.

NĚKTERÉ APLIKACE ŘETĚZOVÝCH ZLOMKŮ

- Hledání řešení rovnic

$$ax + by = c \qquad [a, b, c \in \mathbb{Z}]$$

v oboru celých čísel.

Př: $\boxed{470x + 457y = 1.}$ [víme, že $\frac{470}{457} = [1; 35, 6, 2]$]

	1	35	6	2
1	1	36	217	470
0	1	35	211	457

Platí: $470 \cdot 211 - 457 \cdot 217 = 1.$

[viz vlastnosti sblížených zlomků]

- Nalezení „dobrých" racionálních aproximací reálného čísla.

Př: $\sqrt{2} = [1; \overline{2}].$ (lze spočítat)

$$[1; 2, 2, 2] = \frac{17}{12}.$$

$$\left|\sqrt{2} - \frac{17}{12}\right| < \frac{1}{12^2}.$$

[nerovnost vyplývá z teorie]

velmi dobrá aproximace čísla $\sqrt{2}$

ZAJÍMAVOST NA ZÁVĚR

Lze ukázat, že platí

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, \ldots].$$

LITERATURA

[1] A. J. CHINČIN – Řetězové zlomky, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.

[2] PAVEL VÍT – Řetězové zlomky, Mladá fronta, Praha, 1982.